

530.1/25

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE JIJEL

Faculté des Sciences Exactes, des Sciences de la Nature et de la Vie
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre :

Série :



MEMOIRE

présenté pour obtenir le diplôme de

MAGISTER

Spécialité : Physique

Option : Physique Théorique

par

Boubekri Terkia

THEME

Univers ellipsoidal en gravitation modifiée

Soutenu le : .../11/2011

Devant le Jury :

Président :	N. Mebarki	Prof.	Univ. Mentouri Constantine
Rapporteur :	K. Nouicer	Prof.	Univ. Jijel
Examineurs :	A. Bounames	Prof.	Univ. Jijel
	N. Belaloui	Prof.	Univ. Mentouri Constantine
Invité	A. Ahriche	MCA.	Univ. Jijel

Remerciements

Tous mes remerciements vont tout premièrement à Dieu tout puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il m'a donné pour finaliser ce mémoire.

Je remercie mon encadreur Monsieur le Professeur. Kh. Nouicer, Professeur à l'université de Jijel .

Mes remerciements vont également à mes enseignants de la post graduation de l'année théorique 2007/2008, en particulier, Mr M. Maamache, Professeur à l'université de Setif, Mr L. Chetouani, Professeur à l'université Mentouri Constantine, Mr. A. Bounames, Professeur à l'université de Jijel, Mr T. Boudjedaa, Professeur à l'université de Jijel, Mr.N. Belaloui, Professeur à l'université Mentouri Constantine, Mr. O. Boutaghou, M.C classe A à l'Université de Blida, Mr. Boughbina, Mr. A. Ahriche, MC classe A à l'Université de Jijel, Mrs. P. Aurenche, J. -Ph. Guillet, et P. Sorba, Directeurs de Recherche CNRS au LAPTH-Annecy (France), et Mlles Z. Belghobsi, Professeur à l'Université de Jijel, et enfin Z. Lehtihet, .

Je remercie, aussi tous mes collègues de la promotion 2007/2008.

Enfin, merci à toute ma famille, mon défunt père, ma mère, et particulièrement ma soeur Hakima, à qui je dois beaucoup.

Terkia

Table des matières

1	Introduction	1
2	Éléments de relativité générale et de cosmologie relativiste	4
2.1	Définitions	4
2.1.1	Dérivée covariante et symboles de connexion	4
2.1.2	Principe de covariance et équation de la géodésique	5
2.1.3	Transport parallèle	5
2.1.4	Tenseur de courbure	5
2.2	Tenseur énergie-impulsion	6
2.3	Equations de mouvement d'Einstein	7
2.4	Equations de Friedmann	11
3	Univers ellipsoïdal à 4 dimensions	13
3.1	Equations de mouvement d'Einstein	13
3.2	Equations de Friedmann	16
3.3	Equation de continuité	17
3.4	Champ magnétique uniforme	18
3.4.1	Evolution de l'excentricité	18
4	Univers de Friedmann-Robertson-Walker dans la théorie de la $f(R)$-gravité	21
4.1	La théorie de la $f(R)$ -gravité	22
4.2	Les équations de Friedmann modifiées	25
4.2.1	Première équation de Friedmann	25
4.2.2	Deuxième équation de Friedmann	26
4.3	La pression de la courbure	27
4.4	Equation de continuité	28

5	Univers ellipsoïdal à 4 dimensions dans la théorie de la $f(R)$-gravité	31
5.1	Equations de mouvement modifiées	31
5.1.1	Première équation de mouvement modifiée	32
5.1.2	Deuxième équation de mouvement modifiée	32
5.1.3	Troisième équation de mouvement modifiée	33
5.2	Evolution du paramètre d'excentricité	34
5.3	Application à la gravité quadratique	36
6	CONCLUSION	38

Chapter 1

Introduction

La relativité générale est l'une des théories les mieux vérifiées. Elle a notamment permis de calculer la courbure des rayons lumineux dans un champ de gravitation, donner une explication élégante du déplacement vers le rouge des raies spectrales, ainsi que de nombreuses prédictions cosmologiques. Cependant, il a fallu compléter par différentes théories afin de lever certains paradoxes. Il s'agit notamment de l'invention du paradigme de l'inflation, invoquant une phase d'expansion accélérée de l'univers primordial. L'une des surprises majeures de la cosmologie moderne étant l'observation que l'univers actuel est dans une phase d'expansion accélérée établie par les données récentes de mesure des distances luminosité des supernovas de type *Ia* (*SnIa*). Aussi ce fait expérimental fut confirmé par les observations faites sur le *CMB* (cosmic microwave background) et les *BAO* (baryonic acoustic oscillations). Cependant, jusqu'en 1998 le modèle cosmologique dominant était celui d'un univers en expansion décéléré. La grande question était de savoir si cette phase d'expansion accélérée serait transitoire ou éternelle. Ces observations ont complètement révolutionné la cosmologie et ont grandement contribué à changer notre vision de l'univers. L'objectif est alors de trouver la bonne théorie qui prédit cette accélération de l'expansion de notre espace-temps. Différents modèles sont possibles: on peut soit rajouter un élément (énergie du vide, champ scalaire...) dans l'univers, ou bien modifier généraliser l'action gravitationnelle à quatre dimensions ou bien ajouter des dimensions supplémentaires. Nous exposerons ici quelques modèles.

Le premier modèle, Λ CDM (Lambda Cold Dark Matter [1], fût introduit puisque la théorie de la relativité général ne pouvait pas décrire un univers statique. Pour y remédier, Einstein a dû recourir à l'introduction d'une constante cosmologique qui joue le rôle d'énergie du vide, mais ce modèle souffre beaucoup de problèmes. Pour cette raison plusieurs travaux ont exploré des explications alternatives, à la base de formes dynamiques d'énergie noire.

La première possibilité, alternative à une constante cosmologique, est le couplage minimal d'un champ scalaire à la courbure, habituellement appelé la quintessence [2]. Dans l'analogie avec les scénarios inflationnistes, ce champ scalaire serait responsable d'une phase d'expansion accélérée, tandis que contrairement à l'inflation, cette phase se produit durant l'évolution récente de l'univers. La densité d'énergie du champ scalaire devrait donc dominer seulement récemment sur d'autres composantes d'énergie dans l'univers. D'autres généralisations de la cosmologie standard ont été considérées, comme les modèles de la gravité modifiés. Dans ces modèles on modifie l'action gravita-

tionnel de manière à reproduire une phase récente d'expansion accélérée sans recourir à introduire une composante d'énergie noire. La première tentative est constituée par les théories dites scalaire-tenseur [3,4], dans lesquelles la gravité est modifiée par écrit :

$$S_{BD} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\phi R - \frac{\omega_0}{\phi} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi) \right] + S_M (g_{\mu\nu}, \psi), \quad (1.1)$$

où S_M est l'action de matière, ϕ est un champ scalaire et ω_0 est le paramètre de *Brans - Dicke*, dont les valeurs sont contraintes par les tests dans le système solaire : $|\omega_0| \geq 4 \times 10^4$. On peut toujours généraliser l'action (1.1) en ajoutant un potentiel $V(\phi)$ et que $\omega_0 = \omega(\phi)$. Le modèle le plus simple de la gravité modifiée est obtenu en remplaçant le scalaire de Ricci R dans la densité lagrangienne d'Hilbert-Einstein par une fonction du scalaire de Ricci $f(R)$, ou ce qu'on appelle la théorie $f(R)$ de la gravité. Cette théorie se déploie sous plusieurs variantes, métrique, Palatini et métrique-affine. Dans le cadre du formalisme de Palatini, la métrique et les connexions sont indépendantes et l'action de la matière dépend seulement du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ et du champ de matière ψ . Cette théorie est décrite par l'action suivante:

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{-g} f(R) d^4x + S_M (g_{\mu\nu}, \psi). \quad (1.2)$$

où le tenseur de Ricci est fonction de deux champs de gravitation l'un décrit par la métrique $g_{\mu\nu}$ et l'autre par les connexions $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$. La signification physique de cette indépendance entre $g_{\mu\nu}$ et $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ est que ces derniers ne définissent aucun transport parallèle. Dans l'approche métrique-affine, l'action de la matière dépend aussi des connexions $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ qui ne sont pas symétriques, et dans ce cas l'action s'écrit :

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{-g} f(R) d^4x + S_M (g_{\mu\nu}, \psi, \Gamma_{\mu\nu}^\lambda). \quad (1.3)$$

Dans l'approche métrique les connexions affines sont les symboles habituels de Christoffel, et l'action dans ce cas s'écrit comme dans (2.4) où R est le scalaire de Ricci. Il a été démontré que pour des formes appropriées de $f(R)$ cette action peut naturellement produire une phase d'expansion accélérée en accord avec les données de mesure effectuées sur les anisotropies du rayonnement micro-onde fossile par les missions WMAP (*Wilkinson Micro-wave Anisotropy Probe*). Cette théorie est apparue dans des cadres très variés : dans les théories quantiques du champ, dans la limite à basses énergies des super-cordes à $D=10$, dans l'action du vide pour les théories de grande unification (GUTs), ... et. Plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour construire la forme de $f(R)$ en l'ajustant aux observations.

L'équivalence entre ces théories et celles de *Brans-Dicke* est la suivante : si $f''(R) \neq 0$ on trouve la théorie de *Brans-Dicke* avec $\omega_0 = -\frac{3}{2}$ dans le cadre de Palatini, et on trouve la théorie de *Brans-Dicke* avec $\omega_0 = 0$ pour les théories $f(R)$ métriques.

Dans ce mémoire de magister nous allons étudier la théorie de la $f(R)$ gravité dans un univers ellipsoïdal à 4 dimensions. L'organisation de cette thèse est comme suit: dans le chapitre 2 nous exposerons brièvement les différentes définitions et propriétés de la relativité générale d'Einstein, et nous déduirons les équations du champ gravitationnel par l'utilisation du principe variationnel. Le chapitre 3 sera consacré à l'étude

de l'univers elliptique dans le cadre de la RG , où nous calculerons particulièrement l'excentricité e dans un univers dominé par l'énergie due à un champ magnétique. Dans le chapitre 4 on exposera la théorie de la $f(R)$ gravité ainsi que les équations du champ gravitationnel qui en découleront. Le cinquième chapitre est une généralisation des calculs du chapitre 3, mais dans le cadre de la $f(R)$ gravité. Le chapitre 6 sera consacré à une conclusion générale.

Chapitre 2

Eléments de relativité générale et de cosmologie relativiste

Le modèle de Friedmann-Robertson-Walker qui décrit l'expansion de l'univers est basé sur les lois de la relativité générale d'Einstein. Les équations d'Einstein qui lient la courbure de l'espace-temps à la matière et la radiation, sont celles qui peuvent décrire la dynamique à grande échelle de notre univers. Ce modèle décrit l'univers comme un fluide parfait constituant un univers homogène (la densité moyenne est la même en tous points de l'espace) et isotrope (identique à lui-même dans toute direction), dans un système de coordonnées comobile.

Dans ce chapitre nous donnerons quelques définitions d'analyse tensorielle puis on retrouve les équations d'Einstein en utilisant le principe variationnel, et à partir de ces équations on dérive les équations de Friedmann.

