

*République Algérienne Démocratique et Populaire*  
*Ministère de l'enseignement supérieur et la recherche scientifique*  
Université Mohamed Seddik Ben Yahia - Jijel



*Faculté de sciences et de la technologie*

*Département de l'électrotechnique*

*Présenté en vue de l'obtention du diplôme*

**Master en Électrotechnique**

*Option: Électrotechnique Industrielle*

**Thème**

***Modélisation et analyse des  
interconnexions dans les systèmes  
électriques par schémas électriques  
équivalents (PEEC)***

**Encadré par:**

**Mr : Mahieddine Kechicheb**

**Réalisé par:**

**Bouanani Amine  
Soltani tariq**

*Année universitaire 2018 /2019*

## *Remerciements*

*Tout d'abord, nous voulons remercier Dieu, le Tout-Puissant, qui nous donne la force, la volonté et la patience de faire ce travail.*

*Deuxièmement, nous voudrions remercier notre enseignant, Mr. Mahieddine Kechicheb de l'Université de Tijel, pour son dévouement, ses conseils et son soutien moral tout au long du développement de ce travail.*

*Nous remercions les membres du jury pour l'intérêt qu'ils portent à nos recherches en acceptant d'étudier notre travail et de s'enrichir de leurs suggestions.*

*Je remercie également tous les enseignants du département de génie électrique, en particulier la responsable du département, Mme Hafsawi*

*Enfin, nous voudrions également remercier toutes les personnes impliquées dans ce travail, de près ou de loin.*

## *Dédicace*

*Je dédie ce modeste effort à mes parents, et je souhaite de mon Dieu de eux protège et il les introduit au paradis.*

*Et je le dédie aussi à toutes ces personnes qui me sont très chères :*

*Mes frères*

*Mes amis*

*Et toute la famille : Bouanani.*

## *Dédicace*

*Je dédie ce modeste effort à mes parents, et je souhaite de mon Dieu de eux protège et il les introduit au paradis.*

*Et je le dédie aussi à toutes ces personnes qui me sont très chères :*

*Mes frères*

*Ma sœur*

*Mon Oncle Salah*

*Mes amis*

*Et toute la famille : Soltani.*

# **Sommaire**

Introduction générale .....	1
-----------------------------	---

## **Chapitre I : Généralité sur les jeux de barres**

I-1. Introduction.....	3
I-2. Définition.....	4
I-3. Utilisations .....	5
I-4. Dimensionnement.....	5
4.1 Estimation de la section .....	6
4.2 Vérification de la contrainte thermique maximal.....	7
4.3 Vérification de la contrainte électrodynamique .....	7
I-5. Conception.....	9
5.1 Dispositions de jeux barres BT .....	10
5.1.1 Barres sur chant .....	11
5.1.2 Barres à plat .....	11
5.2 Supports, isolateurs et fixation.....	11
I-6. Les principaux problèmes des jeux de barres .....	12
I-7. Méthodes d'analyse des jeux de barres .....	13
7.1 Méthodes analytiques.....	13
7.2 Méthodes numériques .....	15
I-8. Choix de la méthode PEEC.....	16
I-9. Conclusion.....	17

## **Chapitre II : La Méthode des Circuits Equivalents aux Eléments Partiels PEEC – Partial Elements Equivalents Circuits**

II-1. Introduction.....	18
II-2. Notion d'élément global ou partiel .....	18
II-3. Dérivation théorique de la méthode PEEC .....	19
3.1 Equation intégrale de base .....	19
3.2 Discrétisation et pondération .....	20
3.3 Interprétations en termes de circuits équivalents.....	22

3.3.1	Premier terme.....	22
3.3.2	Deuxième terme .....	23
3.3.3	Troisième terme.....	24
3.4	Synthèse des termes et circuit équivalent .....	24
II-4.	Calculs des éléments partiels RL.....	26
4.1	Résistances partielles .....	26
4.2	Inductances partielles .....	26
4.3	Potentiels aux extrémités .....	28
II-5.	Formulation matricielle du modèle PEEC .....	28
5.1	Modèle PEEC générique.....	29
5.2	Modèle PEEC final.....	30
5.3	Exemple illustratif.....	30
II-6.	Conclusion.....	33

### **Chapitre III : Mise en œuvre de la méthode PEEC : Application sur l'élément d'interconnexion « Jeu de barres »**

III-1.	Introduction.....	34
III-2.	Jeu de barre monophasé.....	34
2.1	Maillage .....	35
2.2	Distributions des courants .....	37
2.3	Profils de l'induction magnétique.....	39
III-3.	Jeu de barres triphasé .....	41
3.1	Configuration en nappe.....	42
3.2	Configuration en « T ». .....	43
3.3	Configuration en « O » .....	44
3.4	Comparaisons et discussions .....	45
3.4.1	Symétrie.....	45
3.4.2	Pertes (échauffements).....	45
3.4.3	Espace occupé.....	45
3.4.4	Emission d'induction.....	46
III-4.	Conclusion.....	46
	Conclusion générale .....	47

# **INTRODUCTION GENERALE**



Le rôle des interconnexions électriques est de transmettre l'énergie ou le signal entre les composants discrets d'une structure. Les principaux types d'interconnexions que l'on rencontre dans les systèmes électriques s'échelonnent de la simple connectique dans les boîtiers et modules de puissance en passant par les jeux de barres jusqu'aux câbles et lignes de transport. En vue de leurs analyses, les interconnexions souples : lignes et câbles, ont été suffisamment étudiées par des méthodes évoluées, alors que les interconnexions rigides : jeux de barres, ont très peu d'études et ceci est probablement due à l'apparente simplicité de leurs problèmes.

Pourtant les jeux de barres, éléments vertébraux de toute interconnexion, sont avant tout des conducteurs électriques sujets à tous les phénomènes liés à la conduction de courants et qui représentent des sources de pertes joules, d'émission électromagnétique, de vibrations, etc.

Les pertes joules entraînent des échauffements pouvant atteindre des valeurs critiques pour certains éléments. De plus, ces pertes cumulées sur la durée de vie d'un jeu de barres constituent un coût de fonctionnement important. Ajouté à ceci le respect des normes, sur les émissions électromagnétiques (EM) qui sont de plus en plus strictes, ne permet plus l'émission de n'importe quelle valeur d'induction. Ces normes exigent des seuils à ne pas franchir. L'échauffement et l'émission électromagnétique ne sont pas les seuls problèmes à devoir prendre en considération, en effets, lors de défauts, des courants beaucoup plus élevés circulent dans les barres et provoquent des contraintes électrodynamiques entre barres pouvant entraîner la destruction de toute leur structure.

Ces contraintes (EM, thermique et électrodynamique), principalement associées à la conduction des courants, sont les raisons qui incitent à faire des réflexions et à prendre des précautions lors de dimensionnement des jeux de barres.

L'ensemble de ces contraintes est principalement lié à la répartition des courants dans les barres. Par conséquent, afin de dimensionner judicieusement ces interconnexions, la connaissance la répartition des courants dans les barres est indispensable.

L'objectif principal de ce travail de master est de proposer une méthode d'utilisation souple et qui permet une détermination fiable et rapide de la distribution des courants et tensions dans un système de jeux de barres d'interconnexion. Et ainsi permet l'analyse fiable et rapide de l'ensemble des contraintes précédemment citées.

Une approche, qui semble directe et efficace, est de chercher une méthode de représentation de l'interconnexion en circuits électriques équivalents. Ainsi disposer d'un circuit électrique composé de caractéristiques propres et mutuelles de l'interconnexion qui, à leurs tours, interviennent dans l'évaluation des courants, tensions, pertes, inductions, forces et autres grandeurs de dimensionnement.

Choisir une bonne méthode pour obtenir cette représentation et ensuite l'utiliser pour l'analyse est le but final de ce travail qui regroupe trois chapitres intercalés entre une introduction et une conclusion.

Un premier chapitre présentant des généralités, un bref état d'art sur les jeux de barres, leurs méthodes d'analyse et la méthode sélectionnée.

Un deuxième chapitre, dédié aux détails de la méthode choisie pour avoir la représentation en circuits équivalents, en l'occurrence, la méthode PEEC, pour (Partiel Element Equivalent Circuit), ou (Circuits Equivalents aux Eléments Partiels).

Un dernier chapitre, consacré à la mise en œuvre de l'approche choisie sur des configurations d'interconnexion à jeux de barres rigides, de sections rectangulaires : typiquement de distribution basse tension.



**Chapitre I**

**Généralité sur les jeux de barres**

## I-1. Introduction

Interconnecter des systèmes électriques veut dire « connecter ces systèmes entre eux ». Une telle interconnexion permet des échanges (d'énergie ou d'information) entre les systèmes ce qui permet d'augmenter leur sûretés. Pour les systèmes électriques de puissance, les échanges de puissance sont bénéfiques à triple titre :

- Permet une assistance mutuelle entre système : lorsqu'un système doit faire face à une indisponibilité fortuite, ou à un appel de demande extrême, les interconnexions permettent une réponse collective en mutualisant les ressources et les réserves, ce qui permet d'assurer la sûreté des systèmes interconnectés.
- Permet de minimiser les coûts de production : par optimisation des échanges en mobilisant les ressources disponibles les plus compétitives.
- Permet d'optimiser l'utilisation des moyens : diminuer les besoins en moyens nécessaires à la sécurité de l'alimentation.

L'interconnexion prend de la grandeur (éléments technologiques, cout et complexité), suivant le niveau des systèmes électriques interconnectés.

Pour les centrales de production et les réseaux de transport à HT et THT, l'interconnexion, matérialisée par des postes d'interconnexion, peut s'avérer problématique car elle repose sur des équilibres et des régulations complexes que les exploitants doivent sans cesse tenter d'améliorer, afin d'éviter l'écroulement complet du système. Pour les réseaux de distribution, les installations et les circuits BT, l'interconnexion, matérialisée aussi par des postes et des armoires de distribution, est beaucoup moins complexe.

Quelque que soit l'échelle de l'interconnexion, l'élément essentiel par lequel toutes les puissances transitent est le « **Jeu de barre** ». Electriquement et idéalement c'est le nœud où les systèmes se connectent entre eux par des branches. Ou en d'autre terme, le jeu de barre est le « *collecteur-répartiteur* » de puissance entre les branches d'arrivées et les branches de départs.

Physiquement, un jeu de barre est un ensemble de barres de formes bien déterminées, conductrices et de propriétés physico-géométrique finies. La puissance transitée, le niveau de tension et les courants mis en jeu combinés aux propriétés physique finies et les contraintes d'environnement, font des jeux de barres des éléments *vitaux et*

*névralgiques* dans les installations électriques. Car un jeu de barre défaillant entraîne sûrement la perte d'alimentation de tous ses départs.

Donc, un jeu de barre est l'élément central d'une interconnexion, son étude et son dimensionnement doivent se faire avec un grand soin afin d'éviter toute défaillance, provenant d'exploitation ou de l'environnement, conduisant sûrement à la perte d'alimentation.

L'étude d'un jeu de barre, doit se faire avant la phase de sa conception, en recourant aux *techniques de modélisation*, mais aussi, elle peut se faire même après mise en service, lorsque la puissance transitée ou le nombre de départs dépassent les valeurs prévues dans la phase de conception.

## I-2. Définition

Le jeu de barres constitue véritablement la colonne vertébrale de tout ensemble de distribution électrique. Il assure l'alimentation et la répartition de l'énergie.

Matériellement, il désigne un ou un groupe de conducteurs, en cuivre ou en aluminium qui conduisent de l'électricité dans un poste, dans un tableau ou à l'intérieur d'un appareillage électrique. Le terme officiel est *barre omnibus*, mais ce terme n'est pas assez employé [WIK-19]. Selon la définition donnée par la Commission électrotechnique internationale, il s'agit d'« un conducteur de *faible impédance* auquel peuvent être reliés plusieurs circuits électriques en des points séparés » [Net1].

Le jeu de barres est donc destiné à assurer la collecte et la répartition de l'énergie électrique entre éléments d'une installation. En d'autres termes, il s'agit d'un type de jonction électrique dans lequel tout le courant électrique entrant et sortant se rencontre avant répartition [Net2].

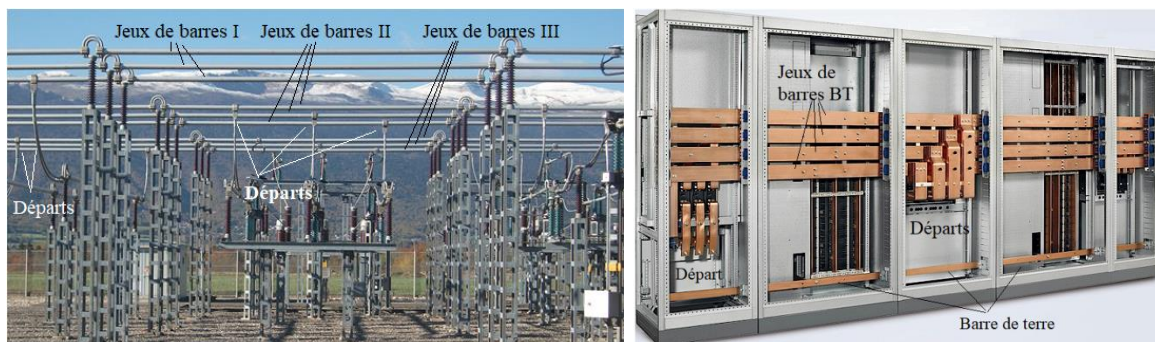


Figure 1 : exemple de jeux de barres. A gauche, jeu de barre HT et à droite jeux de barre BT.

Le jeu de barres électrique est disponible en formes rectangulaires, transversales, rondes et autres. Les barres rondes et creuses sont utilisées en hautes tensions HT, tandis que les barres rectangulaires sont principalement utilisées dans le système à basse tension BT [Net1].

### I-3. Utilisations

En concurrence avec les câbles isolés, on utilise le jeu de barres dans toutes les applications d'interconnexion, comme, liaison entre les transformateurs et les tableaux généraux basse tension TGBT, comme supports de répartition dans les TGBT et les canalisations de distribution BT. Mais son intérêt principal est avant tout économique car, à puissance transportée égale, le jeu de barre est sensiblement mieux et moins cher qu'un câble isolé. Cet avantage est essentiellement dû aux meilleures conditions de refroidissement.

En effet, pour un jeu de barre, les températures étant fonction des seules conditions d'environnement, alors que pour les câbles isolés les températures sont limitées par les tenues de leurs isolants qui constituent un obstacle au transfert de leur chaleur interne vers l'extérieur [Net2]

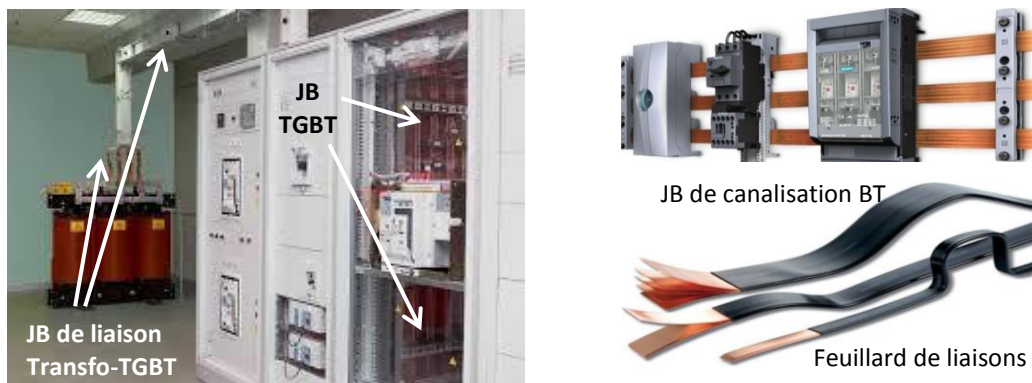


Figure 2 : exemples d'utilisation des jeux de barre de distribution BT

### I-4. Dimensionnement

Le dimensionnement des jeux de barres consiste à la détermination de la section convenable des barres en fonction des courants qui y circulent. Ce dimensionnement doit tenir compte les contraintes d'installation par vérifications des tenues thermiques et des efforts électrodynamiques.

Les contraintes d'emploi des jeux de barres, tant en service normal qu'en cas de défauts, peuvent se regrouper en deux catégories :

- La contrainte thermique : matérialisée par l'équilibre thermique avec l'environnement immédiat, et traduite par un courant, un temps et une température admissibles.
- La contrainte mécanique : traduisant les efforts électrodynamiques susceptibles d'y apparaître en cas de défaut. Elle est matérialisée par un courant de court-circuit et une distribution de forces.

Ces contraintes sont-elles mêmes soumises à l'influence de nombreux facteurs que les calculs doivent prendre en compte :

- L'intensité permanente à véhiculer dans le jeu de barres.
- Le courant maximal de court-circuit, la température ambiante
- Le degré de protection de l'enveloppe, la position des barres... etc.

#### 4.1 Estimation de la section

La section nécessaire des barres se détermine en fonction du courant d'utilisation nominale, de l'indice de protection de l'enveloppe et après vérification de la contrainte thermique maximale lors d'un court-circuit. Les appellations des courants sont données par la norme EN 60947-1 pour les conditions d'utilisation et un échauffement n'excédant pas 65 °C.

Le courant d'utilisation est le courant nominal calculé par :

$$I_n = \frac{S_n}{\sqrt{3} \times U_n} \quad (\text{I-1})$$

$S_n$  : la puissance apparente totale passant par la barre en (VA)

$U_n$  : tension nominale de la barre en (V).

Le courant admissible est celui pour lequel l'équilibre thermique est réalisé entre la chaleur dégagée par effet Joule dans la barre et l'air ambiant, pour une température acceptée de la barre. Ce courant peut être estimé en pondérant le courant nominal pour tenir compte les conditions d'installation des barres :

$$I_z \approx k \times I_n; \quad k = 1.2 \div 1.4 \quad (\text{I-2})$$

Connaissant ce courant admissible, on peut choisir les sections des barres directement à partir des tableaux normalisés.

