REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE JIJEL

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre :

Série :

MEMOIRE

présenté pour obtenir le diplôme de

MAGISTER

Spécialité : Physique Théorique

Option : Physique Mathématique

par

BELIBEL OMAR

THEME

Mécanique Quantique Relativiste en présence des distances minimales

Soutenu le :......../04/2007

le Jury :

Président :	N.Mebarki	Prof.	Univ- Constantine
Rapporteur :	Kh. Nouicer	Prof.	Univ- Jijel
Examinateurs :	A.Benslama	Prof.	Univ- Constantine
	T. Boudjedaa	Prof	Univ- Jijel
	A. Bounames	Prof	Univ- Jijel
Invité :	N. Boutaoui	M.C	Univ- Jijel

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE JIJEL
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre :

Série :

MEMOIRE

présenté pour obtenir le diplôme de

MAGISTER

Spécialité : Physique Théorique

Option : Physique Mathématique

par

BELIBEL OMAR

THEME

Mécanique Quantique Relativiste en présence des distances minimales

Soutenu le :....../04/2007

le Jury :

Président :	N.Mebarki	Prof.	Univ- Constantine
Rapporteur :	Kh. Nouicer	Prof.	Univ- Jijel
Examinateurs :	A.Benslama	Prof.	Univ- Constantine
	T. Boudjedaa	Prof	Univ- Jijel
	A. Bounames	Prof	Univ- Jijel
Invité :	N. Boutaoui	M.C	Univ- Jijel

Remerciements

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de Physique Théorique (LPTh) de Jijel.

Je remercie Dieu le tout Puissant pour la volonté, la patience et l'intuition qu'il m'a donné pour faire ce mémoire.

Je tiens à exprimer sincérement ma gratitude et mes remerciements à mon encadreur Mr Nouicer Kh. professeur à l'université de Jijel , pour m'avoir choisi un sujet qui répondait parfaitement à mes penchants scienti□ques et pour l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer et pour ses critiques et ses recommandations insistantes qui m'ont poussé à découvrir des résultats trés interessants .

Mes sincères remerciements à Mr. Noureddine Mebarki professeur à l'université de Constantine pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury.

Je remercie, également et sincèrement Mr. A. Benslama, professeur à l'université de Constantine, Mr. T. Boudjdaa, professeur à l'université de Jijel, Mr. A. Bounames, professeur à l'université de Jijel etMr. N. Boutaoui, Maître de conférence à l'université de Jijel, pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce modeste travail en acceptant de le juger.

J'exprime ma gratitude à tous les gens qui m'ont aidé de près ou de loin dans la préparation de mon mémoire.

Je remercie également tous les enseignants de la post-graduation de physique théorique 2003/2004 qui ont contribué à notre formation scienti□que et je remercie fortement tous mes collègues qui étaient toujours prêts à m'aider, sans oublier bien sûr de remercier tous les membres de ma famille qui ont accepté de faire beaucoup de sacri□ces pour que je réussisse dans cette aventure scienti□que.

Omar

Table des matières

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre 1

Introduction :

Tous les physiciens théoriciens s'accordent à penser que le comportement physique de tout l'univers et de toute la matière qui s'y trouve devrait être régis par une loi fondamentale unique ; c'est ce qu'on appelle la théorie unitaire.

Il existe actuellement plusieurs théories physiques qui cherchent la vérité scientifique en suivant des chemins quelques peu différents. Nous avons la mécanique classique, la mécanique quantique, les théories des champs quantiques, la relativité générale, les théories des cordes, et quelques théories de la gravitation quantique, ... ; Evidemment chaque theorie, satisfaite par sa construction mathématiques et la confirmation expérimentale de quelques prédictions, ne demande de l'aide à personne jusqu'au jour où elle atteint ses propres limites, comme par exemple une énergie du vide infinie ; ce qui devrait selon la théorie de la relativité générale engloutir toute la matière qui se trouve dans l'univers. C'est alors que la théorie en difficulté, essaye de jeter des ponts avec avec les autres théories pour surmonter ses difficultés internes.

La relation de commutation de Heisenberg entre l'opérateur position x et l'opérateur impulsion p_x qui est définie par

$$[x, p_x] = i\hbar, \tag{1.1}$$

où $\hbar$ est la constante de Planck donne une relation d'incertitude de la forme

$$(\triangle x)(\triangle p_x) \geqslant \frac{\hbar}{2}. \tag{1.2}$$

Cette relation impose des limites de précision à toute mesure de la position. L'incertitude sur x peut être nulle c'est à dire qu'on peut considérer les particules comme ponctuelles ce qui est, d'un coté, non réaliste et de l'autre coté aboutit à la fameuse catastrophe "Ultra-Violette". D'où la quete de formuler une nouvelle relation de commutation entre x et p_x qui éviterait la catastrophe "UV" et qui introduit par conséquent un cut-off naturel dans la théorie.

1.1 Principe généralisé de Heisenberg (GUP)

Le progrés perpètuel de la science nous a appris que les théories physiques d'aujourd'hui seront des approximations de théories physiques, plus raffinées de demain. La théorie quantique qui est , fondamentalement, basée sur la fameuse et infiniment petite constante de Planck,

$$\hbar = 1,05450.10^{-34} J.s$$

a une compétence miraculeuse pour bien décrire le comportement des processus microscopiques et toutes ses prédictions ont été confirmées, même la prédiction la plus inattendue concernant l'éxistence d'une énergie résiduelle du vide quantique qui se manifeste à travers l'effet Casimir.

D'où vient donc ce besoin d'apporter quelques modifications à cette élégante théorie ? C'est que, selon cette théorie l'énergie du vide serait infinie.Cette énergie infinie ennuyait énormément tous les physiciens théoriciens qui voulaient s'en débarasser à tout prix. Comment ?

On sait que les théories physiques ne peuvent,dorénavant, faire des progrés qu'en plongeant de plus en plus profondément dans la mer de l'infiniment petit pour mieux sonder ces petits effets qu'on néglige mais qui peuvent, par sommation infinie, donner une contribution catastrophique.

Le chemin obligé que doit suivre la théorie quantique pour avancer est de s'attaquer aux tabous de la physique ; comme, par exemple, essayer de modifier la relation de commutation entre x et p_x.

1.1.1 Relation de commutation non covariante relativiste

La théorie perturbative des super-cordes et toute les approches vers une théorie quantique de la gravitation [1.....11] aboutissent à l'éxistence d'une longueur minimale, au dessous de laquelle on ne peut plus sonder les particules à cause des effets gravitationnels qui se feraient sentir à très petites distances et déformeraient l'espace-temps. Un prototype de longueur minimale est donnée par la relation [12]

$$x_{\mathrm{min}} = \hbar\sqrt{\beta}$$

où β est un parametre petit et positive. Cette relation redonnerait aux particules leur vraie nature d'être non ponctuelles et débarrasserait la théorie quantique de ce lourd fardeau qu'est l'énergie in□nie du vide ou la catastrophe UV. L'une des manières théoriques d'exploiter cette longueur minimale est de l'intégrer dans la théorie quantique a été investi par Kempf et ses collaborateurs [12] en proposant une nouvelle relation de commutation , non covariante , entre x et p_x.

La première mission théorique de la nouvelle relation de commutation entre x et p_x (qui sucite l'interêt de beaucoup de chercheurs [12......17]) est d'aboutir au moins à une incertitude minimale non nulle sur la longueur et / ou sur l'impulsion. L'une des plus simples relations de commutation entre x et p_x qui tient compte de l'éxistence d'une longueur minimale est la suivante [12]

$$[x, p_x] = i\hbar\left(1 + \beta \overrightarrow{p}^2\right), \tag{1.3}$$

où β est un facteur positif et

$$\beta \overrightarrow{p}^2 \ll 1, \tag{1.4}$$

avec

$$\overrightarrow{p}^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2. \tag{1.5}$$

La relation (1.3)pourrait être une fonction beaucoup plus compliquée de p et de x

$$[x, p_x] = \hbar\left(1 + f\left(p^2, x^2\right)\right). \tag{1.6}$$

Nous utiliserons la relation de commutation [?], qui nous donne le principe généralisé de Heisenberg (GUP) suivant

$$\triangle x \triangle p_x \geqslant \frac{1}{2}\hbar(1 + \beta \triangle p_x^2). \tag{1.7}$$

Donc l'incertitude sur la position véri□e la relation suivant

$$\triangle x \geqslant \frac{1}{2}\hbar(\frac{1}{\triangle p_x} + \beta \triangle p_x), \tag{1.8}$$

qui montre l'existence d'un mixage UV/IR : quand $\triangle p_x$ est grand, $\triangle x$ dépend linéairement de $\triangle p_x$

$$\triangle x \propto \triangle p_x, \tag{1.9}$$

et quand $\triangle p_x$ est petit on a

$$\triangle x \propto \frac{1}{\triangle p_x}. \tag{1.10}$$

Le mixage UV/IR a été dèja trouvée dans plusieurs contextes tels que : la correspondance Ads/CFT [18, 19], la théorie non commutative des champs [20, 21, 22], la gravitation quantique [1........11] , l'espace assymptotique de De Sitter [23].

La relation (1.8) implique l'éxistence d'une incertitude minimale $\triangle x_{\min}$ donnée par la condition

$$\frac{\partial \triangle x}{\partial \triangle p_x} = \frac{\hbar}{2}\left(-\frac{1}{\triangle p_x^2} + \beta\right) = 0, \tag{1.11}$$

d'où

$$\triangle x_{\min} = \hbar\sqrt{\beta}. \tag{1.12}$$

Les autres relations de commutation sont données par

$$[p_{i,}p_j] = 0, \tag{1.13}$$

et

$$[x_{i,}x_j] = 2i\hbar\beta\left(p_i x_j - p_j x_i\right). \tag{1.14}$$

Les opérateurs du moment angulaire sont alors définis par

$$L_{ij} = \frac{p_i x_j - p_j x_i}{(1 + \beta \overrightarrow{p}^2)}$$

Comme nous avons maintenant une incertitude minimale sur la position, la notion de localisation est complétement perdue dans l'espace des positions, et il est préférable de travailler dans l'éspace des impulsions comme [12, 13, 14, 15, 16, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32,] car cela nous éviterait de résoudre des équations différentielles du quatrième degré si on essayerait de travailler dans l'espace des positions comme [24] ou des quasi-positions comme [12, 25] à cause de l'éxistence de termes du genre βp^4 dans les équations différentielles.

Dans l'espace des impulsions, l'opérateur des positions $\widehat{x}$ agit comme

$$\widehat{x} = i\hbar \left(1 + \beta \overrightarrow{p}^{2}\right) \frac{\partial}{\partial p_x}, \tag{1.15}$$

et l'opérateur des impulsions $\widehat{p}$ agit comme

$$\widehat{p} = p, \tag{1.16}$$

et la norme dans l'espace des moments est alors dé□nie par

$$\int \frac{d^3p \Psi\left(\overrightarrow{p}\right) \Psi^*\left(\overrightarrow{p}\right)}{\left(1 + \beta p_x^2 + \beta p_y^2 + \beta p_z^2\right)} = 1. \tag{1.17}$$

On remarque le facteur de compréssion de la cellule fondamentale de l'espace des moments et qui aura pour effet la suppression de la contribution des grands moments. En plus cette dé□nition assure l'hermiticité de l'opérateur x

1.1.2 Relation de commutation covariante relativiste

L'algèbre proposée par Kempf [??] est bien evidemment non covariante relativiste et il serait plus convenable de restaurer la covariance relativiste a□n d'étudier l'effet de la longueur minimale sur les propriétés quantiques des systèmes. En effet la version covariante de l'algèbre de Kempf a été réalisée par Quesne et a.[26],

où les relations de commutation entre les quadri-vecteurs position X^{μ} et les quadri-vecteurs impulsions P^{ν} deviennent

$$\left[X^{\mu}, P^{\nu}\right] = -i\hbar \left[\left(1 - \beta P_{\varrho} P^{\varrho}\right) g^{\mu\nu} - \beta' P^{\mu} P^{\nu}\right] \tag{1.18}$$

$$\left[P^{\mu}, P^{\nu}\right] = 0 \tag{1.19}$$

$$\left[X^{\mu}, X^{\nu}\right] = i\hbar \frac{2\beta - \beta' - \left(2\beta + \beta'\right) \beta P_{\varrho} P^{\varrho}}{\left(1 - \beta P_{\varrho} P^{\varrho}\right)} \left(P^{\mu} X^{\nu} - P^{\nu} X^{\mu}\right). \tag{1.20}$$

Dans cette algébre les opérateurs du moment angulaire sont alors dé□nis par

$$L_{\alpha\beta} = \frac{P_\beta X_\alpha - P_\alpha X_\beta}{1 - \beta P_\varrho P^\varrho}. \tag{1.21}$$

L'algèbre de Quesne conduit à une valeur minimale pour chaque composante 4-spatiale de la forme

$$(\triangle X)_0 = \left(\triangle X^i\right)_0 = \hbar\sqrt{(D\beta + \beta')\left(1 - \beta\langle (P^0)^2\rangle\right)}. \tag{1.22}$$

La relation de fermeture qui assure l'hermiticité des opérateurs X^μ est donnée par

$$\int \frac{d^D p}{\left(1 - (\beta + \beta')\, P_\varrho P^\varrho\right)^\alpha} \mid p >< p \mid = 1, \tag{1.23}$$

où α est défini par

$$\alpha = \frac{2\beta + \beta'(D+2) - 2\theta}{2\,(\beta + \beta')}. \tag{1.24}$$

et θ une constante .

Remarque Dans la représentation des impulsions , l'opérateur de position X agit ;

– dans l'algèbre de Kempf comme :

$$X = i\hbar\left(1 + \beta \overrightarrow{P}^2\right)\frac{\partial}{\partial P_x} = i\hbar\left[\left(1 + \beta P_y^2 + \beta P_z^2\right) + \beta P_x^2\right]\frac{\partial}{\partial P_x} = i\hbar\left[\gamma + \beta P_x^2\right]\frac{\partial}{\partial P_x}, \tag{1.25}$$

avec

$$\gamma = \left(1 + \beta P_y^2 + \beta P_z^2\right). \tag{1.26}$$

– dans l'algèbre de Quesne comme

$$\begin{aligned} X &= i\hbar\left(1 - \beta\left(P^0\right)^2 + \beta\overrightarrow{P}^2\right)\frac{\partial}{\partial P_x} \\ &= i\hbar\left[\left(1 - \beta\left(P^0\right)^2 + \beta P_y^2 + \beta P_z^2\right) + \beta P_x^2\right]\frac{\partial}{\partial P_x} = i\hbar\left[\gamma' + \beta P_x^2\right]\frac{\partial}{\partial P_x}, \end{aligned} \tag{1.27}$$

avec

$$\gamma' = \left(1 + \beta P_y^2 + \beta P_z^2 - \beta\left(P^0\right)^2\right), \quad P^0 = \frac{\mathcal{E}}{c}. \tag{1.28}$$

1.2 Les objectifs de ce mémoire

Notre travail de recherche, dans cette thèse, a deux aspects : un aspect physique et un aspect mathématique.

