UNIVERSITE MOHAMED SEDDIK BEN YAHIA-JIJEL

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

LABORATOIRE DE PHYSIQUE THEORIQUE

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES

Filière: Physique

Option: Physique théorique

Présentée par

Sami Boudieb

THEME

Processus de création de paires de particules par un champ de jauge de type non-

Soutenue le: Jeudi 17 Décembre 2015

Devant le jury:

Président:	*Kh. Nouicer*	*Prof.*	*Univ. Mohamed Seddik Ben Yahyia-Jijel*
Rapporteur:	*L. Chatouani*	*Prof.*	*Univ. Constantine 1*
Examinateurs:	*N. Hamri*	*Prof.*	*C. Univ. Mila*
	M. Merad	*Prof.*	*Univ. Oum el Bouaghi*
	S. Haouat	*M.C.A*	*Univ. Mohamed Seddik Ben Yahyia-Jijel*

Remerciements

Tous mes remerciements vont tout premièrement à notre Dieu tout puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il ma donné pour terminer ma thèse de Doctorat.

Je tiens à remercier sincèrement mon encadreur Mr. L. Chetouani, Professeur à l'université de Constantine 1. Que ce soit pour la proposition du sujet, ou au niveau du déroulement du travail, ses avis furent toujours remarquables et pertinents.

Je remercie, Kh. Nouicer, Professeur à l'université de Jijel, pour l'honneur qu'il ma fait en acceptant de présider le jury.

Je remercie, également N. Hamri Professeur au centre universitaire de Mila, M. Merad Professeur à l'université d'Oum el Bouaghi , S. Haouat Maître de conférence classe A à l'université de Jijel, pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porté à ce travail en acceptant de le juger.

Je remercie, encore tous mes professeurs chaqu'un par son nom, que j'ai l'honneur de faire mes études sur ses mains le long de ma carrière, soit en graduation ou en poste graduation.

Je remercie, tous mes proches; tous mes collègues; tous mes amis et tous ceux qui m'ont connu.

Tous mes remerciements, aux membres de ma famille (mes parents, mes frères et mes sœurs, ma femme et mes enfants) qui ont toujours confiance en moi, et m'ont toujours soutenu, et très spécialement a qui me sont très cher:mon papa "Mohamed", ma maman "Chafia", pour leur grande patience dont ils ont fait preuve le long de ma vie, et durant mes études.

Je dédié ce travail a:

mon papa et ma maman...

mes frères et mes sœurs...

mon épouse et mes enfants.

Boudieb Sami

Table des matières

1 Introduction générale **5**

1.1 Intégrales de chemins . . . 5

1.2 Processus de création de paires de particules . . . 9

1.3 Propriétés du champ non-Abélien A_{μ}^{a} . . . 12

2 Formalisme intégrales de chemins pour des particules en interaction avec un champ non-Abélien **16**

2.1 Propagateur de Klein Gordon . . . 16

2.1.1 Introduction . . . 16

2.1.2 Construction de la fonction de Green $\tilde{G}\left(x_b, x_a\right)$ . . . 17

2.1.3 Calcul de la fonction de Green $\tilde{G}\left(x_b, x_a\right)$ . . . 22

2.1.4 Détermination des fonctions d'ondes . . . 28

2.1.5 Conclusion . . . 29

2.2 Propagateur de Dirac : projection globale . . . 29

2.2.1 Introduction . . . 29

2.2.2 Construction de la fonction de Green $\tilde{S}_g(x_b, x_a)$ . . . 31

2.2.3 Calcul de la fonction de Green $\tilde{S}_g(x_b, x_a)$ . . . 34

2.2.4 Détermination des fonctions d'ondes . . . 46

2.2.5 Conclusion . . . 47

2.3 Propagateur de Dirac : projection locale . . . 48

2.3.1 Introduction . . . 48

2.3.2 Construction de la fonction de Green $\tilde{S}_l(x_b, x_a)$ . . . 49

2.3.3 Calcul de la fonction de Green $\tilde{S}_l(x_b, x_a)$ . . . 52

2.3.4 Détermination des fonctions d'ondes 66
2.3.5 Conclusion 67

3 Processus de création de paires de particules par un champ de jauge de type non-Abélien **68**
3.1 Introduction 68
3.2 Création de paires de particules sans spin 70
3.2.1 Calcul du noyau $K(x_b, x_a; s)$ 70
3.2.2 Probabilité de création de paires de particules $\mathcal{P}_{creat.}$ 80
3.2.3 Résultat 80
3.3 Création de paires de particules de spin 1/2 80
3.3.1 Calcul du noyau $S_D(x_b, x_a; s)$ 80
3.3.2 Probabilité de création de paires de particules $\mathcal{P}_{creat.}$ 84
3.3.3 Résultat 84
3.4 Conclusion 84

4 Conclusion générale **86**

Annexes **88**

Bibliographie **99**

Articles **103**

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOHAMED SEDDIK BEN YAHIA-JIJEL

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre :

Série :

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES

Filière : Physique Théorique

Présentée par

Sami Boudieb

THEME

Processus de création de paires de particules par un champ de jauge de type non-Abélien du groupe SU(2)

Soutenue le : Jeudi 17 Décembre 2015

Devant le Jury :

Président :	Kh. Nouicer	Prof.	Univ. Mohamed Seddik ben Yahia-Jijel
Rapporteur :	L. Chetouani	Prof.	Univ. de Constantine 1
Examinateurs :	N. Hamri	Prof.	C. Univ. Mila
	M. Merad	Prof.	Univ. Oum el Bouaghi
	S. Haouat	M.C.A	Univ. Mohamed Seddik ben Yahia-Jijel

Remerciements

Tous mes remerciements vont tout premièrement à notre Dieu tout puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il ma donné pour terminer ma thèse de Doctorat.

Je tiens à remercier sincèrement mon encadreur Mr. L. Chetouani, Professeur à l'université de Constantine 1. Que ce soit pour la proposition du sujet, ou au niveau du déroulement du travail, ses avis furent toujours remarquables et pertinents.

Je remercie, Kh. Nouicer, Professeur à l'université de Jijel, pour l'honneur qu'il ma fait en acceptant de présider le jury.

Je remercie, également N. Hamri Professeur au centre universitaire de Mila, M. Merad Professeur à l'université d'Oum el Bouaghi , S. Haouat Maître de conférence classe A à l'université de Jijel, pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porté à ce travail en acceptant de le juger. Je remercie, encore tous mes professeurs chaqu'un par son nom, que j'ai l'honneur de faire mes études sur ses mains le long de ma carrière, soit en graduation ou en poste graduation. Je remercie, tous mes proches ; tous mes collègues ; tous mes amis et tous ceux qui m'ont connu.

Tous mes remerciements, aux membres de ma famille (mes parents, mes frères et mes sœurs, ma femme et mes enfants) qui ont toujours confiance en moi, et m'ont toujours soutenu, et très spécialement à qui me sont très cher : mon papa "Mouhamed", ma maman "Chafia", pour leur grande patience dont ils ont fait preuve le long de ma vie, et durant mes études.

Je dédié ce travail à :

mon papa et ma maman...

mes frères et mes sœurs...

mon épouse et mes enfants.

Boudieb Sami

Chapitre 1

Introduction générale

1.1 Intégrales de chemins

La mécanique quantique est une théorie non relativiste : elle n'incorpore pas les principes de la relativité restreinte. En appliquant les règles de la quantification canonique à la relation de dispersion relativiste, on obtient l'équation de Klein-Gordon (1926). Les solutions de cette équation présentent toutefois de sérieuses difficultés d'interprétation dans le cadre d'une théorie censée décrire une seule particule : on ne peut notamment pas construire une densité de probabilité de présence partout positive, car l'équation contient une dérivée temporelle seconde. Dirac cherchera alors une autre équation relativiste du premier ordre en temps, et obtiendra l'équation de Dirac, qui décrit très bien les fermions de spin un-demi comme l'électron. La théorie quantique des champs permet d'interpréter toutes les équations quantiques relativistes sans difficulté. L'équation de Dirac incorpore naturellement l'invariance de Lorentz avec la mécanique quantique, ainsi que l'interaction avec le champ électromagnétique mais qui est traité encore de façon classique (on parle d'approximation semi-classique). Elle constitue la mécanique quantique relativiste. Mais du fait précisément de cette interaction entre les particules et le champ, il est alors nécessaire, afin d'obtenir une description cohérente de l'ensemble, d'appliquer la procédure de quantification également au champ électromagnétique. Le résultat de cette procédure est l'électrodynamique quantique dans laquelle l'unité entre champ et particule est encore plus transparente puisque désormais la matière elle aussi est décrite par un champ. L'électrodynamique quantique est un exemple particulier de théorie quantique des champs. D'autres théories quantique des champs ont été développées par la suite au fur et à mesure que les autres interactions fondamentales ont été découvertes (théorie électrofaible, puis chromodynamique quantique).

Classiquement, il existe deux types de systèmes dynamiques. Il y a d'abord le mouvement d'une particule ou d'un corps rigide avec un nombre fini de degrés de liberté, qui peut être décrit par un nombre fini de coordonnées. Et puis, il y a des systèmes physiques pour lesquels l'ensemble des degrés de liberté est non dénombrable. Ces systèmes sont décrits par des champs. Des exemples courants de champs classiques sont les champs électromagnétiques décrits par $E(x,t)$ et $B(x,t)$ ou de façon équivalente par les potentiels $(\phi(x,t), A(x,t))$. De même, le mouvement d'une corde unidimensionnelle est également décrite par un champ $\phi(x,t)$. Ainsi, alors que les coordonnées d'une particule ne dépendent que du temps, les champs varient continuellement en fonction de certaines variables de l'espace. Par conséquent, une théorie décrite par des champs est généralement vue comme une théorie des champs à $(d+1)$ dimensions, où d représente le nombre de dimensions spatiales. Par exemple, une théorie décrivant les déplacements de la corde unidimensionnelle constituerait une théorie des champs de dimensions $(1+1)$ alors que la théorie des équations de Maxwell, plus familiers, peut être considérée comme une théorie de champs à $(3+1)$ dimensions. Dans cette perspective, il est alors clair que la théorie décrivant le mouvement d'une particule peut être particulièrement considérée comme une théorie de champs à $(0+1)$ dimensions.

Le spin est le moment cinétique intrinsèque d'une particule. C'est une notion quantique, parce que, en mécanique classique, une particule ponctuelle ne peut pas « tourner autour d'elle même » et, par conséquent, ne peut pas avoir de moment cinétique intrinsèque. Comme plusieurs quantités en mécanique quantique, le moment cinétique prend uniquement des valeurs discrètes. En unités de $\hbar$, i.e. la constante de Planck h divisée par 2π, elles ne peuvent être qu'entières ou demi-entières. Les particules dont le spin est un nombre entier s'appellent « bosons », du nom du physicien indien Satyendra Nath Bose, et celles avec un spin demi-entier « fermions », du nom du physicien italien Enrico Fermi. La mécanique quantique relativiste démontre, et l'expérience confirme, que ces deux espèces de particules obéissent à des lois statistiques différentes, appelées respectivement, « Bose-Einstein » et « Fermi-Dirac ». En particulier, les fermions suivent le principe d'interdiction de Pauli selon lequel deux fermions identiques ne peuvent pas occuper le même état quantique. C'est ce principe qui, appliqué aux électrons dont le spin est égal à 1/2 et qui sont donc des fermions, les place sur des orbites distinctes et donne la grande richesse de la physique macroscopique.

L'histoire moderne de l'intégrale de chemin commence avec les travaux de Feynman [1] et [2] qui formule l'évolution quantique en terme de sommes sur un ensemble de trajectoires pondérées par $\exp\left\{\frac{iS}{\hbar}\right\}$ où S est l'action classique évaluées le long du chemin classique. II interprète en particulier les équations du mouvement classique comme résultant de l'application de la méthode de la phase stationnaire à l'intégrale de chemin.

