REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE MOHAMED SEDDIK BENYAHIA-JIJEL
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Physique

N° d'ordre :

Série :

Thèse

présentée pour obtenir le diplome de

Doctorat en Sciences

Spécialité : Physique

Option : Physique théorique

par

Benchikha Amar

Thème

Problèmes dépendants de l'energie et intégrale de chemin

Soutenue le : 16/ 04/ 2015

Devant le Jury :

Président :	Kh. Nouicer	Prof.	Univ. Jijel
Rapporteur :	L. Chetouani	Prof.	Univ. Constantine 1
Examinateurs :	A. Lecheheb	Prof.	Univ. Constantine 1
	M. Merad	Prof.	Univ. Oum. El Bouaghi
	T. Boudjedaa	Prof.	Univ. Jijel
	A. Bounames	Prof.	Univ. Jijel

Dédicas

Je dédie ce travail

A ma mère et à mon père

A mon épouse

A mes enfants Yousre et Jyad

A mes frères et à mes sœurs

A toute la famille et à tous mes amis

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur le Professeur Lyazid Chetouani qui m'a donné la chance de préparer cette thèse sous sa direction. Ses conseils ont été indispensables pour réaliser ce travail. Je tiens particulièrement à le remercier de la liberté d'action qu'il m'a donné et de sa disponibilité, sa gentillesse et son enthousiasme.

Je remercie très sincèrement Monsieur le Professeur Khiereddine Nouicer pour avoir accepté d'être président du jury.

Mes remerciements vont également aux honorables professeurs Ahmed. Lecheheb, Mahmoud. Merad, Tahar. Boudjedaa, Abdelhafid Bounames membres du jury de soutenance qui ont accepté d'évaluer ce travail.

Enfin, je remercie infiniment tous ceux qui m'ont aidé de prés ou de loin durant la réalisation de ce travail et en particulier mon épouse pour son soutien durant la préparation de cette thèse.

Amar Benchikha.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction générale

La méthode des intégrales de chemins (ou path integral) introduite en 1948 pour la première fois par Feynman dans sa thèse est considérée actuellement comme la troisième formulation de la mécanique quantique après celle de Heisenberg (1926) et de Schrödinger (1927). Sur une suggestion de Dirac, cette méthode consiste à formuler la mécanique quantique directement en terme de Lagrangien et de chemins et avec cette approche, la détermination du propagateur permet ainsi d'obtenir toutes les informations sur le système. Dans cette approche le propagateur est écrit comme une somme sur tous les chemins possibles entre les points initial et final où chaque chemin contribue au propagateur par un poids en $\exp iS/\hbar$, $S = \int Ldt$ étant l'action du système. L'avantage de cette technique c'est quelle est une approche globale utile à des divers domaines de la physique théorique, i.e la mécanique quantique, la physique statistique et la théorie quantique des champs.

Notre but dans cette thèse est de considérer les potentiels dépendants de l'énergie et d'apporter une clarification au problème de la constante de normalisation des fonctions d'onde relatives à l'équation de Schrödinger ainsi qu'à l'équation de Klein-Gordon, en utilisant cette approche des intégrales de chemins.

Nous proposons également de considérer par la méthode des intégrales de chemins, le problème plus général de la masse fonction non seulement de la position et mais en plus de l'énergie.

Pour ce qui est des équations d'onde avec les potentiels dépendants de l'énergie, ils ont été considérés depuis longtemps par plusieurs auteurs. Par exemple, dans le cas non-relativistes on peut citer ; les potentiels dépendants de l'énergie considérés par l'équation de Schrödinger avec les dimensions 1D, 3D et D $[1-4]$, le problème à plusieurs corps avec des potentiels dépendants de confinement de l'énergie [5], le problème des potentiels locaux équivalents [6], les potentiels dépendants de l'énergie de manière linéaire discutées semi-classiquement [7], les propriétés statiques des systèmes de quarks lourds décrites par un potentiel en fonction de l'énergie [8], et la transformation de Darboux utilisée dans l'équation de Schrödinger avec un potentiel dépendant de l'énergie [9], le problème

de la diffusion inverse [10] les formules de trace [11], et la représentation linéaire de Hamiltoniens dépendants de l'énergie [12].

Dans le cas relativiste, pour des particules sans spin (ou de Klein-Gordon (KG)) nous pouvons citer le potentiel dépendant de l'énergie à D-dimensions en utilisant la méthode Nikiforov-Uvarov [13], et pour des particules de spin 1/2 (de Dirac) à notre connaissance seul un potentiel de Coulomb dépend de E, y compris le couplage de Coulomb comme potentiel d'interaction de tenseur sous pseudospin et spin symétrie a été considéré par la méthode asymptotique d'itération [14].

Il est utile de préciser que le problème essentiel pour les potentiels dépendants de E réside dans la modification du produit scalaire pour assurer la conservation de la norme et que le propagateur est bien affecté par leur présence.

Après cette brève introduction, notre thèse traitant des problèmes dépendants de E se compose essentiellement de trois chapitres.

Au 1er chapitre consacré aux particules non relativistes sans spin, le propagateur est d'abord formulé suivant l'approche des intégrales de chemins et il est montré à partir de la décomposition spectrale qu'une correction due à la dépendance en énergie des potentiels, est apportée. Cette correction est ensuite déterminée par l'équation de continuité ou encore en adaptant le théorème de Feynman-Hellmann à notre cas. Des exemples simples comme l'oscillateur harmonique et l'atome d'hydrogène (radial) où, respectivement, la fréquence et la constante de Coulomb dépendent de l'énergie, sont considérés comme illustration.

Dans le 2ème chapitre et avec les mêmes étapes du premier chapitre, le problème de la normalisation des fonctions d'onde, lorsque les interactions décrites par les potentiels dépendants de E sont présentes dans l'équation de Klein-Gordon est reconsidéré par le formalisme des intégrales de chemins. Les corrections sont déterminées encore via l'équation de continuité et le théorème de Feynman-Hellmann (adapté) et deux formes simples de potentiels sont pris pour exemples : le potentiel linéaire et le potentiel de Coulomb avec des paramètres dépendants de l'énergie.

Enfin, dans le 3ème chapitre, le problème général de la masse qui dépend de la position et en outre de l'énergie E est considéré par l'approche des intégrales de chemins. Des cas particuliers simples sont utilisés pour extraire les fonctions d'onde et les énergies.

Chapitre 2

Potentiels dépendants de l'énergie et normalisation des fonctions d'onde

2.1 Introduction

Nous proposons dans ce chapitre, après avoir donné l'expression de propagateur de l'approche intégrale de chemin [15] d'examiner le problème de la normalisation des fonctions d'onde lié à des potentiels dépendants de l'énergie et de donner une justification. A titre d'exemple, l'oscillateur harmonique et l'atome d'hydrogène (radial) où, respectivement, la fréquence et la constante de Coulomb dépendent de l'énergie, sont examinés et leurs propagateurs déterminées. Les fonctions d'onde sont extraites à partir de la décomposition spectrale des propagateurs.

2.2 Propagateur et décomposition spectrale

Le propagateur $K(x_b, t_b; x_a, t_a)$, que nous proposons de déterminer est solution de l'équation suivante

$$\left(\hat{H}_b - i\hbar\frac{\partial}{\partial t_b}\right) K(x_b, t_b; x_a, t_a) = i\hbar\delta\left(x_b - x_a\right)\delta\left(t_b - t_a\right), \tag{2.1}$$

où

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V},$$

est l'opérateur Hamiltonien du système avec $\hat{V} = V\left(\hat{x}, \hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)$ potentiel dépend de l'énergie.

Formellement, nous avons successivement

$$\begin{aligned} K(x_b, t_b; x_a, t_a) &= \frac{i\hbar}{\hat{H} - \hat{E}}\delta\left(x_b - x_a\right)\delta\left(t_b - t_a\right) \\ &= \int_0^\infty d\lambda \left\langle x_b, t_b\right| e^{-\frac{i}{\hbar}\lambda\left(\hat{H} - \hat{E}\right)} \left|x_a, t_a\right\rangle . \end{aligned}$$

Suivant la procédure habituel de la construction de la formulation d'intégrale de che-

min de K, l'intervalle de temps est d'abord divisée en $N+1$ parties égales infinitésimales $\varepsilon = \frac{\lambda}{N+1}$ et l'exponentielle est décomposée en N +1 exponentielle (à la suite Trotter) et puis les relations de fermeture

$$\int\int dtdx\,|x,t\rangle\,\langle x,t| = 1,$$

et

$$\int\int dpdE\,|p,E\rangle\,\langle p,E| = 1\ ,$$

sont insérées entre chaque paire d'exponentielles. Les vecteurs de base $|x,t\rangle\,,|p,E\rangle$ kets respectivement relatifs à $\hat{x}$, $\hat{t}$, $\hat{p}$ et $\hat{E}$ sont utilisés dans le but d'éliminer les opérateurs et le passage $|x\rangle \to |p\rangle$, $|t\rangle \to |E\rangle$ est effectué au moyen de produits scalaires

$$\langle x|\,p\rangle = \frac{1}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}px}\quad , \qquad\qquad \langle E|\,t\rangle = \frac{1}{2\pi\hbar}e^{-\frac{i}{\hbar}Et}.$$

La forme discrète de K est alors

$$\begin{aligned} K(x_b,t_b;x_a,t_a) \;=\; & \int_0^\infty d\lambda \lim_{N\to\infty}\int\prod_{n=1}^{N}dx_n dt_n \prod_{n=1}^{N+1}\frac{dp_n dE_n}{(2\pi\hbar)^2} \\ & \times\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\left[p_n\left(x_n-x_{n-1}\right)-E_n\left(t_n-t_{n-1}-\varepsilon\right)-\right.\right. \\ & \left.\left.\varepsilon\left(\frac{p_n^2}{2m}+V\left(x_n,E_n\right)\right)\right]\right\}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

qui, du point de vue formel K est finalement

$$K(x_b,t_b;x_a,t_a) = \int_0^\infty d\lambda\int DxDpDtDEe^{\frac{i}{\hbar}\int_0^\lambda ds\left[p\dot{x}-\,E\,\left(\dot{t}-1\right)-\left(\frac{p^2}{2m}+V(x,E)\right)\right]}, \tag{2.3}$$

où nous avons noté $x_a = x_0$, $x_b = x_{N+1}$, $t_a = t_0$ et $t_b = t_{N+1}$.

Comme les intégrations sur t_n donnent N fonctions de Dirac $\delta\left(E_n - E_{n+1}\right)$, ce qui

implique

$$E_1 = E_2 = ... = E_{N+1} = E,$$

et après intégration sur les variables E_n, K se réduit à

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar}E(t_b - t_a)} \int_0^{\infty} d\lambda e^{\frac{i}{\hbar}E\lambda} \int DxDp e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^{\lambda} ds \left[p\dot{x} - \left(\frac{p^2}{2m} + V(x,E)\right)\right]}. \tag{2.4}$$

En intégrant par rapport à p_n, on obtient l'expression finale du K

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar}E(t_b - t_a)} \int_0^{\infty} d\lambda e^{\frac{i}{\hbar}E\lambda} \int Dx e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^{\lambda} ds \left[\frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x,E)\right]}. \tag{2.5}$$

Il est évident que l'intégrale sur λ est la fonction de Green

$$\int_0^{\infty} d\lambda e^{\frac{i}{\hbar}E\lambda} \int Dx e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^{\lambda} ds \left[\frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x,E)\right]} = \frac{\hbar}{i} \sum_n \frac{\psi_{\mathcal{E}_n(E)}(x_b)\, \psi^*_{\mathcal{E}_n(E)}(x_a)}{E - \mathcal{E}_n(E)},$$

où $\mathcal{E}_n(E)$ sont les valeurs propres de l'énergie E (fixée) associées à des états $\psi_{\mathcal{E}_n(E)}(x)$ et qui sont tels que $\int dx \left|\psi_{\mathcal{E}_n(E)}(x)\right|^2 = 1$.

Comme $\frac{1}{E - \mathcal{E}_n(E)} \approx \frac{1}{1 - \mathcal{E}'_n(E_n)} \frac{1}{E - E_n}$ où E_n sont les pôles (avec $\mathcal{E}'_n(E_n) = \left.\frac{d\mathcal{E}_n(E)}{dE}\right|_{E=E_n}$), l'intégrale sur E peut être effectuée et donne la décomposition spectrale habituelle de propagateur

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t_b - t_a)} \Phi_{E_n}(x_b)\, \Phi^*_{E_n}(x_a), \tag{2.6}$$

où

$$\Phi_{E_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathcal{E}'_n(E_n)}} \psi_{\mathcal{E}_n(E_n)}(x), \tag{2.7}$$

sont les fonctions d'onde qui ne sont pas normalisées suivant la condition habituelle

$\int dx \left|\Phi_{E_n}(x)\right|^2 = 1$ à cause du facteur additionnel $\left(1-\mathcal{E}'_n\right)^{-1/2}$, mais en fonction de

$$\int dx \left|\Phi_{E_n}(x)\right|^2 \left[1 - \frac{\partial V(x, E_n)}{\partial E_n}\right] = 1. \tag{2.8}$$

Dans le cas où le potentiel ne dépend pas de E ($\frac{\partial V(x,E_n)}{\partial E_n} = 0$), il est évident que $\mathcal{E}'_n = 0$ et nous trouvons la décomposition spectrale standard et la condition de normalisation habituelle.

2.3 Détermination de la correction $\mathcal{E}'_n$

En effet, nous allons examiner ce problème de la normalisation en partant de l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t) + \left[V\left(x, i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\Psi(x,t)\right]. \tag{2.9}$$

Si nous décomposons Ψ sur la base $\{\Phi_{E_n}(x)\}$

$$\Psi(x,t) = \sum_n a(E_n)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}\Phi_{E_n}(x), \tag{2.10}$$

et si l'on considère deux états $\Phi_{E_n}(x)$ et $\Phi_{E_m}(x)$ d' énergies E_n et E_m, nous avons

$$\begin{aligned} E_n\Phi_{E_n}(x) &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\Phi_{E_n}(x) + V(x, E_n)\Phi_{E_n}(x), \\ E_m\Phi_{E_m}(x) &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\Phi_{E_m}(x) + V(x, E_m)\Phi_m(x). \end{aligned}$$

En multipliant la première équation par $\Phi^*_{E_m}(x)$ et la 2ème (conjugué complexe) par $\Phi_{E_n}(x)$ et après soustraction et intégration sur tout l'espace, nous obtenons

$$\int dx \Phi^*_{E_m}(x)\Phi_{E_n}(x)\left(1 - \frac{V(x,E_n) - V(x,E_m)}{E_n - E_m}\right) = \delta_{nm}, \tag{2.11}$$

qui est la condition d'orthogonalité.

A la limite $E_m \to E_n$, $\frac{V(x,E_n)-V(x,E_m)}{E_n-E_m} \to \frac{\partial V(x,E_n)}{\partial E_n}$, cette condition d'orthogonalité se réduit à la condition de normalisation (2.8).

Par conséquent, le potentiel dépendant de l'énergie modifie la constante de normalisation des fonctions d'onde.

Une autre manière de voir la raison de la normalisation (2.8) est de considérer l'équation de continuité. En multipliant l' Eq.(2.9) et de son conjugué complexe, respectivement par Ψ^* et Ψ, on obtient après soustraction l'équation suivante

$$\frac{\partial \left|\Psi\left(x,t\right)\right|^2}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = -\frac{i}{\hbar}\left\{\Psi^*\left[V\left(x, i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\Psi\right] - \Psi\left[V\left(x, i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\Psi\right]^*\right\}.$$

où $j = \frac{\hbar}{2mi}\left(\Psi^*\left(x,t\right)\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial x} - \Psi\left(x,t\right)\frac{\partial\Psi^*(x,t)}{\partial x}\right)$ est la densité de courant habituel. Notons la présence d'un 2ème membre ($\neq 0$) qui peut être considéré comme une source et qui peut toujours être absorbée dans le premier terme en utilisant la relation $f\left(x,t\right) = \frac{\partial}{\partial t}\int^t ds f\left(x,s\right)$. Alors, l'équation précédente se réduit à l'équation de continuité liée au potentiel dépendant de l'énergie

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}j = 0, \tag{2.12}$$

où maintenant

$$\begin{aligned}\rho &= \left|\Psi\right|^2 - \frac{1}{i\hbar}\int^t ds\left\{\Psi^*\left(x,s\right)\left[V\left(x, i\hbar\frac{\partial}{\partial s}\right)\Psi\left(x,s\right)\right] - \right.\\ &\quad \left.\Psi\left(x,s\right)\left[V\left(x, i\hbar\frac{\partial}{\partial s}\right)\Psi\left(x,s\right)\right]^*\right\},\end{aligned} \tag{2.13}$$

est la densité de probabilité (ce qui n'est pas définie positive) et j est la densité de courant inchangé défini précédemment

$$\int dx\rho = 1. \tag{2.14}$$

Remplaçons (2.10) dans l'expression (2.13)

$$\begin{aligned}\rho &= \sum_n\sum_m a\left(E_n\right)a^*\left(E_m\right)\Phi_{E_n}\left(x\right)\Phi^*_{E_m}\left(x\right)\left\{e^{\frac{i}{\hbar}t(E_m-E_n)}+\right.\\ &\left.-\frac{1}{i\hbar}\left(V\left(x,E_n\right)-V\left(x,E_m\right)\right)\int^t dse^{\frac{i}{\hbar}(E_m-E_n)s}\right\}.\end{aligned}$$

comme

$$\int^t dse^{\frac{i}{\hbar}(E_m-E_n)s}=\frac{\hbar}{i\left(E_m-E_n\right)}e^{\frac{i}{\hbar}(E_m-E_n)t}+Cte,$$

donc

$$\begin{aligned}\rho &= \sum_n\sum_m a\left(E_n\right)a^*\left(E_m\right)\Phi_{E_n}\left(x\right)\Phi^*_{E_m}\left(x\right)e^{\frac{i}{\hbar}t(E_m-E_n)}\left\{1-\frac{V\left(x,E_n\right)-V\left(x,E_m\right)}{E_n-E_m}\right\}\\ &-\frac{Cte}{i\hbar}\sum_n\sum_m a\left(E_n\right)a^*\left(E_m\right)\Phi_{E_n}\left(x\right)\Phi^*_{E_m}\left(x\right)\left(V\left(x,E_n\right)-V\left(x,E_m\right)\right),\end{aligned}$$

le terme avec la Cte indépendant du temps : peut être omis puisqu'il ne contribue pas à l'équation de continuité. Il ne reste plus que le premier terme qui dépend du temps et il est clair que si les conditions (2.8) et (2.11) est remplie alors $\int dx\rho=\sum_n\left|a\left(E_n\right)\right|^2=1$ i.e. il ya conformité avec l'interprétation probabiliste.

Dans le cas simple où le potentiel est séparable $V(x,\hat{E})=V_1\left(x\right)+V_2(x)\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)$ et avec une dépendance linéaire dans $\hat{\mathrm{E}}$, l'intégrale est tout simplement égale à

$$\frac{1}{i\hbar}\int^t ds\left(.\right)=V_2\left(x\right)\int^t ds\frac{\partial\left|\Psi\left(x,s\right)\right|^2}{\partial s}=V_2\left(x\right)\left|\Psi\left(x,t\right)\right|^2+c^{te}(x)V_2\left(x\right),$$

et la densité est

$$\rho=\left(1-V_2\left(x\right)\right)\left|\Psi\left(x,t\right)\right|^2,$$

où le terme $c^{te}(x)V_2\left(x\right)$ a été omis, puisqu'il ne contribue pas à (2.12). Ainsi, avec

cette forme linéaire en E, nous pouvons réduire ce problème à un problème de masse variables (par un changement de temps)

Enfin, grâce à Feynman-Hellmann (voir par exemple [16]), qui a établi le résultat (théorème) suivant

$$\frac{d\mathcal{E}(\lambda)}{d\lambda} = \int dx \Phi_\lambda^*(x) \frac{\partial \hat{H}(\lambda)}{\partial \lambda} \Phi_\lambda(x),$$

pour un Hamiltonien $\hat{H} = \hat{H}(\lambda)$ dépendant d'un paramètre λ et où $\Phi_\lambda(x)$ est un vecteur propre normalisé tel que

$$\hat{H}(\lambda) \Phi_\lambda(x) = \mathcal{E}(\lambda) \Phi_\lambda(x).$$

Comme dans notre cas $\hat{H}(\lambda) = \hat{T} + \hat{V}(\lambda)$ et si nous fixons $\lambda = E_n$ nous obtenons pour les potentiels dépendant de l'énergie la relation relative à la normalisation des fonctions d'onde

$$\mathcal{E}_n' = \frac{d\mathcal{E}_n(E_n)}{dE_n} = \int dx \Phi_{E_n}^*(x) \frac{\partial V(x, E_n)}{\partial E_n} \Phi_{E_n}(x). \tag{2.15}$$

2.4 Applications

Pour illustrer ce qui a été dit, nous considérons deux potentiels :

- l'oscillateur harmonique

$$V(x, E) = \frac{1}{2} m (1 + \gamma E^q) x^2, \tag{2.16}$$

-et le potentiel de Coulomb

$$V(r, E) = -\frac{\hbar^2}{m a_0} \frac{(1 + \gamma E)^q}{r}, \tag{2.17}$$

où la fréquence et la constante de Coulomb dépendent de l'énergie.

2.4.1 Cas de OH

Suivant [17] , le propagateur est donné par

$$\begin{aligned} K(x_b,t_b;x_a,t_a) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{2\pi\hbar}\exp\left[-\frac{i}{\hbar}E\left(t_b-t_a\right)\right] \\ &\sqrt{\frac{m}{\pi\hbar^3\omega_E}}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{E}{\hbar\omega_E}\right)D_{-\frac{1}{2}+\frac{E}{\hbar\omega_E}}\left(\sqrt{\frac{2m\omega_E}{\hbar}}x_b\right) \\ &\times D_{-\frac{1}{2}+\frac{E}{\hbar\omega_E}}\left(-\sqrt{\frac{2m\omega_E}{\hbar}}x_a\right) \quad (x_b>x_a)\,, \end{aligned} \tag{2.18}$$

où $D_\nu(z)$ sont fonctions cylindriques paraboliques (nous pouvons aussi utiliser la relation Mehler). A partir du fonction$-\Gamma$, les pôles sont donnés par

$$\frac{1}{2}-\frac{E}{\hbar\omega_E}=-n, \qquad n=0,1,2,.... \tag{2.19}$$

Examinons les trois cas détails suivants :

1er cas : q=1 ; $\omega_E^2=1+\gamma E$

Alors, l'énergie est

$$E_n^{\pm}=\frac{\hbar^2\left(2n+1\right)^2\gamma}{8}\pm\hbar\left(n+\frac{1}{2}\right)\sqrt{1+\frac{\hbar^2\left(2n+1\right)^2}{16}\gamma^2}, \tag{2.20}$$

(E_n^+ est choisi parce que E_n^- conduit à des fonctions d'onde non normalisables). Au voisinage des pôles, nous avons:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{E}{\hbar\omega_E}\right)\approx\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{n!\left(\frac{1}{2}-\frac{E}{\hbar\omega_E}+n\right)}=\frac{\left(-1\right)^{n+1}\hbar\omega_n}{n!\left(1-\frac{\hbar(2n+1)\gamma}{4\omega_n}\right)\left(E-E_n^+\right)},$$

où $\omega_n=\frac{\hbar(2n+1)}{4}\gamma+\sqrt{1+\frac{\hbar^2(2n+1)^2}{16}\gamma^2}$.

En utilisant la relation [18]

$$D_n(z) = 2^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{z^2}{4}} H_n\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right),$$

entre $D_\nu(z)$ et $H_n(z)$ (polynômes Hermite) et après intégration sur E,

$$\begin{aligned} K(x_b, t_b; x_a, t_a) &= \sum_n e^{-i\omega_n\left(n+\frac{1}{2}\right)(t_b-t_a)} \\ &\times \frac{\sqrt{m\omega_n}}{\sqrt{\pi\hbar}2^n n!\left(1-\frac{\hbar(2n+1)\gamma}{4\omega_n}\right)} e^{-\frac{m\omega_n}{2\hbar}\left(x_a^2+x_b^2\right)} \\ &\times H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega_n}{\hbar}}x_a\right) H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega_n}{\hbar}}x_b\right), \end{aligned} \tag{2.21}$$

on obtient dans ce cas à partir de la décomposition spectrale de propagateur

$$\Phi_n(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{m\omega_n}}{\sqrt{\pi\hbar}2^n n!\left(1-\frac{\hbar(2n+1)\gamma}{4\omega_n}\right)}} \times \exp\left[-\frac{m\omega_n}{2\hbar}x^2\right] H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega_n}{\hbar}}x\right), \tag{2.22}$$

convenablement normalisée.

2ème cas : q=$\frac{1}{2}$; $\omega_E^2 = 1 + \gamma\sqrt{E}$.

A partir des pôles de fonction$-\Gamma$ de l'équation (2.19) l'énergie E_n est déterminée par une équation de quatrième ordre E

$$E_n^4 + cE_n^2 + dE_n + e = 0, \tag{2.23}$$

où $c = -2\hbar^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2, d = -\hbar^4\left(n+\frac{1}{2}\right)^4\gamma^2$ and $e = \hbar^4\left(n+\frac{1}{2}\right)^4$.

Suivant [21], cette Eq. (2.23) peut être solutionnée via l'équation suivante du 2ème ordre

$$E_n^2 + \frac{A}{2}E_n + y_n - \frac{d}{A} = 0,$$

où $A = \pm 2\sqrt{2y_n - c}$. Ainsi, il existe quatre solutions

$$E_{n_{1,2,3,4}} = -A \pm \sqrt{A^2 - 16\left(y_n - \frac{d}{A}\right)}, \tag{2.24}$$

où

$$y_n = \sqrt[3]{\sqrt{D} - \frac{Q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{D} + \frac{Q}{2}} - \frac{R}{3},$$

est la solution de l'équation cubique suivante

$$8y_n^3 - 4cy_n^2 - 8ey_n + 4ec - d^2 = 0,$$

avec $D = \left(\frac{P}{3}\right)^3 + \left(\frac{Q}{2}\right)^2$, $P = \frac{3S-R^2}{3}$, $Q = \frac{2R^3}{27} - \frac{RS}{3} + T$, $R = -\frac{c}{2}$, $S = -e$, $T = \frac{4ec-d^2}{8}$.

Après intégration sur E, on obtient à partir de la décomposition spectrale

$$\begin{aligned} K(x_b, t_b; x_a, t_a) &= \sum_n \exp\left[-i\omega_n\left(n + \frac{1}{2}\right)(t_b - t_a)\right] \\ &\times \frac{\sqrt{m\omega_n}}{\sqrt{\pi\hbar}2^n n!\left(1 - \frac{\hbar(2n+1)\gamma}{8\omega_n\sqrt{E_n}}\right)} \exp\left[-\frac{m\omega_n}{2\hbar}\left(x_a^2 + x_b^2\right)\right] \\ &\times H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega_n}{\hbar}}x_a\right) H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega_n}{\hbar}}x_b\right), \end{aligned} \tag{2.25}$$

les fonctions d'onde normalisées

$$\Phi_n(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{m\omega_n}}{\sqrt{\pi\hbar}2^n n!\left(1 - \frac{\hbar(2n+1)\gamma}{8\omega_n\sqrt{E_n}}\right)}} \times \exp\left[-\frac{m\omega_n}{2\hbar}x^2\right] H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega_n}{\hbar}}x\right), \tag{2.26}$$

avec $\omega_n = \sqrt{1 + \gamma\sqrt{E_n}}$ et E_n solution d'Eq. (2.23).