Une façon de calculer ou de vérifier la section choisie est d'utiliser les équations de Melsom et Booth [TI].

$$I_z = \left( 24.9 \cdot S^{0.5} \cdot p^{0.39} \cdot \frac{T^{0.91}}{\sqrt{1 + \alpha \cdot \rho \cdot (T + 25)}} \right) \cdot \sqrt{\frac{R_c}{R_a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{0.015 \cdot (T + 25)}{10}}} \quad (\text{I-3})$$

$S$  : la section de la barre en  $\text{cm}^2$  ;  $p$  le périmètre en (cm) ;  $T$  : en (°C) l'échauffement au-dessus de la température ambiante de 45°C ;  $\rho$  : en ( $\mu\Omega/\text{cm}$ ) résistivité du métal à 20°C ;  $\alpha$  : coefficient de température en ( $^{\circ}\text{C}^{-1}$ ) ;  $R_c$  et  $R_a$  respectivement les résistances en continu et en alternatif.

Les conditions et les limites de cette formule sont détaillées dans [TI].

- Après choix d'un courant et d'un échauffement admissibles, la section de la barre peut être calculée.
- Après choix d'une section et d'un échauffement admissible ; le courant admissible peut être vérifié.

- Après choix d'une section et d'un courant admissible ; l'échauffement admissible peut être calculé.

#### 4.2 Vérification de la contrainte thermique maximal

Toute variation du courant des barres engendre une variation de leur température, la température finale ne doit pas dépasser la température maximale de leur matériau. Lors de court-circuit, les courants et leurs durées sont décisifs. La contrainte thermique maximale permet de regrouper dans une même expression le courant de court-circuit, sa durée maximale et la température maximale [GP-07].

$$I^2 \cdot t \leq K^2 \times S^2 \quad (I-4)$$

$K$  : en  $(A \cdot s^{1/2} / mm^2)$  coefficient thermique incluant la température admissible (maximale), la température ambiante et les propriétés physiques de la barre. Ses valeurs usuelles sont données dans ce tableau 1.

$S$  : section de la barre en  $mm^2$ ,  $t$  en (s) et  $I$  en (A)

Tableau 1 : Valeurs usuelles du coefficient thermique  $K$  [GP-07]

K=115	Barres souples, température maxi 160°C
K=135	Barres rigides de fortes sections $L > 50mm$ , $T_{maxi} 200^\circ C$
K=143	Barres rigides de petite section ( $L < 50 mm$ ) ; $T_{maxi} 220^\circ C$

#### 4.3 Vérification de la contrainte électrodynamique

Les efforts électrodynamiques qui s'exercent entre des conducteurs, plus particulièrement dans les jeux de barres, résultent de l'interaction des champs magnétiques produits par le passage du courant

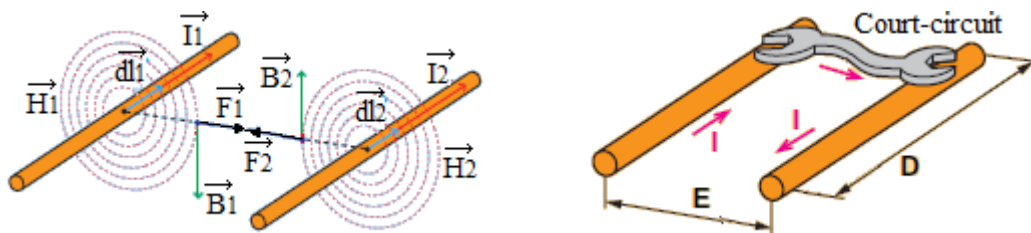


Figure 3 : Force magnétique et l'induction entre deux fils parallèles

Le calcul des efforts, résulte de l'application de la loi de Laplace qui précise que, lorsqu'un conducteur parcouru par un courant  $I_1$  est placé dans un champ magnétique d'induction  $\vec{B}_2$ , chaque élément unitaire  $\vec{dl}_1$  de ce conducteur est soumis à une force égale à :

$$d\vec{F}_1 = I_1 \vec{dl}_1 \times \vec{B}_2 \quad (I-5)$$



L'induction magnétique  $B$  qui a pour origine un autre courant  $I_2$  dans un autre conducteur, est calculée par la loi de Biot et Savart :

$$d\vec{B}_2 = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{I_2 \cdot d\vec{l}_2}{E} \cdot \vec{u}_e \quad (\text{I-6})$$

Pour deux jeux de barres ronds parc, de perméabilité  $\mu_0$ , de longueurs (distance entre supports)  $D$ , parcourus par un même courant  $I$ , et d'espacement  $E$ , les calculs des forces donnent :

$$F = 2 \cdot I_2 \cdot \frac{D}{E} \times 10^{-7} \text{ [N]} \quad (\text{I-7})$$

Pour prendre en compte les effets d'extrémités, on introduit des corrections [GP-07].

$$F = \begin{cases} 2 \cdot I_2 \cdot \left(\frac{D}{E} - 1\right) \times 10^{-7}; & \text{si } 4 \leq \frac{D}{E} < 20 \\ 2 \cdot I_2 \cdot \left(\sqrt{\left(\frac{D}{E}\right)^2 + 1} - 1\right) \times 10^{-7}; & \text{si } \frac{D}{E} < 4 \end{cases} \quad (\text{I-8})$$

À ces formules, Il faut introduire des facteurs de correction prenant en compte la disposition et la forme des conducteurs lorsqu'ils ne sont pas ronds [GP-07].

Ces efforts sont proportionnels au carré de l'intensité de courant. Lors de court-circuit, les courants présumés et leurs valeurs crêtes notées  $I_k$  sont énormes, les efforts résultants peuvent devenir considérables ou même violents (des centaines de daN) provoquant la déformation des barres et/ou la rupture des supports.

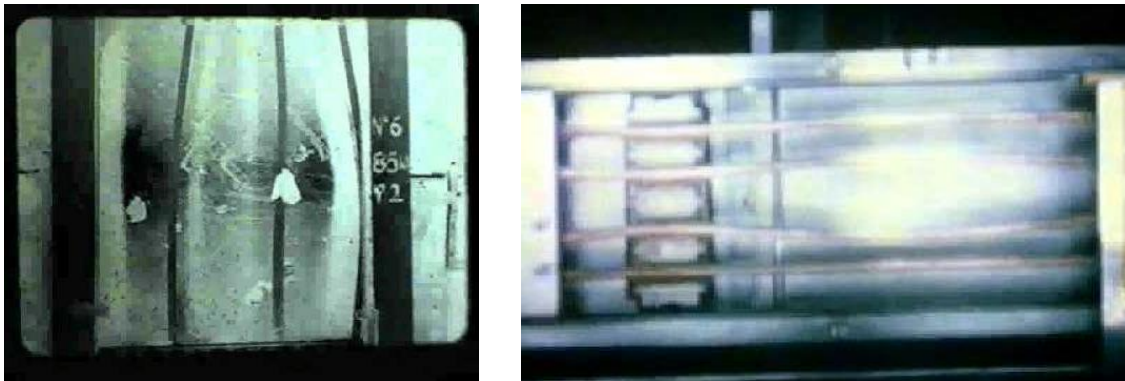


Figure 4 : Images de jeux de barres sous test de court-circuit où la déformation par forces électrodynamiques est nettement visible [Net4]

La distance entre supports de barres est déterminée en fonction de la contrainte électrodynamique générée par le court-circuit. Cette même contrainte est déterminée par la valeur crête du courant de court-circuit noté. En cas de méconnaissance de cette valeur, prendre une valeur au moins égale à  $20 \times I_n$ .

Du point de vue résistance mécanique des barres aux sollicitations statiques, on admet que les barres travaillent à la flexion entre deux supports consécutifs. Suivant le mode de fixation des barres, le moment de flexion résultant est [COP-56].

$$M = \frac{F \cdot L^2}{k} \quad (\text{I-9})$$

- F : est la force résultante des calculs des efforts électrodynamiques
- L : est l'entraxe des supports (distance entre deux supports)
- k : coefficient du mode de fixation (k=8 pour barres en appui simple ; à k=12 pour des barres encastrées)

C'est la relation qui permet l'évaluation de la distance entre supports.

## I-5. Conception

Il existe différents types de profilés de jeux de barres : en I, en U, en O, en L et en d'autres formes.

Des profilés en U, L ou O, souvent aériennes en tube d'aluminium, sont particulièrement réservés aux applications de haute tension HT/THT. Ils présentent des problèmes, tant d'ordre mécanique qu'électrique (grandes longueurs, dénivelées, pentes, chutes de tension, ...etc.). Ces profilés ne seront pas traités dans ce travail.



Figure 5 : Image d'un jeu de barre HT aérien de profilé O et en configuration U

Des profilés en U ou en L sont aussi utilisés comme jeux de barres pour fortes intensités (plusieurs kA), en moyenne tension MT (6 à 20 kV), sur des distances importantes (de 10 à 15 m), par exemple pour les liaisons alternateur-transformateur des centrales; ils sont parfois gainés, réalisant des ensembles préfabriqués [TI].

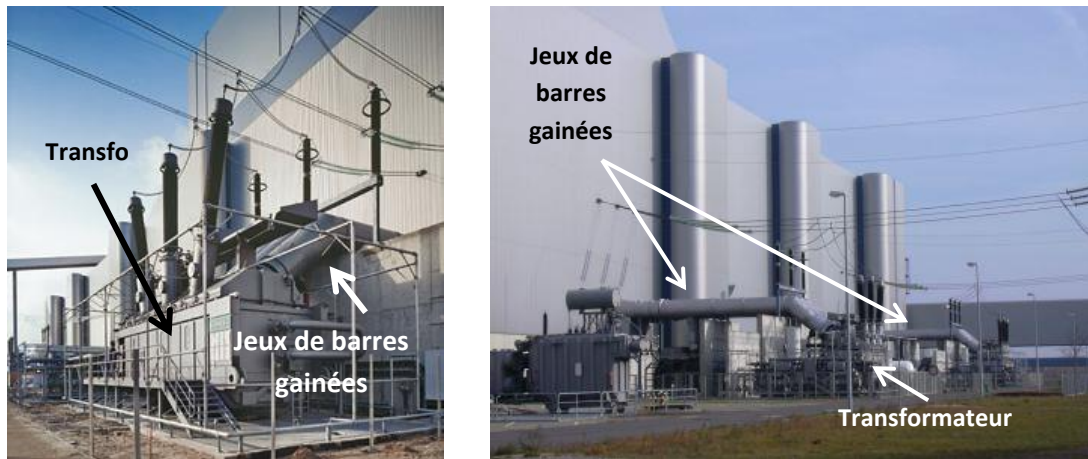


Figure 6 : Images de jeux de barres MT préfabriqués faisant la liaison entre alternateurs et transformateurs

En basse tension BT, domaine qui nous intéresse dans ce travail, les plus fréquemment utilisés, sont les barres méplates, laminées ou extrudées, de dimensions qui vont de 50 à 280 mm pour leur épaisseur et de 120 à 800 mm pour leur hauteur. Ils peuvent être associées jusqu'à 6 ou 7 par phase. Leur avantage tient au fait que leur façonnage, (par pliage à plat), ou que leur raccordement (par recouvrement) ne nécessite pas le recours à des accessoires spéciaux, ni à une main d'œuvre particulièrement spécialisée [TI].



Figure 7 : images de quelques configurations de jeux de barres BT (TGBT) de profilés I

### 5.1 Dispositions de jeux barres BT

En basse tension on utilise des barres rectangulaires façonnées minutieusement et disposées de telle manière d'avoir un meilleur refroidissement. L'appareillage est soit connecté directement sur les barres, soit raccordé au moyen de liaisons électriques (câbles, fils, feuillards). Pour ce faire, les barres sont munies de points de connexion (trous, bornes, etc.).

Les deux dispositions les plus courantes sont la disposition sur chant et la disposition à plat. Quel que soit la disposition, il est conseillé de placer la barre du neutre au côté plus accessible (en avant), cela peut :

- représenter une sécurité supplémentaire
- faciliter les raccordements des circuits monophasés
- faciliter l'identification des modes de liaisons à la terre

### 5.1.1 Barres sur chant

Cette position des barres est très utilisée car elle favorise le refroidissement par convection

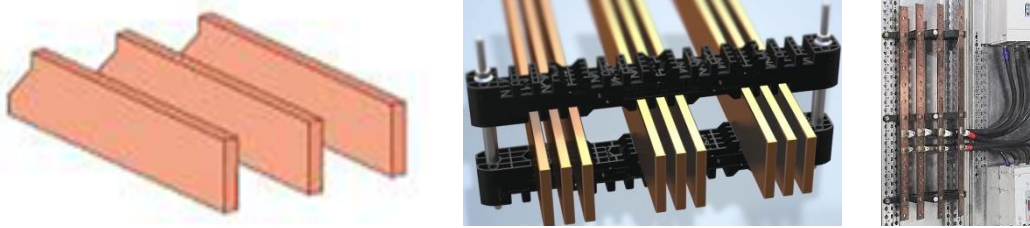


Figure 8 : exemples de jeux de barres sur chant [TI]

### 5.1.2 Barres à plat

Dans le cas de barres à plat, l'échauffement est légèrement supérieur à ce des barres sur chant. On utilise le dimensionnement définis pour des barres de chant en appliquant un coefficient de déclassement de 0.8, pour tenir compte l'écart en échauffement.



Figure 9 : Exemples de jeux de barres à plat [TI]

## 5.2 Supports, isolateurs et fixation

Les supports sont les ensembles de pièces qui permettent d'assurer le maintien des barres avec l'écartement voulu. Ils doivent être en matériau amagnétique (aluminium) afin d'éviter un échauffement dû à la création de courants de Foucault.

Les isolateurs, soient fixés par vis sur les supports soient rendus solidairement par serrage faisant partie des supports, sont en générale en matériaux synthétiques et parfois en porcelaine.



Figure 10 : Exemple de supports universels à entre-phases réglable. A gauche supports pour barres sur chant et à droite supports pour barres à plat.

Le nombre et l'entraxe et la fixation des supports sont définis en fonction des contraintes :

- Électriques (courant de court-circuit présumé)

- Thermiques (Dilatation thermique)
- Mécaniques (Forces, poids et position des barres).

## I-6. Les principaux problèmes des jeux de barres

Les jeux de barres utilisés dans la distribution BT ont généralement des sections rectangulaires et sont parcourus par des courants variables de valeurs crêtes plus ou moins élevées. Ces jeux de barres sont alors sources de pertes joule variables. Celles-ci :

- Peuvent entraîner l'élévation des températures des barres pouvant devenir critiques pour les dispositifs qui y sont raccordées
- Les barres soumises à des variations de températures, sont sujettes aux dilatations et contractions (variation de longueurs). Ce qui présente un risque d'endommagement, soit pour les barres elles-mêmes, soit pour leurs supports ou soit encore pour les bornes d'appareils auxquels elles sont raccordées.
- A long terme, ces pertes cumulées peuvent représenter un coût de fonctionnement important.
- Ces effets influencent, à long terme, la durée de vie des dispositifs.

La contrainte thermique résultant des pertes joule, n'est pas la seule à devoir être prise en réflexion. Des normes très strictes, concernant l'induction magnétique émise, sont d'ores et déjà en application.

- Ces normes exigent des seuils d'induction à ne pas affranchir, et ne permettent plus de construire des circuits avec n'importe quels trajets pour les courants.

Et en fin, les mêmes constatations peuvent être faites lors de passage des courants de défauts supérieurs au courant nominal.

- Les efforts électrodynamiques développés provoquent des vibrations, et avec les conditions de résonance, ces efforts s'amplifient et peuvent être dangereux pour les supports et les isolateurs.
- Lors de court-circuit, les courants sont très supérieurs aux courants nominaux. Les efforts électrodynamiques résultants ajoutés aux effets de dilatation peuvent causer la destruction de la structure par forces ou par chocs.

Malgré tout, toutes ces contraintes sont indésirables. Pour soulager les structures de jeux de barres en limitant, sinon, en réduisant les effets de ces contraintes, des précautions doivent être prise lors des montages.

- Utiliser des joints de dilatation thermiques, des amortisseurs, des supports et des barres en matériaux souples
- Pour l'assemblage, utiliser des joints par contacts boulonnés, serrés ou rivés.

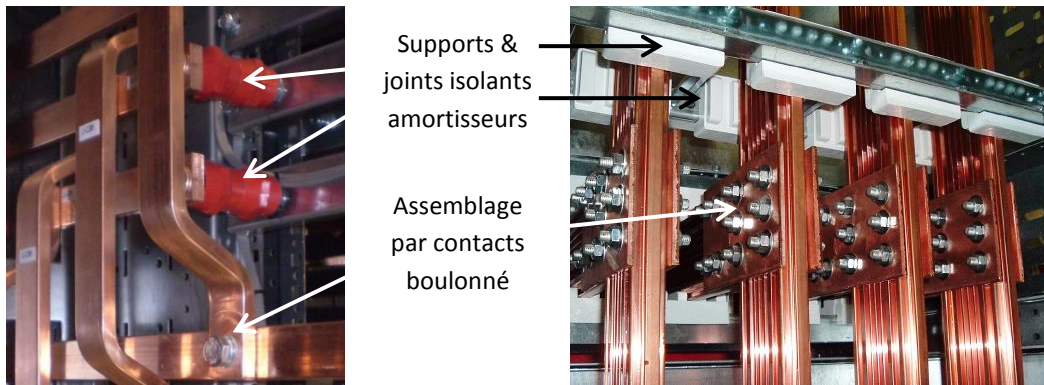


Figure 11 : dispositions pour renforcer la tenue des barres aux différents efforts

La solution générique de l'ensemble de ces problèmes est principalement liée à la répartition de courant qui intervient dans l'évaluation toute grandeur de dimensionnement (courants, pertes, échauffements, induction et forces). Par conséquent, la connaissance ou la détermination de cette répartition est nécessaire afin de concevoir judicieusement un jeu de barre.

## I-7. Méthodes d'analyse des jeux de barres

Les jeux de barres sont des structures électromagnétiques. Pour but prédire les contraintes citées précédemment, en déterminant la répartition des courants sur leurs sections droites. Leur analyse peut s'effectuer, d'une manière générale, en résolvant les équations de Maxwell soit analytiquement soit numériquement.

Dans les pratiques d'analyse et de conception, il est assez difficile de distinguer nettement les frontières entre les approches analytiques et numériques. En effet, lorsque l'on désire étudier ou concevoir un dispositif, quelle que soit l'approche adoptée, il sera nécessaire de s'appuyer à la fois sur des outils analytiques que sur des outils numériques. C'est seulement la nature, d'outils les plus employés, qui définit la classe de l'approche utilisée.