Lorsque pour un système physique les valeurs de l'action sont grandes par rapport à $\hbar$, seuls les chemins proches du chemin classique contribuent. Posons

$$x^{\mu} = (t, x); \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \tag{1.1}$$

qui sont supposées être des coordonnées contravariantes, tandis que les coordonnées covariantes sont

$$x_{\mu} = \eta_{\mu\nu} x^{\nu} = (t, -x), \tag{1.2}$$

de plus le produit scalaire dans l'espace de Minkowski est donné par la relation

$$(x_1.x_2) = g_{\mu\nu} x_1^{\mu} x_2^{\nu}. \tag{1.3}$$

La métrique covariante est donc diagonale, et la métrique inverse ou contravariante a la même forme

$$diag\ g_{\mu\nu} = diag\ g^{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1), \tag{1.4}$$

l'élément de longueur invariant est donc

$$x^2 = x_{\mu} x^{\mu} = g_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu} = g^{\mu\nu} x_{\mu} x_{\nu}\,. \tag{1.5}$$

Cependant, malgré l'intérêt conceptuel de cette reformulation de l'évolution quantique et de son utilité pour l'étude de la limite semi-classique, l'intégrale de chemin doit son importance dans la physique moderne à sa généralisation à des systèmes qui ont un nombre très grand de degrés de liberté, comme la théorie quantique des champs. En particulier, la quantification des théories de jauge non-Abéliennes par Faddeev et Popov [3] en 1967 et De Witt [4] aurait été presque impossible dans la formulation usuelle de la théorie quantique en termes d'opérateurs et d'équations de champs quantiques. Dans la mesure où les théories de jauge non-Abéliennes sont à la base de la description de toutes les interactions fondamentales sauf la gravitation, on mesure mieux la signification de ce résultat.

De même, l'intégrale de chemin a mis en évidence les relations mathématiques profondes entre la théorie quantique des champs et la mécanique statistique des transitions de phase, qui auraient été très difficiles à percevoir autrement. Ces relations ont jouées un rôle essentiel dans notre compréhension des phénomènes critiques depuis Wilson [5].

Du point de vue mathématique, l'intégrale de chemin liée à l'évolution quantique est souvent difficile à définir parce que $\exp\left(\frac{iS}{\hbar}\right)$ est de module unité pour toutes les contributions variables des chemins. Kac [6] remarqua que si l'on remplaçait l'opérateur d'évolution $\exp\left(\frac{iHt}{\hbar}\right)$ par l'opérateur statistique $\exp\left(-\beta H\right)$ (et donc l'équation de Schrödinger par une équation de type diffusion ou de la chaleur), on obtenait une intégrale de chemin avec une mesure positive, généralisant l'intégrale de Wiener, bien plus facile à définir rigoureusement. Une stratégie qui a ensuite été poursuivie par de nombreux auteurs a été de définir l'intégrale de chemin correspondant à l'évolution quantique par prolongement analytique sur la variable de temps.

Dans le domaine de la physique, plusieurs généralisations de l'intégrale de chemin initiale se sont révélées utiles. L'intégrale sur des chemins complexes associée à la représentation holomorphe de la mécanique quantique permet de discuter les propriétés des systèmes de bosons dans le formalisme dit grand canonique. L'intégrale sur des chemins Grassmanniens permet de traiter les systèmes de fermions par un formalisme tout à fait parallèle. L'intégrale sur les chemins dans l'espace de phase a permis plus tard de retrouver simplement les régies d'intégration pour des chemins appartenant à des variétés courbes comme par exemple des sphères.

L'intégrale de chemin permet de retrouver par des méthodes plus intuitives, un nombre d'approximations semi-classiques. Par exemple, on déduit de l'approximation semi-classique de l'opérateur d'évolution des estimations semi-classiques des amplitudes de diffusion, comme des approximations pour le spectre du Hamiltonien. Sa version en temps imaginaire Feynman-Kac permet d'étudier l'effet tunnel dans l'approximation semi-classique. L'intégrale de chemin est alors dominée par des solutions de type instantons et le calcul de leurs contributions implique l'introduction de coordonnées collectives.

1.2 Processus de création de paires de particules

La production fait référence à la création d'une particule élémentaire et de son antiparticule. Ceci est permis du moment qu'il y a suffisamment d'énergie disponible dans le centre de masse pour créer la paire, au moins l'énergie de masse au repos totale des deux particules et que la situation permet la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement. La somme de tous les autres nombres quantiques (moment cinétique angulaire, charge électrique) des particules produites doit être nulle, ainsi les particules créées auront des valeurs opposées l'une par rapport à l'autre.

La création d'une paire peut également se produire quand une particule chargée (comme par exemple un électron ou un proton), accélérée à une vitesse relativiste, percute ou frôle un noyau atomique : si l'énergie cinétique de la particule incidente est suffisamment élevée, une partie de cette énergie est alors convertie en masse, permettant la création d'une paire particule-antiparticule.

Ce mécanisme est mis à profit pour certaines recherches en physique des particules :

- Production de positrons, en projetant des électrons à grande vitesse sur une cible métallique, les collisions qui en résultent produisent des paires électron-positron. Les positrons peuvent être collectés pour être ensuite utilisés, par exemple dans un collisionneur électrons-positrons.

- Production d'anti-protons, en projetant sur une cible métallique des protons à haute énergie. Une fraction des collisions entre protons et noyaux atomiques produit des paires proton-antiproton. Des installations spécifiques permettent de recueillir les anti-protons pour en faire un faisceau utilisable pour certaines expériences à basse énergie.

Le processus création de paires dans un champ électromagnétique classique uniforme (mécanisme de Schwinger) est étudié en se concentrant sur l'évolution temporelle de la distribution des particules créées. L'évolution dans le temps de la distribution dans des domaines en fonction du temps est également présentée, ainsi que les effets de la réaction inverse.

Création de paires dans un champ extérieur a une longue histoire, au départ par la découverte du fameux paradoxe de Klein [7], qui a été approfondie par Sauter [8]. Ils ont constaté que l'effet tunnel à partir d'un état de fréquence positive à un état de fréquence négative peut se produire dans la mécanique quantique relativiste. Ceci est un paradoxe dans le cadre de la théorie d'une seule particule. Si l'on traite ce problème dans le cadre de la théorie quantique des champs, le paradoxe est résolu et la création d'un paire de particule à partir de vide est conclu.

Une autre approche de la création de paires dans un champ externe est basée sur le Lagrangien effectif de Heisenberg-Euler [9], [10]. Heisenberg et Euler ont constaté que l'action effective en électrodynamique quantique (QED) d'une particule en interaction avec un champ électrique classique a une partie imaginaire, ce qui signifie que le vide est instable dans un champ électrique ce qui oppose la création de paires particule-antiparticule. En 1951, Schwinger a entièrement formalisé cette approche en utilisant la méthode de temps propre [11], ainsi la création de paires dans un champ électrique classique est appelé mécanisme de Schwinger. Il a dérivé la célèbre formule concernant la probabilité de création de paires par unité de volume et de temps :

$$w = \frac{2\,(eE)^2}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp\left(\frac{-n\pi M^2}{eE} \right), \tag{1.6}$$

à partir de la probabilité de vide

$$P_0 = |< 0, out \mid 0, in >|^2 = \exp\left(- \int dx^4 w \right), \tag{1.7}$$

où E représente l'intensité du champ électrique, et M la masse de l'électron.

Les perspectives d'observer le mécanisme de Schwinger lors des futures installations laser de rayons (x) sont étudiée dans [12]. En outre, le champ de Coulomb des noyaux super-lourds peut causer une création non-perturbative des paires e^+e^- [13], [14].

En revanche, les intensités de champ suffisamment fortes devraient être obtenues par des champs électriques de couleur qui sont formés juste après les collisions entre les particules de haute énergie, tels que e^+e^- et des ions lourds. Ainsi, le mécanisme de Schwinger est censé être un mécanisme utile pour la production hadronique. Création de paires par le mécanisme de Schwinger dans les collisions e^+e^- a été étudié par Casher et al. [15] avec le modèle de tube de flux de couleur, dans lequel un champ électrique de couleur entre $q\bar{q}$ est traitée comme un champ électrique constante et classique. Un nombre considérable d'études sur la création de paires dans des tubes de flux ont été suivi, en déplaçant son stade de e^+e^- collisions aux collisions d'ions lourds. Citons par exemple : le modèle de Lund [16], corrections de temps fini [17], des corrections finies de taille pour une direction longitudinale (la direction du champ électrique) [18], [19], la direction transversale [20], [21], [22], perturbation autour d'un champ [23] et les effets de la réaction de retour [24], [25], [26]. En outre, les équations cinétiques intégrant la création de paires à partir de quelques milieux spécifiques, font la base d'une étude basée sur la théorie semi-classique [27], [28], [29] et la théorie quantique des champs [30], [31], [32], [33], [34], [35].

La probabilité de création de paires a été appliqué à un certain nombre d'études sur la production de particule dans des collisions à haute énergie. A partir de l'équation (1.7), il est reconnu que la probabilité de création de paires exprime l'effondrement de vide. Par conséquent, la probabilité de création de paires ne dispose d'aucune information directe sur le nombre de particules créées. Donc, elle devient invalide après l'effondrement de vide, où il existe une possibilité qu'une annihilation de paires se produit.

Compte tenu de ces circonstances, il est plus facile à traiter une particule en nombre moyen $< 0, in \mid a_p^+ a_p \mid 0, in >$, qui a des renseignements directs sur le nombre des particules, que de traiter la probabilité de création de paires. Pour obtenir un nombre bien défini de particules, nous devons quantifier les champs de la particule chargée et de définir une image spécifique de la particule. En d'autres termes, nous devons définir les opérateurs de création a_p^+ et d'annihilation a_p d'une particule et d'une antiparticule. A cet effet, la quantification canonique est plus approprié que la quantification par l'intégrale de chemin. Formuler le mécanisme de Schwinger dans les termes de quantification canonique a été faite par Nikishov et d'autres [36], [37], [38] pour la résolution du paradoxe de Klein.

Le processus création de paires non-perturbative dans des champs externes dispose d'une large gamme d'applications ; non seulement des problèmes originaux en (QED) mais aussi dans de domaine de création de paires dans des champs électromagnétiques non-Abéliens [39], [40], [41], [42], [43] et des milieux gravitationnelles [44], [45], [46], [47].

Passons maintenant, au discussion de quelques propriétés physiques et mathématiques du champ non-Abélien A_μ^a que nous allons le rencontré le long de notre étude i.e. mouvement des particules dans un champ non-Abélien.