2.1 Définitions

2.1.1 Dérivée covariante et symboles de connexion

Dans un espace courbe, la notion de la dérivée covariante est essentielle. Pour un vecteur v^μ la dérivée covariante s'écrit

$$D_\nu v^\mu = \frac{Dv^\mu}{dx^\nu} \quad (2.1)$$

$$= v^\mu_{;\nu} \quad (2.2)$$

$$= v^\mu_{,\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} v^\sigma, \quad (2.3)$$

et pour un vecteur dual p_α , elle est définie par

$$D_\beta p_\alpha = \frac{Dp_\alpha}{dx^\beta} \quad (2.4)$$

$$= p_{\alpha;\beta} \quad (2.5)$$

$$= p_{\alpha,\beta} - \Gamma^\mu_{\alpha\beta} p_\mu. \quad (2.6)$$

où $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$ sont les symboles de Christoffel, et sont définis en fonction du tenseur métrique par la relation

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} \left[\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial g_{\mu\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\mu}} \right]. \quad (2.7)$$

2.1.2 Principe de covariance et équation de la géodésique

Pour décrire l'effet de la gravitation en un point de l'espace-temps on commence par définir en ce point un système de coordonnées localement plat, c.-à-d, il se trouve un système de coordonnées $\{x^{\alpha'}\}$ au voisinage d'un point P où on a : $g_{\alpha'\beta'}(P) = \eta_{\alpha'\beta'}$ et $\Gamma_{\beta'\gamma'}^{\alpha'}(P) = 0$, avec $\eta_{\alpha'\beta'} = \text{diag}(-+++)$ la métrique plate Minkowskienne. On exprime les lois de la physique sous forme tensorielle et on utilise un principe qui consiste à remplacer $\eta_{\mu\nu}$ par $g_{\mu\nu}$ et toutes les dérivées ∂_{μ} par des dérivées covariantes D_{μ} . Ce principe s'appelle *principe de covariance*. Ainsi on remplace l'équation de mouvement d'une particule libre $d_{\nu}u^{\mu} = 0$ par $D_{\nu}u^{\mu} = 0$, où u^{μ} est la 4-vitesse de la particule, qui s'écrit aussi après développement sous la forme suivante

$$\frac{du^{\mu}}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} u^{\alpha} u^{\beta} = 0.$$

Cette équation s'appelle *équation de la géodésique*, et définit la trajectoire d'une particule libre soumise au seul effet du champ de gravitation.

2.1.3 Transport parallèle

On dit qu'un vecteur s^{μ} est transportée parallèlement le long d'une courbe paramétrisée par τ si sa dérivée covariante est nulle,

$$\frac{Ds^{\mu}}{d\tau} = 0. \quad (2.8)$$

2.1.4 Tenseur de courbure

Le tenseur de courbure de Riemann est évidemment un objet central de la relativité générale. Ce tenseur apparaît naturellement à travers le concept de transport parallèle [11], et est défini par

$$R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = \Gamma_{\beta\delta, \gamma}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma, \delta}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\gamma}^{\alpha} \Gamma_{\beta\delta}^{\mu} - \Gamma_{\mu\delta}^{\alpha} \Gamma_{\beta\gamma}^{\mu}. \quad (2.9)$$

Il possède un certain nombre de propriétés

$$R_{k\lambda\mu\nu} = R_{\mu\nu k\lambda},$$

$$R_{k\lambda\mu\nu} = -R_{\lambda k\mu\nu} = -R_{k\lambda\nu\mu} = R_{\lambda k\nu\mu},$$

$$R_{k\lambda\mu\nu} + R_{k\nu\lambda\mu} + R_{k\mu\nu\lambda} = 0.$$

A partir du tenseur de Riemann, nous pouvons définir par contraction sur deux indices un

nouveau tenseur de second ordre $R_{\mu\nu}$ appelé *tenseur de Ricci*

$$R_{\nu\beta} = g^{\mu\alpha} R_{\mu\nu\alpha\beta} \quad (2.10)$$

$$= R_{\nu\alpha\beta}^{\alpha} \quad (2.11)$$

$$= \Gamma_{\nu\beta, \alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\nu\alpha, \beta}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha} \Gamma_{\nu\beta}^{\mu} - \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\mu}. \quad (2.12)$$

Le tenseur de Ricci est symétrique $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$, et est le seul tenseur de rang deux que l'on puisse construire à partir de tenseur de Riemann.

En contractant le tenseur de Ricci, nous obtenons un nouveau objet

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}, \quad (2.13)$$

qui est un invariant. On l'appelle *scalaire de Ricci* ou *courbure scalaire* de l'espace-temps.

A partir du tenseur de Ricci, du scalaire de Ricci et du tenseur métrique, on construit le *tenseur d'Einstein*

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta}. \quad (2.14)$$

2.2 Tenseur énergie-impulsion

Les définitions précédentes donnent les objets géométriques de base de la relativité général. Ils permettent de décrire le mouvement d'une particule test en chute libre. Il faut maintenant relier ces éléments de métrique au contenu de la géométrie en matière. Pour cela, il nous faut introduire ce qui va être la source des fluctuations de la métrique, qui est le tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$.

Si on considère un ensemble de particules placées aux positions $x_i(t)$, et d'impulsions p_i^{μ} , la densité d'impulsion est donnée par

$$p^{\mu} = \sum_i p_i^{\mu} \delta_{Dirac}(x - x_i(t)). \quad (2.15)$$

Son courant est alors

$$j^{\mu a} = \sum_i p_i^{\mu} \delta_{Dirac}(x - x_i(t)) \frac{dx_i^a}{dt}. \quad (2.16)$$

On peut rassembler les p^{μ} et $j^{\mu a}$ en un tenseur de rang deux, qu'est le tenseur énergie-impulsion, $T^{\mu\nu}$, ayant comme composantes

$$T^{\mu 0} = p^\mu, \quad (2.17)$$

$$T^{\mu a} = j^{\mu a}, \quad (2.18)$$

qu'on peut aussi exprimer par

$$T^{\mu\nu} = \sum_i \frac{p_i^\mu p_i^\nu}{E_i} \delta_{Dirac}(x - x_i(t)), \quad (2.19)$$

avec E_i , l'énergie de la particule i , qui est liée à son impulsion par

$$p_i^\mu = E_i \frac{dx_i^\mu}{dt}, \quad (2.20)$$

où $t = x_i^0(t)$.

Quand on s'intéresse à l'ensemble de l'univers on doit aller au-delà de la description de son contenu en termes de particules. La description la plus simple est de le regarder comme un fluide parfait caractérisé par un tenseur énergie-impulsion donné par

$$T^{\mu\nu} = pg^{\mu\nu} + (p + \rho)u^\mu u^\nu, \quad (2.21)$$

où u^μ est le quadrivecteur vitesse, ρ la densité d'énergie du fluide et p sa pression.

2.3 Equations de mouvement d'Einstein

L'équation qui relie les éléments géométriques de la métrique au contenu en matière est celle d'Einstein ou ce qu'on appelle : équations du champ de gravitation. Pour la construire il existe différentes approches, l'une d'elles, la plus simple, est l'approche variationnelle.

En relativité générale l'action est divisée en deux parties, l'une décrit la gravitation et l'autre décrit la matière. Donc on écrit

$$S = S_G [g_{\alpha\beta}] + S_m [\phi, g], \quad (2.22)$$

où S_G représente l'action du champ de gravitation, définie par

$$S_G = \frac{1}{16\pi G} (I_H [g] + I_B [g] + I_0), \quad (2.23)$$

avec $I_H = \int_{\nu} R \sqrt{-g} d^4x$ le terme de Hilbert, $I_B = 2 \oint \epsilon k |h|^{\frac{1}{2}} d^3y$ le terme de bord, et I_0 un terme non-dynamique, ie $\delta I_0 = 0$. Tandis que S_m représente l'action de la matière, et est défini par

$$S_m [\phi, g] = \int \mathcal{L}(\phi, \phi_{i\alpha}, g_{\alpha\beta}) \sqrt{-g} d^4x. \quad (2.24)$$

Donc, la variation de l'action totale s'écrit

$$\delta S = \delta S_G + \delta S_m. \quad (2.25)$$

De l'équation (2.23) on trouve

$$\delta S_G = \frac{1}{16\pi G} (\delta I_H + \delta I_B + \delta I_0) \quad (2.26)$$

$$= \frac{1}{16\pi G} (\delta I_H + \delta I_B), \quad (2.27)$$

nous calculons la variation sur le terme de Hilbert

$$\delta I_H = \int_{\nu} \delta (R \sqrt{-g}) d^4x \quad (2.28)$$

$$= \int_{\nu} (\delta R \sqrt{-g} + R \delta \sqrt{-g}) d^4x \quad (2.29)$$

$$= \int_{\nu} (\delta (g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}) \sqrt{-g} + \delta \sqrt{-g} R) d^4x \quad (2.30)$$

$$= \int_{\nu} (R_{\alpha\beta} \sqrt{-g} \delta g^{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} \delta R_{\alpha\beta} + R \delta \sqrt{-g}) d^4x. \quad (2.31)$$

Nous utiliserons la relation suivante

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}, \quad (2.32)$$

qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} \delta I_H &= \int_{\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\alpha\beta} \left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R \right) d^4x + \int_{\nu} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} d^4x \\ &= \int_{\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta} d^4x + \int_{\nu} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} d^4x. \end{aligned} \quad (2.33)$$

On pose

$$g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} = \delta v^{\mu}, \quad (2.34)$$

où

$$\delta v^{\mu} = g^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} - g^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}. \quad (2.35)$$

Alors, le deuxième membre de l'équation (2.33) devient

$$\int_{\nu} g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} \sqrt{-g} d^4x = \int_{\nu} \delta v^{\mu}_{;\mu} \sqrt{-g} d^4x \quad (2.36)$$

$$= \oint_{\partial\nu} \delta v^{\mu} d\Sigma_{\mu} \quad (2.37)$$

$$= \oint_{\partial\nu} \varepsilon \delta v^{\mu} n_{\mu} |h|^{\frac{1}{2}} d^3y. \quad (2.38)$$

On calcule, maintenant $\delta v^\mu n_\mu$. En effet

$$\delta v_\gamma = g_{\gamma\mu} \delta v^\mu \quad (2.39)$$

$$= g_{\gamma\mu} \left(g^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\mu - g^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\beta \right). \quad (2.40)$$

Utilisons la définition de $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ et $\Gamma_{\alpha\beta}^\beta$, avec $\delta g_{\nu}^{\alpha\beta} = 0$, on trouve

$$\begin{aligned} \delta v_\gamma &= g_{\gamma\mu} \left[g^{\alpha\beta} \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\delta g_{\nu\alpha,\beta} + \delta g_{\nu\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\nu}) - g^{\alpha\mu} \frac{1}{2} g^{\beta\nu} (\delta g_{\nu\alpha,\beta} + \delta g_{\nu\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\nu}) \right] \\ &= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \delta_\gamma^\nu (\delta g_{\nu\alpha,\beta} + \delta g_{\nu\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\nu}) - \frac{1}{2} \delta_\gamma^\alpha g^{\beta\nu} (\delta g_{\nu\alpha,\beta} + \delta g_{\nu\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\nu}). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Remplaçons ν par α dans le deuxième terme

$$\delta v_\gamma = g^{\alpha\beta} (\delta g_{\gamma\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\gamma}). \quad (2.42)$$

Donc

$$n^\mu \delta v_\mu = n^\mu g^{\alpha\beta} (\delta g_{\mu\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\mu}) \quad (2.43)$$

$$= n^\mu (\varepsilon n^\alpha n^\beta + h^{\alpha\beta}) (\delta g_{\mu\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\mu}), \quad (2.44)$$

qui se simplifie finalement à

$$n^\mu \delta v_\mu = n^\mu h^{\alpha\beta} (\delta g_{\mu\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\mu}). \quad (2.45)$$

comme $\delta g_{\alpha\beta} = 0$ sur la frontière, sa dérivée tangentielle s'annule aussi, et ainsi on obtient

$$\delta v_\mu n^\mu |_{\partial\nu} = -h^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta,\mu} n^\mu. \quad (2.46)$$

L'équation (2.38) s'écrit alors

$$\int_\nu g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} \sqrt{-g} d^4x = - \oint_{\partial\nu} \varepsilon h^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta,\mu} n^\mu |h|^{\frac{1}{2}} d^3y. \quad (2.47)$$

Alors, l'expression de δI_H devient

$$\delta I_H = \int_\nu \sqrt{-g} \delta g^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta} d^4x - \oint_{\partial\nu} \varepsilon h^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta,\mu} n^\mu |h|^{\frac{1}{2}} d^3y. \quad (2.48)$$

Pour trouver la variation de l'action de gravitation, il reste à calculer la variation du terme de frontière δI_B .

La courbure extrinsèque K est définie par

$$\begin{aligned} K &= n^\alpha_{;\alpha} = g^{\alpha\beta} n_{\alpha;\beta} \\ &= (\varepsilon n^\alpha n^\beta + h^{\alpha\beta}) n_{\alpha;\beta}, \end{aligned} \quad (2.49)$$

où n^α est le vecteur unité normal à l'hypersurface et $h^{\alpha\beta}$ est la métrique 3D induite sur cette hypersurface.