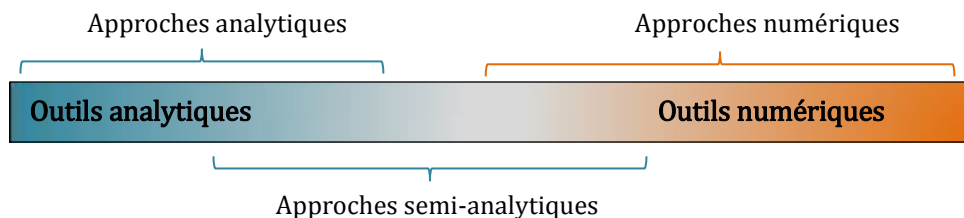


Figure 12 : Schéma montrant les frontières non définies entre approches

### 7.1 Méthodes analytiques

Les méthodes analytiques de type circuits ou lignes de transmission [PAU-87] basées sur la définition des courants et des tensions, ou de type champs basées sur les densités et les potentiels des champs [MG-01], permettent sous certaines hypothèses, de traduire de façon explicite des

phénomènes physiques. Leurs hypothèses souvent trop contraignantes (homogénéité, linéarité, isotropie, uniformité, symétrie, sections circulaires...) peuvent écarter des phénomènes capitaux. Cependant, pour un bon nombre d'applications, elles demeurent un outil de calcul puissant, moins lourd à mettre en œuvre et qui s'intègre facilement dans d'autres codes de calcul.

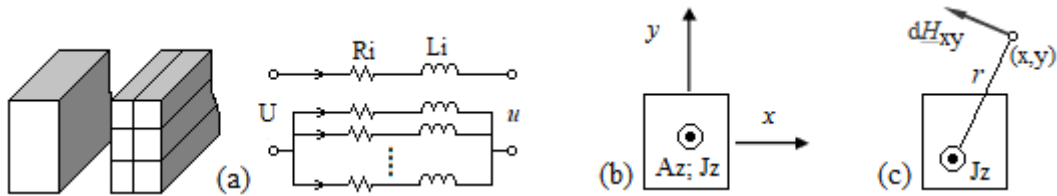


Figure 13 : Référentiels pour méthodes analytiques, a) [PAU-08], b) [MG-01] et c) [KUS-16]

Dans [PAU-87], on utilise la théorie des lignes ou de circuits. À fin de prendre en compte les effets de fréquence, une barre pleine peut être subdivisée en des tubes ou barreaux de petites sections et de courants constants, les constantes  $R_i$ ,  $L_i$  et  $L_{ij}$  sont évalués sous hypothèses de tubes circulaires équivalentes en mode transverse électromagnétique TEM. Connaissances les conditions d'entrées et de sorties, les courants dans les tubes/barreaux s'obtiennent par la résolution de l'équation.

$$\Delta \mathbf{U} = \mathbf{U} - \mathbf{u} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I}; \quad \mathbf{Z} = \mathbf{R} + j\omega \mathbf{L} \quad (\text{I-10})$$

Dans [MG-01], sur la section rectangulaire d'une barre, il obtient une équation en potentiel vecteur magnétique  $A_z$  qu'il tentait à résoudre.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = j\omega\mu\sigma A_z \\ \vec{A}_z = \overline{rot} \vec{B} \\ \vec{J}_z \approx -j\omega\sigma \vec{A}_z \end{cases} \quad (\text{I-11})$$

Avec  $\mu$  : la perméabilité magnétique.  $\sigma$  : la conductivité.  $\omega$  : la pulsation.  $j$  : la densité de courant

Pour évaluer les constantes d'intégration, la solution analytique à cette équation exige de satisfaire ces deux conditions :

- Densité de courant uniforme sur toute la section
- Champ magnétique constant la surface de la barre (la périphérie).

Dans la réalité les jeux de barres rectangulaires ne satisfassent jamais ces deux conditions, par conséquent, l'auteur conclut que l'étude analytique de jeux de barres à base de conducteurs de section rectangulaire est fortement compromise.

Dans [KUS-16] ; on s'intéresse à l'induction à l'extérieur des jeux de barres, l'auteur suppose une courant total uniformément réparti sur la section. Le champ magnétique à l'extérieur est évalué par intégration des contributions filiformes sur toutes les sections. Il est évident que les expressions obtenues pour le champ magnétique ne conviennent pas pour des points intérieurs à la section, et donc l'hypothèse de répartition uniforme ne pourra pas être corrigée.

## 7.2 Méthodes numériques

Les méthodes numériques, basées sur des formulations rigoureuses en différentielles ou en intégrales, permettent d'approcher un système continu à l'aide d'un système discret, ce qui nécessite une discrétisation (maillage) spatiotemporelle du système. Afin d'assurer stabilité de la méthode et convergence de la solution, le maillage doit respecter des conditions spatiotemporelles : *pas du temps très inférieure à une valeur déterminée par le plus petit pas spatial.*

Les méthodes basées sur des formulations différentielles, dont les plus répandues sont les Méthodes aux Différences Fines (MDF) et les Méthodes aux Eléments Finies (MEF), exigent, pour ne pas entraîner d'erreur dans la détermination des grandeurs physiques recherchées, le maillage de tout le système y compris le volume d'air qui l'entoure. Ce qui entraîne un nombre très élevé d'éléments et par conséquent un modèle mathématique de très grande taille, mais de matrices creuses.

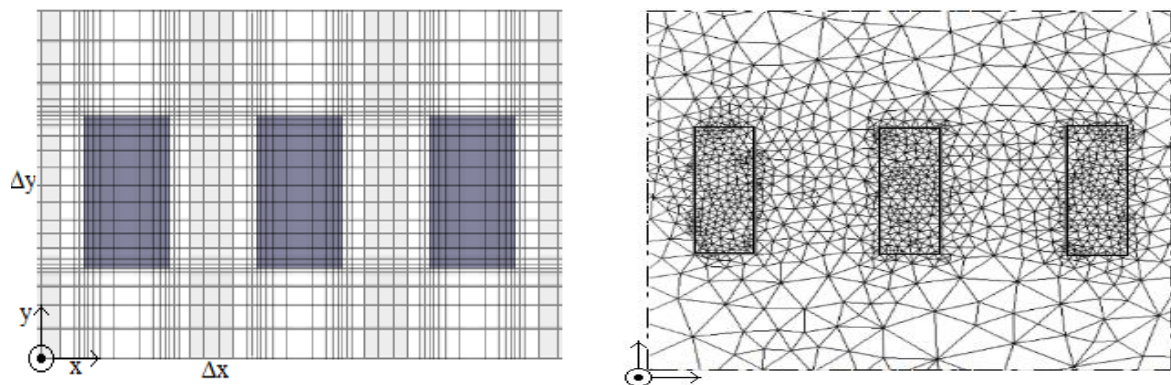


Figure 14 : Exemples de maillages 2D des méthodes différentielles, à gauche maillage MDF et à droite MEF [DIM-03]

Quant aux méthodes basées sur des formulations intégrales (Méthode des moments MoM, méthode des circuits équivalents aux éléments partiels PEEC...) ne nécessitent que le maillage des dispositifs seuls. Ce qui engendre des modèles de tailles beaucoup moins réduites mais de matrices pleines.



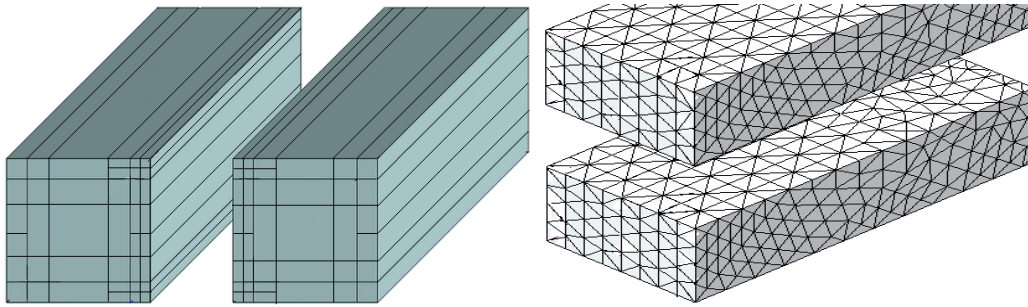


Figure 15 : Exemple de maillage 3D des méthodes intégrales à gauche maillage PEEC et à droite maillage MoM

Quelle que soit la méthode numérique, l'espace de travail, est maillé sous forme d'une grille de mailles de tailles éventuellement flexibles (variables) pour réduire le nombre d'éléments (des inconnues). La condition à respecter lors d'un maillage est que la taille d'un élément suivant une direction ne doit pas être supérieure à la dixième de la longueur d'onde suivant la direction considérée.

La rigueur en formulations et la flexibilité de maillage permettent aux méthodes numériques de modéliser plus finement les dispositifs et ainsi de prédire, avec fiabilité et précision, leurs comportements.

Toutefois, même avec les moyens de calculs récents, ces méthodes nécessitent encore de la compétence, de la vitesse et de l'espace mémoire.

## I-8. Choix de la méthode PEEC

Partons du principe : *pour un problème, il ne s'agit pas d'apporter des solutions rigoureuses quel que soit leurs prix, mais de faire des choix suffisants, pour tenir les normes et garantir le fonctionnement.*

Pour le problème des contraintes associées aux interconnexions par jeux de barres (section §4), le dénominateur commun à une solution semble être de disposer d'une représentation électrique des barres. En effet, leurs caractéristiques électriques propres et leurs couplages interviennent dans l'évaluation des courants, tensions, pertes et autres grandeurs de dimensionnement. Tout l'art est donc de trouver la meilleure méthode qui permet d'obtenir une telle représentation et ensuite de l'utiliser.

Les méthodes analytiques, peuvent générer des représentations en circuits électrique, mais vue leurs hypothèses trop simplificatrices, semblent fortement compromises. Les méthodes numériques différentielles, en plus d'être couteuses, ne permettent pas des représentations électriques physiquement exploitables. Par conséquent toutes ces méthodes semblent inintéressantes pour notre problème.

Les méthodes intégrales qui reposent sur une formulation en champ électrique, sous certaines hypothèses vérifiables, peuvent interpréter leur formulation en termes d'équations de circuit électrique.

Nous choisissons pour le problème de jeux de barres, la méthode PEEC « Circuits Equivalents aux Eléments Partiels », car :

- elle débouche naturellement sur une interprétation en circuits électrique.
- de formulation et mise en œuvre moins lourdes, utilisant beaucoup d'évaluations analytiques.
- d'utilisation rapide et souple (comparée aux autres approches numériques).

## I-9. Conclusion

Alors que théoriquement toutes les méthodes citées auparavant peuvent traiter le problème d'interconnexion avec différents coûts et fiabilités. Nous avons, d'abord, exclu toute approche dont le coût ou la fiabilité sont compromis.

Puis nous avons opté pour une démarche en circuits équivalents. La méthode qui ; naturellement, permet cette représentation est la méthode PEEC. Et de plus elle est si proche de la classe semi-analytique.

C'est ce que nous choisissons pour le traitement notre problème, et c'est ce que nous allons présenter dans le chapitre suivant.



**CHAPITRE II**

**La Méthode des Circuits Equivalents  
aux Eléments Partiels PEEC – Partials  
Elements Equivalents Circuits**

## II-1. Introduction

La méthode PEEC est une méthode « numérique » proche de la classe « semi-analytique ». Utilisée en électromagnétisme pour la modélisation des structures tridimensionnelles de formes arbitraires, elle permet de modéliser des conducteurs de sections rectangulaires par le biais de schémas électriques équivalents composés d'éléments localisés : (résistances, inductances, capacités et mutuelles inductances/capacités). Elle semble adéquate à notre analyse car les grandeurs et phénomènes électromagnétiques recherchés sont soit localisées soit exprimés par des éléments localisés. Par conséquent, contrairement à d'autres méthodes numériques, ce type de modélisation ne nécessite pas de prendre en considération l'ensemble de l'espace entourant les structures à modéliser.

## II-2. Notion d'élément global ou partiel

La notion d'éléments global ou partiel est liée à la connaissance ou non des parcours des courants dans les circuits. En effet, considérant le simple exemple du circuit fermé de la figure suivante et intéressons-nous, par exemple, au calcul de l'inductance totale du contour fermé « C ».

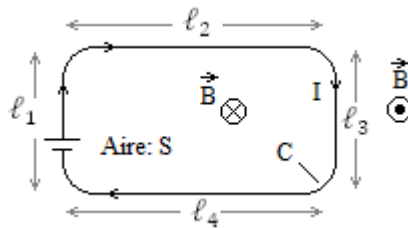


Figure 1 : Boucle rectangulaire pour illustrer la notion d'élément global-partiel

En fonction de l'induction magnétique, cet élément global s'écrit par :

$$L_{tot} = \frac{\phi}{I} = \frac{1}{I} \iint_S \vec{B} \cdot \vec{ds} \quad (\text{II-1})$$

En introduisant le potentiel vecteur magnétique ( $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ ), et en utilisant le théorème de Stokes, cette inductance totale devient :

$$L_{tot} = \frac{1}{I} \oint_C \vec{A} \cdot \vec{dl} \quad (\text{II-2})$$

Donc, un élément global (inductance, résistance, ...) nécessite, pour sa définition, la connaissance de tout le contour fermé « C » du circuit: c'est-à-dire tout le parcours fermé (trajet aller-retour) du courant.

Maintenant, en première phase, décomposons le contour « C » du circuit fermé en plusieurs segments de longueurs ( $\ell_i$ ) puis calculons la contribution de chacun dans l'inductance globale ( $L_{tot}$ ) du circuit.

$$L_{tot} = \frac{1}{I} \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{I} \left[ \int_{\ell_1} \vec{A} \cdot d\vec{l} + \int_{\ell_2} \vec{A} \cdot d\vec{l} + \int_{\ell_3} \vec{A} \cdot d\vec{l} + \int_{\ell_4} \vec{A} \cdot d\vec{l} \right] \quad (\text{II-3})$$

Ceci permet d'établir l'expression suivante:

$$L_{tot} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{n=4} \int_{\ell_i} \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (\text{II-4})$$

En deuxième phase, le potentiel est aussi décomposé :

$$\vec{A} = \vec{A}_{\ell_1} + \vec{A}_{\ell_2} + \vec{A}_{\ell_3} + \vec{A}_{\ell_4} = \sum_{k=1}^{n=4} \vec{A}_{\ell_k} \quad (\text{II-5})$$

Finalement, l'inductance globale peut se mettre sous cette forme:

$$L_{tot} = \sum_{i=1}^{n=4} \sum_{k=1}^{n=4} \left( \frac{1}{I} \int_{\ell_i} \vec{A}_{\ell_k} \cdot d\vec{l} \right) = \sum_{i=1}^{n=4} \sum_{k=1}^{n=4} Mp_{ik} \quad (\text{II-6})$$

Cette écriture fait apparaître la notion de l'inductance mutuelle partielle, entre deux segments (i et k), définit par :

$$Mp_{ik} = \frac{1}{I} \int_{\ell_i} \vec{A}_{\ell_k} \cdot d\vec{l} \quad (\text{II-7})$$

Alors, un élément partiel mutuel entre deux segments ( $i \neq k$ ) n'a besoin pour sa définition que les longueurs des segments  $\ell_i$  et  $\ell_k$ . L'élément partiel propre d'un segment correspond à «  $i=k$  ».

### II-3. Dérivation théorique de la méthode PEEC

On se limite dans cette section à une brève dérivation de la méthode PEEC dans laquelle :

- les champs incidents extérieurs et les matériaux diélectriques sont exclus de cette dérivation.
- la fréquence d'opération est industrielle (50 Hz), ce qui nous permet aussi de négliger les effets capacitifs entre conducteurs.

Une dérivation plus complète peut être trouvée dans [EKM-09] [MON-06].

#### 3.1 Equation intégrale de base

Le point de départ est le champ électrique total, à un point d'observation  $r$ , exprimé en fonction du potentiel vecteur magnétique,  $A$ , et du potentiel scalaire électrique,  $V$ . En absence d'un champ extérieur, et en régime fréquentiel :

$$\vec{E}(\vec{r}) = -j\omega\vec{A}(\vec{r}) - \nabla V(\vec{r}) \quad (\text{II-8})$$

Ces potentiels sont donnés par :

$$\vec{A}(\vec{r}) = \mu \int_{v'} G(\vec{r}, \vec{r}') \vec{J}(\vec{r}') dv' \quad (\text{II-9})$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon} \int_{v'} G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dv' \quad (\text{II-10})$$

Où

- $G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R}$  : fonction de Green de l'espace libre avec  $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$
- $\vec{J}(\vec{r}')$  : densité de courant 'source' au point  $r'$ .
- $\rho(\vec{r}')$  : densité de charge 'source' au point  $r'$ .
- $v'$  : volume du conducteur portant les densité  $J$  et  $\rho$ .

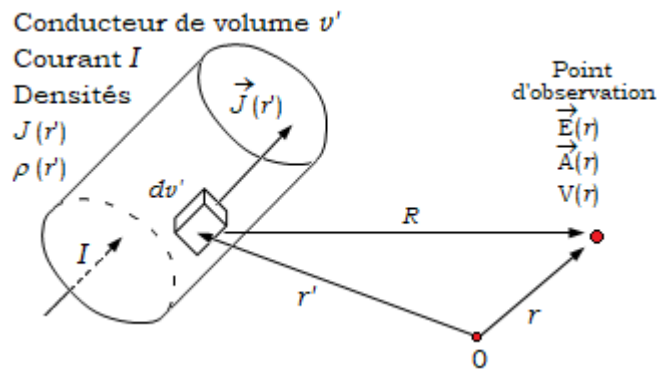


Figure 2 : Référentiel de calcul

Substituons, initialement seulement l'expression du potentiel vecteur. On obtient une équation intégrale en champ électrique (EFIE) dont les variables sont les densités de courant  $J$  et les potentiels scalaires  $V$ .

$$\vec{E}(\vec{r}) + j\omega\mu \int_{v'} G(R) \vec{J}(\vec{r}') dv' + \nabla V(\vec{r}) = 0 \quad (\text{II-11})$$

Cette équation EFIE peut être résolue en développant la densité  $J$  en séries de fonctions de formes *impulsionnelles* et d'amplitudes inconnues et en approchant le gradient par la dérivée centrée suivant la direction de  $(r)$ .