1.3 Propriétés du champ non-Abélien A_μ^a

Notre vision est dirigé vers le mouvement d'une particule de masse M dans un espace-temps à $(3+1)$ dimensions en interaction avec un potentiel non-Abélien A_μ^a du groupe $SU(2)$ de forme [48, 49]

$$A_\mu^a = \left\{ m^a \left[(k_1.x)b + (k_2.x)c\right] + \frac{1}{g}\epsilon^{abc}\frac{dm^b}{d(k.x)}m^c \right\} k_\mu. \tag{1.8}$$

Comme $A_\mu = \sigma^a A_\mu^a$. Donc, nous pouvons écrire

$$A_\mu = \left\{ \sigma^a m^a \left[(k_1.x)b + (k_2.x)c\right] + \sigma^a \left(\frac{1}{g}\epsilon^{abc}\frac{dm^b}{d(k.x)}m^c \right) \right\} k_\mu, \tag{1.9}$$

où :

- $\sigma^a = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3) = (\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z)$ sont des générateurs du groupe $SU(2)$, $a = 1, 2, 3$ représente l'index des couleurs.
- $b = b(k.x)$ et $c = c(k.x)$ sont deux fonctions du produit $(k.x)$.
- ϵ^{abc} est le tenseur anti-symétrique.
- g constante de couplage.
- $m^a = m^a(k.x)$ est également une fonction de $(k.x)$ définie comme suit

$$m_a = \frac{1}{4}\Gamma_a t_{ab}^a \Gamma_b, \tag{1.10}$$

et qui vérifié la condition

$$\left(m_a m^a\right) = m^2 = 1. \tag{1.11}$$

- Γ sont des générateurs, de propriétés

$$[\Gamma_a, \Gamma_b] = 2\delta_{ab}, \tag{1.12}$$

- t_{ab}^a sont des matrices de trace nul.
- k_1, k_2 sont deux quadri-vecteurs de polarisation, qui caractérisent les couleurs d'onde.
- k est un quadri-vecteur isotropique.

Les quadri-vecteurs k_1, k_2 et k, vérifient les conditions

$$(kk) = (kk_1) = (kk_2) = (k_1 k_2) = 0. \tag{1.13}$$

- $(x_1.x_2) = g_{\mu\nu} x_1^\mu x_2^\nu$ représente le produit scalaire dans l'espace de Minkowski

$$diag\ g_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1), \tag{1.14}$$

Notons, que par ce choix du champ non-Abélien, il est facile de s'assurer que la condition de Lorentz est satisfaite

$$\partial_\mu A_\mu^a = 0, \tag{1.15}$$

Nous allons décomposé notre thèse à deux chapitres essentiels :

Le premier chapitre qui contient trois parties est dirigé vers l'étude par le formalisme des intégrales de chemins, le mouvement des particules en interaction avec champ non-Abélien A_μ^a du groupe $SU(2)$ donné par les deux équations ((1.8) et (1.9)).

Dans la première partie, nous proposons de trouver une solution exacte à l'équation de Klein Gordon qui décrit l'interaction des particules avec un champ non-Abélien A_μ^a en utilisant la méthode des intégrales de chemins. Notre but à travers ce traitement est d'examiner l'extension non-Abélienne de la méthode de Feynman par l'étude du mouvement de la particule de Klein Gordon interagissant avec un type de potentiels du groupe $SU(2)$. Nous établissons d'abord, une formulation adéquate pour le problème en question. Nous représentons le propagateur que nous suggérons de calculer au moyen des intégrales. Puis, nous montrons que le calcul de la fonction de Green $\tilde{G}\left(x_b, x_a\right)$ dans ce cas se réduit à celui relatif à un problème simple avec un potentiel non-Abélien.

La deuxième partie, est consacrée à l'étude de la diffusion des particules de Dirac par un champ non-Abélien du groupe $SU(2)$ en utilisant la méthode des intégrales de chemins suivrons une approche dite globale. Le formalisme utilisé est le même que celui de la première partie. Nous calculons la fonction de Green $\tilde{S}_g(x_b, x_a)$ relative au problème et nous extrairons les fonctions d'ondes relatives à ce problème.

Pour la troisième partie, nous suggérons de trouver une solution à l'équation de Dirac par les intégrales de chemins où nous utiliserons cette fois ci une autre approche dite locale, où les particules interagissent avec un champ non-Abélien dans un espace à $(3+1)$ dimensions, i.e. un espace plus réaliste pour ces genre de problèmes. Dans une première étape nous établissons une généralisation de la formulation des intégrales de chemins utilisée dans les deux parties précédents suivant la représentation locale. Puis, nous calculons la fonction de Green $\tilde{S}_l(x_b, x_a)$ relative au problème et nous extrairons les fonctions d'ondes. Dans ce cas nous montrons qu'après intégration sur les variables de Grassmann, la fonction de Green peut être exprimée par des intégrales bosoniques.

Les propriétés de l'interaction dans un champs non-Abélien rendent le problème plus facile à intégrer. Ainsi nous avons à utiliser une identité afin de réduire le problème quadridimensionnel au problème unidimensionnel.

Le deuxième chapitre qui contient deux parties est dirigé vers l'étude par le processus de création de paires de particules, le mouvement des particules en interaction avec champ d'onde plane non-Abélien A_{μ}^{a} du groupe $SU\left(2\right)$ donné par les deux équations ((3.3) et (3.4)).

Dans la première partie, nous faisons une étude concernant les interactions entre les particules de Klein Gordon et le champ d'onde plane non-Abélien. Dans la deuxième partie, nous faisons la même étude, mais cette fois ci avec les particules de Dirac. Le chemin suivi, concernant ces deux parties est de calculer des deux noyaux $K(x_{b}, x_{a}; s)$ et $S_D\left(x_b, x_a; s\right)$ relatifs aux deux équation de Klein Gordon et de Dirac respectivement. Puis, nous calculons la probabilité de création de paires de particules $\mathcal{P}_{creat.}$. Nous déduisons ensuite, que ce genre de potentiel est incapable de créer des paires de particules à partir du vide.

Nous terminons notre thèse par une conclusion générale.

Chapitre 2

Formalisme intégrales de chemins pour des particules en interaction avec un champ non-Abélien

2.1 Propagateur de Klein Gordon

2.1.1 Introduction

Le but de cette partie est d'examiner l'extension non-Abélienne de la méthode des intégrales de chemins au cas où l'interaction à laquelle est soumise la particule de Klein Gordon de masse M et de spin 0 est décrite par un champ non-Abélien A_{μ}^{a} du groupe $SU(2)$ donné par les deux équations ((1.8) et (1.9)) qui ne dépend que de la position x. Nous voulons donc, calculer le propagateur relatif à ce problème et trouver une solution analytique à l'équation de Klein Gordon par l'approche de Feynman.

Dans une première étape nous formulons le propagateur suivant l'approche des intégrales de chemins. Dans une deuxième étape nous passons au calcul de la fonction de Green. Finalement nous déterminons les fonctions d'ondes.

2.1.2 Construction de la fonction de Green $\tilde{G}\,(x_b, x_a)$

La fonction de Green $G(x_b, x_a)$, que nous allons calculé par le formalisme des intégrales de chemins, est par définition solution de l'équation

$$\left(\left(\hat{\partial}^{\mu} - \frac{g}{2}A_{\mu}\,(k.x)\right)^{2} + M^{2}\right)G(x_{b}, x_{a}) \;\; = \;\; -\delta^{4}(x_{b} - x_{a}). \tag{2.1}$$

D'abord multiplions par i^2 (2.1), puis introduisons l'opérateur

$$\hat{p}^{\mu} \;\; = \;\; -i\hat{\partial}^{\mu}. \tag{2.2}$$

Donc l'équation (2.1) devient

$$\left(\hat{p}^{\mu}\hat{p}_{\mu} + ig\hat{p}^{\mu}A_{\mu} - \frac{g^{2}}{4}A_{\mu}^{2} - M^{2}\right)G(x_{b}, x_{a}) \;\; = \;\; \delta^{4}(x_{b} - x_{a}). \tag{2.3}$$

où nous avons posé tout simplement $A_{\mu}\,(k.x) \equiv A_{\mu}$.

Par l'intermédiaire de la méthode de Schwinger [11], nous pouvons écrire le propagateur $G(x_b, x_a)$ sous forme matricielle comme suit

$$G(x_{b}, x_{a}) \;\; = \;\; \langle x_{b} \mid \tilde{G} \mid x_{a}\rangle, \tag{2.4}$$

où $\tilde{G}$ est solution de l'équation

$$\left(\hat{p}^{\mu}\hat{p}_{\mu} + ig\hat{p}^{\mu}A_{\mu} - \frac{g^{2}}{4}A_{\mu}^{2} - M^{2}\right)\tilde{G} \;\; = \;\; I. \tag{2.5}$$

Notons que $\tilde{G}$ est le noyau de Klein Gordon dans l'espace des coordonnées. Donc, nous déduisons que l'opérateur $\tilde{G}$ est l'inverse de l'opérateur $\left(\hat{p}^{\mu}\hat{p}_{\mu} + ig\hat{p}^{\mu}A_{\mu} - \frac{g^{2}}{4}A_{\mu}^{2} - M^{2}\right)$ i.e.

$$\tilde{G} \;\; = \;\; \frac{I}{\left(\hat{p}^{\mu}\hat{p}_{\mu} + ig\hat{p}^{\mu}A_{\mu} - \frac{g^{2}}{4}A_{\mu}^{2} - M^{2}\right)} = \left(\hat{p}^{\mu}\hat{p}_{\mu} + ig\hat{p}^{\mu}A_{\mu} - \frac{g^{2}}{4}A_{\mu}^{2} - M^{2}\right)^{-1}. \tag{2.6}$$

A ce niveau, nous allons introduire un paramètre λ i.e. temps propre réel.

Nous pouvons écrire, par la suite

$$\tilde{G} = i\int_0^\infty d\lambda \exp\left\{i\lambda\left(\hat{p}^\mu\hat{p}_\mu + ig\hat{p}^\mu A_\mu - \frac{g^2}{4}A_\mu^2 - M^2\right) + i\varepsilon\right\}. \tag{2.7}$$

L'opérateur $\tilde{G}$ peut s'écrire d'une autre manière sous la forme

$$\tilde{G} = i\int_0^\infty d\lambda \exp\left\{-i\lambda\hat{H}(\hat{p},\hat{x})\right\}, \tag{2.8}$$

où l'Hamiltonien $\hat{H}(\hat{p},\hat{x})$, qui décrit le mouvement de la particule a la forme

$$\begin{aligned}\hat{H}(\hat{p},\hat{x}) &= -\hat{p}^\mu\hat{p}_\mu - ig\hat{p}^\mu A_\mu + \frac{g^2}{4}A_\mu^2 + M^2 \\ &= -\hat{p}^2 + M^2 + \frac{i}{4}\left[\sigma^a\left(\Gamma_a t^a_{ab}\Gamma_b\right)((k_1.x)b + (k_2.x)c)\right](\hat{p}.k) \\ &\quad + \frac{i}{16g}\left[\sigma^a\epsilon^{abc}\left(\left(\Gamma_b t^b_{ba}\Gamma_a\right)'\left(\Gamma_c t^c_{ca}\Gamma_a\right)\right)\right](\hat{p}.k),\end{aligned} \tag{2.9}$$

où la prime exprime la dérivation par rapport à $(k.x)$.

Pour obtenir la représentation intégrale de chemin de la fonction de Green, nous allons inséré l'équation (2.8) dans l'équation (2.4).

Nous avons

$$\begin{aligned}\tilde{G}(x_b,x_a) &= i\int_0^\infty d\lambda\langle x_b \mid \exp\{-i\lambda H(\hat{p},\hat{x})\} \mid x_a\rangle \\ &= i\int_0^\infty d\lambda \\ \times\langle x_b &\mid \exp\left\{-i\lambda\begin{pmatrix} -\hat{p}^2 + M^2 \\ +\frac{i}{4}\sigma^a\left(\Gamma_a t^a_{ab}\Gamma_b\right)((k_1.x)b + (k_2.x)c)(\hat{p}.k) \\ +\frac{i}{16g}\sigma^a\epsilon^{abc}\left(\left(\Gamma_b t^b_{ba}\Gamma_a\right)'\left(\Gamma_c t^c_{ca}\Gamma_a\right)\right)(\hat{p}.k)\end{pmatrix}\right\} \mid x_a\rangle.\end{aligned} \tag{2.10}$$

Maintenant, subdivisons l'intervalle $[x_a, x_b]$ en N parties égales de longueur chacune égale à

$\triangle\tau = \frac{1}{N}$, puis insérons la relation de fermeture

$$\int d^4x_k \quad | \quad x_k\rangle\langle x_k \mid = 1; \qquad x_0 = x_a \ , \quad x_N = x_b, \tag{2.11}$$

$(N-1)$ fois entre deux opérateurs $\exp\left(-i\frac{\hat{H}}{N}\lambda\right)$ successifs.

