

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE DE JIJEL

FACULTE DES SCIENCES  
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre :

Série :

## MEMOIRE

Présenté pour obtenir le diplôme de

## MAGISTER

Spécialité : Physique

Option : Physique Mathématique

Par

**Amel Djaghri**



THEME

**Intégrale de Chemin et Modèle de Jaynes- Cummings**

**1- Cas non Stationnaire**

**2- L'oscillateur de Dirac**

Soutenant le 03/2006

### Devant le Jury:

Président :	A. Lecheheb	M.C	Univ. Mentouri (Constantine)
Rapporteur :	T. Boudjedaa	Prof:	Univ. Jijel
Examineurs :	L. Chetouani	Prof.	Univ. Mentouri (Constantine)
	Kh. Nouicer	Prof.	Univ. Jijel
	Z. Lehtihet	M.C.	Univ. Jijel

530.1/22

جامعة جيجل  
المكتبة المركزية  
TH-099

530.1/22



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE DE JIJEL

FACULTE DES SCIENCES  
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre :  
Série :

### MEMOIRE

Présenté pour obtenir le diplôme de

### MAGISTER

Spécialité : Physique

Option : Physique Mathématique

Par

**Amel Djaghri**

THEME

**Intégrale de Chemin et Modèle de Jaynés- Cummings**  
**1- Cas non Stationnaire**  
**2- L'oscillateur de Dirac**

Soutenant le 03/2006

#### Devant le Jury:

Président :	A. Lecheheb	M.C	Univ. Mentouri (Constantine)
Rapporteur :	T. Boudjedaa	Prof.	Univ. Jijel
Examineurs :	L. Chetouani	Prof.	Univ. Mentouri (Constantine)
	Kh. Nouicer	Prof.	Univ. Jijel
	Z. Lehtihet	M.C.	Univ. Jijel

## *Remerciements*

*Ce travail a fait l'objet d'une mémoire de Magister élaborée au Département de Physique, Faculté des sciences, Université de Jijel*

*Mes remerciements vont tout d'abord à Dieu tout puissant pour la volonté, la patience qu'il m'a donnée pour terminer ce mémoire.*

*Je tiens à remercier mon encadreur M. tahar Boujedaa, professeur à l'université de Jijel, pour m'avoir confié ce sujet et pour ses précieux conseils, sa compréhension et son soutien moral.*

*Mes vifs remerciements vont à M. A. Lecheheb maître de conférence à l'université de Constantine pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury.*

*Je remercie, également et sincèrement à M. Lyazid Chetouani professeur à l'université de Constantine et à M. Kh. Nouicer, professeur à l'université de Jijel, et Mlle. Z. Lehtihete maître de conférence à l'université de Jijel pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail en acceptant de le juger.*

*Je remercie, également tous les enseignants de la post-graduation de physique mathématique*

*Enfin, je remercie également tous les collègues de la promotion  
2003/2004*

*Amel*

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Outils Nécessaires</b>	<b>5</b>
2.0.1	Etats cohérents . . . . .	5
2.0.2	La représentation intégrale de chemin . . . . .	6
2.1	Modèle Jaynes-Cummings . . . . .	7
2.1.1	Introduction . . . . .	7
2.1.2	Les amplitudes de transition . . . . .	12
2.2	Oscillateur de Dirac . . . . .	15
2.2.1	Introduction . . . . .	15
2.2.2	Oscillateur de Dirac à une dimension . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Modèle de Jaynes-Cummings dépendent du temps</b>	<b>18</b>
3.0.3	Intégration sur les variables complexes . . . . .	19
3.0.4	Intégration sur le temps . . . . .	24
3.0.5	Facteur d'inversion des populations atomiques . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Oscillateur de Dirac via le modèle J-C</b>	<b>32</b>
4.1	Le propagateur dans la représentation globale . . . . .	32
4.1.1	Calcul de la partie temporelle du propagateur . . . . .	34
4.1.2	Calcul de la partie fermionique du propagateur . . . . .	36
4.1.3	Intégration sur les variables complexes . . . . .	38

## TABLE DES MATIÈRES

2

4.1.4	Fonctions d'onde et énergies . . . . .	43
4.2	Le propagateur dans la représentation locale . . . . .	45
4.2.1	La représentation intégrale de chemin . . . . .	45
4.2.2	Calcul de la partie temporelle du propagateur . . . . .	47
4.2.3	Calcul de la partie fermionique du propagateur . . . . .	48
4.2.4	Intégration sur les variables complexes . . . . .	52
4.2.5	Calcul de la fonction de Green . . . . .	53
5	Conclusion générale . . . . .	56

# Chapitre 1

## Introduction générale

Il existe en physique quantique un formalisme qui est devenu presque l'outil parfait de quantification pour les physiciens théoriciens. C'est le formalisme des intégrales de chemins de Feynman. Construit par l'auteur pour exprimer l'électrodynamique quantique en utilisant la notion de trajectoire, ce formalisme a eu un succès retentissant en théorie des champs puis en mécanique quantique non relativiste via les transformations spatio-temporelle de Dirac-Kleinert. Cependant, il a rencontré beaucoup de difficultés en mécanique quantique relativiste. Ces difficultés sont essentiellement reliées à la covariance qui exige un traitement unifié de l'espace - temps et à l'aspect discret de la dynamique du spin de la particule, grandeur physique incontournable de la mécanique quantique relativiste.

La première difficulté pourrait être évitée au moyen de la technique de reparamétrisation dite "technique du temps propre" laquelle a été très utilisée par Schwinger pour déduire directement et de manière explicite les corrections de l'électrodynamique quantique. La deuxième difficulté, qui est le spin, n'a pas encore trouvé sa solution définitive dans le cadre du formalisme des intégrales de chemins. Fondamentalement, le spin est une grandeur quantique qui n'a pas d'analogue classique. Ceci pose alors un vrai problème de formulation.

En fait, il a eu plusieurs tentatives de la formulation des intégrales de chemins pour le spin, citons par exemple, le modèle de la toupie, le modèle des bosons (fermions) de Schwinger et le modèle des Grassmann de Fadkin-Berezin-Marinov.

Parmi ces exemples, nous allons tester dans cette thèse celui de Schwinger dans le cas

du problème de l'oscillateur de Dirac. Pour ce faire, nous suivrons la technique du temps propre laquelle écrit formellement la fonction de Green relative au problème comme l'inverse d'un opérateur puis au moyen d'une représentation intégrale de cet opérateur on retrouve un opérateur d'évolution type Schrödinger puis nous introduisons le modèle de Schwinger pour décrire le spin de la particule. Ainsi, le problème est converti à un modèle très connu en optique quantique qui est le modèle de Jaynes-Cummings. En fait, avant cette application test nous allons d'abord revoir le modèle Jaynes-Cummings dans le cas de l'interaction dépendante du temps.

Le plan de cette thèse est le suivant :

Le premier chapitre est consacré à la présentation des outils nécessaires aux développements de la thèse. Nous donnerons un rappel sur les états cohérents et la construction intégrales de chemins correspondante, quelques développements de calculs pour le modèle de Jaynes-Cummings, et quelques propriétés de l'oscillateur de Dirac.

Dans le deuxième chapitre, nous considérerons le modèle de Jaynes-Cummings dans le cas de l'interaction dépendante du temps. Nous déterminerons exactement le propagateur correspondant et nous déduisons en plus les fonctions d'onde en suivant la méthode de perturbation présentée par Boudjedaa et al. Toutefois, le choix de la dépendance en temps sera simple de manière que le calcul de Laplace suffira pour déduire le résultat exact.

Le troisième chapitre est réservé à l'étude de l'oscillateur Dirac. Habituellement pour l'équation de Klein-Gordon on utilise un temps d'évolution dit temps propre de Schwinger, pour le cas de l'oscillateur de Dirac on en utilise deux. C'est un super-temps de type bosonique-fermionique. La partie bosonique est exactement celle de Schwinger et la partie fermionique projette les états de type Klein-Gordon sur ceux de Dirac. Si on utilise que le temps bosonique on dit qu'on a une projection globale puisque la projection se fait en fin d'évolution. Si on utilise le super-temps on dit qu'on a une projection locale, ie, la projection est assurée le long de l'évolution. Dans chaque cas, nous calculerons exactement la fonction de Green de laquelle nous déduirons les fonctions d'onde ainsi que le spectre.

Un dernier chapitre constituera la conclusion générale du travail.

# Chapitre 2

## Outils Nécessaires

Dans ce qui suit, nous allons exposer les outils nécessaires au développement des chapitres de la thèse. Comme le thème concerne essentiellement le modèle de Jaynes-Cummings, nous donnerons alors les propriétés des états cohérents, la construction du propagateur sur ces états cohérents et un bref rappel du modèle de Jaynes-Cummings, et les propriétés de l'oscillateur de Dirac.

### 2.0.1 États cohérents

Soit un système régi par l'Hamiltonien

$$\hat{H} \equiv \hat{H}(a, a^\dagger), \quad (2.1)$$

où  $a$  et  $a^\dagger$  sont des opérateurs de création et d'annihilation qui dans le cas général peuvent être des opérateurs bosoniques ou fermioniques.

Dans le but de construire une intégrale de chemin relative à ce système, introduisons les états cohérents bosoniques (fermioniques) qui sont définis comme états propres de l'opérateur d'annihilation  $a$  bosonique (fermionique), ie,  $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$  (bosonique),  $a|\psi\rangle = \psi|\psi\rangle$  (fermionique) où  $\alpha$  est une variable complexe et  $\psi$  est une variable de Grassmann impaire.

Ces états cohérents satisfont les propriétés suivantes :

-pour les variables complexes



$$\begin{cases} \int \frac{d\alpha^* d\alpha}{\pi} |\alpha\rangle \langle \alpha| = 1 \\ |\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\ \langle \alpha_j | \alpha_{j-1} \rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha_j|^2}{2} - \frac{|\alpha_{j-1}|^2}{2} + \alpha_j^* \alpha_{j-1}\right) \\ \int e^{-\bar{\alpha} A \alpha} d\bar{\alpha} d\alpha = (\det A)^{-1}, \end{cases} \quad (2.2)$$

-pour les variables de Grassmann

$$\begin{cases} |\psi\rangle = e^{\psi a^+} |\psi\rangle \text{ et } \int d\bar{\psi} d\psi e^{-\bar{\psi} \psi} |\psi\rangle \langle \psi| = 1 \\ \langle \psi_j | \psi_{j-1} \rangle = \exp(\psi_j^* \psi_{j-1}), \end{cases} \quad (2.3)$$

avec

$$\int e^{-\bar{\psi} A \psi} d\bar{\psi} d\psi = \det A. \quad (2.4)$$

## 2.0.2 La représentation intégrale de chemin

Partons de l'opérateur d'évolution défini par

$$U(T) = T_D \exp\left(-i \int_0^T \hat{H}(a, a^+, t) dt\right), \quad (2.5)$$

avec  $T_D$  est l'opérateur de Dyson qui ordonne les temps.

En procédant comme d'habitude, la représentation intégrale de chemin bosonique (fermionique) relative à  $\hat{H}(a, a^+, t)$  sera donnée par

$$K(\eta_f^*, \eta_i, T) = \int_{\alpha_i}^{\alpha_f} D\eta D\eta^* \exp\left[i \int_0^T dt [(\eta^* \dot{\eta} - \dot{\eta} \eta^*) - H(\eta^*, \eta; t)]\right], \quad (2.6)$$

où

$$H(\eta^*, \eta; t) = \frac{\langle \eta | \hat{H}(a, a^+, t) | \eta \rangle}{\langle \eta | \eta \rangle}, \text{ et } \eta = \alpha \text{ ou } \psi. \quad (2.7)$$

Dans ce qui suit, ces deux expressions de l'intégrale de chemin vont être combinées dans le modèle de Jaynes-Cummings.

## 2.1 Modèle Jaynes-Cummings

### 2.1.1 Introduction

Le modèle de J-C [1] est considéré comme le modèle de référence le plus élémentaire pour décrire l'interaction des atomes à deux niveaux avec un champ électromagnétique quantifié dans l'approximation dipolaire. Il est exactement soluble dans le cadre de l'approximation de l'onde tournante. Ce modèle permet de déterminer presque toutes les propriétés quantiques de l'interaction rayonnement-matière. D'où l'intérêt de son usage fréquent ou de ses quelques généralisations.

Dans le formalisme de l'intégrale de chemin en représentation des états cohérents, le modèle J-C a fait l'objet de études récentes par plusieurs auteurs. Nous citerons Zaheer et Zubairy [2] qui ont résolu le modèle J-C dans l'approximation de l'onde tournante. Malheureusement leur propagateur est donné par une série de perturbation qu'on ne peut pas évaluer à tous les ordres. En utilisant la même méthode, Buzek[3] ainsi que Boudjedaa et al [4] ont réussi à déterminer le propagateur associé à la généralisation multi-photons du modèle J-C. Dans ce cas les séries de perturbation ont été sommées dans des cas particuliers stationnaires (interaction indépendante du temps).

Dans ce qui suit, nous allons essayer de sommer ces séries, correspondantes au cas non stationnaires, ayant une forme particulière.

L'Hamiltonien de Jaynes-Cummings généralisé est donné par l'expression suivante

$$\hat{H} = \omega \left( a^+ a + \frac{1}{2} \right) + \frac{\omega_0}{2} \sigma_3 + g \left[ F(a^+, a, t) \sigma_+ + F^+(a^+, a, t) \sigma_- \right], \quad (2.8)$$

où  $g$  est la constante de couplage et  $F(a^+, a, t)$  est une fonction des opérateurs de création et d'annihilation photoniques, donnée par

$$F(a^+, a, t) = \sum_{m,n=0}^{\infty} C_{m,n}(t) a^{+m} a^n, \quad (2.9)$$

$C_{m,n}(t)$  est une fonction quelconque du temps. Les matrices de Pauli  $\{\sigma_3, \sigma_+, \sigma_-\}$  décrivent le système à deux niveaux. Dans ce qui suit, nous allons les représenter par le modèle fermionique de Schwinger. Suivant cette procédure, les matrices du Pauli  $\sigma_j$  sont remplacées par une paire

opérateurs fermioniques  $(u, d)$

$$\sigma_j = (u^+, d^+) \sigma_j \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \text{ ou bien } \begin{cases} \sigma^3 = u^+u - d^+d \\ \sigma_- = d^+u \\ \sigma_+ = u^+d \end{cases} \quad (2.10)$$

Les opérateurs fermioniques et bosoniques vérifient les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} u^+ |0\rangle &= |\uparrow\rangle, & d^+ |0\rangle &= |\downarrow\rangle \\ u |0\rangle &= d |0\rangle = 0 \\ a |0\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

L'Hamiltonien prendra alors d'après (2.10) la forme Fermion-Boson suivante

$$\hat{H} = \omega \left( a^+ a + \frac{1}{2} \right) + \frac{\omega_0}{2} (u^+ u - d^+ d) + g [F(a^+, a, t) u^+ d + F^+(a^+, a, t) d^+ u]. \quad (2.12)$$

Maintenant, construisons le propagateur relatif à cet Hamiltonien. Considérons le système dans l'état cohérent Fermion-Boson  $|\alpha, \psi, \phi\rangle$  où  $\alpha$  est une variable complexe cohérente dont les propriétés sont données par (2.2) et  $(\psi, \phi)$  sont des variables de Grassmann cohérentes vérifiant (2.3). Le propagateur est défini par

$$K(f, i, T) = \langle \alpha_f, \psi_f, \phi_f | T_D \exp \left( -i \int_0^T \hat{H}(a^+, a, t) dt \right) | \alpha_i, \psi_i, \phi_i \rangle. \quad (2.13)$$

Discretisons comme d'habitude le temps  $T = N\varepsilon$  et notons

$$H_0 = \omega \left( a^+ a + \frac{1}{2} \right), \quad (2.14)$$

et

$$H_1 = \frac{\omega_0}{2} (u^+ u - d^+ d) + g [F(a^+, a, t) u^+ d + F^+(a^+, a, t) d^+ u]. \quad (2.15)$$

D'après la formule de Trotter ( $\varepsilon \ll 1$ ) on aura

$$K(f, i, T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \alpha_f, \psi_f, \phi_f | (e^{-i\varepsilon H_0} e^{-i\varepsilon H_1})^N | \alpha_i, \psi_i, \phi_i \rangle. \quad (2.16)$$

En introduisant à chaque instant  $t_j = j\varepsilon$  la relation de fermeture relative à la base  $\{|\alpha, \psi, \phi\rangle\}$ ,

nous écrivons alors le propagateur comme

$$\begin{aligned}
 K(f, i; T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^{N-1} \frac{d\alpha_j^* d\alpha_j}{\pi} \prod_{j=1}^N \langle \alpha_j | e^{-i\varepsilon H_0} | \alpha_{j-1} \rangle \\
 &\times \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^{N-1} d\psi_j^* d\psi_j d\phi_j^* d\phi_j e^{-\psi_j^* \psi_j - \phi_j^* \phi_j} \\
 &\times \prod_{j=1}^N \langle \psi_j, \phi_j | e^{-i\varepsilon H_1} | \psi_{j-1}, \phi_{j-1} \rangle. \quad (2.17)
 \end{aligned}$$

Les éléments de matrice se calculent aisément et le résultat est :

-Pour les bosons

$$\begin{aligned}
 \langle \alpha_j | e^{-i\varepsilon H_0} | \alpha_{j-1} \rangle &= \langle \alpha_j | 1 - i\varepsilon \omega \left[ a^+ a + \frac{1}{2} \right] | \alpha_{j-1} \rangle \\
 &= \langle \alpha_j | \alpha_{j-1} \rangle \left[ 1 - \frac{i\varepsilon \omega \langle \alpha_j | \left[ a^+ a + \frac{1}{2} \right] | \alpha_{j-1} \rangle}{\langle \alpha_j | \alpha_{j-1} \rangle} \right], \quad (2.18)
 \end{aligned}$$

ou bien en utilisant la formule de l'orthogonalité

$$\begin{aligned}
 \langle \alpha_j | e^{-i\varepsilon \omega \left[ a^+ a + \frac{1}{2} \right]} | \alpha_{j-1} \rangle &= \exp \left[ -\frac{1}{2} \{ \alpha_j^* (\alpha_j - \alpha_{j-1}) - (\alpha_j^* - \alpha_{j-1}^*) \alpha_{j-1} \} \right] \\
 &\times \exp \left\{ -i\varepsilon \omega \left( \alpha_j^* \alpha_{j-1} + \frac{1}{2} \right) \right\}. \quad (2.19)
 \end{aligned}$$

-Pour les fermion

On utilisant les propriétés (2.11) on a

$$\begin{aligned}
 \langle \psi_j, \phi_j | e^{-i\varepsilon H_1} | \psi_{j-1}, \phi_{j-1} \rangle &= \exp \left\{ \left( 1 - i\varepsilon \frac{\omega_0}{2} \right) \psi_j^* \psi_{j-1} + \left( 1 + i\varepsilon \frac{\omega_0}{2} \right) \phi_j^* \phi_{j-1} \right. \\
 &\quad \left. - i\varepsilon g F(\alpha_j^*, \alpha_j, t) \psi_j^* \phi_{j-1} - i\varepsilon g F^*(\alpha_j^*, \alpha_j, t) \phi_j^* \psi_{j-1} \right\} \quad (2.20)
 \end{aligned}$$