### 3.2 Discrétisation et pondération

Dans la pratique, cela peut être satisfait par une stratégie particulière de discrétisation de la structure en une partition en éléments de volume dans lesquels on s'assure que les densités de courants sont des impulsions constantes mais inconnues ; et que les potentiels en leurs extrémités sont aussi constants mais inconnus.

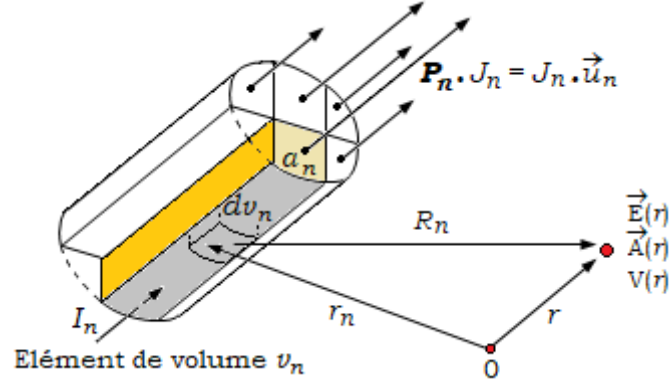


Figure 3 : Discretisation et développement de la densité en série d'impulsions

Dans chaque élément de volume ( $v_n$ ), la densité locale de courant  $J_n(r_n)$  est constante  $\forall r_n \in v_n$ , et inconnue. Alors la densité globale de courant  $\vec{J}(r')$  en tout point peut être développée en série d'impulsions ainsi :

$$\vec{J}(r') = \sum_{n=1}^N \mathbf{P}_n J_n(r_n) \quad (\text{II-12})$$

Avec la fonction de base vectorielle définie par :

$$\mathbf{P}_n = \begin{cases} 1 \cdot \vec{u}_n & \text{si } r_n \in v_n \\ 0 \cdot \vec{u}_n & \text{si non} \end{cases} \quad (\text{II-13})$$

Et la densité scalaire définie par le courant dans l'élément et sa section.

$$J_n(r_n) = \frac{I_n}{a_n} \quad (\text{II-14})$$

La substitution de la densité dans l'EFIE donne :

$$\vec{E}(r) + j\omega\mu \sum_{n=1}^N \int_{v_n} G(R_n) \mathbf{P}_n J_n(r_n) dv_n + \nabla V(r) = 0 \quad (\text{II-15})$$

L'intégrale pondérée de cette équation, sur un élément de volume  $v_k$  ayant une section constante  $a_k$ , peut permettre d'aboutir à une solution. Cette intégrale pondérée sur un volume  $v$  est définie comme le produit interne « fonctionnel »  $\langle f \cdot g \rangle$  de l'équation à pondérer  $f$  et de la fonction de pondération  $g$ .

$$\langle f \cdot g \rangle = \frac{1}{a} \int_v f \cdot g dv \quad (\text{II-16})$$

Selon l'approche de Galerkin, les fonctions d'impulsion  $\mathbf{P}_k$  sont également utilisées comme fonctions de pondération. Le produit interne devient  $\langle f \cdot \mathbf{P}_k \rangle$ .

$$\langle f \cdot \mathbf{P}_k \rangle = \frac{1}{a_k} \int_{v_k} f \cdot \mathbf{P}_k dv_k \quad (\text{II-17})$$

L'application sur l'équation intégrale (EFIE) donne :

$$\frac{1}{a_k} \int_{v_k} \vec{E}(r) \mathbf{P}_k dv_k + \frac{j\omega\mu}{a_k} \sum_{n=1}^N \int_{v_k} \int_{v_n} G(R_{nk}) \mathbf{P}_n J_n(r_n) dv_n \mathbf{P}_k dv_k + \frac{1}{a_k} \int_{v_k} \nabla V(r) \mathbf{P}_k dv_k = 0 \quad (\text{II-18})$$

Cette équation est la première version discrétisée de l'équation intégrale en champ électrique (EFIE). C'est l'équation de base, pour la méthode PEEC, à partir de laquelle des éléments partiels peuvent être identifiés.

La pondération entre deux éléments conduit en une équation intégrale dont ses termes traduisent les interactions électromagnétiques entre ces deux éléments sous formes d'expressions intégrales sur leurs volumes.

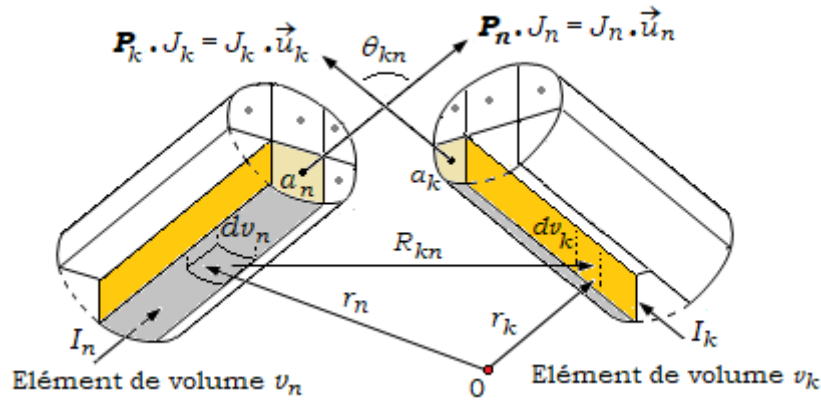


Figure 4 : référentiel pour le calcul des interactions entre deux éléments

### 3.3 Interprétations en termes de circuits équivalents

Chacun des termes, de l'équation discrétisée, peut être interprété comme un élément localisé de circuit électrique.

#### 3.3.1 Premier terme

Dans le premier terme  $\left(\frac{1}{a_k} \int_{v_k} \vec{E}(r) \mathbf{P}_k dv_k\right)$ , le produit scalaire  $(\vec{E}(r) \cdot \mathbf{P}_k)$  représente l'intensité du champ électrique à la surface de l'élément  $k$ .

$$\vec{E}(r) \cdot \mathbf{P}_k = \vec{E}(r) \cdot \vec{u}_k = E_k(r_k) \quad (\text{II-19})$$

Cette intensité du champ est liée à la densité de courant, supposée constante dans l'élément  $k$ , par la loi d'Ohm.

$$J_k = \sigma_k \cdot E_k(r_k) \Leftrightarrow E_k(r_k) = \frac{J_k}{\sigma_k} \quad (\text{II-20})$$

Et car, la densité  $J_k$  et la section  $a_k$  de l'élément  $k$  sont des constantes, le champ  $E_k$  est constant et peut être exprimé en fonction du courant  $I_k$  dans l'élément  $k$ .



$$E_k(r_k) = \frac{J_k}{\sigma_k} = \frac{I_k}{a_k \cdot \sigma_k} \quad (\text{II-21})$$

Donc le premier terme devient

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_k} \int_{v_k} \vec{E}(r) \mathbf{P}_k dv_k &= \frac{1}{a_k} \int_{v_k} \frac{I_k}{a_k \cdot \sigma_k} dv_k = \frac{1}{a_k} \left[ \frac{I_k}{a_k \cdot \sigma_k} v_k \right] = \frac{1}{a_k} \left[ \frac{I_k}{a_k \cdot \sigma_k} a_k l_k \right] = I_k \left[ \frac{l_k}{a_k \cdot \sigma_k} \right] \\ \frac{1}{a_k} \int_{v_k} \vec{E}(r) \mathbf{P}_k dv_k &= I_k \left[ \frac{l_k}{a_k \cdot \sigma_k} \right] = I_k \cdot R_k = V_k^{(R)} \end{aligned} \quad (\text{II-22})$$

Ce terme est équivalent à une chute de tension résistive (aux bornes d'une résistance pure). Cette résistance est la résistance partielle de l'élément  $k$ .

$$R_k = \frac{l_k}{a_k \cdot \sigma_k} \quad (\text{II-23})$$

### 3.3.2 Deuxième terme

Dans le deuxième terme  $\left( \frac{j\omega\mu}{a_k} \sum_{n=1}^N \int_{v_k} \int_{v_n} G(R_{nk}) \mathbf{P}_n J_n(r_n) dv_n \mathbf{P}_k dv_k \right)$ , le produit scalaire  $(\mathbf{P}_n \cdot \mathbf{P}_k)$  représente l'effet d'angle entre deux éléments ( $n$  et  $k$ ) cet angle est constant entre deux éléments ayant des sections constantes et d'axes rectilignes. La densité est remplacée par le courant et la section

$$\begin{cases} \mathbf{P}_n \cdot \mathbf{P}_k = \vec{u}_n \cdot \vec{u}_k = \cos \theta_{kn} \\ J_n = \frac{I_n}{a_n} \end{cases} \quad (\text{II-24})$$

Le deuxième terme devient alors

$$\begin{aligned} \frac{j\omega\mu}{a_k} \sum_{n=1}^N \int_{v_k} \int_{v_n} G(R_{nk}) \mathbf{P}_n J_n(r_n) dv_n \mathbf{P}_k dv_k &= \\ &= \frac{j\omega\mu}{a_k} \sum_{n=1}^N \frac{I_n}{a_n} \cos \theta_{kn} \int_{v_k} \int_{v_n} G(R_{nk}) dv_n dv_k \\ &= \sum_{n=1}^N j\omega \left( \frac{\mu \cdot \cos \theta_{kn}}{a_k \cdot a_n} \int_{v_k} \int_{v_n} G(R_{nk}) dv_n dv_k \right) \cdot I_n \\ &\equiv \sum_{n=1}^N j\omega L_{kn} I_n = \sum_{n=1}^N V_{kn}^{(L)} = V_k^{(L)} \end{aligned} \quad (\text{II-25})$$

Ce terme est équivalent à une chute de tension purement inductive, aux bornes d'une inductance avec des mutuelles. L'inductance mutuelle partielle entre deux éléments ( $k$  et  $n$ ) est alors :

$$L_{kn} = \frac{\mu \cdot \cos \theta_{kn}}{a_k \cdot a_n} \int_{v_k} \int_{v_n} G(R_{nk}) dv_n dv_k \quad (\text{II-26})$$

L'inductance propre partielle s'obtient comme si les deux éléments se superposent ( $n \rightarrow k$ ).

$$L_{kk} = \frac{\mu}{a_k^2} \int_{v_k} \int_{v_k} G(R_{kk}) dv_k dv_k \quad (\text{II-27})$$

### 3.3.3 Troisième terme

Dans le troisième terme  $\left(\frac{1}{a_k} \int_{v_k} \nabla V(r) \mathbf{P}_k dv_k\right)$ , le produit scalaire  $(\nabla V \cdot \mathbf{P}_k)$  représente la dérivée de la fonction  $V$  suivant la direction de  $\mathbf{P}_k = \vec{u}_k$ . C'est-à-dire suivant la direction du courant, matérialisée par la longueur  $l_k$  de l'élément.

$$\nabla V \cdot \mathbf{P}_k = \nabla V \cdot \vec{u}_k = \frac{\partial}{\partial u_k} V = \frac{\partial}{\partial l_k} V \quad (\text{II-28})$$

Le troisième terme, avec  $(dv_k = a_k \cdot dl_k)$  et avec l'approximation centrée du gradient  $\frac{\partial V}{\partial l_k}$ , devient alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_k} \int_{v_k} \nabla V(r) \mathbf{P}_k dv_k &= \int_{l_k} \left( \frac{\partial V(r)}{\partial l_k} \right) dl_k = \left( \frac{V\left(r_k + \frac{l_k}{2}\right) - V\left(r_k - \frac{l_k}{2}\right)}{l_k} \right) l_k = \\ &= V\left(r_k + \frac{l_k}{2}\right) - V\left(r_k - \frac{l_k}{2}\right) = V_k^{fin} - V_k^{début} = -\Delta V_k \end{aligned} \quad (\text{II-29})$$

Ce terme est équivalent à la tension totale (ou la chute de tension totale) appliquée aux bornes de l'élément. En d'autre terme, c'est la différence de potentiels entre les extrémités de l'élément.

Il est à remarquer que ces potentiels sont définis aux extrémités et non pas au centre de l'élément.

### 3.4 Synthèse des termes et circuit équivalent

Avec les équivalences (II-22), (II-25) et (II-29), l'équation EFIE discrétisée (II-18) sera équivalente à l'une de ces formes d'équations traduisant un même circuit électrique :

$$V_k^{(R)} + V_k^{(L)} - \Delta V_k = 0 \quad (\text{II-30}_1)$$

$$R_k I_k + \sum_{n=1}^N j\omega L_{kn} I_n + V_k^{fin} - V_k^{début} = 0 \quad (\text{II-30}_2)$$

$$R_k I_k + j\omega L_{kk} I_k + \sum_{n \neq k}^N j\omega L_{kn} I_n + V_k^{fin} - V_k^{début} = 0 \quad (\text{II-30}_3)$$

$$R_k I_k + j\omega L_{kk} I_k + \sum_{n \neq k}^N V_{kn}^{(L)} + V_k^{fin} - V_k^{début} = 0 \quad (\text{II-30}_4)$$

Celles-ci représentent une même équation d'une même maille d'un circuit électrique formé par :

- Les constantes  $R_k$  et  $L_{kn}$  en séries et qui représentent le volume d'un élément  $k$ .
- Les potentiels,  $V_k^{début}$  et  $V_k^{fin}$  de ses extrémités (ou tension appliquée entre ses extrémités)

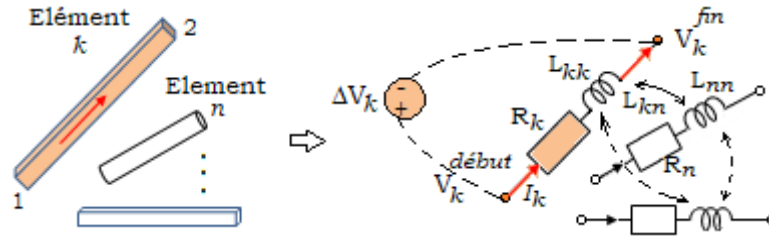


Figure 5 : Circuit équivalent d'un ensemble d'éléments

Dans la pratique, lors du maillage (discrétisation) de l'objet à modéliser, la numérotation (indexation) des éléments de volume diffère de celle de leurs extrémités. Si par exemple, «  $k$  » est l'indice d'un l'élément, «  $m$  » et «  $m+1$  » les indices de ses extrémités respectivement « début » et « fin ». Le modèle équivalent compact d'un élément est alors représenté par la figure suivante.

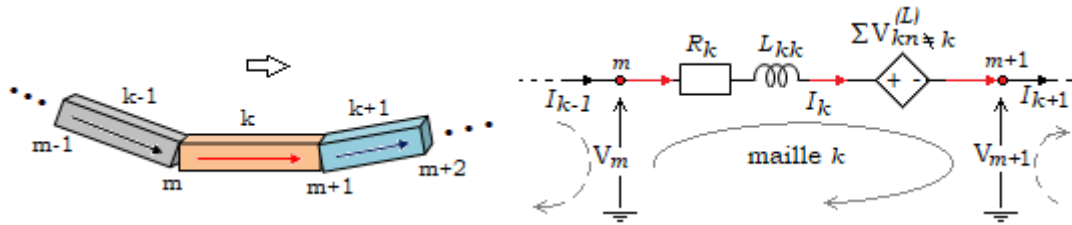


Figure 6 : Circuit équivalent compact d'un seul élément

Dans cette représentation on définit une source de tension contrôlée par les courants dans les autres éléments en interactions mutuelles.

$$U_k^{(L)} = \sum_{n \neq k}^N V_{kn}^{(L)} = \sum_{n \neq k}^N j\omega L_{kn} I_n \quad (\text{II-31})$$

Elle représente les contributions des mutuelles dans la tension totale de l'élément en question «  $k$  ».

Dans ce circuit équivalent

- $V_m$  et  $V_{m+1}$ : les potentiels des extrémités de l'élément  $k$
- $R_k$  et  $L_{kk}$  : impédance propre partielle de l'élément  $k$
- $U_k^{(L)} = \sum_{n \neq k}^N V_{kn}^{(L)}$  contribution des tensions induites par mutuelles.

Pour ajouter d'éventuels effets capacitifs, il faut une autre formulation dans laquelle la distribution de charge  $\rho$ , doit apparaître et qui conduira sur des équivalences capacitives aux éléments. Ceci n'est pas considéré dans ce travail, car nous travaillons en basses fréquences, et les effets capacitifs y sont généralement négligeables.

## II-4. Calculs des éléments partiels RL

Jusqu'à ici, la seule approximation faite est celle adoptée lors de la discrétisation de l'objet en partition d'éléments de volume dans lesquels la densité de courant est *supposée constante* mais inconnue.

### 4.1 Résistances partielles

L'évaluation de la résistance partielle d'un élément est directe. Elle est évaluée analytiquement à partir des propriétés physico-géométriques de l'élément (section, longueur et conductivité ou résistivité) par :

$$R_k = \frac{l_k}{a_k \cdot \sigma_k} = \frac{\rho_k l_k}{a_k} \quad (\text{II-32})$$

### 4.2 Inductances partielles

Quant au calcul des inductances, l'intégration double sur les deux volumes des éléments est équivalente à six (06) intégrations linéaires, ce qui complique les calculs.

Pour alléger les calculs d'inductances, nous nous mettons, d'abord, en régime quasi-statique : en effet, à la fréquence industrielle (50Hz), et vue les distances entre jeux de barres de l'ordre de dizaine de (cm). La fonction de Green se réduit à celle du régime statique pour lequel ( $\beta R_{kn} \approx 0$ ) :

$$G(R_{kn}) = \frac{e^{-j\beta R_{kn}}}{4\pi R_{kn}} \approx \frac{e^0}{4\pi R_{kn}} = \frac{1}{4\pi \cdot R_{kn}} \quad (\text{II-33})$$

$$L_{kn} = \frac{\mu \cdot \cos \theta_{kn}}{a_k \cdot a_n} \int_{v_k} \int_{v_n} G(r_{nk}) dv_n dv_k = \frac{\mu \cdot \cos \theta_{kn}}{4\pi \cdot a_k \cdot a_n} \int_{v_k} \int_{v_n} \frac{1}{R_{kn}} dv_n dv_k \quad (\text{II-34})$$

L'évaluation analytique de cette expression est possible sous hypothèse de volumes ayant des formes orthogonales (toutes les facettes sont des rectangles) [Hoer-65].