L'aspect physique consiste en la recherche des corrections qu'apporteraient les deux nouvelles algèbres déformées (proposées l'une par Kémpf et l'autre par Quesne et qui tiennent compte de l'éxistence d'une longueur minimale) sur les états quantiques des particules relativistes : spectre d'énérgie, levée de dégénéréscence ; fonction d'onde,... en présence d'un champ extérieur homogène $A \equiv (\Phi, \mathbf{A})$. [chap.2 et chap.3]

De même on a essayé d'étudier une éventuelle correction qu'apporterait cette longueur minimale sur la vitesse, l'impulsion, l'énergie des particules relativistes massiques .[chap.4]

L'aspect mathématique de notre travail est d'avoir proposé une autre ansatz de résolution des équations différentielles qu'on a rencontrées dans notre travail [chap.1] . Nous avons utilisé cette méthode pour résoudre l'équation de l'oscillateur harmonique, non relativiste, dans un espace à D-dimensions en présence d'une longueur minimale [chap.3], problème qui a été résolu par d'autres auteurs [?] et [?]. Aussi nous avons proposé une autre approche de la méthode de perturbation qui est à notre avis plus adéquate aux équations différentielles insolubles qui ont été apportées par ces algèbres déformées, et pour nous assurer de l'efficacité de notre approche de perturbation nous l'avions avant tout appliqué avec succés à l'oscillateur anharmonique. Nous terminerons ce travail par une conclusion.

1.3 Equation différentielle rencontrée

Les systèmes quantiques que nous allons étudiés dans ce mémoire sont tous régis par des équations différentielles du type hypergéométrique de la forme

$$\left[\sigma^2(p)\frac{\partial^2}{\partial p^2} + \sigma(p)(Ap+B)\frac{\partial}{\partial p} + Cp^2 + Dp + E\right]\Psi(p) = 0, \tag{1.29}$$

où $\sigma(p)$ est un polynôme de degré 2.

Nous suiverons la méthode suivante pour réduire cette équation. Cherchons d'abord la solution $\Psi(p)$ sous la forme

$$\Psi(p) = \left[\exp\left(\int \frac{(\mu p + \nu)}{\sigma(p)} dp\right)\right] F(p), \tag{1.30}$$

où μ, ν sont des constantes à déterminer et $F(p)$ une fonction vérifiant l'équation différentielle suivante

$$\left[\sigma^2(p)\frac{\partial^2}{\partial p^2}+\sigma(p)\left[(A+2\mu)p+B+\nu\right]\frac{\partial}{\partial p}+H(p)\right]F(p)=0 \tag{1.31}$$

où $H(p)$ est un polynôme de la forme

$$H(p)=Cp^2+Dp+E+(\mu p+\nu)^2+\mu\sigma(p)-(\mu p+\nu)\sigma(p)' \tag{1.32}$$

où $\sigma(p)'=d\sigma(p)/dp$. On impose que

$$H(p)\equiv\lambda\sigma(p)\ ,\quad \lambda=cte. \tag{1.33}$$

La résolution de l'équation (1.33) nous donne les valeurs des constantes μ et ν. Après simplification par $\sigma(p)$, l'équation (??) devient

$$\left[\sigma(p)\frac{\partial^2}{\partial p^2}+\left[(A+2\mu)p+B+\nu\right]\frac{\partial}{\partial p}+\lambda\right]F(p)=0. \tag{1.34}$$

Cette équation différentielle admet, comme solutions, des polynômes du type hypergéométriques si on a la condition suivante

$$\lambda=-n\frac{\partial}{\partial p}\left[(A+2\mu)p+B+\nu\right]-n\frac{(n-1)}{2}\frac{\partial^2}{\partial p^2}\sigma(p), \tag{1.35}$$

où n est un entier. La solution $F(p)$ est alors donnée par la formule de Rodrigues généralisée

$$F(p)=F_n(p)=\frac{C_n}{\rho(p)}\frac{\partial^n}{\partial p^n}\left[\sigma(p)^n\rho(p)\right], \tag{1.36}$$

et où $\rho(p)$ vérifie l'équation différentielle suivante

$$\frac{\rho(p)'}{\rho(p)}=\frac{\left[(A+2\mu)p+B+\nu\right]-\sigma(p)'}{\sigma(p)}. \tag{1.37}$$

Si λ est quelconque, la solution est, dans ce cas, donnée sous forme intégrale

$$F(p)=F_\varrho(p)=\frac{C_\nu}{\rho(p)}\int_C\frac{\sigma^\varrho(s)\rho(s)}{(s-p)^{\varrho+1}}ds \tag{1.38}$$

où ϱ est liée à la constante λ par la relation

$$\lambda=-\varrho\frac{\partial}{\partial p}\left[(A+2\mu)p+B+\nu\right]-\frac{\varrho(\varrho-1)}{2}\frac{\partial^2}{\partial p^2}\sigma(p), \tag{1.39}$$

et le contour C est choisi de sorte que

$$\left.\frac{\sigma^{\varrho+1}(s)\,\rho(s)}{(s-p)^{\varrho+2}}\right|_{S_1}^{S_2}=0, \tag{1.40}$$

où s_1, s_2 sont les extrémités du contour C.

Chapitre 2

Particule chargée relativiste dans un champ extérieur

On sait (dans l'algèbre standard d'Heisenberg) qu'une particule chargée n'a pas toujours des états stationnaires dans un champ extérieur $A^{\mu}\left(\Phi,\overrightarrow{A}\right)$. Elle ne peut avoir des états stationnaires que dans un champ magnétique homogène ou dans deux champs magnétique $\overrightarrow{H}$ et électrique $\overrightarrow{E}$ mutuellement perpendiculaires.

Nous allons, dans ce chapitre, étudier les corrections qu'apporteraient les nouvelles algèbres définies précedemment - qui tiennent compte de l'éxistence d'une longueur minimale- sur les états quantiques d'une particule chargée relativiste, avec spin ou sans spin, dans des champs extérieurs .

L'équation de Dirac, du premier ordre, pour un électron dans un champ extérieur $A^{\mu}\left(\Phi,\overrightarrow{A}\right)$ est [34]

$$\left[\gamma^{\mu}\left(p_{\mu}-eA_{\nu}\right)-m\right]\psi=0, \tag{2.1}$$

où on a pris

$$\left(\hbar=c=1\right) \tag{2.2}$$

et :

γ : Matrices de Dirac

p : Quadri vecteur impulsion

A^{μ} : Quadri vecteur potentiel

e : Charge éléctrique de l'électron.(ou de la particule)

m : Masse de la particule au repos

ψ : quadri- spineur

L'équation de premier ordre (2.1) peut être transformée en une équation de second ordre en appliquant à (2.1) l'opérateur$[\gamma^{\mu}(p_{\mu} - eA_{\nu}) - m]$.

Cela nous donne

$$\left[\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}(p_{\mu} - eA_{\mu})(p_{\nu} - eA_{\nu}) - m^{2}\right]\psi = 0. \tag{2.3}$$

$$\left[\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\left(p_{\mu}p_{\nu} - ep_{\mu}A_{\nu} - eA_{\mu}p_{\nu} + e^{2}A_{\mu}A_{\nu}\right) - m^{2}\right]\psi = 0$$

En effectuant les manipulations habituelles on obtient , en tenant compte de la non commutativité des A_{μ} ,A_{ν}

$$\left[(p - eA)^{2} - m^{2} - \frac{ie}{2}F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} + \frac{1}{2}e^{2}\sigma^{\mu\nu}\left[A_{\mu}, A_{\nu}\right]\right]\psi = 0, \tag{2.4}$$

avec $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$ le tenseur du champ E-M. On peut écrire le produit $F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$ sous la forme tridimensionnelle en l'exprimant en fonction des composantes

$$\sigma^{\mu\nu} = (\alpha, i\Sigma)\,, \quad F^{\mu\nu} = \left(-\overrightarrow{E}, \overrightarrow{H}\right). \tag{2.5}$$

Alors l'équation (2.4) s'écrit

$$\left[(p - eA)^{2} - m^{2} + e\Sigma\overrightarrow{H} - ie\alpha\overrightarrow{E} + \frac{1}{2}e^{2}\sigma^{\mu\nu}\left[A_{\mu}, A_{\nu}\right]\right]\psi = 0, \tag{2.6}$$

avec

$$\alpha = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & -\sigma \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}, \ \sigma = [\sigma_{x}, \sigma_{y}, \sigma_{z},] \tag{2.7}$$

et

$$p = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \vec{p}\right), \tag{2.8}$$

ou en restaurant les unités

$$\left[\left(\mathcal{E}/c - \frac{e}{c}\phi\right)^{2} - \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^{2} - m^{2}c^{2} + \frac{e\hbar}{c}\Sigma\overrightarrow{H} - \frac{ie\hbar}{c}\alpha\overrightarrow{E} + \frac{1}{2}e^{2}\sigma^{\mu\nu}\left[A_{\mu}, A_{\nu}\right]\right]\psi = 0. \tag{2.9}$$

2.1 Equation de Dirac pour une particule dans un champ magnétique constant

Considérons le cas d'une particule chargée plongée dans un champ magnétique homogène dirigé suivant l'axe des z, donné par

$$\phi = 0,\ A_x = A_z = 0,\ A_y = H\hat{x}, \tag{2.10}$$

c'est à dire

$$\overrightarrow{H} = H\overrightarrow{k}. \tag{2.11}$$

Alors l'équation (2.9) s'écrit

$$\left[\mathcal{E}^2/c^2 - \left(\overrightarrow{p} - \frac{e}{c}\overrightarrow{A}\right)^2 - m^2c^2 + \frac{e\hbar}{c}\Sigma\overrightarrow{H}\right]\psi = 0, \tag{2.12}$$

avec la matrice Σ donnée par (2.7) . Après dévoleppement de (2.12) on obtient

$$\left[\mathcal{E}^2/c^2 - p_x^2 - p_z^2 - \left(p_y - \frac{eH}{c}\hat{x}\right)^2 - m^2c^2 + \frac{e\hbar\sigma_z H}{c}\right]\psi\left(\overrightarrow{p}, \mathcal{E}\right)_\sigma = 0. \tag{2.13}$$

En appliquant les nouvelles algèbres déformées ,et en prenant $\beta' = 0$, l'équation (2.13) s'écrit dans la représentation des impulsions comme

$$0 = \left\{\left(\frac{e\hbar H}{c}\right)^2 \left(\gamma + \beta p_x^2\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial p_x^2} + \left(\gamma + \beta p_x^2\right)\right. \tag{2.14}$$

$$\times\left[\left(\frac{e\hbar H}{c}\right)^2 2\beta p_x + 2i\frac{e\hbar H}{c}p_y\right]\frac{\partial}{\partial p_x}$$

$$\left. + \frac{e\hbar}{c}H\sigma_z + \mathcal{E}^2/c^2 - m^2c^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2\right\}\psi\left(\overrightarrow{p}, \mathcal{E}\right)_\sigma \tag{2.15}$$

Pour simpli□er l'écriture on pose

$$\epsilon_0 = \frac{\mathcal{E}^2/c^2 - m^2c^2 - p_y^2 - p_z^2}{B_0^2} + \frac{e\hbar}{c}H\sigma_z, \tag{2.16}$$

avec

$$B_0 = \frac{e\hbar H}{c}, \tag{2.17}$$

l'équation (2.14) devient alors

$$\left\{ \left(\gamma+\beta p_x^2\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial p_x^2} + \left(\gamma+\beta p_x^2\right)\left[2\beta p_x + \frac{2ip_y}{B_0}\right]\frac{\partial}{\partial p_x} - \frac{p_x^2}{B_0^2} + \epsilon_0 \right\}\psi = 0. \tag{2.18}$$

Réduisons maintenant cette équation differentielle en une équation du type hypergéométrique généralisée de la forme

$$\left[\sigma\left(p_x\right)\frac{\partial^2}{\partial p_x^2} + \tau\left(p_x\right)\frac{\partial}{\partial p_x} + \lambda\right] f\left(p_x\right) = 0, \tag{2.19}$$

où $\sigma\left(p_x\right)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2, $\tau\left(p_x\right)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1 et λ une constante à déterminer.

Pour cela, cherchons la solution sous la forme

$$\psi\left(\overrightarrow{p},\mathcal{E}\right)_\sigma = C\left(p_y,p_z,\mathcal{E}\right)\exp\left[\int \frac{ap_x+b}{\gamma+\beta p_x^2}dp_x\right] f\left(p_x\right), \tag{2.20}$$

où a et b sont des constantes à déterminer.

Avec l'anzats (2.20) , l'équation (2.131) devient

$$\left\{ \left(\gamma+\beta p_x^2\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial p_x^2} + \left(\gamma+\beta p_x^2\right)\left[\left(2\beta+2a\right)p_x + \frac{2ip_y}{B_0} + 2b\right]\frac{\partial}{\partial p_x} + H\left(p_x\right) \right\} f\left(p_x\right) = 0, \tag{2.21}$$

où $H\left(p_x\right)$ est un polynôme donnée par

$$H\left(p_x\right) = \left(-\frac{1}{B_0^2} + a^2 + a\beta\right)p_x^2 + 2a\left(b + \frac{ip_y}{B_0}\right)p_x + \epsilon_0 + b^2 + a\gamma + \frac{2ip_y}{B_0}b. \tag{2.22}$$

Dans ce qui suit nous allons proposer deux méthodes de résolution de cette équation différentielle .