3ème cas : q=2 ; $\omega_E^2 = 1 + \gamma E^2$

A partir des pôles de

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{E}{\hbar\omega_E}\right) \approx \frac{(-1)^n}{n!\left(\frac{1}{2} - \frac{E}{\hbar\omega_E} + n\right)} = \frac{(-1)^{n+1}\hbar\omega_n}{n!\left(1 - \hbar^2\left(n + \frac{1}{2}\right)^2\gamma\right)(E - E_n)},$$

on obtient les énergies

$$E_n = \frac{\hbar(2n+1)}{\sqrt{4 - \hbar^2(2n+1)^2\gamma}}, \tag{2.27}$$

où $\omega_n = \frac{2}{\sqrt{4-\hbar^2(2n+1)^2\gamma}}$ avec $n = 0, 1, 2, ...,$ pour $\gamma \leq 0$ et $n = 0, 1, 2, ..., < \frac{1}{\hbar\sqrt{\gamma}} - \frac{1}{2}$ pour $\gamma > 0$,

les fonctions d'onde sont

$$\Phi_n(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{m\omega_n}}{\sqrt{\pi\hbar}2^n n!\left(1 - \hbar^2\left(n + \frac{1}{2}\right)^2\gamma\right)}} \times e^{\left[-\frac{m\omega_n}{2\hbar}x^2\right]} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega_n}{\hbar}}x\right). \tag{2.28}$$

Notons que pour $\gamma = 0$, (dans les trois cas) nous obtenons les fonctions d'onde et les énergies bien connues de l'oscillateur harmonique.

2.4.2 Cas de Coulomb

Le propagateur correspondant a la forme

$$K(r_b, t_b; r_a, t_a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar}E(t_b - t_a)} G^{RC}(r_b, r_a; E), \tag{2.29}$$

avec la fonction de Green $G^{RC}(r_b, r_a; E)$ du potentiel coulombien radial donnée par [17] :

$$
\begin{aligned}
G^{RC}(r_b, r_a; E) &= \frac{i}{\hbar}\int_0^\infty d\lambda e^{\frac{i}{\hbar}E\lambda}\int Dr(t)e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^\lambda dt\left[\frac{m}{2}\dot{r}^2+\frac{\beta}{r}-\frac{\hbar^2\left(\eta^2-\frac{1}{4}\right)}{2mr^2}\right]} \\
&= \frac{2\Gamma\left(\eta-k+\frac{1}{2}\right)}{\hbar\omega\Gamma\left(2\eta+1\right)}W_{k,\eta}\left(\frac{m\omega}{\hbar}r_b\right)M_{k,\eta}\left(\frac{m\omega}{\hbar}r_a\right) \quad (r_b > r_a)\,,
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

où $\eta = l + \frac{1}{2}$, $k = \frac{2\beta}{\hbar\omega}$, $\beta = \frac{\hbar^2}{ma_0}\left(1+\gamma E\right)^q$ et $\omega = 2\sqrt{\frac{-2E}{m}}$.

Comme précédemment, les pôles sont donnés par : $\eta - k + \frac{1}{2} = -n, \qquad n = 0, 1, 2, ...$

Prenons des valeurs particulières de q

1er cas : q = 1

L'énergie dans ce cas est

$$
E_{nl} = \frac{1 - 2\gamma E_{nl}^H - \sqrt{1 - 4\gamma E_{nl}^H}}{2\gamma^2 E_{nl}^H}, \tag{2.31}
$$

avec $E_{nl}^H = -\frac{\hbar^2}{2ma_0^2(n+l+1)^2}$, $\left(\gamma\rangle\frac{1}{4E_{nl}^H}\right)$ et que

$$
\Gamma\left(\eta - k + \frac{1}{2}\right) \approx \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\frac{m\omega_n^2}{4\left(n+\eta+\frac{1}{2}\right)\sqrt{1-4\gamma E_{nl}^H}\left(E - E_{nl}\right)}, \tag{2.32}
$$

et en tenant compte de la relation $W_{\nu,\mu}\left(z\right)$, $M_{\nu,\mu}\left(z\right)$ et la fonction confluent hypergéométrique [18] :

$$
M_{\nu,\mu}\left(z\right) = z^{\mu+\frac{1}{2}}e^{-\frac{z}{2}}\ {}_1F_1\left(\mu - \nu + \frac{1}{2}; 2\mu + 1; z\right),
$$

$$
W_{n+\frac{\nu+1}{2},\frac{\nu}{2}}\left(z\right) = (-1)^{+n}\frac{\Gamma\left(n+\nu+1\right)}{\Gamma\left(\nu+1\right)}z^{\frac{(\nu+1)}{2}}e^{-\frac{z}{2}}\ {}_1F_1\left(-n\ ;\nu+1; z\right),
$$

et après intégration sur E, on obtient la décomposition spectrale de K

$$
\begin{aligned}
K(r_b,t_b;r_a,t_a) &= \sum_n e^{+\frac{im}{8\hbar}\omega_n^2(t_b-t_a)}\frac{\Gamma\left(n+2l+2\right)}{\Gamma^2\left(2l+2\right)} \\
&\times\frac{m\omega_n}{2n!\hbar\left(n+l+1\right)\sqrt{1-4\gamma E_{nl}^H}} \\
&\times\left(\frac{-8mE_{nl}}{\hbar}r_ar_b\right)^{l+1}e^{-\frac{\left(1+\gamma E_{nl}\right)}{a_0(n+l+1)}(r_b+r_a)} \\
&\times {}_1F_1\left(-n\ ;2l+2;\frac{2\left(1+\gamma E_{nl}\right)}{a_0\left(n+l+1\right)}r_a\right) \\
&\times {}_1F_1\left(-n\ ;2l+2;\frac{2\left(1+\gamma E_{nl}\right)}{a_0\left(n+l+1\right)}r_b\right),
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

et les fonctions d'onde bien normalisées

$$
\begin{aligned}
\Phi_{nl}\left(r\right) &= \sqrt{\frac{m\omega_n\left(n+2l+1\right)!}{2n!\hbar\left(n+l+1\right)\sqrt{1-4\gamma E_{nl}^H}\left(\left(2l+1\right)!\right)^2}} \\
&\times\left(\frac{\sqrt{-8mE_{nl}}}{\hbar}r\right)^{l+1}e^{-\frac{\left(1+\gamma E_{nl}\right)}{a_0(n+l+1)}r} \\
&\times {}_1F_1\left(-n\ ;2l+2;\frac{2\left(1+\gamma E_{nl}\right)}{a_0\left(n+l+1\right)}r\right),
\end{aligned}
\tag{2.34}
$$

avec $\omega_n = 2\sqrt{\frac{-1+2\gamma E_{nl}^H+\sqrt{1-4\gamma E_{nl}^H}}{m\gamma^2 E_{nl}^H}}$.

2ème cas :q$=\frac{1}{2}$

Pour cette valeur, l'énergie et les fonctions d'onde sont respectivement données par

$$
E_{nl} = \frac{E_{nl}^H}{1-\gamma E_{nl}^H},
\tag{2.35}
$$

$$\begin{aligned}\Phi_{nl}(r) &= \sqrt{\frac{m\omega_n (n+2l+1)!}{2n!\hbar (n+l+1)(1-\gamma E_{nl}^H)((2l+1)!)^2}} \\ &\times \left(\frac{\sqrt{-8mE_{nl}}}{\hbar} r\right)^{l+1} e^{-\frac{\sqrt{1+\gamma E_{nl}}}{a_0(n+l+1)} r} \\ &\times {}_1F_1\left(-n\ ; 2l+2; \frac{2\sqrt{1+\gamma E_{nl}}}{a_0(n+l+1)} r\right). \end{aligned} \tag{2.36}$$

où $\omega_n = 2\sqrt{\frac{-2E_{nl}^H}{m\left(1-\gamma E_{nl}^H\right)}}, \left(\gamma > \frac{1}{E_{nl}^H}\right)$.

3ème cas : q= $\frac{1}{4}$

Il est facile de voir $\gamma < 0$, que l'énergie est

$$E_{nl} = E_{nl}^H \frac{\gamma E_{nl}^H + \sqrt{4+\gamma^2 (E_{nl}^H)^2}}{2}, \tag{2.37}$$

et les fonctions d'onde sont

$$\begin{aligned}\Phi_{nl}(r) &= \sqrt{\frac{m\omega_n \left(\gamma E_{nl}^H + \sqrt{4+\gamma^2 (E_{nl}^H)^2}\right)(n+2l+1)!}{2n!\hbar (n+l+1)\sqrt{4+\gamma^2 (E_{nl}^H)^2}((2l+1)!)^2}} \\ &\times \left(\frac{\sqrt{-8mE_{nl}}}{\hbar} r\right)^{l+1} e^{-\frac{(1+\gamma E_{nl})^{\frac{1}{4}}}{a_0(n+l+1)} r} \\ &\times {}_1F_1\left(-n\ ; 2l+2; \frac{2(1+\gamma E_{nl})^{\frac{1}{4}}}{a_0(n+l+1)} r\right), \end{aligned} \tag{2.38}$$

où $\omega_n = 2\sqrt{\frac{-E_{nl}^H}{m}\left(\gamma E_{nl}^H + \sqrt{4+\gamma^2 (E_{nl}^H)^2}\right)}$.

Notons que pour $\gamma = 0$, nous obtenons l'énergie bien connue et des fonctions d'onde du potentiel de Coulomb radial.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons examiné le potentiel dépendant de l'énergie par l'approche de l'intégrale de chemin et nous avons justifié le changement (2.8) de la condition de normalisation des fonctions d'onde des potentiels dépendants de l'énergie.

Comme application, nous avons considéré les cas de l'oscillateur harmonique et du potentiel radial coulombien avec dépendance en énergie. Pour ces potentiels, nous avons déterminé les propagateurs et à partir des pôles, le spectre de l'énergie et les fonctions d'onde extraites sont en accord avec ceux obtenus par résolution de l'équation de Schrödinger.

Chapitre 3

Particules relativistes sans spin dans des potentiels dépendants de l'énergie et problème de la normalisation de la fonction d'onde

3.1 Introduction

Comme dans le chapitre traitant du problème non relativiste, nous proposons içi de clarifier le problème de la normalisation des fonctions d'onde lorsque les interactions décrites par les potentiels dépendants de l'énergie sont présents dans l'équation de Klein-Gordon et en utilisant le formalisme intégrale de chemin [19]. A titre d'exemple, le potentiel linéaire et le potentiel de Coulomb avec des paramètres dépendant de l'énergie sont discutés et les fonctions d'onde sont extraites à partir de la décomposition spectrale des propagateurs.

Ce chapitre est organisé comme suit : dans la Section 2, la formulation intégrale de chemin pour des particules sans spin avec des interactions dépendantes de l'énergie est donnée et à partir de la décomposition spectrale, et comme la normalisation des fonctions d'onde est modifiée, la détermination de cette modification est faite suivant trois approches (Section 3) :

-directement à partir de l'équation de KG et à partir de la condition d'orthogonalité des fonctions d'onde.

-en utilisant l'équation de continuité et en exigeant que la probabilité pour l'équation de KG doit être positif ou négatif respectivement pour des énergies positives et négatives.

-et en adaptant le théorème de Feynman-Hellmann [16] à notre cas relativiste, sans spin.

Enfin, dans la section 4, deux types de potentiel, linéaire et Coulomb sont utilisés comme exemples pour déterminer les propagateurs. Les fonctions d'onde sont déduites de la décomposition spectrale, ce qui permet d'obtenir explicitement les corrections liées à des constantes de normalisation en raison de la dépendance énergétique de ces potentiels.

3.2 Propagateur et décomposition spectrale

Le propagateur $K(x_b, t_b; x_a, t_a)$, relatives aux particules sans spin est solution de l'équation suivante

$$\left[(\hat{p}_b - eA_b)^2 - (M + S_b)^2\right] K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \delta(x_b - x_a)\,\delta(t_b - t_a)\,, \tag{3.1}$$

et son expression est

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = -i \int_0^\infty d\lambda \langle x_a, t_a \mid e^{i\lambda\left[(\hat{p}-eA)^2-(M+S)^2\right]} \mid x_b, t_b\rangle, \tag{3.2}$$

où M^2 doit être comprise comme $M^2 - i0^+$

En suivant la procédure habituelle de construction de l'intégrale de chemin : d'abord l'intervalle de temps est divisée en $N+1$ parties égales infinitésimales $\varepsilon = \frac{\lambda}{N+1}$ et l'exponentielle est décomposée en $N+1$ exponentielle (selon Trotter (voir par exemple [19])) et les relations de fermeture

$$\int\int dtdx\,|x,t\rangle\,\langle x,t| = 1, \tag{3.3}$$

et

$$\int\int dp_x dp_0\,|p_x, p_0\rangle\,\langle p_x, p_0| = 1\ , \tag{3.4}$$

sont insérées entre chaque paire d'exponentielles. Ensuite, les vecteurs de base $|x\rangle\,, |p_x\rangle$, $|t\rangle\,, |p_0\rangle$ kets propres respectivement de $\hat{x}, \hat{p}$, $\hat{t}$ et $\hat{p}_0 = \hat{E}$ sont utilisés pour éliminer les opérateurs et la transition $|x\rangle \to |p\rangle$, $|t\rangle \to |p_0\rangle$ étant effectuée au moyen de produits scalaires

$$\langle t, x|\, p_0, p_x\rangle = \frac{1}{2\pi} e^{-i(p_0 t - p_x x)}\quad . \tag{3.5}$$

Nous obtenons, la forme discrète de K

$$\begin{aligned} K(x_b, t_b; x_a, t_a) \;&=\; -i \int_0^\infty d\lambda \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \int dx_n dt_n \prod_{n=1}^{N+1} \int \frac{d(p_x)_n\, d(p_0)_n}{(2\pi)^2} \times \\ & e^{i\sum\limits_{n=1}^{N+1}\left\{(p_x)_n \Delta x_n - (p_0)_n \Delta t_n + \varepsilon\left[-(p_x)_n^2 + \left((p_0)_n - V\left(x_n,(p_0)_n\right)\right)^2 - \left(M + S\left(x_n,(p_0)_n\right)\right)^2\right]\right\}}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

où pour simplifier nous avons considéré uniquement la partie scalaire du champ électromagnétique : $eA^{\mu} = (V(x,E), 0)$.

Puisque les intégrations sur t_n donnent N fonctions de Dirac $\delta\left((p_0)_n - (p_0)_{n+1}\right)$, ce qui implique

$$(p_0)_1 = (p_0)_2 = ... = (p_0)_{N+1} = E, \tag{3.7}$$

et après intégration sur les variables $(p_0)_n$, on obtient

$$\begin{aligned} K(x_b, t_b; x_a, t_a) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2i\pi} e^{-iE(t_b - t_a)} \int_0^{\infty} d\lambda \lim_{n\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \int dx_n \prod_{n=1}^{N+1} \int \frac{d(p_x)_n}{2\pi} \times \\ & e^{i\sum_{n=1}^{N+1}\left\{(p_x)_n \Delta x_n - \varepsilon\left[(p_x)_n^2 - (E - V(x_n,E))^2 + (M + S(x_n,E))^2\right]\right\}}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

qui peut être réduit après intégrations sur les $(p_x)_n$ à

$$\begin{aligned} K(x_b, t_b; x_a, t_a) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2i\pi} e^{-iE(t_b - t_a)} \int_0^{\infty} d\lambda \frac{1}{(4i\pi\varepsilon)^{1/2}} \lim_{n\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \int \frac{dx_n}{(4i\pi\varepsilon)^{1/2}} \times \\ & e^{i\sum_{n=1}^{N+1}\left[\frac{\Delta x_n^2}{4\varepsilon} + \varepsilon\left((E - V(x_n,E))^2 - (M + S(x_n,E))^2\right)\right]}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

expression, qui peut être réécrite sous la forme compacte suivante

$$\begin{aligned} K(x_b, t_b; x_a, t_a) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2i\pi} e^{-iE(t_b - t_a)} \times \\ & \int_0^{\infty} d\lambda \int Dx e^{i\int_0^{\lambda} ds\left[\frac{\dot{x}^2}{4} + (E - V(x,E))^2 - (M + S(x,E))^2\right]}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Pour E fixé, le propagateur admet la décomposition spectrale suivante,

$$
\begin{aligned}
& \int Dx e^{i\int_0^\lambda ds\left[\frac{\dot{x}^2}{4}+(E-V(x,E))^2-(M+S(x,E))^2\right]} \\
= \; & e^{iE^2\lambda}\int Dx e^{i\int_0^\lambda ds\left[\frac{\dot{x}^2}{4}-2EV(x,E)+V(x,E)^2-(M+S(x,E))^2\right]}, \\
= \; & e^{iE^2\lambda}\sum_n e^{-i\mathcal{E}_n^2(E)\lambda}\psi_{\mathcal{E}_n(E)}(x_b)\,\psi^*_{\mathcal{E}_n(E)}(x_a), \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

où $\mathcal{E}_n^2(E)$ et $\psi_{\mathcal{E}_n(E)}(x)$ (avec $\int dx\left|\psi_{\mathcal{E}_n(E)}(x)\right|^2 = 2\mathcal{E}_n(E)$) sont respectivement les valeurs propres et les fonctions propres associées à l'énergie de l'opérateur

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathcal{H}} &= \hat{p}_x^2 + (M+S(x,E))^2 + 2EV(x,E) - V(x,E)^2, \\
&= \hat{p}_x^2 + W(x,E), \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

et $W(x,E) = E^2 - (E-V(x,E))^2 + (M+S(x,E))^2$est le potentiel dépend de E.

L'intégrale sur λ est la fonction de Green

$$
\int_0^\infty d\lambda \int Dx e^{i\int_0^\lambda ds\left[\frac{\dot{x}^2}{4}+(E-V(x,E))^2-(M+S(x,E))^2\right]} = i\sum_n \frac{\psi_{\mathcal{E}_n(E)}(x_b)\,\psi^*_{\mathcal{E}_n(E)}(x_a)}{E^2-\mathcal{E}_n^2(E)}. \qquad (3.13)
$$

Comme le dénominateur $E^2-\mathcal{E}_n^2(E) = (E-\mathcal{E}_n(E))(E+\mathcal{E}_n(E))$ est un produit de deux facteurs, nous supposons qu'il existe deux pôles ou racines (un seul pour chaque facteur). Ensuite, dans le voisinage des deux pôles $\pm\, E_n$ Nous avons respectivement $\frac{1}{E-\mathcal{E}_n(E)} \approx \frac{1}{1-\mathcal{E}'_n}\frac{1}{E-E_n}$, $\frac{1}{E+\mathcal{E}_n(E)} \approx \frac{1}{1+\mathcal{E}'_n}\frac{1}{E+E_n}$ et l'intégrale sur E

$$
\begin{aligned}
K(x_b,t_b;x_a,t_a) &= \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} e^{-iE(t_b-t_a)}\psi_{\mathcal{E}_n(E)}(x_b)\,\psi^*_{\mathcal{E}_n(E)}(x_a) \\
&\quad \times \frac{1}{2E_n}\left\{\frac{1}{1-\mathcal{E}'_n}\frac{1}{E-E_n} - \frac{1}{1+\mathcal{E}'_n}\frac{1}{E+E_n}\right\}, \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

peut être facilement effectuée ce qui donne la décomposition spectrale habituelle de propagateur

$$
\begin{aligned}
K(x_b,t_b;x_a,t_a) &= i\sum_n \frac{1}{2E_n}\left\{\theta\left(t_b-t_a\right)\frac{e^{-iE_n(t_b-t_a)}}{1-\mathcal{E}'_n}\psi_{E_n}\left(x_b\right)\psi^*_{E_n}\left(x_a\right)\right.\\
&\left.-\theta\left(t_a-t_b\right)\frac{e^{iE_n(t_b-t_a)}}{1+\mathcal{E}'_n}\psi_{-E_n}\left(x_b\right)\psi^*_{-E_n}\left(x_a\right)\right\},\\
&= i\sum_n \frac{1}{2E_n}\ \left\{\theta\left(t_b-t_a\right)e^{-iE_n(t_b-t_a)}\Phi_{E_n}\left(x_b\right)\Phi^*_{E_n}\left(x_a\right)\right.\\
&\left.-\theta\left(t_a-t_b\right)e^{iE_n(t_b-t_a)}\Phi_{-E_n}\left(x_b\right)\Phi^*_{-E_n}\left(x_a\right)\right\}, \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

où maintenant, le lien entre les fonctions d'onde est le suivant

$$
\Phi_{E_n}\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{1-\mathcal{E}'_n}}\psi_{\mathcal{E}_n(E_n)=E_n}\left(x\right), \qquad (3.16)
$$

où $\mathcal{E}'_n=\left.\frac{d\mathcal{E}(E)}{dE}\right|_{E=E_n}$.

Ces états $\Phi_{E_n}\left(x\right)$ sont normalisés comme suit (voir 2.8)

$$
\int dx\left|\Phi_{E_n}\left(x\right)\right|^2\left(1-\frac{\partial W\left(x,E\right)}{\partial E^2}\right)\Bigg|_{E=E_n}=1, \qquad (3.17)
$$

ou encore

$$
\int dx\left|\Phi_{E}\left(x\right)\right|^2\left(1-\frac{\partial\left\{E^2-\left(E-V\left(x,E\right)\right)^2+\left(M+S\left(x,E\right)\right)^2\right\}}{\partial E^2}\right)\Bigg|_{E=E_n}=1, \qquad (3.18)
$$

Notons que si V et S sont indépendants de E *i.e.* $\frac{\partial V(x,E)}{\partial E}=\frac{\partial S(x,E)}{\partial E}=0$, le terme $2EV\left(x\right)$ de $\frac{\partial W(x,E)}{\partial E^2}$ contribue à $\mathcal{E}_n$ et par conséquent $\mathcal{E}'_n\neq 0$. Dans ce cas, la condition de normalisation devient

$$
\int dx\left|\Phi_{E_n}\left(x\right)\right|^2\left(1-\frac{V\left(x\right)}{E_n}\right)=1. \qquad (3.19)
$$

Ainsi, le facteur supplémentaire $\left(1-\mathcal{E}'_n\right)^{-1/2}$ qui est apparu, modifier la condition de normalisation habituelle de l'équation de Klein Gordon et devient pour les potentiels

dépendant de l'énergie, comme suit

$$\int dx\left|\Phi_{E_n}(x)\right|^2\left(1-\frac{V(x,E_n)}{E_n}\right)\left(1-\frac{\partial V(x,E_n)}{\partial E_n}-\frac{\frac{\partial S(x,E_n)}{\partial E_n}\frac{S(x,E_n)+M}{E_n}}{1-\frac{V(x,E_n)}{E_n}}\right)=1. \tag{3.20}$$

3.3 Détermination de la correction $\mathcal{E}_n'$

Le but est de déterminer cette correction $\mathcal{E}_n'$ apportée par les potentiels dépendant de l'énergie et de montrer qu'elle est la suivante

$$\mathcal{E}_n'=1-\frac{\int dx\Phi_{E_n}^*(x)\frac{\partial\left[(E_n-V(x,E_n))^2-(S(x,E_n)+M)^2\right]}{\partial(E_n^2)}\Phi_{E_n}(x)}{\int dx\left|\Phi_{E_n}(x)\right|^2}. \tag{3.21}$$

.

En effet, ce changement dans la condition de normalisation peut être simplement obtenue à partir de l'équation de continuité. Tout d'abord, examinons ce problème de la normalisation en considérant l'équation de Klein-Gordon

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\left[\left(i\frac{\partial}{\partial t}-V\left(x,i\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)^2-\left(M+S\left(x,i\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)^2\right]\Psi=0, \tag{3.22}$$

et de son conjugué complex

$$\frac{\partial^2\Psi^*}{\partial x^2}+\left[\left(i\frac{\partial}{\partial t}+V^*\left(x,i\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)^2-\left(M+S^*\left(x,i\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)^2\right]\Psi^*=0. \tag{3.23}$$

A partir de ces deux équations respectivement multipliées par Ψ^* et Ψ et après la soustraction, on obtient

$$
\begin{aligned}
& \Psi^* \left\{ \left(i\frac{\partial}{\partial t} - V\left(x, i\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)^2 - \left(S\left(x, i\frac{\partial}{\partial t}\right) + M\right)^2 \right\} \Psi \\
& -\Psi \left\{ \left(i\frac{\partial}{\partial t} + V^*\left(x, i\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)^2 - \left(S^*\left(x, i\frac{\partial}{\partial t}\right) + M\right)^2 \right\} \Psi^* \\
& +\Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \Psi \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} \\
= \; & 0. \qquad (3.24)
\end{aligned}
$$

Il est clair que les deux derniers termes représentent $\frac{\partial}{\partial x} j$ avec

$$
j = i\left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right), \qquad (3.25)
$$

la densité de courant et si la relation $f(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} \int^t ds f(x,s)$ est utilisée pour obtenir l'équation de continuité $\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x} j = 0$, les deux premiers termes représentent $\frac{\partial}{\partial t}\rho$, où

$$
\begin{aligned}
\rho \; = \; & i \int^t ds \left\{ \Psi^* \left[\left(i\frac{\partial}{\partial s} - V\left(x, i\frac{\partial}{\partial s}\right)\right)^2 - \left(M + S\left(x, i\frac{\partial}{\partial s}\right)\right)^2 \right] \Psi \right. \\
& \left. -\Psi \left[\left(i\frac{\partial}{\partial s} + V^*\left(x, i\frac{\partial}{\partial s}\right)\right)^2 - \left(M + S^*\left(x, i\frac{\partial}{\partial s}\right)\right)^2 \right] \Psi^* \right\}, \qquad (3.26)
\end{aligned}
$$

est la densité qui n'est évidemment pas définie positive.

Maintenant, si nous considérons respectivement deux états $\Phi_{E_n}(x)$ et $\Phi_{E_m}(x)$ liés aux énergies E_n et E_m, nous avons

$$
\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left[E_n - V(x, E_n)\right]^2 - \left[M + S(x, E_n)\right]^2 \right] \Phi_{E_n}(x) = 0, \qquad (3.27)
$$

et

$$
\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left[E_m - V(x, E_m)\right]^2 - \left[M + S(x, E_m)\right]^2 \right] \Phi^*_{E_m}(x) = 0. \qquad (3.28)
$$

En multipliant la première équation par $\Phi^*_{E_m}(x)$ et la seconde (conjugué complexe)

par $\Phi_{E_n}(x)$ et après soustraction et d'intégration sur tout l'espace, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\int dx\Phi_{E_n}(x)\,\Phi^*_{E_m}(x)\times \\
&\left(\frac{(E_n-V(x,E_n))^2-(M+S(x,E_n))^2-(E_m-V(x,E_m))^2+(M+S(x,E_m))^2}{E_n-E_m}\right) \\
=\;& 2E_n\delta_{nm}, \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

et comme $2E_n\delta_{nm}=(E_n+E_m)\,\delta_{nm}$, cette relation peut être réarrangée comme suit

$$\begin{aligned}
&\int dx\Phi_{E_n}(x)\,\Phi^*_{E_m}(x)\left(1-\frac{V(x,E_n)+V(x,E_m)}{E_n+E_m}\right)\times \\
&\left(1-\frac{V(x,E_n)-V(x,E_m)}{E_n-E_m}-\frac{\frac{S(x,E_n)-S(x,E_m)}{E_n-E_m}\frac{2M+S(x,E_n)+S(x,E_m)}{E_n+E_m}}{1-\frac{V(x,E_n)+V(x,E_m)}{E_n+E_m}}\right) \\
=\;& \delta_{nm}, \qquad (3.30)
\end{aligned}$$

qui est la condition d'orthonormalisation pour les potentiels dépendants de l'énergie. A la limite $E_m\to E_n$, $\frac{V(x,E_n)-V(x,E_m)}{E_n-E_m}\to\frac{\partial V(x,E_n)}{\partial E_n}$, $\frac{S(x,E_n)-S(x,E_m)}{E_n-E_m}\to\frac{\partial S(x,E_n)}{\partial E_n}$, cette condition peut être réduite à la condition de normalisation suivante donnée dans (3.20) ou sous une forme plus commode

$$\int dx\,|\Phi_{E_n}(x)|^2\frac{\partial}{\partial E_n}\left[(E_n-V(x,E_n))^2-(M+S(x,E_n))^2\right]=2E_n. \qquad (3.31)$$

Dans le cas où S et V sont indépendants de E : ($\frac{\partial V}{\partial E_n}=\frac{\partial S}{\partial E_n}=0$), alors la condition d'orthonormalisation devient

$$\int dx\Phi_{E_n}(x)\,\Phi^*_{E_m}(x)\left(1-\frac{2V(x)}{E_n+E_m}\right)=\delta_{mn}, \qquad (3.32)$$

et à la limite $E_m \to E_n$, la condition précédente est réduite à

$$\int dx \left|\Phi_{E_n}(x)\right|^2 \left(1 - \frac{V(x)}{E_n}\right) = 1. \tag{3.33}$$

Revenons à l'expression de ρ et décomposons Ψ sur la base $\{\Phi_{E_n}(x)\}$

$$\Psi(x,t) = \sum_n a(E_n) e^{-iE_n t} \Phi_{E_n}(x), \tag{3.34}$$

et après l'insertion de la série précédente, ρ devient

$$\begin{aligned} \rho &= i \sum_n \sum_m a(E_n) a^*(E_m) \Phi_{E_n}(x) \Phi^*_{E_m}(x) \times \\ & \left\{ \left[[E_n - V(x,E_n)]^2 - [M + S(x,E_n)]^2 \right] \right. \\ & \left. - \left[[E_m - V(x,E_m)]^2 - [M + S(x,E_m)]^2 \right] \right\} \times \\ & \int^t ds e^{i(E_m - E_n)s}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Comme l'intégration sur la variable s est simple

$$\int^t ds e^{i(E_m - E_n)s} = \frac{e^{i(E_m - E_n)t}}{i(E_m - E_n)} + Cte, \tag{3.36}$$

nous avons pour ρ l'expression suivante

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_n \sum_m a(E_n) a^*(E_m) \Phi_{E_n}(x) \Phi^*_{E_m}(x) e^{i(E_m - E_n)t} \times \\ & \left\{ \frac{(E_n - V(x,E_n))^2 - (E_m - V(x,E_m))^2 + (M + S(x,E_m))^2 - (M + S(x,E_n))^2}{E_n - E_m} \right\}, \end{aligned} \tag{3.37}$$

où le terme indépendant de temps $iCte \sum_n \sum_m \{.\}$ a été omis car il ne contribue pas à l'équation de continuité. Maintenant, laissez-nous intégrons sur tout l'espace en prenant

en compte les relations d'orthonormalisation, il devient alors

$$\begin{aligned}\int dx\rho &= \sum_n\sum_m a\left(E_n\right)a^*\left(E_m\right)\int dx\Phi_{E_n}\left(x\right)\Phi^*_{E_m}\left(x\right)\times \\ &\left\{\frac{\left(E_n-V\left(x,E_n\right)\right)^2-\left(E_m-V\left(x,E_m\right)\right)^2+\left(M+S\left(x,E_m\right)\right)^2-\left(M+S\left(x,E_n\right)\right)^2}{E_n-E_m}\right\}, \\ &= \sum_n 2E_n\left|a\left(E_n\right)\right|^2=\left\{\begin{smallmatrix}>0 \text{ if } E_n>0\\ <0 \text{ if } E_n<0\end{smallmatrix}\right., \end{aligned} \tag{3.38}$$

et, par conséquent, si cette expression est multipliée par une charge, le résultat est compatible avec la réinterprétation habituelle de densité relative à l'équation de Klein-Gordon.