*C'est cette hypothèse qui particularise la discrétisation (maillage) dans la méthode PEEC conventionnelle. Les éléments doivent être de formes orthogonales à fin de pouvoir évaluer leurs interactions analytiquement.*

Pour deux éléments orthogonaux et parallèles ( $k$  et  $n$ ), dans un repère orthogonal d'axes ( $O, x, y, z$ ), Fig.7, l'inductance mutuelle entre eux est :

$$L_{kn} = \frac{\mu \cdot \cos 0^\circ}{4\pi \cdot (a \cdot b) \cdot (c \cdot d)} \int_{v_k} \int_{v_n} \frac{1}{R_{kn}} dv_n dv_k$$

$$L_{kn} = \frac{\mu}{4\pi \cdot a_k \cdot a_n} \int_0^a \int_0^{l_1} \int_0^b \int_E^{E+d} \int_{l_3}^{l_3+l_2} \int_p^{p+c} \frac{dx_n dy_n dz_n dx_k dy_k dz_k}{\sqrt{(x_k - x_n)^2 + (y_k - y_n)^2 + (z_k - z_n)^2}} \quad (\text{II-35})$$

Cette expression est évaluée analytiquement dans [FD-07] et donne après plusieurs intégrations et manipulations mathématiques.

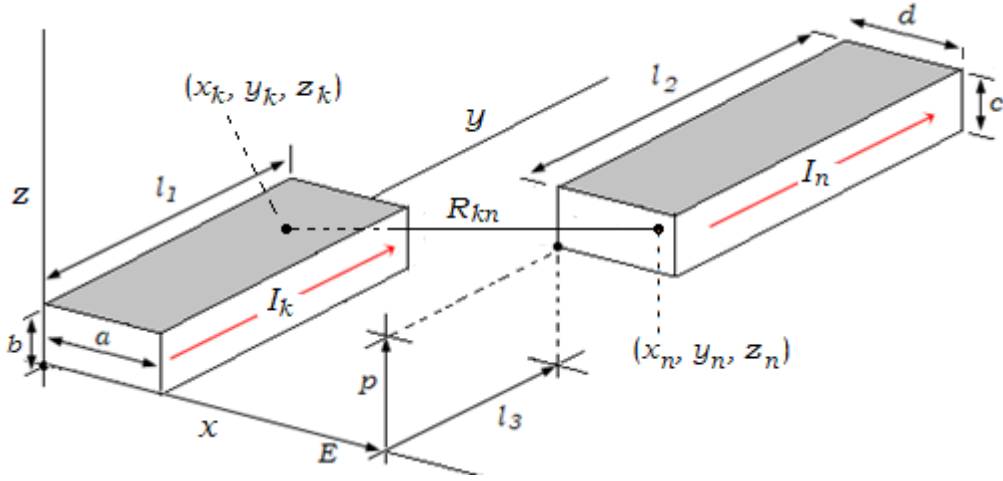


Figure 7 : Référentiel pour le calcul des inductances mutuelles

$$L_{kn} = \frac{\mu}{4\pi \cdot abcd} \cdot \left[ [f(x, y, z)]_{q_2; q_4}^{q_1; q_3} (x) \right]_{r_2; r_4}^{r_1; r_3} (y) \Big]_{s_2; s_4}^{s_1; s_3} (z) \quad (\text{II-36})$$

Avec la fonction  $f(x, y, z)$  et ces paramètres géométriques :

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = & \left( \frac{6y^2z^2 - y^4 - z^4}{24} \right) x \cdot \ln \left( \frac{x+R}{\rho_x} \right) + \left( \frac{6x^2z^2 - x^4 - z^4}{24} \right) y \cdot \ln \left( \frac{y+R}{\rho_y} \right) \\ & + \left( \frac{6x^2y^2 - x^4 - y^4}{24} \right) z \cdot \ln \left( \frac{z+R}{\rho_z} \right) \\ & + \frac{R}{60} (x^4 + y^4 + z^4 - 3y^2x^2 - 3y^2z^2 - 3z^2x^2) \\ & - \frac{xyz^3}{6} \operatorname{atan} \frac{xy}{zR} - \frac{zyx^3}{6} \operatorname{atan} \frac{xz}{yR} - \frac{xzy^3}{6} \operatorname{atan} \frac{yz}{xR}. \end{aligned} \quad (\text{II-37})$$

$$\begin{cases} R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} & ; \quad \rho_x = \sqrt{y^2 + z^2} \\ \rho_y = \sqrt{x^2 + z^2} & ; \quad \rho_z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \quad (\text{II-38})$$

$$\begin{cases} q_1 = E - a & ; \quad r_1 = p - b & ; \quad s_1 = l_3 - l_1 \\ q_2 = q_1 + d & ; \quad r_2 = r_1 + c & ; \quad s_2 = s_1 + l_2 \\ q_3 = E + d & ; \quad r_3 = p + c & ; \quad s_3 = l_3 + l_2 \\ q_4 = E & ; \quad r_4 = p & ; \quad s_4 = l_3 \end{cases} \quad (\text{II-39})$$

Avec ces paramètres géométriques, le calcul de l'inductance peut être automatisé par l'algorithme suivant.

$$L_{kn} = \frac{\mu}{4\pi \cdot abcd} \cdot \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 (-1)^{i+j+k+1} f(q_i, r_j, s_k) \quad (\text{II-40})$$

L'inductance propre partielle s'obtient comme si les deux éléments se confondent ( $k \rightarrow n$ ). Dans ce cas on rencontre plusieurs indéterminations dans le calcul de l'inductance propre.

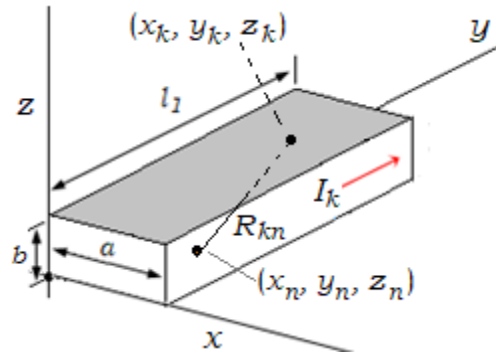


Figure 8 : Référentiel pour le calcul de l'inductance propre

Dans cette situation les paramètres géométriques deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} E = l_3 = p = 0 \\ l_2 = l_1 \\ d = a \\ c = b \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} q_1 = -a \\ q_2 = 0 \\ q_3 = a \\ q_4 = 0 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} r_1 = -b \\ r_2 = 0 \\ r_3 = b \\ r_4 = 0 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} s_1 = -l_1 \\ s_2 = 0 \\ s_3 = l_1 \\ s_4 = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II-41})$$

Le fait qu'on est dans le même élément de volume, plusieurs paramètres peuvent s'annuler lors de l'algorithme de calcul, ce qui peut provoquer des singularités (indéterminations) dans les termes de la fonction  $f(x, y, z)$ , de types « division par zéro ou logarithme de zéro ».

On a montré dans [FD-07], par une étude asymptotique « aux limites », que tous les termes de la fonction  $f(x, y, z)$ , qui présentent des singularités, ont des limites nulles. Ce qui nous permet lors des calculs, par l'algorithme (II-40) et les conditions (II-41), de remplacer chaque fois un terme est singulier par un zéro. Ceci est avantageux en termes d'optimisation des calculs, car il permet d'éviter des calculs consommateurs de temps.

#### 4.3 Potentiels aux extrémités

Les potentiels aux extrémités sont des variables à déterminer. Après formulation du modèle final (circuit équivalent final et ses équations), introduction des conditions aux terminaisons (sources et charges). Ces potentiels sont alors le résultat de la résolution du modèle final.

### II-5. Formulation matricielle du modèle PEEC

Considérons un système comportant plusieurs barres maillées en (N) éléments volumiques de sections rectangulaires avec (M) extrémités. Les N éléments de volume représentent des branches de courant, et les M extrémités représentent des nœuds de tensions.

Il existe deux approches pour formuler le système matriciel de la méthode PEEC. La première suppose qu'il y a  $(N*(N-1))$  boucles, la deuxième ne considère que  $(N)$  conducteurs.

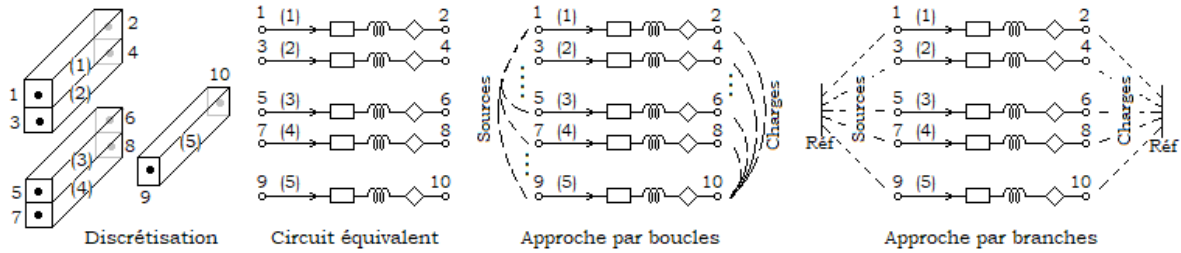


Figure 9 : Approches par boucles et par branches permettant la formulation et l'analyse du système

En termes de résultats d'analyse, les deux approches sont équivalentes. Cependant la première, par boucles, nécessite l'identification des boucles, tâche qui n'est pas toujours assez évidente, de plus sa taille est plus grande que la deuxième. La deuxième, par branches, est de taille moins grande, mais aussi nécessite la définition d'une référence pour les sources : ce qui conduit à une pénalité par l'ajout d'une ou de plusieurs équations. Dans ce travail, c'est la deuxième approche qui sera adopté et mise en œuvre.

### 5.1 Modèle PEEC générique

Pour le nombre total de branches de courant (d'élément) « N », et le nombre total de nœuds de tension (d'extrémités) « M », et après avoir évalué toutes les résistances et toutes les inductances partielles à l'aide des expressions (II-32) et (II-40).

Conformément aux notations de la figure (6), on écrit pour chaque élément  $k$  d'extrémités ( $m$  et  $m+1$ ) son équation de type (II-30).

$$R_k I_k + j\omega L_{kk} I_k + \sum_{n \neq k}^N j\omega L_{kn} I_n + V_{m+1} - V_m = 0 \quad (\text{II-41})$$

En courants, une branche  $k$  est en interaction avec toutes les branches par les impédances mutuelles ( $j\omega L_{kn}$ ), mais en tensions, elle n'interagit qu'avec ses extrémités ( $m$  et  $m+1$ ). On peut faire étendre l'interaction sur toutes les tensions des extrémités par l'ajout de termes nuls.

$$(R_k + j\omega L_{kk}) I_k + \sum_{n \neq k}^N (j\omega L_{kn}) I_n - 1V_m + 1V_{m+1} + \sum_{\substack{i \neq m \\ i \neq m+1}}^M 0V_i = 0 \quad (\text{II-42})$$

On définit pour cette écriture la matrice des impédances et la matrice des connexions (appelée aussi matrice d'incidence) dont leurs termes se calculent par :

$$Z_{kn} = R_k + j\omega L_{kn} = \begin{cases} R_k + j\omega L_{kk}; & n = k \\ j\omega L_{kn}; & n \neq k \end{cases} \quad (\text{II-43})$$

$$a_{km} = \begin{cases} 1 & ; \text{ la branche } k \text{ est entrante au noeud } m \\ -1 & ; \text{ la branche } k \text{ est sortante du noeud } m \\ 0 & ; \text{ la branche } k \text{ n'est pas reliée au noeud } m \end{cases} \quad (\text{II-44})$$

Avec ces définitions, l'équation de l'élément se compacte à :

$$\sum_{n=1}^N Z_{kn} I_n + \sum_{m=1}^M a_{km} V_m = 0 \quad (\text{II-45})$$

Ou bien sous forme matricielle encore plus compacte

$$\mathbf{Z} \cdot \mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{0} \quad (\text{II-46})$$

- $\mathbf{Z}(N \times N)$  : Matrice des impédances partielles des éléments
- $\mathbf{I}(N \times 1)$  : Vecteur des courants dans les éléments
- $\mathbf{A}(N \times M)$  : Matrice des connexions entre éléments
- $\mathbf{V}(M \times 1)$  : Vecteur des tensions aux extrémités des éléments

C'est le modèle générique de la méthode PEEC, un modèle à éléments localisés et linéaires. Cependant, c'est un modèle mal posé, puisque, le nombre des équations est (N) alors que le nombre des inconnues est (N+M), (courants + tensions).

## 5.2 Modèle PEEC final

Pour rendre le modèle générique bien posé, il faut chercher à équilibrer le nombre d'équations avec celui des inconnues. Donc d'autres équations à ajouter et/ou des inconnues à éliminer. L'introduction des conditions aux terminaisons (aux extrémités ou aux limites) permet de le faire.

Les éléments externes, sources et charges, sont raccordés aux nœuds de (terminaisons ou d'extrémités). Selon le mode de leur raccordement, il se peut qu'il y ait :

- Création de nouvelles branches: chaque impédance de charge est considérée comme une nouvelle branche.
- Création de nouveaux nœuds : si des impédances de charge sont montées en étoile « Y ». Le point « étoile » est un nouveau nœud.

Dans tous les cas, le mode de raccordement des charges aux terminaisons doit être matérialisé par une matrice de connexion de la charge notée « C ».

Dans le système PECC générique, les nœuds peuvent se diviser en deux groupes de tensions:

- Nœuds d'entrées (sources), dans lesquels les tensions sont connues. Ces nœuds forment le groupe de tensions connues  $[V_e]$ .
- Nœuds de sorties (de charges), dans lesquels les tensions sont inconnues, et qui forment le groupe de tensions inconnues  $[V_s]$ .



La matrice de connexion générique se partitionne alors en conséquence :

$$\mathbf{Z} \cdot \mathbf{I} + [\mathbf{A}_e \quad \mathbf{A}_s] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_e \\ \mathbf{V}_s \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{II-47})$$

- $V_e(m_e \times 1)$  : Vecteur des tensions **connues**, " $m_e$ " étant le nombre de nœuds d'entrée ou de sources.
- $V_s(m_s \times 1)$  : Vecteur des tensions **inconnues**, " $m_s$ " étant le nombre de nœuds de sorties ou de charges, ( $m_e + m_s = M$ ).
- $A_e(N \times m_e)$  et  $A_s(N \times m_s)$  : partitions de connexions correspondantes aux groupes de tension  $V_e$  et  $V_s$

En déplaçant les connues vers le coté de droit, le nombre d'inconnues dans le système générique se réduit à  $(N + m_s)$  :

$$\mathbf{Z} \cdot \mathbf{I} + \mathbf{A}_s \cdot \mathbf{V}_s = -\mathbf{A}_e \mathbf{V}_e \quad (\text{II-48})$$

Le raccordement aux " $m_s$ " nœuds de " $m_s$ " charges  $Z_s$  en **étoile** crée un nouveau nœud de tension inconnue  $V_0$ . Le groupe des tensions inconnues  $V_s$  se voit augmenter de  $V_0$ .

$$\mathbf{Z}_s \cdot \mathbf{I} + [\mathbf{C}_s \quad \mathbf{C}_0] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_s \\ \mathbf{V}_0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{II-49})$$

- $C(m_s \times (m_s + 1)) = [C_s \quad C_0]$  : Matrice de connexion des charges aux nœuds du groupe  $V_s$
- $C_s(m_s \times m_s)$  : Partition de connexion des charges aux nœuds du groupe  $V_s$  générique.
- $C_0(m_s \times 1)$  : Partition de connexion des charges au nouveau nœud  $V_0$ .

Au nouveau nœud la somme de tous les courants est nulle:

$$\sum_{k=1}^N I_k = \mathbf{1}_N \cdot \mathbf{I} = 0 \quad (\text{II-50})$$

- Avec le vecteur  $\mathbf{1}_N = [1 \ 1 \ 1 \ \dots \ N_{fois}]$

En combinant les équations nous obtenons le modèle final, bien posé, dont la résolution donne les courants dans les branches et les tensions aux nœuds.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z} & \mathbf{A}_s & \mathbf{0}_N \\ \mathbf{Z}_s & \mathbf{C}_s & \mathbf{C}_0 \\ \mathbf{1}_N & \mathbf{0}_s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{V}_s \\ \mathbf{V}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_e \mathbf{V}_e \\ \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-51})$$

- $Z(N \times N)$  : matrice des impédances PEEC des éléments
- $A_s(N \times m_s)$  : connexion des éléments PEEC aux nœuds du groupe des tensions inconnues générique.