2.1.1 Première méthode de résolution

Imposons que

$$H\left(p_x\right) = \lambda\left(\gamma+\beta p_x^2\right). \tag{2.23}$$

Après simplification par le facteur $\left(\gamma+\beta p_x^2\right)$, l'équation (2.135) s'écrit

$$\left\{ \left(\gamma+\beta p_x^2\right)\frac{\partial^2}{\partial p_x^2} + \left[\left(2\beta+2a\right)p_x + \frac{2ip_y}{B_0} + 2b\right]\frac{\partial}{\partial p_x} + \lambda \right\} f\left(p_x\right) = 0. \tag{2.24}$$

Dans la suite on s'intéresse uniquement aux états liés du système. Pour cela on éxige que la fonction d'onde $f\left(p_x\right)$ soit finie quand p_x tend vers l'infini. Ce qui revient à chercher une solution polynomiale pour l'équation (2.135). On impose alors que que λ véri⎕e la condition de quanti⎕cation suivante

$$\lambda = \lambda_n = -n\frac{d}{dp_x}\tau(p_x) - \frac{n(n-1)}{2}\frac{d^2}{dp_x^2}\sigma(p_x), \quad n = 0, 1, 2, 3, ..., \tag{2.25}$$

avec

$$\sigma(p_x) = (\gamma + \beta p_x^2), \tag{2.26}$$

$$\tau(p_x) = (2\beta + 2a)p_x + \frac{2ip_y}{B_0} + 2b. \tag{2.27}$$

On obtient alors

$$\lambda = -2na - n(n+1)\beta. \tag{2.28}$$

Les éxigences (2.23) et (2.28) nous donnent un système, de quatre équations à quatre inconnues $a, b, \lambda, \in_0$, donné par

$$\in_0 + b^2 + a\gamma + \frac{2ip_y b}{B_0} = \lambda\gamma, \tag{2.29}$$

$$2a\left(b + \frac{ip_y}{B_0}\right) = 0, \tag{2.30}$$

$$-\frac{1}{B_0^2} + a^2 + \beta a = \lambda\beta, \tag{2.31}$$

$$-2na - n(n+1)\beta = \lambda. \tag{2.32}$$

La résolution de ce système d'équations ((2.29) (2.30) (2.31) (2.32)) donne mathématiquement deux groupes de racines selon que $a = 0$ ou $a \neq 0$. Bien sûr le choix sera guidé par des considérations physiques qui conviennent au système étudié.

Premier groupe de racines si $a \neq 0$ l'équation(2.30) donne $b = -\frac{ip_y}{B_0}$ et des équations (2.31) et (2.32) on obtient

$$a^2 + a(2n+1)\beta + n(n+1)\beta^2 - \frac{1}{B_0^2} = 0. \tag{2.33}$$

La résolution de cette équation nous donne deux valeurs pour la constante a

$$a = a_{n,\pm} = -\frac{(2n+1)\beta}{2} \pm \frac{1}{|B_0|}\sqrt{1 + \frac{\beta^2 B_0^2}{4}}, \tag{2.34}$$

Le choix de l'une des solutions est lié à la finitude de la fonction d'onde $\psi(p)$ quand $p_x \to \pm\infty$.

On verra que $a_{n,\pm}$ doit être négative pour que $\psi(p)$ ne diverge pas, c'est à dire qu'on va choisir

$$a = a_{n,-} = -\frac{(2n+1)\beta}{2} - \frac{1}{|B_0|}\sqrt{1+\frac{\beta^2 B_0^2}{4}}. \tag{2.35}$$

En remplaçant les expressions de $a_{n,-}$ et de b dans (2.29), on obtient, après simplification l'expression du spectre d'énergie

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n^2/c^2 &= p_z^2 + m^2c^2 - \sigma_z\frac{e\hbar H}{c} + \gamma\beta\left(\frac{e\hbar H}{c}\right)^2\left(n^2+n+\frac{1}{2}\right) \\ &+\gamma\frac{|e|\,\hbar H}{c}\sqrt{1+\frac{\beta^2(e\hbar H)^2}{4c^2}}(2n+1) \;\;, n=0,1,2,..., \quad \sigma_z = \pm 1 \end{aligned} \tag{2.36}$$

- Dans l'algèbre de Kempf ;

$$\gamma = \left(1+\beta P_y^2 + \beta P_z^2\right),$$

et on obtient alors

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(Kempf)_n^2/c^2 &= p_z^2 + m^2c^2 - \sigma_z\frac{e\hbar H}{c} + \left[1+\beta P_y^2+\beta P_z^2\right]\beta\left(\frac{e\hbar H}{c}\right)^2\left(n^2+n+\frac{1}{2}\right) \\ &+ \left[1+\beta P_y^2+\beta P_z^2\right]\frac{|e|\,\hbar H}{c}\sqrt{1+\frac{\beta^2(e\hbar H)^2}{4c^2}}(2n+1). \end{aligned} \tag{2.37}$$

- Dans l'algèbre de Quesne

$$\gamma = \left(1+\beta P_y^2 + \beta P_z^2 - \beta\mathcal{E}_n^2/c^2\right),$$

et alors

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(Quesne)_n^2/c^2 &= p_z^2 + m^2c^2 - \sigma_z\frac{e\hbar H}{c} + \left[1+\beta P_y^2+\beta P_z^2 - \beta\mathcal{E}_n^2/c^2\right]\beta\left(\frac{e\hbar H}{c}\right)^2\left(n^2+n+\frac{1}{2}\right) \\ &+ \left[1+\beta P_y^2+\beta P_z^2 - \beta\mathcal{E}_n^2/c^2\right]\frac{|e|\,\hbar H}{c}\sqrt{1+\frac{\beta^2(e\hbar H)^2}{4c^2}}(2n+1). \end{aligned} \tag{2.38}$$

La résolution de cette équation nous donne ;

$$\mathcal{E}\left(Quesne\right)_n^2/c^2 = \frac{\mathcal{E}\left(Kempf\right)_n^2/c^2}{q},$$

avec

$$q = 1+\beta\left(2n+1\right)\frac{|e|\,\hbar H}{c}\sqrt{1+\frac{\beta^2\left(e\hbar H\right)^2}{4c^2}} + \beta^2\left(n^2+n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{e\hbar H}{c}\right)^2. \tag{2.39}$$

On remarque que la nouvelle algèbre de Kempf, déﬁnie par les équations (??) apporte les modiﬁcations suivantes

1- Rend l'expression $\left(\mathcal{E}_n^2/c^2\right)$ dépendante de $\left(n^2\right)$. Ce phénomène, absent dans le traitement standard de l'équation de Dirac, est caractéristique des systèmes hautement conﬁnés, comme l'exemple des quarks dans les hadrons (*citations*).

2- Lève completement la dégénérèscence sur l'énérgie d'une particule relativiste dans un champ magnétique constant dirigé suivant l'axe des (z) ; car cette énérgie dépend maintenant non seulement de l'impulsion(p_z) mais dépend aussi de l'impulsion (P_y) à travers le facteur. $\left[1+\beta\left(p_y^2+p_z^2\right)\right]$.

Le cas habituel est facilement retrouvé en posant $\beta = 0$ dans [??]

$$\frac{\mathcal{E}^2\left(0\right)}{c^2} = p_z^2+m^2c^2-\sigma_z\frac{e\hbar H}{c}+\left(2n+1\right)\frac{e\hbar H}{c}\ ,\ n=0,1,2,.. \tag{2.40}$$

3- La correction, au premier ordre en β , de l'énergie est

$$\frac{\mathcal{E}^2\left(\beta\right)}{c^2} = \frac{\mathcal{E}^2\left(0\right)}{c^2}+\beta\left[\left(\frac{e\hbar H}{c}\right)^2\left(n^2+n+\frac{1}{2}\right)+\left(2n+1\right)\left(p_y^2+p_z^2\right)\frac{e\hbar H}{c}\right]. \tag{2.41}$$

4- Dans l'algebre de Quesne, l'energie est bornée lorsque n tend vers l'inﬁni

$$\mathcal{E}_{\lim}\left(Quesne\right)_n^2/c^2 = \frac{1}{\beta}+P_y^2+P_z^2. \tag{2.42}$$

Calcul des fonctions d'onde $f_n\left(p_x\right)$ Revenons à l'équation (2.140) qui devient

$$\left\{\left(\gamma+\beta p_x^2\right)\frac{\partial^2}{\partial p_x^2}+\left[\left(2\beta+2a\right)p_x\right]\frac{\partial}{\partial p_x}+\lambda_n\right\}f_n\left(p_x\right)=0. \tag{2.43}$$

La solution explicite de cette équation différentielle est donnée par la formule de Rodrigues généralisée

$$f_n(p_x) = \frac{c_n}{\rho(p_x)}\left[\sigma^n(p_x), \rho(p_x)\right]^{(n)}, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{2.44}$$

où c_n est une constante de normalisation, et l'indice (n) représente la dérivée n-ième et $\rho(p_x)$ véri□e l'équation différentielle suivante

$$\frac{\rho'(p_x)}{\rho(p_x)} = \frac{(2\beta + 2a)p_x - (\gamma + \beta p_x^2)'}{(\gamma + \beta p_x^2)}, \tag{2.45}$$

dont la solution est

$$\rho = \left(\gamma + \beta p_x^2\right)^{\frac{a}{\beta}}. \tag{2.46}$$

D'où

$$f_n(p_x) = \frac{c_n}{\left(\gamma + \beta p_x^2\right)^{\frac{a}{\beta}}} \frac{d^n}{dp_x^n}\left[\left(\gamma + \beta p_x^2\right)^{n+\frac{a}{\beta}}\right]. \tag{2.47}$$

La fonction d'onde est donnée par

$$\psi(\overrightarrow{p}, \mathcal{E}) = C(p_y, p_z, \mathcal{E}) \exp\left[\int \frac{ap_x + b}{\gamma + \beta p_x^2} dp_x\right] f_n(p_x). \tag{2.48}$$

Après intégration on trouve

$$\psi_n(\overrightarrow{p}, \mathcal{E}) = C(p_y, p_z, \mathcal{E}) \exp\left[\frac{-ip_y c}{e\hbar H\sqrt{\gamma\beta}} \arctan\left(\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}} p_x\right)\right] \left(\gamma + \beta p_x^2\right)^{\frac{a}{2\beta}} f_n(p_x), \tag{2.49}$$

2.1.2 Deuxième méthode de résolution

Revenons à l'équation (2.135)

$$\left\{ \left(\gamma + \beta p_x^2\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial p_x^2} + \left(\gamma + \beta p_x^2\right)\left[(2\beta + 2a)p_x + \frac{2ip_y}{B_0} + 2b\right]\frac{\partial}{\partial p_x} + H(p_x)\right\} f(p_x) = 0, \tag{2.50}$$

où

$$\begin{aligned} H(p_x) &= \left(-\frac{1}{B_0^2} + a^2 + a\beta\right)p_x^2 + 2a\left(b + \frac{ip_y}{B_0}\right)p_x + \\ \frac{\gamma\sigma_z}{B_0} + &\in {}_0 + b^2 + a\gamma + \frac{2ip_y}{B_0} b. \end{aligned} \tag{2.51}$$

On choisit cette fois

$$2a(b + \frac{iP_y}{B_0})p_x \equiv 0, \tag{2.52}$$

et

$$\left(a^2 + \beta a - \frac{1}{B_0^2}\right) p_x^2 \equiv 0. \tag{2.53}$$

Ce qui donne

$$b = -\frac{iP_y}{B_0}, \tag{2.54}$$

et

$$a = -\frac{\beta}{2} \pm \frac{1}{\mid B_0 \mid}\sqrt{\frac{\beta^2 B_0^2}{4} + 1}. \tag{2.55}$$

L'équation (2.50) se simplifie comme

$$\{((\gamma + \beta P_x^2)\frac{\partial}{\partial P_x})^2 + (\gamma + \beta P_x^2)2aP_x\frac{\partial}{\partial P_x} + E\}f(P_x) = 0, \tag{2.56}$$

où

$$E = \varepsilon_0 + a\gamma + \frac{P_y^2}{B_0^2}. \tag{2.57}$$

En écrivant

$$\gamma + \beta P_x^2 = \gamma(1 + \beta' P_x^2), \text{ avec } \beta' = \frac{\beta}{\gamma}. \tag{2.58}$$

L'équation (2.56)s'ecrit donc

$$\{\gamma^2[(1 + \beta' P_x^2)\frac{\partial}{\partial P_x}]^2 + 2\gamma a P_x(1 + \beta' P_x^2)\frac{\partial}{\partial P_x} + E\}f(P_x) = 0. \tag{2.59}$$

Si on fait le changement de variable suivant

$$P_x = \frac{1}{\sqrt{\beta'}}\tan(\sqrt{\beta'})\rho, \tag{2.60}$$

on trouve

$$\frac{\partial}{\partial P_x} = \cos^2(\sqrt{\beta'})\rho\frac{\partial}{\partial \rho}, \quad (1 + \beta' P_x^2)\frac{\partial}{\partial P_x} = \frac{\partial}{\partial \rho}, \tag{2.61}$$

et l'équation (2.59) devient alors

$$\{\gamma^2(\frac{\partial}{\partial \rho})^2 + \frac{2\gamma a}{\sqrt{\beta'}}\tan(\sqrt{\beta'})\rho\frac{\partial}{\partial \rho} + E\}f(\rho) = 0. \tag{2.62}$$

Faisons encore un autre changement de variable

$$s = \sin(\sqrt{\beta'})\rho, c = \cos(\sqrt{\beta'})\rho, \tag{2.63}$$

avec

$$\frac{\partial}{\partial \rho} = c\sqrt{\beta'}\frac{\partial}{\partial s}, \quad (\frac{\partial}{\partial \rho})^2 = -\beta' s\frac{\partial}{\partial s} + \beta' c^2(\frac{\partial}{\partial s})^2. \tag{2.64}$$

L'équation (2.62) devient

$$\{(1 - s^2)(\frac{\partial}{\partial s})^2 + (2\lambda + 1)s\frac{\partial}{\partial s} + \frac{E}{\gamma\beta}\}f(s) = 0, \tag{2.65}$$

avec

$$\lambda = -\frac{1}{2} - \frac{1}{\beta \mid B_0 \mid}\sqrt{\frac{\beta^2 B_0^2}{4} + 1}. \tag{2.66}$$

L'équation (2.65) admet une solution polynômiale si on impose la condition

$$E = n(2\lambda + n)\gamma\beta, \tag{2.67}$$

avec E donnée par(2.57) . D'où on tire l'expression des noveaux d'énergie

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n^2/c^2 &= m_0^2c^2 + P_z^2 - \frac{e\hbar H}{c}\sigma_z + \gamma\beta\frac{e\hbar H}{c}(n^2 + n + 1) \\ &+\gamma\frac{\mid e \mid \hbar H}{c}\sqrt{\frac{\beta^2 e^2\hbar^2 H^2}{4c^2} + 1}(2n + 1), \end{aligned} \tag{2.68}$$

qui est la même expression que celle trouvée par la première méthode et bien sûr on retrouve

$$\mathcal{E}\,(Quesne)_n^2\,/c^2 = \frac{\mathcal{E}\,(Kempf)_n^2\,/c^2}{q}.$$

Revenons maintenant au calcul des fonctions d'onde. Les solutions finies de l'équation différentielle (2.50), sont les polynômes de Gegenbauer

$$f'(s) = C_n^{\lambda}(s). \tag{2.69}$$

Donc la fonction d'onde prend la forme

$$\Psi_n(\vec{P}, \mathcal{E}) = c_n C(P_y, P_z, \mathcal{E}) \exp\left[(\frac{-iP_y c}{e\hbar H\sqrt{\gamma\beta}}\arctan(\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}P_x)\right](\gamma + \beta P_x^2)^{\frac{a}{2\beta}} C_n^{\lambda}(s), \tag{2.70}$$

où c_n est une constante de normalisation et $C(P_y, P_z, \mathcal{E})$ est une fonction de P_y , P_z et de $\mathcal{E}$.