On peut écrire l'équation de la géodésique sous la forme :

$$n^\beta n_{;\beta}^\alpha = 0. \quad (2.50)$$

et la courbure extrinsèque devient

$$\begin{aligned} K &= h^{\alpha\beta} n_{\alpha;\beta} \\ &= h^{\alpha\beta} (n_{\alpha;\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma n_\gamma) \\ &= -h^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma n_\gamma, \end{aligned} \quad (2.51)$$

ce qui conduit à

$$\delta K = -h^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma n_\gamma. \quad (2.52)$$

Utilisons la définition de $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ pour trouver

$$\begin{aligned} \delta K &= -h^{\alpha\beta} \left(\frac{1}{2} g^{\gamma\mu} (\delta g_{\mu\alpha,\beta} + \delta g_{\mu\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\mu}) \right) n_\gamma \\ &= -\frac{1}{2} h^{\alpha\beta} (\delta g_{\mu\alpha,\beta} + \delta g_{\mu\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\mu}) n^\mu. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Comme la dérivée tangentielle de $\delta g_{\alpha\beta}$ s'annule sur la frontière, alors

$$\delta K = \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta,\mu} n^\mu. \quad (2.54)$$

Finalement

$$\delta I_B = \oint_{\partial\nu} \varepsilon h^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta,\mu} n^\mu |h|^{\frac{1}{2}} d^3y. \quad (2.55)$$

En remplaçant l'équation (2.55) et (2.48) dans (2.27) on trouve la variation sur l'action de gravitation S_G .

$$\delta S_G = \frac{1}{16\pi G} \int_\nu G_{\alpha\beta} \sqrt{-g} \delta g^{\alpha\beta} d^4x. \quad (2.56)$$

Il reste à calculer la variation sur l'action de la matière. De l'équation (2.24), on trouve

$$\begin{aligned} \delta S_m &= \int_\nu d^4x \delta (L \sqrt{-g}) \\ &= \int_\nu d^4x \delta L \sqrt{-g} + \int_\nu d^4x L \delta \sqrt{-g} \\ &= \int_\nu d^4x \left(\frac{\partial L}{\partial g^{\alpha\beta}} \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} - \frac{1}{2} L g_{\alpha\beta} \sqrt{-g} \delta g^{\alpha\beta} \right) \\ &= \int_\nu d^4x \left(\frac{\partial L}{\partial g^{\alpha\beta}} - \frac{1}{2} L g_{\alpha\beta} \right) \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} \\ &= -\frac{1}{2} \int_\nu d^4x \left(-2 \frac{\partial L}{\partial g^{\alpha\beta}} + L g_{\alpha\beta} \right) \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

On définit le tenseur énergie-impulsion par la relation

$$-2\frac{\partial L}{\partial g^{\alpha\beta}} + Lg_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}, \quad (2.58)$$

et donc

$$\delta S_m = -\frac{1}{2} \int d^4x T_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g}. \quad (2.59)$$

En exigeant que l'action reste invariante sous la variation de la métrique, c'est à dire, $\delta S = 0$, et comme les $\delta g^{\alpha\beta}$ sont arbitraires, on déduit que

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi G T_{\alpha\beta}. \quad (2.60)$$

Ces équations sont fondamentales en relativité générale : ce sont les *équations du champ de gravitation ou équations d'Einstein*. Aussi, elles indiquent clairement l'équivalence entre l'énergie, par l'intermédiaire du tenseur énergie-impulsion, et la géométrie de l'espace-temps.

2.4 Equations de Friedmann

On considère un espace-temps caractérisé par le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ de signature $(-, +, +, +)$. La forme générale de la métrique qui décrit un univers homogène et isotrope sur des échelles cosmologiques prend la forme de la métrique de Friedmann-Robertson-Walker

$$dS^2 = -dt^2 + a^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (2.61)$$

où $a(t)$ est le facteur d'échelle, qui est toujours réel. Ce paramètre est essentiel en cosmologie : c'est un nombre sans dimension, qui fournit l'échelle des distances à un instant t donné. C'est également ce paramètre qui décrit l'expansion ou la contraction de l'univers.

A partir de la définition des coefficients de Christoffel, on déduit que

$$\Gamma_{00}^0 = 0, \quad (2.62)$$

$$\Gamma_{ij}^0 = \delta_{ij} \dot{a}a, \quad (2.63)$$

$$\Gamma_{00}^i = 0, \quad (2.64)$$

$$\Gamma_{0j}^i = \Gamma_{j0}^i = \frac{\dot{a}}{a} \delta_j^i, \quad (2.65)$$

$$\Gamma_{jk}^i = 0. \quad (2.66)$$

A partir de l'équation (2.12) on détermine les composantes du tenseur de Ricci

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad (2.67)$$

$$R_{ij} = \delta_{ij} (\ddot{a}a + 2\dot{a}^2). \quad (2.68)$$

Et finalement le scalaire de Ricci est donné par

$$\begin{aligned} R &= g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \\ &= g^{00} R_{00} + g^{ii} R_{ii} \\ &= 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (2.69)$$

Prenons la composante (0.0) des équations d'Einstein (2.60)

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = 8\pi GT_{00}, \quad (2.70)$$

remplaçons R_{00} et R par leurs expressions, avec $T_{00} = \rho$, on trouve la première équation de Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho. \quad (2.71)$$

Considérons maintenant la composante (i,j) de l'équation (2.60). On obtient

$$\begin{aligned} R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R &= 8\pi G T_{ij} \\ &= 8\pi G g_{ik}g_{jl}T^{kl}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Or

$$T^{kl} = \frac{p}{a^2} \delta_{kl}. \quad (2.73)$$

En substituant dans (2.72) on trouve la deuxième équation de Friedmann

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 = -8\pi p. \quad (2.74)$$

Les deux équations ((2.71) et (2.74)) décrivent entièrement toute l'évolution de l'univers.

Chapitre 3

Univers ellipsoïdal à 4 dimensions

Le Big Bang a marqué le commencement de nôtre univers. Depuis lors, il avait augmenté de taille (gonflé). La chose la plus naturelle à supposer est que cette augmentation de la taille de l'univers (expansion) se produit au même taux dans toutes les directions et donc l'univers prend une forme d'une sphère. Cependant, Leonardo-Campanelli et ses collègues [31] ont réexaminé les données fournies par WMAP sur les fluctuations de la température et la polarisation du fond cosmique de rayonnement micro-onde (CMB) et ont conclu que l'univers observé ressemble à un ellipsoïde, plutôt qu'une sphère. Les deux informations sont d'un point de vue théorique extrêmement important puisqu'elles nous permettent de renseigner sur l'éventuelle période de réionisation de l'univers et sur les ondes gravitationnelles primordiales qui sont des fluctuations de la métrique.

Dans cette section, nous dérivons les équations de base qui décrivent l'évolution d'un univers ellipsoïdal à 4 dimensions, et nous calculerons l'excentricité en termes du facteur d'échelle.

3.1 Equations de mouvement d'Einstein

La métrique plate de l'univers ellipsoïdal à 4 dimensions est en général donnée par

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx_1^2 + dx_2^2) - c^2(t)dx_3^2,$$

où les facteurs d'échelle a et c sont des fonctions de temps cosmique. L'excentricité est définie par

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2}.$$

En fonction de l'excentricité, la métrique prend la forme

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx_1^2 + dx_2^2) - (1 - e^2(t)) a^2(t)dx_3^2. \quad (3.1)$$

La densité Lagrangienne qui décrit ce système est défini par

$$\begin{aligned} L &= -\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} [-\dot{t}^2 + a^2(t)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + c^2(t)\dot{z}^2], \end{aligned} \quad (3.2)$$

et les équations de mouvement sont décrites par les équations d'Euler Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0. \quad (3.3)$$

- Pour $q = t$, on obtient

$$\ddot{a}a\dot{x}^2 + \dot{a}a\dot{y}^2 + \dot{c}c\dot{z}^2 + \ddot{t} = 0. \quad (3.4)$$

Utilisons maintenant la composante déduite de l'équation de la géodésique

$$\ddot{t} + \Gamma_{\alpha\beta}^t \dot{x}_\alpha \dot{x}_\beta = 0. \quad (3.5)$$

En remplaçant α et β par toutes les valeurs possibles, on obtient

$$\begin{aligned} \ddot{t} + \Gamma_{xx}^t \dot{x}^2 + \Gamma_{yy}^t \dot{y}^2 + \Gamma_{zz}^t \dot{z}^2 + \Gamma_{tt}^t \dot{t}^2 + 2\Gamma_{xy}^t \dot{x}\dot{y} + 2\Gamma_{xz}^t \dot{x}\dot{z} + \\ + 2\Gamma_{yz}^t \dot{y}\dot{z} + 2\Gamma_{tx}^t \dot{x}\dot{t} + 2\Gamma_{ty}^t \dot{y}\dot{t} + 2\Gamma_{tz}^t \dot{z}\dot{t} = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

En comparant les termes de cette équation avec (3.4) on trouve :

$$\Gamma_{xx}^t = \Gamma_{yy}^t = \dot{a}a, \quad (3.7)$$

$$\Gamma_{zz}^t = \dot{c}c, \quad (3.8)$$

$$\Gamma_{tt}^t = \Gamma_{xy}^t = \Gamma_{yx}^t = \Gamma_{xz}^t = \Gamma_{zx}^t = \Gamma_{yz}^t = \Gamma_{zy}^t = 0, \quad (3.9)$$

$$\Gamma_{tx}^t = \Gamma_{xt}^t = \Gamma_{ty}^t = \Gamma_{yt}^t = \Gamma_{tz}^t = \Gamma_{zt}^t = 0.$$

Et en répétant les mêmes étapes de calcul que précédentes, on trouve :

- Pour $q = x$,

$$\Gamma_{tx}^x = \Gamma_{xt}^x = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (3.10)$$

$$\Gamma_{tt}^x = \Gamma_{ty}^x = \Gamma_{yt}^x = \Gamma_{xy}^x = \Gamma_{yx}^x = \Gamma_{xz}^x = \Gamma_{zx}^x = \Gamma_{yz}^x = \Gamma_{zy}^x = \Gamma_{zt}^x = \Gamma_{tz}^x = 0, \quad (3.11)$$

$$\Gamma_{xx}^x = \Gamma_{yy}^x = \Gamma_{zz}^x = 0. \quad (3.12)$$

- Pour $q = y$, on a

$$\Gamma_{ty}^y = \Gamma_{yt}^y = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (3.13)$$

$$\Gamma_{tt}^y = \Gamma_{tx}^y = \Gamma_{xt}^y = \Gamma_{xy}^y = \Gamma_{yx}^y = \Gamma_{yz}^y = \Gamma_{zy}^y = \Gamma_{tz}^y = \Gamma_{zt}^y = 0, \quad (3.14)$$

$$\Gamma_{xx}^y = \Gamma_{yy}^y = \Gamma_{zz}^y = 0. \quad (3.15)$$

- Pour $q = z$

$$\Gamma_{tz}^z = \Gamma_{zt}^z = \frac{\dot{c}}{c}, \quad (3.16)$$

$$\Gamma_{tt}^z = \Gamma_{tx}^z = \Gamma_{xt}^z = \Gamma_{xy}^z = \Gamma_{yx}^z = \Gamma_{xz}^z = \Gamma_{zx}^z = \Gamma_{xx}^z = \Gamma_{yy}^z = \Gamma_{zz}^z = 0. \quad (3.17)$$

A partir de la définition de $R_{\mu\nu}$

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^\alpha + \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\beta - \Gamma_{\beta\nu}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\beta, \quad (3.18)$$

on déduit les expressions suivantes

$$R_{tt} = -\left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{c}}{c}\right), \quad (3.19)$$

$$R_{xx} = \ddot{a}a + \dot{a}^2 + \frac{\dot{c}}{c}\dot{a}a, \quad (3.20)$$

$$R_{yy} = \ddot{a}a + \dot{a}^2 + \frac{\dot{c}}{c}\dot{a}a, \quad (3.21)$$

$$R_{zz} = c\ddot{c} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{c}c. \quad (3.22)$$