- $0_N = 0(N \times 1) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ N_{\text{fois}} \end{bmatrix}$  : vecteur de connexion des éléments PEEC avec le nœud nouvellement créé par la charge.
- $Z_s(m_s \times m_s)$  : matrice des impédances de la charge raccordées aux nœuds du groupe des tensions inconnues générique.
- $C_s(m_s \times m_s)$  : connexion de la charge aux nœuds du groupe des tensions inconnues générique.
- $C_0(m_s \times 1)$  : connexion de la charge au nœud nouvellement créé.
- $1_N = [1 \ 1 \ 1 \ \dots \ N_{\text{fois}}]$  : vecteur traduisant la somme nulle des courants au niveau du nœud nouvellement créé.
- $0_s = 0(1 \times m_s) = [0 \ 0 \ \dots \ m_s \text{fois}]$  :

### 5.3 Exemple illustratif

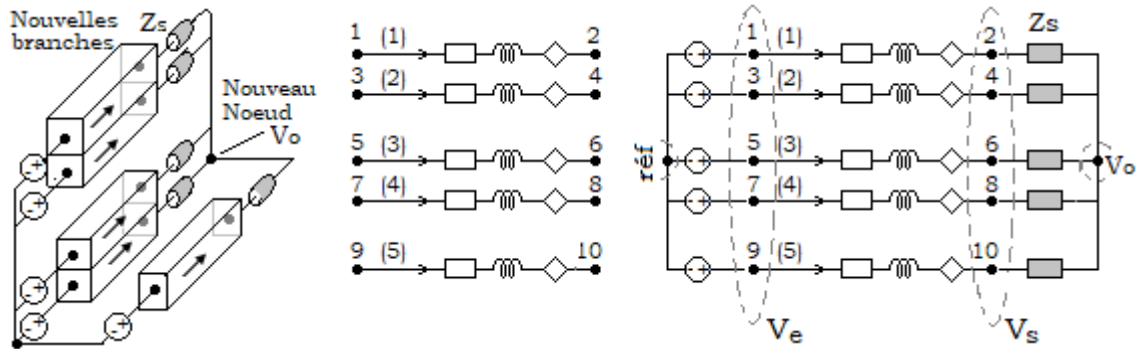


Figure 10 : exemple illustratif pour générer le modèle PEEC

Matrice des impédances (PEEC) et matrice de connexion générique

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} & Z_{15} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & Z_{24} & Z_{25} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & Z_{34} & Z_{35} \\ Z_{41} & Z_{42} & Z_{43} & Z_{44} & Z_{45} \\ Z_{51} & Z_{52} & Z_{53} & Z_{54} & Z_{55} \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Groupes génériques (nœuds) des tensions connues et inconnues et les partitions de connexion correspondantes

$$V_e = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_3 \\ V_5 \\ V_7 \\ V_9 \end{bmatrix}; \quad V_s = \begin{bmatrix} V_2 \\ V_4 \\ V_6 \\ V_8 \\ V_{10} \end{bmatrix}; \quad A_e = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad A_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice des impédances de charge raccordées en étoile au groupe des tensions inconnues (Nœuds : 2, 4, 6, 8, 10 et le nœud d'étoile  $V_o$ ).

$$Z_s = \begin{bmatrix} Z_{\text{ch1}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_{\text{ch2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{\text{ch3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_{\text{ch4}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{\text{ch5}} \end{bmatrix}$$

Matrice de connexion de la charge aux nœuds à tensions inconnues (y compri le nouveau nœud  $V_0$ ) et ses partitions

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad C_s = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad C_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Construction du modèle final à résoudre

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} & z_{15} & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} & z_{25} & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & z_{34} & z_{35} & \vdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ z_{41} & z_{42} & z_{43} & z_{44} & z_{45} & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ z_{51} & z_{52} & z_{53} & z_{54} & z_{55} & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{ch1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & z_{ch2} & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & z_{ch3} & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & z_{ch4} & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z_{ch5} & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \vdots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ \dots \\ V_2 \\ V_4 \\ V_6 \\ V_8 \\ V_{10} \\ \dots \\ V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_3 \\ V_5 \\ V_7 \\ V_9 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

## II-6. Conclusion

La méthode PEEC semble bien adaptée à l'analyse électromagnétique des structures d'interconnexions à jeux de barres. Une discrétisation de la structure, en éléments à géométries de base orthogonale pour lesquelles il existe des expressions analytiques pour les valeurs d'éléments partiels, est décidée. Les calculs formels, des interactions partielles entre éléments, rendent la méthode PEEC ressemblant beaucoup plus à une méthode semi-analytique d'utilisation souple et rapide.

Sa principale caractéristique est sa solution de type circuit électrique équivalent, qui peut être réalisée aussi bien en domaine fréquentiel qu'en domaine temporel, à partir du même circuit équivalent.

Les résultats de la méthode PEEC sont les variables de circuit : courants et tensions et en post-traitement les pertes, les composantes du champ EM ainsi que les forces résultantes peuvent facilement être calculées.



**CHAPITRE III**

**Mise en œuvre de la méthode PEEC  
Application sur l'élément  
d'interconnexion« Jeu de barres »**

### III-1. Introduction

Rappelons que le dénominateur commun à toute contrainte associée aux jeux de barres (électromagnétique, thermique ou électrodynamique) est la fine connaissance de la distribution de courant dans les barres. Cette fine distribution des courants peut être obtenue en faisant une analyse électromagnétique des barres à l'aide de l'approche par PEEC. Dans cette analyse :

- les paramètres d'entrée sont les tensions et les impédances de charges appliquées aux extrémités des jeux de barres.
- les variables inconnues sont la distribution des courants dans les barres et les tensions aux bornes des charges
- les paramètres de l'analyse sont les éléments partiels, du circuit électrique équivalent, qui introduisent les propriétés physiques et géométriques des barres.

Une fois le modèle PEEC est construit et résolu, les distributions des courants et tensions sont alors obtenues. Ensuite, en post traitement, toute autre quantité, électromagnétique, thermique ou électrodynamique, peut être facilement évaluée par combinaisons de simples expressions.

### III-2. Jeu de barre monophasé

Nous proposons comme première mise en œuvre, une analyse d'un jeu de barres monophasé basse tension, constitué de deux barres en cuivre, rectilignes de même longueur 1m, de sections rectangulaires (10x40) mm<sup>2</sup> et d'espacement (40mm). Une tension de 230V efficace et une charge assimilable à un court-circuit de 0.001Ω sont branchées aux extrémités des barres, Fig.1.

- Les axes A1, A2 et A3, Fig.1, qui peuvent être mobiles suivant la longueur ou suivant la hauteur, sont des axes sur lesquels les profils des inductions seront visualisés.
- La fréquence de la tension appliquée appartient au domaine des fréquences industrielles (basses fréquences).

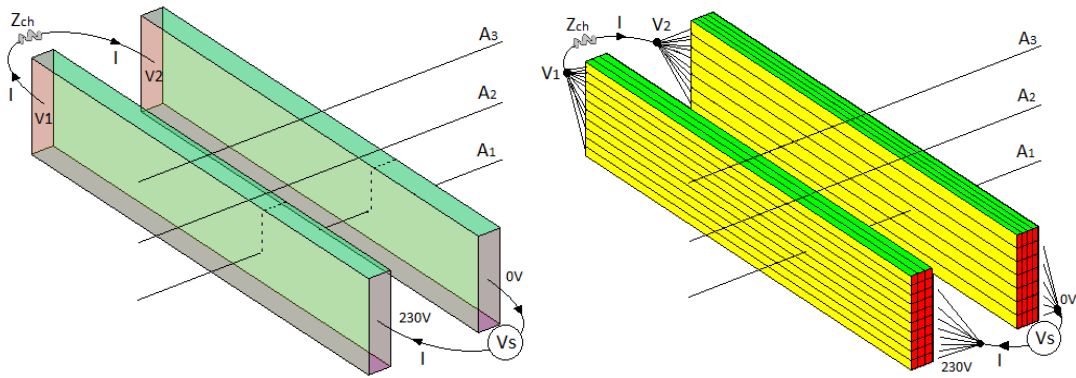


Figure 1 : Système de jeu de barres monophasé basse tension (les nœuds par extrémité sont équipotentiels)

## 2.1 Maillage

Comme pour toute autre approche numérique, le maillage des barres est intimement lié à la fréquence d'utilisation :

- Suivant la longueur des barres, le maillage est lié à la longueur d'onde correspondant à la fréquence d'utilisation  $(l_f \leq \frac{\lambda_f}{20} = \frac{c}{20 \cdot f})$
- Suivant la section, le maillage est lié à l'épaisseur de peau correspondant à la fréquence d'utilisation  $(\Delta_f \ll \delta_f = \sqrt{\frac{\rho}{\pi \cdot f}})$

La première condition, pour négliger l'effet de la propagation, exige des longueurs d'éléments de maillage très inférieurs à la longueur d'onde. Celle-ci est bien vérifiée dans notre situation, car à la fréquence industrielle (50hz) la longueur d'onde est de 6000 km, beaucoup plus supérieur aux longueurs des barres (l'ordre de quelques mètres). Donc, il n'y aura pas de maillage selon les longueurs de barres.

Quant à la deuxième condition, une prudence est nécessaire. L'expression de l'épaisseur de peau est définie pour des conducteurs de sections circulaires loin de toutes influences externes. Or, dans notre situation, les sections sont rectangulaires et les barres sont en influences proches, d'une façon que dans la même barre, l'épaisseur de peau suivant les deux côtés de la section n'est pas forcément la même.

Une étude paramétrique du maillage est alors nécessaire à fin de trouver le bon nombre d'éléments sur chacune des côtés d'une section.

Pour cela, nous avons procédé par remaillage des barres en faisant, à chaque fois, varier le nombre d'éléments sur chacune des côtés. A chaque fois nous calculons les pertes totales, la résistance totale et l'inductance totale. Le bon nombre est obtenu lorsque toutes ces grandeurs (globales) tendent à se stabilisées en devenant constantes.

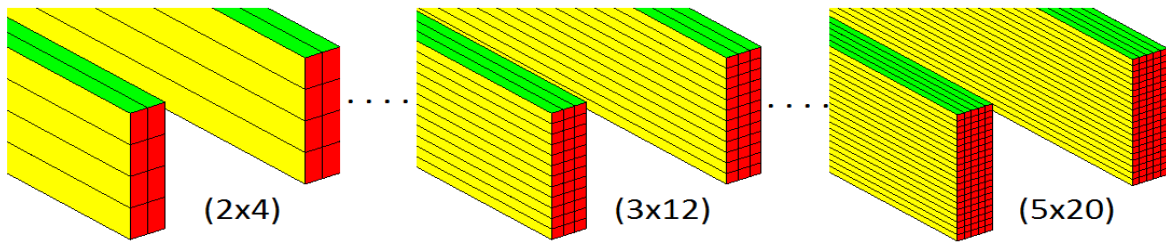


Figure 2 : Etude paramétrique du maillage à (50 Hz)

Conformément aux configurations des figures, Fig.1 et Fig.2.

- Les résistances partielles sont calculées par (II-32)
- Les inductances partielles sont calculées par (II-40)
- La tension appliquée  $V_a=230\text{ V}$ ,  $V_n=0\text{V}$ .
- La charge appliquée  $Z_{ch}=0.001\Omega$
- Le système à construire et à résoudre est de type (II-51)

Le vecteur des inconnues comprend respectivement les courants des éléments  $I_k$ , le courant  $I$  dans la charge (courant total), les deux tensions aux bornes de la charge, toutes en grandeurs complexes. Les quantités de post traitement se calculent par :

- Les pertes totales se calculent par :  $\Delta P = \sum_{k=1}^{N_{\text{éléments}}} R_k \cdot I_k^2$
- La résistance totale se calcule par :  $R = \Delta P / I^2$
- L'impédance des deux barres se calcule par :  $Z = \frac{V_a - V_n}{I} - Z_{ch}$
- La résistance peut être vérifiée par :  $R = \Re(Z)$
- L'inductance totale est calculée par :  $L = \Im(Z) / (2\pi f)$

Les résultats, pour chaque nombre paramètre du maillage, sont regroupés dans le tableau.1, et visualisés sur la Fig.3.

Elements	1x4	2x4	2x8	3x12	4x12	4x16	4x20	5x20	
$\Delta P(\text{kW})$	3.8960	3.9086	3.9380	3.9530	3.9566	3.9588	3.9598	3.9616	$10^3$
$R(\Omega)$	0.9026	0.9060	0.9142	0.9182	0.9192	0.9198	0.9202	0.9206	$10^{-4}$
$L(\text{H})$	6.1179	6.1160	6.1061	6.1030	6.1026	6.1017	6.1014	6.1014	$10^{-7}$

Tableau 1 : Tableau récapitulatif des résultats paramétriques du maillage

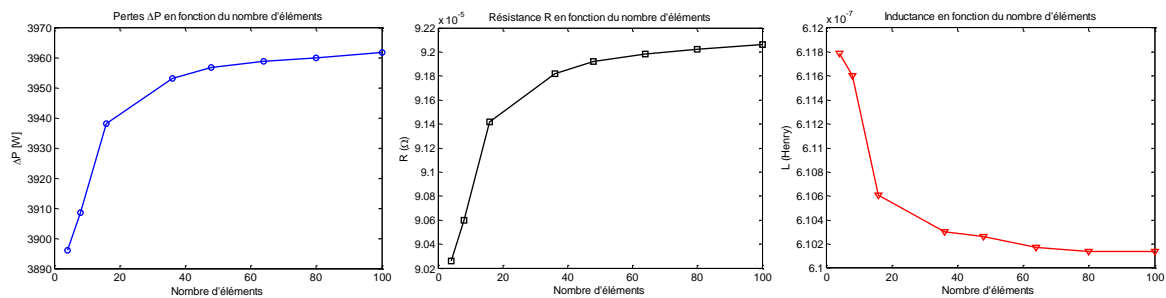


Figure 3 : Evolution des grandeurs globales ( $\Delta P$ ,  $R$  et  $L$ ) en fonction du nombre d'élément de maillage par barre

Les grandeurs globales tendent à se stabiliser à partir d'un maillage de 80 éléments par barre correspondant à (4x20) : 4 sur la largeur et 20 sur la hauteur. Dans la suite de ce travail, nous utilisons un nombre de 100 éléments par barre qui correspond à (5x20).

## 2.2 Distributions des courants

C'est l'élément clé pour toute analyse des barres. Afin de mettre en évidence certains phénomènes connus théoriquement, en permettant ainsi d'apprécier qualitativement l'approche par PEEC, nous allons calculer et visualiser les distributions des courants dans les barres pour plusieurs fréquences du domaine basses fréquences. La figure (4) montre les résultats de nos calculs.

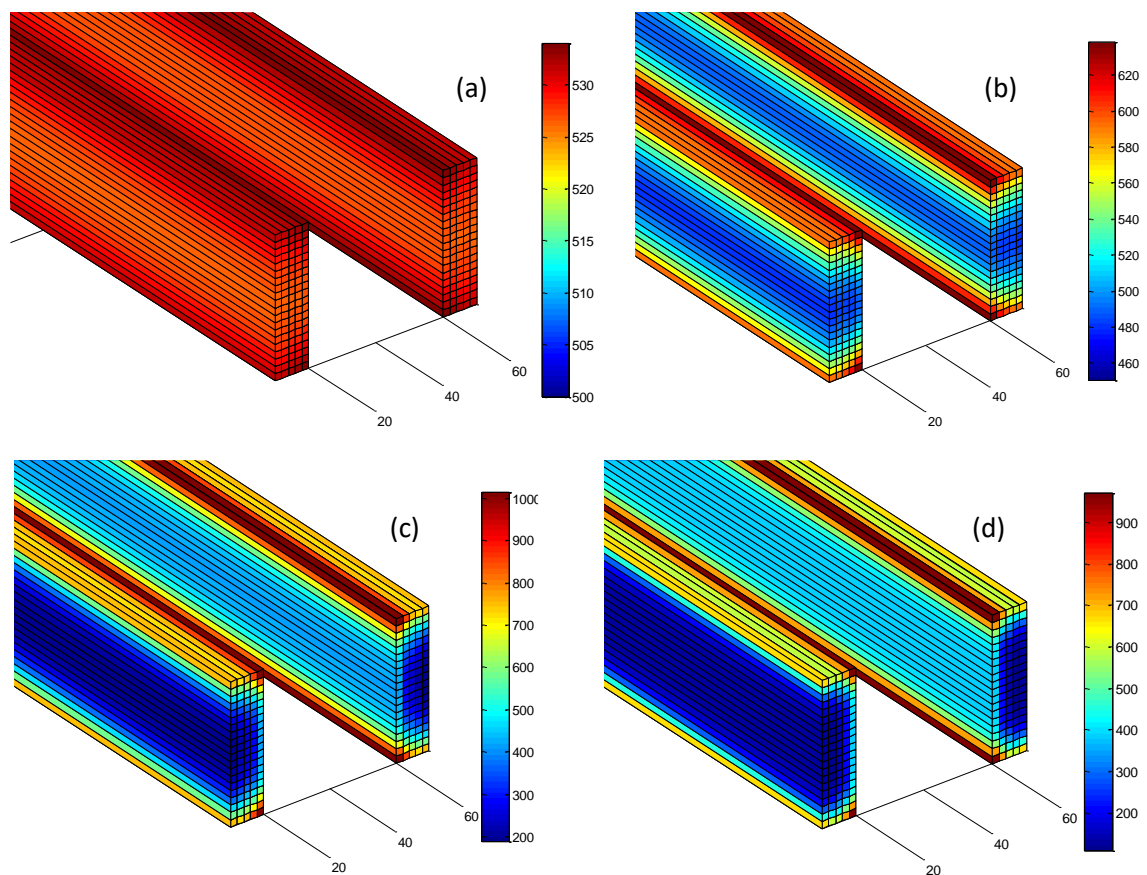


Figure 4 : Distributions des courants dans les barres en ( $A/mm^2$ ) à fréquences respectivement : a) 10 Hz ; b) 50 Hz ; c) 250 Hz et d) 500Hz

Il est clair que l'effet de la fréquence, sur la répartition des courants, est nettement visible sur cette figure. En effet, en basses fréquences, Fig.4.a, les courants s'étalent presque sur toute la section d'une barre, et de plus en plus les fréquences augmentent, ces courants se repoussent et se concentrent, asymétriquement, vers la périphérie de la barre. Ceci est dû aux effets de peau.



Un autre effet, connu théoriquement, est aussi clairement visible. Les courants ont tendance à se concentrer beaucoup plus sur les côtés (facettes) en face-à-face (les plus proches) des barres, Fig.4.c-d. Ceci est dû aux effets de proximité. D'ailleurs c'est cet effet qui est le plus de responsabilité à l'asymétrie de la distribution des courants sur la section d'une barre.

Les résultats de calcul des grandeurs globales du circuit équivalent, conformément à la Fig.1, sont regroupés dans le tableau.2, et visualisés sur la figure (5).