Ce qui laisse le propagateur s'écrire comme

$$K(f, i, T) = \int_{\alpha_i}^{\alpha_f} D\alpha^* D\alpha \exp \left\{ i \int_0^T dt \left[ \frac{i}{2} (\alpha^* \dot{\alpha} - \dot{\alpha} \alpha^*) - \omega \alpha^* \alpha - \frac{\omega}{2} \right] \right\} K^\alpha(f, i, T), \quad (2.21)$$

avec le propagateur partiel suivant

$$\begin{aligned}
 K^\alpha(f, i, T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^{N-1} d\psi_j^* d\psi_j d\phi_j^* d\phi_j e^{-\psi_j^* \psi_j - \phi_j^* \phi_j} \\
 &\times \exp \left\{ \left( 1 - i\varepsilon \frac{\omega_0}{2} \right) \psi_j^* \psi_{j-1} + \left( 1 + i\varepsilon \frac{\omega_0}{2} \right) \phi_j^* \phi_{j-1} \right. \\
 &\quad \left. - i\varepsilon g F(\alpha_j^*, \alpha_j, t) \psi_j^* \phi_{j-1} - i\varepsilon g F^*(\alpha_j^*, \alpha_j, t) \phi_j^* \psi_{j-1} \right\}. \quad (2.22)
 \end{aligned}$$

Pour pouvoir avancer encore dans les calculs, il est préférable d'introduire le vecteur  $q_j = \begin{pmatrix} \psi_j \\ \phi_j \end{pmatrix}$  qui permet de décrire le propagateur partiel  $K^\alpha(f, i, T)$  sous la forme suivante

$$K^\alpha(f, i, T) = \int \prod_{j=1}^{N-1} dq_j^+ dq_j \exp \left[ - \sum_{j=1}^{N-1} q_j^+ q_j + \sum_{j=1}^N q_j^+ R(\alpha_j, t_j) q_{j-1} \right], \quad (2.23)$$

L'exposant peut s'écrire comme

$$\left[ - \sum_{j=1}^{N-1} q_j^+ q_j + \sum_{j=1}^N q_j^+ R(\alpha_j, t_j) q_{j-1} \right] = -P^+ M P + P^+ V + W^+ P, \quad (2.24)$$

où la matrice  $R(\alpha_j, t_j)$  est donnée par

$$R(\alpha_j, t_j) = \begin{pmatrix} 1 - i\varepsilon \frac{\omega_0}{2} & -i\varepsilon g F(\alpha_j^*, \alpha_j, t) \\ -i\varepsilon g F^*(\alpha_j^*, \alpha_j, t) & 1 + i\varepsilon \frac{\omega_0}{2} \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

et le vecteur  $P$  et la matrice  $M$  sont définis par

$$P = \{q_j\}, \quad M_{ij} = 1\delta_{ij} - R(\alpha_j, t_j) \delta_{i,j+1} \quad i, j \in [1, N], \quad (2.26)$$

les vecteurs  $V, W^+$  définie par

$$V = \begin{pmatrix} R(1) q_i \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad W^+ = \left[ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ q_f R(N) \right]. \quad (2.27)$$

Suivant ces remplacements, le propagateur partiel  $K^\alpha(f, i, T)$  prendra la forme d'une intégrale gaussienne multidimensionnelle

$$K^\alpha(f, i, T) = \int dP^+ dP \exp(-P^+ M P + P^+ V + W^+ P). \quad (2.28)$$

Pour intégrer cette dernière, introduisons le shift usuel des vecteurs  $P$  et  $P^+$

$$P \longrightarrow P + M^{-1} V, \quad P^+ \longrightarrow P^+ + W^+ M^{-1}. \quad (2.29)$$

Ce qui permet d'avoir le résultat suivant

$$K^\alpha(f, i, T) = (\det M) \exp[W^+ M^{-1} V], \quad (2.30)$$

où l'on utilise (2.4). Il n'est pas difficile de s'assurer que

$$\begin{cases} \det M = 1 \\ M^{-1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{N-1} R(\alpha_j, t_j) \end{cases} \quad (2.31)$$

Finalement, à la limite  $N \rightarrow \infty$ , le propagateur  $K^\alpha(f, i, T)$  devient

$$K^\alpha(f, i, T) = \exp [q_f^* R(\alpha, T) q_i], \quad (2.32)$$

où la matrice  $R(\alpha, T)$  est donnée par

$$R(\alpha, T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^N \left[ e^{-i\varepsilon \left(\frac{\omega_0}{2}\right) \sigma_3} + i\varepsilon K(\alpha_j, t_j) \right], \quad (2.33)$$

avec

$$K(\alpha_j, t_j) = \begin{pmatrix} 0 & -gF(\alpha_j^*, \alpha_j, t_j) \\ -gF^*(\alpha_j^*, \alpha_j, t_j) & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Le produit ordonné  $R(\alpha, T)$  peut se développer en la série de perturbation à la limite continue.

( $N \rightarrow \infty$ ) la série devient

$$\begin{aligned} R(\alpha; T) &= \exp \left[ -i \frac{\omega_0}{2} (T - 0) \sigma_3 \right] \\ &+ i \int_0^T ds_1 \exp \left[ -i \frac{\omega_0}{2} (T - s_1) \sigma_3 \right] K(\alpha_1; s_1) \exp \left[ -i \frac{\omega_0}{2} (s_1 - 0) \sigma_3 \right] \\ &+ i^2 \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \exp \left[ -i \frac{\omega_0}{2} (T - s_1) \sigma_3 \right] K(\alpha_1; s_1) \\ &\exp \left[ -i \frac{\omega_0}{2} (s_1 - s_2) \sigma_3 \right] K(\alpha_2; s_2) \exp \left[ -i \frac{\omega_0}{2} (s_2 - 0) \sigma_3 \right] + \dots \\ &+ i^N \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_2} ds_3 \times \dots \int_0^{s_{N-1}} ds_N \exp \left[ -i \frac{\omega_0}{2} (T - s_1) \sigma_3 \right] \\ &\times K(\alpha_1; s_1) \exp \left[ -i \frac{\omega_0}{2} (s_1 - s_2) \sigma_3 \right] K(\alpha_2; s_2) \\ &\times \exp \left[ -i \frac{\omega_0}{2} (s_2 - s_3) \sigma_3 \right] K(\alpha_3; s_3) \dots \\ &\times \exp \left[ -i \frac{\omega_0}{2} (s_{N-1} - s_N) \sigma_3 \right] K(\alpha_N; s_N) \exp \left[ -i \frac{\omega_0}{2} (s_N - 0) \sigma_3 \right]. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Les éléments de matrice de  $R(\alpha; T)$  à la limite continue ( $N \rightarrow \infty$ ) sont

$$\begin{aligned}
R_{11}(\alpha; T) &= \exp\left[-i\frac{\omega_0}{2}T\right] + \sum_{N=1}^{\infty} (-ig)^{2N} \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_2} ds_3 \dots \int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} \\
&\quad \times \exp\left[-i\frac{\omega_0}{2}(T-s_1)\right] F(\alpha_1; s_1) \exp\left[i\frac{\omega_0}{2}(s_1-s_2)\right] \\
&\quad \times F^*(\alpha_2; s_2) \dots \exp\left[-i\frac{\omega_0}{2}(s_{2N-1}-s_{2N})\right] F(\alpha_{2N-1}; s_{2N-1}) \\
&\quad \times \exp\left[i\frac{\omega_0}{2}(s_{2N}-0)\right]. \tag{2.36}
\end{aligned}$$

et  $R_{12}(\alpha_j, t_j)$

$$\begin{aligned}
R_{12}(\alpha; T) &= (-ig) \int_0^T ds_1 \exp\left[-i\frac{\omega_0}{2}(T-s_1)\right] F(\alpha_1; s_1) \exp\left[i\frac{\omega_0}{2}(s_1-0)\right] \\
&\quad + \sum_{N=1}^{\infty} (-ig)^{2N+1} \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_2} ds_3 \dots \int_0^{s_{2N}} ds_{2N+1} \\
&\quad \times \exp\left[-i\frac{\omega_0}{2}(T-s_1)\right] F(\alpha_1; s_1) \exp\left[i\frac{\omega_0}{2}(s_1-s_2)\right] \\
&\quad \times F^*(\alpha_2; s_2) \exp\left[-i\frac{\omega_0}{2}(s_2-s_3)\right] F(\alpha_3; s_3) \times \dots \\
&\quad \times \dots \exp\left[+i\frac{\omega_0}{2}(s_{2N}-s_{2N+1})\right] F(\alpha_{2N+1}; s_{2N+1}) \exp\left[-i\frac{\omega_0}{2}(s_{2N+1}-0)\right]. \tag{2.37}
\end{aligned}$$

Les autres éléments de matrice ont des formes analogues et sont donnés par

$$\begin{cases} R_{21}(\alpha; T) = -R_{12}^*(\alpha; T) \\ R_{22}(\alpha; T) = R_{11}^*(\alpha; T) \end{cases} \tag{2.38}$$

En remplaçant ces résultats dans (2.21), on obtient la forme suivante du propagateur

$$\begin{aligned}
K(f, i, T) &= \int D\alpha^* D\alpha \exp\left\{i \int_0^1 ds \left[\frac{i}{2}(\alpha^* \dot{\alpha} - \dot{\alpha} \alpha^*) - \omega \alpha^* \alpha - \frac{\omega}{2}\right]\right\} \\
&\quad \times \exp[\psi_f^*(R_{11}\psi_i + R_{12}\phi_i)] \exp[\phi_f^*(R_{21}\psi_i + R_{22}\phi_i)], \tag{2.39}
\end{aligned}$$

dont les éléments matriciels définissent l'amplitude de transition entre les états propres du spin d'après (2.11). Ces éléments de transition sont donnés dans ce qui suit

### 2.1.2 Les amplitudes de transition

-pour la transition up-up

$$K_{\uparrow\uparrow}(\alpha_f, \alpha_i; T) = \int d\psi_f^* d\psi_f d\psi_i^* d\psi_i d\phi_f^* d\phi_f d\phi_i^* d\phi_i \\ \times \exp \left\{ -|\psi_f|^2 - |\psi_i|^2 - |\phi_f|^2 - |\phi_i|^2 \right\} \langle \uparrow | \psi_f, \phi_f \rangle K(f, i, T) \langle \psi_i, \phi_i | \uparrow \rangle, \quad (2.40)$$

Introduisons un vecteur définie par  $v^+ = (\psi_i^*, \psi_f^*, \phi_i^*, \phi_f^*)$ , et avec les relations suivantes

$$\begin{cases} \langle \uparrow | \psi_f, \phi_f \rangle = \psi_f & , \quad \langle \psi_i, \phi_i | \uparrow \rangle = \psi_i^* & , \quad \langle \downarrow | \psi_f, \phi_f \rangle = \phi_f & , \quad \langle \psi_i, \phi_i | \downarrow \rangle = \phi_i^* \\ \psi_f \psi_i^* = e^{-\psi_i^* \psi_f} - 1 & , \quad \phi_f \phi_i^* = e^{-\phi_i^* \phi_f} - 1, \end{cases} \quad (2.41)$$

en remplaçant la forme de propagateur  $K(f, i, T)$  dans la transition up-up, il vient

$$K_{\uparrow\uparrow}(\alpha_f, \alpha_i; T) = \int_{\alpha_i}^{\alpha_f} D\alpha^* D\alpha \exp \left\{ i \int_0^T dt \left[ \frac{i}{2} (\alpha^* \dot{\alpha} - \alpha \dot{\alpha}^*) - \omega \alpha^* \alpha - \frac{\omega}{2} \right] \right\} \\ \int dv^+ dv \left[ \exp(v^+ M' v) - \exp(v^+ M v) \right], \quad (2.42)$$

où les matrices  $M'$ ,  $M$  définies par

$$\dot{M} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ R_{11} & -1 & R_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ R_{21} & 0 & R_{22} & -1 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ R_{11} & -1 & R_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ R_{21} & 0 & R_{22} & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.43)$$

avec

$$\dot{M} = \begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

on a utilisé en plus l'identité suivante

$$\begin{cases} \det M' = \det(A' - CB^{-1}D) \det B \\ \det M' = \det A' = 1 + R_{11}(\alpha; T) \end{cases}, \det M = \det A = 1 \quad (2.45)$$

le résultat final de  $K_{\uparrow\uparrow}(\alpha_f, \alpha_i; T)$  devient

$$K_{\uparrow\uparrow}(\alpha_f, \alpha_i; T) = \int_{\alpha_i}^{\alpha_f} D\alpha^* D\alpha \exp \left\{ i \int_0^T dt \left[ \frac{i}{2} (\alpha^* \dot{\alpha} - \alpha \dot{\alpha}^*) - \omega \alpha^* \alpha - \frac{\omega}{2} \right] \right\} R_{11}(\alpha; T) \quad (2.46)$$

Les autres éléments de matrice correspondants aux différentes transitions se calculent de la même manière.



Transition up-down

$$K_{\uparrow\downarrow}(\alpha_f, \alpha_i; T) = \int d\psi_f^* d\psi_f d\psi_i^* d\psi_i d\phi_f^* d\phi_f d\phi_i^* d\phi_i \\ \times \exp \left\{ -|\psi_f|^2 - |\psi_i|^2 - |\phi_f|^2 - |\phi_i|^2 \right\} \langle \uparrow | |\psi_f, \phi_f\rangle K(f, i, T) \langle \psi_i, \phi_i | \downarrow \rangle \quad (2.47)$$

$$K_{\uparrow\downarrow}(\alpha_f, \alpha_i; T) = \int_{\alpha_i}^{\alpha_f} D\alpha^* D\alpha \exp \left\{ i \int_0^T dt \left[ \frac{i}{2} (\alpha^* \dot{\alpha} - \alpha \dot{\alpha}^*) - \omega \alpha^* \alpha - \frac{\omega}{2} \right] \right\} R_{12}(\alpha; T) \quad (2.48)$$

Transition down-up

$$K_{\downarrow\uparrow}(\alpha_f, \alpha_i; T) = \int d\psi_f^* d\psi_f d\psi_i^* d\psi_i d\phi_f^* d\phi_f d\phi_i^* d\phi_i \\ \times \exp \left\{ -|\psi_f|^2 - |\psi_i|^2 - |\phi_f|^2 - |\phi_i|^2 \right\} \langle \downarrow | |\psi_f, \phi_f\rangle K(f, i, T) \langle \psi_i, \phi_i | \uparrow \rangle \quad (2.49)$$

$$K_{\downarrow\uparrow}(\alpha_f, \alpha_i; T) = \int_{\alpha_i}^{\alpha_f} D\alpha^* D\alpha \exp \left\{ i \int_0^T dt \left[ \frac{i}{2} (\alpha^* \dot{\alpha} - \alpha \dot{\alpha}^*) - \omega \alpha^* \alpha - \frac{\omega}{2} \right] \right\} R_{21}(\alpha; T) \quad (2.50)$$

Transition down-down

$$K_{\downarrow\downarrow}(\alpha_f, \alpha_i; T) = \int d\psi_f^* d\psi_f d\psi_i^* d\psi_i d\phi_f^* d\phi_f d\phi_i^* d\phi_i \\ \times \exp \left\{ -|\psi_f|^2 - |\psi_i|^2 - |\phi_f|^2 - |\phi_i|^2 \right\} \langle \downarrow | |\psi_f, \phi_f\rangle K(f, i, T) \langle \psi_i, \phi_i | \downarrow \rangle \quad (2.51)$$

$$K_{\downarrow\downarrow}(\alpha_f, \alpha_i; T) = \int_{\alpha_i}^{\alpha_f} D\alpha^* D\alpha \exp \left\{ i \int_0^T dt \left[ \frac{i}{2} (\alpha^* \dot{\alpha} - \alpha \dot{\alpha}^*) - \omega \alpha^* \alpha - \frac{\omega}{2} \right] \right\} R_{22}(\alpha; T) \quad (2.52)$$

Ce qui permet de décrire enfin le propagateur

$$K(\alpha_f, \alpha_i; T) = \begin{pmatrix} K_{\uparrow\uparrow}(\alpha_f, \alpha_i; T) & K_{\uparrow\downarrow}(\alpha_f, \alpha_i; T) \\ K_{\downarrow\uparrow}(\alpha_f, \alpha_i; T) & K_{\downarrow\downarrow}(\alpha_f, \alpha_i; T) \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

## 2.2 Oscillateur de Dirac

### 2.2.1 Introduction

L'oscillateur de Dirac est une généralisation de l'oscillateur harmonique non relativiste. Historiquement, il a été introduit par Moshinsky et Szczepaniak[5] à partir de l'équation de Klein-Gordon. Pour l'obtenir il suffit de remplacer  $\mathbf{p}$  par  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - im\omega\beta\mathbf{x}$  dans l'équation de Dirac, où  $\mathbf{x}$  est le vecteur de position,  $m$  est la masse de la particule,  $\omega$  la fréquence de l'oscillateur et  $\beta$  la matrice de Dirac.

Dans notre travail, nous sommes intéressés par l'étude de l'oscillateur de Dirac via le Modèle Jaynes-Cummings. Dans ce but, nous introduisons la représentation intégrale de la fonction de Green relative au problème comme une intégrale sur un temps bosonique (évolution globale) et en plus un temps fermionique (évolution locale). Dans ce qui suit donnons d'abord quelques propriétés de cet oscillateur de Dirac.

Soit l'équation de Dirac libre

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = c\vec{\alpha}\cdot\mathbf{p}\Psi + mc^2\beta\Psi, \quad (2.54)$$

où  $t$  est le temps et

$$\mathbf{p} = \frac{\hbar}{i}\nabla, \quad (2.55)$$

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad (2.56)$$

avec les  $\sigma_i$  sont les matrices de Pauli décrivant le spin, vérifiant la propriété suivante

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (2.57)$$

avec les matrices  $(\vec{\alpha}, \beta)$  satisfaisant les propriétés suivantes

$$[\alpha_i, \beta]_+ = 0, \quad [\alpha_i, \alpha_j]_+ = 2\delta_{ij}I, \quad \beta^2 = 1 = \alpha_i^2, \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (2.58)$$

En appliquant le couplage minimum généralisé suivant  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - im\omega\beta\mathbf{x}$ , on obtient

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = [c\vec{\alpha} \cdot (\vec{p} - im\omega\beta \vec{x}) + mc^2\beta] \Psi. \quad (2.59)$$

C'est l'équation de l'oscillateur de Dirac, où  $\omega$  dénote toujours la fréquence de l'oscillateur. Clairement, le membre droit de l'équation (2.59) dit Hamiltonien, est hermitien

$$\begin{aligned} [\alpha \cdot (p - im\omega\beta x) + mc\beta]^\dagger &= (p - im\omega\beta x)^\dagger \cdot \alpha^\dagger + mc\beta^\dagger \\ &= [\alpha \cdot (p - im\omega\beta x) + mc\beta], \end{aligned} \quad (2.60)$$

Sachant que cet Hamiltonien est indépendant du temps alors la dépendance de  $\Psi$  en  $t$  peut être exprimé sous forme suivante  $\exp(-iEt/\hbar)$ .