Enfin, établissons encore le lien entre $\mathcal{E}'_n$ et (3.18). Revenons à l'équation suivante

$$\mathcal{E}\left(E\right)^2\Phi_{\mathcal{E}(E)}\left(x\right)=\left[\hat{p}_x^2+E^2-\left(E-V\left(x,E\right)\right)^2+\left(M+S\left(x,E\right)\right)^2\right]\Phi_{\mathcal{E}(E)}\left(x\right). \tag{3.39}$$

Après avoir multiplié à gauche (3.39) par $\Phi^*_E\left(x\right)$ et intégré sur tout l'espace, nous obtenons

$$\begin{aligned}&2\frac{d\mathcal{E}\left(E\right)}{dE}\mathcal{E}\left(E\right)\int dx\left|\Phi_{\mathcal{E}(E)}\left(x\right)\right|^2+\mathcal{E}\left(E\right)^2\int dx\Phi^*_{\mathcal{E}(E)}\left(x\right)\frac{\partial\Phi_E\left(x\right)}{\partial E} \\ =&\int dx\Phi^*_{\mathcal{E}(E)}\left(x\right)\frac{\partial\left[E^2-\left(E-V\left(x,E\right)\right)^2+\left(M+S\left(x,E\right)\right)^2\right]}{\partial E}\Phi_{\mathcal{E}(E)}\left(x\right) \\ &+\int dx\Phi^*_{\mathcal{E}(E)}\left(x\right)\left[\hat{p}_x^2+E^2-\left(E-V\left(x,E\right)\right)^2+\left(M+S\left(x,E\right)\right)^2\right]\frac{\partial\Phi_{\mathcal{E}(E)}\left(x\right)}{\partial E}.\end{aligned} \tag{3.40}$$

Tout d'abord, une intégration par parties (deux fois), montre que $\int dx\Phi^*_{\mathcal{E}(E)}\left(x\right)\hat{p}_x^2\frac{\partial\Phi_{\mathcal{E}(E)}(x)}{\partial E}=\int dx\frac{\partial\Phi_{\mathcal{E}(E)}(x)}{\partial E}\hat{p}_x^2\Phi^*_{\mathcal{E}(E)}\left(x\right)$ et comme, le terme du second membre peut être réécrit

$$
\begin{aligned}
& \int dx \Phi^*_{\mathcal{E}(E)}(x) \left[\hat{p}_x^2 + E^2 - (E - V(x,E))^2 + (M + S(x,E))^2\right] \frac{\partial \Phi_{\mathcal{E}(E)}(x)}{\partial E} \\
= & \int dx \frac{\partial \Phi_{\mathcal{E}(E)}(x)}{\partial E} \left[\hat{p}_x^2 + E^2 - (E - V(x,E))^2 + (M + S(x,E))^2\right] \Phi^*_{\mathcal{E}(E)}(x) \\
= & \mathcal{E}(E)^2 \int dx \Phi^*_{\mathcal{E}(E)}(x) \frac{\partial \Phi_{\mathcal{E}(E)}(x)}{\partial E}, \qquad (3.41)
\end{aligned}
$$

ce qui élimine le second terme de premier membre. Ainsi, il reste

$$
\begin{aligned}
& 2\frac{d\mathcal{E}(E)}{dE}\mathcal{E}(E) \int dx \left|\Phi_E(x)\right|^2 \\
= & \int dx \Phi^*_E(x) \frac{\partial \left[E^2 - (E - V(x,E))^2 + (M + S(x,E))^2\right]}{\partial E} \Phi_E(x). \qquad (3.42)
\end{aligned}
$$

Maintenant, choisissons $\mathcal{E}(E) \to E_n$ puis $\Phi_{\mathcal{E}(E)}(x) \to \Phi_{E_n}(x)$ de manière à avoir l'équation de Klein-Gordon relatives à des énergies E_n

$$
\left[\hat{p}_x^2 - (E_n - V(x,E_n))^2 + (M + S(x,E_n))^2\right] \Phi_{E_n}(x) = 0, \qquad (3.43)
$$

ainsi

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}^2(E_n)\Phi_{E_n}(x) &= \left[\hat{p}_x^2 + E_n^2 - (E_n - V(x,E_n))^2 + (M + S(x,E_n))^2\right] \Phi_{E_n}(x), \\
&= E_n^2 \Phi_{E_n}(x). \qquad (3.44)
\end{aligned}
$$

Donc,

$$
\begin{aligned}
& 2E_n\mathcal{E}_n^{'}\int dx\left|\Phi_{E_n}(x)\right|^2 \\
= & \int dx\Phi_{E_n}^*(x)\frac{\partial\left[E_n^2-\left(E_n-V(x,E_n)\right)^2+\left(S(x,E_n)+M\right)^2\right]}{\partial E_n}\Phi_{E_n}(x), \\
= & \ 2E_n\int dx\left|\Phi_{E_n}(x)\right|^2 \\
& -\int dx\Phi_{E_n}^*(x)\frac{\partial\left[\left(E_n-V(x,E_n)\right)^2-\left(S(x,E_n)+M\right)^2\right]}{\partial E_n}\Phi_{E_n}(x), \qquad (3.45)
\end{aligned}
$$

et enfin

$$
\mathcal{E}_n^{'}=1-\frac{\int dx\Phi_{E_n}^*(x)\frac{\partial\left[\left(E_n-V(x,E_n)\right)^2-\left(S(x,E_n)+M\right)^2\right]}{\partial E_n}\Phi_{E_n}(x)}{2E_n\int dx\left|\Phi_{E_n}(x)\right|^2}. \qquad (3.46)
$$

Ce résultat n'est rien d'autre qu'une version adaptée du théorème de Feynman-Hellmann (voir par exemple [16]) aux potentiels dépendants de l'énergie.

3.4 Applications

Pour illustrer ce qui a été dit, nous considérons deux formes de potentiels choisis avec une dépendance en énergie (de même puissance) pour éviter des complications dans les calculs, et les paramètres S_0 et V_0 sont pris tels que $S_0 > V_0$ pour éviter des valeurs complexes

- potentiels linéaires

$$
V(x,E)=V_0(1+\gamma E)^q\ x, \qquad S(x,E)=S_0(1+\gamma E)^q x, \qquad (3.47)
$$

- potentiels de Coulomb

$$
V(r,E)=-\frac{V_0(1+\gamma E)^q}{r}, \quad S(r,E)=-\frac{S_0(1+\gamma E)^q}{r}, \qquad (3.48)
$$

3.4.1 Cas de potentiels linéaires

Le propagateur est donné par (voir [17])

$$\begin{aligned} K(x_b,t_b;x_a,t_a) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi i} \exp\left[-iE\left(t_b-t_a\right)\right] \int_0^{\infty} d\lambda e^{i\tilde{E}\lambda} \\ &\quad \times \int Dy\left(t\right) e^{\frac{i}{4}\left[\dot{y}^2-\omega_E y^2\right]}, \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} \exp\left[-iE\left(t_b-t_a\right)\right] \\ &\quad \times \sqrt{\frac{1}{2\pi\omega_E}}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\tilde{E}}{\omega_E}\right) D_{-\frac{1}{2}+\frac{\tilde{E}}{\omega_E}}\left(\sqrt{\omega_E}y_b\right) \\ &\quad \times D_{-\frac{1}{2}+\frac{\tilde{E}}{\omega_E}}\left(-\sqrt{\omega_E}y_a\right) \quad \left(y_b > y_a\right), \end{aligned} \tag{3.49}$$

où $y = x + \frac{2(EV_0+MS_0)}{\omega\omega_E}$, $y_a = x_a + \frac{2(EV_0+MS_0)}{\omega\omega_E}$, $y_b = x_b + \frac{2(EV_0+MS_0)}{\omega\omega_E}$, $\omega_E = 2\omega\left(1+\gamma E\right)^q$, $\omega = \sqrt{S_0^2 - V_0^2}$, $\tilde{E} = E^2 - M^2 + \frac{(EV_0+MS_0)^2}{\omega^2}$ et $D_\nu(z)$ sont des fonctions de cylindres paraboliques (nous pouvons aussi utiliser la relation Mehler (voir [18])). De la fonction$-\Gamma$, les pôles sont donnés par

$$\frac{1}{2} - \frac{\tilde{E}}{\omega_E} = -n, \qquad n = 0, 1, 2, ... \tag{3.50}$$

Prenons les valeurs particulières de q suivantes

- **q=1 (linéaire en E) :** $\omega_E = 2\omega\left(1+\gamma E\right)$.

A partir des pôles de la fonction Γ de l'équation (3.50) les énergies E_n sont données par

$$E_n^{\pm} = -\frac{MV_0}{S_0} + \frac{\gamma\omega^3\left(n+\frac{1}{2}\right)}{S_0^2} \pm K_n, \tag{3.51}$$

où $K_n = \frac{\omega}{S_0}\sqrt{2\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)\left[\frac{\gamma}{S_0}\left(\frac{\gamma\omega^3\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2S_0} - MV_0\right)+1\right]}$ et près des pôles, nous avons

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\tilde{E}}{\omega_E}\right) &\approx \frac{(-1)^n}{n!\left(\frac{1}{2}-\frac{\tilde{E}}{\omega_E}+n\right)} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}\omega^2\omega_E}{2n!S_0^2K_n}\left(\frac{1}{E-E_n^+}-\frac{1}{E-E_n^-}\right), \qquad (3.52)
\end{aligned}$$

avec $\omega_n^{\pm} = 2\omega\left[1-\frac{\gamma MV_0}{S_0}+\frac{\gamma^2\omega^3\left(n+\frac{1}{2}\right)}{S_0^2}\pm\gamma K_n\right]$. En utilisant la relation $D_n(z) = 2^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{z^2}{4}}H_n\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)$, entre $D_\nu(z)$ et les polynômes de Hermite $H_n(z)$ (voir [18]) et après l'intégration sur E, alors

$$\begin{aligned}
K(x_b,t_b;x_a,t_a) &= i\sum_n\left\{\frac{1}{2E_n^+}\theta(t_b-t_a)\,e^{-iE_n^+(t_b-t_a)}\frac{\omega^2\sqrt{\omega_n^+}E_n^+}{n!\sqrt{2\pi}2^nS_0^2K_n}\right. \\
&\times e^{-\frac{\omega_n^+}{4}\left[\left(x_a+\frac{2\left(V_0E_n^++S_0M\right)}{\omega\omega_n^+}\right)^2+\left(x_b+\frac{2\left(V_0E_n^++S_0M\right)}{\omega\omega_n^+}\right)^2\right]} \\
&\times H_n\left[\sqrt{\frac{\omega_n^+}{2}}\left(x_a+\frac{2\left(V_0E_n^++S_0M\right)}{\omega\omega_n^+}\right)\right] \\
&\times H_n\left[\sqrt{\frac{\omega_n^+}{2}}\left(x_b+\frac{2\left(V_0E_n^++S_0M\right)}{\omega\omega_n^+}\right)\right] \\
&-\frac{1}{2E_n^-}\theta(t_a-t_b)\,e^{iE_n^-(t_b-t_a)}\frac{\omega^2\sqrt{\omega_n^-}E_n^-}{n!\sqrt{2\pi}2^nS_0^2K_n} \\
&\times e^{-\frac{\omega_n^-}{4}\left[\left(x_a+\frac{2\left(V_0E_n^-+S_0M\right)}{\omega\omega_n^-}\right)^2+\left(x_b+\frac{2\left(V_0E_n^-+S_0M\right)}{\omega\omega_n^-}\right)^2\right]} \\
&\times H_n\left[\sqrt{\frac{\omega_n^-}{2}}\left(x_a+\frac{2\left(V_0E_n^-+S_0M\right)}{\omega\omega_n^-}\right)\right] \\
&\left.\times H_n\left[\sqrt{\frac{\omega_n^-}{2}}\left(x_b+\frac{2\left(V_0E_n^-+S_0M\right)}{\omega\omega_n^-}\right)\right]\right\}, \qquad (3.53)
\end{aligned}$$

et on obtient dans ce cas à partir de la décomposition spectrale du propagateur, les fonctions d'onde suivantes

$$\begin{aligned}\Phi_n^{\pm}(x) &= \sqrt{\frac{\omega^2\sqrt{\omega_n^{\pm}}E_n^{\pm}}{\sqrt{2\pi}2^n n! S_0^2 K_n}}e^{-\frac{\omega_n^{\pm}}{4}\left(x+\frac{2\left(V_0E_n^{\pm}+S_0M\right)}{\omega\omega_n^{\pm}}\right)^2} \\ &\quad \times H_n\left[\sqrt{\frac{\omega_n^{\pm}}{2}}\left(x+\frac{2\left(V_0E_n^{\pm}+S_0M\right)}{\omega\omega_n^{\pm}}\right)\right], \end{aligned} \tag{3.54}$$

•q=2 (quadratique en E) : $\omega_E^2 = 4\omega^2(1+\gamma E)^4$.

À partir Γ et au voisinage des pôles

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\tilde{E}}{\omega_E}\right) &\approx \frac{(-1)^n}{n!\left(\frac{1}{2}-\frac{\tilde{E}}{\omega_E}+n\right)}, \\ &= \frac{(-1)^{n+1}\omega^2\omega_E}{2n!\left(S_0^2-\omega^3(2n+1)\gamma^2\right)\delta_n}\left(\frac{1}{E-E_n^+}-\frac{1}{E-E_n^-}\right), \end{aligned} \tag{3.55}$$

on obtient les deux énergies

$$E_n^{\pm} = \frac{-MV_0S_0+\omega^3(2n+1)\gamma}{S_0^2-\omega^3(2n+1)\gamma^2} \pm \delta_n, \tag{3.56}$$

où $\delta_n = \sqrt{\frac{\omega^3(2n+1)-V_0^2M^2}{S_0^2-\omega^3(2n+1)\gamma^2}+\left[\frac{MV_0S_0-\omega^3(2n+1)\gamma}{S_0^2-\omega^3(2n+1)\gamma^2}\right]^2}$. Ensuite, les fonctions d'onde sont

$$\begin{aligned}\Phi_n^{\pm}(x) &= \sqrt{\frac{\omega^2\sqrt{\omega_n^{\pm}}E_n^{\pm}}{\sqrt{2\pi}2^n n!\left(S_0^2-\omega^3(2n+1)\gamma^2\right)\delta_n}}e^{-\frac{\omega_n^{\pm}}{4}\left(x+\frac{2\left(V_0E_n^{\pm}+S_0M\right)}{\omega\omega_n^{\pm}}\right)^2} \\ &\quad \times H_n\left[\sqrt{\frac{\omega_n^{\pm}}{2}}\left(x+\frac{2\left(V_0E_n^{\pm}+S_0M\right)}{\omega\omega_n^{\pm}}\right)\right], \end{aligned} \tag{3.57}$$

avec $\omega_n^{\pm} = 2\omega\left[1+\frac{-MV_0S_0\gamma+\omega^3(2n+1)\gamma^2}{S_0^2-\omega^3(2n+1)\gamma^2}\pm\gamma\delta_n\right]^2$.

• **q=$\frac{1}{2}$ (la racine carrée en E) :** $\omega_E^2 = 4\omega^2 (1 + \gamma E\ )$.

À partir des pôles de fonction Γ de l'équation (3.50) les énergies E_n sont des solutions d'une équation de quatrième ordre en E

$$E_n^4 + b_1 E_n^3 + c_1 E_n^2 + d_1 E_n + e_1 = 0, \tag{3.58}$$

où $b_1 = \frac{4MV_0}{S_0}$, $c_1 = \frac{6M^2V_0^2}{S_0^2}$, $d_1 = \frac{4}{S_0^3}\left(M^3V_0^3 - \frac{\gamma\omega^6\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{2S_0}\right)$ et $e_1 = \frac{1}{S_0^4}\left(M^4V_0^4 - 2\omega^6\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right)$.

Cette équation (3.58) peut être résolue par l'équation de second ordre suivant (voir [20])

$$E_n^2 + (b_1 + A_1)\frac{E_n}{2} + y_n + \frac{b_1 y_n - d_1}{A_1} = 0,$$

où $A_1 = \pm\sqrt{8y_n + b_1^2 - 4c_1}$. Donc, elle admet quatre solutions

$$E_{n_{1,2,3,4}} = \frac{1}{4}\left[-(b_1 + A_1) \pm \sqrt{(b_1 + A_1)^2 - 16\left(y_n + \frac{b_1 y_n - d_1}{A_1}\right)}\right], \tag{3.59}$$

où $y_n = \sqrt[3]{\sqrt{D_1} - \frac{Q_1}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{D_1} + \frac{Q_1}{2}} - \frac{R_1}{3}$ est la solution de l'équation cubique suivante

$$8y_n^3 - 4c_1 y_n^2 + (2b_1 d_1 - 8e_1)\, y_n + e_1\left(4c_1 - b_1^2\right) - d_1^2 = 0,$$

avec $D_1 = \left(\frac{P_1}{3}\right)^3 + \left(\frac{Q_1}{2}\right)^2$, $P_1 = \frac{3S_1 - R_1^2}{3}$, $Q_1 = \frac{2R_1^3}{27} - \frac{R_1 S_1}{3} + T_1$, $R_1 = -\frac{c_1}{2}$, $S_1 = \frac{b_1 d_1}{4} - e_1$, $T_1 = \frac{e_1\left(4c_1 - b_1^2\right) - d_1^2}{8}$.

À partir des quatre solutions (3.59) deux racines mènent à des fonctions d'onde normalisables, l'une positive E_n^+ et l'autre négative E_n^-.

Après intégration sur E, on obtient la décomposition spectrale de K

$$
\begin{aligned}
K(x_b,t_b;x_a,t_a) &= i\sum_n \left\{ \frac{1}{2E_n^+}\theta\left(t_b-t_a\right)e^{-iE_n^+\left(t_b-t_a\right)} \right. \\
&\times \frac{\omega^4\omega_n^+\left(2n+1\right)E_n^+}{\sqrt{2\pi}2^{n-2}n!S_0^4\left(4E_n^{+3}+3b_1E_n^{+2}+2c_1E_n^++d_1\right)} \\
&\times e^{-\frac{\omega_n^+}{4}\left[\left(x_b+\frac{2\left(V_0E_n^++S_0M\right)}{\omega\omega_n^+}\right)^2+\left(x_b+\frac{2\left(V_0E_n^++S_0M\right)}{\omega\omega_n^+}\right)^2\right]} \\
&\times H_n\left[\sqrt{\frac{\omega_n^+}{2}}\left(x_a+\frac{2\left(V_0E_n^++S_0M\right)}{\omega\omega_n^+}\right)\right] \\
&\times H_n\left[\sqrt{\frac{\omega_n^+}{2}}\left(x_b+\frac{2\left(V_0E_n^++S_0M\right)}{\omega\omega_n^+}\right)\right] \\
&-\frac{1}{2E_n^-}\theta\left(t_a-t_b\right)e^{iE_n^-\left(t_b-t_a\right)} \\
&\times \frac{\omega^4\omega_n^-\left(2n+1\right)E_n^-}{\sqrt{2\pi}2^{n-2}n!S_0^4\left(4E_n^{-3}+3b_1E_n^{-2}+2c_1E_n^-+d_1\right)} \\
&\times e^{-\frac{\omega_n^-}{4}\left[\left(x_b+\frac{2\left(V_0E_n^-+S_0M\right)}{\omega\omega_n^-}\right)^2+\left(x_b+\frac{2\left(V_0E_n^-+S_0M\right)}{\omega\omega_n^-}\right)^2\right]} \\
&\times H_n\left[\sqrt{\frac{\omega_n^-}{2}}\left(x_a+\frac{2\left(V_0E_n^-+S_0M\right)}{\omega\omega_n^-}\right)\right] \\
&\left. \times H_n\left[\sqrt{\frac{\omega_n^-}{2}}\left(x_b+\frac{2\left(V_0E_n^-+S_0M\right)}{\omega\omega_n^-}\right)\right]\right\}, \qquad (3.60)
\end{aligned}
$$

les fonctions d'onde normalisées sont

$$
\begin{aligned}
\Phi_n^{\pm}\left(x\right) &= \sqrt{\frac{\omega^4\omega_n^{\pm}\left(2n+1\right)E_n^{\pm}}{\sqrt{2\pi}2^{n-2}n!S_0^4\left(4E_n^{\pm 3}+3b_1E_n^{\pm 2}+2c_1E_n^{\pm}+d_1\right)}} \\
&\times e^{-\frac{\omega_n^{\pm}}{4}\left(x+\frac{2\left(V_0E_n^{\pm}+S_0M\right)}{\omega\omega_n^{\pm}}\right)^2} \\
&\times H_n\left[\sqrt{\frac{\omega_n^{\pm}}{2}}\left(x+\frac{2\left(V_0E_n^{\pm}+S_0M\right)}{\omega\omega_n^{\pm}}\right)\right], \qquad (3.61)
\end{aligned}
$$

avec $\omega_n^{\pm}=2\omega\sqrt{1+\gamma E_n^{\pm}}$ et $E_n^{\pm}$ vérifier l'équation (3.59).

Notons que pour $\gamma = 0$, $\omega_E \to 2\omega$ (dans les trois cas) on obtient les énergies et les fonctions d'onde relatives aux potentiels linéaires.

$$E_n^{\pm} = -\frac{MV_0}{S_0} \pm \frac{\omega}{S_0}\sqrt{2\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)}, \tag{3.62}$$

$$\begin{aligned}\Phi_n^{\pm}(x) &= \sqrt{\frac{\omega E_n^{\pm}}{\sqrt{\pi}2^n n! S_0\sqrt{2n+1}}}e^{-\frac{\omega}{2}\left(x+\frac{V_0E_n^{\pm}+S_0M}{\omega^2}\right)^2} \\ &\quad \times H_n\left[\sqrt{\omega}\left(x+\frac{V_0E_n^{\pm}+S_0M}{\omega^2}\right)\right],\end{aligned} \tag{3.63}$$

3.4.2 Cas de potentiels de Coulomb

Le propagateur correspondant a la forme

$$K(r_b,t_b;r_a,t_a) = -\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{2\pi}e^{-iE(t_b-t_a)}G^{RC}(r_b,r_a;E), \tag{3.64}$$

avec la fonction de Green $G^{RC}(r_b,r_a;E)$ relative au potentiel de Coulomb radial donnée par (voir [17]) :

$$\begin{aligned}G^{RC}(r_b,r_a;E) &= i\int_0^{\infty}d\lambda e^{i\tilde{E}\lambda}\int Dr(t)e^{i\int_0^{\lambda}dt\left[\frac{1}{4}\dot{r}^2+\frac{\alpha}{r}-\frac{\beta^2-\frac{1}{4}}{r^2}\right]}, \\ &= \sqrt{\frac{-1}{4\tilde{E}}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta-k\right)}{\Gamma\left(2\beta+1\right)}W_{k,\beta}\left(\sqrt{-4\tilde{E}}r_b\right) \\ &\quad \times M_{k,\beta}\left(\sqrt{-4\tilde{E}}r_a\right)\quad (r_b > r_a),\end{aligned} \tag{3.65}$$

où $\beta = \sqrt{\left(S_0^2-V_0^2\right)\left(1+\gamma E\right)^{2q}+\frac{1}{4}}$, $k = \frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{1}{-\tilde{E}}}$, $\tilde{E} = E^2 - M^2$ et $\alpha = 2\left(V_0E+S_0M\right)\left(1+\gamma E\right)^q$.

Comme précédemment, les pôles sont donnés par :

$$\beta - k + \frac{1}{2} = -n, \qquad n = 0, 1, 2, ... \tag{3.66}$$

Pour des raisons de simplicité, on prend $V_0 = S_0$ danc $\beta = \frac{1}{2}$ et $\alpha = 2V_0 (E + M) (1 + \gamma E)^q$.

Prenons des valeurs particulières de q.

• q=$\frac{1}{2}$ (la racine carrée en E) : $\alpha = 2V_0 (E + M) \sqrt{1 + \gamma E}$.

A partir des pôles de la fonction Γ (eq.3.66) les énergies E_n sont les solutions de l'équation cubique suivante

$$E_n^3 + b_2 E_n^2 + c_2 E_n + d_2 = 0, \tag{3.67}$$

où $b_2 = \frac{(n+1)^2 + V_0^2(1+2\gamma M)}{\gamma V_0^2}$, $c_2 = \frac{M(2+\gamma M)}{\gamma}$ et $d_2 = \frac{M^2\left(V_0^2 - (n+1)^2\right)}{\gamma V_0^2}$.

Ainsi, nous obtenons

$$E_n = \sqrt[3]{\sqrt{D_2} - \frac{Q_2}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{D_2} + \frac{Q_2}{2}} - \frac{b_2}{3}, \tag{3.68}$$

avec $D_2 = \left(\frac{P_2}{3}\right)^3 + \left(\frac{Q_2}{2}\right)^2$, $P_2 = \frac{3c_2 - b_2^2}{3}$, $Q_2 = \frac{2b_2^3}{27} - \frac{b_2 c_2}{3} + d_2$, $n = 1, 2, ..., n_{\max}$. Le nombre maximal $n_{\max}$ est fixé par $-M \leq E_n < M$ et $E_n > -\frac{1}{\gamma}$ pour $\gamma > 0$ ou $E_n < -\frac{1}{\gamma}$ pour $\gamma < 0$.

A partir des trois solutions (3.68) que deux racines sont retenues (un positif E_n^+ et l'autre négative E_n^-) pour assurer la normalisation des fonctions d'onde.