Nous allons trouvé

$$\begin{aligned}
\tilde{G}(x_b, x_a) &= \lim_{N\to+\infty} i\int_0^\infty d\lambda \int \prod_{j=1}^N dx_k \prod_{k=1}^N \left[\langle x_k \mid \exp\{-i\lambda H(p,x)\triangle\tau\} \mid x_{k-1}\rangle\right] \\
&= \lim_{N\to+\infty} i\int_0^\infty d\lambda \int \prod_{j=1}^N dx_k \prod_{k=1}^N \langle x_k \mid \exp\left\{\left(-i\lambda\left(-p^2 + M^2\right)\right)\triangle\tau\right\} \mid x_{k-1}\rangle \\
&\quad \times \prod_{k=1}^N \langle x_k \mid \exp\left\{-i\lambda\begin{pmatrix} \frac{i}{4}\sigma^a\left(\Gamma_a t^a_{ab}\Gamma_b\right)((k_1.x)b + (k_2.x)c)(\hat{p}.k) \\ +\frac{i}{16g}\sigma^a\epsilon^{abc}\left(\left(\Gamma_b t^b_{ba}\Gamma_a\right)'\left(\Gamma_c t^c_{ca}\Gamma_a\right)\right)(\hat{p}.k)\end{pmatrix}\triangle\tau\right\} \mid x_{k-1}\rangle.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

A ce niveau, développons l'exponentielle de l'équation (2.12) jusqu'au premier ordre en $\triangle\tau$. Donc, l'élément de matrice de (2.12) se réduit à

$$\begin{aligned}
&\langle x_k \quad | \quad \exp\left\{-i\lambda\begin{pmatrix} -p^2 + M^2 \\ \frac{i}{4}\sigma^a\left(\Gamma_a t^a_{ab}\Gamma_b\right)((k_1.x)b + (k_2.x)c)(\hat{p}.k) \\ +\frac{i}{16g}\sigma^a\epsilon^{abc}\left(\left(\Gamma_b t^b_{ba}\Gamma_a\right)'\left(\Gamma_c t^c_{ca}\Gamma_a\right)\right)(\hat{p}.k)\end{pmatrix}\triangle\tau\right\} \mid x_{k-1}\rangle \\
&= \langle x_k \mid 1 - i\lambda\begin{pmatrix} -p^2 + M^2 \\ \frac{i}{4}\sigma^a\left(\Gamma_a t^a_{ab}\Gamma_b\right)((k_1.x)b + (k_2.x)c)(\hat{p}.k) \\ +\frac{i}{16g}\sigma^a\epsilon^{abc}\left(\left(\Gamma_b t^b_{ba}\Gamma_a\right)'\left(\Gamma_c t^c_{ca}\Gamma_a\right)\right)(\hat{p}.k)\end{pmatrix}\triangle\tau \mid x_{k-1}\rangle.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Ensuite, insérons la relation de ferméture

$$\int d^4p_k \quad | \quad p_k\rangle\langle p_k \mid = 1, \tag{2.14}$$

où le moment p vérifié les relations

$$\hat{p}^{\mu} \quad | \quad p\rangle = p^{\mu} \mid p\rangle \; ; \; \langle p \mid p^{'}\rangle \; = \delta^{4}\left(p - p^{'}\right) \quad ; \; \langle x \mid p\rangle = \frac{1}{\left(2\pi\right)^{2}} \, e^{ipx} \; . \tag{2.15}$$

Donc, nous pouvons déduire qu'à la limite $N \longrightarrow \infty$, les éléments de la matrice (2.13) auront l'expression exacte suivante

$$\begin{aligned} \langle x_k \quad | \quad & \exp\left\{ -i\lambda \left(\begin{array}{c} -p^{2} + M^{2} \\ \frac{i}{4}\sigma^{a}\left(\Gamma_{a} t^{a}_{ab} \Gamma_{b}\right)\left((k_{1}.x)b + (k_{2}.x)c\right)(\hat{p}.k) \\ +\frac{i}{16g}\sigma^{a}\epsilon^{abc}\left(\left(\Gamma_{b} t^{b}_{ba}\Gamma_{a}\right)^{'}\left(\Gamma_{c} t^{c}_{ca}\Gamma_{a}\right)\right)(\hat{p}.k) \end{array} \right) \triangle\, \tau \right\} \mid x_{k-1}\rangle \\ = & \lim_{N \to +\infty} \int \frac{d^{4}p_{k}}{\left(2\pi\right)^{4}} \left[1 - i\lambda \left(\begin{array}{c} -p^{2} + M^{2} \\ \frac{i}{4}\sigma^{a}\left(\Gamma_{a} t^{a}_{ab} \Gamma_{b}\right)\left((k_{1}.x)b + (k_{2}.x)c\right)(\hat{p}.k) \\ +\frac{i}{16g}\sigma^{a}\epsilon^{abc}\left(\left(\Gamma_{b} t^{b}_{ba}\Gamma_{a}\right)^{'}\left(\Gamma_{c} t^{c}_{ca}\Gamma_{a}\right)\right)(\hat{p}.k) \end{array} \right) \triangle\, \tau \right] \\ & \times \exp\left\{ ip_{k}\left(x_{k} - x_{k-1}\right)\right\} . \end{aligned} \tag{2.16}$$

D'une autre manière

$$\begin{aligned} \langle x_k \quad | \quad & \exp\left\{ -i\lambda \left(\begin{array}{c} -p^{2} + M^{2} \\ \frac{i}{4}\sigma^{a}\left(\Gamma_{a} t^{a}_{ab} \Gamma_{b}\right)\left((k_{1}.x)b + (k_{2}.x)c\right)(\hat{p}.k) \\ +\frac{i}{16g}\sigma^{a}\epsilon^{abc}\left(\left(\Gamma_{b} t^{b}_{ba}\Gamma_{a}\right)^{'}\left(\Gamma_{c} t^{c}_{ca}\Gamma_{a}\right)\right)(\hat{p}.k) \end{array} \right) \triangle\, \tau \right\} \mid x_{k-1}\rangle \\ = & \lim_{N \to +\infty} \int \frac{d^{4}p_{k}}{\left(2\pi\right)^{4}} \exp\left\{ ip_{k} \frac{x_{k} - x_{k-1}}{\triangle \tau} \triangle\, \tau \right\} \\ & \times \exp\left\{ -i\lambda \left(\begin{array}{c} -p_{k}^{2} + M^{2} \\ +\frac{i}{4}\sigma^{a}\left(\Gamma_{a} t^{a}_{ab} \Gamma_{b}\right)\left((k_{1}.\bar{x}_{k})b + (k_{2}.\bar{x}_{k})c\right)(\hat{p}_{k}.k) \\ +\frac{i}{16g}\sigma^{a}\epsilon^{abc}\left(\Gamma_{b} t^{b}_{ba}\Gamma_{a}\right)^{'}\left(\Gamma_{c} t^{c}_{ca}\Gamma_{a}\right)(\hat{p}_{k}.k) \end{array} \right) \triangle\, \tau \right\}, \end{aligned} \tag{2.17}$$

où

$$\frac{x_{k} + x_{k-1}}{2} \quad = \quad \bar{x}_{k}. \tag{2.18}$$

représente le mid-point.

Portons (2.17) dans (2.12). Le propagateur de Klein Gordon prend la forme suivante

$$\tilde{G}(x_b, x_a) = \lim_{N \to +\infty} i \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 ... dx_{N-1} \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} ... \frac{d^4 p_N}{(2\pi)^4}$$
$$\times \exp\left\{ i \sum_{k=1}^{N} \left[\begin{array}{c} p_k \frac{\triangle x_k}{\triangle \tau} - \lambda\left(-p_k^2 + M^2\right) \\ -\lambda \left(\begin{array}{c} \frac{i}{4}\sigma^a \left(\Gamma_a t_{ab}^a \Gamma_b\right)\left((k_1.\bar{x}_k)b + (k_2.\bar{x}_k)c\right)(\hat{p}_k.k) \\ +\frac{i}{16g}\sigma^a \epsilon^{abc} \left(\Gamma_b t_{ba}^b \Gamma_a\right)' \left(\Gamma_c t_{ca}^c \Gamma_a\right)(\hat{p}_k.k) \end{array}\right) \end{array} \right] \triangle \tau \right\}, \tag{2.19}$$

où $\triangle x_k = x_k - x_{k-1}$.

La forme formelle compacte du propagateur de Klein Gordon est la suivante

$$\tilde{G}(x_b, x_a) = iT \int_0^{\infty} d\lambda \int Dx \int Dp$$
$$\times \exp\left\{ i \int_0^{\lambda} d\tau \left(\begin{array}{c} p\dot{x} + p^2 - M^2 \\ +\frac{i}{4}\sigma^a \left(\Gamma_a t_{ab}^a \Gamma_b\right)\left((k_1.x)b + (k_2.x)c\right)(\hat{p}.k) \\ +\frac{i}{16g}\sigma^a \epsilon^{abc} \left(\Gamma_b t_{ba}^b \Gamma_a\right)' \left(\Gamma_c t_{ca}^c \Gamma_a\right)(\hat{p}.k) \end{array} \right) \right\}. \tag{2.20}$$

Remarquons, que le produit chronologique T est introduit à cause de la présence des opérateurs Γ qui ne commutent pas. Pour éliminer le produits T, nous allons introduire la définition

$$T \exp\left\{ \int_0^{\lambda} (\rho\Gamma)\, d\tau \right\} = \int_E D\Upsilon \exp\left\{ i\left(\Gamma \frac{\delta_L}{\delta\vartheta}\right)\right\}$$
$$\times \exp\left\{ \int_0^{\lambda} \left(\left(\Upsilon.\dot{\Upsilon}\right) - 2i(\rho\Upsilon)\right) d\tau + (\Upsilon(\lambda)\Upsilon(0)) \right\} |_{\Upsilon_0 + \Upsilon_1 = \vartheta}, \tag{2.21}$$

où le domaine d'intégration E est défini comme suit : $E = \{\Upsilon(\tau) \text{ tel que} \Upsilon(0) + \Upsilon(1) = \vartheta\}$. ρ est le courant couplé avec les opérateurs Γ. ϑ sont des variables impaires de Grassmann.

Donc, à partir de (2.20), nous allons trouvé la forme explicite de la fonction de Green

$\tilde{G}\left(x_b, x_a\right)$ à calculer par la méthode des intégrales de chemins

$$\begin{aligned}\tilde{G}\left(x_b, x_a\right) &= \exp\left\{i\left(\Gamma\frac{\delta_L}{\delta\vartheta}\right)\right\}\int_0^\infty d\lambda\int Dx\int Dp\int_E D\Upsilon \\ &\times\exp\left\{\begin{array}{c} i\int_0^\lambda d\tau\left[\begin{array}{c} p\dot{x}+p^2-M^2 \\ -i\frac{g}{4}\left(b.(k_1.x)+c.(k_2.x)\right)\left(t^\alpha_\beta\Upsilon_\alpha\Upsilon_\beta\right)(k.p) \\ -i\left(\Upsilon.\dot{\Upsilon}\right)\end{array}\right] \\ +\left(\Upsilon(\lambda)\Upsilon(0)\right)\end{array}\right\}_{\vartheta=0}.\end{aligned} \tag{2.22}$$

$x(\tau)$ et $p(\tau)$ sont des trajectoires d'intégrations bosoniques, limités par un paramètre $\tau\in[0,1]$. Υ sont des trajectoires d'intégrations fermioniques.