F : Hz	Icc : kA	Vcc1 : V	Vcc2 : V	dP (MW)	R : mΩ	L : H
10	211.24	220.60	10.16	3.9318	0.08810	6.14e-7
50	207.44	217.90	22.05	3.9616	0.09206	6.10e-7
150	184.94	201.89	52.83	3.7660	0.11010	5.95e-7
250	158.13	183.23	73.34	3.1870	0.12744	5.85e-7
350	134.46	167.57	86.07	2.5912	0.14332	5.78e-7
500	107.40	151.1	96.90	1.9058	0.16522	5.71e-7

Tableau 2 : Tableau des grandeurs globales calculées à partir de la distribution locale des courants

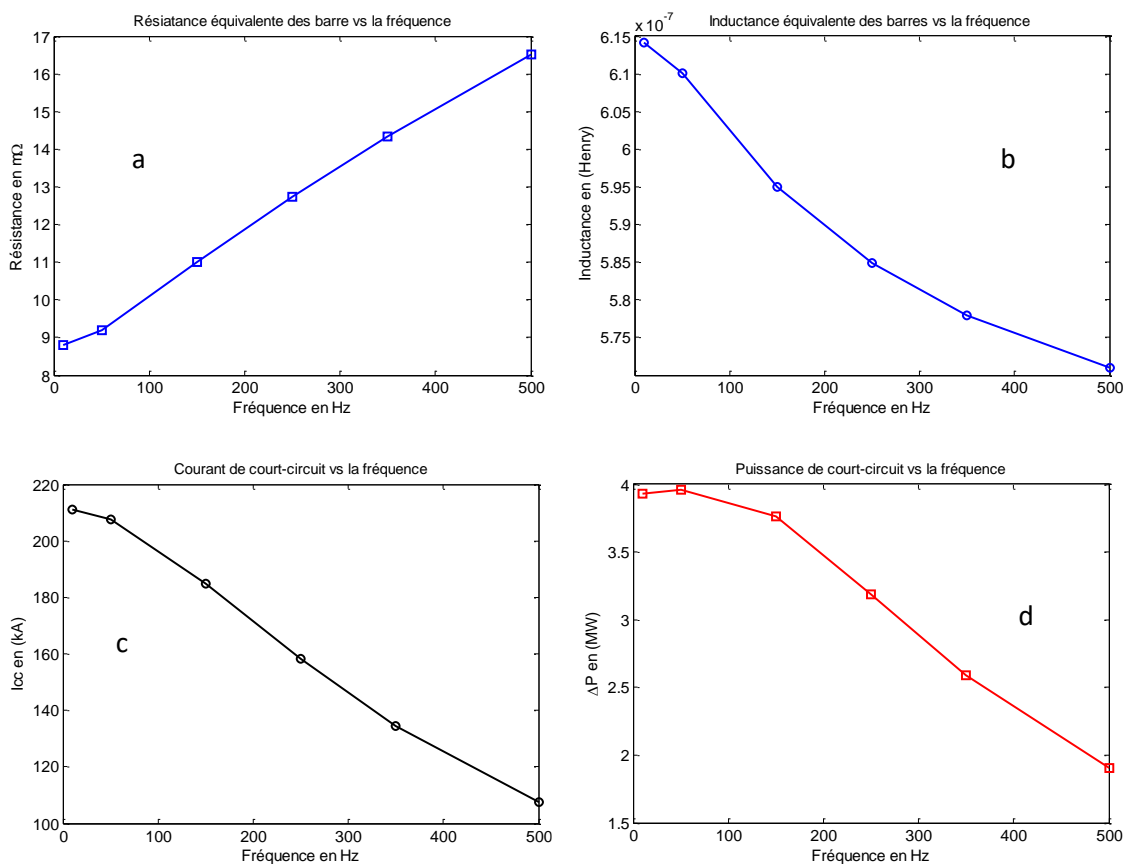


Figure 5 : Evolution des grandeurs globales en fonction de la fréquence : a) résistance équivalente ; b) inductance équivalente ; c) courant de court-circuit et d) pertes ou puissance de court-circuit

La figure (5) confirme qualitativement des connaissances théoriques dans le domaine d'électromagnétisme. La figure (5.a) montre l'augmentation de

la résistance avec la fréquence qui est une conséquence des effets de peau déjà mis en évidence auparavant. La figure (5.b) montre, elle aussi, la diminution de l'inductance suite à l'augmentation de la fréquence, ceci est dû à la fois aux deux effets déjà mis en évidence : de peau et de proximité.

L'effet de peau a tendance à diminuer jusqu'à annuler la partie interne de l'inductance globale, quant à l'effet de proximité, il a tendance à minimiser l'aire de la boucle entre barres et par conséquent minimiser la partie externe de l'inductance globale.

La figure (5.c) montre la diminution du courant de court-circuit avec l'augmentation de la fréquence, ceci est conforme avec la théorie des circuits : la résistance augmente, l'impédance augmente, la tension reste constante, alors selon Ohm, le courant diminue.

La figure (5.d) montre d'abord un maximum de puissance au voisinage de 50 Hz, puis une diminution avec l'augmentation de la fréquence, ceci est aussi en accord avec la théorie des circuits : aux voisinages de 50 Hz l'impédance de charge ( $Z_{ch}=0.001\Omega$ ) forme une adaptation pour le circuit équivalent des barres et pour laquelle la puissance est maximale, cette adaptation disparaît aux fréquences ailleurs, alors la puissance décroît avec l'augmentation de la résistance (impédance) selon ( $\Delta P \cong V^2/R$ ).

### 2.3 Profils de l'induction magnétique

Afin de respecter les normes d'installations relatives aux émissions électromagnétiques, la connaissance des d'inductions aux voisinages de certains éléments est exigée. Ceci est surtout pour vérifier la compatibilité ou l'immunité électromagnétique des éléments d'une installation.

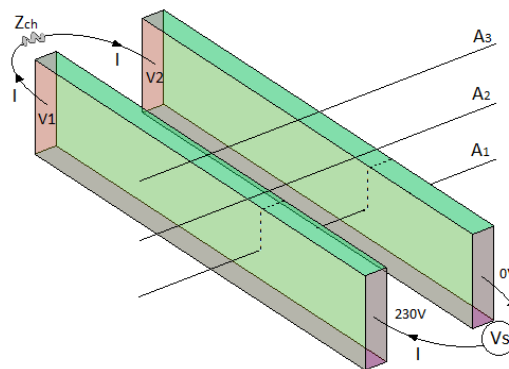


Figure 6 : hauteurs d'axes de calcul des profils d'inductions : 20mm (mi- barre) ; 25 mm et 90mm ;

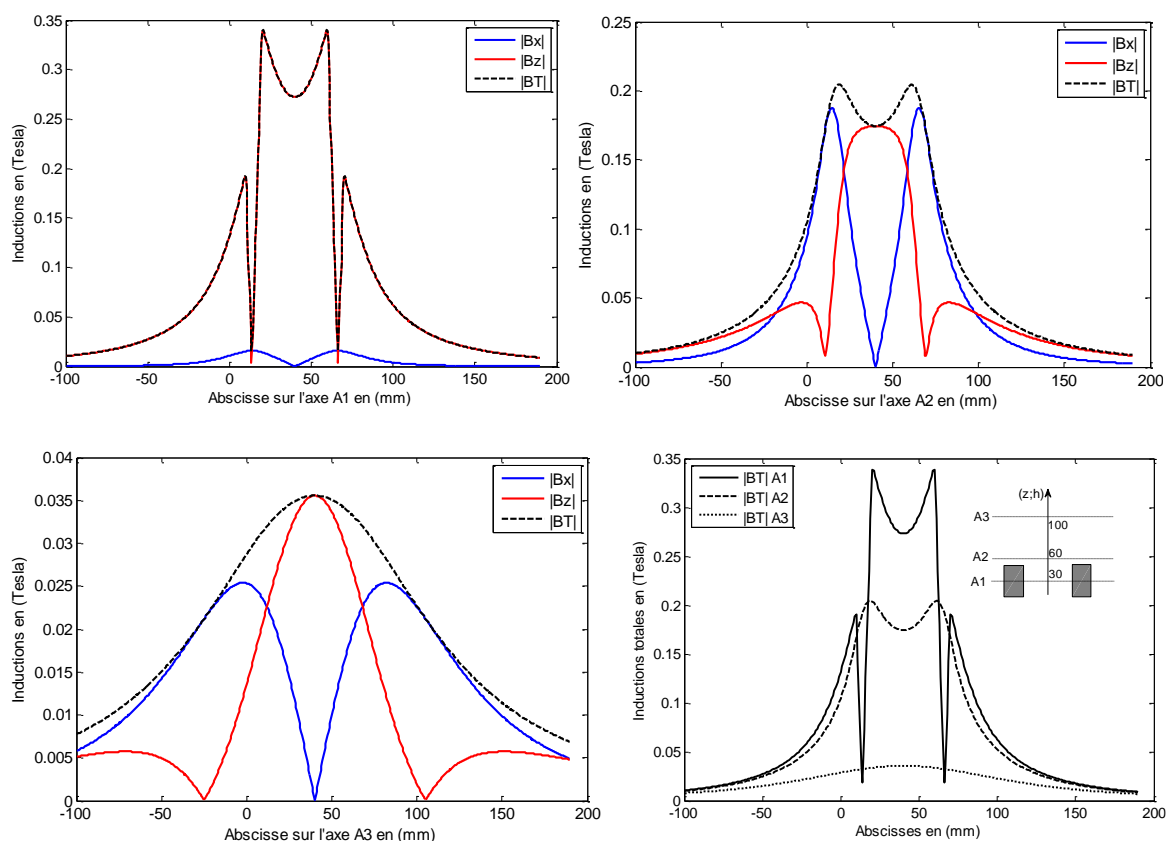


Figure 7 : Profils d'inductions sur des axes transversaux

L'axe (A1) traverse transversalement les deux barres presque en leurs milieux, la figure montre que sur cet axe la composante dominante de l'induction est « Bz » l'autre « Bx » est très faible. Elle montre aussi qu'à l'intérieur d'une barre l'induction varie linéairement et à l'extérieur varie hyperboliquement. Ceci s'accorde qualitativement avec les connaissances théoriques pour des conducteurs de sections circulaires « a » [PAU-87].

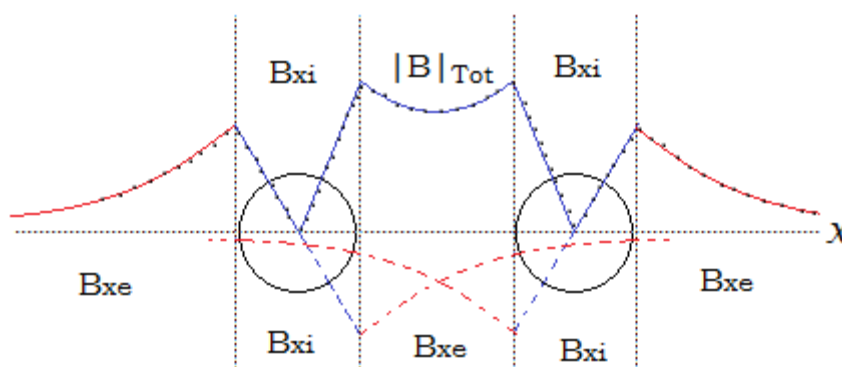


Figure 8 : profil théorique d'induction pour conducteurs ronds de sections « a »

$$\begin{cases} B_{xi} = \frac{\mu I_x}{2\pi x} = \frac{\mu I}{2\pi a^2} \cdot x & : \text{induction interne} \\ B_{xe} = \frac{\mu I}{2\pi x} = \frac{\mu I}{2\pi} \cdot \frac{1}{x} & : \text{induction externe} \end{cases}$$

L'induction maximale sur cet axe « A » se trouve entre les barres mais au voisinage immédiat des barres.

Quant aux profils sur les autres axes, la figure montre qu'en s'éloignant des barres, les deux composantes  $B_x$  et  $B_z$  deviennent concurrentes mais leurs intensités diminuent. L'intensité maximale d'induction totale se déplace vers l'axe vertical passant au milieu entre les deux barres. En gros, ces observations s'alignent droitement avec les observations théoriques, ce qui rend l'approche par PEEC assez appréciable.

### III-3. Jeu de barres triphasé

Comme deuxième mise en œuvre de l'approche PEEC, nous proposons une analyse d'un jeu de barres triphasé basse tension, constitué de quatre barres en cuivre, rectilignes de même longueur 1m, de sections rectangulaires (10x40) mm<sup>2</sup> et d'espacement (40mm) entre barres adjacentes. Un système idéal de tensions triphasées équilibrées, de 230V efficace, et une charge triphasée équilibrée, assimilable à un court-circuit de 0.001 $\Omega$ , sont branchées aux extrémités des barres, Fig.8.

Trois configurations (dispositions) sont à comparer à la fréquence industrielle (50Hz) et pour un système de tension et un charge de court-circuit équilibrées. Nous nous limitons la comparaison en ces points :

- Le courant dans le neutre
- Les pertes dans les barres
- L'induction magnétique totale suivant des axes identiques

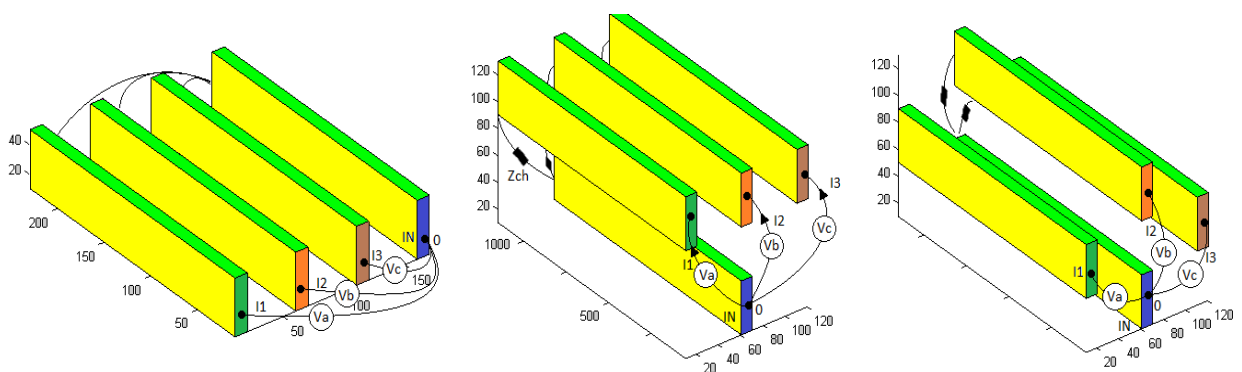


Figure 9 : Disposition des barres étudiées

## 3.1 Configuration en nappe

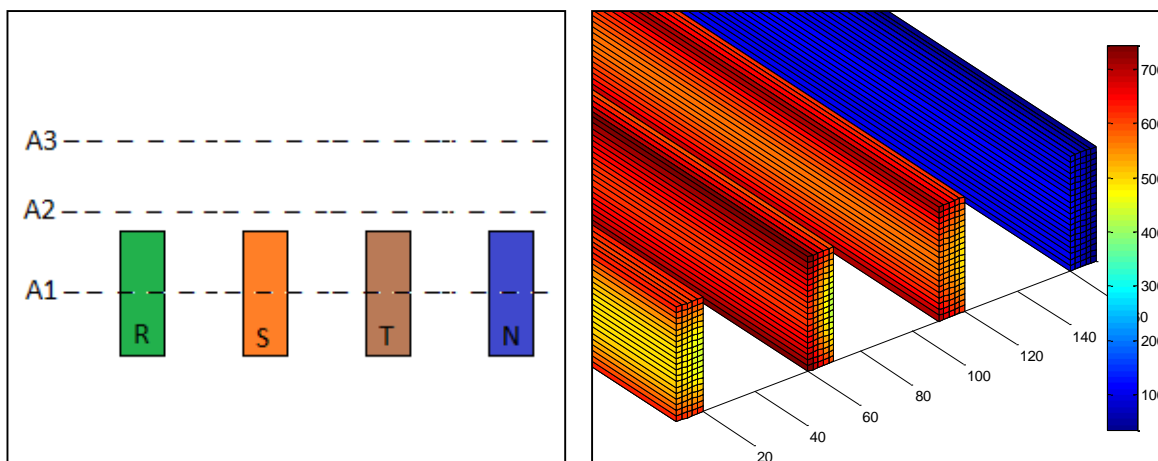


Figure 10 : Distribution des courants dans les barres pour la disposition en nappe

	Barre (1-R)	Barre (2-S)	Barre (3-T)	Barre (4-N)
$I_{cc}$ (kA)	204.0478	225.2278	225.1046	28.9976
$\Delta P_{cc}$ (MW)	1.9211	2.3545	2.3392	0.0430
$R$ (m $\Omega$ )	0.0461	0.0464	0.0462	0.0512

Tableau 3 : Récapitulatif des grandeurs de comparaison pour la configuration en nappe

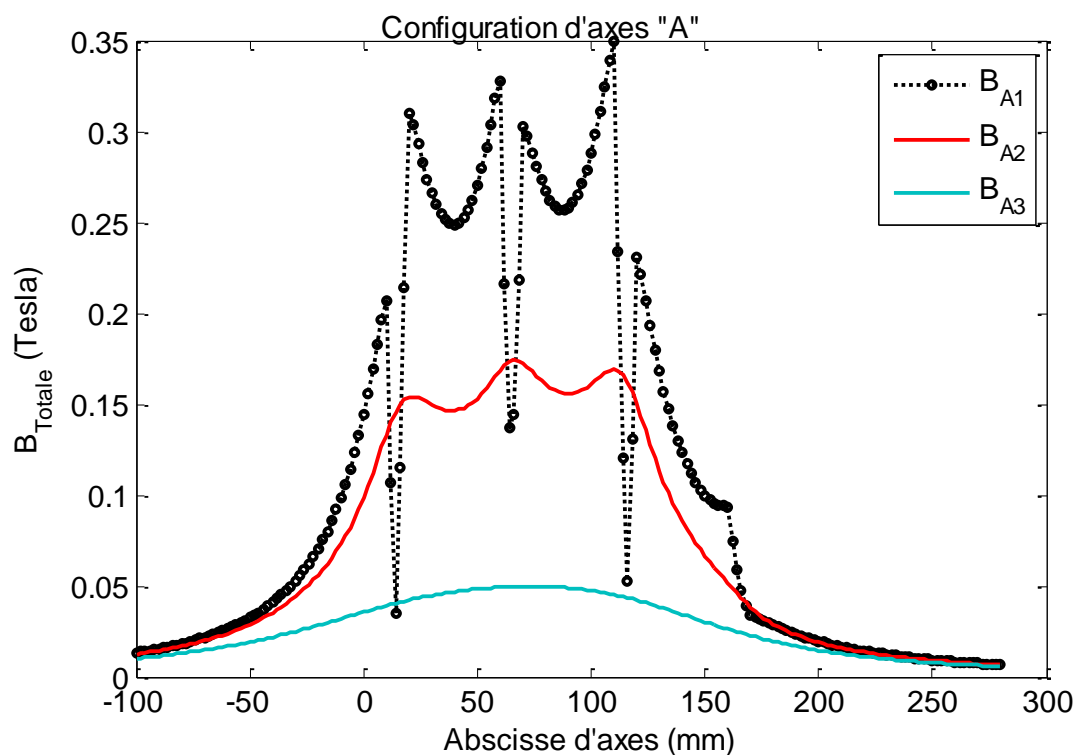


Figure 11 : Profils des inductions le long les axes A de la configuration en nappe