En utilisant les relations (voir [18])

$$W_{n+\frac{1}{2}+\beta,\beta}(z) = (-1)^n z^{\beta+\frac{1}{2}} n! e^{-\frac{z}{2}} L_n^{2\beta}(z), \tag{3.69}$$

$$M_{n+\frac{1}{2}+\beta,\beta}(z) = \frac{n!\Gamma(2\beta+1)}{\Gamma(2\beta+n+1)} z^{\beta+\frac{1}{2}} e^{-\frac{z}{2}} L_n^{2\beta}(z), \tag{3.70}$$

et après intégration sur E, nous obtenons à partir de la décomposition spectrale

$$
\begin{aligned}
K(r_b,t_b;r_a,t_a) &= i\sum_n \left\{ \frac{1}{2E_n^+}\theta\left(t_b-t_a\right)e^{-iE_n^+(t_b-t_a)} \right. \\
&\times \frac{\alpha_n^+ n! E_n^+}{V_0^2\gamma\left(3E_n^{+^2}+2b_2E_n^++c_2\right)\Gamma\left(n+2\right)} \\
&\times \left(2\sqrt{-\tilde{E}_n^+}r_a\right)e^{-\sqrt{-\tilde{E}_n^+}r_a}L_n^1(2\sqrt{-\tilde{E}_n^+}r_a) \\
&\times \left(2\sqrt{-\tilde{E}_n^+}r_b\right)e^{-\sqrt{-\tilde{E}_n^+}r_b}L_n^1(2\sqrt{-\tilde{E}_n^+}r_b) \\
&-\frac{1}{2E_n^-}\theta\left(t_a-t_b\right)e^{iE_n^-(t_b-t_a)} \\
&\times \frac{\alpha_n^- n! E_n^-}{V_0^2\gamma\left(3E_n^{-^2}+2b_2E_n^-+c_2\right)\Gamma\left(n+2\right)} \\
&\times \left(2\sqrt{-\tilde{E}_n^-}r_a\right)e^{-\sqrt{-\tilde{E}_n^-}r_a}L_n^1(2\sqrt{-\tilde{E}_n^-}r_a) \\
&\times \left.\left(2\sqrt{-\tilde{E}_n^-}r_b\right)e^{-\sqrt{-\tilde{E}_n^-}r_b}L_n^1(2\sqrt{-\tilde{E}_n^-}r_b)\right\}, \qquad (3.71)
\end{aligned}
$$

les fonctions d'onde normalisées

$$
\begin{aligned}
\Phi_n^{\pm}\left(r\right) &= \sqrt{\frac{\alpha_n^{\pm} n! E_n^{\pm}}{\gamma V_0^2\left(3E_n^{\pm^2}+2b_2E_n^{\pm}+c_2\right)\Gamma\left(n+2\right)}} \\
&\times \left(2\sqrt{-\tilde{E}_n^{\pm}}r\right)e^{-\sqrt{-\tilde{E}_n^{\pm}}r}L_n^1(2\sqrt{-\tilde{E}_n^{\pm}}r), \qquad (3.72)
\end{aligned}
$$

avec $\tilde{E}_n^{\pm}=E_n^{\pm^2}-M^2$, $\alpha_n^{\pm}=2V_0\left(E_n^{\pm}+M\right)\sqrt{1+\gamma E_n^{\pm}}$ et $E_n^{\pm}$ vérifier l'équation (3.68).

•q=1(**linéaire en E) :** $\alpha=2V_0\left(E+M\right)\left(1+\gamma E\right).$

À partir des pôles de fonction$-\Gamma$ de l'équation (3.66) l'énergie E_n déterminés par une équation de quatrième ordre en E

$$
E_n^4+b_3E_n^3+c_3E_n^2+d_3E_n+e_3=0, \qquad (3.73)
$$

où $b_3=\frac{2(1+\gamma M)}{\gamma}$, $c_3=\frac{(n+1)^2+M\gamma V_0^2(4+\gamma M)+V_0^2}{\gamma^2V_0^2}$, $d_3=\frac{2M(1+\gamma M)}{\gamma^2}$ et $e_3=\frac{M^2\left(V_0^2-(n+1)^2\right)}{\gamma^2V_0^2}$.

Cette équation (3.73) peut être résolu par l'équation de second ordre suivant

$$E_n^2 + (b_3 + A_3)\frac{E_n}{2} + y_n + \frac{b_3 y_n - d_3}{A_3} = 0, \tag{3.74}$$

où $A_3 = \pm\sqrt{8y_n + b_3^2 - 4c_3}$. Ainsi, il existe quatre solutions

$$E_{n_{1,2,3,4}} = -(b_3 + A_3) \pm \sqrt{(b_3 + A_3)^2 - 16\left(y_n + \frac{b_3 y_n - d_3}{A_3}\right)}, \tag{3.75}$$

où

$$y_n = \sqrt[3]{\sqrt{D_3} - \frac{Q_3}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{D_3} + \frac{Q_3}{2}} - \frac{R_3}{3}, \tag{3.76}$$

est la solution de l'équation cubique suivante

$$8y_n^3 - 4c_3 y_n^2 + (2b_3 d_3 - 8e_3)\, y_n + e_3\left(4c_3 - b_3^2\right) - d_3^2 = 0, \tag{3.77}$$

avec $D_3 = \left(\frac{P_3}{3}\right)^3 + \left(\frac{Q_3}{2}\right)^2$, $P_3 = \frac{3S_3 - R_3^2}{3}$, $Q_3 = \frac{2R_3^3}{27} - \frac{R_3 S_3}{3} + T_3$, $R_3 = -\frac{c_3}{2}$, $S_3 = \frac{b_3 d_3}{4} - e_3$, $T_3 = \frac{e_3\left(4c_3 - b_3^2\right) - d_3^2}{8}$, $n = 1, 2, ..., n_{\max}$. Le nombre maximal $n_{\max}$ se trouve exigeant $-M \leq E_n < M$ et $E_n \geq -\frac{1}{\gamma}$ pour $\gamma > 0$ ou $E_n \leq -\frac{1}{\gamma}$ pour $\gamma < 0$.

A partir des quatre solutions (3.75) que deux racines sont retenus (un positif E_n^+ et l'autre négative E_n^-) pour garantir la normalisation des fonctions d'onde.

Après intégration sur E, on obtient à partir de la décomposition spectrale

$$
\begin{aligned}
K(r_b,t_b;r_a,t_a) &= i\sum_n \left\{ \frac{1}{2E_n^+}\theta\left(t_b-t_a\right)e^{-iE_n^+\left(t_b-t_a\right)} \right. \\
&\times \frac{\alpha_n^+ n! E_n^+}{V_0^2\gamma^2\left(4E_n^{+^3}+3b_3E_n^{+^2}+2c_3E_n^+ + d_3\right)\Gamma\left(n+2\right)} \\
&\times \left(2\sqrt{-\tilde{E}_n^+}r_a\right)e^{-\sqrt{-\tilde{E}_n^+}r_a}L_n^1(2\sqrt{-\tilde{E}_n^+}r_a) \\
&\times \left(2\sqrt{-\tilde{E}_n^+}r_b\right)e^{-\sqrt{-\tilde{E}_n^+}r_b}L_n^1(2\sqrt{-\tilde{E}_n^+}r_b) \\
&-\frac{1}{2E_n^-}\theta\left(t_a-t_b\right)e^{iE_n^-\left(t_b-t_a\right)} \\
&\times \frac{\alpha_n^- n! E_n^-}{V_0^2\gamma^2\left(4E_n^{-^3}+3b_3E_n^{-^2}+2c_3E_n^- + d_3\right)\Gamma\left(n+2\right)} \\
&\times \left(2\sqrt{-\tilde{E}_n^-}r_a\right)e^{-\sqrt{-\tilde{E}_n^-}r_a}L_n^1(2\sqrt{-\tilde{E}_n^-}r_a) \\
&\times \left.\left(2\sqrt{-\tilde{E}_n^-}r_b\right)e^{-\sqrt{-\tilde{E}_n^-}r_b}L_n^1(2\sqrt{-\tilde{E}_n^-}r_b)\right\}, \qquad (3.78)
\end{aligned}
$$

les fonctions d'onde normalisées

$$
\begin{aligned}
\Phi_n^{\pm}\left(r\right) &= \sqrt{\frac{\alpha_n^{\pm} n! E_n^{\pm}}{V_0^2\gamma^2\left(4E_n^{\pm^3}+3b_3E_n^{\pm^2}+2c_3E_n^{\pm}+d_3\right)\Gamma\left(n+2\right)}} \\
&\times \left(2\sqrt{-\tilde{E}_n^{\pm}}r\right)e^{-\sqrt{-\tilde{E}_n^{\pm}}r}L_n^1(2\sqrt{-\tilde{E}_n^{\pm}}r), \qquad (3.79)
\end{aligned}
$$

avec $\tilde{E}_n^{\pm} = E_n^{\pm^2} - M^2$, $\alpha_n^{\pm} = 2V_0\left(E_n^{\pm}+M\right)\left(1+\gamma E_n^{\pm}\right)$ et $E_n^{\pm}$ vérifier l'équation (3.75).

Notons que pour $\gamma = 0, \alpha_n^{\pm} \to 2V_0\left(E_n^{\pm}+M\right)$ (dans les deux cas) on obtient l'énergie et les fonctions d'onde normalisées des potentiels de Coulomb.

$$
E_n^{\pm} = \frac{-MV_0^2 \pm \sqrt{V_0^4\left(M^2-1\right)+\left(n+1\right)^4}}{V_0^2+\left(n+1\right)^2}, \qquad (3.80)
$$

$$\Phi_n^{\pm}(r) = \sqrt{\frac{\alpha_n^{\pm} n! E_n^{\pm}}{2\sqrt{V_0^4 (M^2-1)+(n+1)^4}\Gamma(n+2)}} \times \left(2\sqrt{-\tilde{E}_n^{\pm}} r\right) e^{-\sqrt{-\tilde{E}_n^{\pm}} r} L_n^1(2\sqrt{-\tilde{E}_n^{\pm}} r), \tag{3.81}$$

Nous notons que pour les deux exemples nous pouvons prendre d'autres valeurs pour q.

En outre, pour les potentiels linéaires toutes les constantes de normalisation des fonctions d'onde obtenues peuvent être déterminées en utilisant la condition de normalisation (3.31) , Eq (3.50) et les relations (voir [18])

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x)\, dx &= \sqrt{\pi} n! 2^n \delta_{mn}, \\ x H_n(x) &= \frac{1}{2} H_{n+1}(x) + n H_{n-1}(x), \end{aligned} \tag{3.82}$$

également pour le potentiel coulombien en utilisant la condition de normalisation (3.31) , Eq (3.66) et les relations (voir [18])

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\nu} L_m^{\nu}(x) L_n^{\nu}(x)\, dx = \frac{\Gamma(\nu+n+1)}{n!} \delta_{mn}, \tag{3.83}$$

$$(n+1) L_{n+1}^{\nu}(x) - (2n+\nu+1-x) L_n^{\nu}(x) + (n+\nu) L_{n-1}^{\nu}(x) = 0. \tag{3.84}$$

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons examiné le potentiel dépendant de l'énergie relatif à l'équation de Klein-Gordon par l'approche de l'intégrale de chemin et nous avons justifié le changement (3.31) dans la constante de normalisation de fonctions d'onde pour des particules de Klein-Gordon soumises à des potentiels scalaires et vectoriels dépendants de

l'énergie. La correction due à la dépendance de l'énergie des potentiels a été déterminée en premier lieu, en utilisant directement l'équation de KG, puis en considérant l'équation de continuité et enfin, en adaptant le théorème de Feynman-Hellmann à notre cas.

Comme application, les cas des potentiels linéaires et Coulomb avec la dépendance énergétique sont considérées. Pour de tels potentiels, le propagateur est déterminé et à partir des pôles, le spectre d'énergie et les fonctions d'onde normalisées ont été extraites.

Il est facile de vérifier que les corrections relatives à des potentiels qui ont été examinés sont correctes.

Enfin, il est utile de noter que le problème de la dépendance à l'énergie pour les particules sans spin relativiste est considéré dans le présent chapitre pour la première fois par l'approche intégrale de chemin et que le lien de cette approche (intégrale de chemin) doit certainement exister avec celui développé pour l'équation de Schrödinger avec des composantes dissipatives [21] .

Chapitre 4

Particule avec masse dépend de position et de l'énergie

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, en utilisant l'approche intégrale de chemin nous proposons de considérer le problème de la masse dépend de la position et de l'énergie (masse variable) $m\left(\hat{x}, \hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)$. Notre objectif est de montrer comment transformer le problème d'une particule de masse variable en un problème de particule ayant une masse constante.

Dans une première étape, le propagateur est formulé suivant l'approche des intégrales de chemins et grâce à des fonctions bien choisies au départ le problème est réduit celui d' une particule ayant une masse constante soumise à un potentiel dépend de l'énergie, c'est à dire on est ramené à un problème considéré et traité au 1er chapitre[1, 2] .

Nous considérons dans ce chapitre des exemples explicites se trouvant dans le seul article existant sur ce sujet afin de faire la comparaison [12].

4.2 Formulation du propagateur

Le propagateur $K(x_b, t_b; x_a, t_a)$, que nous proposons de déterminer est la solution de l'équation suivante

$$\left(\hat{H}_b - i\hbar\frac{\partial}{\partial t_b}\right) K(x_b, t_b; x_a, t_a) = i\hbar\delta\left(x_b - x_a\right)\delta\left(t_b - t_a\right), \tag{4.1}$$

où

$$\hat{H} = \frac{1}{2m\left(\hat{x}, \hat{E}\right)}\hat{p}^2 + V\left(\hat{x}\right), \tag{4.2}$$

est l'opérateur Hamiltonien du système avec $m\left(\hat{x}, \hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)$ dépend de la position et de l'énergie.

Formellement, nous avons successivement

$$
\begin{aligned}
K(x_b,t_b;x_a,t_a) &= f_r\left(\hat{x},\hat{E}\right)\frac{i\hbar}{f_l\left(\hat{x},\hat{E}\right)\left(\hat{H}-\hat{E}\right)f_r\left(\hat{x},\hat{E}\right)}f_l\left(\hat{x},\hat{E}\right) \\
&= \int_0^\infty d\lambda\,\langle x_b,t_b|\,f_l\left(\hat{x},\hat{E}\right)e^{-\frac{i}{\hbar}\lambda f_l\left(\hat{x},\hat{E}\right)\left(\hat{H}-\hat{E}\right)f_r\left(\hat{x},\hat{E}\right)}f_r\left(\hat{x},\hat{E}\right)|x_a,t_a\rangle\,,
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

où $f_r\left(\hat{x},\hat{E}\right)$, $f_l\left(\hat{x},\hat{E}\right)$ sont des fonction régulatrices.

Suivant la procédure habituelle de K, l'intervalle de temps est d'abord divisée en $N+1$ parties égales infinitésimales $\varepsilon=\frac{\lambda}{N+1}$ et l'exponentielle est décomposée en N +1 exponentielle (à la suite Trotter) et puis les relations de fermeture

$$
\int\int dtdx\,|x,t\rangle\,\langle x,t| = 1, \tag{4.4}
$$

et

$$
\int\int dpdE\,|p,E\rangle\,\langle p,E| = 1\ , \tag{4.5}
$$

sont insérées entre chaque paire d'exponentielle. Les vecteurs de base $|x,t\rangle\,,|p,E\rangle$ kets propres respectivement de $\hat{x}$, $\hat{t}$, $\hat{p}$ et $\hat{E}$ sont utilisés dans le but d'éliminer les opérateurs et la transition $|x\rangle\rightarrow|p\rangle$, $|t\rangle\rightarrow|E\rangle$ est effectuée au moyen de produits scalaires

$$
\langle x|\,p\rangle = \frac{1}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}px}\quad,\qquad\qquad \langle E|\,t\rangle = \frac{1}{2\pi\hbar}e^{-\frac{i}{\hbar}Et}. \tag{4.6}
$$

La forme discrète de K

$$
\begin{aligned}
K(x_b,t_b;x_a,t_a) &= \int_0^{\infty} d\lambda \lim_{N\to\infty} \int \prod_{n=1}^{N} dx_n dt_n \prod_{n=1}^{N+1} \frac{dp_n dE_n}{(2\pi\hbar)^2} \times f_l\left(x_b,E_b\right) f_r\left(x_a,E_1\right) \\
&\times \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N+1} \left[p_n\left(x_n - x_{n-1}\right) - E_n\left(t_n - t_{n-1}\right) \right.\right. \\
&-\varepsilon \left[\frac{f_l\left(x_n,E_n\right) f_r\left(x_{n_{-1}},E_n\right)}{2m\left(x_n,E_n\right)} p_n^2 \right. \\
&\left.\left. + f_l\left(x_n,E_n\right) f_r\left(x_n,E_n\right)\left(V\left(x_n\right) - E_n\right)\right]\right\}. \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

Comme les intégrations sur t_n donnent N fonctions de Dirac $\delta\left(E_n - E_{n+1}\right)$, ce qui implique

$$
E_1 = E_2 = ... = E_{N+1} = E, \qquad (4.8)
$$

et après intégrations sur les variables E_n, donc K se réduit à

$$
\begin{aligned}
K(x_b,t_b;x_a,t_a) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_l\left(x_b,E\right) f_r\left(x_a,E\right) \frac{dE}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar}E(t_b-t_a)} \\
&\int_0^{\infty} d\lambda \sqrt{\frac{m\left(x_b,E\right)}{2\varepsilon i\pi\hbar f_l\left(x_b,E\right) f_r\left(x_a,E\right)}} \\
&\times \lim_{N\to\infty} \int \prod_{n=1}^{N} \sqrt{\frac{m\left(x_n,E\right)}{2\varepsilon i\pi\hbar f_l\left(x_n,E\right) f_r\left(x_n,E\right)}} dx_n \\
&\times \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N+1} \frac{m\left(x_n,E\right)}{f_l\left(x_n,E\right) f_r\left(x_{n-1},E\right)} \frac{\left(x_n - x_{n-1}\right)^2}{2\varepsilon} \right. \\
&\left. -\varepsilon\left[f_l\left(x_n,E\right) f_r\left(x_n,E\right)\left(V\left(x_n\right) - E\right)\right]\right\} . \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

Comme $f_l\left(x,E\right)$, $f_r\left(x,E\right)$ sont des fonctions arbitraires nous les choisissons comme suit

$$
f_l\left(x_n,E\right) = m\left(x_n,E\right) \text{ and } f_r\left(x_n,E\right) = 1, \qquad (4.10)
$$

et avec ce choix simple, K devient

$$
\begin{aligned}
K(x_b,t_b;x_a,t_a) &= \int_{-\infty}^{+\infty} m\left(x_b,E\right)\frac{dE}{2\pi\hbar}e^{-\frac{i}{\hbar}E(t_b-t_a)} \\
&\times\int_0^{\infty} d\lambda\sqrt{\frac{1}{2\varepsilon i\pi\hbar}}\lim_{N\to\infty}\int\prod_{n=1}^{N}\sqrt{\frac{1}{2\varepsilon i\pi\hbar}}dx_n \\
&\times\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\frac{\left(x_n-x_{n-1}\right)^2}{2\varepsilon}\right. \\
&\left.-\varepsilon\left[m\left(x_n,E\right)\left(V\left(x_n\right)-E\right)\right]\right\}\ , \qquad (4.11)
\end{aligned}
$$

qui, du point de vue formel K s'écrit

$$
\begin{aligned}
K(x_b,t_b;x_a,t_a) &= \int_{-\infty}^{+\infty} m\left(x_b,E\right)\frac{dE}{2\pi\hbar}e^{-\frac{i}{\hbar}E(t_b-t_a)} \\
&\times\int_0^{\infty} d\lambda e^{\frac{i}{\hbar}E\lambda}\int Dx e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^{\lambda}ds\left[\frac{\dot{x}^2}{2}-m(x,E)(V(x)-E)-E\right]} \qquad (4.12)
\end{aligned}
$$

ou encore

$$
\begin{aligned}
K(x_b,t_b;x_a,t_a) &= m\left(x_b,i\hbar\frac{\partial}{\partial t_b}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{2\pi\hbar}e^{-\frac{i}{\hbar}E(t_b-t_a)} \\
&\times\int_0^{\infty} d\lambda e^{\frac{i}{\hbar}E\lambda}\int Dx e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^{\lambda}ds\left[\frac{\dot{x}^2}{2}-m(x,E)(V(x)-E)-E\right]} \qquad (4.13)
\end{aligned}
$$

4.3 Applications

Pour illustrer ce qui a été écrit, considérons deux exemples puisés de la référence [12] :

Premier cas : puits carré infinie et $m(x,E)$

Le potentiel de puits carré infinie est tel que

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & |x| > L > 1, \\ 0, & |x| < L \quad , \end{cases} \tag{4.14}$$

et la masse qui dépend de position et de E est également choisie suivant la forme suivante

$$\begin{aligned} m(x,E) &= [\theta(x-1)\,\theta(-x+L) - \theta(-x-1)\,\theta(x+1)] \\ &\quad - \tanh(E)\,[\theta(x+1) + \theta(-x+1)]\,. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Le propagateur correspondant à cette forme

$$\begin{aligned} K(x_b, x_a, E) &= \int_{-\infty}^{+\infty} m(x_b, E)\,\frac{dE}{2\pi} e^{-iE(t_b - t_a)} \\ &\quad \times \int_0^{\infty} d\lambda e^{iE\lambda} \int_{-L}^{+L} Dx e^{\int_0^\lambda ds \left[\frac{\dot{x}^2}{2} - V_0(E)(\theta(x+1) - \theta(x-1))\right]}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

où maintenant

$$V_0(E) = E\,(\tanh(E) + 1)\,,$$

est la nouvelle dépendance en E.

Effectuons le changement de variable $x = y + 1$ pour mettre le propagateur K sous la forme

$$\begin{aligned} K(y_b, y_a, E) &= \int_{-\infty}^{+\infty} m(y_b, E)\,\frac{dE}{2\pi} e^{-iE(t_b - t_a)} \\ &\quad \times \int_0^{\infty} d\lambda e^{iE\lambda} \int_{-L-1}^{+L-1} Dy e^{i\int_0^\lambda ds \left[\frac{\dot{y}^2}{2} - V_0(E)\tilde{\theta}_1(y)\right]}, \end{aligned} \tag{4.17}$$

où

$$\tilde{\theta}_1(y) = (\theta(y+2) - \theta(y)),$$

afin d'utiliser l'expression donnée dans la référence [22] et qui est la suivante

$$K(y_b, y_a, E) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} (-1)^j K(y_b^{(j)}, y_a, E), \tag{4.18}$$

où

$$y_b^{(j)} = \begin{cases} 2jL + y_b, & \text{où } j = 2\nu, \\ 2jL - y_b, & \text{où } j = 2\nu + 1, \end{cases} \tag{4.19}$$

et selon la référence [17], le propagateur K a la forme suivante

$$K(x_b, x_a, E) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} [K(x_b + 4\nu l, x_a, E) - K(-x_b + 4\nu l + 2l, x_a, E)], \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{+\infty} m(x_b, E) \frac{dE}{2\pi} e^{-iE(t_b - t_a)} \int_0^{\infty} d\lambda e^{iE\lambda} \\ &\times \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \left\{ \left[\tilde{\theta}_2(x_b) \tilde{\theta}_2(x_a) + \tilde{\theta}_1(x_b) \tilde{\theta}_1(x_a) e^{-iV_0(E)\lambda} \right] \right. \\ &\times \int \frac{dp}{2\pi} \left[e^{i\left[(x_b - x_a + 4\nu L)p - p^2\lambda\right]} - e^{i\left[(-x_b - x_a + 4\nu L + 2L)p - p^2\lambda\right]} \right] \\ &+ \tilde{\theta}_2(x_b) \tilde{\theta}_1(x_a) \int \frac{dp}{2\pi} \left[e^{i\left[(x_b + 4\nu L)p - x_a\sqrt{p^2 - 2V_0(E)} - p^2\lambda\right]} \right. \\ &\left. - e^{i\left[(-x_b + 4\nu L + 2L)p - x_a\sqrt{p^2 - 2V_0(E)} - p^2\lambda\right]} \right] \\ &+ \tilde{\theta}_1(x_b) \tilde{\theta}_2(x_a) e^{-iV_0(E)\lambda} \int \frac{dp}{2\pi} \left[e^{i\left[(x_b + 4\nu L)p - x_a\sqrt{p^2 - 2V_0(E)} - p^2\lambda\right]} \right. \\ &\left. \left. - e^{i\left[(-x_b + 4\nu L + 2L)p - x_a\sqrt{p^2 - 2V_0(E)} - p^2\lambda\right]} \right] \right\} \end{aligned} \tag{4.21}$$

où nous avons posé

$$
\begin{aligned}
\tilde{\theta}_1(x_a) &= \theta(x_a+1)-\theta(x_a), \\
\tilde{\theta}_1(x_b) &= \theta(x_b+1)-\theta(x_b), \\
\tilde{\theta}_2(x_a) &= \theta(-x_a-1)+\theta(x_a), \\
\tilde{\theta}_2(x_b) &= \theta(-x_b-1)+\theta(x_b).
\end{aligned} \tag{4.22}
$$

Notons que pour $x \in [-L, L]$, $\tilde{\theta}_2(x_b)\,\tilde{\theta}_1(x_a) = \tilde{\theta}_2(x_a)\,\tilde{\theta}_1(x_b) = 0$, le propagateur K devient

$$
\begin{aligned}
K(x_b, x_a, E) &= \int_{-\infty}^{+\infty} m(x_b, E)\,\frac{dE}{2\pi} e^{-iE(t_b-t_a)} \int_0^{\infty} d\lambda e^{iE\lambda} \\
&\quad \times \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \left\{ \left[\tilde{\theta}_2(x_b)\,\tilde{\theta}_2(x_a) + \tilde{\theta}_1(x_b)\,\tilde{\theta}_1(x_a)\, e^{-iV_0(E)\lambda} \right] \right. \\
&\quad \left. \int \frac{dp}{2\pi} \left[e^{i\left[(x_b-x_a+4\nu L)p-p^2\lambda\right]} - e^{i\left[(-x_b-x_a+4\nu L+2L)p-p^2\lambda\right]} \right] \right\}, \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} m(x_b, E)\,\frac{dE}{2\pi\hbar} e^{-iE(t_b-t_a)} \int_0^{\infty} d\lambda e^{iE\lambda} \\
&\quad \times \left\{ \left[\tilde{\theta}_2(x_b)\,\tilde{\theta}_2(x_a) + \tilde{\theta}_1(x_b)\,\tilde{\theta}_1(x_a)\, e^{-\frac{i}{\hbar}V_0(E)\lambda} \right] \right. \\
&\quad \left. \int \frac{dp}{2\pi} e^{-ip^2\lambda} \left[e^{i[(x_b-x_a+4\nu L)p]} - e^{i[(-x_b-x_a+4\nu L+2L)p]} \right] \right\} \\
&\quad \times \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} e^{4i\nu Lp},
\end{aligned} \tag{4.23}
$$

et en utilisant la règle de sommation de Poisson

$$
\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} e^{4i\nu Lp} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta\left(\frac{2\pi L}{p} - n\right) = \frac{\pi}{2L} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta\left(p - \frac{\pi n}{2L}\right). \tag{4.24}
$$

Nous avons alors

$$
\begin{aligned}
K(x_b, x_a, E) &= \frac{\pi}{2L}\int_{-\infty}^{+\infty} m\left(x_b, E\right)\frac{dE}{2\pi}e^{-iE(t_b-t_a)}\int_0^{\infty} d\lambda e^{iE\lambda} \\
&\times\left\{\left[\tilde{\theta}_2\left(x_b\right)\tilde{\theta}_2\left(x_a\right)+\tilde{\theta}_1\left(x_b\right)\tilde{\theta}_1\left(x_a\right)e^{-\frac{i}{\hbar}V_0(E)\lambda}\right]\right. \\
&\left.\int\frac{dp}{2\pi}e^{-ip^2\lambda}\left[e^{ip[(x_b-L)-(x_a-L)]}-e^{ip[-(x_b-L)-(x_a-L)]}\right]\right\} \\
&\times\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\delta\left(p-\frac{\pi n}{2L}\right), \qquad (4.25)
\end{aligned}
$$

où les p qui contribuent au calcul de K sont donnés par

$$
p_n = \frac{\pi n}{2L}, \qquad n = 0 \pm 1, \pm 2, \pm 3, ... \qquad (4.26)
$$