Passons maintenant au calcul de la fonction de Green.

2.1.3 Calcul de la fonction de Green $\tilde{G}\left(x_b, x_a\right)$

Remarquons d'abord, que l'action de l'équation (2.22) dépend du produit $(k.x)$ et $(k_i x)$; $(i=1,2)$. Donc, nous allons introduire des nouveaux variables tels que : $\varphi=(k.x)$ et $\varphi_i=(k_i x)$. Puis nous allons inséré trois identités [50, 51, 52]

$$\begin{aligned}&\int d\varphi_b\int d\varphi_a\delta(\varphi_a-kx_a)\int D\varphi\int Dp_\varphi\exp\left\{i\int_0^\lambda p_\varphi(\dot{\varphi}-k\dot{x})d\tau\right\}=1, \\ &\int d\varphi_{ib}\int d\varphi_{ia}\delta(\varphi_{ia}-k_i x_a)\int D\varphi_i\int Dp_{\varphi_i}\exp\left\{i\int_0^\lambda p_{\varphi_i}(\dot{\varphi}_i-k_i\dot{x})d\tau\right\}=1,\end{aligned} \tag{2.23}$$

afin de faire jouer φ et φ_i un rôle indépendant des variables $(k.x)$ et $(k_i x)$ respectivement.

Alors (2.22) devient

$$\begin{aligned}
\tilde{G}\left(x_b,x_a\right) &= \exp\left\{i\left(\Gamma\frac{\delta_L}{\delta\vartheta}\right)\right\} \\
&\times\int_0^\infty d\lambda\int Dx\int Dp\int d\varphi_b\int d\varphi_a\delta(\varphi_a-kx_a)\int D\varphi\int Dp_\varphi \\
&\times\prod_{i=1}^{2}\int d\varphi_{ib}\int d\varphi_{ia}\delta(\varphi_{ia}-k_ix_a)\int D\varphi_i\int Dp_{\varphi_i}\int_E D\Upsilon \\
&\times\exp\left\{\begin{array}{c} i\int_0^\lambda d\tau\left(\begin{array}{c} p^2-M^2+\left(p-\left(kp_\varphi\right)-\left(k_1p_{\varphi_1}\right)-\left(k_2p_{\varphi_2}\right)\right)\dot{x} \\ +\left(p_\varphi\dot{\varphi}\right)+\left(p_{\varphi_1}\dot{\varphi}_1\right)+\left(p_{\varphi_2}\dot{\varphi}_2\right) \\ -i\frac{g}{4}\left(\varphi_1b+\varphi_2c\right)\left(t^\alpha_\beta\Upsilon_\alpha\Upsilon_\beta\right)(k.p)-i\left(\Upsilon.\dot{\Upsilon}\right)\end{array}\right) \\ +\left(\Upsilon(\lambda)\Upsilon(0)\right)\end{array}\right\}_{\vartheta=0}.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Maintenant, faisons un changement de variable sur le moment p

$$P \rightarrow p-\left(kp_\varphi\right)-\left(k_1p_{\varphi_1}\right)-\left(k_2p_{\varphi_2}\right), \tag{2.25}$$

d'où

$$P^2 = p^2-2p_\varphi\left(k.p\right)-2p_{\varphi_1}\left(k_1p\right)-2p_{\varphi_2}\left(k_2p\right), \tag{2.26}$$

c'est-à-dire

$$p^2 = P^2+2p_\varphi\left(k.p\right)+2p_{\varphi_1}\left(k_1p\right)+2p_{\varphi_2}\left(k_2p\right), \tag{2.27}$$

par la suite la mesure reste inchangeable i.e. $dp=dP$.

Ainsi le noyau $\tilde{G}(x_b, x_a)$ devient

$$\begin{aligned}
\tilde{G}(x_b, x_a) &= \exp\left\{ i \left(\Gamma \frac{\delta_L}{\delta \vartheta} \right) \right\} \\
&\times \int_0^\infty d\lambda \int Dx \int Dp \int d\varphi_b \int d\varphi_a \delta(\varphi_a - kx_a) \int D\varphi \int Dp_\varphi \\
&\times \prod_{i=1}^{2} \int d\varphi_{ib} \int d\varphi_{ia} \delta(\varphi_{ia} - k_i x_a) \int D\varphi_i \int Dp_{\varphi_i} \int_E D\Upsilon \\
&\times \exp\left\{ \begin{array}{c} i \int_0^\lambda d\tau \left(\begin{array}{c} p\dot{x} + p^2 - M^2 + (\dot{\varphi} + 2(k.p))\, p_\varphi \\ + \left(\dot{\varphi}_1 + 2(k_1.p)\right) p_{\varphi_1} + \left(\dot{\varphi}_2 + 2(k_2.p)\right) p_{\varphi_2} \\ -i\frac{g}{4}\left(\varphi_1 b + \varphi_2 c\right)\left(t^\alpha_\beta \Upsilon_\alpha \Upsilon_\beta\right)(k.p) - i\left(\Upsilon.\dot{\Upsilon}\right) \end{array} \right) \\ + (\Upsilon(\lambda)\Upsilon(0)) \end{array} \right\}_{\vartheta=0} .
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Passons maintenant aux intégrations :

D'abord, intégrons par partie le premier terme se trouvant dans l'action de l'équation (2.28), nous allons trouvé $\int_0^\lambda \dot{x} p d\tau = (x_b p_b - x_a p_a) - \int_0^\lambda x\ \dot{p} d\tau$.

Donc, $\tilde{G}(x_b, x_a)$ se réécrit

$$\begin{aligned}
\tilde{G}(x_b, x_a) &= \exp\left\{ i \left(\Gamma \frac{\delta_L}{\delta \vartheta} \right) \right\} \\
&\times \int_0^\infty d\lambda \int Dx \int Dp \int d\varphi_b \int d\varphi_a \delta(\varphi_a - kx_a) \int D\varphi \int Dp_\varphi \\
&\times \prod_{i=1}^{2} \int d\varphi_{ib} \int d\varphi_{ia} \delta(\varphi_{ia} - k_i x_a) \int D\varphi_i \int Dp_{\varphi_i} \int_E D\Upsilon \\
&\times \exp\left\{ \begin{array}{c} i \int_0^\lambda d\tau \left(\begin{array}{c} -x\ \dot{p} + p^2 - M^2 + (\dot{\varphi} + 2(k.p))\, p_\varphi \\ + \left(\dot{\varphi}_1 + 2(k_1.p)\right) p_{\varphi_1} + \left(\dot{\varphi}_2 + 2(k_2.p)\right) p_{\varphi_2} \\ -i\frac{g}{4}\left(\varphi_1 b + \varphi_2 c\right)\left(t^\alpha_\beta \Upsilon_\alpha \Upsilon_\beta\right)(k.p) - i\left(\Upsilon.\dot{\Upsilon}\right) \end{array} \right) \\ + (\Upsilon(\lambda)\Upsilon(0)) \end{array} \right\}_{\vartheta=0} .
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Ensuite, intégrons sur tous les chemins $x(\tau)$, il apparait une fonction de Dirac

$$\int Dx \exp\left(-i\int_0^\lambda x\dot{p}d\tau\right) = \delta(\dot{p}), \tag{2.30}$$

qui va exprimer la conservation de l'impulsion au cours du mouvement $p_1 = p_2 = ... = p_n = p$. Ainsi, nous allons obtenir

$$\begin{aligned}
\tilde{G}(x_b, x_a) &= \exp\left\{i\left(\Gamma\frac{\delta_L}{\delta\vartheta}\right)\right\} \\
&\times \int_0^\infty d\lambda \int Dp \int d\varphi_b \int d\varphi_a \delta(\varphi_a - kx_a) \int D\varphi \int Dp_\varphi \delta(\dot{p}) \\
&\times \prod_{i=1}^{2} \int d\varphi_{ib} \int d\varphi_{ia} \delta(\varphi_{ia} - k_i x_a) \int D\varphi_i \int Dp_{\varphi_i} \int_E D\Upsilon \delta(\dot{p}) \\
&\times \exp\left\{ i\int_0^\lambda d\tau \left(\begin{array}{c} (x_b p_b - x_a p_a) + p^2 - M^2 + (2(k.p) + \dot{\varphi})p_\varphi \\ + \left(\dot{\varphi}_1 + 2(k_1.p)\right) p_{\varphi_1} + \left(\dot{\varphi}_2 + 2(k_2.p)\right) p_{\varphi_2} \\ -i\frac{g}{4}\left(\varphi_1 b + \varphi_2 c\right)\left(t^\alpha_\beta \Upsilon_\alpha \Upsilon_\beta\right)(k.p) - i\left(\Upsilon.\dot{\Upsilon}\right) \end{array} \right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ + (\Upsilon(\lambda)\Upsilon(0)) \end{array} \right\}_{\vartheta=0} .
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Intégrons encore, sur les moments p, nous allons trouvé

$$\begin{aligned}
\tilde{G}(x_b, x_a) &= \exp\left\{i\left(\Gamma\frac{\delta_L}{\delta\vartheta}\right)\right\} \int_0^\infty d\lambda \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int d\varphi_b \int d\varphi_a \delta(\varphi_a - kx_a) \\
&\times \prod_{i=1}^{2} \int d\varphi_{ib} \int d\varphi_{ia} \delta(\varphi_{ia} - k_i x_a) \int D\varphi_i \int Dp_{\varphi_i} \int D\varphi \int Dp_\varphi \int_E D\Upsilon \\
&\times \exp\left\{ i\int_0^\lambda d\tau \left(\begin{array}{c} p(x_b - x_a) + p^2 - M^2 + (2(k.p) + \dot{\varphi})p_\varphi \\ + \left(\dot{\varphi}_1 + 2(k_1.p)\right) p_{\varphi_1} + \left(\dot{\varphi}_2 + 2(k_2.p)\right) p_{\varphi_2} \\ -i\frac{g}{4}\left(\varphi_1 b + \varphi_2 c\right)\left(t^\alpha_\beta \Upsilon_\alpha \Upsilon_\beta\right)(k.p) - i\left(\Upsilon.\dot{\Upsilon}\right) \end{array} \right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ + (\Upsilon(\lambda)\Upsilon(0)) \end{array} \right\}_{\vartheta=0} .
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Intégrons sur p_φ et p_{φ_i} ($i = 1, 2$), nous allons trouvé respectivement

$$\int Dp_\varphi \exp\left\{ i\int_0^\lambda (\dot{\varphi} + 2pk)p_\varphi d\tau \right\} = \delta(\dot{\varphi} + 2(k.p)), \tag{2.33}$$

et

$$\int Dp_{\varphi_i} \exp\left\{ i\int_0^\lambda \left(\dot{\varphi}_i + 2pk_i\right) p_{\varphi_i} d\tau \right\} = \delta(\dot{\varphi}_i + 2(k_i.p)). \tag{2.34}$$

De plus, intégrons sur les variables φ et φ_i. Nous allons remarqué que la seule contribution essentielle pour la détermination de la fonction de Green est le résultat des équations de trajectoires suivantes

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = -2(k.p), \quad \frac{d\varphi_i}{d\tau} = -2(k_i.p), \tag{2.35}$$

c'est-à-dire

$$\varphi(\tau) = -2(k.p)\tau + c^{te}, \quad \varphi_i(\tau) = -2(k_i.p)\tau + c^{te}. \tag{2.36}$$

Remarquons que φ et φ_i sont des fonctions linéaires de τ. Ce qui ségnifi que se sont aussi des temps propres.