### 3.2 Configuration en « T ».

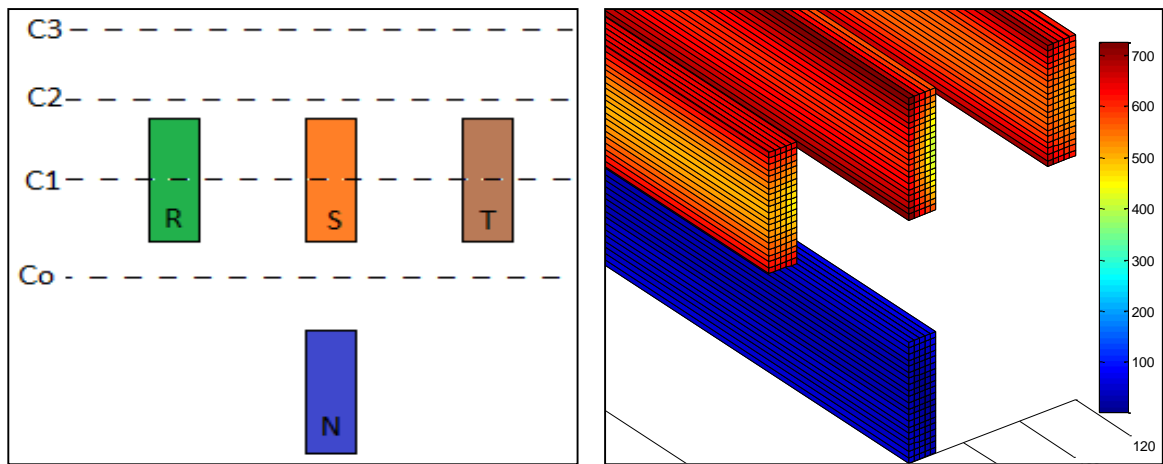


Figure 12 : Distribution des courants dans les barres pour la disposition en T

	Barre (1-R)	Barre (2-S)	Barre (3-T)	Barre (4-N)
$I_{cc}$ (kA)	213.3916	218.9622	223.2598	1.1354 kA
$\Delta P_{cc}$ (MW)	2.1012	2.2276	2.3001	0.0086
$R$ (m $\Omega$ )	0.0461	0.0465	0.0461	6.6744

Tableau 4 : Récapitulatif des grandeurs de comparaison pour la configuration en T

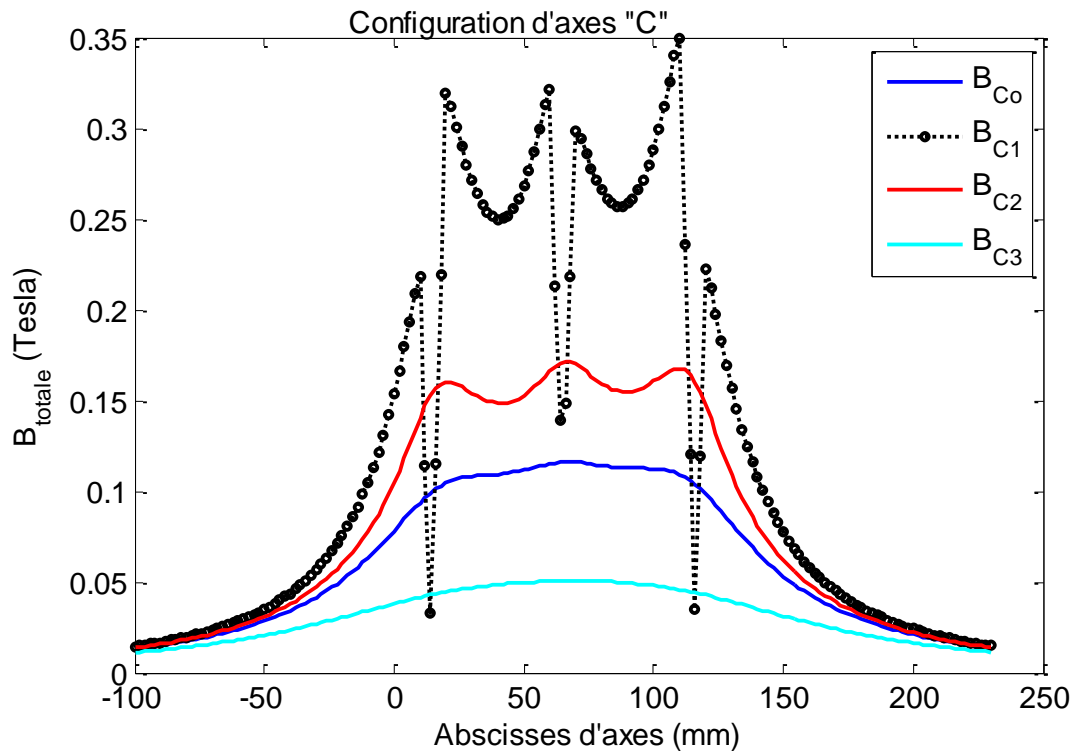


Figure 13 : Profils des inductions le long les axes C de la configuration en T

## 3.3 Configuration en « O »

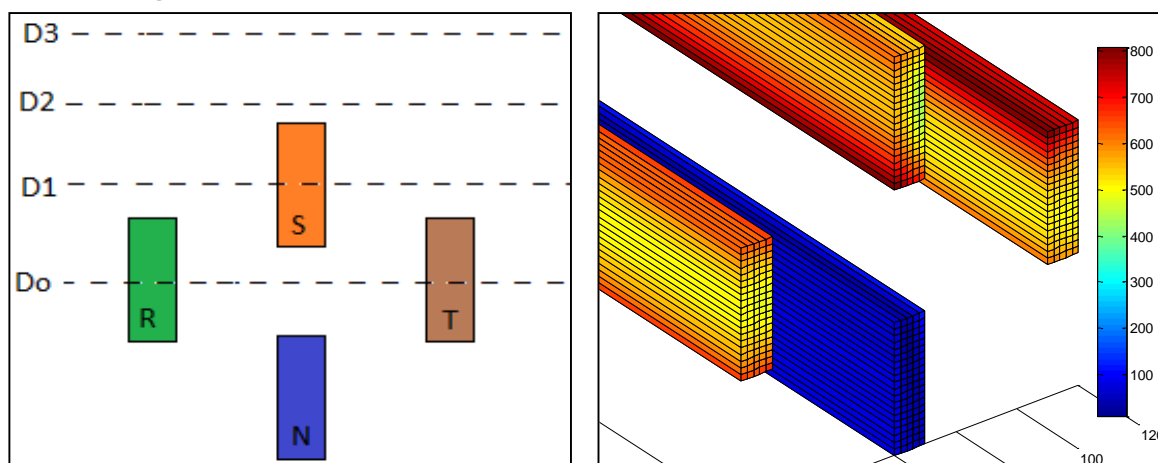


Figure 14 : Distribution des courants dans les barres pour la disposition en « O »

	Barre (1-R)	Barre (2-S)	Barre (3-T)	Barre (4-N)
$I_{cc}$ (kA)	212.9854	217.1005	224.5773	9.6798
$\Delta P_{cc}$ (MW)	2.1212	2.2142	2.3550	0.0237
$R$ (m $\Omega$ )	0.0468	0.0470	0.0467	0.2530

Tableau 5 : Récapitulatif des grandeurs de comparaison pour la configuration en « O »

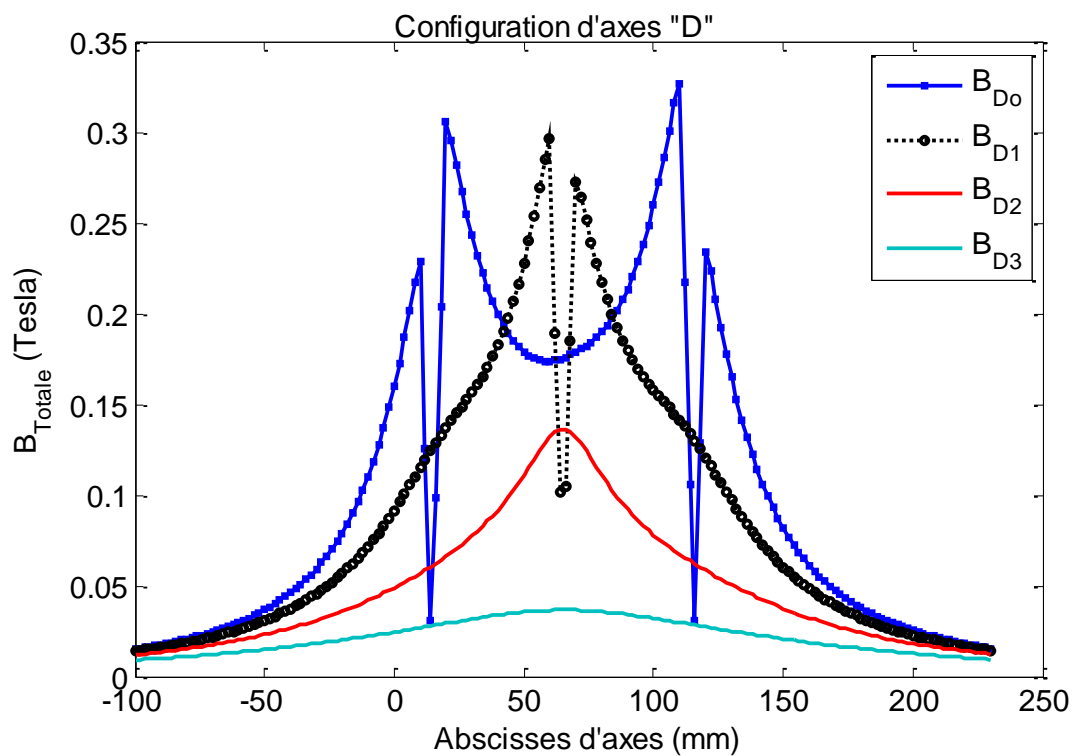


Figure 15 : Profils des inductions le long les axes D de la configuration en « O »

### 3.4 Comparaisons et discussions

Il n'existe pas de configuration absolument meilleure que les autres, tout dépend des conditions par les quelles une configuration peut être prise.

En examinant les résultats obtenus, on peut initialement dresser, dans le tableau (6), les différentes grandeurs favorites à une comparaison.

Configuration		En nappe	En « T »	En « O »
Courant du neutre (kA)		28.9976	1.1354	9.6798
Pertes totales (MW)		6.6578	6.6375	6.7141
Volume occupé (m <sup>3</sup> )		0.0064	0.0132	0.0132
Induction Maximale Par axe (Tesla)	Axe <sub>0</sub>	Néant	0.12	0.33
	Axe <sub>1</sub>	0.35	0.35	0.30
	Axe <sub>2</sub>	0.175	0.165	0.14
	Axe <sub>3</sub>	0.05	0.05	0.04

Tableau 6 : Comparaison des grandeurs d'intérêts entre configurations

#### 3.4.1 Symétrie

Du point de vue « symétrie » des courants dans les barres, celle-ci peut être évaluée par le courant passant dans la barre neutre lors d'une application source-charge équilibrées.

L'examen de ces courants dans le neutre, tous non nuls, montre qu'aucune des configurations n'est parfaitement symétrique.

Cependant, la configuration la plus proche de la « symétrie » est celle qui produit le plus faible courant dans la barre neutre. De ce fait, la configuration la plus « asymétrique » est celle en « nappe » car, elle génère un courant de court-circuit important (28.9976 kA) dans la barre du neutre. Par contre, la plus symétrique est celle en « T » car elle génère le plus faible courant dans le neutre (1.1354 kA).

Notons qu'une asymétrie des courants peut entraîner une asymétrie des tensions, des potentiels aux points neutres, des pertes supplémentaires dans les conducteurs neutres, des d'inductions supplémentaires dues aux boucles apparaissant entre barres de phases et barre du neutre, etc.

#### 3.4.2 Pertes (échauffements)

Du point de vue pertes totales : sources de chaleurs. Les trois dispositions sont équivalentes, avec un léger favoris de la configuration « T ». Bien entendu, les trois dispositions n'ont pas les mêmes conditions de transfert de cette chaleur (c.-à-d. de refroidissement).

#### 3.4.3 Espace occupé

Le volume d'espace occupé peut être parmi les contraintes les plus sévères d'installations en espaces confinés. La disposition en nappe est celle qui présente le moindre d'espace nécessaire, les deux autres sont équivalentes.



### 3.4.4 Emission d'induction

Du point de vue émission électromagnétique (induction), la meilleure est celle qui produit le moins d'induction maximale en des endroits proches de la structures. Par conséquent la meilleure parmi ces configurations est celle en « O ».

Configuration	En nappe	En « T »	En « O »
Symétrie		Bonne	
Pertes		Bonne	
Espace	Bonne		
Emission			Bonne

Tableau 7 : Récapitulatif des comparaisons

L'ensemble des figures, montrant la distribution des courants dans les barres, montre le non uniformité de cette distribution selon les sections des barres : celle-ci est due aux effets de la fréquence qui ont été mis en évidence lors de l'analyse de jeu de barre monophasé.

## III-4. Conclusion

Malgré que les résultats obtenus n'ont pas été validés quantitativement par confrontation aux mesures ou à des simulations professionnelles ; cependant, leurs confrontations qualitatives face aux connaissances théoriques a donné une si bonne appréciation de l'approche par PEEC choisie pour cette étude.

On note que dans cette étude, nous n'avons utilisé que le minimum de l'approche PEEC : seule sa partie inductive. Cela, bien entendu, ne limite pas l'analyse à la détermination des courants et tensions. Cela présente l'entrée commune (source) aux problèmes thermique et électrodynamique qui n'ont pas été abordé dans ce travail.

# **CONCLUSION GENERALE**

L'objectif de ce travail était de proposer une approche qui permet une représentation en circuits électriques d'une interconnexion rigide de type jeux de barres afin de l'analyser ou de la dimensionner. La méthode PEEC a été appliquée afin de trouver ce schéma électrique équivalent.

Et comme il était nécessaire, avant toute analyse, de connaître la répartition de courant à l'intérieur du jeu de barres, ces courants sont obtenus en résolvant les équations du schéma équivalent issu de la PEEC.

Ce travail n'a pas été validé quantitativement puisque nous ne disposons pas de données ou d'outils de confrontation. Cependant, qualitativement, l'ensemble des résultats que nous avons obtenus, par l'approche PEEC, vont dans le bon sens théorique. En effet, des phénomènes et des effets théoriquement prévus ont été observés sur les résultats obtenus.

Les effets de la fréquence (peau et proximité) ont été nettement visibles sur la distribution des courants à l'intérieur des barres. Leurs conséquences ont été aussi confirmées par les évolutions fréquentielles des grandeurs globales : courants, résistances, pertes et inductances.

Les effets de la disposition géométrique des barres sur la symétrie des courants (courant dans le neutre) et sur les profils d'inductions ont été clairement observés.

Malheureusement nous n'avons pas pu atteindre les analyses thermique et électrodynamique, mais on peut imaginer le lien entre la puissance dissipée (pertes) et la température : à géométrie constante, plus il y a de pertes et plus ça chauffe, et le lien entre les courants, les inductions et l'effort : plus il y a de forts courants, plus il y a d'intense induction et plus il y aura d'importants efforts.

Donc, l'ensemble des résultats obtenus viennent confirmer l'adéquation de la méthode PEEC à la représentation et aux analyses électromagnétiques des structures d'interconnexions à jeux de barres.

Comme suite à ce travail réalisé, des perspectives semblent intéressantes : étendre l'analyse aux problèmes thermique et électrodynamique, considérer les dérivations, les raccordements, les formes non rectilignes des barres, etc.

## **REFERENCES ET BIBLIOGRAPHIES**

[COP-56]: Copper «Development Association Copper for busbar», C.D.A. Publication No. 22, Seventh revised impression, 1956

[DIM-03]: G Dimitris, et all. « Parametric Short-Circuit Force Analysis of Three-Phase Busbars—A Fully Automated Finite Element Approach». IEEE Trans on Power Delivery, Vol.18, No 2, April 2003. Pp 531-53

[EKM-09] Ekman Jonas « Electromagnetic Modeling Using the Partial Element Equivalent Circuit Method » these de Doctorat de l'université de la Technology de Lulea de Suède, 2009.

[FD-07] :Fabrice DUVAL «Gestion du Câblage des Masses Electriques dans un Véhicule Automobile – Application C.E.M. » Thèse de doctorat de l'Université Paris 11-2007.

[GP-07] : Guide de puissance LEGRAND 2007.

[Heor-65] : C. Hoer, C. Love «Exact Inductance Equations for Rectangular Conductors With Applications to More Complicated Geometries", Journal of Research of the national Bureau of Standards - Engineering and Instrumentation, Vol. 69C, No 2, April-June 1965.

[KUS-16]: Dariusz Kusiak, et *all*, «Calculations of the magnetic field of the three-phase 4-conductor line with rectangular busbars». Computer Applications in Electrical Engineering. Vol. 14 2016. Pp 25 -38 DOI 10.21008/j.1508-4248.2016.0003

[MG-01] :J. M. Guichon, « Modélisation, caractérisation, dimensionnement de jeux de barres ». Thèse de doctorat de l'INP de Grenoble 2001

[MON-06] : F. Monsefi, « Mathematical Modeling of Electromagnetic Disturbances in Railway System » thèse de Doctorat de l'université de Lulea de Suède, 2006.

[Net1] <https://circuitglobe.com/electrical-bus-bar-and-its-types.html>

[Net2] <https://www.techniques-ingenieur.fr/base-documentaire/energies-th4/reseaux-electriques-industriels-et-tertiaires-42265210/jeux-de-barres-a-basse-tension-d5165/>

[Net4] <https://studylibfr.com/doc/2669824/jeux-de-barres-%C3%A0-basse-tension>

[PAU-08]: Clayrton R. Paul. «Analysis of multiconductor transmission lines». Copyright © 2008 by John Wiley & Sons, Inc. “2nd ed». (ISBN 978-0-470-13154-1).

[TI] : Roland AUBER, « Jeux de barres basse tension ». Techniques de l'Ingénieur, traité Génie électrique D 5 165.

[WIK-19]: "Busbar" 2019, en Wikipedia: l'Encyclopédie gratuite en ligne, Wikimedia Fondation Inc., vu 30 April 2019, <<https://en.wikipedia.org/wiki/Busbar>>.