Alors après intégration K a pour expression

$$
\begin{aligned}
K(x_b, x_a, E) &= \frac{\pi}{2L}\int_{-\infty}^{+\infty} m\left(x_b, E\right)\frac{dE}{2\pi}e^{-iE(t_b-t_a)}\int_0^{\infty} d\lambda e^{iE\lambda} \\
&\times\left\{\left[\tilde{\theta}_2\left(x_b\right)\tilde{\theta}_2\left(x_a\right)+\tilde{\theta}_1\left(x_b\right)\tilde{\theta}_1\left(x_a\right)e^{-\frac{i}{\hbar}V_0(E)\lambda}\right]\right. \\
&\times\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{-ip_n^2\lambda}\left[e^{ip_n[(x_b-L)-(x_a-L)]}\right. \\
&\left.\left.-e^{ip_n[-(x_b-L)-(x_a-L)]}\right]\right\}, \qquad (4.27)
\end{aligned}
$$

Après intégration par rapport à λ (4.27) et en utilisant

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\left[e^{ip_n[(x_b-L)-(x_a-L)]}-e^{ip_n[-(x_b-L)-(x_a-L)]}\right] \\
&= 4\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\sin\left[p_n\left(x_b-L\right)\right]\sin\left[p_n\left(x_a-L\right)\right], \qquad (4.28)
\end{aligned}
$$

alors K s'écrit

$$
\begin{aligned}
K(x_b, x_a, E) &= \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi i} e^{-iE(t_b-t_a)} \\
&\times \sum_{n=0}^{n=+\infty} \sin\left[p_n\left(x_b - L\right)\right] \sin\left[p_n\left(x_a - L\right)\right] \\
&\times \left[\frac{\tilde{\theta}_3\left(x_b\right)\tilde{\theta}_3\left(x_a\right)}{E - p_n^2} + \frac{\tilde{\theta}_4\left(x_b\right)\tilde{\theta}_4\left(x_a\right)}{E - p_n^2 - V_0\left(E\right)}\right], \qquad (4.29)
\end{aligned}
$$

Aux dénominateurs apparaissent des pôles et avec le théorème de résidu, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
K(x_b, x_a, E) &= \sum_{n=0}^{n=+\infty} \left\{ e^{-iE_n(t_b-t_a)} \frac{\tilde{\theta}_3\left(x\right)}{L} \sin\left[p_n\left(x - L\right)\right] \sin\left[p_n\left(x - L\right)\right] \right. \\
&\left. + e^{-i\tilde{E}_n(t_b-t_a)} \frac{\tilde{\theta}_4\left(x\right)}{L} \sin\left[p_n\left(x - L\right)\right] \sin\left[p_n\left(x - L\right)\right] \right\} \\
&= \sum_{n=0}^{n=+\infty} \left\{ e^{-iE_n(t_b-t_a)} \Phi_1\left(x\right) \Phi_1^*\left(x\right) \right. \\
&\left. + e^{-i\tilde{E}_n(t_b-t_a)} \Phi_2\left(x\right) \Phi_2^*\left(x\right) \right\} \qquad (4.30)
\end{aligned}
$$

où

$$
\begin{aligned}
\tilde{\theta}_3\left(x\right) &= \left\{\left[\theta\left(x-1\right)\theta\left(-x+L\right) - \theta\left(-x-1\right)\theta\left(x+1\right)\right]\right. \\
&\left. - \tanh\left(E\right)\left[\theta\left(x+1\right) + \theta\left(-x+1\right)\right]\right\} \tilde{\theta}_2\left(x\right), \qquad (4.31) \\
\tilde{\theta}_4\left(x\right) &= \left\{\left[\theta\left(x-1\right)\theta\left(-x+L\right) - \theta\left(-x-1\right)\theta\left(x+1\right)\right]\right. \\
&\left. - \tanh\left(E\right)\left[\theta\left(x+1\right) + \theta\left(-x+1\right)\right]\right\} \tilde{\theta}_1\left(x\right). \qquad (4.32)
\end{aligned}
$$

à partir de la décomposition spectrale (4.29), nous tirons les fonctions d'ondes

$$\Phi_1(x) = \frac{\tilde{\theta}_3(x)}{L}\sin\left[p_n(x-L)\right], \qquad x \in [-L,-1] \tag{4.33}$$

$$\Phi_2(x) = \frac{\tilde{\theta}_4(x)}{L}\sin\left[p_n(x-L)\right], \qquad x \in [-1,0] \tag{4.34}$$

ainsi que les énergies (4.29)

$$E_n = p_n^2, \qquad x \in [-L,-1], \tag{4.35}$$

$$\tilde{E}_n = p_n^2 + \tilde{E}_n\left(\tanh\left(\tilde{E}_n\right)+1\right), \qquad x \in [-1,0]. \tag{4.36}$$

Pour $x \in [-L,-1]$, $\tilde{\theta}_3(x) = 1$, $\tilde{\theta}_4(x) = 0$;

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}\sin\left[p_n(x-L)\right], \tag{4.37}$$

où

$$p_n = \sqrt{E_n}. \tag{4.38}$$

Notons que pour $E_n = k_n^2$; $p_n = k_n$;

$$\Phi_1^{pair}(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}\sin\left[k_n(x+L)\right], \qquad x \in [-L,-1], \tag{4.39}$$

$$\Phi_1^{impair}(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}\cos\left[k_n x\right], \qquad x \in [-L,-1], \tag{4.40}$$

et pour $E_n = -k_n^2$; $p_n = ik_n$, $(\sin[ikx] = i\sinh[kx],\ \cos[ikx] = \sinh[kx])$;

$$\Phi_1^{pair}(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sinh\left[k_n (x+L)\right], \qquad x \in [-L,-1], \tag{4.41}$$

$$\Phi_1^{impair}(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \cosh\left[k_n x\right], \qquad x \in [-L,-1]. \tag{4.42}$$

Pour $x \in [-1,0]$, $\tilde{\theta}_3(x) = 0$, $\tilde{\theta}_4(x) = \sqrt{-\tanh(E_n)}$;

$$\Phi_2(x) = \sqrt{\frac{-\tanh\left(\tilde{E}_n\right)}{L}} \sin\left[p_n (x-L)\right], \tag{4.43}$$

où

$$p_n = \sqrt{-\tilde{E}_n \tanh\left(\tilde{E}_n\right)}, \tag{4.44}$$

Notons que pour $\tilde{E}_n = k_n^2$; $p_n = i\beta_n$, ($\beta_n = k_n\sqrt{\tanh(k_n^2)}$), les fonctions d'ondes sont

$$\Phi_2^{pair}(x) = \sqrt{\frac{\tanh(k_n^2)}{L}} \sinh\left[\beta_n x\right], \qquad x \in [-1,0], \tag{4.45}$$

$$\Phi_2^{impair}(x) = \sqrt{\frac{\tanh(k_n^2)}{L}} \cosh\left[\beta_n x\right], \qquad x \in [-1,0], \tag{4.46}$$

pour $\tilde{E}_n = -k_n^2$; $p_n = i\mu_n$, ($\mu_n = k_n\sqrt{\tanh(k_n^2)}$), les fonctions d'ondes sont

$$\Phi_2^{pair}(x) = \sqrt{\frac{\tanh(k_n^2)}{L}} \sinh\left[\mu_n x\right], \qquad x \in [-1,0], \tag{4.47}$$

$$\Phi_2^{impair}(x) = \sqrt{\frac{\tanh(k_n^2)}{L}} \cosh\left[\mu_n x\right], \qquad x \in [-1,0]. \tag{4.48}$$

Deuxième cas : oscillateur harmonique ($V(x) = x^2$) et $m(E)$ quadratique par rapport à l'énergie ($m(E) = \frac{A^2}{2}(E-E_0)^2$)

Suivant [17] , le propagateur à la forme suivante

$$\begin{aligned}
K(x_b,t_b;x_a,t_a) &= -\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A^2}{2}\left(E-E_0\right)^2\frac{dE}{2\pi\hbar}\exp\left[-\frac{i}{\hbar}E\left(t_b-t_a\right)\right] \\
&\quad\times\frac{i}{\hbar}\int_0^{\infty}d\lambda e^{\frac{i}{\hbar}\tilde{E}\lambda}\int Dxe^{\frac{i}{2\hbar}\int_0^{\lambda}\left(\dot{x}^2-\omega_E^2x^2\right)}, \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A^2}{2}\left(E-E_0\right)^2\frac{dE}{2\pi\hbar}\exp\left[-\frac{i}{\hbar}E\left(t_b-t_a\right)\right] \\
&\quad\sqrt{\frac{1}{\pi\hbar^3\omega_E}}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\tilde{E}}{\hbar\omega_E}\right)D_{-\frac{1}{2}+\frac{\tilde{E}}{\hbar\omega_E}}\left(\sqrt{\frac{2\omega_E}{\hbar}}x_b\right) \\
&\quad\times D_{-\frac{1}{2}+\frac{\tilde{E}}{\hbar\omega_E}}\left(-\sqrt{\frac{2\omega_E}{\hbar}}x_a\right)\qquad\left(x_b>x_a\right), \qquad (4.49)
\end{aligned}$$

où $\omega_E=\pm A\left(E-E_0\right)$, $\tilde{E}=\frac{A^2}{2}E\left(E-E_0\right)$ et $D_\nu(z)$ sont fonctions paraboliques cylindriques (nous pouvons aussi utiliser la relation Mehler). A partir du fonction Γ, les pôles sont donnés par

$$\frac{1}{2}-\frac{\tilde{E}}{\hbar\omega_E}=-n, \qquad (4.50)$$

nous avons deux cas :

1er cas : $\omega_E=A\left(E-E_0\right)$ les énergies sont données par

$$E_n^{\pm}=\frac{1}{2}\left(E_0\pm\sqrt{E_0^2+\frac{\hbar\left(8n+4\right)}{A}}\right),\qquad n=0,1,2,... \qquad (4.51)$$

(E_n^+ est choisi parce que E_n^- conduit à des fonctions d'onde non normalisables). Près des pôles, nous avons:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\tilde{E}}{\hbar\omega_E}\right)\approx\frac{\left(-1\right)^n}{n!\left(\frac{1}{2}-\frac{\tilde{E}}{\hbar\omega_E}+n\right)}=\frac{2\left(-1\right)^{n+1}}{An!\sqrt{E_0^2+\frac{\hbar(8n+4)}{A}}\left(E-E_n^+\right)}, \qquad (4.52)$$

En utilisant la relation [18] entre $D_\nu(z)$ et $H_n\left(z\right)$ (polynômes Hermite) et après l'intégration par rapport à E,

$$
\begin{aligned}
K(x_b,t_b;x_a,t_a) &= \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n^+(t_b-t_a)} \\
&\times \frac{\omega_n^+\sqrt{\omega_n^+}}{A2^n n!\sqrt{\pi\hbar}\sqrt{E_0^2+\frac{\hbar(8n+4)}{A}}} e^{-\frac{\omega_n^+}{2\hbar}\left(x_a^2+x_b^2\right)} \\
&\times H_n\left(\sqrt{\frac{\omega_n^+}{\hbar}}x_a\right) H_n\left(\sqrt{\frac{\omega_n^+}{\hbar}}x_b\right),
\end{aligned} \tag{4.53}
$$

on obtient dans ce cas à partir de la décomposition spectrale du propagateur, les fonctions d'onde

$$
\Phi_n^+(x) = \sqrt{\frac{\omega_n^+\sqrt{\omega_n^+}}{A2^n n!\sqrt{\pi\hbar}\sqrt{E_0^2+\frac{\hbar(8n+4)}{A}}}} \times \exp\left[-\frac{\omega_n^+}{2\hbar}x^2\right] H_n\left(\sqrt{\frac{\omega_n^+}{\hbar}}x\right), \tag{4.54}
$$

convenablement normalisée, où $\omega_n^+ = \frac{A}{2}\left(-E_0+\sqrt{E_0^2+\frac{\hbar(8n+4)}{A}}\right)$.

2ème cas : $\omega_E = -A(E-E_0)$ les énergies sont données par

$$
E_n^{\pm} = \frac{1}{2}\left(E_0 \pm \sqrt{E_0^2 - \frac{\hbar(8n+4)}{A}}\right), \qquad n = 0,1,2,...,n_{\max}, \tag{4.55}
$$

où $n_{\max} = \frac{AE_0^2}{8\hbar} - \frac{1}{2}$. Près des pôles, nous avons:

$$
\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\tilde{E}}{\hbar\omega_E}\right) &\approx \frac{(-1)^n}{n!\left(\frac{1}{2}-\frac{\tilde{E}}{\hbar\omega_E}+n\right)} \\
&= \frac{2(-1)^{n+1}}{An!\sqrt{E_0^2-\frac{\hbar(8n+4)}{A}}}\left(\frac{1}{E-E_n^+}-\frac{1}{E-E_n^-}\right),
\end{aligned} \tag{4.56}
$$

après intégration par rapport à E,

$$
\begin{aligned}
K(x_b,t_b;x_a,t_a) &= \sum_n \theta\left(t_b-t_a\right) e^{-\frac{i}{\hbar}E_n^{+}(t_b-t_a)} \\
&\times\left[\frac{\omega_n^{+}\sqrt{\omega_n^{+}}}{A2^n n!\sqrt{\pi\hbar}\sqrt{E_0^2-\frac{\hbar(8n+4)}{A}}}e^{-\frac{\omega_{n+}}{2\hbar}\left(x_a^2+x_b^2\right)}\right. \\
&\left.\times H_n\left(\sqrt{\frac{\omega_n^{+}}{\hbar}}x_a\right)H_n\left(\sqrt{\frac{\omega_n^{+}}{\hbar}}x_b\right)\right] \\
&-\theta\left(t_a-t_b\right) e^{-\frac{i}{\hbar}E_n^{-}(t_a-t_b)} \\
&\times\left[\frac{\omega_n^{-}\sqrt{\omega_n^{-}}}{A2^n n!\sqrt{\pi\hbar}\sqrt{E_0^2-\frac{\hbar(8n+4)}{A}}}e^{-\frac{\omega_{n-}}{2\hbar}\left(x_a^2+x_b^2\right)}\right. \\
&\left.\times H_n\left(\sqrt{\frac{\omega_n^{-}}{\hbar}}x_a\right)H_n\left(\sqrt{\frac{\omega_n^{-}}{\hbar}}x_b\right)\right] \qquad (4.57)
\end{aligned}
$$

son obtient dans ce cas à partir de la décomposition spectrale de propagateur, les fonctions d'onde

$$
\Phi_n^{\pm}(x)=\sqrt{\frac{\omega_n^{\pm}\sqrt{\omega_n^{\pm}}}{A2^n n!\sqrt{\pi\hbar}\sqrt{E_0^2-\frac{\hbar(8n+4)}{A}}}}\times\exp\left[-\frac{\omega_n^{\pm}}{2\hbar}x^2\right]H_n\left(\sqrt{\frac{\omega_n^{\pm}}{\hbar}}x\right), \qquad (4.58)
$$

convenablement normalisées , où $\omega_n^{\pm}=\frac{A}{2}\left(E_0\mp\sqrt{E_0^2+\frac{\hbar(8n+4)}{A}}\right)$.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons examiné le problème de la masse dépendant de E et de la position par l'approche des intégrales de chemin. Nous avons également montré comment changer un problème de masse variable à celui de masse constante mais le potentiel dépend cette fois de l'énergie. A titre d'exemples, des cas simples sont considérés et sont conformes à la référence [12].

Chapitre 5

Conclusion générale

Dans cette thèse, nous avons reconsidéré le problème de la normalisation des fonctions d'onde lorsque les interactions sont décrites par des potentiels dépendants de E.

D'abord avec la formulation intégrale de chemin, il a été considéré des particules non relativistes décrites par l'équation de Schrödinger et ensuite des particules relativistes sans spin ou de Klein-Gordon où il a été montré comment par un calcul de résidus, une modification est apportée aux constantes de normalisation. Dans les deux cas non-relativite et relativiste, cette modification est déterminée.

a) dans le cas non-relativiste :

-en imposant à la densité de probabilité relative à l'équation de Schrödinger la condition de positivité.

- ou en utilisant le théorème de Feynman-Hellmann adapté à notre cas non-relativiste.

b) dans le cas relativiste :

-en utilisant la condition d'orthogonalité des fonctions d'onde.

-en exigeant que la densité de probabilité relative à l'équation de KG doit être positive ou négative respectivement pour des énergies positives ou négatives.

-ou et en utilisant le théorème de Feynman-Hellmann adapté à notre cas relativiste, sans spin.

Finalement, un problème de masse dépendant de E et de x est considéré par l'approche des intégrales de chemin. Des exemples simples relatifs à ce problème sont pris de la seule référence [12] existante sur ce sujet.

Nos résultats, pour conclure sont tous en accord avec ceux qui se trouvent dans les articles cités en référence.

Bibliographie

[1] J. Formanek, J. Mares and R. Lombard, Czech. J. Phys. 54, 289 (2004)

[2] J. Garcia-Martinez, J. Garcia-Ravelo, J. J. Pena, A. Schulze-Halberg, Phys. Lett. A 373, 3619 (2009)

[3] R. Lombard, An-Najah Univ. J. Res. (N. Sc.) 25, 49 (2011)

[4] H. Hassanabadi, S. Zarrinkamar, A. A. Rajabi, Commun. Theor. Phys. 55, 541 (2011)

[5] R. J. Lombard, J. Mares, Phys. Lett. A 373, 426 (2009)

[6] R. Yekken, R. J. Lombard, J. Phys. A : Math. Theor. 43, 125301 (2010)

[7] A. Schulze-Halberg, Cent. Eur. J. Phys. 9, 57 (2011)

[8] R. J. Lombard, J. Mares, C. Volpe, arXiv :0411067v1[hep-ph]

[9] J. Lin, Y. S. Li, X. M. Qian, Phys. Lett. A 362, 212 (2007)

[10] A A Nabiev, Inverse Problems, 22, 2055 (2006)

[11] C. F. Yang , J. Math. Anal. Appl. 393, 526 (2012)

[12] M. Znojil, arXiv :0403223v2 [quant-ph]

[13] H. Hassanabadi, S. Zarrinkamar, H. Hamzavi and A. A. Rajabi, Arab. J. Sci. Eng. 37, 209 (2012)

[14] M. Hamzavi, S. M. Ikhdair, arXiv :1205.2191 [nucl-th]

[15] R.P.Feynman , A.R.Hibbs, Mechanics and Path Integrals (Mc Graw-Hill,1965).

[16] D. J. Griffiths : Introduction to Quantum Mechanics (Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ,1995)

[17] C. Grosche, F. Steiner, Handbook of Feynman Path Integrals, Springer Tracts in Modern Physics, Vol. 145 (Springer, 1998)

[18] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products, eds. A. Jeffrey and D. Zwillinger (Academic Press, 2007)

[19] L.S.Schulman : Techniques and Applications of Path Integration (Wiley, 1981)

[20] C. Grosche, J. Phys. A : Math. Gen. 29,365(1996)

[21] V. S. Olkhovsky, S. P. Maydanyuk, E. Recami, Phys. Part. Nucl. 41, 508 (2010)

[22] W. Janke, H. Kleinet, Lettre Al Nuovo Cimento, Vol. 25, N. 10 (1979).

Annex :Article publiés

Modern Physics Letters A
Vol. 28, No. 18 (2013) 1350079 (12 pages)

DOI: 10.1142/S021773231350079X

ENERGY-DEPENDENT POTENTIAL AND NORMALIZATION OF WAVE FUNCTION

A. BENCHIKHA and L. CHETOUANI*

Département de Physique, Faculté des sciences exactes,
Université Constantine 1, Constantine, Algeria
**lyazidchetouani@gmail.com*

Received 20 February 2013
Revised 17 April 2013
Accepted 29 April 2013
Published 5 June 2013

The problem of normalization related to energy-dependent potentials is examined in the context of the path integral approach, and a justification is given. As examples, the harmonic oscillator and the hydrogen atom (radial) where, respectively the frequency and the Coulomb's constant depend on energy, are considered and their propagators determined. From their spectral decomposition, we have found that the wave functions extracted are correctly normalized.

Keywords: Energy-dependent potential; path integral; propagator.

PACS Nos.: 03.65.Ca, 03.65.Db, 03.65.Ge

Recently, wave equations with energy-dependent potentials have been studied by Formanek *et al.*[1] They have noted that the density probability, or the scalar product, has to be modified with respect to the usual definition, in order to have a conserved norm. In relativistic quantum mechanics, the Schrödinger equation with energy-dependent potentials has been exactly solved in 1D, 3D[2,3] and in D-dimensional.[4] The many-body problem with an energy-dependent confining potential[5] and the problem of the equivalent local potential[6] have also been discussed. An exact quantization formula for Schrödinger equation with potentials that depend affine linearly on the energy has been constructed.[7] An energy-dependent potential has been applied to describe static properties of heavy quark systems.[8] On the other hand, in non-relativistic quantum mechanics, the Klein–Gordon equation has been exactly solved in D-dimensional by using the Nikiforov–Uvarov method.[9]

*Corresponding author

The Dirac problem with energy-dependent Coulomb potential including coupling Coulomb-like tensor interaction potential under p-spin symmetry has been investigated by using the asymptotic iteration method.[10]

We propose in this paper, after having given the expression of propagator in the path integral approach[11] to examine the problem of normalization of the energy-dependent potentials and to give a justification. As examples, the harmonic oscillator and the hydrogen atom (radial) where, respectively the frequency and the Coulomb's constant depend on energy, are considered and their propagators determined. From their spectral decomposition, the wave functions are extracted.

The propagator $K(x_b, t_b; x_a, t_a)$, which we propose to determine is the solution of the following equation

$$\left(\hat{H}_b - i\hbar\frac{\partial}{\partial t_b}\right)K(x_b, t_b; x_a, t_a) = i\hbar\delta(x_b - x_a)\delta(t_b - t_a)\,, \tag{1}$$

where

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}\,,$$

is the Hamiltonian operator of system with $\hat{V} = V\left(\hat{x}, \hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)$ the energy-dependent potential.

Formally, we have successively obtained,

$$\begin{aligned} K(x_b, t_b; x_a, t_a) &= \frac{i\hbar}{\hat{H} - \hat{E}}\delta(x_b - x_a)\delta(t_b - t_a) \\ &= \int_0^\infty d\lambda \langle x_b, t_b| e^{-\frac{i}{\hbar}\lambda(\hat{H}-\hat{E})}|x_a, t_a\rangle\,. \end{aligned}$$

Following the usual procedure of construction of the formulation of path integral of K, the time interval is first divided into $N+1$ infinitesimal equal parts $\varepsilon = \frac{\lambda}{N+1}$ and the exponential is decomposed into $N+1$ exponential (following Trotter) and then the relations of closure

$$\iint dt\, dx |x, t\rangle\langle x, t| = 1\,,$$

and

$$\iint dp\, dE |p, E\rangle\langle p, E| = 1\,,$$

are inserted between each pair of exponential. The basic vectors $|x, t\rangle$, $|p, E\rangle$ respectively proper kets of $\hat{x}$, $\hat{p}$, $\hat{t}$ and $\hat{E}$ are used in order to eliminate the operators and the transition $|x\rangle \to |p\rangle$, $|t\rangle \to |E\rangle$ is performed by means of scalar products

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}px}\,, \qquad \langle E|t\rangle = \frac{1}{2\pi\hbar}e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\,.$$

The discrete form of K

$$K(x_b,t_b;x_a,t_a)=\int_0^\infty d\lambda \lim_{N\to\infty}\int\prod_{n=1}^{N}dx_n\,dt_n\prod_{n=1}^{N+1}\frac{dp_n\,dE_n}{(2\pi\hbar)^2}$$
$$\times\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\left[p_n(x_n-x_{n-1})-E_n(t_n-t_{n-1}-\varepsilon)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\varepsilon\left(\frac{p_n^2}{2m}+V(x_n,E_n)\right)\right]\right\}, \tag{2}$$

which, from the viewpoint formal K is finally

$$K(x_b,t_b;x_a,t_a)$$
$$=\int_0^\infty d\lambda\int Dx\,Dp\,Dt\,DE\,e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^\lambda ds\left[p\dot{x}-E(\dot{t}-1)-\left(\frac{p^2}{2m}+V(x,E)\right)\right]}, \tag{3}$$

where we have noted by $x_a=x_0$, $x_b=x_{N+1}$, $t_a=t_0$ and $t_b=t_{N+1}$.

Since the integrations on t_n give N Dirac functions $\delta(E_n-E_{n+1})$, which implies

$$E_1=E_2=\cdots=E_{N+1}=E$$

and after integration on the variables E_n, then K is reduced to

$$K(x_b,t_b;x_a,t_a)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{2\pi\hbar}e^{-\frac{i}{\hbar}E(t_b-t_a)}\int_0^\infty d\lambda\,e^{\frac{i}{\hbar}E\lambda}$$
$$\times\int Dx\,Dp\,e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^\lambda ds\left[p\dot{x}-\left(\frac{p^2}{2m}+V(x,E)\right)\right]}. \tag{4}$$

By integrating with respect to p_n, we obtain the final expression of K

$$K(x_b,t_b;x_a,t_a)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{2\pi\hbar}e^{-\frac{i}{\hbar}E(t_b-t_a)}\int_0^\infty d\lambda\,e^{\frac{i}{\hbar}E\lambda}$$
$$\times\int Dx\,e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^\lambda ds\left[\frac{m\dot{x}^2}{2}-V(x,E)\right]}. \tag{5}$$

It is obvious, the integral on λ is the Green's function

$$\int_0^\infty d\lambda\,e^{\frac{i}{\hbar}E\lambda}\int Dx\,e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^\lambda ds\left[\frac{m\dot{x}^2}{2}-V(x,E)\right]}=\frac{\hbar}{i}\sum_n\frac{\psi_{\mathcal{E}_n(E)}(x_b)\psi^*_{\mathcal{E}_n(E)}(x_a)}{E-\mathcal{E}_n(E)},$$

where $\mathcal{E}_n(E)$ are the energy eigenvalues at the fixed E associated to states $\psi_{\mathcal{E}_n(E)}(x)$ and which are such as $\int dx|\psi_{\mathcal{E}_n(E)}(x)|^2=1$.

As $\frac{1}{E-\mathcal{E}_n(E)}\approx\frac{1}{1-\mathcal{E}'_n(E_n)}\frac{1}{E-E_n}$, where E_n are the poles $\left(\text{with } \mathcal{E}'_n(E_n)=\frac{d\mathcal{E}_n(E)}{dE}\Big|_{E=E_n}\right)$, the integral on E can be performed and gives the usual spectral

decomposition of propagator

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t_b - t_a)} \Phi_{E_n}(x_b) \Phi^*_{E_n}(x_a)\,, \tag{6}$$

where

$$\Phi_{E_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathcal{E}'_n(E_n)}} \psi_{\mathcal{E}_n(E_n)}(x)\,, \tag{7}$$

are the wave functions not normalized by usual condition $\int dx |\Phi_{E_n}(x)|^2 = 1$ because of the additional factor $(1 - \mathcal{E}'_n)^{-1/2}$, but according to

$$\int dx |\Phi_{E_n}(x)|^2 \left[1 - \frac{\partial V(x, E_n)}{\partial E_n}\right] = 1\,. \tag{8}$$

In the case where the potential does not depend on $E\big(\frac{\partial V(x,E_n)}{\partial E_n} = 0\big)$, it is obvious that $\mathcal{E}'_n = 0$ and we find the standard spectral decomposition and the usual normalization condition.