Par conséquent, le spineur de Dirac se réécrit

$$\Psi(x, t) = \Psi(x) e^{(-iEt/\hbar)}. \quad (2.61)$$

### 2.2.2 Oscillateur de Dirac à une dimension

En dimension (1 + 1) [6], on a

$$-\alpha \left( i \frac{d}{dx} + i\beta m\omega x \right) \Psi(x) + \beta m \Psi(x) = E \Psi(x). \quad (2.62)$$

Les matrices de Dirac sont représentées par

$$\alpha = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.63)$$

On propose alors la solution sous la forme d'un spineur

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}. \quad (2.64)$$

L'écriture en composantes donne

$$\frac{df(x)}{dx} + m\omega x f(x) = (m + E) g(x), \quad (2.65)$$

$$\frac{dg(x)}{dx} + m\omega x g(x) = (m - E) f(x). \quad (2.66)$$

Solutionnons ce système, on obtient le spectre suivant

$$E_n = \pm m \sqrt{1 + 2|n|} \frac{\omega}{m} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots, \quad (2.67)$$

et les fonctions d'onde correspondantes

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{\lambda(E_n + mc^2)}{2^{n+1}|n|!\sqrt{\pi}E_n}} H_{|n|}(\lambda x) e^{-\frac{\lambda^2 x^2}{2}} \quad (2.68)$$

$$g_n(x) = \sqrt{\frac{\lambda(E_n - mc^2)}{2^n |n-1|!\sqrt{\pi}E_n}} H_{|n|-1}(\lambda x) e^{-\frac{\lambda^2 x^2}{2}}, \quad (2.69)$$

où

$$\lambda = \sqrt{m\omega}. \quad (2.70)$$

Remarquons qu'on a les propriétés de symétrie suivantes

$$E_{-n} = -E_n \quad (n \neq 0), \quad (2.71)$$

$$f_{-n}(x) = \sqrt{\frac{E_n - mc^2}{E_n + mc^2}} f_n(x), \quad (2.72)$$

$$g_{-n}(x) = \pm \sqrt{\frac{E_n + mc^2}{E_n - mc^2}} g_n(x), \quad (2.73)$$

et la relation de fermeture

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx [f_n(x)f_m(x) + g_n(x)g_m(x)] = \delta_{nm}. \quad (2.74)$$

## Chapitre 3

# Modèle de Jaynes-Cummings dépendent du temps

Comme on l'a déjà dit auparavant, voyons comment traiter un cas concret du modèle Jaynes-Cummings dépendant du temps via l'intégrale de chemins. Nous allons considérer le cas simple suivant

$$C_{m',n'}(t) = e^{-i\Omega_{m,n}t} \delta_{m,m'} \delta_{n,n'} \text{ avec } n \geq m, \quad (3.1)$$

ce qui donne

$$F(a^+, a, t) = e^{-i\Omega_{m,n}t} a^{+m} a^n = e^{-i\Omega t} a^{+m} a^n. \quad (3.2)$$

Se référant à la section (2.1), les éléments de matrice de transition  $R(\alpha, T)$  sont donnés dans ce cas par

$$\begin{aligned} R_{11}(\alpha, T) = & \exp\left(-i\frac{\omega_0 T}{2}\right) + \sum_{N=1}^{\infty} (-ig)^{2N} \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \dots \int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} \\ & \times e^{-i\frac{\omega_0}{2}(T-s_1)} F(s_1) e^{i\frac{\omega_0}{2}(s_1-s_2)} F^*(s_2) e^{-i\frac{\omega_0}{2}(s_2-s_3)} \\ & \times F(s_3) e^{i\frac{\omega_0}{2}(s_3-s_4)} \dots \times e^{-i\frac{\omega_0}{2}(s_{2N-1}-s_{2N})} F(s_{2N}) e^{i\frac{\omega_0}{2}(s_{2N})} \end{aligned} \quad (3.3)$$

et

$$\begin{aligned}
R_{12}(\alpha; T) &= (-ig) \int_0^T ds_1 e^{-i\frac{\omega_0}{2}(T-s_1)} F(s_1) e^{i\frac{\omega_0}{2}s_1} \\
&+ \sum_{N=1}^{\infty} (-ig)^{2N+1} \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_2} ds_3 \dots \int_0^{s_{2N}} ds_{2N+1} \\
&\times e^{-i\frac{\omega_0}{2}(T-s_1)} F(s_1) e^{i\frac{\omega_0}{2}(s_1-s_2)} F^*(s_2) e^{-i\frac{\omega_0}{2}(s_2-s_3)} \\
&\times F(s_3) e^{i\frac{\omega_0}{2}(s_3-s_4)} \dots \times e^{i\frac{\omega_0}{2}(s_{2N}-s_{2N+1})} F(s_{2N+1}) e^{-i\frac{\omega_0}{2}(s_{2N+1})}. \quad (3.4)
\end{aligned}$$

Les autres éléments sont exprimés par les relations suivantes

$$\begin{cases} R_{22}(\alpha, T) = R_{11}^*(\alpha, T) \\ R_{21}(\alpha, T) = -R_{12}^*(\alpha, T) \end{cases} \quad (3.5)$$

### 3.0.3 Intégration sur les variables complexes

En appliquant exactement les résultats de la section (2.1) donnés par les formules (2.20 – 2.30). La forme matricielle du propagateur est alors

$$\begin{aligned}
K(\alpha_f, \alpha_i; s_f - s_i) &= \exp \left[ -\frac{1}{2} (|\alpha_f|^2 + |\alpha_i|^2) \right] \\
&\times \exp \left[ \alpha_f^* e^{-i\omega(s_f-s_i)} \alpha_i - \frac{i}{2} \omega (s_f - s_i) \right] \\
&\times \begin{pmatrix} R_{\uparrow\uparrow}(\alpha_f, \alpha_i; s_f - s_i) & R_{\uparrow\downarrow}(\alpha_f, \alpha_i; s_f - s_i) \\ R_{\downarrow\uparrow}(\alpha_f, \alpha_i; s_f - s_i) & R_{\downarrow\downarrow}(\alpha_f, \alpha_i; s_f - s_i) \end{pmatrix}. \quad (3.6)
\end{aligned}$$

Notons d'abord

$$K^{\pm}(\alpha_f, \alpha_i; s_f - s_i) = \exp \left[ -\frac{1}{2} (|\alpha_f|^2 + |\alpha_i|^2) \right] \exp \left[ \alpha_f^* e^{-i\omega(s_f-s_i)} \alpha_i - \frac{i}{2} (\omega \pm \omega_0) (s_f - s_i) \right]. \quad (3.7)$$

Les éléments du propagateur s'écrivent sous la forme suivante :

-pour  $K_{\uparrow\uparrow}(\alpha_f, \alpha_i; T)$

$$\begin{aligned}
K_{\uparrow\uparrow}(\alpha_f, \alpha_i; T) &= K^+(\alpha_f, \alpha_i; T) + \sum_{N=1}^{\infty} (-ig)^{2N} \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \dots \int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} \\
&\times \int \frac{d\alpha_1^* d\alpha_1}{\pi} \dots \frac{d\alpha_{2N}^* d\alpha_{2N}}{\pi} K^+(\alpha_f, \alpha_1; T - s_1) \\
&\times e^{-i\Omega s_1} \alpha_1^{*m} \alpha_1^n K^-(\alpha_1, \alpha_2; s_1 - s_2) e^{i\Omega s_2} \alpha_2^m \alpha_2^{*n} \\
&\times \dots e^{i\Omega s_{2N}} \alpha_{2N}^m \alpha_{2N}^{*n} K^+(\alpha_{2N}, \alpha_i; s_{2N}).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Ecrivons l'exponentielle de  $K^+(\alpha_f, \alpha_i; s_f - s_i)$  sous forme d'une série

$$\exp \left[ \alpha_f^* e^{-i\omega(s_f - s_i)} \alpha_i \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_f^* \alpha_i)^n}{n!} e^{-i\omega n(s_f - s_i)}, \tag{3.9}$$

il vient

$$\begin{aligned}
K_{\uparrow\uparrow}(\alpha_f, \alpha_i; T) &= K^+(\alpha_f, \alpha_i; T) + \sum_{N=1}^{\infty} (-ig)^{2N} \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \dots \int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} \\
&\sum_{\substack{k_1, k_2, k_3, \\ \dots, k_{2N}, k_i=0}}^{\infty} \int \frac{d\alpha_1^* d\alpha_1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2 + |\alpha_1|^2)} \frac{(\alpha_f^*)^{k_1}}{k_1!} (\alpha_1)^{k_1+n} (\alpha_1^*)^{k_2+m} \\
&\times e^{-i\omega k_1(T-s_1) - i\Omega s_1} \exp \left[ -\frac{i}{2}(\omega + \omega_0)(T - s_1) \right] \int \frac{d\alpha_2^* d\alpha_2}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2)} \\
&\times \frac{(\alpha_2)^{k_2+m} (\alpha_2^*)^{k_3+n}}{k_2!} e^{-i\omega k_2(s_1 - s_2) + i\Omega s_2} \exp \left[ -\frac{i}{2}(\omega - \omega_0)(s_1 - s_2) \right] \\
&\times \int \frac{d\alpha_3^* d\alpha_3}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2)} \frac{(\alpha_3)^{k_3+n} (\alpha_3^*)^{k_4+m}}{k_3!} e^{-i\omega k_2(s_2 - s_3) - i\Omega s_3} \\
&\exp \left[ -\frac{i}{2}(\omega + \omega_0)(s_2 - s_3) \right] \times \dots \int \frac{d\alpha_{2N-1}^* d\alpha_{2N-1}}{\pi} e^{-\frac{1}{2}|\alpha_{2N-1}|^2} \\
&\times \frac{(\alpha_{2N-1})^{k_{2N-1}+n} (\alpha_{2N-1}^*)^{k_{2N}+m}}{(k_{2N-1})!} e^{-i\omega k_{2N-1}(s_{2N-2} - s_{2N-1}) - i\Omega s_{2N-1}} \\
&\times \exp \left[ -\frac{i}{2}(\omega + \omega_0)(s_{2N-2} - s_{2N-1}) \right] \int \frac{d\alpha_{2N}^* d\alpha_{2N}}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_{2N}|^2 + |\alpha_i|^2)} \\
&\times \frac{(\alpha_{2N})^{k_{2N}+m} (\alpha_{2N}^*)^{k_i+n}}{(k_{2N})!} e^{-i\omega k_{2N}(s_{2N-1} - s_{2N}) + i\Omega s_{2N}} \exp \left[ -\frac{i}{2}(\omega - \omega_0)(s_{2N-1} - s_{2N}) \right] \\
&\times \frac{(\alpha_i)^{k_i}}{k_i!} e^{-i\omega k_i(s_{2N})} \exp \left[ -\frac{i}{2}(\omega + \omega_0)(s_{2N}) \right].
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Utilisant la propriété suivante

$$\frac{1}{\pi \sqrt{m!} \sqrt{n!}} \int d\alpha^* d\alpha e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} (\alpha^*)^n (\alpha)^m = \delta_{nm} \tag{3.11}$$

on trouve

$$\begin{aligned}
K_{\uparrow\uparrow}(\alpha_f, \alpha_i, ; T) &= K^+(\alpha_f, \alpha_i, ; T) + \sum_{N=1}^{\infty} (-ig)^{2N} \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \dots \int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} \\
&\times e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2 + |\alpha_i|^2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_f^*)^k}{k!} \frac{[(k+n)!]^{2N}}{[k!(k+n-m)!]^N} \\
&\times \exp \left\{ -i\omega k(T-s_1) - \frac{i}{2}(\omega + \omega_0)(T-s_1) - i\Omega s_1 \right\} \dots \\
&\times \exp \left\{ -i\omega(s_1-s_2)(k+n-m) - \frac{i}{2}(\omega - \omega_0)(s_1-s_2) + i\Omega s_2 \right\} \quad (3.12) \\
&\times \exp \left\{ -i\omega k(s_2-s_3) - \frac{i}{2}(\omega + \omega_0)(s_2-s_3) - i\Omega s_3 \right\} \times \dots \\
&\times \dots \exp \left\{ -i\omega k(s_{2N-2}-s_{2N-1}) - \frac{i}{2}(\omega + \omega_0)(s_{2N-2}-s_{2N-1}) - i\Omega s_{s_{2N-1}} \right\} \\
&\times \exp \left\{ -i\omega(s_{2N-1}-s_{2N})(k+n-m) - \frac{i}{2}(\omega - \omega_0)(s_{2N-1}-s_{2N}) + i\Omega s_{s_{2N}} \right\} \\
&\times \frac{(\alpha_i)^k}{k!} \exp \left\{ -i\omega k(s_{2N}) - \frac{i}{2}(\omega + \omega_0)(s_{2N}) \right\}
\end{aligned}$$

on peut aussi réécrire

$$\begin{aligned}
K_{\uparrow\uparrow}(\alpha_f, \alpha_i, ; T) &= e^{-\frac{i}{2}(\omega + \omega_0)T} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T} \alpha_i)^k}{k!} e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2 + |\alpha_i|^2)} \\
&\times \left\{ 1 + \sum_{N=1}^{\infty} (-ig)^{2N} \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \dots \int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} \right. \\
&\times \left. \frac{[(k+n)!]^{2N}}{[k!(k+n-m)!]^N} \exp \left\{ -i \sum_{j=1}^{2N} (-1)^{j+1} [(n-m)\omega + \Omega - \omega_0] s_j \right\} \right\}. \quad (3.13)
\end{aligned}$$

Posons

$$w_{nm}^2(k) = g^2 \frac{[(k+n)!]^2}{[k!(k+n-m)!]} \quad (3.14)$$

et

$$\omega(n-m) - \omega_0 + \Omega = \Delta, \quad (3.15)$$



l'élément de transition  $K_{\uparrow\uparrow}(\alpha_f, \alpha_i; T)$  devient

$$\begin{aligned}
 K_{\uparrow\uparrow}(\alpha_f, \alpha_i; T) &= e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2 + |\alpha_i|^2)} e^{-\frac{i}{2}(\omega + \omega_0)T} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T} \alpha_i)^k}{(k)!} \\
 &\quad \left\{ 1 + \sum_{N=1}^{\infty} [-w_{nm}^2(k)]^N \int_0^T ds_1 e^{-i\Delta s_1} \int_0^{s_1} ds_2 e^{i\Delta s_2} \dots \right. \\
 &\quad \left. \times \int_0^{2N-2} ds_{2N-1} e^{-i\Delta s_{2N-1}} \int_0^{2N-1} ds_{2N} e^{i\Delta s_{2N}} \right\}. \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

Les autres éléments se calculent de la même manière,

-pour  $K_{\uparrow\downarrow}(\alpha_f, \alpha_i; T)$  on a

$$\begin{aligned}
 K_{\uparrow\downarrow}(\alpha_f, \alpha_i; T) &= (-ig) \int_0^T ds_1 \int \frac{d\alpha_1^* d\alpha_1}{\pi} K^+(\alpha_f, \alpha_1; T - s_1) \\
 &\quad \times e^{-i\Omega s_1} \alpha_1^{*m} \alpha_1^n K^-(\alpha_1, \alpha_i; s_1 - 0) \\
 &\quad + \sum_{N=1}^{\infty} (-ig)^{2N+1} \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \dots \int_0^{s_{2N}} ds_{2N+1} \\
 &\quad \times \int \frac{d\alpha_1^* d\alpha_1}{\pi} \dots \frac{d\alpha_{2N+1}^* d\alpha_{2N+1}}{\pi} K^+(\alpha_f, \alpha_1; T - s_1) \\
 &\quad \times e^{-i\Omega s_1} \alpha_1^{*m} \alpha_1^n K^-(\alpha_1, \alpha_2; s_1 - s_2) e^{i\Omega s_1} \alpha_2^m \alpha_2^{*n} \\
 &\quad \times \dots \times e^{i\Omega s_{2N}} \alpha_2^m \alpha_2^{*n} K^+(\alpha_{2N}, \alpha_{2N+1}; s_{2N} - s_{2N+1}) \\
 &\quad \times e^{-i\Omega s_{2N+1}} \alpha_{2N+1}^{*m} \alpha_{2N+1}^n K^-(\alpha_{2N+1}, \alpha_i; s_{2N+1} - 0), \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

ou bien le résultat suivant

$$\begin{aligned}
 K_{\uparrow\downarrow}(\alpha_f, \alpha_i; T) &= (-ig) \int_0^T ds_1 e^{-\frac{|\alpha_f|^2}{2} - \frac{|\alpha_i|^2}{2}} e^{-\frac{i}{2}(\omega + \omega_0)T - i\Delta s_1} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{(k+n-m)!} (\alpha_f^*)^{n-m} \frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T} \alpha_i)^k}{k!} \\
 &\quad \times \left\{ 1 + \sum_{N=1}^{\infty} [-w_{nm}^2(k)]^N \int_0^{s_1} ds_2 e^{i\Delta s_2} \int_0^{s_2} ds_3 e^{-i\Delta s_3} \right. \\
 &\quad \left. \times \dots \int_0^{s_{2N-2}} ds_{2N-1} e^{-i\Delta s_{2N-1}} \int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} e^{i\Delta s_{2N}} \int_0^{s_{2N}} ds_{2N+1} e^{-i\Delta s_{2N+1}} \right\}, \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

-pour  $K_{\uparrow\uparrow}(\alpha_f, \alpha_i; T)$  on a

$$\begin{aligned}
K_{\uparrow\uparrow}(\alpha_f, \alpha_i; T) &= (ig) \int_0^T ds_1 \int \frac{d\alpha_1^* d\alpha_1}{\pi} K^-(\alpha_f, \alpha_1; T - s_1) \\
&\quad \times e^{i\Omega s_1} \alpha_1^m \alpha_1^{*n} K^+(\alpha_1, \alpha_i; s_1 - 0) \\
&\quad + \sum_{N=1}^{\infty} (ig)^{2N+1} \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \dots \int_0^{s_{2N}} ds_{2N+1} \\
&\quad \times \int \frac{d\alpha_1^* d\alpha_1}{\pi} \dots \frac{d\alpha_{2N+1}^* d\alpha_{2N+1}}{\pi} K^-(\alpha_f, \alpha_1; T - s_1) \\
&\quad \times e^{i\Omega s_1} \alpha_1^m \alpha_1^{*n} K^+(\alpha_1, \alpha_2; s_1 - s_2) e^{-i\Omega s_2} \alpha_2^{*m} \alpha_2^n \\
&\quad \times \dots \times e^{-i\Omega s_{2N}} \alpha_{2N}^{*m} \alpha_{2N}^n K^-(\alpha_{2N}, \alpha_{2N+1}; s_{2N} - s_{2N+1}) \\
&\quad \times e^{i\Omega s_{2N+1}} \alpha_{2N+1}^m \alpha_{2N+1}^{*n} K^+(\alpha_{2N+1}, \alpha_i; s_{2N+1} - 0), \tag{3.19}
\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}
K_{\uparrow\uparrow}(\alpha_f, \alpha_i; T) &= (ig) e^{-\frac{|\alpha_f|^2}{2} - \frac{|\alpha_i|^2}{2}} \int_0^T ds_1 e^{-\frac{i}{2}(\omega - \omega_0)T - i\omega(n-m)T + i\Delta s_1} \\
&\quad \times \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{(k+n-m)!} (\alpha_i)^{n-m} \frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T} \alpha_i)^k}{k!} \\
&\quad \times \left\{ 1 + \sum_{N=1}^{\infty} [-w_{nm}^2(k)]^N \int_0^{s_1} ds_2 e^{-i\Delta s_2} \int_0^{s_2} ds_3 e^{i\Delta s_3} \right. \\
&\quad \times \dots \left. \int_0^{s_{2N-2}} ds_{2N-1} e^{i\Delta s_{2N-1}} \int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} e^{-i\Delta s_{2N}} \int_0^{s_{2N}} ds_{2N+1} e^{i\Delta s_{2N+1}} \right\}, \tag{3.20}
\end{aligned}$$

-pour  $K_{\downarrow\downarrow}(\alpha_f, \alpha_i; T)$

$$\begin{aligned}
K_{\downarrow\downarrow}(\alpha_f, \alpha_i; T) &= K^-(\alpha_f, \alpha_i; T) + \sum_{N=1}^{\infty} (ig)^{2N} \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \dots \\
&\quad \times \int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} \int \frac{d\alpha_1^* d\alpha_1}{\pi} \dots \frac{d\alpha_{2N}^* d\alpha_{2N}}{\pi} K^-(\alpha_f, \alpha_1; T - s_1) \\
&\quad \times e^{i\Omega s_1} \alpha_1^m \alpha_1^{*n} K^-(\alpha_1, \alpha_2; s_1 - s_2) e^{-i\Omega s_1} \alpha_2^{*m} \alpha_2^n \\
&\quad \times \dots \times e^{-i\Omega s_{2N}} \alpha_{2N}^{*m} \alpha_{2N}^n K^-(\alpha_{2N}, \alpha_i; s_{2N}), \tag{3.21}
\end{aligned}$$

après les calculs on a

$$\begin{aligned}
K_{11}(\alpha_f, \alpha_i; T) &= e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2 + |\alpha_i|^2)} e^{-\frac{i}{2}(\omega - \omega_0)T} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T} \alpha_i)^k}{(k)!} \\
&\quad \left\{ 1 + \sum_{N=1}^{\infty} [-w_{mn}^2(k)]^N \int_0^T ds_1 e^{i\Delta s_1} \int_0^{s_1} ds_2 e^{-i\Delta s_2} \dots \right. \\
&\quad \left. \times \int_0^{2N-2} ds_{2N-1} e^{i\Delta s_{2N-1}} \int_0^{2N-1} ds_{2N} e^{-i\Delta s_{2N}} \right\}. \quad (3.22)
\end{aligned}$$

### 3.0.4 Intégration sur le temps

Pour pouvoir intégrer sur le temps, utilisons la transformation de Laplace définie par la relation

$$\mathcal{L}_p(f(s)) = \int_0^{\infty} ds e^{-ps} f(s) \quad (3.23)$$

Notre résultat sera réécrit d'abord sous la forme d'un produit de convolution qui s'arrange comme

$$\mathcal{L}_p(F_0(T)) = \mathcal{L}_{p+i\Delta} \left( \int_0^T ds_1 e^{i\Delta(T-s_1)} F_1(s_1) \right), \quad (3.24)$$

en utilisant alors la théorème de convolution on aura

$$\mathcal{L}_p(F_0(T)) = \frac{1}{p} \mathcal{L}_{p+i\Delta} F_1(s_1). \quad (3.25)$$

En effet, définissons  $F_0(T)$  par

$$F_0(T) = \int_0^T ds_1 e^{-i\Delta s_1} \int_0^{s_1} ds_2 e^{i\Delta s_2} \dots \int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} e^{i\Delta s_{2N}} \int_0^{s_{2N}} ds_{2N+1} e^{-i\Delta s_{2N+1}}, \quad (3.26)$$

qui peut se mettre comme un produit de convolution suivant la formule

$$F_0(T) = \int_0^T ds_1 e^{-i\Delta s_1} F_1(s_1) \quad (3.27)$$

et où

$$F_1(s_1) = \int_0^{s_1} ds_2 e^{i\Delta s_2} F_2(s_2) \quad (3.28)$$

et allant ainsi jusqu'à l'ordre  $2N - 1$ .