Et finalement le scalaire de Ricci est donné par

$$R = -4\frac{\ddot{a}}{a} - 2\frac{\ddot{c}}{c} - 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - 4\frac{\dot{c}\dot{a}}{ca}. \quad (3.23)$$

Les expressions de $\frac{\dot{c}}{c}$ et $\frac{\ddot{c}}{c}$ en fonction de l'excentricité e sont données par

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{a}}{a} - \frac{e\dot{e}}{1-e^2}, \quad (3.24)$$

$$\frac{\ddot{c}}{c} = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{e}^2}{1-e^2} - \frac{e\ddot{e}}{1-e^2} - 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{e\dot{e}}{1-e^2}. \quad (3.25)$$

En fonction de l'excentricité, le scalaire de Ricci s'écrit alors

$$R = -6\frac{\ddot{a}}{a} - 6\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 8\frac{\dot{a}}{a}\frac{e\dot{e}}{1-e^2} + 2\frac{\dot{e}^2}{1-e^2} + 2\frac{e\ddot{e}}{1-e^2}. \quad (3.26)$$

Le tenseur énergie-impulsion le plus général qui obéit à la symétrie plane est de la forme

$$T_\mu^\nu = \text{diag}(\rho, -p_\parallel, -p_\parallel, -p_\perp). \quad (3.27)$$

3.2 Equations de Friedmann

On considère la composante (00) des équations d'Einstein

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = 8\pi GT_{00}, \quad (3.28)$$

qui s'écrit comme

$$-2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{c}}{c} + 2\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{c}}{c} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{\dot{c}\dot{a}}{ca} = 8\pi G\rho. \quad (3.29)$$

En terme d'excentricité on obtient

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{2\dot{a}}{3a} \frac{\dot{e}e}{1-e^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho. \quad (3.30)$$

On considère maintenant la composante (xx) de l'équation d'Einstein

$$R_{xx} - \frac{1}{2}g_{xx}R = 8\pi GT_{xx}, \quad (3.31)$$

et on remplace R_{xx} par son expression pour obtenir

$$\dot{a}^2 + a\ddot{a} + \frac{\dot{c}}{c}\dot{a}a - \frac{1}{2}g_{xx}R = 8\pi GT_{xx}. \quad (3.32)$$

On divise par a^2

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{c}\dot{a}}{ca} - \frac{1}{2a^2}g_{xx}R = 8\pi GT_{xx}. \quad (3.33)$$

et on utilise

$$T_{xx} = a^2 p_{\parallel}, \quad (3.34)$$

ce qui donne

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{c}\dot{a}}{ca} - \frac{1}{2a^2}g_{xx}R = 8\pi Ga^2 p_{\parallel}. \quad (3.35)$$

Remplaçons finalement les Eqs.(3.24) et (3.26) dans (3.35)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{\ddot{a}}{a} - 3\frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{e}e}{1-e^2} - \frac{\dot{e}^2}{1-e^2} - \frac{e\ddot{e}}{1-e^2} = -8\pi Ga^2 p_{\parallel}. \quad (3.36)$$

On note qu'on obtient la même équation pour la composante (yy).

Considérons enfin la composante (zz) des équations d'Einstein

$$R_{zz} - \frac{1}{2}g_{zz}R = 8\pi GT_{zz}. \quad (3.37)$$

Remplaçons l'éq.(3.22) dans (3.37) et utilisons (3.27). On trouve

$$c\ddot{c} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{c}c - \frac{1}{2}g_{zz}R = 8\pi Gc^2p_{\perp}. \quad (3.38)$$

On divise par c^2

$$\frac{\ddot{c}}{c} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{\dot{c}}{c} - \frac{1}{2c^2}g_{zz}R = 8\pi Gp_{\perp}, \quad (3.39)$$

et on utilise l'équation(3.23) pour déduire que

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{\ddot{a}}{a} = -8\pi Gp_{\perp}. \quad (3.40)$$

Ces trois équations de Friedmann((3.30), (3.36) et (3.40)) décrivent l'évolution d'un univers ellipsoïdal à quatre dimensions dans le cadre de la relativité générale, et à partir desquelles on peut déterminer l'évolution du paramètre d'excentricité avec le facteur d'échelle.

3.3 Equation de continuité

La dérivation de la première équation d'Einstein par rapport au temps cosmique donne

$$\frac{8\pi G}{3}\dot{\rho} = 2\frac{\ddot{a}}{a}\frac{\dot{a}}{a} - 2\frac{\dot{a}}{a}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{1}{3}\frac{2\ddot{a}}{a}\frac{\dot{e}e}{1-e^2} - \frac{2\dot{a}}{3a}\frac{\dot{e}e}{1-e^2} + \frac{2}{3}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\frac{\dot{e}e}{1-e^2} - \frac{2\dot{a}}{3a}\frac{\dot{e}\ddot{e}}{1-e^2} \quad (3.41)$$

L'équation (3.30) permet de déduire que

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{2\dot{a}}{3a}\frac{\dot{e}e}{1-e^2} + \frac{8\pi G}{3}\rho. \quad (3.42)$$

Remplaçons (3.42) dans (3.40), on obtient

$$2\frac{\ddot{a}}{a} = -8\pi Gp_{\perp} - \frac{2\dot{a}}{3a}\frac{\dot{e}e}{1-e^2} - \frac{8\pi G}{3}\rho. \quad (3.43)$$

Substituons les deux dernières équations dans (??). Après un long calcul on obtient

$$\dot{\rho} + 2\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p_{\parallel}) + \left(\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{e}e}{1-e^2}\right)(\rho + p_{\perp}) = 0, \quad (3.44)$$

qui exprime la conservation de la densité d'énergie de l'univers ellipsoïdal. Dans le cas standard où

3.4 Champ magnétique uniforme

Le tenseur moment-énergie pour un champ magnétique uniforme peut être écrit sous forme

$$T_{\mu}^{\nu} = \rho^A \text{diag}(1, -1, -1, 1). \quad (3.45)$$

L'équation (3.40) donne

$$H^2 + 2\frac{\ddot{a}}{a} = 8\pi G\rho^A. \quad (3.46)$$

Nous avons l'équation suivante

$$\dot{\rho}^A + 2H(\rho^A + p_{\parallel}^A) + \left(\frac{\dot{a}}{a} - 2\frac{\dot{e}e}{1-e^2}\right)(\rho^A + p_{\perp}^A) = 0. \quad (3.47)$$

Pour un champ magnétique uniforme, on a alors

$$p_{\parallel}^A = \rho^A \text{ et } p_{\perp}^A = -\rho^A. \quad (3.48)$$

Donc, l'équation précédente se réduit à

$$\dot{\rho}^A + 4H\rho^A = 0. \quad (3.49)$$

3.4.1 Evolution de l'excentricité

Remplaçant d'abord la troisième équation de mouvement dans la deuxième

$$-8\pi Gp_{\perp} - 3\frac{\dot{a}}{a}\frac{\dot{e}e}{1-e^2} - \frac{\dot{e}^2}{1-e^2} - \frac{e\ddot{e}}{1-e^2} = -8\pi Gp_{\parallel},$$

et avec (3.45), on obtient

$$-3\frac{\dot{a}}{a}\frac{\dot{e}e}{1-e^2} - \frac{\dot{e}^2}{1-e^2} - \frac{e\ddot{e}}{1-e^2} = -16\pi G\rho^A. \quad (3.50)$$

Pour une faible excentricité, on écrit

$$1 - e^2 \simeq 1, \quad (3.51)$$

et l'équation précédente devient

$$3H\dot{e}e + \dot{e}^2 + e\ddot{e} = 16\pi G\rho^A. \quad (3.52)$$

En remarquant que

$$\dot{e}^2 + e\ddot{e} = \frac{d(\dot{e}e)}{dt}, \quad (3.53)$$

on obtient

$$\frac{d(\dot{e}e)}{dt} + 3H\dot{e}e = 16\pi G\rho^A, \quad (3.54)$$

qu'on écrit aussi sous la forme

$$\frac{d\left(\frac{de^2}{dt}\right)}{dt} + 3H\frac{de^2}{dt} = 32\pi G\rho^A. \quad (3.55)$$

La solution de l'équation homogène est donnée par

$$\int_{t_0}^t \frac{d\left(\frac{de^2}{dt}\right)}{\frac{de^2}{dt}} dt = \int_{t_0}^t -3\frac{\dot{a}}{a} dt. \quad (3.56)$$

Les deux intégrales sont des Logarithmes, et donc

$$\ln \frac{de^2(t)}{dt} - \ln \frac{de^2(t_0)}{dt} = -3 \ln a(t) + 3 \ln a(t_0) + \ln C. \quad (3.57)$$

Nous utilisons les conditions initiales de la la référence [12]

$$e^2(t_0) = 0, \quad (3.58)$$

$$a(t_0) = 1, \quad (3.59)$$

pour déduire que

$$\frac{de^2(t)}{dt} = Ca(t)^{-3}. \quad (3.60)$$

En remplaçant dans l'équation au deuxième membre(3.55), avec $\rho^A = \frac{B^2}{8\pi G}$, où, ρ^A est la densité d'énergie magnétique, et B est le champ magnétique proportionnel à . On trouve alors

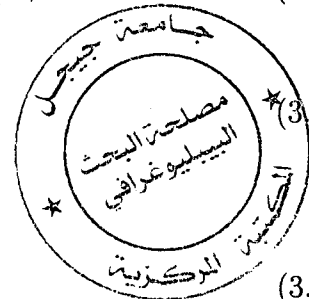
$$\frac{d(ca(t)^{-3})}{dt} + 3Hca(t)^{-3} = 32\pi G\frac{a(t)^{-4}}{8\pi}, \quad (3.61)$$

on trouve que

$$c(t) = 4G \int_{t_0}^t a(t)^{-1} dt. \quad (3.62)$$

L'expression du facteur d'échelle est donnée par

$$a(t) = \left(\frac{3H_0}{2}t\right)^{\frac{2}{3}}. \quad (3.63)$$



Donc, l'expression de $c(t)$ devient

$$c(t) = \frac{4}{3}G \left(\frac{3H_0}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} \left[t^{\frac{1}{3}} - t_0^{\frac{1}{3}}\right]. \quad (3.64)$$

L'équation (3.63) implique que

$$c(t) = \frac{4}{3}G \left(\frac{3H_0}{2} \right)^{-\frac{2}{3}} \left[\left(\frac{2}{3H_0} \right)^{\frac{1}{3}} a(t)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{2}{3H_0} \right)^{\frac{1}{3}} a(t_0)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (3.65)$$

En utilisant la condition (3.59), on trouve

$$c(t) = \frac{4}{3}G \left(\frac{3H_0}{2} \right)^{-1} \left[a(t)^{\frac{1}{2}} - 1 \right]. \quad (3.66)$$

En Remplaçant dans(3.60) on obtient

$$\frac{de^2(t)}{dt} = \frac{4}{3}G \left(\frac{3H_0}{2} \right)^{-1} \left[a(t)^{-\frac{5}{2}} - a(t)^{-3} \right]. \quad (3.67)$$

en écrivant a en fonction de t , et on intégrant on obtient finalement

$$e^2(t) = \frac{4}{3}G \left(\frac{3H_0}{2} \right)^{-1} \left[-\frac{3}{2} \left(\frac{3H_0}{2} \right)^{-\frac{5}{3}} t^{-\frac{2}{3}} + \left(\frac{3H_0}{2} \right)^{-2} t^{-1} + \frac{3}{2} \left(\frac{3H_0}{2} \right)^{-\frac{5}{3}} t_0^{-\frac{2}{3}} - \left(\frac{3H_0}{2} \right)^{-2} t_0^{-1} \right] \quad (3.68)$$

En réexprimant à nouveau t en fonction de a et avec $a(t_0) = 1$, on a

$$e^2(t) = \frac{8}{9} \frac{\rho^A(t_0)}{\rho_{cr}^{(0)}} \left[1 - 3a(t)^{-1} + 2a(t)^{-\frac{3}{2}} \right], \quad (3.69)$$

avec

$$\Omega_{(0)}^A = \frac{\rho^A(t_0)}{\rho_{cr}^{(0)}} \quad (3.70)$$

où $\Omega_{(0)}^A$ est appelé paramètre de densité sans dimensions, et $\rho_{cr}^{(0)}$ est la densité d'énergie critique actuel.