On a

$$1+\beta' P_x^2 = 1+\tan^2(\sqrt{\beta'}\rho) = \frac{1}{\cos^2(\sqrt{\beta'}\rho)}, \tag{2.71}$$

ce qui nous donne

$$c = \cos(\sqrt{\beta'}\rho) = (1+\beta' P_x^2)^{\frac{-1}{2}}, \tag{2.72}$$

$$s = \sin(\sqrt{\beta'}\rho) = \frac{\sqrt{\beta'}P_x}{\sqrt{1+\beta' P_x^2}}. \tag{2.73}$$

Aprés le changement suivant

$$\lambda = \frac{-a}{\beta} \to \frac{a}{2\beta} = (-\frac{\lambda}{2}), \tag{2.74}$$

la fonction d'onde peut s'écrire aussi

$$\Psi_n(\vec{P}, \mathcal{E}) = c_n C(P_y, P_z, \mathcal{E})\gamma^{\frac{a}{2\beta}} \exp\left[\frac{-iP_y c}{e\hbar H\sqrt{\gamma\beta}} \arctan(\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}P_x)\right] c^\lambda C_n^\lambda(s). \tag{2.75}$$

Remarque

Le deuxième groupe de solution du système d'équations où on prend $a = 0$, laisse b indéterminé et rend l'energie ϵ_0 arbitraire car on aura ,

$$\epsilon_0 = \lambda\gamma - b^2 - \frac{2ip_y b}{B_0}, \tag{2.76}$$

$$-\frac{1}{B_0^2} = \lambda\beta,$$

$$-n\,(n+1)\,\beta = \lambda. \tag{2.77}$$

et impose que le champ magnétique H depend du facteur inconnu β

$$B_0 = \frac{e\hbar H}{c} = \pm\beta\sqrt{n\,(n+1)}, \tag{2.78}$$

ce qui n'est pas physiquement réalisable.

2.2 Equation de Dirac en présence d'un champ élèctrique homogène

Considérons le cas d'une particule chargée plongée dans un champ électrique constant dirigé suivant l'axe des z, donné par

$$\overrightarrow{A} = 0, H = \hat{0} \text{ et } \phi = Ez.$$

L'équation de Dirac pour ce système est

$$\left[\left(\frac{\mathcal{E}}{c} - \frac{e}{c}\phi\right)^2 - \left(\overrightarrow{p} - \frac{e}{c}\overrightarrow{A}\right)^2 - m^2c^2 + \frac{ie\hbar}{c}\sigma_z E\right]|\psi\rangle = 0, \tag{2.79}$$

et en appliquant les nouvelles algèbres dans la représentation des impulsions on obtient l'équation

$$\left\{ \left(\gamma + \beta p_z^2\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial p_z^2} + \left[2\beta p_z + 2i\frac{\xi}{cE_0}\right]\left(\gamma + \beta p_z^2\right)\frac{\partial}{\partial p_z} + \frac{p_z^2}{E_0^2} + \in_0 \right\}\psi\left(\overrightarrow{p}, \mathcal{E}\right) = 0, \tag{2.80}$$

avec

$$\in_0 = \left(p_y^2 + p_x^2 + m^2c^2 - \frac{\mathcal{E}^2}{c^2}\right)\frac{1}{E_0^2} + \frac{i\sigma_z}{E_0}, \tag{2.81}$$

$$\frac{e\hbar E}{c} = E_0, \tag{2.82}$$

et

$$\gamma = 1 + \beta\left(p_y^2 + p_x^2\right),$$

qui ressemble à l'équation (2.131).

Cherchons la solution sous la forme

$$\psi\left(\overrightarrow{p}, \mathcal{E}\right) = C\left(p_y, p_x, \mathcal{E}\right)\exp\left[\int \frac{Ap_x + B}{\gamma + \beta p_z^2}dp_z\right] f_n\left(p_z\right). \tag{2.83}$$

L'équation (2.80) se transforme en l'équation suivante

$$\left\{ \left(\gamma + \beta p_x^2\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial p_z^2} + \left[2\beta p_z + 2i\frac{\in}{cE_0} + 2Ap_z + 2B\right]\left(\gamma + \beta p_z^2\right)\frac{\partial}{\partial p_z}\right.$$
$$\left. H\left(p_z\right)\right\} f_n\left(p_z\right) = 0, \tag{2.84}$$

avec $H(p_z)$ un polynome donné par

$$H(p_z) = \left(\frac{1}{E_0^2} + A^2 + \beta A\right) p_z^2 + 2A\left(B + i\frac{\in}{E_0}\right) p_z + \left(\frac{i\sigma_z}{E_0} + \in_0 + B^2 + A\gamma + 2i\frac{\in}{E_0}\right). \tag{2.85}$$

Imposons que

$$H(p_z) = \lambda\left(\gamma + \beta p_z^2\right). \tag{2.86}$$

Après simpli□cation par $(\gamma + \beta p_z^2)$ l'équation (2.84) devient

$$\left\{ \left(\gamma + \beta p_z^2\right) \frac{\partial^2}{\partial p_x^2} + \left[(2\beta + 2A) p_z + 2i\frac{\in}{E_0} + 2B\right] \frac{\partial}{\partial p_z} + \lambda \right\} f_n(p_z) = 0. \tag{2.87}$$

La condition sur λ pour que $f_n(p_z)$ soit □nie et l'exigence (2.86) nous donnent un système de quatre équations à quatre inconnues $A, B, \lambda, \in_0$

$$\lambda = \lambda_n = -n(2\beta + 2A) - n(n-1)\beta = -2nA - n(n+1)\beta, \tag{2.88}$$

$$\frac{1}{E_0^2} + A^2 + \beta A = \lambda_n \beta, \tag{2.89}$$

$$2A\left(B + i\frac{\mathcal{E}}{cE_0}\right) = 0, \tag{2.90}$$

$$\frac{i\gamma\sigma_z}{E_0} + \in_0 + B^2 + A\gamma + 2i\frac{\mathcal{E}B}{cE_0} = \lambda_n\gamma, \tag{2.91}$$

Première groupe de racines :

Si $A \neq 0$ l'équation (2.90) donne $B = -i\dfrac{\mathcal{E}}{cE_0}$, et les équations (2.88) et (2.89) nous permettent de calculer A

$$A^2 + A(2n+1)\beta + \frac{1}{E_0^2} + n(n+1)\beta^2 = 0. \tag{2.92}$$

On a deux solutions données par

$$A_{n,\pm} = -\frac{(2n+1)\beta}{2} \pm \frac{1}{2|E_0|}\sqrt{\beta^2 E_0^2 - 4}, \tag{2.93}$$

De l'équation (2.91) on obtient

$$\frac{i\sigma}{E_0} + \left(p_y^2 + p_x^2 + m^2c^2\right)\frac{1}{E_0^2} + \gamma(1+2n)\left[-n\beta - \frac{\beta}{2} \pm \frac{1}{2|E_0|}\sqrt{\beta^2 E_0^2 - 4}\right] + n(n+1)\beta\gamma = 0. \tag{2.94}$$

Discussion :

En appliquant l'algèbre de Kempf où $\gamma = 1 + \beta\left(p_y^2 + p_x^2\right)$, on remarque que l'energie ne serait pas quantiée .Ce résultat est très normal , car on sait que dans l'ancienne algèbre d'Heisenberg , un électron n'a pas d'états stationnaires dans un champ électrique homogène.

Mais, par identication des termes de l'égalité(2.94) ,on obtient si

$$\sqrt{\beta^2 E_0^2 - 4} = is \ , \ s \text{ réel} \tag{2.95}$$

deux égalités

$$\frac{i\sigma}{E_0} = \pm\, i\gamma\,(1+2n)\,\frac{s}{2\,|E_0|}, \tag{2.96}$$

et

$$\left(p_y^2 + p_x^2 + m^2c^2\right)\frac{1}{E_0^2} + \gamma\,(1+2n)\left[-n\beta - \frac{\beta}{2}\right] + n\,(n+1)\,\beta\gamma = 0. \tag{2.97}$$

Donc

$$\sigma_z = \pm\ \left(1 + \beta\left(p_y^2 + p_x^2\right)\right)(1+2n)\,\frac{s}{2} = \pm 1 \tag{2.98}$$

et

$$\left(p_y^2 + p_x^2 + m^2c^2\right)\frac{1}{E_0^2} = \left(1 + \beta\left(p_y^2 + p_x^2\right)\right)\beta\left[3n^2 + 3n + \frac{1}{2}\right] \tag{2.99}$$

ce qui donne la condition ,

$$\left(p_y^2 + p_x^2 + m^2c^2\right)\frac{\sqrt{4 - \beta^2 E_0^2}}{\beta E_0^2} = \frac{2}{(1+2n)}\left[3n^2 + 3n + \frac{1}{2}\right] \tag{2.100}$$

Donc,si la condition ci-dessus est vériée ,on pourrait avoir des solutions polynomiales sans que l'énergie soit quantiée!Est-ce possible?.

Ce résultat mérite d'etre approfondi.

2-Maintenant appliquant l'algèbre de Quesne où

$$\gamma = 1 + \beta\left(p_y^2 + p_x^2\right) - \beta\frac{\mathcal{E}^2}{c^2}, \tag{2.101}$$

on a les équations

$$\left(1 + \beta\left(p_y^2 + p_x^2\right) - \beta\frac{\mathcal{E}^2}{c^2}\right)(1+2n)\,\frac{\left(\sqrt{4 - \beta^2 E_0^2}\right)}{2} = 1 \tag{2.102}$$

et

$$\left(p_y^2+p_x^2+m^2c^2\right)\frac{1}{E_0^2}=\left(1+\beta\left(p_y^2+p_x^2\right)-\beta\frac{\mathcal{E}^2}{c^2}\right)\beta\left[3n^2+3n+\frac{1}{2}\right]. \tag{2.103}$$

Ce qui donne

$$\left(\frac{\mathcal{E}_n^2}{c^2}\right)=\frac{1+\beta\left(p_y^2+p_x^2\right)}{\beta}-\frac{2}{\beta\left(1+2n\right)\left(\sqrt{4-\beta^2E_{n0}^2}\right)}, \tag{2.104}$$

avec la condition

$$\frac{2\beta E_{n0}^2}{\left(\sqrt{4-\beta^2E_{n0}^2}\right)}=\frac{\left(1+2n\right)\left(p_y^2+p_x^2+m^2c^2\right)}{\left[3n^2+3n+\frac{1}{2}\right]}. \tag{2.105}$$

On remarque dans ce cas, que si la condition ci-dessus est vérifiée on obtient des états stationnaires avec quantification de l'énergie de l'électron dans un champ électrique homogène et que cette énergie est bornée

$$\left(\frac{\mathcal{E}_n^2}{c^2}\right)_{\lim}=\frac{1+\beta\left(p_y^2+p_x^2\right)}{\beta} \tag{2.106}$$

ce qui est en soit un résultat inattendu et meriterait une étude plus poussée.

Cherchons maintenant les fonctions d'onde.

La solution de l'équation (2.87) sera donnée sous forme intégrale qui est valable autant pour les états stationnaires que pour les états de diffusion.

$$f\left(p_z\right)=f_\nu\left(p_z\right)=\frac{c_\nu}{\rho\left(p_z\right)}\int_C\left[\frac{\left(\gamma+\beta s^2\right)^\nu\rho\left(s\right)}{\left(s-p_z\right)^{\nu+1}}\right]ds. \tag{2.107}$$

Avec l'expression de ρ on obtient

$$f_\nu\left(p_z\right)=\frac{c_\nu}{\left(\alpha+\beta p_z^2\right)^{\frac{A_\nu}{\beta}}}\int_C\frac{\left(\gamma+\beta s^2\right)^\nu\left(\alpha+\beta s^2\right)}{\left(s-p_z\right)^{\nu+1}}ds,$$

et la solution générale sera donnée par

$$\psi\left(p_x,p_y,p_z,\mathcal{E}_n\right)=C\left(p_y,p_z,\mathcal{E}_n\right)\left(\alpha+\beta p_x^2\right)^{\frac{A_\nu}{2\beta}}f_\nu\left(p_z\right).$$

Remarque :

Le deuxième groupe de racines ne présente pas un interêt physique.