La technique de Laplace donne

$$\tilde{F}(0, p) = \frac{1}{p} \tilde{F}_1(0, p + i\Delta) \quad (3.29)$$

avec

$$\tilde{F}_1(0, p + i\Delta) = \frac{1}{(p + i\Delta)} \tilde{F}_2(0, p) \quad (3.30)$$

et

$$\tilde{F}_2(0, p) = \frac{1}{p} \tilde{F}_3(0, p + i\Delta), \quad (3.31)$$

et ainsi de suite jusqu'à l'ordre  $2N - 1$

$$\tilde{F}_{2N-1}(0, p) = \frac{1}{p} \tilde{F}_{2N}(0, p + i\Delta). \quad (3.32)$$

En conclusion, on a

$$\mathcal{L}_p(F_0(T)) = \left[ \frac{1}{p(p + i\Delta)} \right]^N \quad (3.33)$$

Cette méthode de Laplace permet alors de déduire l'élément de transition  $K_{\uparrow\uparrow}(\alpha_f, \alpha_i; T)$

$$\begin{aligned} \tilde{F}(0, p) &= \sum_{N=1}^{\infty} [-w_{nm}^2(k)]^N \int_0^{\infty} dT e^{-pT} F(0, T) \\ &= \frac{1}{p} \sum_{N=1}^{\infty} \left[ \frac{-w_{nm}^2(k)}{p(p + i\Delta)} \right]^N = \frac{p + i\Delta}{p(p + i\Delta) + w_{nm}^2(k)} - \frac{1}{p}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

qui se décompose comme

$$\begin{aligned} \tilde{F}(0, p) &= \frac{(p + i\frac{\Delta}{2})}{(p + i\frac{\Delta}{2})^2 + (\frac{\Delta^2}{4} + \omega_{nm}^2(k))} \\ &\quad + \frac{\frac{i\Delta}{2}}{(p + i\frac{\Delta}{2})^2 + (\frac{\Delta^2}{4} + \omega_{nm}^2(k))}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Inversons la transformée de Laplace, on obtient

$$\begin{aligned} K_{\uparrow\uparrow}(\alpha_f, \alpha_i; T) &= e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2 + |\alpha_i|^2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_f^* e^{-\omega T} \alpha_i)^k}{(k)!} e^{\frac{i}{2}[(n-m)-1]\omega - \Omega T} \\ &\quad \times \left( \cos \frac{\Omega_1}{2} T + i \frac{\Delta}{\Omega_1} \sin \frac{\Omega_1}{2} T \right); \end{aligned} \quad (3.36)$$

avec

$$\Omega_1 = \sqrt{[\Delta^2 + 4\omega_{nm}^2(k)]}. \quad (3.37)$$

Les autres éléments s'obtiennent de la même manière :

-pour le propagateur  $K_{\uparrow\downarrow}(\alpha_f, \alpha_i; T)$  on va jusqu'à l'ordre  $2N$ . On a de même

$$\mathcal{L}_p(F_0(T)) = \left[ \frac{1}{p(p + i\Delta)} \right]^{N+1}, \quad (3.38)$$

et donc

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}(0, p) &= \int_0^{\infty} dT e^{-pT} F_1(0, T) + \sum_{N=1}^{\infty} [-w_{nm}^2(k)]^N \int_0^{\infty} dT e^{-pT} F(0, T) \\
 &= \frac{1}{p(p+i\Delta)} + \frac{1}{p(p+i\Delta)} \sum_{N=1}^{\infty} \left[ \frac{-w_{nm}^2(k)}{p(p+i\Delta)} \right]^N \\
 &= \frac{1}{(p+i\frac{\Delta}{2})^2 + (\frac{\Delta^2}{4} + \omega_{nm}^2(k))}
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

L'inversion de Laplace donne

$$\begin{aligned}
 K_{\uparrow\downarrow}(\alpha_f, \alpha_i; T) &= (-ig) e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2 + |\alpha_i|^2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_f^* e^{-\omega T} \alpha_i)^k}{(k)!} e^{-\frac{1}{2}[(n-m)+1]\omega + \Omega]T} \\
 &\quad \times (\alpha_f)^{n-m} \frac{(k+n)!}{(k+n-m)!} \left( \frac{\sin \frac{\Omega_1 T}{2}}{\frac{\Omega_1}{2}} \right),
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

-pour le propagateur  $K_{\uparrow\downarrow}(\alpha_f, \alpha_i; T)$ , on a

$$\mathcal{L}_p(F_0(T)) = \left[ \frac{1}{p(p+i\Delta)} \right]^{N+1}, \tag{3.41}$$

et

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}(0, p) &= \int_0^{\infty} dT e^{-pT} F_1(0, T) + \sum_{N=1}^{\infty} [-w_{nm}^2(k)]^N \int_0^{\infty} dT e^{-pT} F(0, T) \\
 &= \frac{1}{p(p-i\Delta)} + \frac{1}{p(p-i\Delta)} \sum_{N=1}^{\infty} \left[ \frac{-w_{nm}^2(k)}{p(p-i\Delta)} \right]^N \\
 &= \frac{1}{(p-i\frac{\Delta}{2})^2 + (\frac{\Delta^2}{4} + \omega_{nm}^2(k))}
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

En inversant la transformée de Laplace on aura

$$\begin{aligned}
 K_{\downarrow\uparrow}(\alpha_f, \alpha_i; T) &= (-ig) e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2 + |\alpha_i|^2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_f^* e^{-\omega T} \alpha_i)^k}{(k)!} e^{\frac{1}{2}[(n-m)-1]\omega - \Omega]T} \\
 &\quad \times (\alpha_i^*)^{n-m} \frac{(k+n)!}{(k+n-m)!} \left( \frac{\sin \frac{\Omega_1 T}{2}}{\frac{\Omega_1}{2}} \right),
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

-pour le propagateur  $K_{\downarrow\uparrow}(\alpha_f, \alpha_i; T)$  on a

$$\mathcal{L}_p(F_0(T)) = \left[ \frac{1}{p(p-i\Delta)} \right]^N, \tag{3.44}$$

après un calcul identique on trouve

$$K_{\downarrow\downarrow}(\alpha_f, \alpha_i; T) = e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2 + |\alpha_i|^2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T} \alpha_i)^k}{(k)!} e^{\frac{1}{2}[(m-n)-1]i\omega T} \\ \times \left( \cos \frac{\Omega_2}{2} T - i \frac{\Delta}{\Omega_2} \sin \frac{\Omega_2}{2} T \right), \quad (3.45)$$

avec

$$\Omega_2 = \sqrt{[\Delta^2 + 4\omega_{mn}^2(k)]}. \quad (3.46)$$

### 3.0.5 Facteur d'inversion des populations atomiques

Calculons les probabilités de transitions suivant la définitions

$$P_{rs}(t_f) = \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha_f |K_{rs}(\alpha_f; t_i; \alpha_i; t_i)|^2 \quad (3.47)$$

avec

$$K_{rs}(\alpha_f; t_i, \alpha_i; t_i) = \langle s | K_{rs}(\alpha_f; t_i, \alpha_i; t_i) | r \rangle. \quad (3.48)$$

Pour  $K_{\uparrow\uparrow}(\alpha_f, \alpha_i; T)$  on a

$$P_{\uparrow\uparrow}(T) = \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha_f |K_{\uparrow\uparrow}(\alpha_f, \alpha_i; T)|^2 \quad (3.49) \\ = \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha_f e^{-(|\alpha_f|^2 + |\alpha_i|^2)} \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T} \alpha_i)^{k_1}}{(k_1)!} \frac{(\alpha_f e^{i\omega T} \alpha_i^*)^{k_2}}{(k_2)!} \\ \times \left( \cos \frac{\Omega_1}{2} T + i \frac{\Delta}{\Omega_1} \sin \frac{\Omega_1}{2} T \right) \left( \cos \frac{\Omega_1}{2} T - i \frac{\Delta}{\Omega_1} \sin \frac{\Omega_1}{2} T \right), \quad (3.50)$$

avec

$$\Omega_1 = \sqrt{[\Delta^2 + 4\omega_{nm}^2(k_{1,2})]}, \quad (3.51)$$

utilisons la propriété(3.11) on trouve

$$P_{\uparrow\uparrow}(T) = e^{-|\alpha_i|^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha_i|^{2k}}{k!} \left[ \cos \Omega_1 T + \left( 1 + \frac{\Delta^2}{\Omega_1^2} \right) \sin^2 \frac{\Omega_1}{2} T \right]. \quad (3.52)$$

Pour  $K_{\uparrow\downarrow}(\alpha_f, \alpha_i; T)$  on a

$$P_{\uparrow\downarrow}(T) = \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha_f |K_{\uparrow\downarrow}(\alpha_f, \alpha_i; T)|^2 \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{g^2}{\pi} \int d^2\alpha_f e^{-(|\alpha_f|^2+|\alpha_i|^2)} (\alpha_f^*)^{n-m} \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T} \alpha_i)^{k_1}}{(k_1)!} \frac{(k_1+n)!}{(k_1+n-m)!} \\
&(\alpha_f)^{n-m} \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{(\alpha_f e^{i\omega T} \alpha_i^*)^{k_2}}{(k_2)!} \frac{(k_2+n)!}{(k_2+n-m)!} \left( \frac{\sin \frac{\Omega_1 T}{2}}{\frac{\Omega_1}{2}} \right) \left( \frac{\sin \frac{\Omega_1 T}{2}}{\frac{\Omega_1}{2}} \right), \quad (3.54)
\end{aligned}$$

Après le calcul on trouve

$$P_{\uparrow\downarrow}(T) = e^{-|\alpha_i|^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_i \alpha_i^*)^k}{k!} [w_{nm}^2(k)] \frac{\sin^2 \frac{\Omega_1 T}{2}}{(\frac{\Omega_1}{2})^2} \quad (3.55)$$

on trouve

$$P_{\uparrow\downarrow}(T) = e^{-|\alpha_i|^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha_i|^{2k}}{k!} \left(1 - \frac{\Delta^2}{\Omega_1^2}\right) \sin^2 \frac{\Omega_1 T}{2}. \quad (3.56)$$

Pour  $K_{\uparrow\uparrow}(\alpha_f, \alpha_i; T)$  on a

$$P_{\uparrow\uparrow}(T) = \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha_f |K_{\uparrow\uparrow}(\alpha_f, \alpha_i; T)|^2 \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{g^2}{\pi} \int d^2\alpha_f e^{-(|\alpha_f|^2+|\alpha_i|^2)} (\alpha_i)^{n-m} \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T} \alpha_i)^{k_1}}{(k_1)!} \frac{(k_1+n)!}{(k_1+n-m)!} \\
&\times (\alpha_i^*)^{n-m} \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{(\alpha_f e^{i\omega T} \alpha_i^*)^{k_2}}{(k_2)!} \frac{(k_2+n)!}{(k_2+n-m)!} \left( \frac{\sin \frac{\Omega_1 T}{2}}{\frac{\Omega_1}{2}} \right) \left( \frac{\sin \frac{\Omega_1 T}{2}}{\frac{\Omega_1}{2}} \right), \quad (3.58)
\end{aligned}$$

Après le calcul on a

$$P_{\uparrow\uparrow}(T) = e^{-|\alpha_i|^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha_i|^{2(k+n-m)}}{(k+n-m)!} \left(1 - \frac{\Delta^2}{\Omega_1^2}\right) \sin^2 \frac{\Omega_1 T}{2}. \quad (3.59)$$

-Pour  $K_{\downarrow\downarrow}(\alpha_f, \alpha_i; T)$  on a

$$P_{\downarrow\downarrow}(T) = \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha_f |K_{\downarrow\downarrow}(\alpha_f, \alpha_i; T)|^2 \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha_f e^{-(|\alpha_f|^2+|\alpha_i|^2)} \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T} \alpha_i)^{k_1}}{(k_1)!} \frac{(\alpha_f e^{i\omega T} \alpha_i^*)^{k_2}}{(k_2)!} \\
&\times \left( \cos \frac{\Omega_2 T}{2} - i \frac{\Delta}{\Omega_2} \sin \frac{\Omega_2 T}{2} \right) \left( \cos \frac{\Omega_2 T}{2} + i \frac{\Delta}{\Omega_2} \sin \frac{\Omega_2 T}{2} \right), \quad (3.61)
\end{aligned}$$

avec la même méthode on trouve la résultat suivante

$$P_{\downarrow\downarrow}(T) = e^{-|\alpha_i|^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha_i|^{2k}}{k!} \left[ \cos \Omega_2 T + \left(1 + \frac{\Delta^2}{\Omega_2^2}\right) \sin^2 \frac{\Omega_2 T}{2} \right]. \quad (3.62)$$

supposons qu'initialement l'atome était dans l'état fondamental et le champ d'interaction dans son état cohérent. Pour l'API nous avons

$$W_1(T) = P_{\uparrow\uparrow}(T) - P_{\uparrow\downarrow}(T)$$

$$W_1(T) = +e^{-|\alpha_i|^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha_i|^{2k}}{k!} \left[ \cos \Omega_1 T + 2 \frac{\Delta^2}{\Omega_1^2} \sin^2 \frac{\Omega_1 T}{2} \right] \quad (3.63)$$

Si l'atome est dans l'état excité nous prenons pour l'API cette formule

$$W_2(T) = P_{\downarrow\uparrow}(T) - P_{\downarrow\downarrow}(T), \quad (3.64)$$

et donc

$$W_2(T) = -e^{-|\alpha_i|^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha_i|^{2k}}{k!} \left[ \cos \Omega_2 T + 2 \frac{\Delta^2}{\Omega_2^2} \sin^2 \frac{\Omega_2 T}{2} \right] \quad (3.65)$$

**cas particulier**

Dans le cas résonnant  $n = 1$ ,  $m = 0$ , on a

$$W_1(T) = +e^{-|\alpha_i|^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha_i|^{2k}}{k!} (\cos \Omega_1 T)$$

$$\Omega_1(k) = \sqrt{+4g^2(k+1)}$$

$W_1(T)$  est donné par la figure (3.1).

Dans le cas non résonnant  $n = 2$ ,  $m = 0$ , on a

$$W_1(T) = +e^{-|\alpha_i|^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha_i|^{2k}}{k!} \frac{4g^2(k+1)(k+2)}{\Omega_1} (\cos \Omega_1 T)$$

où

$$\Omega_1(k) = \sqrt{(\omega_0 - 2\omega + \Omega) + 4g^2(k+1)(k+2)}$$

$W_1(T)$  est donné par la figure (3.2)



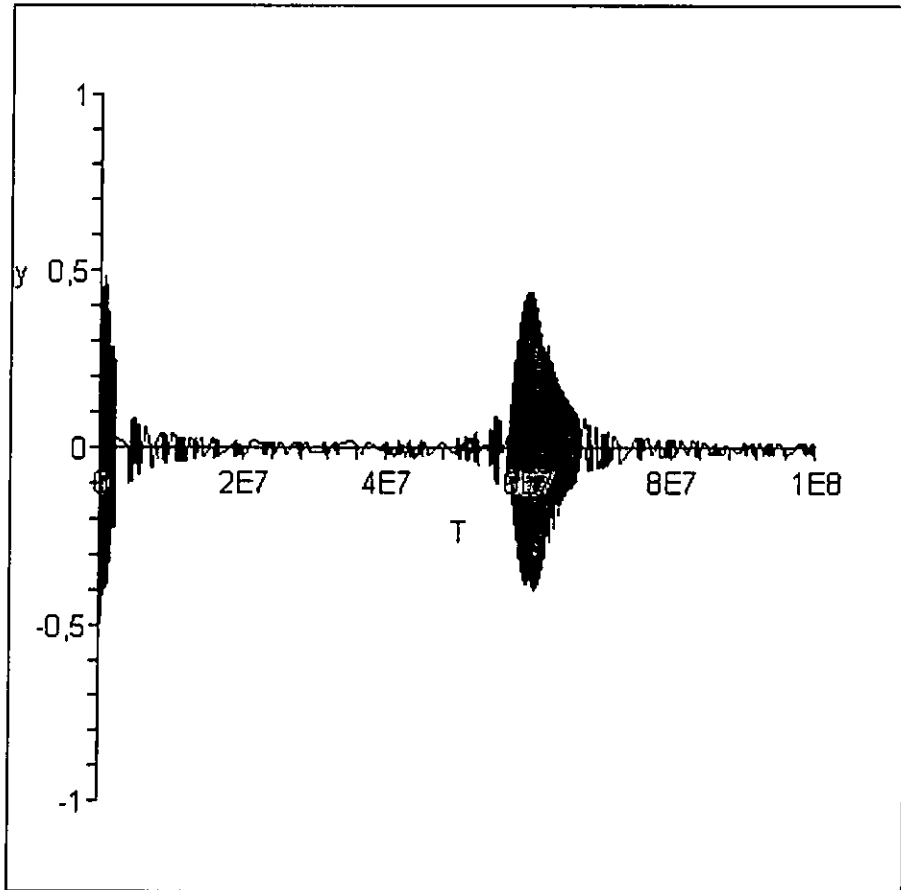


Fig. 3.1- Inversion de la populations atomiques  $W_1(T) = y$  dans le cas résonnant. Ici  $|\alpha_i|^2 = 10$