Maintenant, remplaçons les fonctions $\delta(\varphi_a - kx_a - (k.p)\lambda)$ et $\delta(\varphi_{ia} - k_i x_a - (k_i.p)\lambda)$, dans l'équation (2.32) par leurs intégrales

$$\begin{aligned} \delta(\varphi_a - kx_a - (k.p)\lambda) &= \frac{1}{2\pi}\int dp_\varphi \exp\left\{ ip_\varphi \left(\varphi_a - kx_a - (k.p)\lambda\right)\right\}, \\ \delta(\varphi_{ia} - k_i x_a - (k_i.p)\lambda) &= \frac{1}{2\pi}\int dp_{\varphi_i} \exp\left\{ ip_{\varphi_i} \left(\varphi_{ia} - k_i x_a - (k_i.p)\lambda\right)\right\}; \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \tag{2.37}$$

Puis, faisons le changement inverse du moment i.e. $p \to p - \left(kp_{\varphi_b}\right) - \left(k_1 p_{\varphi_{1b}}\right) - \left(k_2 p_{\varphi_{2b}}\right)$. Ensuite, réintroduisons (2.21) et grâce aux (1.13), nous allons trouvé une forme symétrique de la fonction de Green $\tilde{G}(x_b, x_a)$ par rapport à la position initiale x_a et la position finale x_b de la particule

$$\begin{aligned}
\tilde{G}(x_b, x_a) &= \int_0^\infty d\lambda \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \exp\left\{ ip(x_b - x_a) + i\int_0^\lambda (p^2 - M^2) d\tau \right\} \\
&\times \exp\left\{ -\frac{i}{2} \int_{kx_a}^{kx_b} dt \vec{\sigma} . \left(\frac{d\vec{m}(t)}{dt} \times \vec{m}(t) \right) \right\} \\
&\times \exp\left\{ \frac{i\tau g}{2pk} \int_{kx_a}^{kx_b} dt \left[p\left(k_{\mu 1}\Omega_1(t) + k_{\mu 2}\Omega_2(t)\right) - \frac{g\tau}{4}\left(k_{\mu 1}\Omega_1(t) + k_{\mu 2}\Omega_2(t)\right)^2 \right] \right\} \\
&\times \exp\left\{ -\frac{i\tau g}{2} \left[x_b\left(k_{\mu 1}\Omega_1(kx_b) + k_{\mu 2}\Omega_2(kx_b)\right) - x_a\left(k_{\mu 1}\Omega_1(kx_a) + k_{\mu 2}\Omega_2(kx_a)\right) \right] \right\},
\end{aligned} \tag{2.38}$$

avec

$$\Omega_1(kx) = \int^{kx} dt b(t) \; ; \qquad \Omega_2(kx) = \int^{kx} dt c(t) \, . \tag{2.39}$$

Finalement, intégrons sur le temps propre réel λ, le résultat que nous allons obtenir est le suivant

$$\begin{aligned}
\tilde{G}(x_b, x_a) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p}{p^2 - M^2 + i0} \exp\left\{ ip(x_b - x_a) \right\} \\
&\times \exp\left\{ -\frac{i}{2} \int_{kx_a}^{kx_b} dt \vec{\sigma} . \left(\frac{d\vec{m}(t)}{dt} \times \vec{m}(t) \right) \right\} \\
&\times \exp\left\{ \frac{i\tau g}{2pk} \int_{kx_a}^{kx_b} dt \left[p\left(k_{\mu 1}\Omega_1(t) + k_{\mu 2}\Omega_2(t)\right) - \frac{g\tau}{4}\left(k_{\mu 1}\Omega_1(t) + k_{\mu 2}\Omega_2(t)\right)^2 \right] \right\} \\
&\times \exp\left\{ -\frac{i\tau g}{2} \left[x_b\left(k_{\mu 1}\Omega_1(kx_b) + k_{\mu 2}\Omega_2(kx_b)\right) - x_a\left(k_{\mu 1}\Omega_1(kx_a) + k_{\mu 2}\Omega_2(kx_a)\right) \right] \right\},
\end{aligned} \tag{2.40}$$

qui représente la fonction de Green de la particule de Klein Gordon interagissant avec un type de potentiels ((1.8) et (1.9)) du groupe $SU(2)$.

2.1.4 Détermination des fonctions d'ondes

Pour extraire les fonctions d'ondes, nous allons appliqué la théorème de résidus sur les deux pôles d'énergie :

$$\begin{aligned} p^2 - M^2 &= 0 \rightarrow p_0^2 - \vec{p}^2 - M^2 = 0 \\ &\rightarrow p_0^2 = \vec{p}^2 + M^2 \\ &\rightarrow p_0 = E = \pm(p^2 + M^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Aprés intégration sur les p^0, nous pouvons obtenir le noyau

$$\begin{aligned} \tilde{G}(x_b, x_a) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{dp_0\, d^3p}{p^{02} - \vec{p}^2 - M^2} \exp\left\{ip_0(t_b - t_a) - i\vec{p}(\vec{x}_b - \vec{x}_a)\right\} \\ &\times \exp\left\{-\frac{i}{2}\int_{kx_a}^{kx_b} dt\vec{\sigma}.\left(\frac{d\vec{m}(t)}{dt} \times \vec{m}(t)\right)\right\} \\ &\times \exp\left\{\frac{i\tau g}{2pk}\int_{kx_a}^{kx_b} dt\left[p\left(k_{\mu_1}\Omega_1(t) + k_{\mu_2}\Omega_2(t)\right) - \frac{g\tau}{4}\left(k_{\mu_1}\Omega_1(t) + k_{\mu_2}\Omega_2(t)\right)^2\right]\right\} \\ &\times \exp\left\{-\frac{i\tau g}{2}\left[x_b\left(k_{\mu_1}\Omega_1(kx_b) + k_{\mu_2}\Omega_2(kx_b)\right) - x_a\left(k_{\mu_1}\Omega_1(kx_a) + k_{\mu_2}\Omega_2(kx_a)\right)\right]\right\}, \end{aligned} \tag{2.42}$$

ou bien

$$\begin{aligned} \tilde{G}(x_b, x_a) &= \frac{-i}{2}\sum_{\varepsilon=\pm}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \exp\left\{-i\varepsilon\omega(t_b - t_a) + i\vec{p}(\vec{x}_b - \vec{x}_a)\right\}\theta[\varepsilon(t_b - t_a)] \\ &\times \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon\omega k^0 - \frac{\tau g}{2pk}}\left[-\frac{pk}{\tau g}\int_{kx_a}^{kx_b} dt\vec{\sigma}.\left(\frac{d\vec{m}(t)}{dt} \times \vec{m}(t)\right)\right]\right\} \\ &\times \exp\left\{\frac{\frac{2ipk}{\tau g}}{\varepsilon\omega k^0 - \frac{\tau g}{2pk}}\left(\int_{kx_a}^{kx_b} dt\left[\begin{array}{c} p\left(k_{\mu_1}\Omega_1(t) + k_{\mu_2}\Omega_2(t)\right) \\ -\frac{g\tau}{4}\left(k_{\mu_1}\Omega_1(t) + k_{\mu_2}\Omega_2(t)\right)^2 \end{array}\right]\right)\right\} \\ &\times \exp\left\{\frac{ipk}{\varepsilon\omega k^0 - \frac{\tau g}{2pk}}\left[\begin{array}{c} x_b\left(k_{\mu_1}\Omega_1(kx_b) + k_{\mu_2}\Omega_2(kx_b)\right) \\ -x_a\left(k_{\mu_1}\Omega_1(kx_a) + k_{\mu_2}\Omega_2(kx_a)\right) \end{array}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Ce qui nous permet de déterminer les fonctions d'ondes d'une particule de Klein Gordon libre en interaction avec champ non-Abélien du groupe $SU(2)$

$$\begin{aligned}\Psi_p^{\pm}(x) \quad = \quad & \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{(2p^0)^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{\mp i\left[px-\frac{i}{2}\int_{kx_a}^{kx_b}dt\vec{\sigma}.\left(\frac{d\vec{m}(t)}{dt}\times\vec{m}(t)\right)\right]\right\} \\ & \times\exp\left\{\mp i\left[\frac{\tau g}{2pk}\int_{kx_a}^{kx_b}dt\left(p\left(k_{\mu_1}\Omega_1(t)+k_{\mu_2}\Omega_2(t)\right)-\frac{g\tau}{4}\left(k_{\mu_1}\Omega_1(t)+k_{\mu_2}\Omega_2(t)\right)^2\right)\right]\right\} \\ & \times\exp\left\{\mp i\left[-\frac{i\tau g}{2}\left(x_b\left(k_{\mu_1}\Omega_1(kx_b)+k_{\mu_2}\Omega_2(kx_b)\right)-x_a\left(k_{\mu_1}\Omega_1(kx_a)+k_{\mu_2}\Omega_2(kx_a)\right)\right)\right]\right\}.\end{aligned} \tag{2.44}$$

2.1.5 Conclusion

Nous avons traiter dans cette partie un problème concernant le mouvement des particules de Klein Gordon de spin 0 soumise à l'action d'un potentiel non-Abélien du groupe $SU(2)$ de $(3+1)$ dimensions par l'approche des intégrales de chemins. Cette action que nous avons obtenu a une forme bien définie avec quelques propriétés simples. C'est ainsi que nous avons utilisé une voie directe pour solutionné le problème. Ce qui montre la puissance de la méthode des intégrales de chemins à résoudre des problèmes concrets.

Il est remarquable de noter que les fonctions δ de Dirac, qui apparaissent au bout des calculs ont exactement le même argument que les équations de la mécanique classique (voir Annexe 1).

2.2 Propagateur de Dirac : projection globale

2.2.1 Introduction

Notre objectif dans cette partie est d'utilisé une approche dite globale pour traiter un problème un peut compliqué i.e. nous voudrons déterminer la forme exacte de la fonction de Green à partir d'un calcul des intégrales de chemins, pour des particules de Dirac de spin $\frac{1}{2}$ en mouvement dans un champ non-Abélien A_μ^a du groupe $SU(2)$ donné par les deux équations ((1.8) et (1.9)).

Les démarches que nous devons suivre dans ce calcul, consiste essentiellement à introduire une identité qui dépend de la variable qui caractérise le champ non-Abélien. A l'aide de quelques propriétés simples du champ non-Abélien, nous pouvons obtenir analytiquement la fonction de Green concernant la particule de Dirac.

Remarquons d'abord, que l'insertion des trois composantes du spin dans le formalisme des intégrales de chemins représente un grand problème pour les physiciens du domaine.

Nous mentionnons, que pour l'équation de Dirac (dans le cas relativiste), il existe diverses formulations d'intégral de chemins qui ont été proposées, citons par exemple les travaux d'Alexandrou et Al.[54, 55], ils ont utilisés la technique des poids de la forme en $\exp\{iS\}$ relié aux tous chemins possibles, où S est l'action du système.

Notons, qu'ils existes moins de travails où l'équation de Dirac a une solution analytique exacte. Citons, par exemple les travaux de Schwinger [11] sur le champs constant, les travaux de Fradkin et Barbashov [56, 57] sur l'onde plane, les travaux de Nikishov et Barducci [58, 59] sur le champs électromagnétique couplés et finalement les travaux de Batalin et Gavrilov [60, 61] sur le champ électromagnétique homogène constant couplé avec le champ d'une onde plane. Pour le cas qui concerne les travaux sur les intégrales de chemins, nous pouvons citer les interactions qui ont une forme classique [51, 52, 62, 63].

Pour notre cas i.e. champ non-Abélien, à l'acception du formalisme donné par Gitman dans son livre [53] et qui nous allons l'utilisé dans ce travail, ils n'existent pas des calculs explicits des propagateurs par le formalisme des intégrales de chemins. Notons que se problème fait l'objet de travail [48] par le calcul de la fonction de Green pour des particules de spin $\frac{1}{2}$ en calculant l'équation de Yang-Mills.