Indeed, let us examine this problem of normalization from the Schrödinger equation

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x,t) + \left[V\left(x, i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\right) \Psi(x,t)\right]. \tag{9}$$

If we decompose Ψ on the basis $\{\Phi_{E_n}(x)\}$,

$$\Psi(x,t) = \sum_n a(E_n) e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} \Phi_{E_n}(x) \tag{10}$$

and if we consider two states $\Phi_{E_n}(x)$ and $\Phi_{E_m}(x)$ of energies E_n and E_m, we have

$$E_n \Phi_{E_n}(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Phi_{E_n}(x) + V(x, E_n) \Phi_{E_n}(x)\,,$$

$$E_m \Phi_{E_m}(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Phi_{E_m}(x) + V(x, E_m) \Phi_{E_m}(x)\,.$$

By multiplying the first equation by $\Phi^*_{E_m}(x)$ and the second (complex conjugated) by $\Phi_{E_n}(x)$ and after subtraction and integration over the whole space we obtain

$$\int dx\, \Phi^*_{E_m}(x) \Phi_{E_n}(x) \left(1 - \frac{V(x, E_n) - V(x, E_m)}{E_n - E_m}\right) = \delta_{nm}\,, \tag{11}$$

which is the orthogonality condition.

At the limit $E_m \to E_n$, $\frac{V(x,E_n) - V(x,E_m)}{E_n - E_m} \to \frac{\partial V(x,E_n)}{\partial E_n}$, this orthogonality condition reduces to the normalization condition (8).

Therefore, the energy-dependent potential modifies the normalization constant of the wave functions.

Another manner to see the reason of normalization (8) is to consider the continuity equation. By multiplying Eq. (9) and its complex conjugate, respectively by Ψ^* and Ψ, we obtain after subtraction the following equation

$$\frac{\partial|\Psi(x,t)|^2}{\partial t}+\frac{\partial j}{\partial x}=-\frac{i}{\hbar}\left\{\Psi^*\left[V\left(x,i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\Psi\right]-\Psi\left[V(x,i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\Psi\right]^*\right\},$$

where $j=\frac{\hbar}{2mi}\left(\Psi^*(x,t)\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial x}-\Psi(x,t)\frac{\partial\Psi^*(x,t)}{\partial x}\right)$ is the usual current density. Let us note the presence of second member ($\neq 0$) which can be considered as a source and that we can always absorb in the first term by using the relation $f(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\int^t ds\, f(x,s)$. Then, the previous equation is reduced to the continuity equation related to energy-dependent potential

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho+\frac{\partial}{\partial x}j=0\,, \tag{12}$$

where now

$$\rho=|\Psi|^2-\frac{1}{i\hbar}\int^t ds\left\{\Psi^*(x,s)\left[V\left(x,i\hbar\frac{\partial}{\partial s}\right)\Psi(x,s)\right]\right.$$
$$\left.-\Psi(x,s)\left[V\left(x,i\hbar\frac{\partial}{\partial s}\right)\Psi(x,s)\right]^*\right\}, \tag{13}$$

is the probability density (which is not definite positive) and j is the unchanged current density and the normalization condition is given by

$$\int dx\,\rho=1\,. \tag{14}$$

Let us replace (10) in the expression (13)

$$\rho=\sum_n\sum_m a(E_n)a^*(E_m)\Phi_{E_n}(x)\Phi^*_{E_m}(x)\left\{e^{\frac{i}{\hbar}t(E_m-E_n)}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{i\hbar}(V(x,E_n)-V(x,E_m))\int^t ds\, e^{\frac{i}{\hbar}(E_m-E_n)s}\right\}.$$

As

$$\int^t ds\, e^{\frac{i}{\hbar}(E_m-E_n)s}=\frac{\hbar}{i(E_m-E_n)}e^{\frac{i}{\hbar}(E_m-E_n)t}+Cte\,,$$

then

$$\rho=\sum_n\sum_m a(E_n)a^*(E_m)\Phi_{E_n}(x)\Phi^*_{E_m}(x)e^{\frac{i}{\hbar}t(E_m-E_n)}\left\{1-\frac{V(x,E_n)-V(x,E_m)}{E_n-E_m}\right\}$$
$$-\frac{Cte}{i\hbar}\sum_n\sum_m a(E_n)a^*(E_m)\Phi_{E_n}(x)\Phi^*_{E_m}(x)(V(x,E_n)-V(x,E_m))\,,$$

the term with the Cte can be omitted since it is independent of time and thus does not contribute to the continuity equation. Only the first term remains unchange since it depends on time and it is clear that if the conditions (8) and (11) are fulfilled, then $\int dx\,\rho = \sum_n |a(E_n)|^2 = 1$ and the probabilistic interpretation is respected.

In the sample case where the potential is separable, $V(x,\hat{E}) = V_1(x) + V_2(x)\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)$ and with a linear dependence in $\hat{E}$, the integral is simply equal to

$$\frac{1}{i\hbar}\int^t ds(\cdot) = V_2(x)\int^t ds\frac{\partial|\Psi(x,s)|^2}{\partial s} = V_2(x)|\Psi(x,t)|^2 + c^{te}(x)V_2(x)\,,$$

and the density is

$$\rho = (1 - V_2(x))|\Psi(x,t)|^2\,,$$

where the term $c^{te}(x)V_2(x)$ has been removed, since it does not contribute in (12). Thus, with this linear form in E, it is easy to see that this problem reduces to a problem of variable mass by a change in time.

Finally according to the Feynman–Hellmann theorem (see for example, Ref. 14), which established for an Hermitian Hamiltonian $\hat{H} = \hat{H}(\lambda)$ depends on a parameter λ in the following result

$$\frac{d\mathcal{E}(\lambda)}{d\lambda} = \int dx\,\Phi^*_\lambda(x)\frac{\partial\hat{H}(\lambda)}{\partial\lambda}\Phi_\lambda(x)\,,$$

where $\Phi_\lambda(x)$ is the normalized eigenvector of $\hat{H}$

$$\hat{H}(\lambda)\Phi_\lambda(x) = \mathcal{E}(\lambda)\Phi_\lambda(x)\,,$$

it is easy to see in our case as $\hat{H}(\lambda) = \hat{T} + \hat{V}(\lambda)$ and by choosing $\lambda = E_n$ and since $\Phi_{E_n}(x)$ are not normalized $\left(\int dx|\Phi_{E_n}(x)|^2 \neq 1\right)$ we have for the energy-dependent potentials the following relation

$$\mathcal{E}'_n = \frac{d\mathcal{E}_n(E_n)}{dE_n} = \frac{\int dx\,\Phi^*_{E_n}(x)\frac{\partial V(x,E_n)}{\partial E_n}\Phi_{E_n}(x)}{\int dx|\Phi_{E_n}(x)|^2}\,. \tag{15}$$

To illustrate what has been said, let us consider two potentials:

- the harmonic oscillator

$$V(x,E) = \frac{1}{2}m(1+\gamma E^q)x^2\,, \tag{16}$$

- Coulomb potential

$$V(r,E) = -\frac{\hbar^2}{ma_0}\frac{(1+\gamma E)^q}{r}\,, \tag{17}$$

where the frequency and the Coulomb's constant depend on energy.

Case of OH. Following Ref. 12, the propagator is given by

$$K(x_b,t_b;x_a,t_a)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{2\pi\hbar}\exp\left[-\frac{i}{\hbar}E(t_b-t_a)\right]$$
$$\times\sqrt{\frac{m}{\pi\hbar^3\omega_E}}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{E}{\hbar\omega_E}\right)D_{-\frac{1}{2}+\frac{E}{\hbar\omega_E}}\left(\sqrt{\frac{2m\omega_E}{\hbar}}x_b\right)$$
$$\times D_{-\frac{1}{2}+\frac{E}{\hbar\omega_E}}\left(-\sqrt{\frac{2m\omega_E}{\hbar}}x_a\right),\qquad x_b>x_a\,,\tag{18}$$

where $D_\nu(z)$ are parabolic cylinder functions (we can also use the relationship Mehler). From the Γ-function, the poles are given by

$$\frac{1}{2}-\frac{E}{\hbar\omega_E}=-n\,,\qquad n=0,1,2,\ldots.\tag{19}$$

Let us consider the following three particular cases:

- First case: $q=1$; $\omega_E^2=1+\gamma E$.

Then, the energy are

$$E_n^{\pm}=\frac{\hbar^2(2n+1)^2\gamma}{8}\pm\hbar\left(n+\frac{1}{2}\right)\sqrt{1+\frac{\hbar^2(2n+1)^2}{16}\gamma^2}\,,\tag{20}$$

(E_n^+ is chosen because E_n^- leads to unnormalizable wave functions). Near the poles, we have:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{E}{\hbar\omega_E}\right)\approx\frac{(-1)^{n+1}}{n!\left(\frac{1}{2}-\frac{E}{\hbar\omega_E}+n\right)}=\frac{(-1)^{n+1}\hbar\omega_n}{n!\left(1-\frac{\hbar(2n+1)\gamma}{4\omega_n}\right)(E-E_n^+)}\,,$$

where $\omega_n=\frac{\hbar(2n+1)}{4}\gamma+\sqrt{1+\frac{\hbar^2(2n+1)^2}{16}\gamma^2}$.

Using the relation[13]

$$D_n(z)=2^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{z^2}{4}}H_n\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right),$$

between $D_\nu(z)$ and $H_n(z)$ (Hermite polynomials) and after the integration with respect to E,

$$K(x_b,t_b;x_a,t_a)=\sum_n e^{-i\omega_n(n+\frac{1}{2})(t_b-t_a)}$$
$$\times\frac{\sqrt{m\omega_n}}{\sqrt{\pi\hbar}2^n n!\left(1-\frac{\hbar(2n+1)\gamma}{4\omega_n}\right)}e^{-\frac{m\omega_n}{2\hbar}(x_a^2+x_b^2)}$$
$$\times H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega_n}{\hbar}}x_a\right)H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega_n}{\hbar}}x_b\right),\tag{21}$$

we obtain for this case from the spectral decomposition of propagator, the wave functions

$$\Phi_n(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{m\omega_n}}{\sqrt{\pi\hbar}\,2^n n!\big(1-\frac{\hbar(2n+1)\gamma}{4\omega_n}\big)}}\exp\left[-\frac{m\omega_n}{2\hbar}x^2\right]H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega_n}{\hbar}}x\right), \tag{22}$$

suitably normalized.

- Second case: $q=\frac{1}{2}$; $\omega_E^2 = 1+\gamma\sqrt{E}$.

From the poles of Γ-function of Eq. (19) the energy E_n is determined by an equation of fourth-order in E

$$E_n^4 + cE_n^2 + dE_n + e = 0\,, \tag{23}$$

where $c=-2\hbar^2(n+\frac{1}{2})^2$, $d=-\hbar^4(n+\frac{1}{2})^4\gamma^2$ and $e=\hbar^4(n+\frac{1}{2})^4$.

Following Ref. 12, Eq. (23) can be solved via the following equation of second-order

$$E_n^2 + \frac{A}{2}E_n + y_n - \frac{d}{A} = 0\,,$$

where $A=\pm 2\sqrt{2y_n - c}$. Thus, there are four solutions

$$E_{n_{1,2,3,4}} = -A \pm \sqrt{A^2 - 16\left(y_n - \frac{d}{A}\right)}\,, \tag{24}$$

where

$$y_n = \sqrt[3]{\sqrt{D}-\frac{Q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{D}+\frac{Q}{2}} - \frac{R}{3}\,,$$

is the solution of the following cubic equation

$$8y_n^3 - 4cy_n^2 - 8ey_n + 4ec - d^2 = 0\,,$$

with $D=(\frac{P}{3})^3+(\frac{Q}{2})^2$, $P=\frac{3S-R^2}{3}$, $Q=\frac{2R^3}{27}-\frac{RS}{3}+T$, $R=-\frac{c}{2}$, $S=-e$, $T=\frac{4ec-d^2}{8}$.

After integration on E, we obtain from the spectral decomposition

$$\begin{aligned} K(x_b,t_b;x_a,t_a) = \sum_n &\exp\left[-i\omega_n\left(n+\frac{1}{2}\right)(t_b-t_a)\right] \\ &\times \frac{\sqrt{m\omega_n}}{\sqrt{\pi\hbar}2^n n!\big(1-\frac{\hbar(2n+1)\gamma}{8\omega_n\sqrt{E_n}}\big)}\exp\left[-\frac{m\omega_n}{2\hbar}(x_a^2+x_b^2)\right] \\ &\times H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega_n}{\hbar}}x_a\right)H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega_n}{\hbar}}x_b\right), \end{aligned} \tag{25}$$

the normalized wave functions

$$\Phi_n(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{m\omega_n}}{\sqrt{\pi\hbar}\,2^n n!\big(1-\frac{\hbar(2n+1)\gamma}{8\omega_n\sqrt{E_n}}\big)}}\exp\left[-\frac{m\omega_n}{2\hbar}x^2\right]H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega_n}{\hbar}}x\right), \tag{26}$$

with $\omega_n = \sqrt{1+\gamma\sqrt{E_n}}$ and E_n solution of Eq. (23).

- Third case: $q = 2$; $\omega_E^2 = 1 + \gamma E^2$.

From of the poles of

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{E}{\hbar\omega_E}\right) \approx \frac{(-1)^n}{n!\big(\frac{1}{2}-\frac{E}{\hbar\omega_E}+n\big)} = \frac{(-1)^{n+1}\hbar\omega_n}{n!\big(1-\hbar^2\big(n+\frac{1}{2}\big)^2\gamma\big)(E-E_n)},$$

we obtain the energy

$$E_n = \frac{\hbar(2n+1)}{\sqrt{4-\hbar^2(2n+1)^2\gamma}}, \tag{27}$$

where $\omega_n = \frac{2}{\sqrt{4-\hbar^2(2n+1)^2\gamma}}$ with $n = 0,1,2,\ldots,$ for $\gamma \le 0$ and $n = 0,1,2,\ldots,$ $< \frac{1}{\hbar\sqrt{\gamma}} - \frac{1}{2}$ for $\gamma > 0$, the wave functions are

$$\Phi_n(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{m\omega_n}}{\sqrt{\pi\hbar}2^n n!\big(1-\hbar^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\gamma\big)}}e^{\left[-\frac{m\omega_n}{2\hbar}x^2\right]}H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega_n}{\hbar}}x\right). \tag{28}$$

Note for $\gamma = 0$, (in the three cases) we obtain the well-known energy and wave functions of the harmonic oscillator.

Case of Coulomb. The corresponding propagator has the form

$$K(r_b,t_b;r_a,t_a) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{2\pi\hbar}e^{-\frac{i}{\hbar}E(t_b-t_a)}G^{\mathrm{RC}}(r_b,r_a;E), \tag{29}$$

with the Green function $G^{\mathrm{RC}}(r_b,r_a;E)$ of the radial Coulomb potential given by[12]:

$$\begin{aligned} G^{\mathrm{RC}}(r_b,r_a;E) &= \frac{i}{\hbar}\int_0^\infty d\lambda\, e^{\frac{i}{\hbar}E\lambda}\int Dr(t)e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^\lambda dt\left[\frac{m}{2}\dot{r}^2+\frac{\beta}{r}-\frac{\hbar^2(\eta^2-\frac{1}{4})}{2mr^2}\right]} \\ &= \frac{2\Gamma\big(\eta-k+\frac{1}{2}\big)}{\hbar\omega\Gamma(2\eta+1)}W_{k,\eta}\left(\frac{m\omega}{\hbar}r_b\right)M_{k,\eta}\left(\frac{m\omega}{\hbar}r_a\right), \qquad r_b > r_a, \end{aligned} \tag{30}$$

where $\eta = l + \frac{1}{2}$, $k = \frac{2\beta}{\hbar\omega}$, $\beta = \frac{\hbar^2}{ma_0}(1+\gamma E)^q$ and $\omega = 2\sqrt{\frac{-2E}{m}}$.

As before, the poles are given by:

$$\eta - k + \frac{1}{2} = -n, \qquad n = 0,1,2,\ldots.$$

Let us consider particular values of q.

- First case: $q = 1$.

Then, the energy are

$$E_{nl} = \frac{1 - 2\gamma E_{nl}^H - \sqrt{1 - 4\gamma E_{nl}^H}}{2\gamma^2 E_{nl}^H}\,, \tag{31}$$

with $E_{nl}^H = -\frac{\hbar^2}{2ma_0^2(n+l+1)^2}$, $\left(\gamma > \frac{1}{4E_{nl}^H}\right)$ and as

$$\Gamma\left(\eta - k + \frac{1}{2}\right) \approx \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \frac{m\omega_n^2}{4\left(n + \eta + \frac{1}{2}\right)\sqrt{1 - 4\gamma E_{nl}^H}(E - E_{nl})}\,, \tag{32}$$

and by taking into account the relation $W_{\nu,\mu}(z)$, $M_{\nu,\mu}(z)$ and the confluent hypergeometric function[13]:

$$M_{\nu,\mu}(z) = z^{\mu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{z}{2}}\, {}_1F_1\left(\mu - \nu + \frac{1}{2}; 2\mu + 1; z\right),$$

$$W_{n+\frac{\nu+1}{2},\frac{\nu}{2}}(z) = (-1)^{+n} \frac{\Gamma(n + \nu + 1)}{\Gamma(\nu + 1)} z^{\frac{(\nu+1)}{2}} e^{-\frac{z}{2}}\, {}_1F_1(-n; \nu + 1; z)\,,$$

and after integration on E, we obtain the spectral decomposition of K

$$\begin{aligned} K(r_b, t_b; r_a, t_a) = \sum_n & e^{\frac{im}{8\hbar}\omega_n^2(t_b - t_a)} \frac{(n + 2l + 1)!}{2n!(n + l + 1)((2l + 1)!)^2} \\ & \times \frac{m\omega_n}{\hbar\sqrt{1 - 4\gamma E_{nl}^H}} \left(\frac{-8mE_{nl}}{\hbar} r_a r_b\right)^{l+1} e^{-\frac{(1+\gamma E_{nl})}{a_0(n+l+1)}(r_b + r_a)} \\ & \times {}_1F_1\left(-n; 2l + 2; \frac{2(1 + \gamma E_{nl})}{a_0(n + l + 1)} r_a\right) \\ & \times {}_1F_1\left(-n; 2l + 2; \frac{2(1 + \gamma E_{nl})}{a_0(n + l + 1)} r_b\right) \end{aligned} \tag{33}$$

and the suitably normalized wave functions

$$\begin{aligned} \Phi_{nl}(r) = & \sqrt{\frac{m\omega_n}{\hbar\sqrt{1 - 4\gamma E_{nl}^H}} \frac{(n + 2l + 1)!}{2n!(n + l + 1)(2l + 1)!}} \\ & \times \left(\frac{\sqrt{-8mE_{nl}}}{\hbar} r\right)^{l+1} e^{-\frac{(1+\gamma E_{nl})}{a_0(n+l+1)} r}\, {}_1F_1\left(-n; 2l + 2; \frac{2(1 + \gamma E_{nl})}{a_0(n + l + 1)} r\right), \end{aligned} \tag{34}$$

with $\omega_n = 2\sqrt{\frac{-1+2\gamma E_{nl}^H + \sqrt{1-4\gamma E_{nl}^H}}{m\gamma^2 E_{nl}^H}}$.

- Second case: $q = \frac{1}{2}$.

For this value, the energy and the wave functions are respectively given by

$$E_{nl} = \frac{E^H_{nl}}{1 - \gamma E^H_{nl}}\,, \tag{35}$$

$$\Phi_{nl}(r) = \sqrt{\frac{m\omega_n}{\hbar(1-\gamma E^H_{nl})}\frac{(n+2l+1)!}{2n!(n+l+1)((2l+1)!)^2}} \times \left(\frac{\sqrt{-8mE_{nl}}}{\hbar}r\right)^{l+1} e^{-\frac{\sqrt{1+\gamma E_{nl}}}{a_0(n+l+1)}r}\ {}_1F_1\left(-n; 2l+2; \frac{2\sqrt{1+\gamma E_{nl}}}{a_0(n+l+1)}r\right), \tag{36}$$

where $\omega_n = 2\sqrt{\frac{-2E^H_{nl}}{m(1-\gamma E^H_{nl})}}$, $\left(\gamma > \frac{1}{E^H_{nl}}\right)$.

- Third case: $q = \frac{1}{4}$.

It is easy to see $\gamma < 0$, that the energy are

$$E_{nl} = E^H_{nl}\frac{\gamma E^H_{nl} + \sqrt{4+\gamma^2(E^H_{nl})^2}}{2} \tag{37}$$

and the wave functions are

$$\Phi_{nl}(r) = \sqrt{\frac{m\omega_n\left(\gamma E^H_{nl} + \sqrt{4+\gamma^2(E^H_{nl})^2}\,\right)}{\hbar\sqrt{4+\gamma^2(E^H_{nl})^2}}\frac{(n+2l+1)!}{2n!(2l+1)!(n+l+1)}} \times \left(\frac{\sqrt{-8mE_{nl}}}{\hbar}r\right)^{l+1} e^{-\frac{(1+\gamma E_{nl})^{\frac{1}{4}}}{a_0(n+l+1)}r}\ {}_1F_1\left(-n; 2l+2; \frac{2(1+\gamma E_{nl})^{\frac{1}{4}}}{a_0(n+l+1)}r\right), \tag{38}$$

where $\omega_n = 2\sqrt{\frac{-E^H_{nl}}{m}\left(\gamma E^H_{nl} + \sqrt{4+\gamma^2(E^H_{nl})^2}\,\right)}$.

Note that for $\gamma = 0$, we obtain the well-known energy and wave functions of the radial Coulomb potential.

In conclusion, in this paper, we have examined the energy-dependent potential by the approach of path integral and we have justified the change (8) made to the normalization of the wave functions for the energy-dependent potentials.

As an application, we have considered the cases of the harmonic oscillator and radial Coulomb potentials with energy dependence. For such potentials, we have determined the propagators and from the poles, the spectrum of energy and the wave functions extracted are in accordance with those obtained by direct resolution of the Schrödinger equation.

References

1. J. Formanek, J. Mares and R. Lombard, *Czech. J. Phys.* **54**, 289 (2004).
2. J. Garcia-Martinez, J. Garcia-Ravelo, J. J. Pena and A. Schulze-Halberg, *Phys. Lett. A* **373**, 3619 (2009).
3. R. Lombard, *An-Najah Univ. J. Res.* (*N. Sc.*) **25**, 49 (2011).
4. H. Hassanabadi, S. Zarrinkamar and A. A. Rajabi, *Commun. Theor. Phys.* **55**, 541 (2011).
5. R. J. Lombard and J. Mares, *Phys. Lett. A* **373**, 426 (2009).
6. R. Yekken and R. J. Lombard, *J. Phys. A*: *Math. Theor.* **43**, 125301 (2010).
7. A. Schulze-Halberg, *Cent. Eur. J. Phys.* **9**, 57 (2011).
8. R. J. Lombard, J. Mares and C. Volpe, arXiv:hep-ph/0411067v1.
9. H. Hassanabadi, S. Zarrinkamar, H. Hamzavi and A. A. Rajabi, *Arab. J. Sci. Eng.* **37**, 209 (2012).
10. M. Hamzavi and S. M. Ikhdair, arXiv:1205.2191v1.
11. R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals* (McGraw-Hill, 1965).
12. C. Grosche and F. Steiner, *Handbook of Feynman Path Integrals*, Springer Tracts in Modern Physics, Vol. 145 (Springer, 1998).
13. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals*, *Series*, *and Products*, eds. A. Jeffrey and D. Zwillinger (Academic Press, 2007).
14. M. Le Bellac, *Quantum Physics* (Cambridge Univ. Press, 2006).

Cent. Eur. J. Phys.
DOI: 10.2478/s11534-014-0457-8

VERSITA

Central European Journal of **Physics**

Spinless relativistic particle in energy-dependent potential and normalization of the wave function

Research Article

Amar Benchikha, Lyazid Chetouani*

Département de Physique, Faculté des sciences exactes, Université Constantine 1, Constantine, Algeria

Received 19 January 2014; accepted 23 March 2014

Abstract: The problem of normalization related to a Klein-Gordon particle subjected to vector plus scalar energy-dependent potentials is clarified in the context of the path integral approach. In addition the correction relating to the normalizing constant of wave functions is exactly determined. As examples, the energy dependent linear and Coulomb potentials are considered. The wave functions obtained via spectral decomposition, were found exactly normalized.

PACS (2008): 03.65.Ca, 03.65.Db, 03.65.Ge, 03.65Pm

Keywords: energy-dependent • path integral • Klein-Gordon • Green function

1. Introduction

Several authors have studied the problems of energy-dependent potentials in relativistic and non-relativistic quantum mechanics. For example, in the non-relativistic case we have the energy dependent potentials which were considered by the Schrödinger equation in 1D, 3D and D dimensions [1–4], the many-body problem with energy dependent confining potentials [5], the problem of equivalent local potentials [6], the linearly energy dependent potentials which have been discussed semi classically [7], the static properties of systems of heavy quarks described by potentials depending on the energy [8] and recently the normalization problem of wave functions for energy-dependent potentials which has been examined in the context of the path integral approach [9]. Further examples are given by the Darboux transformation of Schrödinger equation with an energy-dependent potential [10], the inverse scattering problem [11] the trace formulae [12] and linear representation of energy-dependent Hamiltonians [13].

In the relativistic case, the Klein-Gordon (KG) equation with an energy dependent potential has been exactly treated in D dimensions using the Nikiforov-Uvarov method [14]. The iteration asymptotic method has been used to evaluate the Dirac equation with a Coulomb potential depending on an energy term which incorporates coupling Coulomb-like, tensor interaction potential under p-spin and spin symmetry [15].

In this paper we, using the formalism of the path integral [16], clarify the normalization problem of the wave functions when interactions described by the energy dependent potentials are present in the Klein-Gordon equation. As an example, the wave functions are extracted, using

*E-mail: lyazidchetouani@gmail.com

spectral decomposition, from the determined propagator for both the linear and Coulomb potentials with energy dependent parameters.

This paper is organized as follows: in Section 2 of this paper, the formulation of path integral form spinless particles with interactions dependent on energy is given. From the spectral decomposition, it is found that the normalization of the wave functions is modified. This change is determined in Section 3 following three approaches:

-Directly starting with the KG equation and from the orthogonality condition of the wave functions.

-Using the continuity equation and by requiring that the probability for the KG equation must be positive or negative and respectively correlated with positive or negative energies.

-Using the (variant) Feynman-Hellmann theorem [17] adapted to the relativistic case without spin.

Finally, in Section 4, two types of potential, linear and Coulomb are used as examples to calculate the propagators. Due to the dependence on energy of the potentials, it is shown that corrections related to the normalization constants can be obtained from the wave functions identified through spectral decomposition.

2. Propagator and spectral decomposition

The propagator $K(x_b, t_b; x_a, t_a)$, which we propose relating to the spinless particles is solution of following equation

$$\left[(\hat{p}_b - eA_b)^2 - (M + S_b)^2\right] K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \delta(x_b - x_a)\,\delta(t_b - t_a), \tag{1}$$

and its expression is

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = -i\int_0^\infty d\lambda \langle x_a, t_a \mid e^{i\lambda\left[(\hat{p}-eA)^2-(M+S)^2\right]} \mid x_b, t_b\rangle, \tag{2}$$

where M^2 must be understood as $M^2 - i0^+$

Following the usual procedure of construction of the path integral, first the time interval is divided into $N+1$ infinitesimal equal parts $\varepsilon = \frac{\lambda}{N+1}$, the exponential is decomposed into $N+1$ exponentials (according to Trotter (see e.g. [16])) and then the closure relations

$$\int\int dt dx\, |x, t\rangle \langle x, t| = 1, \tag{3}$$

and

$$\int\int dp_x dp_0\, |p_x, p_0\rangle \langle p_x, p_0| = 1\ , \tag{4}$$

are inserted between each pair of exponentials. Next, the basis vectors $|x\rangle, |p_x\rangle, |t\rangle, |p_0\rangle$ respectively proper kets of $\hat{x}, \hat{p}, \hat{t}$ and $\hat{p}_0 = \hat{E}$ are used in order to eliminate the operators. The transition $|x\rangle \to |p\rangle$, $|t\rangle \to |p_0\rangle$ is performed by means of scalar products

$$\langle t, x|\, p_0, p_x\rangle = \frac{1}{2\pi} e^{-i(p_0 t - p_x x)}\ . \tag{5}$$

Then, the discrete form of K is

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = -i\int_0^\infty d\lambda \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\int dx_n dt_n \prod_{n=1}^{N+1}\int \frac{d(p_x)_n\, d(p_0)_n}{(2\pi)^2} \times e^{i\sum_{n=1}^{N+1}\left\{(p_x)_n\Delta x_n - (p_0)_n\Delta t_n + \varepsilon\left[-(p_x)_n^2 + \left((p_0)_n - V\left(x_n,(p_0)_n\right)\right)^2 - \left(M+S\left(x_n,(p_0)_n\right)\right)^2\right]\right\}}, \tag{6}$$

where to simplify, the considered electromagnetic field was reduced to its scalar part: $eA^\mu = (V(x, E), 0)$.