Chapitre 4

Univers de Friedmann-Robertson-Walker dans la théorie de la $f(R)$ -gravité

La relativité générale est une théorie non renormalisable. On a prouvé que la renormalisation de cette théorie à une boucle exige l'ajout de contre-terme à l'action, qui pourraient éliminer les divergences, c-à-d, que l'action d'Einstein-Hilbert devrait être complétée par des termes de courbure d'ordre supérieur comme : R^2 , $R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, $R^{\mu\nu\sigma\lambda}R_{\mu\nu\sigma\lambda}$, ainsi que certaines combinaisons de ces termes. Donc l'action d'Einstein-Hilbert s'écrit comme

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} [R + \alpha R^2 + \beta R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + \gamma R^{\mu\nu\sigma\lambda}R_{\mu\nu\sigma\lambda}] + S_M.$$

Puisque les hypothèses d'homogénéité et d'isotropie de l'univers permettent d'exprimer $R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ et $R^{\mu\nu\sigma\lambda}R_{\mu\nu\sigma\lambda}$ en fonction R^2 , L'action se réduit alors à

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} [R + \delta R^2] + S_M.$$

Ce modèle de gravité modifiée où $f(R) = R + \alpha R^2$ permet d'avoir une phase d'accélération seulement dans des régions de gravitation très fortes à des échelles comme celle de Planck (ère d'inflation) et donc dans l'univers primordial. Mais le second terme (αR^2) devient trop petit aujourd'hui. Il est alors négligeable et ne contribue pas, puisque la courbure scalaire est en général une fonction décroissante dans le temps. Donc nous avons $f(R) = R$, c'est-à-dire qu'aujourd'hui la déformation de la gravité n'existe pas. Pour cette raison il faut jouer sur le deuxième terme jusqu'à trouver des modèles décrivent très bien l'évolution de l'univers à toutes les échelles. Les conditions qui sont supposées pour trouver des théories $f(R)$ viables sont [13] :

- $f''(R) \geq 0$: condition pour un régime de forte courbure classiquement stable et pour l'existence de phase de matière dominant l'évolution cosmologique de l'univers.
- $1 + f'(R) > 0$: pour assurer la positivité de la constante de Newton et l'énergie des gravitons.

• $f'(R) < 0$: cette condition assure que le comportement ordinaire de la RG est récupéré durant l'ère primordiale. Cette condition avec $f''(R) > 0$ implique que $f'(R)$ est une fonction négative et croissante monotône dans l'intervalle $-1 < f'(R) < 0$.

• $|f'(R)| \ll 1$: pour des des époques recentes. Ceci est imposé par les tests de gravité locale.

4.1 La théorie de la $f(R)$ -gravité

La théorie $f(R)$ est un type de théorie de la gravité modifiée, qui explique l'accélération tardive de l'expansion de l'univers, et est proposée comme alternative à la relativité générale d'Einstein. Dans cette théorie le scalaire de Ricci R qui décrit la RG est remplacé par une fonction du scalaire de Ricci $f(R)$. Alors dans ce cas, l'action d'Einstein en l'absence de la matière s'écrit ($8\pi G = 1$)

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} f(R). \quad (4.1)$$

Pour trouver les équations du champ, on suit les mêmes étapes que dans le cas de l'action d'Einstein-Hilbert (*chapitre 2*), mais il y a quelques différences importantes qu'il faut mettre en évidence.

L'action d'Einstein modifiée en présence de la matière s'écrit comme

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [f(R) + L_m], \quad (4.2)$$

où L_m est le Lagrangian de matière et $f(R)$ est une fonction du scalaire de Ricci.

Pour trouver les équations du champ de gravitation, varions l'action par rapport à la métrique (4.2)

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x [\delta(\sqrt{-g} f(R)) + \delta(\sqrt{-g} L_m)] \\ &= \delta S_G + \delta S_m. \end{aligned} \quad (4.3)$$

La variation du terme de gravitation donne

$$\delta(\sqrt{-g} f(R)) = \delta\sqrt{-g} f(R) + \sqrt{-g} f'(R) \delta R. \quad (4.4)$$

En répétant les mêmes étapes de calcul que dans les chapitres 2 et 3 on trouve

$$\delta(\sqrt{-g} f(R)) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} f(R) + \sqrt{-g} f'(R) \delta g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + \sqrt{-g} f'(R) \delta v^\mu_{;\mu}, \quad (4.5)$$

Le troisième terme de cette expression s'écrit

$$\sqrt{-g} f'(R) \delta v^\mu_{;\mu} = \sqrt{-g} (f'(R) \delta v^\mu)_{;\mu} - \sqrt{-g} f'(R)_{;\mu} \delta v^\mu. \quad (4.6)$$

L'intégrale du premier terme donne zéro à cause du théorème de Stokes. Donc il reste

$$\sqrt{-g} f'(R) \delta v_{;\mu}^{\mu} = -\sqrt{-g} f'(R)_{;\mu} \delta v^{\mu}. \quad (4.7)$$

Avec

$$\delta v^{\mu} = \delta g_{,\alpha}^{\alpha\mu} - g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta}^{\mu}. \quad (4.8)$$

On trouve

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} f'(R) \delta v_{;\mu}^{\mu} &= (-\sqrt{-g} f'(R)_{;\mu} \delta g_{,\alpha}^{\alpha\mu}) + (\sqrt{-g} f'(R)_{;\mu} g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta}^{\mu}) \\ &= -(\sqrt{-g} f'(R)_{;\mu} \delta g^{\alpha\mu})_{,\alpha} + (\sqrt{-g} f'(R)_{;\mu})_{,\alpha} \delta g^{\alpha\mu} \\ &\quad + (\sqrt{-g} f'(R)_{;\mu} g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta})^{\mu} - (\sqrt{-g} f'(R)_{;\mu} g^{\alpha\beta})^{\mu} \delta g_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Le premier et le troisième termes sont des termes de surface, et donc leur intégrale donne zéro (théorème de Stokes). Alors

$$\sqrt{-g} f'(R) \delta v_{;\mu}^{\mu} = (\sqrt{-g} f'(R)_{;\mu})_{,\alpha} \delta g^{\alpha\mu} - (\sqrt{-g} f'(R)_{;\mu} g^{\alpha\beta})^{\mu} \delta g_{\alpha\beta}. \quad (4.9)$$

Nous utilisons la relation suivante :

$$(\sqrt{-g} A^{\alpha})_{,\alpha} = \sqrt{-g} A_{;\alpha}^{\alpha}. \quad (4.10)$$

pour trouver

$$\sqrt{-g} f'(R) \delta v_{;\mu}^{\mu} = \sqrt{-g} f'(R)_{;\mu} \delta g^{\alpha\mu} - \sqrt{-g} f'(R)_{;\mu} g_{\alpha\beta}^{\mu} \delta g^{\alpha\beta}. \quad (4.11)$$

On change μ par β dans le premier terme

$$\sqrt{-g} f'(R) \delta v_{;\mu}^{\mu} = \sqrt{-g} f'(R)_{;\beta} \delta g^{\alpha\beta} - \sqrt{-g} f'(R)_{;\mu} g_{\alpha\beta}^{\mu} \delta g^{\alpha\beta}. \quad (4.12)$$

On peut changer la dérivée normale par la dérivée covariante

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} f'(R) \delta v_{;\mu}^{\mu} &= \sqrt{-g} f'(R)_{;\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} - \sqrt{-g} f'(R)_{;\mu} g_{\alpha\beta}^{\mu} \delta g^{\alpha\beta} \\ &= \sqrt{-g} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} f'(R) \delta g^{\alpha\beta} - \sqrt{-g} \nabla_{\mu} \nabla^{\mu} f'(R) g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (4.13)$$

où ∇_{α} est la dérivée covariante. Donc, la dernière expression de $\delta(\sqrt{-g} f(R))$ devient

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{-g} f(R)) &= -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} f(R) + \sqrt{-g} f'(R) \delta g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \\ &\quad + \sqrt{-g} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} f'(R) \delta g^{\alpha\beta} - \sqrt{-g} \nabla_{\mu} \nabla^{\mu} f'(R) g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (4.14)$$

On change α, β respectivement par μ, ν dans tous les termes

$$\delta(\sqrt{-g} f(R)) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} f(R) + \sqrt{-g} f'(R) \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (4.15)$$

$$+ \sqrt{-g} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} f'(R) \delta g^{\mu\nu} - \sqrt{-g} \nabla_{\beta} \nabla^{\beta} f'(R) g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (4.16)$$

Avec

$$\nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) = f'(R)_{;\mu\nu} = g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} f'(R)^{;\alpha\beta}, \quad (4.17)$$

et

$$\nabla_\beta \nabla^\beta f'(R) = g_{\alpha\beta} f'(R)^{;\alpha\beta}, \quad (4.18)$$

on obtient finalement

$$\delta S_G = \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} [f(R) - R f'(R)] + f'(R) G_{\mu\nu} + f'(R)^{;\alpha\beta} (g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta}) \right], \quad (4.19)$$

avec

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R. \quad (4.20)$$

La variation de l'action de matière est déjà calculée dans le chapitre précédent et nous avons trouvé le résultat suivant

$$\delta S_m = \int d^4x \left(\frac{\partial L_m}{\partial g_{\mu\nu}} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} L_m \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g}. \quad (4.21)$$

La quantité entre parenthèse est le tenseur énergie-impulsion de la matière

$$\tilde{T}_{\mu\nu}^m = -\frac{\partial L_m}{\partial g_{\mu\nu}} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} L_m. \quad (4.22)$$

L'intérêt de cette formulation est évidemment qu'elle permet d'étendre les théories de champ formulées sur un espace plat à des espaces courbés.

L'expression de δS_m s'écrit alors sous la forme

$$\delta S_m = - \int d^4x \tilde{T}_{\mu\nu}^m \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g}. \quad (4.23)$$

Puisque la variation totale de l'action (4.2) est nulle (principe de moindre action) implique que

$$\delta S_G + \delta S_m = 0. \quad (4.24)$$

Alors, les équations modifiées du champ d'Einstein s'écrivent explicitement comme

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{f'(R)} \left\{ \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (f(R) - R f'(R)) - (g_{\alpha\mu} g_{\nu\beta} - g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta}) f'(R)^{;\alpha\beta} \right\} + \frac{\tilde{T}_{\mu\nu}^m}{f'(R)}, \quad (4.25)$$

ce qui peut être écrit sous une forme plus expressive (forme tensorielle) :

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{curv} + T_{\mu\nu}^m, \quad (4.26)$$

avec

$$T_{\mu\nu}^{curv} = \frac{1}{f'(R)} \left\{ \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (f(R) - Rf'(R)) - (g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}) f'(R)^{\alpha\beta} \right\}, \quad (4.27)$$

$$T_{\mu\nu}^m = \frac{\tilde{T}_{\mu\nu}^m}{f'(R)}. \quad (4.28)$$

et $G_{\mu\nu}$ est le tenseur d'Einstein qui représente la géométrie de l'espace-temps. $T_{\mu\nu}^m$ est le tenseur énergie-impulsion, qui décrit la distribution de la matière et l'énergie dans l'espace-temps, et $T_{\mu\nu}^{curv}$ le tenseur énergie-impulsion dû à la courbure.

4.2 Les équations de Friedmann modifiées

Nous considérons la métrique de FRW

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 \tilde{g}_{ij} dx^i dx^j, \quad (4.29)$$

avec

$$\tilde{g}_{ij} = \delta_{ij} + k \frac{x^i x^j}{1 - kx^2}. \quad (4.30)$$

4.2.1 Première équation de Friedmann

À partir de la composante temporelle de l'équation de mouvement d'Einstein on trouve la première équation modifiée de Friedmann

$$R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R = T_{00}. \quad (4.31)$$

On utilise les données suivantes

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{a}, \quad R = g_{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g_{00} R_{00} + g_{ii} R_{ii}, \quad (4.32)$$

$$T_{00} = -\rho, \quad (4.33)$$

avec

$$\rho = \rho_{curv} + \frac{\rho_m}{f'(R)}, \quad (4.34)$$

où ρ_m est la densité d'énergie de la matière, et ρ_{curv} la densité d'énergie de la courbure.