Notons que dans le cas global :

- nous avons omettre la matrice γ^5 dans la formulation des intégrales de chemins.

-nous avons donné un soin particulier aux équations classiques.

2.2.2 Construction de la fonction de Green $\tilde{S}_g(x_b, x_a)$

La fonction de Green $S_g(x_b, x_a)$, dont il s'agit de calculer par l'approche global, est par définition solution de l'équation suivante

$$\left(\begin{array}{c} -(\gamma\hat{p}) + \frac{g}{8}(\gamma k)\left(b.(k_1.x) + c.(k_2.x)\right)\left(\Gamma_a t_b^a \Gamma_b\right) \\ +\frac{1}{32g}(\gamma k)\left(\frac{d\left(\Gamma_a t_b^a \Gamma_b\right)}{d(k.x)}\left(\Gamma_a t_b^a \Gamma_b\right)\right) - M \end{array}\right) S(x_b, x_a) = \delta^4(x_b, x_a), \tag{2.45}$$

où γ^μ sont les matrices usuelle de Dirac qui obéissent aux relations

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_- = 2g^{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \tag{2.46}$$

et

$$\hat{p}_\mu = -i\partial_\mu. \tag{2.47}$$

Par ordre pour déterminer la fonction de Green, nous suivons la méthode [51]. Nous introduisons les identités pour les variables qui caractérisent le champ non-Abélien.

Au premier lieu connaissons le noyau

$$S_g(x_b, x_a) = < x_b \mid \tilde{S} \mid x_a >, \tag{2.48}$$

qui est un élément de la matrice S_g, solution de l'équation symbolique

$$\left(\begin{array}{c} -(\gamma\hat{p}) + \frac{g}{8}(\gamma k)\left(b.(k_1.x) + c.(k_2.x)\right)\left(\Gamma_a t_b^a \Gamma_b\right) \\ +\frac{1}{32g}(\gamma k)\left(\frac{d\left(\Gamma_a t_b^a \Gamma_b\right)}{d(k.x)}\left(\Gamma_a t_b^a \Gamma_b\right)\right) - M \end{array}\right) \tilde{S}_g = I. \tag{2.49}$$

Donc nous pouvons écrire $\tilde{S}_g$ sous forme exponentielle

$$\tilde{S}_g = \int_0^\infty d\lambda \exp\left(-i\lambda \hat{H}_g(\hat{p}, \hat{x})\right), \tag{2.50}$$

avec

$$\begin{aligned}\hat{H}_{g}\left(\hat{p},\hat{x}\right) = p^{2} - M^{2} &- \frac{1}{16}\left(\sigma\left(\left(\Gamma_{a}t_{b}^{a}\Gamma_{b}\right)^{\prime}\left(\Gamma_{a}t_{b}^{a}\Gamma_{b}\right)\right)\right)\left(\hat{p}.k\right)\\ &- \frac{1}{16}\left(b.(k_{1}.x)+c.(k_{2}.x)\right)\left(\sigma\left(\frac{1}{4}\Gamma_{a}t_{b}^{a}\Gamma_{b}\right)\right)\left(\hat{p}.k\right)\\ &- ig\left(k.\sigma.k\right)\left(\frac{1}{32g}\left(\Gamma_{a}t_{b}^{a}\Gamma_{b}\right)^{\prime}\left(\Gamma_{a}t_{b}^{a}\Gamma_{b}\right)\right)\\ &- ig\left(k.\sigma.k\right)\left\{\left(b.(k_{1}.x)+c.(k_{2}.x)\right)\left(\frac{1}{8}\Gamma_{a}t_{b}^{a}\Gamma_{b}\right)\right\}^{\prime},\end{aligned} \tag{2.51}$$

où la prime exprime la dérivation par rapport à $(k.x)$.

Dans l'espace de configuration nous avons [11]

$$\tilde{S}_{g}(x_{b},x_{a}) = \int_{0}^{\infty} d\lambda < x_{b} \mid \exp\left(-i\lambda H_{g}\left(\hat{p},\hat{x}\right)\right) \mid x_{a} > . \tag{2.52}$$

Maintenant, passons au formulation des intégrales de chemins, où nous suivrons les mêmes démarches, que nous avons utilisées pour le cas de Klein Gordon.

Donc nous pouvons écrire la fonction de Green par le choix de mid-point

$$\frac{x_{k}+x_{k-1}}{2} = \bar{x}_{k}, \tag{2.53}$$

comme suit

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{g}(x_{b},x_{a}) = iT_{1}T_{2}\int_{0}^{\infty}d\lambda\int Dx\int Dp\exp\left\{i\int_{0}^{\lambda}d\tau\left[p\dot{x}+\left(p^{2}-M^{2}\right)\right]\right\}\\ \times\exp\left\{i\int_{0}^{\lambda}d\tau\left[\begin{array}{c}-\frac{1}{16}\left(\hat{p}.k\right)\left(\sigma\left(\left(\Gamma_{a}t_{b}^{a}\Gamma_{b}\right)^{\prime}\left(\Gamma_{a}t_{b}^{a}\Gamma_{b}\right)\right)\right)\\ -\frac{1}{16}\left(\hat{p}.k\right)\left(b.(k_{1}.x)+c.(k_{2}.x)\right)\left(\sigma\left(\frac{1}{4}\Gamma_{a}t_{b}^{a}\Gamma_{b}\right)\right)\\ -ig\left(k.\sigma.k\right)\left(\frac{1}{32g}\left(\Gamma_{a}t_{b}^{a}\Gamma_{b}\right)^{\prime}\left(\Gamma_{a}t_{b}^{a}\Gamma_{b}\right)\right)\\ -ig\left(k.\sigma.k\right)\left\{\left(b.(k_{1}.x)+c.(k_{2}.x)\right)\left(\frac{1}{8}\Gamma_{a}t_{b}^{a}\Gamma_{b}\right)\right\}^{\prime}\end{array}\right]\right\},\end{aligned} \tag{2.54}$$

où T_1 et T_2 sont les deux produits chronologiques définis par

$$\begin{aligned} T_1 \exp\left\{\int_0^\lambda \left(\rho_1\gamma\right) d\tau\right\} &= \int_{E_1} D\Psi \exp\left\{i\left(\gamma\tfrac{\delta_L}{\delta\theta}\right)\right\} \\ &\times \exp\left\{\begin{array}{c} \int_0^\lambda \left(\left(\Psi.\dot{\Psi}\right) - 2i\left(\rho_1\Psi\right)\right) d\tau \\ +\left(\Psi(\lambda)\Psi(0)\right) \end{array}\right\}\Big|_{\Psi_0+\Psi_1=\theta}, \end{aligned} \tag{2.55}$$

et

$$\begin{aligned} T_2 \exp\left\{\int_0^\lambda \left(\rho_2\Gamma\right) d\tau\right\} &= \int_{E_2} D\Upsilon \exp\left\{i\left(\Gamma\tfrac{\delta_L}{\delta\vartheta}\right)\right\} \\ &\times \exp\left\{\begin{array}{c} \int_0^\lambda \left(\left(\Upsilon.\dot{\Upsilon}\right) - 2i\left(\rho_2\Upsilon\right)\right) d\tau \\ +\left(\Upsilon(\lambda)\Upsilon(0)\right) \end{array}\right\}\Big|_{\Upsilon_0+\Upsilon_1=\vartheta}. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Ils sont introduisent à cause de la présence des matrices γ et des opérateurs Γ qui ne commutent pas.

Notons que les domaines d'intégrations E_1 et E_2 sont définis comme suit : $E_1 = \{\Psi(\tau)$ tel que $\Psi(0)+\Psi(1)=\theta\}$; $E_2 = \{\Upsilon(\tau)$ tel que $\Upsilon(0)+\Upsilon(1)=\vartheta\}$. ρ_1 et ρ_2 sont respectivement les courants couplés avec les matrices γ et les opérateurs Γ. θ et ϑ sont des variables impaires de Grassmann.

Dans ce cas, nous avons

$$\tilde{S}_g(x_b, x_a) = \exp\left\{i\left(\gamma\frac{\delta_L}{\delta\theta}\right)\right\}\exp\left\{i\left(\Gamma\frac{\delta_L}{\delta\vartheta}\right)\right\}\int_0^\infty d\lambda\int Dx\int Dp\int_{E_1} D\Psi\int_{E_2} D\Upsilon$$
$$\times\exp\left\{i\int_0^\lambda d\tau\left[p\dot{x}+(p^2-M^2)\right]\right\}$$
$$\times\exp\left\{\begin{array}{c} i\int_0^\lambda d\tau\left[\begin{array}{c} -i\frac{g}{4}\left(b.(k_1.x)+c.(k_2.x)\right)\left(t_b^a\Upsilon_a\Upsilon_b\right)(p.\Psi)(k.\Psi) \\ -\frac{i}{16}\left(t_b^a\Upsilon'_a\Upsilon_b\right)(p.\Psi)(k.\Psi)-i\left(\Psi.\dot{\Psi}\right)-i\left(\Upsilon.\dot{\Upsilon}\right)\end{array}\right] \\ +\left(\Psi(\lambda)\Psi(0)\right)+\left(\Upsilon(\lambda)\Upsilon(0)\right)\end{array}\right\}_{\theta=\vartheta=0}, \tag{2.57}$$

qui est la fonction de Green à calculer par la méthode des intégrales de chemins, où $x(\tau)$, $p(\tau)$ sont des trajectoires d'intégration bosoniques, limités par un paramètre

$$\tau \in [0,1], \tag{2.58}$$

Ψ,Υ et χ sont des trajectoires d'intégration fermioniques.

2.2.3 Calcul de la fonction de Green $\tilde{S}_g(x_b, x_a)$

Avant de passer aux intégrations, notons que l'action dépend des produits $(k.x)$ et $(k_i.x)$; $(i = 1, 2)$.

Posons

$$\varphi = (k.x), \qquad \varphi_i = (k_i.x), \tag{2.59}$$

et essayons de sorte que φ et φ_i jouent un rôle indépendant des produits $(k.x)$ et $(k_i.x)$ respectivement.

Nous allons introduire les trois identités (2.23), et par la suite nous allons trouvé

$$
\begin{aligned}
\tilde{S}_g(x_b,x_a) = {} & \exp\left\{i\left(\gamma\frac{\delta_L}{\delta\theta}\right)\right\}\exp\left\{i\left(\Gamma\frac{\delta_L}{\delta\vartheta}\right)\right\}\int_0^\infty d\lambda\int Dx\int Dp\exp\left\{i\int\limits_0^\lambda d\tau\left[p\dot{x}+(p^2-M^2)\right]\right\}\\
& \times\int d\varphi_b\int d\varphi_a\delta(\varphi_a-kx_a)\int D\varphi\int Dp_\varphi\\
& \times\prod_{i=1}^2\int d\varphi_{ib}\int d\varphi_{ia}\delta(\varphi_{ia}-k_ix_a)\int D\varphi_i\int Dp_{\varphi_i}\int_{E_1}D\Psi\int_{E_2}D\Upsilon\\
& \times\exp\left\{\begin{array}{c} i\int\limits_0^\lambda d\tau\left[\begin{array}{c}-i\frac{g}{32}\left(p.\Psi\right)\left(k.\Psi\right)\left(t_b^a\Upsilon'_a\Upsilon_b\right)-\left(\left(kp_\varphi\right)+\left(k_1p_{\varphi_1}\right)+\left(k_2p_{\varphi_2}\right)\right)\dot{x}\\ +\left(p_\varphi\dot{\varphi}\right)+\left(p_{\varphi_1}\dot{\varphi}_1\right)+\left(p_{\varphi_2}\dot{\varphi}_2\right)\\ -ig\left(p.\Psi\right)\left(k.\Psi\right)\left(b.\varphi_1+c.\varphi_2\right)\left(t_b^a\Upsilon_a\Upsilon_b\right)-i\left(\Psi.\dot{\Psi}\right)-i\left(\Upsilon.\dot{\Upsilon}\right)\end{array}\right]\\ +\left(\Psi(\lambda)\Psi(0)\right)+\left(\Upsilon(\lambda)\Upsilon(0)\right)\end{array}\right\}_{\theta=\vartheta=0},
\end{aligned}
\tag{2.60}
$$

où la prime maintenant, exprime la dérivation par rapport à φ.