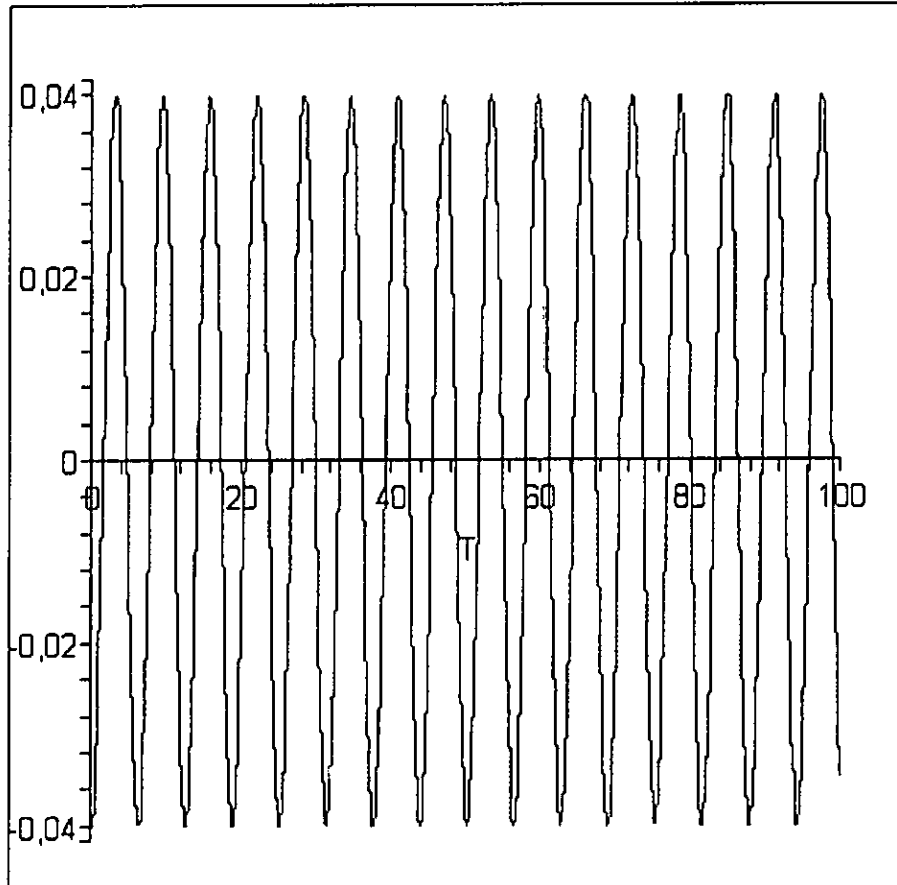


Fig. 3.1- Inversion de la populations atomiques  $W_1(T) = y$  dans le cas non résonnant. Ici  $|\alpha_i|^2 = 10$

## Chapitre 4

# Oscillateur de Dirac via le modèle J-C

### 4.1 Le propagateur dans la représentation globale

Le propagateur de l'oscillateur du Dirac est la fonction de Green causale qui satisfait à l'équation du Dirac modifiée suivante

$$(\hat{\eta}_\mu - m)S^c(x_f, x_i) = -\delta^4(x_f - x_i),$$

où

$$\hat{\eta}_\mu = \gamma^\mu \hat{\pi}_\mu \quad , \quad \hat{\pi}_\mu (\hat{\pi}_0 = i\partial_0 \quad , \quad \hat{\pi}_i = i\partial_i + im\omega\gamma^0 x_i), \quad (4.1)$$

et pour toutes les matrices  $\gamma$  nous avons

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2\eta^{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, \dots, 3 \quad , \quad \eta^{\mu\nu} = \text{dig}(1, -1, -1, -1). \quad (4.2)$$

Dans notre cas, nous nous intéressons au cas (1 + 1) dimension.

D'après la méthode du temps propre de Schwinger, la fonction de Green  $S^c(x_f, x_i)$  est traitée comme un élément du matrice, c'est à dire

$$S^c(x_f, x_i) = \left( \hat{\eta}_\mu + m \right)_{x_f} G^c(x_f, x_i), \quad (4.3)$$

avec  $G^c(x_f, x_i)$  s'écrivant sous la forme

$$G^c(x_f, x_i) = \langle x_f | \frac{-1}{\left( \hat{\eta}_\mu - m \right) \left( \hat{\eta}_\mu + m \right)} | x_i \rangle, \quad (4.4)$$

on pose

$$B = (\hat{\eta}_\mu - m) = \gamma^0 \hat{p}_0 + \gamma^1 \hat{p}_1 - im\omega \gamma^0 \gamma^1 \hat{x}_1 - m \quad (4.5)$$

$$A = (\hat{\eta}_\mu + m) = \gamma^0 \hat{p}_0 + \gamma^1 \hat{p}_1 - im\omega \gamma^0 \gamma^1 \hat{x}_1 + m. \quad (4.6)$$

Le temps propre de Schwinger est introduit alors via la représentation

$$B^{-1} = A \cdot \frac{1}{BA} = A \left( -i \int_0^\infty d\lambda \exp [i\lambda (BA + i\varepsilon)] \right) = A \cdot G^c, \quad (4.7)$$

où

$$G^c = \frac{1}{BA} = \frac{-1}{(\hat{\eta}_\mu - m)(\hat{\eta}_\mu + m)} \quad (4.8)$$

et

$$BA = (\hat{\eta}_\mu - m)(\hat{\eta}_\mu + m) = \hat{p}_0^2 - \hat{p}_1^2 - m^2 \omega^2 \hat{x}_1^2 - m^2 - m\omega \gamma^0.$$

Cette représentation (4.7) est dite projection globale. Dans ce qui suit nous allons utiliser cette représentation afin de déduire la solution de l'oscillateur de Dirac. En plus, la fonction  $G^c(x_f, x_i)$  sera calculé suivant la méthode fonctionnelle de Feynman. Dans ce but, écrivons

$$G^c(x_f, x_i) = -i \int_0^\infty d\lambda \langle x_f | e^{-i\lambda \hat{H}} | x_i \rangle \quad (4.9)$$

avec

$$\hat{H} = -\hat{P}_0^2 + \hat{P}_1^2 + m^2 + m^2 \omega^2 (\hat{x}_1)^2 + m\omega \gamma^0. \quad (4.10)$$

Il est important de noter que pour avoir une forme de type Feynman (intégrale du chemin) toutes les quantités qui figurent dans l'action correspondantes doivent être de nature bosonique. Dans le cas de l'oscillateur Dirac en projection globale, le terme de couplage spin-orbite est absent. Ce qui n'est le cas de la projection locale où ce terme est présent. En fait, ce terme permet une certaine identification avec le modèle de Jaynes-Cummings bien connu en optique quantique. Et dans le but de rester dans le même esprit d'analogie, remplaçons les opérateurs position et impulsion par des opérateurs création et annihilation suivants

$$\begin{cases} \hat{x}_1 = \sqrt{\frac{1}{2m\omega}} (a + a^\dagger) \\ \hat{p}_1 = -i\sqrt{\frac{m\omega}{2}} (a - a^\dagger) \\ [x_1, p_1] = i, \quad \hbar = 1 \end{cases} \quad (4.11)$$

L'Hamiltonien devient

$$\hat{H} = m\omega (2a^+a + 1) + m\omega\gamma^0 - \hat{p}_0^2 + m^2. \quad (4.12)$$

Or en dimension  $(1 + 1)$ , les matrices de spin prennent la représentation suivante

$$\begin{cases} \gamma^0 = \sigma^3 \\ i\gamma^1 = \sigma^1 \\ i\gamma^0\gamma^1 = i\sigma^2 \end{cases} \quad (4.13)$$

ce qui laisse écrire

$$\hat{H} = m\omega (2a^+a + 1) + m\omega\sigma_3 - \hat{p}_0^2 + m^2, \quad (4.14)$$

qui est analogue à l'Hamiltonien d'un système à deux niveaux en présence d'un champ photonique et dont le couplage deux niveaux-champ est absent.

Utilisons maintenant la représentation fermion-boson de ce système déjà présentée dans (2.12), on aura

$$\hat{H} = m\omega (2a^+a + 1) + m\omega (u^+u - d^+d) - \hat{p}_0^2 + m^2. \quad (4.15)$$

Maintenant, on est en mesure d'associer à cet Hamiltonien une forme intégrale de chemins de Feynman. Pour ce faire, suivons la procédure habituelle : Discrétisons le temps propre de Schwinger  $\lambda$  puis appliquons la relation de Trotter et enfin introduisons la base adéquate au calcul. Il vient

$$\begin{aligned} K(f, i, \lambda) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^{N-1} dt_j \prod_{j=1}^N \langle t_j | e^{-ie(-\hat{p}_0^2 + m^2)} | t_{j-1} \rangle \\ &\times \int \prod_{j=1}^{N-1} \frac{d\alpha_j^* d\alpha_j}{\pi} \prod_{j=1}^N \langle \alpha_j | e^{-iem\omega(2a^+a+1)} | \alpha_{j-1} \rangle \\ &\times \int \prod_{j=1}^{N-1} d\psi_j^* d\psi_j d\phi_j^* d\phi_j e^{-\psi_j^* \psi_j - \phi_j^* \phi_j} \prod_{j=1}^N \langle \psi_j, \phi_j | e^{-iem\omega(u^+u - d^+d)} | \psi_{j-1}, \phi_{j-1} \rangle, \end{aligned} \quad (4.16)$$

#### 4.1.1 Calcul de la partie temporelle du propagateur

soit à calculer

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^{N-1} dt_j \prod_{j=1}^N \langle t_j | e^{-ie(-\hat{p}_0^2 + m^2)} | t_{j-1} \rangle. \quad (4.17)$$

Insérons  $N$  fois l'identité suivante

$$\int |p_0\rangle \langle p_0| dp_0 = 1 \quad (4.18)$$

dans le propagateur, il vient

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^{N-1} dt_j \prod_{j=1}^N dp_0^j \prod_{J=1}^N \langle t_j | e^{-i\epsilon(-(\hat{p}_0^j)^2 + m^2)} |p_0^j\rangle \langle p_0^j | t_{j-1}\rangle, \quad (4.19)$$

avec

$$\begin{cases} \hat{p}_0 |p_0\rangle = p_0 |p_0\rangle \\ \langle t_j | p_0^j \rangle \langle p_0^j | t_{j-1}\rangle = \frac{1}{2\pi} \exp [ip_0^j (t_j - t_{j-1})] \end{cases} \quad (4.20)$$

Ce qui donne encore

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-i\epsilon Nm^2} \int \prod_{j=1}^{N-1} dt_j \prod_{j=1}^N dp_0^j \times e^{i \sum_{j=1}^N \epsilon (p_0^j)^2} \prod_{j=1}^N \langle t_j | p_0^j \rangle \langle p_0^j | t_{j-1}\rangle \\ & = \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-i\epsilon Nm^2} \int \prod_{j=1}^{N-1} dt_j \prod_{j=1}^N dp_0^j \exp \left( i \sum_{j=1}^N \epsilon (p_0^j)^2 \right) \frac{e^{i \sum_{j=1}^N p_0^j (t_j - t_{j-1})}}{(2\pi)^N} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Avec la propriété suivante de la fonction delta

$$\int \frac{dp_{j-1}}{2\pi} \delta(p_j - p_{j-1}) e^{-i\epsilon p_{j-1}} = e^{-i\epsilon p_j} \quad (4.22)$$

le résultat sera alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^{N-1} dt_j \prod_{j=1}^N \langle t_j | e^{-i\epsilon(-(\hat{p}_0^j)^2 + m^2)} |t_{j-1}\rangle = e^{-i\lambda m^2} \int \frac{dp_0}{2\pi} e^{i\lambda p_0^2 + ip_0 T} \quad (4.23)$$

Insérons ce résultat dans (4.16) et calculons chacun des éléments de matrice fermionique et bosonique, on aura sous forme continue, le propagateur suivant

$$K_i(f, i, \lambda) = e^{-im^2 \lambda} \int \frac{dp_0}{2\pi} e^{i\lambda p_0^2 + ip_0 T} K^b(f, i, \lambda) K^f(f, i, \lambda), \quad (4.24)$$

avec

$$K^b(f, i, \lambda) = \int_{\alpha_i}^{\alpha_f} D\alpha^* D\alpha \exp \left\{ i \int_0^\lambda ds \left[ \frac{i}{2} (\alpha^* \dot{\alpha} - \dot{\alpha} (\alpha^*)) - m\omega - 2m\omega \alpha^* \alpha \right] \right\} \quad (4.25)$$

$$K^f(f, i, \lambda) = \int D\psi^* D\psi D\phi^* D\phi \exp \left\{ i \int_0^\lambda ds \left[ i (\psi^* \dot{\psi} + \dot{\phi}^* \phi) - \lambda m\omega (\psi^* \psi - \phi^* \phi) \right] \right\}. \quad (4.26)$$

## 4.1.2 Calcul de la partie fermionique du propagateur

Cette partie fermionique du propagateur a la forme discrète suivante

$$K^f(f, i, \lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^{N-1} d\psi_j^* d\psi_j d\phi_j^* d\phi_j e^{-\psi_j^* \psi_j - \phi_j^* \phi_j} \times \exp \left[ \sum_{j=1}^N [(1 - i\epsilon m \omega) \psi_j^* \psi_{j-1} + (1 + i\epsilon m \omega) \phi_j^* \phi_{j-1}] \right]. \quad (4.27)$$

Faisons comme précédemment et introduisons le vecteur  $q_j$

$$q_j = \begin{pmatrix} \psi_j \\ \phi_j \end{pmatrix} \text{ et } \bar{q}_j = (\bar{\psi}_j, \bar{\phi}_j) \quad (4.28)$$

ce qui permet l'écriture suivante

$$K^f(f, i, \lambda) = \int \prod_{j=1}^{N-1} dq_j^+ dq_j \exp(-q_j^+ q_j) \exp \left[ \sum_{j=1}^N q_j^+ R(j) q_{j-1} \right], \quad (4.29)$$

avec

$$R(j) = \exp(-i\epsilon m \omega \sigma_z) = \begin{pmatrix} 1 - i\epsilon m \omega & 0 \\ 0 & 1 + i\epsilon m \omega \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

Se référant à la section (2.1), la matrice  $M_{ij}$  et les vecteurs  $P$ ,  $V$  et  $W^+$  sont définis de la même manière et enfin le propagateur est donné par

$$K^f(f, i, \lambda) = (\det M) \exp[W^+ M^{-1} V], \quad (4.31)$$

avec

$$\det M = 1, \quad M^{-1} = R(\lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{N-1} R(j) = \lim_{N \rightarrow \infty} \exp \left( -i \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon m \omega \sigma_3 \right) \quad (4.32)$$

Le propagateur aura alors la forme suivante

$$K^f(f, i, \lambda) = \exp[q_f^+ R(\lambda) q_i]. \quad (4.33)$$

Les éléments de matrice de  $R(\lambda)$  sont

$$\begin{cases} R_{11}(\lambda) = \exp(-i m \omega \lambda), & R_{22}(\lambda) = \exp(i m \omega \lambda) \\ R_{12}(\lambda) = 0 = R_{21}(\lambda) \end{cases} \quad (4.34)$$

La formule finale du propagateur en fonction des variables originales  $\psi$  et  $\phi$  est

$$K^f(f, i, \lambda) = \exp \{ \psi_f^* R_{11}(j, \lambda) \psi_i + \phi_f^* R_{22}(j, \lambda) \phi_i \}. \quad (4.35)$$

Calculons maintenant l'amplitude de transition up-up du spin

$$\begin{aligned} K_{\uparrow\uparrow}^f(\alpha_f, \alpha_i; \lambda) &= \int d\psi_f^* d\psi_f d\psi_i^* d\psi_i d\phi_f^* d\phi_f d\phi_i^* d\phi_i \\ &\times \exp \left( -|\psi_f|^2 - |\psi_i|^2 - |\phi_f|^2 - |\phi_i|^2 \right) \langle \uparrow | \psi_f, \phi_f \rangle K^f(f, i, \lambda) \langle \psi_i, \phi_i | \uparrow \rangle, \end{aligned} \quad (4.36)$$

utilisant les relations suivantes

$$\begin{cases} \langle \uparrow | \psi_f, \phi_f \rangle = \psi_f & , \langle \psi_i, \phi_i | \uparrow \rangle = \psi_i^* \\ \psi_f \psi_i^* = e^{-\psi_i^* \psi_f} - 1, \end{cases} \quad (4.37)$$

et remplaçant l'expression de  $K^f(f, i, \lambda)$  dans  $K_{\uparrow\uparrow}^f(f, i, \lambda)$  on trouve

$$\begin{aligned} K_{\uparrow\uparrow}^f(\alpha_f, \alpha_i; \lambda) &= \int d\psi_f^* d\psi_f d\psi_i^* d\psi_i d\phi_f^* d\phi_f d\phi_i^* d\phi_i \exp \left( |\psi_f|^2 - |\psi_i|^2 - |\phi_f|^2 - |\phi_i|^2 \right) \\ &\times \exp \{ \psi_f^* R_{11}(j, \lambda) \psi_i + \phi_f^* R_{22}(j, \lambda) \phi_i \} \langle \uparrow | \psi_f, \phi_f \rangle \langle \psi_i, \phi_i | \uparrow \rangle. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Dans le but d'intégrer sur les variables de Grassmann, écrivons le résultat précédent sous la forme suivante

$$K_{\uparrow\uparrow}^f(\alpha_f, \alpha_i; \lambda) = \int dv^+ dv \left[ \exp(v^+ M' v) - \exp(v^+ M v) \right], \quad (4.39)$$

introduisons un vecteur définie par

$$v^+ = (\psi_i^*, \psi_f^*, \phi_i^*, \phi_f^*) \quad , \quad v = \begin{pmatrix} \psi_i \\ \psi_f \\ \phi_i \\ \phi_f \end{pmatrix}, \quad (4.40)$$

avec les matrices  $\dot{M}$  et  $M$  donnés par

$$\dot{M} = \begin{pmatrix} \dot{A} & C \\ D & B \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

les blocs  $D, C$  sont nuls et  $\dot{A}, A, B$  sont donnés par

$$\dot{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ R_{11} & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ R_{11} & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ R_{22} & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.42)$$



Le résultat de l'intégration Gaussienne est facilement fait suivant la formule (2.4) utilisons en plus l'identité suivante

$$\begin{cases} \det M' = \det (A' - CB^{-1}D) \det B \\ \det M' = \det A' = 1 + R_{11}(\alpha; T) \end{cases}, \quad \det M = \det A = 1 \quad (4.43)$$

finalement l'amplitude de transition entre l'état up-up sera donnée par

$$K_{\uparrow\uparrow}^f(\alpha_f, \alpha_i; \lambda) = \exp(-im\omega\lambda) \quad (4.44)$$

Les autres éléments de matrice correspondants aux différentes amplitudes de transition se calculent de la même manière

$$K_{\downarrow\downarrow}^f(\alpha_f, \alpha_i; \lambda) = \exp(+im\omega\lambda) \quad (4.45)$$

et

$$K_{\uparrow\downarrow}^f(\alpha_f, \alpha_i; \lambda) = 0 \quad \text{et} \quad K_{\downarrow\uparrow}^f(\alpha_f, \alpha_i; \lambda) = 0 \quad (4.46)$$

### 4.1.3 Intégration sur les variables complexes

Calculons maintenant la partie bosonique définie par

$$\begin{aligned} K^b(f, i, \lambda) &= \int_{\alpha_i}^{\alpha_f} D\alpha^* D\alpha \exp \left\{ i \int_0^\lambda ds \left[ \frac{i}{2} (\alpha^* \dot{\alpha} - \dot{\alpha} (\alpha^*)) - m\omega - 2m\omega \alpha^* \alpha \right] \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^{N-1} \frac{d\alpha_j^* d\alpha_j}{\pi} \exp \left\{ i \sum_{j=1}^N \epsilon \left[ \frac{i}{2} \left( \alpha_j^* \frac{(\alpha_j - \alpha_{j-1})}{\epsilon} - \frac{(\alpha_j^* - \alpha_{j-1}^*)}{\epsilon} \alpha_{j-1} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2m\omega \alpha_j^* \alpha_{j-1} - m\omega \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Introduisons comme d'habitude le vecteur  $\alpha$  et de la matrice  $M$  définis par

$$\alpha = \{\alpha_j\}, \quad M_{ij} = \delta_{ij} - e^{-2im\omega\epsilon} \delta_{i,j+1} \quad \text{et} \quad i \geq 1, j \leq N, \quad (4.48)$$

le propagateur se réduit à

$$K_{\uparrow\uparrow}^b(\alpha_f, \alpha_i; \lambda) = e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_i|^2 + |\alpha_f|^2)} \int d\alpha^+ d\alpha \exp \left( -\frac{1}{2} \alpha^+ M \alpha + \alpha^+ V + W^+ \alpha \right) \quad (4.49)$$

avec

$$V = \begin{pmatrix} e^{-2im\omega\epsilon} \alpha_i \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad W^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_f e^{-2im\omega\epsilon} \end{bmatrix}, \quad (4.50)$$

En utilisant le shift usuel des variables

$$\alpha \longrightarrow \alpha + M^{-1}V, \quad \alpha^+ \longrightarrow \alpha^+ + W^+M^{-1}, \quad (4.51)$$

et la formule de la Gaussienne (2.4), le résultat devient

$$K^b(f, i, \lambda) = (\det M) \exp [W^+M^{-1}V], \quad (4.52)$$

avec

$$\begin{cases} \det M = 1 \\ M^{-1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{N+1} e^{-2im\omega\epsilon} \end{cases} \quad (4.53)$$

Le propagateur s'écrira alors sous forme

$$K^b(f, i, \lambda) = \exp \left[ -\frac{1}{2} (|\alpha_i|^2 + |\alpha_f|^2) + \alpha_f^* e^{-2im\omega\lambda} \alpha_i \right]. \quad (4.54)$$

Finalement, chaque élément du propagateur sera donné par

$$K_{\uparrow\uparrow}(\alpha_f, \alpha_i; \lambda) = \int \frac{dp_0}{2\pi} e^{i\lambda(p_0^2 - m^2 - 2im\omega) + ip_0 T} \\ \times \exp \left[ -\frac{1}{2} (|\alpha_i|^2 + |\alpha_f|^2) + \alpha_f^* e^{-2im\omega\lambda} \alpha_i \right], \quad (4.55)$$

et

$$K_{\downarrow\downarrow}(\alpha_f, \alpha_i; \lambda) = \int \frac{dp_0}{2\pi} e^{i\lambda(p_0^2 - m^2 - 2im\omega) + ip_0 T} \\ \times \exp \left[ -\frac{1}{2} (|\alpha_i|^2 + |\alpha_f|^2) + \alpha_f^* e^{-2im\omega\lambda} \alpha_i \right], \quad (4.56)$$

$$K_{\downarrow\uparrow}(\alpha_f, \alpha_i; \lambda) = 0 \quad \text{et} \quad K_{\uparrow\downarrow}(\alpha_f, \alpha_i; \lambda) = 0. \quad (4.57)$$

Projectons maintenant ce résultat sur la base de configuration en utilisant les relations de projection suivantes

$$\begin{cases} \langle x | \alpha \rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle x | n \rangle \\ \langle x | n \rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{m\omega x^2}{2}} H_n(\sqrt{m\omega}x) \end{cases} \quad (4.58)$$

$H_n(\sqrt{m\omega}x)$  était le polynôme d'Hermite.