On trouve alors

$$3 \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{3}{2} \frac{\dot{a}^2}{a} - \frac{1}{2} (2k + 2\dot{a}^2 + a\ddot{a}) \tilde{g}_{ij} \frac{\tilde{g}^{ij}}{a^2} = - \left[\rho_{curv} + \frac{\rho_m}{f'(R)} \right]. \quad (4.35)$$

Avec

$$\tilde{g}_{ij} \tilde{g}^{ij} = 3, \quad (4.36)$$

on obtient la première équation modifiée de Friedmann

$$\frac{k}{a^2} + H^2 = \frac{1}{3} \left[\rho_{curv} + \frac{\rho_m}{f'(R)} \right], \quad (4.37)$$

4.2.2 Deuxième équation de Friedmann

Pour trouver la deuxième équation modifiée de Friedmann on écrit la composante spatiale de l'équation de mouvement d'Einstein.

$$R - \frac{1}{2}g_{ij}R = T_{ij}, \quad (4.38)$$

avec

$$R_{ij} = -(2k + 2\dot{a}^2 + a\ddot{a})\tilde{g}_{ij}, \quad (4.39)$$

On remplace dans l'équation (4.38)

$$-(2k + 2\dot{a}^2 + a\ddot{a})\tilde{g}_{ij} + \frac{a^2}{2}\tilde{g}_{ij}\left(3\frac{\ddot{a}}{a}\right) + \frac{3}{2}(2k + 2\dot{a}^2 + a\ddot{a})\tilde{g}_{ij} = T^{kl}g_{ik}g_{jl}. \quad (4.40)$$

Avec

$$T^{kl} = -g^{kl}p \quad (4.41)$$

$$= -\frac{\tilde{g}^{kl}}{a^2}p. \quad (4.42)$$

l'équation (4.40) devient

$$(k + \dot{a}^2 + 2a\ddot{a})\tilde{g}_{ij} = -p a^2 \tilde{g}_{ij}.$$

Après simplification, on obtient

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 + \frac{k}{a^2} = -(p_{curv} + p_m), \quad (4.43)$$

qui est la deuxième équation de Friedmann. Cette équation est une fonction de \ddot{a} , donc elle décrit l'accélération ou la décélération d'expansion de l'univers selon le signe de \ddot{a} .

La densité d'énergie de la courbure est défini par

$$\rho_{curv} = T_{curv}^{00}g_{00} \quad (4.44)$$

$$= T_{00}^{curv}g^{00}. \quad (4.45)$$

Avec (4.27), donc l'expression de ρ_{curv} devient

$$T_{\mu\nu}^{curv} = \frac{1}{f'(R)} \left\{ \frac{1}{2}g_{\mu\nu} (f(R) - Rf'(R)) - (g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}) f'(R)^{;\alpha\beta} \right\}, \quad (4.46)$$

$$\rho_{curv} = -\frac{1}{f'(R)} \left\{ \frac{1}{2}g_{00} (f(R) - Rf'(R)) - (g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{00}g_{\alpha\beta}) f'(R)^{;\alpha\beta} \right\}.$$

Remplaçons α et β par toutes les valeurs possibles, on trouve

$$\rho_{curv} = \frac{1}{f'(R)} \left\{ \frac{1}{2} (f(R) - Rf'(R)) + f'(R)^{;ij} \frac{\tilde{g}^{ij}}{a^2} \right\}. \quad (4.47)$$

On calcule la dérivée covariante $f'(R)_{;ij}$. Comme $f'(R)$ est un scalaire on a

$$f'(R)_{;i} = f'(R)_{,i}. \quad (4.48)$$

et alors

$$f'(R)_{;ij} = (f'(R)_{,i})_{;j}. \quad (4.49)$$

On utilise la définition de la dérivée covariante

$$f'(R)_{;ij} = f'(R)_{,ij} - \Gamma_{ij}^{\gamma} f'(R)_{,\gamma} \quad (4.50)$$

$$f'(R)_{;ij} = \frac{d}{dx^i} \left(\frac{df'(R)}{dx^j} \right) - \Gamma_{ij}^0 \frac{df'(R)}{dt} - \Gamma_{ij}^k \frac{df'(R)}{dx^k}, \quad (4.51)$$

et comme

$$\frac{df'(R)}{dx^{\gamma}} = \frac{dR}{dx^{\gamma}} \frac{df'(R)}{dR}, \quad (4.52)$$

et avec $\gamma = 0, i$, on trouve

$$f'(R)_{;ij} = \frac{d}{dx^i} \left[\frac{dR}{dx^j} \frac{df'(R)}{dR} \right] - \Gamma_{ij}^0 \frac{dR}{dt} \frac{df'(R)}{dR} - \Gamma_{ij}^k \frac{dR}{dx^k} \frac{df'(R)}{dR}. \quad (4.53)$$

On voit que R ne dépend pas de x^j , et donc la dérivée covariante $f'(R)_{;ij}$ devient

$$\begin{aligned} f'(R)_{;ij} &= -\Gamma_{ij}^0 \dot{R} f''(R) \\ &= -a \dot{a} \tilde{g}_{ij} \dot{R} f''(R). \end{aligned} \quad (4.54)$$

On remplace dans (??) pour finalement trouver

$$\rho_{curv} = \frac{1}{f'(R)} \left\{ \frac{1}{2} (f(R) - R f'(R)) - 3H \dot{R} f''(R) \right\}. \quad (4.55)$$

4.3 La pression de la courbure

Pour trouver la formule de la pression, nous utilisons la définition

$$T_{curv}^{ij} = -g^{ij} p_{curv}, \quad (4.56)$$

$$g_{ij} T_{curv}^{ij} = -g_{ij} g^{ij} p_{curv},$$

$$p_{curv} = -\frac{1}{3} g^{ij} T_{ij}^{curv}. \quad (4.57)$$

T_{ij}^{curv} est défini dans l'équation (4.27). Alors

$$p_{curv} = -\frac{1}{3 f'(R)} \left\{ \frac{3}{2} (f(R) - R f'(R)) - g^{ij} f'(R) (g_{i\alpha} g_{j\beta} - g_{ij} g_{\alpha\beta}) \right\} \quad (4.58)$$

Considérons le deuxième terme :

$$\begin{aligned}
g^{ij} f'(R)^{;\alpha\beta} (g_{i\alpha} g_{j\beta} - g_{ij} g_{\alpha\beta}) &= g^{ij} f'(R)^{;\alpha\beta} g_{i\alpha} g_{j\beta} - g^{ij} g_{ij} g_{\alpha\beta} f'(R)^{;\alpha\beta} \\
&= g^{ij} f'(R)^{;kl} g_{ik} g_{jl} - 3g^{00} f'(R)_{;00} - 3g_{kl} f'(R)^{;kl} \\
&= f'(R)^{;kl} g_{kl} + 3f'(R)_{;00} - 3g_{kl} f'(R)^{;kl} \\
&= -2g_{kl} f'(R)^{;kl} + 3f'(R)_{;00} \\
&= -2g^{kl} f'(R)_{;kl} + 3f'(R)_{;00}.
\end{aligned} \tag{4.59}$$

On a

$$f'(R)_{;0} = f'(R)_{,0}, \quad f'(R)_{;00} = (f'(R)_{,t})_{,t}. \tag{4.60}$$

On utilise la définition de la dérivée covariante

$$f'(R)_{;00} = f'(R)_{,00} - \Gamma_{00}^{\gamma} f'(R)_{,\gamma}, \tag{4.61}$$

or les Γ_{tt}^{γ} sont nulles, ce qui donne

$$f'(R)_{;00} = \frac{d^2 f'(R)}{dt^2}. \tag{4.62}$$

Avec l'équation (4.52), on trouve

$$f'(R)_{;00} = \ddot{R} f''(R) + \dot{R}^2 f'''(R). \tag{4.63}$$

Donc

$$g^{ij} f'(R)^{;\alpha\beta} (g_{i\alpha} g_{j\beta} - g_{ij} g_{\alpha\beta}) = +2a\dot{a}\tilde{g}_{kl} g^{kl} \dot{R} f''(R) + 3 \left(\dot{R}^2 f'''(R) + \ddot{R} f''(R) \right). \tag{4.64}$$

En remplaçant dans la dernière expression de la pression on obtient

$$p_{curv} = \frac{1}{f'(R)} \left\{ 2\frac{\dot{a}}{a} \dot{R} f''(R) + \ddot{R} f''(R) + \dot{R}^2 f'''(R) - \frac{1}{2} [f(R) - Rf'(R)] \right\}. \tag{4.65}$$

4.4 Equation de continuité

En appliquant l'identité de Bianchi à l'équation (4.26), on obtient l'équation de continuité ou la loi de conservation de la densité d'énergie totale. En effet on a

$$G_{\mu\nu; \mu} = T_{\mu\nu; \mu}^{curve} + T_{\mu\nu; \mu}^m = 0. \tag{4.66}$$

On peut écrire cette équation sous forme

$$T_{\mu\nu; \mu} = 0, \tag{4.67}$$

ou

$$T_{\nu; \mu}^{\mu} = 0. \quad (4.68)$$

En utilisant la définition de la dérivée covariante d'un tenseur, on trouve

$$T_{\nu; \mu}^{\mu} + \Gamma_{\alpha\mu}^{\mu} T_{\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} T_{\alpha}^{\mu} = 0, \quad (4.69)$$

Pour $\nu = 0$ on a

$$T_{0; \mu}^{\mu} + \Gamma_{\alpha\mu}^{\mu} T_0^{\alpha} - \Gamma_{0\mu}^{\alpha} T_{\alpha}^{\mu} = 0. \quad (4.70)$$

Le premier terme implique que $\mu = 0$ et le deuxième terme implique que $\alpha = 0$,

$$T_{0,0}^0 + \Gamma_{0\mu}^{\mu} T_0^0 - \Gamma_{00}^{\alpha} T_{\alpha}^0 - \Gamma_{0j}^{\alpha} T_{\alpha}^j = 0, \quad (4.71)$$

$$T_{0,0}^0 + \Gamma_{0i}^i T_0^0 - \frac{\dot{a}}{a} T_j^j = 0. \quad (4.72)$$

Les équations (4.33) et (4.41) impliquent respectivement que $T_0^0 = \rho$ et $T_i^i = -3p$, et donc

$$T_{0,0}^0 + \Gamma_{0i}^i \rho + 3 \frac{\dot{a}}{a} p = 0. \quad (4.73)$$

En remplaçant $\Gamma_{0i}^i = 3 \frac{\dot{a}}{a}$ on obtient

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (4.74)$$

avec, ρ et p définissant respectivement la densité d'énergie et la pression totale

$$p = (p_{curv} + p_m), \quad (4.75)$$

$$\rho = \rho_{curv} + \frac{\rho_m}{f'(R)}. \quad (4.76)$$

Dans la suite, on se limitera au cas d'un univers plat, c.-à-d $k = 0$, et où la matière est sous forme de poussière, c'est à dire $p_m = 0$, et on négligera aussi l'interaction entre la matière et la courbure. Dans ce cas la densité d'énergie de la matière est donnée par

$$\rho_m = 3H_0^2 \Omega_{m0} e^{-3x}. \quad (4.77)$$

Nous considérons les équations (4.37) et (4.74). A partir de l'équation (4.37) et en utilisant les données précédentes on trouve

$$H^2 = \frac{1}{3} \left(\rho_{curv} + \frac{\rho_m}{f'(R)} \right) = \frac{1}{3} \rho_{tot}. \quad (4.78)$$

On dérive les deux membres de cette équation par rapport au temps cosmique

$$2H\dot{H} = \frac{1}{3} \dot{\rho}_{tot}. \quad (4.79)$$

L'équation (4.74) donne

$$\dot{\rho}_{tot} = -3H \left(\rho_{curv} + \frac{\rho_m}{f'(R)} + p_{curv} + p_m \right). \quad (4.80)$$

et avec l'équation (4.77) on obtient

$$\dot{\rho}_{tot} = -3H \left(\rho_{curv} + \frac{3H_0^2 \Omega_{m0} e^{-3x}}{f'(R)} + p_{curv} + p_m \right). \quad (4.81)$$

Remplaçant l'équation (4.81) dans (4.79)

$$\dot{H} = -\frac{1}{2} \left(\rho_{curv} + \frac{3H_0^2 \Omega_{m0} e^{-3x}}{f'(R)} + p_{curv} \right), \quad (4.82)$$

avec $p_m = 0$. Remplaçant maintenant ρ_{curv} et p_{curv} par leurs expressions respectives dans \dot{H}

$$\dot{H} = -\frac{1}{2f'(R)} \left\{ H_0^2 \Omega_{m0} e^{-3x} + \ddot{R} f''(R) + \dot{R} \left(\dot{R} f'''(R) - H f''(R) \right) \right\}. \quad (4.83)$$

Cette équation décrit une équation différentielle de troisième ordre en $f(R)$, et à partir d'un modèle d'énergie noire on peut trouver le paramètre de Hubble H et donc une solution (une forme) de $f(R)$.