2.3 Equation de Klein-Gordon pour une particule chargée dans un champ

Dans cette section on cherche les solutions de l'équation de Klein-Gordon pour une particule chargée dans un champ électromagnétique constant, résultant de deux champs magnétique et électrique homogènes et mutuellement perpendiculaires . Pour avoir un champ électrique $\overrightarrow{E}$ perpendiculaire à un champ magnetique $\overrightarrow{B}$, on choisit par exemple le 4- potentiel A sous la forme

$$A = [-Ex, 0, cBx, 0], \tag{2.108}$$

c'est à dire

$$A_x = A_z = 0.$$

Le champ magnétique et le champ électrique sont alors donnés par

$$\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{k}, \quad \overrightarrow{E} = E\overrightarrow{i}. \tag{2.109}$$

Cette définition assure l'orthogonalité des deux champs

$$\overrightarrow{E} \perp \overrightarrow{B}. \tag{2.110}$$

L'équation de Klein Gordon pour le système considéré est

$$\left\{\left(P - \frac{eA}{c}\right)^2 - m^2c^2\right\} |\Psi\rangle = 0, \tag{2.111}$$

qui s'écrit après développement comme

$$\left\{\left(P_0 - \frac{eA_0}{c}\right)^2 - \left(P_x - \frac{eA_x}{c}\right)^2 - \left(P_y - \frac{eA_y}{c}\right)^2 - \left(P_z - \frac{eA_z}{c}\right)^2 - m^2c^2\right\} |\Psi\rangle = 0. \tag{2.112}$$

En substituant les composantes du potentiel vecteur on obtient

$$\left\{\left(\frac{e^2E^2}{c^2} - e^2B^2\right)\widehat{x}^2 + \left(2eBP_y - \frac{2e\xi E}{c^2}\right)\widehat{x} - P_x^2 - P_y^2 - P_z^2 + \left(\frac{\xi}{c}\right)^2 - m^2c^2\right\} |\Psi\rangle = 0. \tag{2.113}$$

Afin de simplifier les calculs qui vont suivre on pose

$$e^2\hbar^2\left(\frac{E^2}{c^2}-B^2\right)=K, \tag{2.114}$$

$$2e\hbar\left(BP_y-\frac{\xi E}{c^2}\right)=F, \tag{2.115}$$

et

$$\left(\frac{\xi}{c}\right)^2-P_y^2-P_z^2-m^2c^2=-\xi_0. \tag{2.116}$$

Ainsi l'équation (2.113) devient

$$\left\{\frac{K}{\hbar^2}\widehat{x}^2+\frac{F}{\hbar}\widehat{x}-P_x^2-\xi_0\right\}|\Psi\rangle=0. \tag{2.117}$$

En utilisant la représentation de l'opérateur de position donnée par

$$\widehat{x}=i\hbar\left(\gamma+\beta p_x^2\right)\frac{\partial}{\partial p_x}, \tag{2.118}$$

l'équation (2.117) devient

$$\left\{K\left(\gamma+\beta p_x^2\right)^2\frac{\partial^2}{\partial p_x^2}+\left(2K\beta p_x-iF\right)\left(1+\beta p_x^2\right)\frac{\partial}{\partial p_x}+P_x^2+\xi_0\right\}\Psi\left(\overrightarrow{p},\xi\right)=0. \tag{2.119}$$

Avec

$$\left(\gamma+\beta p_x^2\right)=\gamma\left(1+\beta' p_x^2\right),\quad \beta'=\frac{\beta}{\gamma}, \tag{2.120}$$

L'équation (2.119) s'écrit comme

$$\left\{K\gamma^2\left(1+\beta' p_x^2\right)^2\frac{\partial^2}{\partial p_x^2}+\left(2K\gamma^2\beta' p_x-i\gamma F\right)\left(1+\beta' p_x^2\right)\frac{\partial}{\partial p_x}+P_x^2+\xi_0\right\}\Psi\left(\overrightarrow{p},\xi\right)=0. \tag{2.121}$$

Procédant à la réduction de cette équation en une équation du type hypergéométrique. Pour cela cherchons les olutions $\Psi\left(\overrightarrow{p},\xi\right)$ sous la forme

$$\Psi\left(\overrightarrow{p},\xi\right)=C_xG\left(p_y,p_z,\xi\right)f\left(p_x\right)\exp\left(\int\frac{Ap_x+B}{1+\beta' p_x}dp_x\right), \tag{2.122}$$

où A et B sont des constantes à déterminer.

Apres cette tansformation l'equation (2.121) devient

$$\left\{K\gamma^2\left[\left(1+\beta' p_x^2\right)\frac{\partial}{\partial p_x}\right]^2+\left(2K\gamma^2 A p_x+2K\gamma^2 B-i\gamma F\right)\left(1+\beta' p_x^2\right)\frac{\partial}{\partial p_x}+\right.$$
$$\left.P_x^2\left(K\gamma^2A^2+K\gamma^2\beta' A+1\right)+\gamma A\left(2K\gamma B-iF\right)P_x+\left(\epsilon_0+K\gamma^2+K\gamma^2A-i\gamma FB\right)\right\}f\left(p_x\right)\tag{2.123}$$

On choisit la constante B telle que

$$(2K\gamma B-iF)=0, \tag{2.124}$$

et A telle que

$$\left[K\gamma^2A^2+K\gamma^2\beta' A+1\right]=0. \tag{2.125}$$

La solution à cette équation est donnée par

$$A=-\frac{\beta'}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{K\gamma^2\beta'^2-4}{K\gamma^2}}. \tag{2.126}$$

Avec

$$\beta'=\frac{\beta}{\gamma}, \tag{2.127}$$

on trouve

$$A=-\frac{\beta'}{2}\pm\frac{1}{2\gamma}\sqrt{\frac{K\beta^2-4}{K}}. \tag{2.128}$$

Alors l'équation(2.123) devient.

$$\left[K\gamma^2\left[\left(1+\beta' p_x^2\right)\frac{\partial}{\partial p_x}\right]^2+2K\gamma^2Ap_x\left(1+\beta' p_x^2\right)\frac{\partial}{\partial p_x}+\xi_0^*\right]f\left(p_x\right)=0. \tag{2.129}$$

La changement de variable suivant

$$p_x=\frac{1}{\sqrt{\beta'}}\tan\sqrt{\beta'}\rho, \tag{2.130}$$

conduit à l'équation suivante

$$\left\{K\gamma^2\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{2K\gamma^2A}{\sqrt{\beta'}}\tan\sqrt{\beta'}\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+\xi_0^*\right\}f\left(\rho\right)=0. \tag{2.131}$$

On pose ensuite

$$s = \sin\sqrt{\beta'}\rho, \tag{2.132}$$

$$c = \cos\sqrt{\beta'}\rho = \left(1 - s^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.133}$$

Ce qui donne

$$\frac{\partial}{\partial\rho} = \sqrt{\beta'}c\frac{\partial}{\partial s}, \quad \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} = \beta' c^2\frac{\partial^2}{\partial s^2} - \beta' s\frac{\partial}{\partial s}. \tag{2.134}$$

En fonction de la variable s, L'equation (2.131) s'écrit

$$\left\{\left(1-s^2\right)\frac{\partial^2}{\partial s^2} - \left(1 - \frac{2A}{\beta'}\right)s\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\xi_0^*}{K\gamma^2\beta'}\right\}f(s) = 0, \tag{2.135}$$

avec

$$\xi_0^* = K\gamma^2 A + \frac{F}{4K} + \xi_0. \tag{2.136}$$

Réecrivons l'équation (2.135)sous la forme

$$\left\{\left(1-s^2\right)\frac{\partial^2}{\partial s^2} - (1+2\lambda)\,s\frac{\partial}{\partial s} + \xi_0^{**}\right\}f(s) = 0, \tag{2.137}$$

où

$$-\frac{A}{\beta'} = \lambda, \text{ et } \quad \xi_0^{**} = \left(K\gamma^2 A + \xi_0 + \frac{F}{4K}\right)\frac{1}{K\gamma^2\beta'}, \tag{2.138}$$

L'équation (2.137) admet les polynômes de Gegenbauer $C_n^\lambda(s)$ pour solutions

$$f(s) = C_n^\lambda(s) \tag{2.139}$$

si on a la condition

$$\xi_0^{**} = n(n+2\lambda). \tag{2.140}$$

2.3.1 Spectre d'énergie

L'expression des niveaux d'énergie est obtenue en utilisant les expressions de λ et ξ_0^{**}. En effet on a l'équation

$$\left(K\gamma^2 A + \frac{F}{4K} + \xi_0\right) \frac{1}{K\gamma^2\beta'} = n(n+2\lambda) \ , \quad \lambda = -\frac{A}{\beta'}, \tag{2.141}$$

dont la solution est

$$\xi_0 = p_y^2 + p_z^2 + m^2c^2 - \frac{\xi^2}{c^2}. \tag{2.142}$$

En utilisant l'expression de ξ_0 on obtient

$$p_y^2 + p_z^2 + m^2c^2 - \frac{\xi^2}{c^2} + K\gamma^2 a + \frac{F^2}{4K} = n\left(n - 2\frac{a}{\beta'}\right) K\gamma^2\beta', \tag{2.143}$$

avec

$$F = 2e\hbar\left[Bp_y - \frac{\xi E}{c^2}\right] = \frac{2e\hbar}{c^2}\left[c^2Bp_y - \xi E\right], \tag{2.144}$$

et

$$K = \frac{e^2\hbar^2}{c^2}\left[E^2 - c^2B^2\right]. \tag{2.145}$$

L'équation (2.143) s'écrit aussi comme

$$\frac{\xi^2}{c^2} - p_y^2 - p_z^2 - m^2c^2 - K\gamma^2 a - \frac{F^2}{4K} + n^2K\gamma^2\beta' - 2n\frac{a}{\beta'}K\gamma^2\beta' = 0, \tag{2.146}$$

Après simpli□cation par $\left(-\frac{B^2}{(E^2-c^2B^2)}\right)$ on obtient l'équation de second ordre suivante

$$\begin{aligned}&\left[p_z^2 + m^2c^2 - \left(n^2 + n + \frac{1}{2}\right) K\gamma^2 B' \pm (2n+1) K\gamma^2 \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{K\beta' - 4}{K}}\right] \\ &+ \xi^2 - \frac{2p_y E}{B}\xi + \frac{E^2}{B^2}p_y^2 + \frac{E^2 - c^2B^2}{B^2} = 0\,,\end{aligned} \tag{2.147}$$

dont les solutions donnent les niveaux d'énergie d'une particule de Klein-gordon chargée dans deux champs électrique et magnétiques perpendiculaires.

$$\begin{aligned}\xi_n\,(\text{Kempf}) \ = \ & \frac{E}{B}p_y \pm \frac{1}{B}\sqrt{(c^2B^2 - E^2)} \\ & \times\left[p_z^2 + m^2c^2 + \left(n^2 + n + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \beta P_y^2 + \beta P_z^2\right)\beta\frac{\hbar^2e^2}{c^2}\left(c^2B^2 - E^2\right)\right. \\ & \left. + \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \beta P_y^2 + \beta P_z^2\right)\frac{\hbar^2e^2}{c^2}\left(c^2B^2 - E^2\right)\sqrt{\beta^2 + \frac{4c^2}{\hbar^2e^2(c^2B^2 - E^2)}}\right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{2.148}$$

que l'on peut écrire aussi

$$\xi_n\left(\text{Kempf}\right)=\frac{E}{B}p_y\pm\delta_n,$$

Avec la condition

$$\left(c^2B^2-E^2\right)>0. \tag{2.149}$$

Dans l'algèbre de Quesne, l'equation de l'énergie devient

$$\begin{aligned}\xi_n\left(\text{Quesne}\right) &= \frac{E}{B}p_y\pm\frac{1}{B}\sqrt{\left(c^2B^2-E^2\right)}\\ &\times\left[p_z^2+m^2c^2+\left(n^2+n+\frac{1}{2}\right)\left(1+\beta P_y^2+\beta P_z^2-\beta\frac{\xi^2}{c^2}\right)\beta\frac{\hbar^2e^2}{c^2}\left(c^2B^2-E^2\right)\right.\\ &\left.+\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(1+\beta P_y^2+\beta P_z^2-\beta\frac{\xi^2}{c^2}\right)\frac{\hbar^2e^2}{c^2}\left(c^2B^2-E^2\right)\sqrt{\beta^2+\frac{4c^2}{\hbar^2e^2\left(c^2B^2-E^2\right)}}\right]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Il est facile de montrer que

$$\xi\left(\text{Quesne}\right)_n=\frac{\frac{E}{B}p_y\pm\delta_n\sqrt{q}}{q}$$

avec

$$\begin{aligned}q &= \left(1+\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta\frac{\hbar^2e^2}{c^4}\frac{\left(c^2B^2-E^2\right)^2}{B^2}\sqrt{\beta^2+\frac{4c^2}{\hbar^2e^2\left(c^2B^2-E^2\right)}}\right.\\ &\left.+\left(n^2+n+\frac{1}{2}\right)\beta^2\frac{\hbar^2e^2}{c^4}\frac{\left(c^2B^2-E^2\right)^2}{B^2}\right).\end{aligned} \tag{2.150}$$

On remarque que dans ce cas les niveaux d'energie dans l'algèbre covariante de Quesne sont bornés quand n tend vers l'in□ni. En effet on obtient

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\xi_n^2}{c^2}=\frac{1}{\beta}+P_y^2+P_z^2 \tag{2.151}$$

2.3.2 Fonctions d'onde

En utilisant l'expression de la fonction $f(\overrightarrow{p})$ donnée par (2.139) et en remplacant dans (2.122) on obtient l'expression de la fonction d'onde

$$\psi_n\left(\overrightarrow{P},\xi\right) = C_n G\left(p_y, p_z, \xi\right) \exp\left(\frac{iF_n}{2K\sqrt{\gamma\beta}}\arctan\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}p_x\right) c^\lambda C_n^\lambda\left(s\right), \qquad n = 0,1,2,3,... \quad (2.152)$$

où C_n est une constante de normalisation et

$$c = \frac{1}{\sqrt{1+\beta' p_x^2}}, \quad (2.153)$$

$$s = \frac{\sqrt{\beta'}p_x}{\sqrt{1+\beta' p_x^2}}. \quad (2.154)$$

Remarque : On aurait pu résoudre le problème précédent en utlilisant la méthode proposée au chapitre1.