Le calcul se réduit à

$$K_{\uparrow\uparrow}(x_f, x_i; \lambda) = \int \frac{d\alpha_f^2 d\alpha_i^2}{\pi^2} \langle x_f | \alpha_f \rangle K_{\uparrow\uparrow}(\alpha_f, \alpha_i; \lambda) \langle \alpha_i | x_i \rangle \quad (4.59)$$

$$K_{\downarrow\downarrow}(x_f, x_i; \lambda) = \int \frac{d\alpha_f^2 d\alpha_i^2}{\pi^2} \langle x_f | \alpha_f \rangle K_{\downarrow\downarrow}(\alpha_f, \alpha_i; \lambda) \langle \alpha_i | x_i \rangle, \quad (4.60)$$

où  $K_{\uparrow\uparrow}(\alpha_f, \alpha_i; \lambda)$  est remplacé par

$$\begin{aligned} K_{\uparrow\uparrow}(\alpha_f, \alpha_i; \lambda) &= e^{-im^2\lambda} \int \frac{dp_0}{2\pi} e^{i\lambda p_0^2 + ip_0 T} e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_i|^2 + |\alpha_f|^2)} \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_f^* \alpha_i)^k}{k!} e^{-2im\omega k\lambda} e^{-2im\omega\lambda}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Un calcul direct permet

$$\begin{aligned} K_{\uparrow\uparrow}(x_f, x_i; \lambda) &= \int \frac{d\alpha_f^2 d\alpha_i^2}{\pi^2} e^{-\frac{|\alpha_f|^2}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\alpha_f^l}{\sqrt{l!}} \langle x_f | l \rangle K_{\uparrow\uparrow}(\alpha_f, \alpha_i; \lambda) \\ &\quad \times e^{-\frac{|\alpha_i|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_i^{*n}}{\sqrt{n!}} \langle n | x_i \rangle \end{aligned} \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned} &= e^{-im^2\lambda} \int \frac{dp_0}{2\pi} e^{i\lambda p_0^2 + ip_0 T} \int \frac{d\alpha_f^2 d\alpha_i^2}{\pi^2} e^{-\frac{|\alpha_f|^2}{2} - \frac{|\alpha_i|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_f^* \alpha_i)^k}{k!} \\ &\quad \times e^{-2im\omega\lambda(k+1)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\alpha_f^l}{\sqrt{l!}} \langle x_f | l \rangle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_i^{*n}}{\sqrt{n!}} \langle n | x_i \rangle \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} &= e^{-im^2\lambda} \int \frac{dp_0}{2\pi} e^{i\lambda p_0^2 + ip_0 T} \int \frac{d\alpha_f^2 d\alpha_i^2}{\pi^2} e^{-\frac{|\alpha_f|^2}{2} - \frac{|\alpha_i|^2}{2}} e^{-2im\omega\lambda(k+1)} \\ &\quad \times \sum_{k,n,l=0}^{\infty} \frac{(\alpha_f^*)^l (\alpha_f)^k (\alpha_i)^k (\alpha_i^*)^n}{\sqrt{l!k!} \sqrt{n!k!}} \langle x_f | l \rangle \langle n | x_i \rangle. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Pour intégrer sur les variable complexes, on utilise l'identité

$$\int \frac{d\alpha^* d\alpha}{\pi} \alpha^{*n} \alpha^l e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} = \delta_{nl} \sqrt{l!} \sqrt{n!}. \quad (4.65)$$

Le résultat final est alors

$$K_{\uparrow\uparrow}(x_f, x_i; \lambda) = e^{-im^2\lambda} \int \frac{dp_0}{2\pi} e^{i\lambda p_0^2 + ip_0 T} e^{-2im\omega\lambda(k+1)} \sum_{n,l,k=0}^{\infty} \delta_{lk} \delta_{kn} \langle x_f | l \rangle \langle n | x_i \rangle \quad (4.66)$$

$$= e^{-im^2\lambda} \int \frac{dp_0}{2\pi} e^{i\lambda p_0^2 + ip_0 T} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2im\omega\lambda(n+1)} \langle x_f | n \rangle \langle n | x_i \rangle, \quad (4.67)$$

le résultat s'écrit sous la forme

$$K_{\uparrow\uparrow}(x_f, x_i; \lambda) = e^{-im^2\lambda} \int \frac{dp_0}{2\pi} e^{i\lambda p_0^2 + ip_0 T} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2im\omega\lambda(n+1)} \left(\frac{m\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \times \left(\frac{1}{(2^n n!)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{m\omega}{2}(x_f^2 + x_i^2)\right] H_n(\sqrt{m\omega}x_f) H_n(\sqrt{m\omega}x_i). \quad (4.68)$$

Les autres se déduisent de la même manière et le résultat est

$$K_{\downarrow\downarrow}(x_f, x_i; \lambda) = K_{\uparrow\uparrow}(x_f, x_i; \lambda) \quad (4.69)$$

$$K_{\uparrow\downarrow}(x_f, x_i; \lambda) = 0 = K_{\downarrow\uparrow}(x_f, x_i; \lambda), \quad (4.70)$$

la forme matricielle de propagateur est

$$K(x_f, x_i; \lambda) = \begin{pmatrix} K_{\uparrow\uparrow}(x_f, x_i; \lambda) & 0 \\ 0 & K_{\downarrow\downarrow}(x_f, x_i; \lambda) \end{pmatrix}. \quad (4.71)$$

Revenons à la fonction de Green définie par

$$S^c(x_f, x_i) = (\hat{\pi} + m)_{x_f} G^c(x_f, x_i), \quad (4.72)$$

remplaçons  $(\hat{\pi} + m)_{x_f}$  par son expression

$$(\hat{\pi} + m) = \left\{ i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial T} + i\gamma^1 \frac{\partial}{\partial x_f} - im\omega\gamma^0\gamma^1 x_f + m \right\} \quad (4.73)$$

et

$$G^c(x_f, x_i) = -i \int d\lambda \langle x_f | e^{-i\lambda \hat{H}} | x_i \rangle. \quad (4.74)$$

Par conséquent, la fonction de Green de l'oscillateur de Dirac prendra la forme suivante

$$\begin{aligned}
S^c(x_f, x_i) = & \left\{ i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial T} + i\gamma^1 \frac{\partial}{\partial x_f} - im\omega\gamma^0\gamma^1 x_f + m \right\} \\
& \times (-i) \int d\lambda e^{-im^2\lambda} \int \frac{dp_0}{2\pi} e^{i\lambda p_0^2 + ip_0 T} \\
& \times \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2im\omega\lambda(n+1)} \left( \frac{m\omega}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{(2^n n!)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{m\omega}{2} (x_f^2 + x_i^2) \right] \\
& \times \begin{pmatrix} H_n(\sqrt{m\omega}x_f) H_n(\sqrt{m\omega}x_i) & \\ & H_n(\sqrt{m\omega}x_f) H_n(\sqrt{m\omega}x_i) \end{pmatrix}, \quad (4.75)
\end{aligned}$$

appliquons la relation de dérivée suivante

$$\frac{dH_n(x)}{dx} = 2nH_{n-1}(x) \quad (4.76)$$

et utilisons les matrices de Pauli

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = i\sigma^1 = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.77)$$

La fonction de Green prend alors la forme matricielle suivante

$$\begin{aligned}
S^c(x_f, x_i) = & -i \int d\lambda e^{-im^2\lambda} \int \frac{dp_0}{2\pi} e^{ip_0 T + i\lambda p_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{m\omega}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-2im\omega\lambda(n+1)} \\
& \times \left( \frac{1}{(2^n n!)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{m\omega}{2} (x_f^2 + x_i^2) \right] H_n(\sqrt{m\omega}x_i) \\
& \times \left\{ i\varepsilon \begin{pmatrix} (-p_0 + m) H_n(\sqrt{m\omega}x_f) & 0 \\ 0 & (p_0 + m) H_n(\sqrt{m\omega}x_f) \end{pmatrix} \right. \\
& \left. + \begin{pmatrix} 0 & 2n\sqrt{m\omega}H_{n-1}(\sqrt{m\omega}x_f) - 2m\omega x_f H_n(\sqrt{m\omega}x_f) \\ 2n\sqrt{m\omega}H_{n-1}(\sqrt{m\omega}x_f) & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (4.78)
\end{aligned}$$

Pour simplifier la forme, utilisons la formule de récurrence [7]

$$H_n(x) - 2xH_{n-1}(x) + 2(n-1)H_{n-2}(x) = 0, \quad (4.79)$$

c'est à dire

$$2n\sqrt{m\omega}H_{n-1}(\sqrt{m\omega}x_f) - 2m\omega x_f H_n(\sqrt{m\omega}x_f) = -\sqrt{m\omega}H_{n+1}(\sqrt{m\omega}x_f) \quad (4.80)$$

et intégrons sur le temps propre  $\lambda$

$$\int_0^{+\infty} d\lambda \exp \{ i\lambda [p_0^2 - m^2 - 2m\omega(n+1)] \} = \frac{-i}{p_0^2 - E_n^2} \quad (4.81)$$

où

$$E_n = +\sqrt{m^2 + 2m\omega(n+1)} \quad (4.82)$$

on obtient la forme définitive de  $S^c(x_a, x_b, T)$  ( $p_0 \rightarrow -p_0$ )

$$S^c(x_i, x_f, T) = - \int \frac{dp_0}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \left( \frac{m\omega/\pi}{(2^n n!)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{m\omega}{2} (x_i^2 + x_f^2) \right\} \frac{e^{-ip_0 T}}{p_0^2 - E_n^2} \\ \times \begin{pmatrix} (p_0 + m) H_n(\sqrt{m\omega}x_i) H_n(\sqrt{m\omega}x_f) & 2n\sqrt{m\omega} H_n(\sqrt{m\omega}x_f) H_{n-1}(\sqrt{m\omega}x_i) \\ -2n\sqrt{m\omega} H_n(\sqrt{m\omega}x_i) H_{n-1}(\sqrt{m\omega}x_f) & -2n(p_0 - m) H_{n-1}(\sqrt{m\omega}x_i) H_{n-1}(\sqrt{m\omega}x_f) \end{pmatrix} \quad (4.83)$$

#### 4.1.4 Fonctions d'onde et énergies

Dans le but de déterminer les fonctions d'onde et le spectre d'énergie utilisons le théorème des résidus. L'astuce est d'introduire l'intégrale de contour dans le plan complexe  $p_0$  suivante

$$I_C = \int_C \frac{dp_0}{2\pi} \frac{1}{p_0^2 - E_n^2 + i\varepsilon} e^{-ip_0 T} \quad (4.84)$$

$$= 2i\pi (\text{sgnc}) \sum \text{Rés}, \quad (4.85)$$

où *sgnc* est un indiquant l'orientation de la courbe  $C$  et  $\sum \text{Rés}$  est la somme des résidus aux pôles  $p_0 = +E_n$  et  $p_0 = -E_n$ .

Les pôles de la fonction de Green sont les énergies positives et les énergies négatives données respectivement par

$$p_+^0 = E_n - i\varepsilon \quad \text{et} \quad p_-^0 = -E_n + i\varepsilon. \quad (4.86)$$

Les résidus sont alors

$$\begin{cases} p_+^0 = +E_n : \text{Rés} = \frac{-1}{2\pi} \frac{e^{-iE_n T}}{2E_n} \\ p_-^0 = -E_n : \text{Rés} = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{iE_n T}}{2E_n} \end{cases}, \quad (4.87)$$

pour les énergies positives  $p_+^0$  le contour d'intégration est choisi en dessous de l'axe des réels avec  $T > 0$ .

$$\begin{aligned} \int_C \frac{dp_0}{2\pi} \frac{e^{-ip_0 T}}{p_0^2 - E_n^2} (p_0 + m) &= \int_{C_1} \frac{dp_0}{2\pi} \frac{e^{-ip_0 T}}{p_0^2 - E_n^2} (p_0 + m) \\ &= \frac{-i}{2E_n} (E_n + m) e^{-iE_n T} \end{aligned} \quad (4.88)$$

Par contre pour les énergies négatives  $p_-^0$  il est choisi en dessus de l'axe des réels avec  $T < 0$

$$\begin{aligned} \int_c \frac{dp_0}{2\pi} \frac{e^{-ip_0 T}}{p_0^2 - E_n^2} (p_0 - m) &= \int_{C_2} \frac{dp_0}{2\pi} \frac{e^{-ip_0 T}}{p_0^2 - E_n^2} (p_0 - m) \\ &= \frac{-i}{2E_n} (E_n - m) e^{iE_n T} \end{aligned} \quad (4.89)$$

Ce qui permet d'écrire

$$\int_c \frac{dp_0}{2\pi} \frac{e^{-ip_0 T}}{p_0^2 - E_n^2} (p_0 + m) = i \left[ \theta(T) \frac{(E_n + m)}{2E_n} e^{-iE_n T} + \theta(-T) \frac{(E_n - m)}{2E_n} e^{iE_n T} \right] \quad (4.90)$$

et

$$\int_c \frac{dp_0}{2\pi} \frac{e^{-ip_0 T}}{p_0^2 - E_n^2} (p_0 - m) = i \left[ \theta(T) \frac{(E_n - m)}{2E_n} e^{-iE_n T} + \theta(-T) \frac{(E_n + m)}{2E_n} e^{iE_n T} \right] \quad (4.91)$$

Finalement la fonction de Green prend la forme suivante

$$\begin{aligned} S^c(x_i, x_f, T) &= i \sum_{n \in N_0} \left( \frac{m\omega/\pi}{(2^n n!)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{m\omega}{2} (x_i^2 + x_f^2) \right\} \left\{ e^{-iE_n T} \frac{\theta(T)}{2E_n} \right. \\ &\times \left( \begin{array}{cc} (E_n + m) H_n(\sqrt{m\omega}x_f) H_n(\sqrt{m\omega}x_i) & 2n\sqrt{m\omega} H_n(\sqrt{m\omega}x_f) H_{n-1}(\sqrt{m\omega}x_i) \\ -2n\sqrt{m\omega} H_{n-1}(\sqrt{m\omega}x_f) H_n(\sqrt{m\omega}x_i) & -2n(E_n - m) H_{n-1}(\sqrt{m\omega}x_f) H_{n-1}(\sqrt{m\omega}x_i) \end{array} \right) \\ &+ e^{iE_n T} \frac{\theta(-T)}{2E_n} \\ &\times \left( \begin{array}{cc} (E_n - m) H_n(\sqrt{m\omega}x_f) H_n(\sqrt{m\omega}x_i) & 2n\sqrt{m\omega} H_n(\sqrt{m\omega}x_f) H_{n-1}(\sqrt{m\omega}x_i) \\ -2n\sqrt{m\omega} H_{n-1}(\sqrt{m\omega}x_f) H_n(\sqrt{m\omega}x_i) & -2n(E_n + m) H_{n-1}(\sqrt{m\omega}x_f) H_{n-1}(\sqrt{m\omega}x_i) \end{array} \right) \end{aligned} \quad (4.92)$$

ou bien convenablement factorisée

$$S^c(x_i, x_f, T) = i \sum_{n \in N_0} \left[ \theta(T) \Psi_n^+(x_f) \bar{\Psi}_n^+(x_i) e^{-iE_n T} + \theta(-T) \Psi_n^-(x_f) \bar{\Psi}_n^-(x_i) e^{iE_n T} \right] \quad (4.93)$$

D'où on identifie les fonctions d'onde

$$\Psi_n^+(x) = \begin{pmatrix} f_n(x) \\ g_n(x) \end{pmatrix}, \quad \Psi_n^-(x_f) = \begin{pmatrix} f_{-n}(x) \\ g_{-n}(x) \end{pmatrix} \quad (4.94)$$

avec

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{m\omega/\pi} (E_n + m)}{2^{n+1} n! E_n}} e^{(-\frac{m\omega}{2} x^2)} H_n(\sqrt{m\omega} x) \quad (4.95)$$

$$g_n(x) = -\sqrt{\frac{\sqrt{m\omega/\pi} (E_n - m)}{2^n (n-1)! E_n}} e^{(-\frac{m\omega}{2} x^2)} H_{n-1}(\sqrt{m\omega} x) \quad (4.96)$$

et

$$\begin{aligned} f_{-n}(x) &= \sqrt{\frac{\sqrt{m\omega/\pi} (E_n - m)}{2^{n+1} n! E_n}} e^{(-\frac{m\omega}{2} x^2)} H_n(\sqrt{m\omega} x) = \sqrt{\frac{(E_n - m)}{E_n + m}} f_n(x) \\ g_{-n}(x) &= \sqrt{\frac{\sqrt{m\omega/\pi} (E_n + m)}{2^n n! E_n}} e^{(-\frac{m\omega}{2} x^2)} H_{n-1}(\sqrt{m\omega} x) = -\sqrt{\frac{(E_n + m)}{E_n - m}} g_n(x) \end{aligned} \quad (4.97)$$

Cette projection globale n'est pas adéquate en représentation intégrale de chemin à cause de la présence de l'opérateur  $(\hat{\eta}_\mu + m)$  qu'il faudrait en principe élever en exponentielle pour ce fait introduisons un temps fermionique  $\chi$  (variable de Grassmann)

## 4.2 Le propagateur dans la représentation locale

### 4.2.1 La représentation intégrale de chemin

Dans le cas de la projection locale, nous partons de la formule (4.7) où l'on remplace l'opérateur  $A$  par une exponentielle suivant l'identité Grassmannienne

$$A = (-i) \int d\chi \exp[i\chi(A)] \quad \text{avec } \dot{\chi} = \chi_1 \chi_2 \text{ et } d\chi = d\chi_1 d\chi_2 \quad (4.98)$$



ce qui donne la représentation intégrale suivante

$$B^{-1} = A \cdot \frac{1}{BA} = \int_0^\infty d\lambda \int d\chi \exp [i\lambda (BA + i\varepsilon) + i\chi (A)]. \quad (4.99)$$

La fonction de Green n'est rien d'autre que l'élément de matrice de  $B^{-1}$  c'est à dire

$$S(x_f, x_i) = \int_0^\infty d\lambda \int d\chi \langle x_f | \exp [-i \Delta\tau \hat{H}(\lambda, \chi)] | x_i \rangle, \quad (4.100)$$

où

$$\begin{aligned} \hat{H}(\lambda, \chi) = & (-\lambda) (\hat{p}_0^2 - \hat{p}_1^2 - (m\omega)^2 \hat{x}_1^2 - m\omega\gamma^0 - m^2) \\ & + \chi (\gamma^0 \hat{p}_0 + \gamma^1 \hat{p}_1 - im\omega\gamma^0\gamma^1 \hat{x}_1 + m), \end{aligned} \quad (4.101)$$

Le terme proportionnel à  $\chi$  représente d'une certaine manière le couplage spin-orbite.