Chapitre 5

Univers ellipsoïdal à 4 dimensions dans la théorie de la $f(R)$ -gravité

Dans ce chapitre, nous étudions et analysons la dynamique de l'univers ellipsoïdal, avec $f(R)$ gravité. Aussi nous voulons obtenir l'évolution avec le temps cosmique du carré de l'excentricité.

5.1 Equations de mouvement modifiées

Les équations d'Einstein modifiées sont données par

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{curv} + T_{\mu\nu}^m, \quad (5.1)$$

où $G_{\mu\nu}$ est le tenseur d'Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (5.2)$$

et

$$T_{\mu\nu}^{curv} = \frac{1}{f'(R)} \left\{ \frac{1}{2}g_{\mu\nu} [f(R) - Rf'(R)] - f'(R)^{\alpha\beta} (g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}) \right\}. \quad (5.3)$$

On considère les composantes de tenseur moment-énergie de la matière sous la forme suivante

$$T_{\mu}^{\nu m} = \text{diag}(\rho, -p_{\parallel}, -p_{\parallel}, -p_{\perp}). \quad (5.4)$$

Pour trouver l'effet de la $f(R)$ gravité sur l'univers ellipsoïdal, on remplace le scalaire de Ricci et ses composantes dans les équations d'Einstein modifiées.

La métrique qui décrit l'univers ellipsoïdal est donnée par

$$dS^2 = dt^2 - a^2(t)(dx_1^2 + dx_2^2) - (1 - e^2(t))a^2(t)dx_3^2, \quad (5.5)$$

où $e(t)$ est le paramètre d'excentricité.

5.1.1 Première équation de mouvement modifiée

Considérons d'abord la composante (00) des équations d'Einstein

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = T_{00}^{curv} + T_{00}^m, \quad (5.6)$$

qui prend la forme suivante

$$-\left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{c}}{c}\right) - \frac{1}{2}g_{00}R = \frac{1}{f'(R)} \left\{ \frac{1}{2}g_{00} [f(R) - Rf'(R)] - f'(R)^{;\alpha\beta} (g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{00}g_{\alpha\beta}) \right\} + \rho, \quad (5.7)$$

ou bien

$$-\left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{c}}{c}\right) = \frac{g_{00} f(R)}{2 f'(R)} - \frac{f'(R)^{;\alpha\beta}}{f'(R)} (g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{00}g_{\alpha\beta}) + \rho, \quad (5.8)$$

En simplifiant cette équation, on trouve

$$-\left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{c}}{c}\right) = \frac{1}{2} \frac{f(R)}{f'(R)} + \frac{f'(R)_{;xx}}{f'(R)} g^{xx} + \frac{f'(R)_{;yy}}{f'(R)} g^{yy} + \frac{f'(R)_{;zz}}{f'(R)} g^{zz} + \rho. \quad (5.9)$$

Avec $f'(R)_{;ij} = -\Gamma_{ij}^0 \dot{R} f''(R)$ on obtient

$$f'(R)_{;xx} = f'(R)_{;yy} = -\dot{a} \dot{R} f''(R), \quad (5.10)$$

$$f'(R)_{;zz} = -\dot{c} \dot{R} f''(R). \quad (5.11)$$

Remplaçons dans l'équation (5.9)

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{1}{2} \frac{f(R)}{f'(R)} + \frac{f''(R)}{f'(R)} \dot{R} \left(2\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{c}}{c}\right) = -\rho. \quad (5.12)$$

En remplaçant $\frac{\dot{c}}{c}$ et $\frac{\dot{e}}{e}$ par leurs expressions trouvées dans le chapitre 3, on obtient la première équation de mouvement modifiée

$$3\frac{\ddot{a}}{a} - 2\frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{e}e}{1-e^2} - \frac{e\ddot{e}}{1-e^2} - \frac{\dot{e}^2}{1-e^2} + \frac{1}{2} \frac{f(R)}{f'(R)} + \dot{R} \left(3\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{e}e}{1-e^2}\right) \frac{f''(R)}{f'(R)} = -\rho. \quad (5.13)$$

5.1.2 Deuxième équation de mouvement modifiée

On considère d'abord la première composante spatiale des équations d'Einstein

$$R_{xx} - \frac{1}{2}g_{xx}R = T_{xx}^{curv} + T_{xx}^m \quad (5.14)$$

R_{xx} , T_{xx}^{curv} et T_{xx}^m sont respectivement définis dans (4.45), (5.3) et (5.4). Donc on a

$$2\dot{a}^2 + a\ddot{a} - \dot{a}a \frac{\dot{e}e}{1-e^2} = \frac{a^2 f(R)}{2 f'(R)} + \frac{1}{f'(R)} \left\{ -a^2 f'(R)_{,tt} + f'(R)_{,yy} + \frac{a^2}{c^2} f'(R)_{,zz} \right\} + \frac{1}{2} p_{\parallel} \quad (5.15)$$

On a des résultats du chapitre 4, la relation suivante

$$f'(R)_{,tt} = \ddot{R} f''(R) + \dot{R}^2 f'''(R) \quad (5.16)$$

et où $f'(R)_{,yy}$ et $f'(R)_{,zz}$ sont définies par les Eqs.(5.10)et(5.11).

Alors l'équation (5.15) devient

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{2} \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{e}e}{1-e^2} + \frac{1}{4} \frac{f(R)}{f'(R)} - \frac{f''(R)}{f'(R)} \left\{ \left(-\frac{\dot{a}}{a} + \frac{1}{2} \frac{\dot{e}e}{1-e^2}\right) \dot{R} - \frac{1}{2} \ddot{R} \right\} + \frac{1}{2} \dot{R}^2 \frac{f''(R)}{f'(R)} = \frac{1}{2} p_{\parallel} \quad (5.17)$$

On note qu'on obtient la même équation pour la composante (yy) .

5.1.3 Troisième équation de mouvement modifiée

On considère maintenant la troisième composante spatiale de l'équation d'Einstein

$$R_{zz} - \frac{1}{2} g_{zz} R = T_{zz}^{curev} + T_{zz}^m \quad (5.18)$$

qui prend la forme

$$c\ddot{c} + 2\frac{\dot{a}}{a} \dot{c}c = -\frac{c^2 f(R)}{2 f'(R)} - \frac{1}{f'(R)} \left\{ c^2 f'(R)_{,tt} - \left(\frac{c}{a}\right)^2 f'(R)_{,yy} - \left(\frac{c}{a}\right)^2 f'(R)_{,xx} \right\} + c^2 p_{\perp} \quad (5.19)$$

On utilise les relations donnant $f'(R)_{,tt}$, $f'(R)_{,ij}$ pour écrire après division par c^2

$$\frac{\ddot{c}}{c} + 2\frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{c}}{c} = -\frac{1}{2} \frac{f(R)}{f'(R)} - \frac{f''(R)}{f'(R)} \left[\ddot{R} + 2\frac{\dot{a}}{a} \dot{R} \right] - \dot{R}^2 f'''(R) + p_{\perp} \quad (5.20)$$

Finalement si on remplace $\frac{\ddot{c}}{c}$ et $\frac{\dot{c}}{c}$ en fonction de e et ses dérivées par rapport au temps, on obtient

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\ddot{a}}{a} - 2\frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{e}e}{1-e^2} - \frac{1}{2} \frac{e\ddot{e}}{1-e^2} - \frac{1}{2} \frac{\dot{e}^2}{1-e^2} + \frac{1}{4} \frac{f(R)}{f'(R)} \\ + \frac{f''(R)}{f'(R)} \left[\frac{1}{2} \ddot{R} + \frac{\dot{a}}{a} \dot{R} \right] + \frac{1}{2} \dot{R}^2 \frac{f'''(R)}{f'(R)} = \frac{1}{2} p_{\perp} \end{aligned} \quad (5.21)$$

5.2 Evolution du paramètre d'excentricité

Le tenseur moment-énergie pour un champ magnétique uniforme s'écrit

$$T_{\mu}^{\nu} = \rho^A \text{diag}(1, -1, -1, 1). \quad (5.22)$$

La première équation de Friedmann modifiée donne

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{1}{2a}\ddot{a} + \frac{1}{4}\frac{f(R)}{f'(R)} + \frac{f''(R)}{f'(R)} \left[\frac{1}{2}\ddot{R} + \frac{\dot{a}}{a}\dot{R}\right] + \frac{1}{2}\dot{R}^2 \frac{f'''(R)}{f'(R)} = -\frac{1}{2}\rho^A + \\ + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{\dot{e}e}{1-e^2} + \frac{1}{2}\frac{e\ddot{e}}{1-e^2} + \frac{1}{2}\frac{\dot{e}^2}{1-e^2}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

et la deuxième équation de Friedmann modifiée conduit à

$$\frac{3}{2}\frac{\dot{a}}{a}\frac{\dot{e}e}{1-e^2} + \frac{1}{2}\frac{e\ddot{e}}{1-e^2} + \frac{1}{2}\frac{\dot{e}^2}{1-e^2} - \frac{1}{2}\frac{\dot{e}e}{1-e^2}\dot{R}\frac{f''(R)}{f'(R)} = \rho^A, \quad (5.24)$$

On utilise à nouveau l'approximation de faible excentricité

$$1 - e^2 \simeq 1. \quad (5.25)$$

Donc, l'équation précédente se simplifie et devient

$$3H\dot{e}e + \dot{e}^2 + e\ddot{e} - \dot{e}e\dot{R}\frac{f''(R)}{f'(R)} = 2\rho^A, \quad (5.26)$$

Remarquons que

$$\dot{e}^2 + e\ddot{e} = \frac{d(\dot{e}e)}{dt}. \quad (5.27)$$

et alors l'équation (5.26) devient

$$\frac{d(\dot{e}e)}{dt} + 3H\dot{e}e - \dot{e}e\dot{R}\frac{f''(R)}{f'(R)} = 2\rho^A, \quad (5.28)$$

C'est l'équation d'évolution de l'excentricité d'un univers ellipsoïdal pour un champ magnétique uniforme dans la théorie de la $f(R)$ -gravité. On remarque que pour $f(R) = R$, on trouve l'équation d'évolution ordinaire de l'excentricité (3.54) (avec $8\pi G = 1$)

$$\frac{d(\dot{e}e)}{dt} + 3H\dot{e}e = 2\rho^A.$$

Pour trouver la solution de l'équation d'évolution (5.28), c'est à dire trouver le carré de l'excentricité, il faut réécrire l'équation (5.28) en fonction de e^2 .