2.4 Equation de Klein-Gordon en présence d'un champ magnétique homogène

Bien sûr, il n'est pas nécessaire de refaire tous les calculs ; il suffit de remplacer le spin σ par zéro dans les résultats trouvés lors de la résolution de l'équation de Dirac dans un champ magnétique homogène, ce qui nous donne l'équation différentielle suivante

$$\left\{ \left(\gamma+\beta p_x^2\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial p_x^2} + \left(\gamma+\beta p_x^2\right)\left[2\beta p_x + \frac{2ip_y}{B_0}\right]\frac{\partial}{\partial p_x} - \frac{p_x^2}{B_0^2} + \epsilon_0 \right\}\psi\left(\overrightarrow{p}\right) = 0, \quad (2.155)$$

qui a pour solution la fonction d'onde

$$\psi_n\left(\overrightarrow{p},\xi\right) = c_n C\left(p_y, p_z, \xi\right) \exp\left[\frac{-ip_y c}{e\hbar H\sqrt{\gamma\beta}}\arctan\left(\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}p_x\right)\right]\left(\gamma+\beta p_x^2\right)^{\frac{a_1}{2\beta}} f_n\left(p_x\right), \quad (2.156)$$

avec $f_n(p_x)$ un polynome de degré n donné par

$$f_n(p_x) = \left(\gamma + \beta p_x^2\right)^{-\frac{a_n}{2\beta}} \frac{dn}{dp_x^n} \left[\left(\gamma + \beta p_x^2\right)^{n+\frac{a_n}{\beta}}\right], \tag{2.157}$$

et

$$a_{n,} = -\frac{(2n+1)\beta}{2} - \frac{1}{\mid B_0 \mid}\sqrt{1 + \frac{\beta^2 B_0^2}{4}}. \tag{2.158}$$

Pour les niveaux d'énergie on trouve

$$\begin{aligned} \frac{\xi\left(\text{Kempf}\right)_n^2}{c^2} &= P_z^2 + m^2c^2 + \left(n^2 + n + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \beta p_y^2 + \beta p_z^2\right)\beta\frac{e^2h^2H^2}{c^2} \\ &+ (2n+1)\left(1 + \beta p_y^2 + \beta p_z^2\right)\frac{ehH}{c}\sqrt{\left(1 + \beta^2\frac{e^2h^2H^2}{c^2}\right)}. \end{aligned} \tag{2.159}$$

Si on applique l'algèbre covariante de Quesne on trouve

$$\frac{\xi\left(Quesne\right)_n^2}{c^2} = \frac{\xi\left(Kempf\right)_n^2}{qc^2}, \tag{2.160}$$

avec

$$q = \left(1 + (2n+1)\beta\frac{ehH}{c}\sqrt{\left(1 + \beta^2\frac{e^2h^2H^2}{c^2}\right)} + \left(n^2 + n + \frac{1}{2}\right)\beta^2\frac{e^2h^2H^2}{c^2}\right). \tag{2.161}$$

A la limite $n \longrightarrow \infty$ on obtient

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\xi\left(\text{Quesne}\right)_n^2}{c^2} = \frac{1}{\beta} + p_y^2 + p_z^2 \tag{2.162}$$

Chapitre 3

L'oscillateur harmonique à D-dimensions avec longueur minimale.

Ce problème a déja fait l'objet de traitements dans [12, 27] .Dans ce chapitre nous proposons une autre méthode de résolution qui, à notre avis, évite la singularité rencontrée par [27] et qui a provoqué le rejet d'une partie du spectre d'énergie.

Pour une dimension supérieure à un, la relation de commutation modi□ée peut être généralisée sous la forme tensorielle suivante [12]

$$[x_i, p_j] = ih\left(\delta_{ij} + \beta p^2\delta_{ij} + \beta' p_i p_j\right). \tag{3.1}$$

Si les composantes de l'impulsion commutent

$$[p_i, p_j] = 0 \tag{3.2}$$

alors les relations de commutation entre les coordonnées sont essentiellement déterminées par l'identité de Jacobi

$$[x_i, x_i] = \frac{ih(2\beta - \beta') + (2\beta + \beta')\beta p^2}{(1 + \beta p^2)}\left(p_i x_j - p_j x_i\right). \tag{3.3}$$

Les opérateurs x_i et p_i agissent dans l'espace des impulsions comme

$$\widehat{x}_i = ih\left[\left(1 + \beta p^2\right)\frac{\partial}{\partial p_i} + \beta' p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_j} + \gamma p_i\right], \tag{3.4}$$

et

$$\widehat{p}_i = p_i. \tag{3.5}$$

L'équation de Schrodinger pour un oscillateur harmonique est

$$\left[\frac{1}{2}\mu\omega^2\widehat{x}^2 + \frac{1}{2}\mu\widehat{p}^2\right]\Psi(p) = E\Psi(p). \tag{3.6}$$

L'invariance rotationnelle nous permet de chercher les solutions sous la forme

$$\Psi_D(p) = Y_{l(d-1)\dots l_2 l_1}(\Omega)\, R(p). \tag{3.7}$$

En 2D et 3D nous avons respectivement

$$\Psi_2(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp^{-im\Phi} R(p),$$

et

$$\Psi_3(p) = Y_{lm}(\theta,\Phi)\, R(p). \tag{3.8}$$

Dans ce cas, on peut effectuer les remplacements suivants

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial p_i^2} = \frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{D-1}{p}\frac{\partial}{\partial p} - \frac{L^2}{p^2},$$

et

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p}, \tag{3.9}$$

où

$$L^2 = l(l+D-2), \quad l = 0,1,2,\dots. \tag{3.10}$$

L'équation radiale de Schrödinger pour l'oscillateur harmonique à D- dimensions se réduit alors à

$$\begin{aligned}
&-\mu\hbar\omega\left\{\left[1+\left(\beta+\beta'\right)p^2\right]\frac{\partial}{\partial p}\right\}^2 R(p) + \mu\hbar\omega\left\{\frac{(D-1)}{p} + \left[(D-1)\beta + 2\gamma\right]p\right\} \\
&\times\left[1+\left(\beta+\beta'\right)p^2\right]\frac{\partial}{\partial p}R(p) + \frac{1}{\mu\hbar\omega}p^2 R(p) + \\
&\mu\hbar\omega\left[\left(\gamma D - 2\beta L^2\right) - \frac{L^2}{p^2} + \left\{\gamma\left(\beta D + \beta' + \gamma\right) - \beta^2 L^2\right\}p^2)\right]R(p) = \frac{2E}{\hbar\omega}R(p).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Multiplions l'équation (3.11) par $\left(\frac{-p^2}{\mu\hbar\omega}\right)$ et utilisons

$$\left\{1+\left(\beta+\beta'\right)p^2\frac{\partial}{\partial p}\right\}^2 = \left(1+\left(\beta+\beta'\right)p^2\right)^2\frac{\partial^2}{\partial p^2} + \left(1+\left(\beta+\beta'\right)p^2\right)2\left(\beta+\beta'\right)p\frac{\partial}{\partial p}.$$

L'équation (3.11) s'écrit alors

$$\left\{p^2\left[1+\left(\beta+\beta'\right)p^2\right]^2\frac{\partial^2}{\partial p^2}+p\left(1+\left(\beta+\beta'\right)p^2\right)\left(dp^2+D-1\right)\frac{\partial}{\partial p}\right.$$
$$\left.+fp^4+\left(kE+\gamma'\right)p^2-L^2\right\}R(p)=0, \tag{3.12}$$

avec

$$f=\gamma\left(\beta D+\beta'+\gamma\right)-\beta^2L^2-\frac{1}{(\mu\hbar\omega)^2}, \tag{3.13}$$

$$d=2\left(\beta+\beta'\right)+(D-1)\beta+2\gamma, \tag{3.14}$$
$$k=\frac{2}{\mu(\hbar\omega)^2},$$

et

$$\gamma'=\gamma D-2\beta L^2. \tag{3.15}$$

Proposons de réduire l'équation (3.12) en une équation du type hypergéométrique

$$\left\{\sigma(p)\frac{\partial^2}{\partial p^2}+\pi(p)\frac{\partial}{\partial p}+\lambda_n\right\}\psi(p)=0, \tag{3.16}$$

où $\sigma(p)$ est un polynôme de degré ≤ 2, $\pi(p)$ est un polynome de degré≤ 1 et λ une constante.

1^{ere}*étape* :

Essayons de simpli□er l'équation (3.12) par p; pour cela choisissons $R(p)$ sous la forme

$$R(p)=\exp\left[\int\frac{a}{p}dp\right]F(p), \tag{3.17}$$

où a est une constante à déterminer.

L'équation (3.12)devient

$$\left\{p^2\left(1+\left(\beta+\beta'\right)p^2\right)^2\frac{\partial^2}{\partial p^2}+p\left(1+\left(\beta+\beta'\right)p^2\right)\left(d'p^2+D'\right)\frac{\partial}{\partial p}+H_1(p)\right\}F(p)=0, \tag{3.18}$$

avec

$$\begin{aligned}H_1(p) &= \left[f+\left(\beta+\beta'\right)^2\left(a^2-a\right)+a\left(\beta+\beta'\right)d\right]p^4\\ &+\left[kE+\gamma'+\left(a^2-a\right)2\left(\beta+\beta'\right)+a\left(d+(D-1)\left(\beta+\beta'\right)\right)\right]p^2\\ &+\left[a^2+a(D-2)-L^2\right].\end{aligned} \tag{3.19}$$

On impose que

$$\left[a^2 + a\,(D-2) - l^2\right] = 0, \tag{3.20}$$

ce qui donne

$$a = \frac{-\,(D-2) \pm \sqrt{(D-2)^2 + 4L^2}}{2}. \tag{3.21}$$

Donc, d'aprés(3.10) on obtient

$$a = l \text{ ou } a = -\,(D-2) - l,$$

et l'équation (3.18) devient, après simplification par p

$$\left[p\left(1 + (\beta + \beta')\,p^2\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2} + \left[\left(1 + (\beta + \beta')\,p^2\right)\right]\left[d'p^2 + D'\right]\frac{\partial}{\partial p} + f'p^3 + E'p\right] F\,(p) = 0, \tag{3.22}$$

avec

$$d' = d + 2a\,(\beta + \beta'), \tag{3.23}$$

$$D' = D - 1 + 2a, \tag{3.24}$$

$$f' = f + (\beta + \beta')^2\left(a^2 - a\right) + (\beta + \beta')\,da, \tag{3.25}$$

et

$$E' = KE + \gamma' + 2\,(\beta + \beta')\left(a^2 - a\right) + a\left[d + (D-1)\,(\beta + \beta')\right]. \tag{3.26}$$

2ème étape :

Essayons de simplifier l'équation (3.22) par $\left(1 + (\beta + \beta')\,p^2\right)$; pour cela cherchons $F\,(p)$ sous la forme

$$F\,(p) = G\,(p)\exp\int \frac{Ap + B}{\left(1 + (\beta + \beta')\,p^2\right)}dp. \tag{3.27}$$

En remplaçant cette fonction (3.27) dans l'équation (3.22), on trouve l'équation différentielle suivante

$$\left[\left[1 + (\beta + \beta')\,p^2\right]^2 p\frac{\partial^2}{\partial p^2} + \left[\left(1 + (\beta + \beta')\,p^2\right)\right]\left[d'p^2 + 2Bp + D'\right]\frac{\partial}{\partial p} + H_2\,(p)\right] G\,(p), \tag{3.28}$$

avec

$$H_2\,(p) = f'p^3 + B'p^2 + A'p + BD', \tag{3.29}$$

$$d'' = d' + 2A, \tag{3.30}$$

$$f\,'' = f\,' + A^2 - A\left((\beta + \beta') + Bd'\right), \tag{3.31}$$

et

$$B' = A + AD' + E' + B^2. \tag{3.32}$$

On impose que

$$H_2\left(p\right) = \left[1 + (\beta + \beta')\,p^2\right]\left[A_1 p + B_1\right]. \tag{3.33}$$

Cette éxigence nous donne un système de quatre équations à quatre inconnues; A, B, B_1, A_1;

$$B_1 = BD', \tag{3.34}$$

$$B_1\left(\beta + \beta'\right) = B\left[2A - 2\left(\beta + \beta'\right) + d'\right], \tag{3.35}$$

$$A_1 = A + AD' + E' + B^2, \tag{3.36}$$

et

$$A_1\left(\beta + \beta'\right) = f' + A^2 - A\left(\beta + \beta'\right) + Ad'. \tag{3.37}$$

Ce système possède deux groupes de racines : $B = 0$ *ou* $B \neq 0$

Premier groupe de racines :

$$B = 0, \tag{3.38}$$

$$B_1 = 0, \tag{3.39}$$

$$A_1 = A\left(D' + 1\right) + E', \tag{3.40}$$

et

$$A = \frac{(\beta + \beta')\,(D' + 2) - d'}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left[(\beta + \beta')\,(D' + 2) - d'\right]^2 - 4\left[f' - (\beta + \beta')\,E'\right]}. \tag{3.41}$$

L'éxigence (3.33) nous donne,après simplification par$[1 + (\beta + \beta')\,p^2]$, l'équation suivante

$$\left[\left[1 + (\beta + \beta')\,p^2\right] p\frac{\partial^2}{\partial p^2} + \left[d'p^2 + 2Bp + D'\right]\frac{\partial}{\partial p} + A_1 p\right] G\left(p\right) = 0. \tag{3.42}$$

3ème étape :

Faisant le changement de variable suivant

$$p = a_0 x + b_0. \tag{3.43}$$

En substituant ce changement dans l'équation (3.42) on obtient l'équation

$$\left[H_3(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+H_4(x)\frac{\partial}{\partial x}+H_5(x)\right]G(x)=0, \tag{3.44}$$

avec

$$H_3(x)=a_0^3(\beta+\beta')x^3+3a_0^2b_0(\beta+\beta')x^2+\left[a_0+3a_0(\beta+\beta')b_0^2\right]x+b_0+b_0^3(\beta+\beta'), \tag{3.45}$$

$$H_4(x)=a_0^3d'x^2+2a_0^2(d'b_0+2B)x+a_0(d'b_0^2+2Bb_0+D), \tag{3.46}$$

et

$$H_5(x)=a_0^2A_1(a_0x+b_0). \tag{3.47}$$

On impose que

$$H_3(x)=\left[A_2x^2+B_2x+C_2\right]H_5(x), \tag{3.48}$$

et

$$H_4(x)=(A_3x+B_3)H_5(x). \tag{3.49}$$

Avec les éxigences (3.48) et (3.49) on peut écrire l'équation (3.44) comme suit

$$H_5(x)\left[\left[A_2x^2+B_2x+C_2\right]\frac{\partial^2}{\partial x^2}+(A_3x+B_3)\frac{\partial}{\partial x}+1\right]G(x)=0. \tag{3.50}$$