Sachant qu'on travaille en (1 + 1) dimension, il serait préférable de choisir la représentation suivante des matrices de spin

$$\begin{cases} \gamma^0 = -\sigma^3 \\ i\gamma^1 = \sigma^1 \\ i\gamma^0\gamma^1 = -i\sigma^2 \end{cases}, \quad (4.102)$$

verifiant les relations suivantes

$$[\sigma^3, \sigma^1] = 2i\sigma^2, [\sigma^3, i\sigma^2] = 2\sigma^1, [\sigma^1, i\sigma^2] = 2\sigma^3. \quad (4.103)$$

Par conséquent, le Hamiltonien devient

$$\begin{aligned} \hat{H}(\lambda, \chi) = & (-\lambda) (\hat{p}_0^2 - \hat{p}_1^2 - m^2\omega^2 \hat{x}_1^2 + m\omega\sigma^3 - m^2) \\ & + \chi (-\sigma^3 \hat{p}_0 - i\sigma^1 \hat{p}_1 + im\omega\sigma^2 \hat{x}_1 + m). \end{aligned} \quad (4.104)$$

Comme nous l'avons déjà évoqué, grâce à la présence du couplage spin-orbite cet Hamiltonien pourrait s'identifier à celui de Jaynes-Cummings en remplaçant les opérateurs position et impulsion par des opérateurs création et annihilation

$$\begin{cases} \hat{x}_1 = \sqrt{\frac{1}{2m\omega}} (a + a^\dagger) \\ \hat{p}_1 = -i\sqrt{\frac{m\omega}{2}} (a - a^\dagger) \\ [x_1, p_1] = i \end{cases}, \quad (4.105)$$

ce qui permet d'écrire l'Hamiltonien comme

$$\begin{aligned} \hat{H}(\lambda, \chi) = & (-\lambda) \left( \hat{p}_0^2 - m^2 - 2m\omega \left( a^+ a + \frac{1}{2} \right) + m\omega\sigma^3 \right) \\ & + \chi \left( -\sigma^3 \hat{p}_0 + \sigma^1 \sqrt{\frac{m\omega}{2}} (a^+ - a) + i\sigma^2 \sqrt{\frac{m\omega}{2}} (a^+ + a) + m \right). \end{aligned} \quad (4.106)$$

Utilisons maintenant la représentation fermion-boson de ce système déjà présentée dans (2.12), on aura

$$\begin{aligned} \hat{H}(\lambda, \chi) = & \lambda \left[ m^2 - \hat{p}_0^2 + 2m\omega \left( a^+ a + \frac{1}{2} \right) - m\omega (u^+ u - d^+ d) \right] \\ & + \chi \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left[ (a^+ - a) (d^+ u + u^+ d) - (a^+ + a) (d^+ u - u^+ d) \right] \\ & - \chi (u^+ u - d^+ d) \hat{p}_0 + \chi m. \end{aligned} \quad (4.107)$$

Maintenant, on est en mesure d'associer à cet Hamiltonien une forme intégrale de chemin de Feynman. Pour ce faire, suivons la procédure habituelle : Discrétisons un temps fictif variant entre  $[0, 1]$  puis appliquons la relation de Trotter et introduisons la base adéquate au calcul, il vient

$$\begin{aligned} K(f, i, \lambda, \chi) = & \langle x_f | \exp \left[ -i \Delta\tau \hat{H}(\lambda, \chi) \right] | x_i \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^{N-1} dt_j \prod_{j=1}^N \langle t_j | e^{-i\Delta\tau \lambda (m^2 - \hat{p}_0^2)} | t_{j-1} \rangle \\ & \times \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^{N-1} \frac{d\alpha_j^* d\alpha_j}{\pi} \prod_{j=1}^{N-1} d\psi_j^* d\psi_j d\phi_j^* d\phi_j e^{(-\psi_j^* \psi_j - \phi_j^* \phi_j)} \\ & \times \prod_{j=1}^N \langle \alpha_j, \psi_j, \phi_j | \exp(-i\Delta\tau) \left\{ 2\lambda m\omega \left( a^+ a + \frac{1}{2} \right) - (\lambda m\omega + \chi_1 \chi_2 \hat{p}_0) (u^+ u - d^+ d) \right. \\ & \left. + \chi_1 \chi_2 \sqrt{2m\omega} [(u^+ d) a^+ - (d^+ u) a] + \chi_1 \chi_2 m \right\} | \alpha_{j-1}, \psi_{j-1}, \phi_{j-1} \rangle. \end{aligned} \quad (4.108)$$

#### 4.2.2 Calcul de la partie temporelle du propagateur

Le calcul est exactement identique au cas de la projection globale. Le résultat est

$$K(f, i, \lambda, \chi) = e^{-im^2 \lambda - i\chi_1 \chi_2 m} \int \frac{dp_0}{2\pi} e^{i\lambda p_0^2 + ip_0 T} K^1(f, i, p_0, \lambda, \chi), \quad (4.109)$$

avec

$$K^1(f, i, p_0, \lambda, \chi) = \int D\alpha^* D\alpha D\psi^* D\psi D\phi^* D\phi \exp \left\{ i \int_0^1 ds \left[ \frac{i}{2} (\alpha^* \dot{\alpha} - \dot{\alpha} (\alpha^*)) - m\omega\lambda - 2m\lambda\omega\alpha^* \alpha + i (\psi^* \dot{\psi} + \dot{\psi}^* \phi) + (\lambda m\omega + \chi_1 \chi_2 p_0) (\psi^* \psi - \phi^* \phi) - \chi_1 \chi_2 \sqrt{2m\omega} (\alpha^* (\psi^* \phi) - (\phi^* \psi) \alpha) \right] \right\}. \quad (4.110)$$

Il serait préférable de décomposer l'évolution de propagateur comme suit

$$K^1(f, i, p_0, \lambda, \chi) = \int D\alpha^* D\alpha \exp \left\{ i \int_0^1 ds \left( \frac{i}{2} (\alpha^* \dot{\alpha} - \dot{\alpha} (\alpha^*)) - m\omega\lambda - 2m\lambda\omega\alpha^* \alpha \right) \right\} \times K_\alpha^f(f, i, p_0, \lambda, \chi), \quad (4.111)$$

avec

$$K_\alpha^f(f, i, p_0, \lambda, \chi) = \int D\psi^* D\psi D\phi^* D\phi \exp \left\{ i \int_0^1 ds \left[ i (\psi^* \dot{\psi} + \dot{\psi}^* \phi) + (\lambda m\omega + \chi_1 \chi_2 p_0) \times (\psi^* \psi - \phi^* \phi) - \chi_1 \chi_2 \sqrt{2m\omega} [\alpha^* (\psi^* \phi) - (\phi^* \psi) \alpha] \right] \right\} \quad (4.112)$$

où  $K_\alpha^f(f, i, p_0, \lambda, \chi)$  est le propagateur relatif à l'évolution du spin dans le plan de l'orbite et par conséquent contenant le couplage spin-orbite.

### 4.2.3 Calcul de la partie fermionique du propagateur

Cette partie fermionique du propagateur a la forme discrète suivante

$$K_\alpha^f(f, i, p_0, \lambda, \chi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^{N-1} d\psi_j^* d\psi_j d\phi_j^* d\phi_j e^{-\psi_j^* \psi_j - \phi_j^* \phi_j} \times \exp \sum_{j=1}^N \left\{ (1 + i\Delta\tau (\lambda m\omega + \chi_1 \chi_2 p_0)) \psi_j^* \psi_{j-1} + (1 - i\Delta\tau (\lambda m\omega + \chi_1 \chi_2 p_0)) \phi_j^* \phi_{j-1} - i\Delta\tau \chi_1 \chi_2 \sqrt{2m\omega} [\alpha_j^* (\psi_j^* \phi_{j-1}) - (\phi_j^* \psi_{j-1}) \alpha_{j-1}] \right\} \quad (4.113)$$

Faisons comme précédemment et introduisons le vecteur  $q_j$

$$q_j = \begin{pmatrix} \psi_j \\ \phi_j \end{pmatrix} \text{ et } \bar{q}_j = (\bar{\psi}_j, \bar{\phi}_j) \quad (4.114)$$

ce qui permet l'écriture suivante

$$K_\alpha^f(f, i, p_0, \lambda, \chi) = \int \prod_{j=1}^{N-1} dq_j^+ dq_j \exp(-q_j^+ q_j) \exp \left[ \sum_{j=1}^N q_j^+ R(\alpha_j, p_0, \lambda, \chi_1 \chi_2) q_{j-1} \right] \quad (4.115)$$

L'exponentielle devient

$$- \left( - \sum_{j=1}^N q_j^+ R(\alpha_j, p_0, \lambda, \chi_1 \chi_2) q_{j-1} + \sum_{j=1}^{N-1} q_j^+ q_j \right) = -P^+ M P + P^+ V + W^+ P \quad (4.116)$$

avec

$$R(\alpha_j, p_0, \lambda, \chi_1 \chi_2) = \begin{pmatrix} 1 + i\Delta\tau(\lambda m\omega + \chi_1 \chi_2 p_0) & -i\Delta\tau \chi_1 \chi_2 \sqrt{2m\omega} \alpha_j^* \\ i\Delta\tau \chi_1 \chi_2 \sqrt{2m\omega} \alpha_{j-1} & 1 - i\Delta\tau(\lambda m\omega + \chi_1 \chi_2 p_0) \end{pmatrix} \quad (4.117)$$

Se référant à la section (2.1), la matrice  $M_{ij}$  et les vecteurs  $P$ ,  $V$  et  $W^+$  sont définis de la même manière et enfin le propagateur est donné par

$$K_\alpha^f(f, i, p_0, \lambda, \chi) = (\det M) \exp [W^+ M^{-1} V] \quad (4.118)$$

avec

$$\begin{cases} M^{-1} = R(\alpha_j, p_0, \lambda, \chi_1 \chi_2), \quad \det M = 1 \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{N-1} R(\alpha_j, p_0, \lambda, \chi_1 \chi_2) = \exp \left( i \sum_{j=1}^{\infty} \Delta\tau (\lambda m\omega + \chi_1 \chi_2 p_0) \sigma_3 \right) \end{cases} \quad (4.119)$$

Le propagateur aura la forme

$$K_\alpha^f(f, i, p_0, \lambda, \chi) = \exp [q_j^+ R(\alpha, p_0, \lambda, \chi_1 \chi_2) q_i] \quad (4.120)$$

La matrice  $R(\alpha, p_0, \lambda, \chi_1 \chi_2)$  s'écrit comme une somme de deux matrices l'une diagonale et l'autre anti-diagonale

$$R(\alpha, p_0, \lambda, \chi_1 \chi_2) = \prod_{j=1}^{N-1} [e^{+i\Delta\tau(\lambda m\omega + \chi_1 \chi_2 p_0)\sigma_3} + i\Delta\tau K(\chi_1 \chi_2, \alpha_j^*, \alpha_{j-1})] \quad (4.121)$$

avec

$$K(\chi_1 \chi_2, \alpha_j^*, \alpha_{j-1}) = \begin{pmatrix} 0 & -\chi_1 \chi_2 \sqrt{2m\omega} \alpha_j^* \\ \chi_1 \chi_2 \sqrt{2m\omega} \alpha_{j-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.122)$$

Alors le produit  $R(\alpha, p_0, \lambda, \chi_1 \chi_2)$  devient une série de perturbation

$$\begin{aligned} & \prod_{j=1}^{N-1} [e^{+i\Delta\tau(\lambda m\omega + \chi_1 \chi_2 p_0)\sigma_3} + i\Delta\tau K(\chi_1 \chi_2, \alpha_j^*, \alpha_{j-1})] \\ & = \exp\left(+i \sum_{j=1}^N \Delta\tau (\lambda m\omega + \chi_1 \chi_2 p_0) \sigma_3\right) \\ & \quad + i \sum_{i=1}^N \Delta\tau \exp\left(+i \sum_{l=1}^N \Delta\tau (\lambda m\omega + \chi_1 \chi_2 p_0) \sigma_3\right) \\ & \quad \times K(\chi_1 \chi_2, \alpha_j^*, \alpha_{j-1}) \exp\left(+i \sum_1^{l-1} \Delta\tau (\lambda m\omega + \chi_1 \chi_2 p_0) \sigma_3\right) \end{aligned} \quad (4.123)$$

$$(4.124)$$

A la limite du continu ( $N \rightarrow \infty$ ) on obtient

$$\begin{aligned} R(\alpha, p_0, \lambda, \chi_1 \chi_2) & = \exp[+i(\lambda m\omega + \chi_1 \chi_2 p_0) \sigma_3] \\ & \quad + i \int_0^1 ds_1 \exp[+i(\lambda m\omega + \chi_1 \chi_2 p_0)(1-s_1) \sigma_3] \\ & \quad \times K(\chi_1 \chi_2, \alpha_1^*, \alpha_1) \exp[+i(\lambda m\omega + \chi_1 \chi_2 p_0) s_1 \sigma_3] \end{aligned} \quad (4.125)$$

dont les éléments de matrice  $R_{ij}(\alpha, p_0, \lambda, \chi_1 \chi_2)$  sont

$$\begin{cases} R_{11}(\alpha, p_0, \lambda, \chi_1 \chi_2) = \exp[+i(\lambda m\omega + \chi_1 \chi_2 p_0)] \\ R_{22}(\alpha, p_0, \lambda, \chi_1 \chi_2) = \exp[-i(\lambda m\omega + \chi_1 \chi_2 p_0)] \\ R_{12}(\alpha, p_0, \lambda, \chi_1 \chi_2) = (-) i \int_0^1 ds_1 \exp[+i(\lambda m\omega)(1-s_1)] \\ \quad \times (\chi_1 \chi_2) \sqrt{2m\omega} \alpha^*(s_1) \exp[-i(\lambda m\omega) s_1] \\ R_{21}(\alpha, p_0, \lambda, \chi_1 \chi_2) = i \int_0^1 ds_1 \exp[-i(\lambda m\omega)(1-s_1)] \\ \quad \times (\chi_1 \chi_2) \sqrt{2m\omega} \alpha(s_1) \exp[+i(\lambda m\omega) s_1] \end{cases} \quad (4.126)$$

La forme finale du propagateur en fonction des variables originales  $\psi$  et  $\phi$  est

$$K_\alpha^f(f, i, p_0, \lambda, \chi) = \exp[\psi_f^* (R_{11}\psi_i + R_{12}\phi_i) + \phi_f^* (R_{21}\psi_i + R_{22}\phi_i)]. \quad (4.127)$$

Calculons maintenant l'amplitude de transition up-up du spin

$$\begin{aligned} & K_{\uparrow\uparrow}^f(\alpha_f, \alpha_i, p_0, \lambda, \chi) = \int d\psi_f^* d\psi_f d\psi_i^* d\psi_i d\phi_f^* d\phi_f d\phi_i^* d\phi_i \\ & \times \exp(-|\psi_f|^2 - |\psi_i|^2 - |\phi_f|^2 - |\phi_i|^2) \langle \uparrow | \psi_f, \phi_f \rangle K_\alpha^f(f, i, \lambda, \chi) \langle \psi_i, \phi_i | \uparrow \rangle, \end{aligned} \quad (4.128)$$

utilisant les relations suivantes

$$\begin{cases} \langle \uparrow | \psi_f, \phi_f \rangle = \psi_f & , \langle \psi_i, \phi_i | \uparrow \rangle = \psi_i^* \\ \psi_f \psi_i^* = e^{-\psi_i^* \psi_f} - 1 \end{cases} \quad (4.129)$$

et remplaçant l'expression de  $K_\alpha^f(f, i, p_0, \lambda, \chi)$  dans  $K_{\uparrow\uparrow}^f(\alpha_f, \alpha_i, p_0, \lambda, \chi)$  on trouve

$$\begin{aligned} K_{\uparrow\uparrow}^f(\alpha_f, \alpha_i, p_0, \lambda, \chi) &= \int d\psi_f^* d\psi_f d\psi_i^* d\psi_i d\phi_f^* d\phi_f d\phi_i^* d\phi_i \exp\left(|\psi_f|^2 - |\psi_i|^2 - |\phi_f|^2 - |\phi_i|^2\right) \\ &\times \exp\left[\psi_f^* (R_{11}\psi_i + R_{12}\phi_i) + \phi_f^* (R_{21}\psi_i + R_{22}\phi_i)\right] \langle \uparrow | \psi_f, \phi_f \rangle \langle \psi_i, \phi_i | \uparrow \rangle \end{aligned} \quad (4.130)$$

Dans le but d'intégrer sur les variables de Grassmann, introduisons la vecteur définie par

$$v^+ = (\psi_i^*, \psi_f^*, \phi_i^*, \phi_f^*) \quad , \quad v = \begin{pmatrix} \psi_i \\ \psi_f \\ \phi_i \\ \phi_f \end{pmatrix} \quad (4.131)$$

Ecrivons le résultat précédent sous la forme suivante

$$K_{\uparrow\uparrow}^f(f, i, \lambda, \chi) = \int dv^+ dv \left[ \exp(v^+ M' v) - \exp(v^+ M v) \right] \quad (4.132)$$

avec les matrices  $\dot{M}$  et  $M$  données par

$$\dot{M} = \begin{pmatrix} \dot{A} & C \\ D & B \end{pmatrix} , \quad M = \begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix} \quad (4.133)$$

les blocs  $\dot{A}$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $D$ ,  $C$  sont données par

$$\dot{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ R_{11} & -1 \end{pmatrix} , \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ R_{11} & -1 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ R_{22} & -1 \end{pmatrix} \quad (4.134)$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ R_{12} & 0 \end{pmatrix} , \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ R_{21} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.135)$$

Le résultat de l'intégration Gaussienne est facile à faire suivant la formule (2.4) Utilisons en plus l'identité suivante

$$\begin{cases} \det M' = \det (A' - CB^{-1}D) \det B \\ \det M' = \det A' = 1 + R_{11}(\alpha; T) \quad , \quad \det M = \det A = 1 \end{cases} \quad (4.136)$$