Avec

$$e\dot{e} = \frac{1}{2}\frac{de^2}{dt}. \quad (5.29)$$

L'équation (5.28) s'écrit

$$\frac{d\left(\frac{de^2}{dt}\right)}{dt} + \left(3H - \dot{R} \frac{f''(R)}{f'(R)}\right) \frac{de^2}{dt} = 4\rho^A. \quad (5.30)$$

La solution de l'équation homogène

$$\frac{d\left(\frac{de^2}{dt}\right)}{dt} + \left(3H - \dot{R} \frac{f''(R)}{f'(R)}\right) \frac{de^2}{dt} = 0, \quad (5.31)$$

sur l'intervalle $[t_0, t]$ est donnée par

$$\ln \frac{de^2(t)}{dt} - \ln \frac{de^2(t_0)}{dt} = -3 \ln a(t) + 3 \ln a(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{R} \frac{f''(R)}{f'(R)} dt + \ln c. \quad (5.32)$$

Avec les conditions initiales

$$e^2(t_0) = 0, \quad a(t_0) = 1. \quad (5.33)$$

on obtient

$$\ln \frac{de^2(t)}{dt} = -3 \ln a(t) + \int_{t_0}^t \dot{R} \frac{f''(R)}{f'(R)} dt + \ln c. \quad (5.34)$$

On utilise la relation suivante

$$\int_{t_0}^t \dot{R} \frac{f''(R)}{f'(R)} dt = \ln \frac{f'(R)}{f'(R_0)}, \quad (5.35)$$

ce qui donne

$$\frac{de^2(t)}{dt} = ca(t)^{-3} \frac{f'(R)}{f'(R_0)}. \quad (5.36)$$

En remplaçant l'équation (5.36) dans (5.30), avec $\rho^A = \frac{a^{-4}}{8\pi}$, on trouve l'expression de $c(t)$ suivante

$$c(t) = \frac{f'(R_0)}{2\pi} \int_{t_0}^t a(t)^{-1} \frac{dt}{f'(R)}. \quad (5.37)$$

On remplace cette équation dans (5.36)

$$\frac{de^2(t)}{dt} = a(t)^{-3} \frac{f'(R)}{f'(R_0)} \frac{f'(R_0)}{2\pi} \int_{t_0}^t a(t)^{-1} \frac{1}{f'(R)} dt. \quad (5.38)$$

L'intégrale de cette équation donne

$$e^2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{t_0}^t \left[a(\tau)^{-3} f'(R) \int_{\tau_0}^{\tau} a(t')^{-1} \frac{dt'}{f'(R)} \right] d\tau, \quad (5.39)$$

qui est l'expression de l'excentricité de l'univers ellipsoïdal à quatre dimensions dans la théorie de la $f(R)$ -gravité. C'est une forme généralisée de l'excentricité, c'est-à-dire qu'on peut à partir de cette relation, trouver l'excentricité de l'univers ellipsoïdal pour n'importe quelle modèle de $f(R)$ - gravité.

5.3 Application à la gravité quadratique

Il y a beaucoup de formes spécifiques de la fonction $f(R)$. L'une d'elles, est $f(R) = R + \alpha R^{-n}$, avec $n \neq -1$ et α un paramètre très petit. Dans la suite on se limitera au cas $n = -2$. Donc, le modèle de gravité qui nous intéresse est donné par

$$f(R) = R + \alpha R^2. \quad (5.40)$$

Alors on a

$$f'(R) = 1 + 2\alpha R. \quad (5.41)$$

Pour une faible excentricité, nous faisons l'approximation suivante sur le scalaire de Ricci qui est calculé dans le chapitre 3

$$R = R_s = -6\frac{\ddot{a}}{a} - 6\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2. \quad (5.42)$$

Utilisons l'expression du facteur d'échelle donnée dans la relation (3.63). Alors

$$\dot{a}(t) = \frac{2}{3}a(t) t^{-1}, \quad \ddot{a}(t) = -\frac{2}{3}a(t) t^{-2}. \quad (5.43)$$

Ce qui donne

$$R = -\frac{4}{3}t^{-2}. \quad (5.44)$$

Alors

$$f'(R) = 1 - \frac{8}{3}\alpha t^{-2}. \quad (5.45)$$

et

$$\frac{1}{f'(R)} = 1 + \frac{8}{3}\alpha t^{-2}, \quad (5.46)$$

Avec ces données l'équation de l'excentricité (5.39) devient

$$e^2(t) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{3H_0}{2} \right)^{-\frac{8}{3}} \int_{t_0}^t \left[\left(\tau^{-2} - \frac{8}{3}\alpha\tau^{-4} \right) \int_{t_0}^{\tau} \left(s^{-\frac{2}{3}} + \frac{8}{3}\alpha s^{-\frac{8}{3}} \right) ds \right] d\tau. \quad (5.47)$$

Nous calculons cet intégral et on néglige les termes en α^2 . Alors l'expression de l'excentricité devient

$$e^2(t) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{3H_0}{2} \right)^{-\frac{8}{3}} \left[-\frac{9}{2}t^{-\frac{2}{3}} + \frac{3}{2}t_0^{-\frac{2}{3}} + 3t_0^{\frac{1}{3}}t^{-1} + \frac{18\alpha}{5}t^{-\frac{8}{3}} - \frac{2\alpha}{3}t_0^{-\frac{8}{3}} - \frac{8\alpha}{5}t_0^{-\frac{5}{3}}t^{-1} - \frac{8\alpha}{5}t_0^{\frac{1}{3}}t^{-3} \right], \quad (5.48)$$

qui, en fonction de facteur d'échelle $a(t)$, s'écrit comme

$$e^2(t) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{3H_0}{2} \right)^{-\frac{8}{3}} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{2}{3H_0} \right)^{-\frac{2}{3}} - \frac{9}{2} \left(\frac{2}{3H_0} \right)^{-\frac{2}{3}} a(t)^{-1} + 3 \left(\frac{2}{3H_0} \right)^{-\frac{2}{3}} a(t)^{-\frac{3}{2}} + \frac{18\alpha}{5} \left(\frac{2}{3H_0} \right)^{-\frac{8}{3}} a(t)^{-4} \right. \\ \left. - \frac{2\alpha}{3} \left(\frac{2}{3H_0} \right)^{-\frac{8}{3}} - \frac{8\alpha}{5} \left(\frac{2}{3H_0} \right)^{-\frac{8}{3}} a(t)^{-\frac{3}{2}} - \frac{8\alpha}{5} \left(\frac{2}{3H_0} \right)^{-\frac{8}{3}} a(t)^{-\frac{9}{2}} \right] \quad (5.49)$$

Cette équation donne la même équation d'évolution d'excentricité que nous avons calculé précédemment (dans le chapitre trois) si on pose $\alpha = 0$. Si on considère des époques lointaines dans le passé on peut approximer l'excentricité par la relation suivante

$$e^2(t) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{3H_0}{2} \right)^{-2} \left[3 \left[1 - \frac{8\alpha}{15} \left(\frac{2}{3H_0} \right)^{-4} \right] a(t)^{-\frac{3}{2}} + \frac{18\alpha}{5} \left(\frac{2}{3H_0} \right)^{-4} a(t)^{-4} - \frac{8\alpha}{5} \left(\frac{2}{3H_0} \right)^{-4} a(t)^{-\frac{9}{2}} \right]. \quad (5.50)$$

Il est important que par rapport au cas standard, l'effet de la déformation de la gravité devient dominant aux échelles de Planck.

Chapitre 6

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons étudié la dynamique cosmologique d'un univers ellipsoïdal dans le cadre de la théorie de la $f(R)$ -gravité, dont le but principal est de déterminer l'évolution de l'excentricité de cet univers ellipsoïdal en fonction du temps cosmique et aussi de quantifier les corrections apportées par la modification de la gravité.

En utilisant les équations de mouvement d'Einstein pour une modification arbitraire de la gravité encodée dans la fonction du scalaire de Ricci $f(R)$, nous avons déterminé les équations de Fridmann modifiées, et par la suite nous avons obtenu l'évolution du paramètre d'excentricité en fonction du temps cosmique pour un univers ellipsoïdal dominé par un champ magnétique uniforme. Ensuite pour être plus spécifique nous avons considéré une modification quadratique de la gravité donnée par $f(R) = R + \alpha R^2$, où α est un paramètre très petit. Nous avons ainsi pu obtenir explicitement le paramètre d'excentricité. Il est important de noter que nos résultats coïncident avec ceux de la relativité générale d'Einstein dans le cas $f(R) = R$.

En utilisant les résultats obtenus dans ce mémoire il serait très important de montrer si un univers ellipsoïdal dans le cadre de la gravité modifiée résout l'anomalie quadripolaire du rayonnement du fond cosmique fossile, comme c'est le cas avec le modèle d'un univers ellipsoïdal dans le cadre de la relativité générale.

Bibliographie

- [1] E. J. Copeland, M. Sami, and S. Tsujikawa, *Int.J. Mod. Phys. D* **15**, 1753 (2006) [arxiv :hep-th/0603057v3].
- [2] Valerio Faraoni, *Phys. Rev. D* **62** : 023504, (2000) [arxiv :gr-qc/0002091v2].
- [3] C. H. Brans. arxiv :gr-qc/0506063v1 (2005).
- [4] S. FAY, Thèse de Doctorat « *Cosmologies spatialement homogènes en théories tenseur-scalaires* », Université Paris 7-Denis Diderot (2005).
- [5] Valerio Faraoni and Thomas P. Sotiriou [arXiv :gr-qc/0805.1726v2].
- [6] S. Lee, *Mod. Phys. Lett. A* **23**, 1388 (2008) [arXiv :gr-qc/0801.4606v1].
- [7] Thomas. P. Sotiriou[arXiv :gr-qc/0611158v1] .
- [8] Thomas P. Sotiriou [arXiv :gr-qc/0904.2774v1] .
- [9] Stevano Liberati and John Miller [arXiv :gr-qc/0710.4438v1] .
- [10] K. Kainulainen, J. Piilonen, V. Reijonen and D. Sunhede [arXiv:gr-qc/0704.2729v2].
- [11] F. Bernardeau, *Cosmologie : Des fondements théoriques aux observations*, EDP Sciences, CNRS Editions (2007).
- [12] Sang Pyo Kim and Xian-Hui Ge, *JCAP* **0707**, 001 (2007) [arXiv :hep-th/0703117v3].
- [13] A. de la Cruz-Dombriz, PhD. thesis, Complutense University of Madrid. [arXiv :gr-qc/1004.5052v3] (2010).
- [14] Chao-Jun Feng, *Phys. Lett. B* **676**, 168 (2009), [arXiv :hep-th/0812.2067v1].
- [15] G. Cognola, E. Elizalde, S. Nojiri, S. D. Odintsov, L. Sebastiani, and S. Zerbini, *Phys. Rev. D* **77**, 046009 (2008) [arXiv :hep-th/0712.4017v2] .
- [16] Thomas P. Sotiriou, *J. Phys. Conf. Ser.* **189**, 012039 (2009) [arXiv :gr-qc/0810.5594v1].
- [17] Shinichi Nojiri, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **4**, 115 (2007) [arXiv :hep-th/0601213v5].
- [18] S. Lee [arXiv :0710.2395v3] (2008).
- [19] K. Henttunen, T. Multamaki, and I. Vilja [arXiv :0705.2683v2].
- [20] A. A. Starobinsky, *JETP. Lett.* **86**, 157 (2007) [arXiv :astro-ph/0706.2041v2].
- [21] S. Fay, S. Nesseris and L. Perivolaropoulos [arXiv :gr-qc/0703006v3] .
- [22] S. Capozziello, V. F. Cardone and A. Troisi, *JCAP* **0608**, 001 (2006) [arXiv:astro-ph/0602349v3].

- [23] L. Blanchet, arXiv :0902.1712v1[astro-ph.CO] (2009).
- [24] V. Faraoni, arXiv :0810.2602v1 [gr-qc] (2008).
- [25] J. A. Freiman, M. S. Turner and D. Hutnerer, Ann. REv. Astron. Astroph 46, 385 (2008) [arXiv:astro-ph/0803.0982v1]
- [26] R. Durrer and R. Maaartens, Gen. Rel. Grav. **40**, 301 (2008) [arXiv:astro-ph/0711.0077v2].
- [27] S. Tsujikawa, Phys. Rev. D **77** : 043007 (2008) [arXiv :astro-ph/0712.0082v2].
- [28] A. V. Frolov, Phys. Rev. Lett. **101**, 061103 (2008) [arXiv :astro-ph/0803.2500v2].
- [29] Reza Saffari, Sohrab Rahvar [arXiv :astro-ph/0710.5635v1] (2007).
- [30] L. Campanelli, P. Cea, and L. Tedesco, Phys. Rev. D **76**, 063007 (2007).
- [31] L. Campanelli, P. Cea, and L. Tedesco, Phys. Rev. Lett. **97** : 131302, 2006; Erratum-ibid. 97 : 209903 (2006) [arXiv : astro-ph/0606266v2].