The integrations on t_n give N Dirac functions, $\delta\left((p_0)_n - (p_0)_{n+1}\right)$, which implies

$$(p_0)_1 = (p_0)_2 = \ldots = (p_0)_{N+1} = E, \tag{7}$$

and after integrations on the variables $(p_0)_n$ we obtain

$$K\left(x_b,t_b;x_a,t_a\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{2i\pi}e^{-iE(t_b-t_a)}\int_0^{\infty}d\lambda\lim_{n\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\int dx_n\prod_{n=1}^{N+1}\int\frac{d\left(p_x\right)_n}{2\pi}\times$$
$$e^{i\sum\limits_{n=1}^{N+1}\left\{\left(p_x\right)_n\Delta x_n-\varepsilon\left[\left(p_x\right)_n^2-\left(E-V(x_n,E)\right)^2+\left(M+S(x_n,E)\right)^2\right]\right\}}, \tag{8}$$

which can be reduced after integrations on the $\left(p_x\right)_n$ to

$$K\left(x_b,t_b;x_a,t_a\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{2i\pi}e^{-iE(t_b-t_a)}\int_0^{\infty}d\lambda\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(4i\pi\varepsilon\right)^{1/2}}\prod_{n=1}^{N}\int\frac{dx_n}{\left(4i\pi\varepsilon\right)^{1/2}}e^{i\sum\limits_{n=1}^{N+1}\left[\frac{\Delta x_n^2}{4\varepsilon}+\varepsilon\left(\left(E-V(x_n,E)\right)^2-\left(M+S(x_n,E)\right)^2\right)\right]}, \tag{9}$$

which can be rewritten in following compact form

$$K\left(x_b,t_b;x_a,t_a\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{2i\pi}e^{-iE(t_b-t_a)}\int_0^{\infty}d\lambda\int Dxe^{i\int_0^{\lambda}ds\left[\frac{\dot{x}^2}{4}+\left(E-V(x,E)\right)^2-\left(M+S(x,E)\right)^2\right]}. \tag{10}$$

For fixed E, the propagator admits the following spectral decomposition,

$$\begin{aligned}\int Dxe^{i\int_0^{\lambda}ds\left[\frac{\dot{x}^2}{4}+\left(E-V(x,E)\right)^2-\left(M+S(x,E)\right)^2\right]} &= e^{iE^2\lambda}\int Dxe^{i\int_0^{\lambda}ds\left[\frac{\dot{x}^2}{4}-2EV(x,E)+V(x,E)^2-\left(M+S(x,E)\right)^2\right]}\\ &= e^{iE^2\lambda}\sum_n e^{-i\mathcal{E}_n^2(E)\lambda}\psi_{\mathcal{E}_n(E)}\left(x_b\right)\psi^*_{\mathcal{E}_n(E)}\left(x_a\right),\end{aligned} \tag{11}$$

where $\mathcal{E}_n^2\left(E\right)$ and $\psi_{\mathcal{E}_n(E)}\left(x\right)$ (with $\int dx\left|\psi_{\mathcal{E}_n(E)}\left(x\right)\right|^2 = 2\mathcal{E}_n\left(E\right)$) are the eigenvalues and the eigenfunctions respectively associated to operator energy

$$\hat{\mathcal{H}}=\hat{p}_x^2+\left(M+S\left(x,E\right)\right)^2+2EV\left(x,E\right)-V\left(x,E\right)^2,=\hat{p}_x^2+W\left(x,E\right), \tag{12}$$

and $W\left(x,E\right)=E^2-\left(E-V\left(x,E\right)\right)^2+\left(M+S\left(x,E\right)\right)^2$is the potential depending of E.
The integral on λ is the Green's function

$$\int_0^{\infty}d\lambda\int Dxe^{i\int_0^{\lambda}ds\left[\frac{\dot{x}^2}{4}+\left(E-V(x,E)\right)^2-\left(M+S(x,E)\right)^2\right]} = i\sum_n\frac{\psi_{\mathcal{E}_n(E)}\left(x_b\right)\psi^*_{\mathcal{E}_n(E)}\left(x_a\right)}{E^2-\mathcal{E}_n^2\left(E\right)}. \tag{13}$$

As the denominator $E^2-\mathcal{E}_n^2\left(E\right)=\left(E-\mathcal{E}_n\left(E\right)\right)\left(E+\mathcal{E}_n\left(E\right)\right)$ is a product of two factors, we assume that there are two poles or roots (one for each factor). Then in the vicinity of the two poles $\pm\,E_n$ we have $\frac{1}{E-\mathcal{E}_n(E)}\approx\frac{1}{1-\mathcal{E}_n'}\frac{1}{E-E_n}$, $\frac{1}{E+\mathcal{E}_n(E)}\approx\frac{1}{1+\mathcal{E}_n'}\frac{1}{E+E_n}$ respectively and the integral on E

$$K(x_b,t_b;x_a,t_a)=\sum_n\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{2\pi}e^{-iE(t_b-t_a)}\psi_{\mathcal{E}_n(E)}\left(x_b\right)\psi^*_{\mathcal{E}_n(E)}\left(x_a\right)\frac{1}{2E_n}\left\{\frac{1}{1-\mathcal{E}_n'}\frac{1}{E-E_n}-\frac{1}{1+\mathcal{E}_n'}\frac{1}{E+E_n}\right\}, \tag{14}$$

can be easily performed and gives the usual spectral decomposition of propagator

$$\begin{aligned} K(x_b,t_b;x_a,t_a) &= i\sum_n \frac{1}{2E_n}\left\{\theta(t_b-t_a)\frac{e^{-iE_n(t_b-t_a)}}{1-\mathcal{E}'_n}\psi_{E_n}(x_b)\,\psi^*_{E_n}(x_a) - \theta(t_a-t_b)\frac{e^{iE_n(t_b-t_a)}}{1+\mathcal{E}'_n}\psi_{-E_n}(x_b)\,\psi^*_{-E_n}(x_a)\right\} \\ &= i\sum_n \frac{1}{2E_n}\left\{\theta(t_b-t_a)\,e^{-iE_n(t_b-t_a)}\Phi_{E_n}(x_b)\,\Phi^*_{E_n}(x_a) - \theta(t_a-t_b)\,e^{iE_n(t_b-t_a)}\Phi_{-E_n}(x_b)\,\Phi^*_{-E_n}(x_a)\right\}, \end{aligned} \tag{15}$$

where now, the link between the wave functions is the following

$$\Phi_{E_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\mathcal{E}'_n}}\psi_{\mathcal{E}_n(E_n)=E_n}(x), \tag{16}$$

where $\mathcal{E}'_n = \left.\frac{d\mathcal{E}(E)}{dE}\right|_{E=E_n}$.
These states $\Phi_{E_n}(x)$ are normalized as follows (see [9])

$$\int dx\,|\Phi_{E_n}(x)|^2\left(1-\frac{\partial W(x,E)}{\partial E^2}\right)\Bigg|_{E=E_n} = 1, \tag{17}$$

or

$$\int dx\,|\Phi_E(x)|^2\left(1-\frac{\partial\left\{E^2-(E-V(x,E))^2+(M+S(x,E))^2\right\}}{\partial E^2}\right)\Bigg|_{E=E_n} = 1, \tag{18}$$

Let us note that if V and S are independent of E *i.e.* $\frac{\partial V(x,E)}{\partial E} = \frac{\partial S(x,E)}{\partial E} = 0$, the term $2EV(x)$ of $\frac{\partial W(x,E)}{\partial E^2}$ contributes to $\mathcal{E}_n$ and consequently $\mathcal{E}'_n \neq 0$. In this case, the normalization condition becomes

$$\int dx\,|\Phi_{E_n}(x)|^2\left(1-\frac{V(x)}{E_n}\right) = 1. \tag{19}$$

Thus, the additional factor $(1-\mathcal{E}'_n)^{-1/2}$ modifies the usual normalization condition of the Klein Gordon equation and becomes, for the energy-dependent potentials, as follows

$$\int dx\,|\Phi_{E_n}(x)|^2\left(1-\frac{V(x,E_n)}{E_n}\right)\left(1-\frac{\partial V(x,E_n)}{\partial E_n}-\frac{\frac{\partial S(x,E_n)}{\partial E_n}\frac{S(x,E_n)+M}{E_n}}{1-\frac{V(x,E_n)}{E_n}}\right) = 1. \tag{20}$$

3. Determination of correction $\mathcal{E}'_n$

Let us determine the correction $\mathcal{E}'_n$.The purpose is to determine the correction provided by general energy-dependent potentials and to show that it is the following

$$\mathcal{E}'_n = 1-\frac{\int dx\Phi^*_{E_n}(x)\,\frac{\partial\left[(E_n-V(x,E_n))^2-(S(x,E_n)+M)^2\right]}{\partial\left(E_n^2\right)}\Phi_{E_n}(x)}{\int dx\,|\Phi_{E_n}(x)|^2}. \tag{21}$$

Indeed, this change in the normalization condition can be simply obtained from the continuity equation. First, let us examine this problem of normalization by considering the Klein-Gordon equation

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\left[\left(i\frac{\partial}{\partial t}-V\left(x,i\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)^2-\left(M+S\left(x,i\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)^2\right]\Psi = 0, \tag{22}$$

and its complex conjugate

$$\frac{\partial^2\Psi^*}{\partial x^2}+\left[\left(i\frac{\partial}{\partial t}+V^*\left(x,i\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)^2-\left(M+S^*\left(x,i\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)^2\right]\Psi^*=0. \tag{23}$$

From these two equations multiplied respectively by Ψ and Ψ^*, after subtraction we obtain

$$\begin{aligned}\Psi^*\left\{\left(i\frac{\partial}{\partial t}-V\left(x,i\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)^2-\left(S\left(x,i\frac{\partial}{\partial t}\right)+M\right)^2\right\}\Psi \;-\; \Psi\left\{\left(i\frac{\partial}{\partial t}+V^*\left(x,i\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)^2-\left(S^*\left(x,i\frac{\partial}{\partial t}\right)+M\right)^2\right\}\Psi^* \\ +\;\Psi^*\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}-\Psi\frac{\partial^2\Psi^*}{\partial x^2}=0.\end{aligned} \tag{24}$$

It is clear that the last two terms represent $\frac{\partial}{\partial x}j$ with

$$j=i\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\right), \tag{25}$$

the current density and if the relation $f(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\int^t dsf(x,s)$ is used in order to obtain the continuity equation, $\frac{\partial}{\partial t}\rho+\frac{\partial}{\partial x}j=0$, the first two terms represent $\frac{\partial}{\partial t}\rho$, where

$$\begin{aligned}\rho \;=\; i\int^t ds\Bigg\{&\Psi^*\left[\left(i\frac{\partial}{\partial s}-V\left(x,i\frac{\partial}{\partial s}\right)\right)^2-\left(M+S\left(x,i\frac{\partial}{\partial s}\right)\right)^2\right]\Psi \\ &-\Psi\left[\left(i\frac{\partial}{\partial s}+V^*\left(x,i\frac{\partial}{\partial s}\right)\right)^2-\left(M+S^*\left(x,i\frac{\partial}{\partial s}\right)\right)^2\right]\Psi^*\Bigg\},\end{aligned} \tag{26}$$

is the density. This density is obviously not positive definite.
Now, if we consider respectively two states $\Phi_{E_n}(x)$ and $\Phi_{E_m}(x)$ related to energies E_n and E_m, we have

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+[E_n-V(x,E_n)]^2-[M+S(x,E_n)]^2\right]\Phi_{E_n}(x)=0, \tag{27}$$

and

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+[E_m-V(x,E_m)]^2-[M+S(x,E_m)]^2\right]\Phi^*_{E_m}(x)=0. \tag{28}$$

Multiplying the first equation by $\Phi^*_{E_m}(x)$ and the second (complex conjugated) by $\Phi_{E_n}(x)$, after subtraction and integration over the whole space, we obtain

$$\int dx\Phi_{E_n}(x)\Phi^*_{E_m}(x)\left(\frac{(E_n-V(x,E_n))^2-(M+S(x,E_n))^2-(E_m-V(x,E_m))^2+(M+S(x,E_m))^2}{E_n-E_m}\right)=2E_n\delta_{nm}, \tag{29}$$

and since $2E_n\delta_{nm}=(E_n+E_m)\delta_{nm}$, this relation can be rearranged as follows

$$\int dx\Phi_{E_n}(x)\Phi^*_{E_m}(x)\left(1-\frac{V(x,E_n)+V(x,E_m)}{E_n+E_m}\right)\left(1-\frac{V(x,E_n)-V(x,E_m)}{E_n-E_m}-\frac{\frac{S(x,E_n)-S(x,E_m)}{E_n-E_m}\,\frac{2M+S(x,E_n)+S(x,E_m)}{E_n+E_m}}{1-\frac{V(x,E_n)+V(x,E_m)}{E_n+E_m}}\right)=\delta_{nm}, \tag{30}$$

which is the orthonormalization condition for the energy dependent potentials.

At the limit $E_m \to E_n$, $\frac{V(x,E_n)-V(x,E_m)}{E_n-E_m} \to \frac{\partial V(x,E_n)}{\partial E_n}$, $\frac{S(x,E_n)-S(x,E_m)}{E_n-E_m} \to \frac{\partial S(x,E_n)}{\partial E_n}$, this condition can be reduced to the following normalization condition given in (20) or in a more convenient form

$$\int dx \left|\Phi_{E_n}(x)\right|^2 \frac{\partial}{\partial E_n}\left[(E_n - V(x,E_n))^2 - (M + S(x,E_n))^2\right] = 2E_n. \tag{31}$$

In the case where S and V are independent of E : $(\frac{\partial V}{\partial E_n} = \frac{\partial S}{\partial E_n} = 0)$, then the orthonormalization condition becomes

$$\int dx \Phi_{E_n}(x)\, \Phi^*_{E_m}(x) \left(1 - \frac{2V(x)}{E_n + E_m}\right) = \delta_{mn}, \tag{32}$$

and at the limit $E_m \to E_n$, the previous condition is reduced to

$$\int dx \left|\Phi_{E_n}(x)\right|^2 \left(1 - \frac{V(x)}{E_n}\right) = 1. \tag{33}$$

Let us return to the expression of ρ and let us decompose Ψ on the basis $\{\Phi_{E_n}(x)\}$

$$\Psi(x,t) = \sum_n a(E_n)\, e^{-iE_n t} \Phi_{E_n}(x), \tag{34}$$

and after inserting the previous series, ρ becomes

$$\begin{aligned} \rho \;=\; & i\sum_n\sum_m a(E_n)\, a^*(E_m)\, \Phi_{E_n}(x)\, \Phi^*_{E_m}(x) \left\{\left[[E_n - V(x,E_n)]^2 - [M + S(x,E_n)]^2\right]\right. \\ & \left. - \left[[E_m - V(x,E_m)]^2 - [M + S(x,E_m)]^2\right]\right\} \times \int^t ds e^{i(E_m - E_n)s}. \end{aligned} \tag{35}$$

As the result of integration on the variable s

$$\int^t ds e^{i(E_m - E_n)s} = \frac{e^{i(E_m - E_n)t}}{i(E_m - E_n)} + Cte, \tag{36}$$

is simple, we have for ρ the following expression

$$\begin{aligned} \rho \;=\; & \sum_n\sum_m a(E_n)\, a^*(E_m)\, \Phi_{E_n}(x)\, \Phi^*_{E_m}(x)\, e^{i(E_m - E_n)t} \times \\ & \left\{\frac{(E_n - V(x,E_n))^2 - (E_m - V(x,E_m))^2 + (M + S(x,E_m))^2 - (M + S(x,E_n))^2}{E_n - E_m}\right\}, \end{aligned} \tag{37}$$

where the time independent term $iCte\sum\sum_m\{.\}$ has been omitted because it does not contribute to the continuity equation. Now, let us integrate over the whole space by taking into account the orthogonalization relations, then it becomes

$$\begin{aligned} \int dx\rho \;=\; & \sum_n\sum_m a(E_n)\, a^*(E_m) \int dx \Phi_{E_n}(x)\, \Phi^*_{E_m}(x) \times \\ & \left\{\frac{(E_n - V(x,E_n))^2 - (E_m - V(x,E_m))^2 + (M + S(x,E_m))^2 - (M + S(x,E_n))^2}{E_n - E_m}\right\} \\ =\; & \sum_n 2E_n \left|a(E_n)\right|^2 = \begin{cases} >0 \text{ if } E_n>0 \\ <0 \text{ if } E_n<0 \end{cases}, \end{aligned} \tag{38}$$

and thus, if this expression is multiplied by a charge, the result is consistent with the usual reinterpretation of density relating to the Klein-Gordon equation.
Finally, let us establish the link between $\mathcal{E}_n'$ and (18). Let us return to the following equation

$$\mathcal{E}(E)^2 \Phi_{\mathcal{E}(E)}(x) = \left[\hat{p}_x^2 + E^2 - (E - V(x,E))^2 + (M + S(x,E))^2\right] \Phi_{\mathcal{E}(E)}(x). \tag{39}$$

After having carried out the derivation with respect to E and multiplied (39) by $\Phi_E^*(x)$ and integrated over the whole space, we obtain

$$\begin{aligned} & 2\frac{d\mathcal{E}(E)}{dE}\mathcal{E}(E)\int dx\,|\Phi_{\mathcal{E}(E)}(x)|^2 + \mathcal{E}(E)^2\int dx\Phi_{\mathcal{E}(E)}^*(x)\frac{\partial\Phi_E(x)}{\partial E} \\ = & \int dx\Phi_{\mathcal{E}(E)}^*(x)\frac{\partial\left[E^2 - (E - V(x,E))^2 + (M + S(x,E))^2\right]}{\partial E}\Phi_{\mathcal{E}(E)}(x) \\ & + \int dx\Phi_{\mathcal{E}(E)}^*(x)\left[\hat{p}_x^2 + E^2 - (E - V(x,E))^2 + (M + S(x,E))^2\right]\frac{\partial\Phi_{\mathcal{E}(E)}(x)}{\partial E}. \end{aligned} \tag{40}$$

First, an integration by parts twice, shows that $\int dx\Phi_{\mathcal{E}(E)}^*(x)\,\hat{p}_x^2\frac{\partial\Phi_{\mathcal{E}(E)}(x)}{\partial E} = \int dx\frac{\partial\Phi_{\mathcal{E}(E)}(x)}{\partial E}\hat{p}_x^2\Phi_{\mathcal{E}(E)}^*(x)$ and then the term of second member can be rewritten

$$\begin{aligned} & \int dx\Phi_{\mathcal{E}(E)}^*(x)\left[\hat{p}_x^2 + E^2 - (E - V(x,E))^2 + (M + S(x,E))^2\right]\frac{\partial\Phi_{\mathcal{E}(E)}(x)}{\partial E} \\ = & \int dx\frac{\partial\Phi_{\mathcal{E}(E)}(x)}{\partial E}\left[\hat{p}_x^2 + E^2 - (E - V(x,E))^2 + (M + S(x,E))^2\right]\Phi_{\mathcal{E}(E)}^*(x) \\ = & \mathcal{E}(E)^2\int dx\Phi_{\mathcal{E}(E)}^*(x)\frac{\partial\Phi_{\mathcal{E}(E)}(x)}{\partial E}, \end{aligned} \tag{41}$$

which eliminates the second term of first member. Thus, it remains

$$2\frac{d\mathcal{E}(E)}{dE}\mathcal{E}(E)\int dx\,|\Phi_E(x)|^2 = \int dx\Phi_E^*(x)\frac{\partial\left[E^2 - (E - V(x,E))^2 + (M + S(x,E))^2\right]}{\partial E}\Phi_E(x). \tag{42}$$

Now, let us choose $\mathcal{E}(E) \to E_n$ then $\Phi_{\mathcal{E}(E)}(x) \to \Phi_{E_n}(x)$ which is a solution to the Klein-Gordon equation related to energies E_n

$$\left[\hat{p}_x^2 - (E_n - V(x,E_n))^2 + (M + S(x,E_n))^2\right]\Phi_{E_n}(x) = 0, \tag{43}$$

thus

$$\mathcal{E}^2(E_n)\Phi_{E_n}(x) = \left[\hat{p}_x^2 + E_n^2 - (E_n - V(x,E_n))^2 + (M + S(x,E_n))^2\right]\Phi_{E_n}(x), = E_n^2\Phi_{E_n}(x). \tag{44}$$

So,

$$\begin{aligned} 2E_n\mathcal{E}_n'\int dx\,|\Phi_{E_n}(x)|^2 = & \int dx\Phi_{E_n}^*(x)\frac{\partial\left[E_n^2 - (E_n - V(x,E_n))^2 + (S(x,E_n) + M)^2\right]}{\partial E_n}\Phi_{E_n}(x) \\ = & 2E_n\int dx\,|\Phi_{E_n}(x)|^2 - \int dx\Phi_{E_n}^*(x)\frac{\partial\left[(E_n - V(x,E_n))^2 - (S(x,E_n) + M)^2\right]}{\partial E_n}\Phi_{E_n}(x), \end{aligned} \tag{45}$$

and finally

$$\mathcal{E}_n' = 1 - \frac{\int dx \Phi^*_{E_n}(x) \frac{\partial\left[(E_n - V(x,E_n))^2 - (S(x,E_n)+M)^2\right]}{\partial E_n} \Phi_{E_n}(x)}{2E_n \int dx \left|\Phi_{E_n}(x)\right|^2}. \tag{46}$$

This result is nothing other than the adapted version of Feynman-Hellmann theorem (see for example [17]) to the energy dependent potentials.

4. Applications

To illustrate what has been said, let us consider two forms of potential chosen with the same power for the energy dependence to avoid complications in the calculations. In order to avoid complex values the parameters S_0 and V_0 are taken such as $S_0 > V_0$:

- Linear potentials

$$V(x,E) = V_0 (1+\gamma E)^q \; x, \qquad S(x,E) = S_0 (1+\gamma E)^q \, x, \tag{47}$$

- Coulomb potentials

$$V(r,E) = -\frac{V_0 (1+\gamma E)^q}{r}, \quad S(r,E) = -\frac{S_0 (1+\gamma E)^q}{r}, \tag{48}$$

4.1. Linear potentials case

The propagator is given by (see [18])

$$\begin{aligned} K(x_b,t_b;x_a,t_a) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi i} \exp\left[-iE(t_b-t_a)\right] \int_0^{\infty} d\lambda e^{i\tilde{E}\lambda} \int Dy(t)\, e^{\frac{i}{4}\left[\dot{y}^2 - \omega_E y^2\right]} \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} \exp\left[-iE(t_b-t_a)\right] \sqrt{\frac{1}{2\pi\omega_E}} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{\tilde{E}}{\omega_E}\right) D_{-\frac{1}{2}+\frac{\tilde{E}}{\omega_E}}\left(\sqrt{\omega_E} y_b\right) D_{-\frac{1}{2}+\frac{\tilde{E}}{\omega_E}}\left(-\sqrt{\omega_E} y_a\right) \quad (y_b > y_a), \end{aligned} \tag{49}$$

where $y = x + \frac{2(EV_0+MS_0)}{\omega\omega_E}$, $y_a = x_a + \frac{2(EV_0+MS_0)}{\omega\omega_E}$, $y_b = x_b + \frac{2(EV_0+MS_0)}{\omega\omega_E}$, $\omega_E = 2\omega(1+\gamma E)^q$, $\omega = \sqrt{S_0^2 - V_0^2}$, $\tilde{E} = E^2 - M^2 + \frac{(EV_0+MS_0)^2}{\omega^2}$ and $D_v(z)$ are parabolic cylinder functions (we can also use the relationship of Mehler (see [19])). From the $\Gamma-$function, the poles are given by

$$\frac{1}{2} - \frac{\tilde{E}}{\omega_E} = -n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{50}$$

Let us consider the following particular values of q

- q=1 (linear in E): $\omega_E = 2\omega(1+\gamma E)$.

From the poles of $\Gamma-$ function of Eq. (50) the energy E_n is given by

$$E_n^{\pm} = -\frac{MV_0}{S_0} + \frac{\gamma\omega^3\left(n+\frac{1}{2}\right)}{S_0^2} \pm K_n, \tag{51}$$

where $K_n = \frac{\omega}{S_0}\sqrt{2\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)\left[\frac{\gamma}{S_0}\left(\frac{\gamma\omega^3\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2S_0} - MV_0\right) + 1\right]}$ and near the poles, we have

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\tilde{E}}{\omega_E}\right)\approx\frac{(-1)^n}{n!\left(\frac{1}{2}-\frac{\tilde{E}}{\omega_E}+n\right)}=\frac{(-1)^{n+1}\,\omega^2\omega_E}{2n!S_0^2K_n}\left(\frac{1}{E-E_n^+}-\frac{1}{E-E_n^-}\right), \tag{52}$$

with $\omega_n^{\pm}=2\omega\left[1-\frac{\gamma MV_0}{S_0}+\frac{\gamma^2\omega^3\left(n+\frac{1}{2}\right)}{S_0^2}\pm\gamma K_n\right]$. Using the relation $D_n(z)=2^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{z^2}{4}}H_n\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)$, between $D_\nu(z)$ and the Hermite polynomials $H_n(z)$ (see [19]) and after the integration with respect to E, then

$$\begin{aligned}K(x_b,t_b;x_a,t_a) \;=\; & i\sum_n\left\{\frac{1}{2E_n^+}\theta(t_b-t_a)\,e^{-iE_n^+(t_b-t_a)}\frac{\omega^2\sqrt{\omega_n^+}E_n^+}{n!\sqrt{2\pi}2^nS_0^2K_n}\,e^{-\frac{\omega_n^+}{4}\left[\left(x_a+\frac{2\left(V_0E_n^++S_0M\right)}{\omega\omega_n^+}\right)^2+\left(x_b+\frac{2\left(V_0E_n^++S_0M\right)}{\omega\omega_n^+}\right)^2\right]}\right.\\
&\times H_n\left[\sqrt{\frac{\omega_n^+}{2}}\left(x_a+\frac{2\left(V_0E_n^++S_0M\right)}{\omega\omega_n^+}\right)\right]H_n\left[\sqrt{\frac{\omega_n^+}{2}}\left(x_b+\frac{2\left(V_0E_n^++S_0M\right)}{\omega\omega_n^+}\right)\right]\\
&-\frac{1}{2E_n^-}\theta(t_a-t_b)\,e^{iE_n^-(t_b-t_a)}\frac{\omega^2\sqrt{\omega_n^-}E_n^-}{n!\sqrt{2\pi}2^nS_0^2K_n}e^{-\frac{\omega_n^-}{4}\left[\left(x_a+\frac{2\left(V_0E_n^-+S_0M\right)}{\omega\omega_n^-}\right)^2+\left(x_b+\frac{2\left(V_0E_n^-+S_0M\right)}{\omega\omega_n^-}\right)^2\right]}\\
&\left.\times H_n\left[\sqrt{\frac{\omega_n^-}{2}}\left(x_a+\frac{2\left(V_0E_n^-+S_0M\right)}{\omega\omega_n^-}\right)\right]\times H_n\left[\sqrt{\frac{\omega_n^-}{2}}\left(x_b+\frac{2\left(V_0E_n^-+S_0M\right)}{\omega\omega_n^-}\right)\right]\right\},\end{aligned} \tag{53}$$

we obtain from the spectral decomposition of propagator, for this case, the following wave functions

$$\Phi_n^{\pm}(x)=\sqrt{\frac{\omega^2\sqrt{\omega_n^{\pm}}E_n^{\pm}}{\sqrt{2\pi}2^nn!S_0^2K_n}}e^{-\frac{\omega_n^{\pm}}{4}\left(x+\frac{2\left(V_0E_n^{\pm}+S_0M\right)}{\omega\omega_n^{\pm}}\right)^2}H_n\left[\sqrt{\frac{\omega_n^{\pm}}{2}}\left(x+\frac{2\left(V_0E_n^{\pm}+S_0M\right)}{\omega\omega_n^{\pm}}\right)\right], \tag{54}$$

• q=2 (quadratic in E): $\omega_E^2=4\omega^2(1+\gamma E)^4$.
From Γ and at in the vicinity of poles

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\tilde{E}}{\omega_E}\right)\approx\frac{(-1)^n}{n!\left(\frac{1}{2}-\frac{\tilde{E}}{\omega_E}+n\right)},=\frac{(-1)^{n+1}\,\omega^2\omega_E}{2n!\left(S_0^2-\omega^3(2n+1)\gamma^2\right)\delta_n}\left(\frac{1}{E-E_n^+}-\frac{1}{E-E_n^-}\right), \tag{55}$$

we obtain the two energies

$$E_n^{\pm}=\frac{-MV_0S_0+\omega^3(2n+1)\gamma}{S_0^2-\omega^3(2n+1)\gamma^2}\pm\delta_n, \tag{56}$$

where $\delta_n=\sqrt{\frac{\omega^3(2n+1)-V_0^2M^2}{S_0^2-\omega^3(2n+1)\gamma^2}+\left[\frac{MV_0S_0-\omega^3(2n+1)\gamma}{S_0^2-\omega^3(2n+1)\gamma^2}\right]^2}$. Then, the wave functions are

$$\Phi_n^{\pm}(x)=\sqrt{\frac{\omega^2\sqrt{\omega_n^{\pm}}E_n^{\pm}}{\sqrt{2\pi}2^nn!\left(S_0^2-\omega^3(2n+1)\gamma^2\right)\delta_n}}e^{-\frac{\omega_n^{\pm}}{4}\left(x+\frac{2\left(V_0E_n^{\pm}+S_0M\right)}{\omega\omega_n^{\pm}}\right)^2}H_n\left[\sqrt{\frac{\omega_n^{\pm}}{2}}\left(x+\frac{2\left(V_0E_n^{\pm}+S_0M\right)}{\omega\omega_n^{\pm}}\right)\right], \tag{57}$$

with $\omega_n^{\pm}=2\omega\left[1+\frac{-MV_0S_0\gamma+\omega^3(2n+1)\gamma^2}{S_0^2-\omega^3(2n+1)\gamma^2}\pm\gamma\delta_n\right]^2$.
• q=$\frac{1}{2}$ (square-root in E): $\omega_E^2=4\omega^2(1+\gamma E\ )$.