Finalement les amplitudes de transition entre les up- up et down- down sont données par

$$\begin{cases} K_{\alpha}^{\uparrow\uparrow}(\alpha, p_0, \lambda, \chi_1\chi_2) = \exp [+i(\lambda m\omega + \chi_1\chi_2 p_0)] \\ K_{\alpha}^{\downarrow\downarrow}(\alpha, p_0, \lambda, \chi_1\chi_2) = \exp [-i(\lambda m\omega + \chi_1\chi_2 p_0)] \end{cases} \quad (4.137)$$

up- down et down- up sont données par

$$\begin{cases} K_{\alpha}^{\uparrow\downarrow}(\alpha, p_0, \lambda, \chi_1\chi_2) = (-) i \int_0^1 ds_1 \exp [+i(\lambda m\omega)(1 - s_1)] \\ \quad \times (\chi_1\chi_2) \sqrt{2m\omega\alpha_1^*} \exp [-i(\lambda m\omega) s_1] \\ K_{\alpha}^{\downarrow\uparrow}(\alpha, p_0, \lambda, \chi_1\chi_2) = i \int_0^1 ds_1 \exp [-i(\lambda m\omega)(1 - s_1)] \\ \quad \times (\chi_1\chi_2) \sqrt{2m\omega\alpha_1} \exp [+i(\lambda m\omega) s_1] \end{cases} \quad (4.138)$$

En remplaçant ces éléments de transition dans (4.110), on obtient

$$K^1(f, i, p_0, \lambda, \chi_1\chi_2) = \int_{\alpha_i}^{\alpha_f} D\alpha^* D\alpha \exp \left\{ i \int_0^1 ds \left[ \frac{i}{2} (\alpha^* \dot{\alpha} - \dot{\alpha} (\alpha^*)) - m\omega - 2m\omega \alpha^* \alpha \right] \right\} \begin{pmatrix} K_{\alpha}^{\uparrow\uparrow}(\alpha, p_0, \lambda, \chi_1\chi_2) & K_{\alpha}^{\uparrow\downarrow}(\alpha, p_0, \lambda, \chi_1\chi_2) \\ K_{\alpha}^{\downarrow\uparrow}(\alpha, p_0, \lambda, \chi_1\chi_2) & K_{\alpha}^{\downarrow\downarrow}(\alpha, p_0, \lambda, \chi_1\chi_2) \end{pmatrix} \quad (4.139)$$

#### 4.2.4 Intégration sur les variables complexes

Nous allons intégrer sur les variables complexes en suivant la technique habituelle (2.20 - 2.25). Il n'est difficile de s'assurer que

$$K_{\uparrow\uparrow}^1(f, i, p_0, \lambda, \chi_1\chi_2) = \exp [+i(\lambda m\omega + \chi_1\chi_2 p_0)] \exp [\alpha_f^* e^{-2im\omega\lambda} \alpha_i] \quad (4.140)$$

$$K_{\downarrow\downarrow}^1(f, i, p_0, \lambda, \chi_1\chi_2) = \exp [-i(\lambda m\omega + \chi_1\chi_2 p_0)] \exp [\alpha_f^* e^{-2im\omega\lambda} \alpha_i] \quad (4.141)$$

et

$$K_{\uparrow\downarrow}^1(f, i, p_0, \lambda, \chi_1\chi_2) = (-i) \int \frac{d\alpha_1^* d\alpha_1}{\pi} \int_0^1 ds_1 K^0(\alpha_f, \alpha_1; 1 - s_1) \exp [+i\lambda m\omega(1 - s_1)] \chi_1\chi_2 \sqrt{2m\omega\alpha_1^*} \exp [-i(\lambda m\omega) s_1] K^0(\alpha_1, \alpha_i; s_1 - 0) \quad (4.142)$$

$$K_{1\uparrow}^1(f, i, p_0, \lambda, \chi_1 \chi_2) = (i) \int \frac{d\alpha_1^* d\alpha_1}{\pi} \int_0^1 ds_1 K^0(\alpha_f, \alpha_1; 1-s_1) \exp[-i\lambda m\omega(1-s_1)] \chi_1 \chi_2 \sqrt{2m\omega\alpha_1} \exp[+i(\lambda m\omega)s_1] K^0(\alpha_1, \alpha_i; s_1-0) \quad (4.143)$$

avec

$$K^0(\alpha_f, \alpha_i; s) = \int_{\alpha_i}^{\alpha_f} D\alpha^* D\alpha \exp \left\{ i \int_0^s ds_1 \left[ \frac{i}{2} (\alpha^* \dot{\alpha} - \dot{\alpha} \alpha^*) - m\omega\lambda - 2m\lambda\omega\alpha^* \alpha \right] \right\} \quad (4.144)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2 + |\alpha_i|^2)} \exp[\alpha_f^* e^{-2im\omega\lambda s} \alpha_i - im\omega\lambda] \quad (4.145)$$

Après calcul on a

$$K_{1\downarrow}^1(f, i, p_0, \lambda, \chi_1 \chi_2) = (-i) e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_i|^2 + |\alpha_f|^2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_f^*)^{k+1} e^{-im\omega\lambda(2k+1)} (\alpha_i)^k}{(k)!} \sqrt{2m\omega\chi_1\chi_2} \quad (4.146)$$

$$K_{1\uparrow}^1(f, i, p_0, \lambda, \chi_1 \chi_2) = (i) e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_i|^2 + |\alpha_f|^2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_f^*)^k e^{-im\omega\lambda(2k+3)} (\alpha_i)^{k+1}}{(k)!} \sqrt{2m\omega\chi_1\chi_2} \quad (4.147)$$

où l'on a utilisé

$$\int \frac{d\alpha^* d\alpha}{\pi} \alpha^{*n} \alpha^l e^{-|\alpha|^2} = \delta_{nl} \sqrt{l!} \sqrt{n!} \quad (4.148)$$

### 4.2.5 Calcul de la fonction de Green

Revenons à la fonction de Green donnée par (4.100) et remplaçons les éléments Précédents, on obtient

$$S(x_f, x_i) = \int_0^\infty d\lambda \int d\chi \begin{pmatrix} K_{1\uparrow}(x_f, x_i) & K_{1\downarrow}(x_f, x_i) \\ K_{\downarrow\uparrow}(x_f, x_i) & K_{\downarrow\downarrow}(x_f, x_i) \end{pmatrix} \quad (4.149)$$

où les  $K_{ij}(x_f, x_i)$  sont donnés par

$$K_{ij}(x_f, x_i) = e^{-im^2\lambda + i\chi_1\chi_2 m} \int \frac{dp_0}{2\pi} e^{i\lambda p_0^2 + ip_0 T} \times \int \frac{d\alpha_f^* d\alpha_f}{\pi} \frac{d\alpha_i^* d\alpha_i}{\pi} \langle x_f | \alpha_f \rangle K_{ij}^1(f, i, p_0, \lambda, \chi_1 \chi_2) \langle \alpha_i | x_i \rangle \quad (4.150)$$

En suivant la même démarche que dans le cas de la projection globale, il n'est pas difficile d'avoir.



Pour  $K_{\uparrow\uparrow}(x_f, x_i)$

$$\begin{aligned}
 K_{\uparrow\uparrow}(x_f, x_i) &= e^{-im^2\lambda - i\chi_1\chi_2 m} \int \frac{dp_0}{2\pi} e^{i\lambda p_0^2 + ip_0 T + i\chi_1\chi_2 p_0} \\
 &\times \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-\frac{m\omega}{2}(x_f^2 + x_i^2)\right] e^{-im\omega\lambda(2n+1)} \\
 &\times \left(\frac{\left(\frac{m\omega}{\pi}\right)}{(2^n n!)^2}\right)^{\frac{1}{2}} H_n(\sqrt{m\omega}x_f) H_n(\sqrt{m\omega}x_i)
 \end{aligned} \tag{4.151}$$

pour  $K_{\uparrow\downarrow}(x_f, x_i)$

$$\begin{aligned}
 K_{\uparrow\downarrow}(x_f, x_i) &= (-i)\chi_1\chi_2\sqrt{2m\omega}e^{-im^2\lambda} \int \frac{dp_0}{2\pi} e^{i\lambda p_0^2 + ip_0 T - im\omega\lambda(2n+1)} \\
 &\times \exp\left[-\frac{m\omega}{2}(x_f^2 + x_i^2)\right] \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(n)\left(\frac{m\omega}{\pi}\right)}{(2^n n!)(2^{n-1}(n-1)!)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\times H_n(\sqrt{m\omega}x_f) H_{n-1}(\sqrt{m\omega}x_i)
 \end{aligned} \tag{4.152}$$

pour  $K_{\downarrow\uparrow}(x_f, x_i)$

$$\begin{aligned}
 K_{\downarrow\uparrow}(x_f, x_i) &= i\chi_1\chi_2\sqrt{2m\omega}e^{-im^2\lambda} \int \frac{dp_0}{2\pi} e^{i\lambda p_0^2 + ip_0 T - im\omega\lambda(2n+3)} \\
 &\times \exp\left[-\frac{m\omega}{2}(x_f^2 + x_i^2)\right] \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(n+1)\left(\frac{m\omega}{\pi}\right)}{(2^n n!)(2^{n+1}(n+1)!)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\times H_n(\sqrt{m\omega}x_f) H_{n+1}(\sqrt{m\omega}x_i)
 \end{aligned} \tag{4.153}$$

pour  $K_{\downarrow\downarrow}(x_f, x_i)$

$$\begin{aligned}
 K_{\downarrow\downarrow}(x_f, x_i) &= e^{-im^2\lambda - i\chi_1\chi_2 m} \int \frac{dp_0}{2\pi} e^{i\lambda p_0^2 + ip_0 T - i\chi_1\chi_2 p_0} \\
 &\times \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-\frac{m\omega}{2}(x_f^2 + x_i^2)\right] e^{-im\omega\lambda(2n+3)} \\
 &\times \left(\frac{\left(\frac{m\omega}{\pi}\right)}{(2^n n!)^2}\right)^{\frac{1}{2}} H_n(\sqrt{m\omega}x_f) H_n(\sqrt{m\omega}x_i)
 \end{aligned} \tag{4.154}$$

Les formules suivantes

$$\int d\chi_1 d\chi_2 = 0 \quad \text{et} \quad \int d\chi_1 d\chi_2 \chi_1 \chi_2 = -1 \quad (4.154)$$

permettent d'aboutir au résultat final suivant

$$\begin{aligned}
S(x_f, x_i) = & \int_0^\infty d\lambda e^{-im^2\lambda} \int \frac{dp_0}{2\pi} e^{i\lambda p_0^2 + ip_0 T - i2m\omega\lambda(n+1)} \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{m\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{m\omega}{2}(x_f^2 + x_i^2)\right] H_n(\sqrt{m\omega}x_f) \\
& \left\{ \frac{1}{\sqrt{(2^n n!)^2}} \begin{pmatrix} i(m-p_0) H_n(\sqrt{m\omega}x_i) e^{im\omega\lambda} & 0 \\ 0 & i(m+p_0) H_n(\sqrt{m\omega}x_i) e^{-im\omega\lambda} \end{pmatrix} \right. \\
& + \left. \begin{pmatrix} 0 & \frac{i\sqrt{2m\omega}\sqrt{n}}{\sqrt{(2^n n!)2^{(n-1)}(n-1)!}} H_{n-1}(\sqrt{m\omega}x_i) e^{im\omega\lambda} \\ \frac{-i\sqrt{2m\omega}\sqrt{n+1}}{\sqrt{(2^n n!)2^{(n+1)}(n+1)!}} H_{n+1}(\sqrt{m\omega}x_i) e^{-im\omega\lambda} & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (4.155)
\end{aligned}$$

qui peut se réécrire sous la forme convenable au calcul du spectre

$$\begin{aligned}
S(x_f, x_i) = & i \int_0^\infty d\lambda e^{-im^2\lambda} \int \frac{dp_0}{2\pi} e^{i\lambda p_0^2 + ip_0 T} \exp\left[-\frac{m\omega}{2}(x_f^2 + x_i^2)\right] \sqrt{\left(\frac{m\omega}{\pi}\right)} e^{-2im\omega\lambda(n+\frac{1}{2})} \\
& \times \left\{ \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^\infty \frac{(m-p_0)}{\sqrt{(2^n n!)^2}} H_n(\sqrt{m\omega}x_i) H_n(\sqrt{m\omega}x_f) & 0 \\ 0 & \sum_{n=1}^\infty \frac{(m+p_0)}{\sqrt{(2^{n-1}(n-1)!)^2}} H_n(\sqrt{m\omega}x_i) H_n(\sqrt{m\omega}x_f) \end{pmatrix} \right. \\
& + \left. \begin{pmatrix} 0 & \sum_{n=0}^\infty \frac{\sqrt{2nm\omega}}{\sqrt{(2^n n!)^2}} H_{n-1}(\sqrt{m\omega}x_i) H_n(\sqrt{m\omega}x_f) \\ -\sum_{n=1}^\infty \sqrt{\frac{2nm\omega}{2^n n!(2^{n-1}(n-1)!)^2}} H_n(\sqrt{m\omega}x_i) H_{n-1}(\sqrt{m\omega}x_f) & 0 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

Finalement la fonction de Green devient

$$\begin{aligned}
S(x_f, x_i) = & i \int_0^\infty d\lambda e^{-im^2\lambda} \int \frac{dp_0}{2\pi} e^{i\lambda p_0^2 + ip_0 T - 2im\omega\lambda(n+\frac{1}{2})} \sum_{n=N_0}^\infty \exp\left[-\frac{m\omega}{2}(x_f^2 + x_i^2)\right] \sqrt{\left(\frac{m\omega}{\pi}\right)} \\
& \times \begin{pmatrix} (m-p_0) H_n(\sqrt{m\omega}x_i) H_n(\sqrt{m\omega}x_f) & 2n\sqrt{m\omega} H_{n-1}(\sqrt{m\omega}x_i) H_n(\sqrt{m\omega}x_f) \\ -2n\sqrt{m\omega} H_n(\sqrt{m\omega}x_i) H_{n-1}(\sqrt{m\omega}x_f) & 2n(m+p_0) H_{n-1}(\sqrt{m\omega}x_i) H_{n-1}(\sqrt{m\omega}x_f) \end{pmatrix} \quad (4.156)
\end{aligned}$$

Ce résultat est exactement celui calculé par la projection global. Le calcul du spectre et les fonctions d'onde étant identique sur précédent.

# Chapitre 5

## Conclusion générale

Dans ce mémoire nous avons appliqué le formalisme intégrale de chemins à deux problèmes :

- Modèle Jaynes Cummings dépendant du temps
- l'oscillateur de Dirac via le Modèle Jaynes Cummings.

On a commencé par exposer les outils nécessaires au développement des chapitre de ce mémoire tels, la technique des intégrales de chemins et la méthode de calcul du propagateur relatif au Modèle J-C dans le cas stationnaire, le contenu physique de l'oscillateur de Dirac ainsi que quelques formules mathématiques utiles.

Pour le premier problème qui traite le Modèle de Jaynes Cummings dépendant du temps, nous avons choisi une dépendance en temps simple de forme exponentielle pour la raison suivante : le calcul de Laplace déjà appliqué au cas stationnaire suffit à retrouver les résultats. Les séries de perturbations sont sommées sur le temps et sur les variables du système à deux niveau et les propagateurs sont exprimés au moyen de séries sur le nombre de photons. Les inversions des populations atomiques sont retrouvées et correspondent au cas limites déjà existants.

Pour l'oscillateur de Dirac en dimension 1+1, le calcul a été fait premièrement dans la représentation dite globale et deuxièmement dans la représentation dit locale où on a en plus le terme de couplage spin-orbite. Dans le deux cas, nous avons identifié l'oscillateur de Dirac au modèle Jaynes Cummings. Par conséquent, dans nos calculs nous avons suivi exactement la méthode déjà élaborée pour le modèle de Jaynes Cummings. Dans les deux représentation le calcul explicite de la fonction de Green devient possible et les fonctions d'ondes sont facilement déterminées. Les résultats obtenus pour ces cas sont en accord avec ceux obtenus par autres

auteurs utilisant différentes méthodes.

Les problèmes sur lesquelles on a buté durant ce mémoire sont la dépendance en temps des couplages du modèle de Jaynes Cummings et le couplage spin-orbite pour l'oscillateur de Dirac. Il serait intéressant d'envisager des dépendances en temps plus générales pour le modèle de Jaynes Cummings et d'attaquer les dimensions supérieures à  $(1+1)$  pour l'oscillateur de Dirac.

# Bibliographie

- [1] Jaynes, E. T. and Cummings, F., Proc. IEEE 51, 89(1963).
- [2] Zaheer, K. and Zubairy, M. S., Phys. Rev. A 37, 1628(1988).
- [3] Buzek, V., Czech. J. Phys. B 39, 757 (1989).
- [4] T. Boudjdaa, A. Bounames, Kh. Nouicer. LChetouani. T. F. Hammann. Phys. Scri. 54, 225-233 (1996).
- [5] M. Moschinsky and A Szczepaniak, J. Phys. A 22, (1989) L817.
- [6] com Radosław Szmytkowski and Marek Gruchowski, J. Phys. A : Math. Gen. 34 (2001) 4991-4997.
- [7] I. S. Gradshteyn. I. M. Ryzhik. TABLE OF INTEGRALS, SERIES, AND PRODUCTS. Academic Press. pp 1033. New York, 1979.

## Résumé

Dans ce mémoire nous avons étudié deux problèmes :

-Le Modèle Jaynes-Cummings dans le cas d'une interaction dépendante du temps est traité dans le formalisme des intégrales de chemins dans la version boson-fermion. Pour une faisabilité des calculs, le choix est porté sur la forme exponentielle. La technique des perturbations et le calcul de Laplace sont utilisés. Les amplitudes de transitions ont été explicitement évaluées et les amplitudes inversion de populations atomiques (API) sont déduites.

- L'oscillateur de Dirac est traité via ce Modèle Jaynes-Cummings dans le formalisme des intégrales de chemins. Les calculs sont effectués dans les deux projections, locale et globale. Toutes les intégrations fonctionnelles ont été effectuées. L'expression du propagateur est explicitement évaluée et les fonctions d'ondes et le spectre sont déduits.

Mots clés : Intégrale de chemin, fonction de Green, mécanique quantique relativiste, Modèle Jaynes Cummings, perturbations

في هذه المذكرة قمنا بدراسة مسألتين في تكامل المسارات لفايمان. في الجزء الأول قمنا بتمديد تكامل المسارات الى تمثيل الحالات المتجانسة، باستعمال نموذج شوينغر السبين تم حساب المنشر للمسألة في البصريات الكمية باستخدام نموذج جانيس- كامنغس في حالة تفاعل متعلق بالزمن كل التكاملات تم حسابها باستخدام طريقة الاضطرابات، و تم استنتاج ساعات العبور وانعكاس الفصيلة الذرية.

أما بالنسبة للهاز التوافقي، قمنا بدراسة المسألة باستعمال نموذج جانيس- كامنغس في الحالتين: المسقط الشمولي والمحلي، كل التكاملات قد تم حسابها وكذلك تم استنتاج دوال الموجة و طيف الطاقة لهاز ديراك و كانت نتائجنا مطابقة بالنتائج الموجودة في المراجع.

كلمات المفاتيح: تكاملات المسالك، دالة غرين، ميكانيك الكمي النسبي، نموذج جانيس- كامنغس، الاضطرابات

## Abstract

In this memory we studied two problems:

- the Jaynes-Cummings Model is treated in the case of an time dependent interaction via the path integral formalism in the boson-fermion version. For a feasibility of calculations, the choice of the exponential form has been chosen. The technique of the perturbation and the Laplace method are used. The transition amplitudes were explicitly evaluated and the amplitudes inversion of atomic populations (API) are deduced.

- the oscillator of Dirac is treated via this Jaynes-Cummings Model in the path integral formalism. Calculations are carried out in two projections, local and global. All functional integrations were carried out. The expression of the propagator is explicitly evaluated and the wave functions and the spectrum are deduced.

Key words: Path-integral, Green's function, relativistic quantum mechanics, Jaynes Cummings Model, perturbations