Enfin nous obtenons, après simplification par $H_5(x)$, l'équation du type hypergéomètrique recherchée

$$\left[\left[A_2x^2+B_2x+C_2\right]\frac{\partial^2}{\partial x^2}+(A_3x+B_3)\frac{\partial}{\partial x}+1\right]G(x)=0. \tag{3.51}$$

On sait que pour que G(x) soit finie il faut que $\lambda=1$ vérifie la condition suivante

$$\lambda=1=-n\frac{\partial}{\partial x}(A_3x+B_3)-\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(A_2x^2+B_2x+C_2\right), \tag{3.52}$$

c'est à dire

$$1=-nA_3-n(n-1)A_2, \tag{3.53}$$

avec

$$A_3=\frac{d'+2A}{A_1}, \tag{3.54}$$

et

$$A_2 = \frac{(\beta + \beta')}{A_1}. \tag{3.55}$$

Donc

$$A_1 = -n\,(d' + 2A) - n\,(n-1)\,(\beta + \beta'). \tag{3.56}$$

D'après le premier groupe de solutions on a

$$B = 0,$$

$$B_1 = 0,$$

$$A_1 = A\,(D' + 1) + E', \tag{3.57}$$

et

$$A = \frac{(\beta + \beta')\,(D' + 2) - d'}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{[(\beta + \beta')\,(D' + 2) - d']^2 - 4\,[f' - (\beta + \beta')\,E']}. \tag{3.58}$$

3.1 Niveaux d'énergie

On a

$$A_1 = A\,(D' + 1) + E' = -n\,(d' + 2A) - n\,(n-1)\,(\beta + \beta'). \tag{3.59}$$

En remplaçant A, E', D', par leurs expressions on obtient l'équation

$$A_0\frac{(D + 2n + 2a)}{2} + nd' + n\,(n-1)\,(\beta + \beta') + E' = \pm\tfrac{(D+2n+2a)}{2}\sqrt{(A_0 + 4\,(\beta + \beta')\,E') - 4f'}, \tag{3.60}$$

avec

$$A_0 = (\beta + \beta')\,(D' + 2) - d'. \tag{3.61}$$

En élevant les deux membres de l'égalité (3.60) au carré et en réarrangeant l'équation on obtient l 'équation suivante

$$E'^2\left[2h - (D + 2n + 2a)^2\,(\beta + \beta')\right]E' + h^2 - (D + 2n + 2a)^2\left[A_0^2 - 4f'\right] = 0, \tag{3.62}$$

avec

$$h = nd' + A_0\frac{(D + 2n + 2a)}{2} + n\,(n-1)\,(\beta + \beta'). \tag{3.63}$$

La résolution de l'équation 3.62 nous donne deux valeurs pour E

$$E'_{n,\pm} = \frac{(D+2n+2a)^2(\beta+\beta')-2h}{2} \pm \frac{\sqrt{\left[\left((D+2n+2a)^2(\beta+\beta')-2h\right)^2-4\left[h^2-\frac{(D+2n+2a)}{4}^2\left(A_0^2-4f'\right)\right]\right]}}{2}. \tag{3.64}$$

Remarque :

On ne retiendrait que les valeurs de $E'_{n,\pm}$ pour lesquelles la fonction d'onde serait finie.

En remplaçant h, $A_0 f'$ par leurs expressions et après un long calcul on trouve enfin

$$\begin{aligned} E_{n,D,a\pm} &= \pm\hbar\omega\left(n+\frac{D}{2}+a\right)\sqrt{\left(1+\left(\beta^2L^2+\frac{(D\beta+\beta')^2}{4}\right)(\mu\hbar\omega)^2\right)} \\ &+\frac{\mu\beta}{2}(\hbar\omega)^2\left[n^2+n(2D-1)+\frac{D^2}{2}+2D(a-1)+2+2a^2\right] \\ &+\frac{\mu\beta'}{2}(\hbar\omega)^2\left[n^2+n(D-2)+\frac{D}{2}+2a\right], \end{aligned} \tag{3.65}$$

avec

$$a = l \text{ ou } a = -(D-2)-l, \tag{3.66}$$

alors que [?] ont trouvé uniquement

$$\begin{aligned} E_{n,D,a\pm} &= +\hbar\omega\left(n+\frac{D}{2}\right)\sqrt{\left(1+\left(\beta^2L^2+\frac{(D\beta+\beta')^2}{4}\right)(\mu\hbar\omega)^2\right)} \\ &+\left[\left\{(\beta+\beta')\left(n+\frac{D}{2}\right)^2+(\beta-\beta')\left(L^2+\frac{D^2}{4}\right)+\beta'\frac{D}{2}\right\}\frac{\mu\hbar\omega}{2}\right]\hbar\omega. \end{aligned} \tag{3.67}$$

Avec,

$$n = 2n' + l,$$

l et n' sont des entiers

Remarque :

Si $D = 1$,on retrouve les résultats de l'oscillateur à une dimenssion.

Pour $D = 1$ on a $L = 0$, $\beta' = 0$, $a = 0$; et donc

$$E_{n,1,0,\pm} = \pm\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\left(1+\frac{(D\beta+\beta')^2}{4}(\mu\hbar\omega)^2\right)}+\frac{\mu\beta}{2}(\hbar\omega)^2\left[n^2+n+\frac{1}{2}\right]. \tag{3.68}$$

3.2 Fonction d'onde radiale

On a

$$R(p) = \exp\left(\int \frac{a}{p} dp\right) \left[\exp \int \frac{Ap}{1+(\beta+\beta')p^2} dp\right] G_n(p). \tag{3.69}$$

où la fonction $G_n(x)$ est donnée par la formule de Rodrigues

$$G_n(x) = \frac{c_n}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} \left[\left(A_2x^2 + B_2x + C_2\right)^n \rho(x)\right], \tag{3.70}$$

où c_n est une constante de normalisation et $\rho(x)$ vérifie

$$\frac{\frac{d}{dx}\rho(x)}{\rho(x)} = \frac{(A_3x+B_3) - \frac{d}{dx}(A_2x^2+B_2x+C_2)}{(A_2x^2+B_2x+C_2)}. \tag{3.71}$$

Ce qui donne

$$\rho(x) = \exp \int \frac{(A_3 - 2A_2)x + B_3 - B_2}{(A_2x^2+B_2x+C_2)} dx. \tag{3.72}$$

D'où l'expression explicite de la fontion d'onde radiale $R(p)$

$$R_n(p) = C_n p^a \left(1 + (\beta+\beta')p^2\right)^{\frac{A_n}{2(\beta+\beta')}} G_n(x), \tag{3.73}$$

avec $G_n(x)$ un polynôme de degré (n) donné par

$$\begin{aligned} G_n(x) &= \left[\exp\left[-\int \frac{(A_3-2A_2)x+B_3-B_2}{(A_2x^2+B_2x+C_2)} dx\right]\right] \\ &\quad . \frac{d^n}{dx^n}\left[\left(A_2x^2+B_2x+C_2\right)^n \left(.\exp\left[-\int \frac{(A_3-2A_2)x+B_3-B_2}{(A_2x^2+B_2x+C_2)} dx\right]\right)\right] \end{aligned} \tag{3.74}$$

avec

$$x = \frac{p - b_0}{a_0}, \quad a_0 = \frac{D'}{d'^2}, \quad b_0 = \pm \frac{1}{d'}\sqrt{\frac{D'}{A_1}}, \tag{3.75}$$

et

$$A_n = \frac{(\beta+\beta')(D'+2) - d'}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{[(\beta+\beta')(D'+2) - d']^2 + 4(\beta+\beta')E_n - 4f}. \tag{3.76}$$

La fonction $R_n(p)$ est normalisée par la condition

$$|R_n(p)|^2 = \int \frac{dp R_n(p) R_n^*(p)}{(1+\beta p^2)^{1-\alpha}} = 1, \tag{3.77}$$

avec

$$\alpha = 1 - \frac{\gamma - \beta\frac{(D+1)}{2}}{\beta + \beta'}. \tag{3.78}$$

Pour que

$$R_n(p) = C_n p^a \left(1 + (\beta + \beta) p^2\right)^{\frac{A_n}{2(\beta+\beta)}} G_n(x(p)), \tag{3.79}$$

soit normalisable il faut que

$$\frac{R_n(p) R_n^*(p)}{\left(1 + \beta p^2\right)^{1-\alpha}} \propto \frac{1}{p^s} \text{ avec } s > 1$$

Remarque : :

Pour le deuxième groupe de racines ; $B = 0$ l'énergie ξ ne serait pas quantifiée.

Chapitre 4

Nouvelle vitesse limite pour les particules massiques

Nous allons essayer de montrer que si nous acceptons l'existence d'une longueur minimale, nous aboutirons à l'existence d'une nouvelle vitesse limite V_{lim} pour les particules massiques qui serait inférieure à la vitesse de la lumière c

D'aprés la relativité restreinte, la longueur X de toute particule qui se déplace à la vitesse V, par rapport à un repère d'inertie, doit se contracter suivant la loi

$$X = X_0\sqrt{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}, \tag{4.1}$$

où X_0 est la longueur propre de l'objet et c la vitesse de la lumière .

Si on accepte qu'il existe une longueur minimale $(\triangle X_{\text{min}})$, la contraction de la longueur de tout objet doit vérifier l'inégalité suivante

$$X_0\sqrt{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)} \geq (\triangle X_{\text{min}}), \tag{4.2}$$

et si on a

$$(\triangle X_{\text{min}}) = \hbar\sqrt{\beta} \tag{4.3}$$

la vitesse limite de cet objet sera

$$V_{\text{lim}} \leqslant c\sqrt{\left(1 - \frac{\hbar^2\beta}{X_0^2}\right)}, \tag{4.4}$$

Et maintenant les particules ne peuvent plus avoir des impulsions qui tendent vers l'infini ; car , toujours selon la théorie de la relativité restreinte, l'impulsion est donnée par la formule

$$P_{\lim} = \frac{mV_{\lim}}{\sqrt{\left(1 - \frac{V_{\lim}^2}{c^2}\right)}}, \tag{4.5}$$

ce qui donne l'expression de l'impulsion limite

$$P_{\lim}^2 = m^2c^2\left(\left(\frac{X_0}{\hbar\sqrt{\beta}}\right)^2 - 1\right). \tag{4.6}$$

De même l'énergie relativiste de la particule devient bornée

$$\xi_{\lim} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{V_{\lim}^2}{c^2}\right)}} = m_0c^2\left(\frac{X_0}{\hbar\sqrt{\beta}}\right) \tag{4.7}$$

qu'on peut écrire comme

$$\left(\frac{\xi_{\lim}}{c}\right)^2 = \left(\frac{X_0}{\hbar/m_0c}\right)^2\frac{1}{\beta} \tag{4.8}$$

donc

$$\left(\frac{\xi_{\lim}}{c}\right)^2 < \frac{1}{\beta}$$

Une expression pour le facteur β

L' énergie cinétique limite d'une particule serait donnée par la formule ;

$$(E_c)_{\lim} = \frac{P_{\lim}^2}{2m_0} = \xi_{\lim} - m_0c^2, \tag{4.9}$$

ce qui donne une autre expression pour l' impulsion limite ;

$$P_{\lim}^2 = 2m_0c^2\left(\frac{1}{c\sqrt{\beta}} - m_0\right) > 0. \tag{4.10}$$

Cela imposerait une limite pour le facteur β ;

$$\sqrt{\beta} < \frac{1}{m_0c}. \tag{4.11}$$

résultat qui a aussi été trouvé par Quesne et qui donnait la condition pour avoir des états physiques acceptables.

Donc on a trouvé deux expressions pour l' impulsion limite si on suppose quelles sont égales on aura ;

$$P_{\text{lim}}^2 = 2m_0c^2\left(\frac{1}{c\sqrt{\beta}} - m_0\right) = m_0^2c^2\left(\left(\frac{X_0}{\hbar\sqrt{\beta}}\right)^2 - 1\right). \tag{4.12}$$

La résolution de cette derniere équation nous donne une expression pour le facteur β;

$$\sqrt{\beta_\pm} = \frac{1}{m_0c}\left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{X_0}{\hbar/m_0c}\right)^2}\right]. \tag{4.13}$$

Comme on a trouvé

$$\sqrt{\beta} < \frac{1}{m_0c},$$

on ne retiendrait que la solution

$$\sqrt{\beta} = \sqrt{\beta_-} = \frac{1}{m_0c}\left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{X_0}{\hbar/m_0c}\right)^2}\right]. \tag{4.14}$$

Application numérique :

Pour le proton on a

$$m_0 = 1,6.10^{-27}Kg, \tag{4.15}$$

ce qui donne d'après la formule suivante ,

$$\sqrt{\beta} < \frac{1}{m_0c} = \frac{1}{1,6.10^{-27}.3.10^8} = 2.10^{18}, \tag{4.16}$$

L'énergie limite des photons.

Si on acceptte que la longueur d'onde limite de l'onde électromagnétique est ;

$$\lambda_{\text{lim}} = \hbar\sqrt{\beta}. \tag{4.17}$$

donc l'énergie limite des photons serait ;

$$\xi_{p\,\text{lim}} = \hbar\upsilon = \frac{\hbar c}{\lambda_{\text{lim}}} = \frac{c}{\sqrt{\beta}}. \tag{4.18}$$

ou

$$\left(\frac{\xi_{\text{lim}}}{c}\right)^2 < \frac{1}{\beta}$$

Qui est la meme énergie limite que celle qu' on a trouvée pour les particules massiques en utilisant soit la relativité restreinte soit la mécanique quantique relativiste! Ce qui montre la compatibilité de ces théories.