From the poles of $\Gamma-$function of Eq. (50) the energy E_n are solutions of the following equation which is of fourth order in E

$$E_n^4 + b_1 E_n^3 + c_1 E_n^2 + d_1 E_n + e_1 = 0, \tag{58}$$

where $b_1 = \frac{4MV_0}{S_0}$, $c_1 = \frac{6M^2V_0^2}{S_0^2}$, $d_1 = \frac{4}{S_0^3}\left(M^3V_0^3 - \frac{\gamma\omega^6\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{2S_0}\right)$ and $e_1 = \frac{1}{S_0^4}\left(M^4V_0^4 - 2\omega^6\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right)$.
Eq. (58) can be solved via the following equation of second order (see [20]).

$$E_n^2 + (b_1 + A_1)\frac{E_n}{2} + y_n + \frac{b_1 y_n - d_1}{A_1} = 0,$$

where $A_1 = \pm\sqrt{8y_n + b_1^2 - 4c_1}$. Thus, there are four solutions

$$E_{n_{1,2,3,4}} = \frac{1}{4}\left[-(b_1 + A_1) \pm \sqrt{(b_1 + A_1)^2 - 16\left(y_n + \frac{b_1 y_n - d_1}{A_1}\right)}\right], \tag{59}$$

where $y_n = \sqrt[3]{\sqrt{D_1} - \frac{Q_1}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{D_1} + \frac{Q_1}{2}} - \frac{R_1}{3}$ is the solution of the following cubic equation

$$8y_n^3 - 4c_1 y_n^2 + (2b_1 d_1 - 8e_1)\, y_n + e_1\left(4c_1 - b_1^2\right) - d_1^2 = 0,$$

with $D_1 = \left(\frac{P_1}{3}\right)^3 + \left(\frac{Q_1}{2}\right)^2$, $P_1 = \frac{3S_1 - R_1^2}{3}$, $Q_1 = \frac{2R_1^3}{27} - \frac{R_1 S_1}{3} + T_1$, $R_1 = -\frac{c_1}{2}$, $S_1 = \frac{b_1 d_1}{4} - e_1$, $T_1 = \frac{e_1\left(4c_1 - b_1^2\right) - d_1^2}{8}$.
From the four solutions (59) only two roots lead to normalizable wave functions, one positive E_n^+ and the other negative E_n^-.
After integration on E, we obtain the spectral decomposition of K

$$\begin{aligned}
K(x_b, t_b; x_a, t_a) \;=\; & i\sum_n \left\{ \frac{1}{2E_n^+}\theta(t_b - t_a)\, e^{-iE_n^+(t_b - t_a)} \frac{\omega^4 \omega_n^+ (2n+1) E_n^+}{\sqrt{2\pi}2^{n-2} n! S_0^4 \left(4E_n^{+3} + 3b_1 E_n^{+2} + 2c_1 E_n^+ + d_1\right)} \right. \\
& \times e^{-\frac{\omega_n^+}{4}\left[\left(x_b + \frac{2\left(V_0 E_n^+ + S_0 M\right)}{\omega\omega_n^+}\right)^2 + \left(x_a + \frac{2\left(V_0 E_n^+ + S_0 M\right)}{\omega\omega_n^+}\right)^2\right]} H_n\left[\sqrt{\frac{\omega_n^+}{2}}\left(x_a + \frac{2\left(V_0 E_n^+ + S_0 M\right)}{\omega\omega_n^+}\right)\right] \\
& \times H_n\left[\sqrt{\frac{\omega_n^+}{2}}\left(x_b + \frac{2\left(V_0 E_n^+ + S_0 M\right)}{\omega\omega_n^+}\right)\right] - \frac{1}{2E_n^-}\theta(t_a - t_b)\, e^{iE_n^-(t_b - t_a)} \\
& \times \frac{\omega^4 \omega_n^- (2n+1) E_n^-}{\sqrt{2\pi}2^{n-2} n! S_0^4 \left(4E_n^{-3} + 3b_1 E_n^{-2} + 2c_1 E_n^- + d_1\right)} e^{-\frac{\omega_n^-}{4}\left[\left(x_b + \frac{2\left(V_0 E_n^- + S_0 M\right)}{\omega\omega_n^-}\right)^2 + \left(x_a + \frac{2\left(V_0 E_n^- + S_0 M\right)}{\omega\omega_n^-}\right)^2\right]} \\
& \left. \times H_n\left[\sqrt{\frac{\omega_n^-}{2}}\left(x_a + \frac{2\left(V_0 E_n^- + S_0 M\right)}{\omega\omega_n^-}\right)\right] \times H_n\left[\sqrt{\frac{\omega_n^-}{2}}\left(x_b + \frac{2\left(V_0 E_n^- + S_0 M\right)}{\omega\omega_n^-}\right)\right]\right\},
\end{aligned} \tag{60}$$

the normalized wave functions are

$$\Phi_n^{\pm}(x) \;=\; \sqrt{\frac{\omega^4 \omega_n^{\pm} (2n+1) E_n^{\pm}}{\sqrt{2\pi}2^{n-2} n! S_0^4 \left(4E_n^{\pm 3} + 3b_1 E_n^{\pm 2} + 2c_1 E_n^{\pm} + d_1\right)}}\, e^{-\frac{\omega_n^{\pm}}{4}\left(x + \frac{2\left(V_0 E_n^{\pm} + S_0 M\right)}{\omega\omega_n^{\pm}}\right)^2} H_n\left[\sqrt{\frac{\omega_n^{\pm}}{2}}\left(x + \frac{2\left(V_0 E_n^{\pm} + S_0 M\right)}{\omega\omega_n^{\pm}}\right)\right], \tag{61}$$

with $\omega_n^{\pm} = 2\omega\sqrt{1 + \gamma E_n^{\pm}}$ and $E_n^{\pm}$ verifying Eq. (59).
Note for $\gamma = 0$, $\omega_E \to 2\omega$ (in all three cases) we obtain the energy and wave functions of the linear potentials.

$$E_n^{\pm} = -\frac{MV_0}{S_0} \pm \frac{\omega}{S_0}\sqrt{2\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)}, \tag{62}$$

$$\Phi_n^{\pm}(x) = \sqrt{\frac{\omega E_n^{\pm}}{\sqrt{\pi}2^n n! S_0\sqrt{2n+1}}}\, e^{-\frac{\omega}{2}\left(x+\frac{V_0E_n^{\pm}+S_0M}{\omega^2}\right)^2} H_n\left[\sqrt{\omega}\left(x+\frac{V_0E_n^{\pm}+S_0M}{\omega^2}\right)\right], \tag{63}$$

4.2. Coulomb potentials case

The corresponding propagator has the form

$$K(r_b,t_b;r_a,t_a) = -\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{2\pi}e^{-iE(t_b-t_a)}G^{RC}(r_b,r_a;E), \tag{64}$$

with the Green function $G^{RC}(r_b,r_a;E)$ of the radial Coulomb potential given by (see [18]):

$$\begin{aligned} G^{RC}(r_b,r_a;E) &= i\int_0^{\infty} d\lambda e^{i\tilde{E}\lambda}\int Dr(t)e^{i\int_0^{\lambda}dt\left[\frac{1}{4}\dot{r}^2+\frac{\alpha}{r}-\frac{\beta^2-\frac{1}{4}}{r^2}\right]} \\ &= \sqrt{\frac{-1}{4\tilde{E}}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta-k\right)}{\Gamma(2\beta+1)}W_{k,\beta}\left(\sqrt{-4\tilde{E}}r_b\right)M_{k,\beta}\left(\sqrt{-4\tilde{E}}r_a\right)\quad(r_b>r_a), \end{aligned} \tag{65}$$

where $\beta = \sqrt{\left(S_0^2-V_0^2\right)(1+\gamma E)^{2q}+\frac{1}{4}}$, $k=\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{1}{-\tilde{E}}}$, $\tilde{E}=E^2-M^2$ and $\alpha = 2(V_0E+S_0M)(1+\gamma E)^q$.
As before, the poles are given by :

$$\beta - k + \frac{1}{2} = -n, \qquad n = 0,1,2,.... \tag{66}$$

For the sake of simplicity, we take $V_0 = S_0$ then $\beta = \frac{1}{2}$ and $\alpha = 2V_0(E+M)(1+\gamma E)^q$.
Let us consider particular values of q.
• q=$\frac{1}{2}$ (square-root in E): $\alpha = 2V_0(E+M)\sqrt{1+\gamma E}$.
From the poles of $\Gamma-$function of Eq. (66) the energy E_n are the solutions of the following cubic equation

$$E_n^3 + b_2E_n^2 + c_2E_n + d_2 = 0, \tag{67}$$

where $b_2 = \frac{(n+1)^2+V_0^2(1+2\gamma M)}{\gamma V_0^2}$, $c_2 = \frac{M(2+\gamma M)}{\gamma}$ and $d_2 = \frac{M^2\left(V_0^2-(n+1)^2\right)}{\gamma V_0^2}$.
Hence, we get

$$E_n = \sqrt[3]{\sqrt{D_2}-\frac{Q_2}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{D_2}+\frac{Q_2}{2}} - \frac{b_2}{3}, \tag{68}$$

with $D_2 = \left(\frac{P_2}{3}\right)^3 + \left(\frac{Q_2}{2}\right)^2$, $P_2 = \frac{3c_2-b_2^2}{3}$, $Q_2 = \frac{2b_2^3}{27} - \frac{b_2c_2}{3} + d_2$, $n = 1,2,...,n_{\max}$. The maximum number $n_{\max}$ is found requiring $-M \le E_n < M$ and $E_n > -\frac{1}{\gamma}$ for $\gamma > 0$ or $E_n < -\frac{1}{\gamma}$ for $\gamma < 0$.
From the three solutions (68) only two roots are retained (one positive E_n^+ and the other negative E_n^-) to ensure the normalization of the wave functions.
Using the relations (see [19]):

$$W_{n+\frac{1}{2}+\beta,\beta}(z) = (-1)^n z^{\beta+\frac{1}{2}}n!e^{-\frac{z}{2}}L_n^{2\beta}(z), \tag{69}$$

$$M_{n+\frac{1}{2}+\beta,\beta}(z) = \frac{n!\Gamma(2\beta+1)}{\Gamma(2\beta+n+1)}z^{\beta+\frac{1}{2}}e^{-\frac{z}{2}}L_n^{2\beta}(z), \tag{70}$$

and after integration on E, we obtain from the spectral decomposition

$$\begin{aligned} K(r_b,t_b;r_a,t_a) &= i\sum_n \left\{ \frac{1}{2E_n^+}\theta(t_b-t_a)\, e^{-iE_n^+(t_b-t_a)} \frac{\alpha_n^+ n! E_n^+}{V_0^2\gamma\left(3E_n^{+2}+2b_2E_n^++c_2\right)\Gamma(n+2)} \right. \\ &\times \left(2\sqrt{-\tilde{E}_n^+}r_a\right) e^{-\sqrt{-\tilde{E}_n^+}r_a} L_n^1(2\sqrt{-\tilde{E}_n^+}r_a) \left(2\sqrt{-\tilde{E}_n^+}r_b\right) e^{-\sqrt{-\tilde{E}_n^+}r_b} L_n^1(2\sqrt{-\tilde{E}_n^+}r_b) \\ &- \frac{1}{2E_n^-}\theta(t_a-t_b)\, e^{iE_n^-(t_b-t_a)} \frac{\alpha_n^- n! E_n^-}{V_0^2\gamma\left(3E_n^{-2}+2b_2E_n^-+c_2\right)\Gamma(n+2)} \\ &\times \left.\left(2\sqrt{-\tilde{E}_n^-}r_a\right) e^{-\sqrt{-\tilde{E}_n^-}r_a} L_n^1(2\sqrt{-\tilde{E}_n^-}r_a) \times \left(2\sqrt{-\tilde{E}_n^-}r_b\right) e^{-\sqrt{-\tilde{E}_n^-}r_b} L_n^1(2\sqrt{-\tilde{E}_n^-}r_b)\right\}, \end{aligned} \tag{71}$$

the normalized wave functions

$$\Phi_n^{\pm}(r) = \sqrt{\frac{\alpha_n^{\pm} n! E_n^{\pm}}{\gamma V_0^2\left(3E_n^{\pm 2}+2b_2E_n^{\pm}+c_2\right)\Gamma(n+2)}} \left(2\sqrt{-\tilde{E}_n^{\pm}}r\right) e^{-\sqrt{-\tilde{E}_n^{\pm}}r} L_n^1(2\sqrt{-\tilde{E}_n^{\pm}}r), \tag{72}$$

with $\tilde{E}_n^{\pm} = E_n^{\pm 2} - M^2$, $\alpha_n^{\pm} = 2V_0\left(E_n^{\pm}+M\right)\sqrt{1+\gamma E_n^{\pm}}$ and $E_n^{\pm}$ verifying Eq. (68).
• q=1(linear in E): $\alpha = 2V_0\left(E+M\right)\left(1+\gamma E\right)$.
From the poles of $\Gamma-$function of Eq. (66) the energy E_n ares determined by an equation of fourth order in E

$$E_n^4 + b_3E_n^3 + c_3E_n^2 + d_3E_n + e_3 = 0, \tag{73}$$

where $b_3 = \frac{2(1+\gamma M)}{\gamma}$, $c_3 = \frac{(n+1)^2+M\gamma V_0^2(4+\gamma M)+V_0^2}{\gamma^2V_0^2}$, $d_3 = \frac{2M(1+\gamma M)}{\gamma^2}$ and $e_3 = \frac{M^2\left(V_0^2-(n+1)^2\right)}{\gamma^2V_0^2}$.
Eq. (73) can be solved via the following equation of second order

$$E_n^2 + \left(b_3+A_3\right)\frac{E_n}{2} + y_n + \frac{b_3y_n-d_3}{A_3} = 0, \tag{74}$$

where $A_3 = \pm\sqrt{8y_n+b_3^2-4c_3}$. Thus, there are four solutions

$$E_{n_{1,2,3,4}} = -\left(b_3+A_3\right) \pm \sqrt{\left(b_3+A_3\right)^2 - 16\left(y_n + \frac{b_3y_n-d_3}{A_3}\right)}, \tag{75}$$

where

$$y_n = \sqrt[3]{\sqrt{D_3}-\frac{Q_3}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{D_3}+\frac{Q_3}{2}} - \frac{R_3}{3}, \tag{76}$$

is the solution of the following cubic equation

$$8y_n^3 - 4c_3y_n^2 + \left(2b_3d_3-8e_3\right)y_n + e_3\left(4c_3-b_3^2\right) - d_3^2 = 0, \tag{77}$$

with $D_3 = \left(\frac{P_3}{3}\right)^3 + \left(\frac{Q_3}{2}\right)^2$, $P_3 = \frac{3S_3-R_3^2}{3}$, $Q_3 = \frac{2R_3^3}{27} - \frac{R_3S_3}{3} + T_3$, $R_3 = -\frac{c_3}{2}$, $S_3 = \frac{b_3d_3}{4} - e_3$, $T_3 = \frac{e_3\left(4c_3-b_3^2\right)-d_3^2}{8}$, $n = 1,2,\ldots,n_{\max}$. The maximum number $n_{\max}$ is found requiring $-M \le E_n < M$ and $E_n \ge -\frac{1}{\gamma}$ for $\gamma > 0$ or $E_n \le -\frac{1}{\gamma}$ for $\gamma < 0$.
From the four solutions (75) only two roots are retained (one positive E_n^+ and the other negative E_n^-) to guarantee the normalization of the wave functions.
After integration on E, we obtain from the spectral decomposition

$$
\begin{aligned}
K(r_b,t_b;r_a,t_a) \;=\; & i\sum_n \left\{ \frac{1}{2E_n^+}\theta(t_b-t_a)\, e^{-iE_n^+(t_b-t_a)} \frac{\alpha_n^+ n! E_n^+}{V_0^2\gamma^2\left(4E_n^{+^3}+3b_3E_n^{+^2}+2c_3E_n^+ + d_3\right)\Gamma(n+2)} \right. \\
& \times \left(2\sqrt{-\tilde{E}_n^+}r_a\right) e^{-\sqrt{-\tilde{E}_n^+}r_a} L_n^1(2\sqrt{-\tilde{E}_n^+}r_a) \left(2\sqrt{-\tilde{E}_n^+}r_b\right) e^{-\sqrt{-\tilde{E}_n^+}r_b} L_n^1(2\sqrt{-\tilde{E}_n^+}r_b) \\
& -\frac{1}{2E_n^-}\theta(t_a-t_b)\, e^{iE_n^-(t_b-t_a)} \frac{\alpha_n^- n! E_n^-}{V_0^2\gamma^2\left(4E_n^{-^3}+3b_3E_n^{-^2}+2c_3E_n^- + d_3\right)\Gamma(n+2)} \\
& \left. \times \left(2\sqrt{-\tilde{E}_n^-}r_a\right) e^{-\sqrt{-\tilde{E}_n^-}r_a} L_n^1(2\sqrt{-\tilde{E}_n^-}r_a) \left(2\sqrt{-\tilde{E}_n^-}r_b\right) e^{-\sqrt{-\tilde{E}_n^-}r_b} L_n^1(2\sqrt{-\tilde{E}_n^-}r_b) \right\}, \qquad (78)
\end{aligned}
$$

the normalized wave functions

$$
\Phi_n^{\pm}(r) = \sqrt{\frac{\alpha_n^{\pm} n! E_n^{\pm}}{V_0^2\gamma^2\left(4E_n^{\pm^3}+3b_3E_n^{\pm^2}+2c_3E_n^{\pm}+d_3\right)\Gamma(n+2)}} \left(2\sqrt{-\tilde{E}_n^{\pm}}r\right) e^{-\sqrt{-\tilde{E}_n^{\pm}}r} L_n^1(2\sqrt{-\tilde{E}_n^{\pm}}r), \qquad (79)
$$

with $\tilde{E}_n^{\pm} = E_n^{\pm^2} - M^2$, $\alpha_n^{\pm} = 2V_0\left(E_n^{\pm}+M\right)\left(1+\gamma E_n^{\pm}\right)$ and $E_n^{\pm}$ verifying Eq. (75).
Note for $\gamma = 0$, $\alpha_n^{\pm} \to 2V_0\left(E_n^{\pm}+M\right)$ (in the two cases) we obtain the energy and the normalized wave functions of the Coulomb potentials.

$$
E_n^{\pm} = \frac{-MV_0^2 \pm \sqrt{V_0^4\left(M^2-1\right)+(n+1)^4}}{V_0^2+(n+1)^2}, \qquad (80)
$$

$$
\Phi_n^{\pm}(r) = \sqrt{\frac{\alpha_n^{\pm} n! E_n^{\pm}}{2\sqrt{V_0^4\left(M^2-1\right)+(n+1)^4}\,\Gamma(n+2)}} \left(2\sqrt{-\tilde{E}_n^{\pm}}r\right) e^{-\sqrt{-\tilde{E}_n^{\pm}}r} L_n^1(2\sqrt{-\tilde{E}_n^{\pm}}r), \qquad (81)
$$

It is obvious that we can also choose other values for q.
Also for the linear potentials, all the constants of normalization of the wave functions obtained can be ascertained using the normalization condition (31), Eq. (50) and the relations (see [19])

$$
\int_0^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x)\, dx = \sqrt{\pi} n! 2^n \delta_{mn}, \qquad xH_n(x) = \frac{1}{2}H_{n+1}(x) + nH_{n-1}(x). \qquad (82)
$$

For the coulomb potential using the normalization condition (31), Eq. (66) and the relations (see [19])

$$
\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\nu} L_m^{\nu}(x) L_n^{\nu}(x)\, dx = \frac{\Gamma(\nu+n+1)}{n!}\delta_{mn}, \qquad (83)
$$

$$
(n+1)L_{n+1}^{\nu}(x) - (2n+\nu+1-x)L_n^{\nu}(x) + (n+\nu)L_{n-1}^{\nu}(x) = 0. \qquad (84)
$$

5. Conclusion

In this paper, we have examined the energy-dependent potential in the Klein-Gordon equation using the path integral approach and have justified the change (31) in the constant normalization of wave functions for a Klein-Gordon particle subjected to vector plus scalar energy-dependent potentials. The correction due to the energy

dependence was determined first, by directly using the KG equation, then by considering the continuity equation and finally by adapting the Feynman-Hellmann theorem. As an application, the cases of the linear and Coulomb potentials with energy dependence are considered. For such potentials, the propagators are determined and from the poles. The spectrum of energy and the normalized wave functions have been extracted.

It is easy to verify that the corrections relating to potentials which were considered are correct.

Finally, it is useful to note that the problem of dependence on energy for relativistic spinless particles is considered in this paper for the first time by the path integral approach and that a link of this approach (path integral) must certainly exist with the one developed for Schrödinger equation with dissipative components [21].

This analysis could be considered later.

References

[1] J. Formanek, J. Mares, R. Lombard, Czech. J. Phys. 54, 289 (2004)

[2] J. Garcia-Martinez, J. Garcia-Ravelo, J. J. Pena, A. Schulze-Halberg, Phys. Lett. A 373, 3619 (2009)

[3] R. Lombard, An-Najah Univ. J. Res. (N. Sc.) 25, 49 (2011)

[4] H. Hassanabadi, S. Zarrinkamar, A. A. Rajabi, Commun. Theor. Phys. 55, 541 (2011)

[5] R. J. Lombard, J. Mares, Phys. Lett. A 373, 426 (2009)

[6] R. Yekken, R. J. Lombard, J. Phys. A: Math. Theor. 43, 125301 (2010)

[7] A. Schulze-Halberg, Cent. Eur. J. Phys. 9, 57 (2011)

[8] R. J. Lombard, J. Mares, C. Volpe, arXiv:0411067v1[hep-ph]

[9] A. Benchikha, L. Chetouani, Mod. Phys. Lett. A 28, 1350079 (2013)

[10] J. Lin, Y. S. Li, X. M. Qian, Phys. Lett. A 362, 212 (2007)

[11] A. A. Nabiev, Inverse Probl. 22, 2055 (2006)

[12] C. F. Yang , J. Math. Anal. Appl. 393, 526 (2012)

[13] M. Znojil, arXiv:0403223v2 [quant-ph]

[14] H. Hassanabadi, S. Zarrinkamar, H. Hamzavi, A. A. Rajabi, Arab. J. Sci. Eng. 37, 209 (2012)

[15] M. Hamzavi, S. M. Ikhdair, arXiv:1205.2191 [nucl-th]

[16] L. S. Schulman, Techniques and Applications of Path Integration (Wiley, New York, 1981)

[17] D. J. Griffiths: Introduction to Quantum Mechanics (Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995)

[18] C. Grosche, F. Steiner, Handbook of Feynman Path Integrals, Springer Tracts in Modern Physics, Vol. 145 (Springer, Berlin, Heidelberg, 1998)

[19] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, In: A. Jeffrey,D. Zwillinger (Eds.), Table of Integrals, Series, and Products (Academic Press, New York, 2007)

[20] C. Grosche, J. Phys. A: Math. Gen. 29, 365 (1996)

[21] V. S. Olkhovsky, S. P. Maydanyuk, E. Recami, Phys. Part. Nucl. 41, 508 (2010)

Energy-dependent problems and path integral

Abstract

In this thesis, we have examined the energy dependent potential also the energy and position dependent mass using the path integral approach.
In the first part, the problem of normalization related to energy-dependent potentials is examined in the framework of the path integral approach, and a justification is given. As examples, the harmonic oscillator and the hydrogen atom (radial) where, respectively the frequency and the Coulomb's constant depend on energy are considered and their propagators determined. From their spectral decomposition, we have found that the wave functions extracted are correctly normalized.
In a second part, the problem of normalization related to a Klein-Gordon particle subjected to vector plus scalar energy dependent potentials is clarified in the context of the path integral approach. In addition the correction relating to the normalizing constant of wave functions is determined. As examples, the energy dependent linear and Coulomb potentials are considered. The wave functions obtained via spectral decomposition, were found exactly normalized.
In a third part, the problem of the particle with variable mass (energy and position dependent mass) is considered by the approach of path integral. The propagator related to this problem is reduced to that of a particle with a constant mass in energy dependent potentials. As examples, simple cases are considered..

Key word*:* Path integrals, energy dependent potentials, energy dependent masses, propagator, normalization.

Problèmes dépendants de l'énergie et intégrale de chemin

Résumé

Dans cette thèse, nous avons examiné le potentiel dépendant de l'énergie aussi la masse dépendant de l'énergie et de la position en utilisant l'approche intégrale de chemin.
Dans une première partie, le problème de la normalisation lié à des potentiels dépendants de l'énergie est examiné dans le cadre de l'approche intégrale de chemin, et une justification est donnée. A titre d'exemple, l'oscillateur harmonique et l'atome d'hydrogène (radial) où, respectivement, la fréquence et de la constante de Coulomb dépendent de l'énergie, sont examinés et leurs propagateurs déterminés. A partir de leur décomposition spectrale, il a été trouvé que les fonctions d'onde extraites sont correctement normalisées.
Dans une deuxième partie, le problème de la normalisation lié à une particule de Klein-Gordon soumis à des potentiels dépendants de l'énergie est considéré par l'approche intégrale de chemin. En outre, la correction relative à la constante de normalisation de fonctions d'onde est déterminée exactement. A titre d'exemples, les potentiels dépendants d'énergie linéaires et Coulomb sont considérées. Les fonctions d'onde obtenues à partir de la décomposition spectrale, ont été trouvés convenablement normalisées.
Dans une troisième partie, le problème de la particule de masse variable (masse dépendant de l'énergie et de la position) est considéré encore par l'approche intégrale de chemin. Le propagateur associé à ce problème est réduit à celui d'une particule ayant une masse constante avec des potentiels dépendant de l'énergie. A titre d'exemples, les cas simples sont considérés comme cas particuliers

Mots clés : Intégrales des chemins, potentiels dépendants de l'énergie, masses dépendants de l'énergie, propagateur, normalisation.