Chapitre 5

Conclusion

Nous avons déterminé les nouvelles expressions des valeurs propres de l'énergie et des fonctions propres d'une particule relativiste chargée , avec spin ou sans spin , se mouvant dans un champ électromagnétique homogène , en appliquant des algèbres d'Heisenberg déformées, l'une , non relativiste proposée par Kempf et dé□nie par

$$[x, p_x] = i\hbar \left(1 + \beta \overrightarrow{p}^2\right) \tag{5.1}$$

et l'autre, relativiste proposée par Quesne et dé□nie par .

$$[X^\mu, P^\nu] = i\hbar \left(1 - \beta \frac{\xi^2}{c^2} + \beta \overrightarrow{p}^2\right) g^{\mu\nu} \tag{5.2}$$

Ces deux algèbres aboutissent à des relations d'incertitude minimale sur la longueur

$$.\triangle x \left(Kempf\right)_{\min} = \hbar\sqrt{\beta} \tag{5.3}$$

et

$$\left(\triangle X \left(Quesne\right)\right)_0 = \left(\triangle X^i\right)_0 = \hbar\sqrt{\left(D\beta + \beta\right)\left(1 - \beta\langle\left(\frac{\xi}{c}\right)^2\rangle\right)} \tag{5.4}$$

Nous avons trouvé que :

-1 Dans le cas d'un champ magnétique homogène ;

a- D'après l'algèbre de Kempf

L'expression de l'énergie , qui était, dans l'ancienne algèbre de Heisenberg ($\beta = 0$) , fonction d'un entier n ,

$$E_n^2/c^2 = p_z^2 + m^2c^2 - \sigma\frac{e\hbar H}{c} + (2n+1)\frac{|\,e\,|\,\hbar H}{c} \tag{5.5}$$

devient ;

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\left(Kempf\right)_n^2/c^2 &= p_z^2 + m^2c^2 - \sigma\frac{e\hbar H}{c} + (2n+1)[1 + \beta P_y^2 + \beta P_z^2]\frac{|\,e\,|\,\hbar H}{c}\sqrt{\frac{\beta^2e^2\hbar^2H^2}{4c^2} + 1}\\ &+ \left(n^2 + n + \frac{1}{2}\right)[1 + \beta P_y^2 + \beta P_z^2]\,\beta\left(\frac{e\hbar H}{c}\right)\end{aligned} \tag{5.6}$$

Donc

- fonction aussi de n^2

- Et les états de la particule , qui avaient une dégénérescence dans l'ancienne algèbre de Heisenberg ,perdent cette dégénérescence.

b- D'après l'algèbre de Quesne

L'énergie de la particule devient bornée

$$\mathcal{E}_n^2/c^2 = \frac{\mathcal{E}\,(Kempf)_n^2\,/c^2}{q}$$

avec

$$q = 1 + \beta\,(2n+1)\,\frac{|e|\,\hbar H}{c}\sqrt{1 + \frac{\beta^2\,(e\hbar H)^2}{4c^2}} + \beta^2\left(n^2 + n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{e\hbar H}{c}\right)^2 \qquad (5.7)$$

et sa borne quand n tend vers l'in□ni est :

$$_n^2/c^2 = \frac{1}{\beta} + P_y^2 + P_z^2 \qquad (5.8)$$

Résultat qui est en accord avec celui trouvé par Quesne pour le cas d'un oscillateur de Dirac relativiste.

Et il y a aussi levée de dégénérescence sur les états de la particule.

-2 Dans le cas d'un champ électrique homogène ;

a- D'après l'algèbre de Kempf

La particule ne peut avoir un spectre d'énergie discret (comme dans l'ancienne algèbre d'Heisenberg) mais pourrait avoir des fonctions d'onde bornées dans l'espace des impulsions si certaines conditions étaient réalisées .

b- D'après l'algèbre de Quesne

La particule pourrait avoir des états stationnaires avec un spectre d'énergie discret si certaines conditions étaient réalisées ! Ce qui serait une conséquence extraordinaire de cette algèbre que l'experience pourrait con□rmer ou in□rmer.

.-3 Dans le cas d' un champ résultant de deux champs magnétique et électrique homogènes et mutuellement perpendiculaires.

a- D'après l'algèbre de Kempf

L'énergie de la particule qui était , dans l'ancienne algèbre d' Heisenberg fonction de $\sqrt{n}$ pour n grand

$$\xi_n\left(Heisenberg\right) = \frac{E}{B}p_y \pm \frac{1}{B}\sqrt{(c^2B^2 - E^2)}\left[p_z^2 + m^2c^2 + (2n+1)\,\frac{\hbar e}{c}\sqrt{(c^2B^2 - E^2)}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.9)$$

avec la condition

$$\left(c^2B^2 - E^2\right) > 0, \quad (5.10)$$

devient , dans l'algebre de Kempf, fonction de n pour n grand et augmente en valeur ;

$$\begin{aligned}\xi_n\left(\text{Kempf}\right) &= \frac{E}{B}p_y \pm \frac{1}{B}\sqrt{(c^2B^2 - E^2)} \\ &\times \left[p_z^2 + m^2c^2 + \left(n^2 + n + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \beta P_y^2 + \beta P_z^2\right)\beta\frac{\hbar^2e^2}{c^2}\left(c^2B^2 - E^2\right)\right. \\ &\left. + \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \beta P_y^2 + \beta P_z^2\right)\frac{\hbar^2e^2}{c^2}\left(c^2B^2 - E^2\right)\sqrt{\beta^2 + \frac{4c^2}{\hbar^2e^2(c^2B^2 - E^2)}}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{E}{B}p_y \pm \delta_n, \end{aligned} \quad (5.11)$$

et les états de la particule perdent leur dégénérescence.

b-D'aprés l'algèbre de Quesne, les états de la particule perdent aussi leur dégénérescence mais l'énergie devient bornée ;

$$\xi\left(Quesne\right)_n = \frac{\frac{E}{B}p_y \pm \delta_n\sqrt{q}}{q}, \quad (5.12)$$

avec

$$q = \left(1 + \left(n + \frac{1}{2}\right)\beta\frac{\hbar^2e^2}{c^4}\frac{\left(c^2B^2 - E^2\right)^2}{B^2}\sqrt{\beta^2 + \frac{4c^2}{\hbar^2e^2(c^2B^2 - E^2)}} + \left(n^2 + n + \frac{1}{2}\right)\beta^2\frac{\hbar^2e^2}{c^4}\frac{\left(c^2B^2 - E^2\right)^2}{B^2}\right), \quad (5.13)$$

et sa borne est donnée par

$$\lim\frac{\xi_n^2}{c^2} = \frac{\left(1 + \beta P_y^2 + \beta P_z^2\right)^2}{\beta}. \quad (5.14)$$

-5 .L'oscillateur harmonique non relativiste en D-dimensions.

Nous avons proposé une autre méthode de résoudre l'équation de Schrodinger pour l'oscillateur harmonique en D-dimensions avec relation d'incertitude minimale sur la longueur qui ,à notre avis ,a le mérite d'éviter la singularité rencontrée par [[?]] et qui a provoqué le rejet d'une partie du spectre d'énergie.

Pour l'aspect mathématique de notre travail ,nous attirons l'attention des physiciens sur l'importance du livre d'Ouvarov 'Fonctions spéciales de la physique mathématique'qui propose une approche remarquablement simple de la théorie des fonctions spéciales fondée sur la généralisation de la formule connue de Rodrigues pour les polynomes orthogonaux classiques. Une telle approche permet d'obtenir sous forme explicite la représentation intégrale de toutes les fonctions spéciales de la physique mathématique , ainsi que de dégager leurs propriétés principales. En particulier on résoud par cette méthode les équations différentielles linéaires du second ordre ;

$$\left[\left[A_2x^2 + B_2x + C_2\right]\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (A_3x + B_3)\frac{\partial}{\partial x} + \lambda\right]G(x) = 0. \tag{5.15}$$

Quant à nous inspirés par l'approche d'Ouvarov, nous avons proposé des transformations qui permettent de passer de la forme

$$\left[P_2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + P_1(x)\frac{\partial}{\partial x} + P_0(x)\right]G(x) = 0, \tag{5.16}$$

où les $P_i(x)$ sont des polynomes à la forme précédente. Par exemple pour l'oscillateur harmonique en d-dimensions on avait ;

$\deg P_2(x) = 6$,$\deg P_1(x) = 5$ et $\deg P_0(x) = 4$

6- Nouvelle vitesse limite et énergie limite des particules massiques et non massiques

Si on accepte l'existence d'une distance minimale on trouverai ;

- une autre vitesse minimale pour les particules.

$$V_{\text{lim}} = C\left(1 - \frac{\beta\hbar^2}{X_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.17}$$

5.1 Conclusion □nale

Finallement on peut conclure que l'algèbre déformée et covariante relativiste de Quesne rend l'énergie des particules bornée alors que l'algèbre déformée mais non covariante relativiste de Kempf aggrave la divergence de l'énergie des particules .

Bibliographie

[1] P.K.Towsend , Phys . Rev . D 15 , 2795 (1976)

[2] D .J .Gross and P .F .Mende .Nucl .Phys .B 303 , 407 (1988) .

[3] D . Amati , M .Cialfaloui , and G .Veneznano . Phys . Letter .B 216 , 41 (1989)

[4] K . Konishi , G.Paff uti , P . Provero , Phys. Letter. B 23-4 ,276 (1990)

[5] M . J .Jackel ; S . Reymand , Phys . Letter .A185 , 143 (1994)

[6] M .Maggiore , Phys .Letter .B 319 ,83 (1993) .

[7] F . Lizzi ; N . E . Mavromatos ; Preprint OUTP - 96-66-P ;DSF 53 / 96 ; hep-th/9611040

[8] L . J . Garay ; Int . J . Mod . Phys . A10 ; 145 (1995)

[9] E . Witten ; Phys . Today 49 (4) , 24 (1996)

[10] G . Amelino .Camelia , J .Ellis , N . E . Mavromatso , and D .V . Nanopoulos , Mod . .PHys .Letter .A 12 .2029 (1997)

[11] S . Haro , JHE P 10 , 023 (1998)

[12] A . Kempf, G. Mangano et R. Mann, Phys. Rev. D 52 1108 (1995)

[13] H.Hinrichsen and A.Kempf . J .Math .Phys .37.2121 (1996)

[14] A .Kempf , J.Phys. A 30.2093 , and references therein (1997)

[15] A . Kempf and G . Mangano .Phys .Rev. D 55. 7909 (1997)

[16] A . Kempf and G . Mangano .Phys .Rev. D 55. 7909 (1997)

[17] R .Brout , C. Gabiel , M . Lubo ,and P. Spindel .Phys .Rev .D 59 044005 (1999)

[18] Susskind . L and Witten EO Preprint hep-th/9805114(1998) (W Pet . A .W and Polchinski J 1999 Phys .Rev .D 59065011 (1999)

[19] Douglas MR and Nekrasov N A Rev .Mod .Phys .73977(2001) Minwalla S , Van Raamsdouk and Seiberg N J . High Energy Phys ..JHEP 02 020 (2000).

[20] Szabo Richard J Phys .Rep .378207-99.(2003)

[21] Pet .A . W and Polchinski J Phys . Rev. D 59065011(1999)

[22] Minwala S , Van Raamsdouk and Seiberg N. 200 J .High Energy Phys .JHEP 02 020 (2000)

[23] A . Strominger , arxiv : hep/0110087 : V. Balasubrananian ,J . de Boer and D . Minic arxiv : hep-th/0110108

[24] F. Brau, (arxiv :quant-ph/990533 v1).

[25] Kh. Nouicer, J. Phys. A : Math. Gen. 38 10027-10035.(2005)

[26] Quesne C and Tkachuk VM . arXiv : quant-ph/0604118 v2 (2006)

[27] L. N. Chang, D. Minc, N. Okamura et T. Takeuchi, (arxiv : hep-th/0201017 v1). (2002)

[28] L. N. Chang, D. Minc, N. Okamura et T. Takeuchi, (arxiv : hep-th/0201017 v1). (2002)

[29] Quesne C and Tkachuk VM J . Phys .A : Math .Gen .36010373 (2003)

[30] Quesne C and Tkachuk VM J . Phys .A : Math .Gen .38 1747 (2005)

[31] Quesne C and Tkachuk VM J . Phys .A : Math .Gen .37 4267 (2004)

[32] A. Nikiforov et V. Ouvarov, Fonctions spéciales de la physique mathématique, Edition Mir, Mouscou, Traduction Française, Edition Mir, 1983, pp.2-3, 17-20, 22-35 et 36-41.(1983)

[33] L. Landau et E. Lifchitz, Théorie quantique relativiste I, Edition Mir, Mouscou, pp. 143-150 ,Jui 1967.

[34] D. Blokhintsev, Principe de mécanique quantique, Edition Mir, Mouscou, Traduction Française, Edition Mir, 1981, pp.280-287 et 301-303.1981.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons essentiellement étudié les corrections qu'apporteraient deux nouvelles relations de commutation entre la position x et l'impulsion p_x, l'une non relativiste

proposée par Kempf ; ($[x, p_x] = i\hbar\,(1 + \beta p^2)$ et l'autre relativiste ,proposée par Quesne $[X^{\mu}, P^{\nu}] = i\hbar\left[1 + \beta\left(\overrightarrow{p}^{2} - \frac{\varepsilon^2}{c^2}\right)\right] g^{\mu\nu}$ qui tiennent compte de l'existence d'une longueur minimale) sur le spectre d'énèrgie et les fonctions d'onde d'une particule relativiste,chargée. avec spin ou sans spin, se mouvant dans des champs extérieurs $A^{\mu}\,(\phi, A)$.

Nous avons aussi proposé une autre méthode de résolution de l'équation de l'oscillateur harmonique en D-dimensions .

A la fin nous avons étudié les implications de l'existence d'une longueur minimale sur la vitesse des particules massiques et sur leur énergie limite.

ملخص

في هذه المذكرة قمنا بدراسة التغيرات الطفيفة التي يمكن ان تاتي بهاحدى علاقات التبديل بين الموضع x و كمية الحركة p_x اين $[x,p_x]=i\hbar(1+\beta p^2)$ (التي تاخذ بعين الاعتبار وجود بعد حدّي) على الطيف الطاقوي و الدوال الموجية لجسيمة نسبية،مشحونة لها سبين او بدون سبين، تتحرك في حقل خارجي ($A^\mu(\phi,A)$).

قد اقترحنا كذلك طريقة اخرى لحلّ معادلة الهزّاز التوافقي ذي الأبعاد D.

و في النهاية درسنا التاثيرات التي يمكن ان تحدثها فرضية وجود بعد حدّي على الجسيمات الكتلية.

Abstract:

In this work, we primarily studied the corrections which would make one of the new relations of commutation between position x and the moment p_x, ($[x,p_x]=i\hbar(1+\beta p^2)$ who takes account of the existence a minimal length) on the spectrum of energy and the wave functions of a relativistic particle, charged, with spin or without spin, being driven in an external field ($A^\mu(\phi,A)$)

We also proposed another method of resolution of the equation of the harmonic oscillator in D dimension.

At the end we studied the implications of the existence of a minimal length on the speed of the mass particles.