Faisons un changement sur p (2.27). Donc nous avons

$$
\begin{aligned}
\tilde{S}_g(x_b,x_a) = {} & \exp\left\{i\left(\gamma\frac{\delta_L}{\delta\theta}\right)\right\}\exp\left\{i\left(\Gamma\frac{\delta_L}{\delta\vartheta}\right)\right\}\int_0^\infty d\lambda\int Dx\int Dp\\
& \times\exp\left\{i\int\limits_0^\lambda d\tau\left[p\dot{x}+(p^2-M^2)\right]\right\}\int d\varphi_b\int d\varphi_a\delta(\varphi_a-kx_a)\int D\varphi\int Dp_\varphi\\
& \times\prod_{i=1}^2\int d\varphi_{ib}\int d\varphi_{ia}\delta(\varphi_{ia}-k_ix_a)\int D\varphi_i\int Dp_{\varphi_i}\int_{E_1}D\Psi\int_{E_2}D\Upsilon\\
& \times\exp\left\{\begin{array}{c} i\int\limits_0^\lambda d\tau\left[\begin{array}{c}-i\frac{g}{32}\left(p.\Psi\right)\left(k.\Psi\right)\left(t_b^a\Upsilon'_a\Upsilon_b\right)\\ -ig\left(p.\Psi\right)\left(k.\Psi\right)\left(b\varphi_1+c\varphi_2\right)\left(t_b^a\Upsilon_a\Upsilon_b\right)\\ +p_\varphi\left(\dot{\varphi}+2\left(k.p\right)\right)+p_{\varphi_1}\left(\dot{\varphi}_1+2\left(k_1p\right)\right)+p_{\varphi_2}\left(\dot{\varphi}_2+2\left(k_2p\right)\right)\\ -i\left(\Psi.\dot{\Psi}\right)-i\left(\Upsilon.\dot{\Upsilon}\right)\end{array}\right]\\ +\left(\Psi(\lambda)\Psi(0)\right)+\left(\Upsilon(\lambda)\Upsilon(0)\right)\end{array}\right\}_{\theta=\vartheta=0},
\end{aligned}
\tag{2.61}
$$

avec

$$
b = b(\varphi), \qquad c = c(\varphi).
\tag{2.62}
$$

Maintenant intégrons par partie le premier terme dans l'action, ensuite intégrons sur tous les chemins $x(\tau)$, il apparaisse une fonction de Dirac $\delta(\dot{p})$. Puis intégrons successivement sur tous les p_n, l'intégrale $\int Dp$ se réduit à un simple intégrale $\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$

$$\int Dp \quad \rightarrow \quad \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}, \tag{2.63}$$

nous déduisons que le moment de la particule est constant la durée du mouvement de la particule.

Donc, nous avons

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_g(x_b, x_a) = {} & \exp\left\{i\left(\gamma\frac{\delta_L}{\delta\theta}\right)\right\}\exp\left\{i\left(\Gamma\frac{\delta_L}{\delta\vartheta}\right)\right\}\int_0^\infty d\lambda\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4} \\
& \times\exp\left\{ip(x_b - x_a) + i\lambda\left(p^2 - M^2\right)\right\}\int d\varphi_b\int d\varphi_a\delta(\varphi_a - kx_a)\int D\varphi\int Dp_\varphi \\
& \times\prod_{i=1}^{2}\int d\varphi_{ib}\int d\varphi_{ia}\delta(\varphi_{ia} - k_i x_a)\int D\varphi_i\int Dp_{\varphi_i}\int_{E_1} D\Psi\int_{E_2} D\Upsilon \\
& \times\exp\left\{\begin{array}{c} i\int\limits_0^\lambda d\tau\left[\begin{array}{c} -i\frac{g}{32}(p.\Psi)(k.\Psi)\left(t_b^a\Upsilon'_a\Upsilon_b\right) \\ -ig(p.\Psi)(k.\Psi)\left(b\varphi_1 + c\varphi_2\right)\left(t_b^a\Upsilon_a\Upsilon_b\right) \\ +p_\varphi(\dot{\varphi} + 2(k.p)) + p_{\varphi_1}\left(\dot{\varphi}_1 + 2(k_1p)\right) + p_{\varphi_2}\left(\dot{\varphi}_2 + 2(k_2p)\right) \\ -i\left(\Psi.\dot{\Psi}\right) - i\left(\Upsilon.\dot{\Upsilon}\right)\end{array}\right] \\ +(\Psi(\lambda)\Psi(0)) + (\Upsilon(\lambda)\Upsilon(0))\end{array}\right\}_{\theta=\vartheta=0}.
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Maintenant, nous allons posé

$$\xi_a = (k.\Psi_a), \tag{2.65}$$

puis, nous allons introduire l'identité qui caractérise l'interaction spin-champ [50]

$$\int d\xi_a d\xi_b\delta(\xi_a - (k.\Psi_a))\int Dp_\xi\int D\xi\exp\left\{i\int\limits_0^\lambda p_\xi(\dot{\xi} - \left(k.\dot{\Psi}\right))d\tau\right\} = 1, \tag{2.66}$$

où ξ et p_ζ sont des variables impaires de Grassmann.

Donc, nous avons

$$\begin{aligned}\tilde{S}_g(x_b,x_a) &= \exp\left\{i\left(\gamma\frac{\delta_L}{\delta\theta}\right)\right\}\exp\left\{i\left(\Gamma\frac{\delta_L}{\delta\vartheta}\right)\right\} \\ &\times\int_0^\infty d\lambda\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp\left\{ip(x_b-x_a)+i\lambda\left(p^2-M^2\right)\right\} \\ &\times\int d\varphi_b\int d\varphi_a\delta(\varphi_a-kx_a)\int D\varphi\int Dp_\varphi\prod_{i=1}^{2}\int d\varphi_{ib}\int d\varphi_{ia}\delta(\varphi_{ia}-k_ix_a) \\ &\times\int D\varphi_i\int Dp_{\varphi_i}\int d\xi_a d\xi_b\delta(\xi_a-(k\Psi_a))\int D\xi\int Dp_\xi\int_{E_1}D\Psi\int_{E_2}D\Upsilon \\ &\times\exp\left\{\begin{array}{c} i\int\limits_0^\lambda d\tau\left[\begin{array}{c}-i\frac{g}{32}(p.\Psi)(k.\Psi)\left(t_b^a\Upsilon_a'\Upsilon_b\right) \\ -ig(p.\Psi)(k.\Psi)\left(b\varphi_1+c\varphi_2\right)\left(t_b^a\Upsilon_a\Upsilon_b\right) \\ +p_\varphi\left(\dot{\varphi}+2(k.p)\right)+p_{\varphi_1}\left(\dot{\varphi}_1+2(k_1p)\right)+p_{\varphi_2}\left(\dot{\varphi}_2+2(k_2p)\right) \\ +p_\xi(\dot{\xi}-\left(k.\dot{\Psi}\right))-i\left(\Psi.\dot{\Psi}\right)-i\left(\Upsilon.\dot{\Upsilon}\right)\end{array}\right] \\ +(\Psi(\lambda)\Psi(0))+(\Upsilon(\lambda)\Upsilon(0))\end{array}\right\}_{\theta=\vartheta=0}.\end{aligned} \tag{2.67}$$

A ce niveau, il est préférable d'abord, de remplacer les intégrales sur les Ψ dans (2.67) par des intégrales sur les vitesses ω [53]

$$\Psi(\tau) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\lambda\varepsilon(\tau-\tau')\omega(\tau')d\tau'+\frac{\theta}{2}, \tag{2.68}$$

avec

$$\omega(\tau) = \frac{d\Psi(\tau)}{d\tau}=\dot{\Psi}, \tag{2.69}$$

de plus

$$\int\limits_0^\lambda d\tau\left(\Psi.\dot{\Psi}\right)+(\Psi(\lambda)\Psi(0)) = \int\limits_0^\lambda\int\limits_0^{\lambda'}d\tau d\tau'\omega(\tau)\varepsilon(\tau-\tau')\omega(\tau'). \tag{2.70}$$

Utilisons l'écriture condensé de Gitman [53]

$$a * b * c \quad = \quad \int_0^1 \int_0^1 a(\tau) b(\tau, \tau') c(\tau') d\tau d\tau', \tag{2.71}$$

l'intégrale (2.70) devient

$$\int_0^\lambda d\tau \left(\Psi . \dot{\Psi} \right) + \left(\Psi(\lambda) \Psi(0) \right) \quad = \quad -\frac{1}{2} \omega * \varepsilon * \omega, \tag{2.72}$$

par la suite la mesure reste inchangeable i.e. $D\Psi = D\omega$.

Nous obtenons

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_g(x_b, x_a) = {} & \exp\left\{ i \left(\gamma \frac{\delta_L}{\delta\theta} \right) \right\} \exp\left\{ i \left(\Gamma \frac{\delta_L}{\delta\vartheta} \right) \right\} \\
& \times \int_0^\infty d\lambda \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \exp\left\{ ip(x_b - x_a) + i\lambda \left(p^2 - M^2 \right) \right\} \\
& \times \int d\varphi_b \int d\varphi_a \delta(\varphi_a - kx_a) \int D\varphi \int Dp_\varphi \\
& \times \prod_{i=1}^2 \int d\varphi_{ib} \int d\varphi_{ia} \delta(\varphi_{ia} - k_i x_a) \int D\varphi_i \int Dp_{\varphi_i} \\
& \times \int d\xi_a \int d\xi_b \int Dp_\xi \int D\xi \int_{E_1} D\omega \delta \left(\xi_a + \frac{1}{2} \left(k.(\omega - \theta) \right) \right) \int_{E_2} D\Upsilon \\
& \times \exp \left\{ \begin{array}{c} i \displaystyle\int_0^\lambda d\tau \left[\begin{array}{c} -\frac{i}{2} gp \left(\varepsilon * \omega \right) \xi - \frac{i}{2} gp \left(\varepsilon * \omega \right) \xi \left(b.\varphi_1 + c.\varphi_2 \right) + p_\xi \dot{\xi} \\ +p_\varphi \left(\dot{\varphi} + 2 \left(k.p \right) \right) + p_{\varphi_1} \left(\dot{\varphi}_1 + 2 \left(k_1 p \right) \right) + p_{\varphi_2} \left(\dot{\varphi}_2 + 2 \left(k_2 p \right) \right) \\ -\frac{i}{2} g \left(p.\theta \right) \left(b\varphi_1 + c\varphi_2 \right) \xi - i \left(\Upsilon . \dot{\Upsilon} \right) \end{array} \right] \\ -\frac{1}{2} \left(\omega * \varepsilon * \omega \right) + \left(\Upsilon(\lambda) . \Upsilon(0) \right) \end{array} \right\}_{\theta = \vartheta = 0} .
\end{aligned} \tag{2.73}$$

Dans le but de simplifié les calculs, nous allons arrangé l'écriture de (2.73) par l'introduction d'un changement sur les vitesses ω qui deviennent $\bar{\omega}$:

$$\bar{\omega}(\tau) \quad \longrightarrow \quad \omega(\tau) + ik(\varepsilon^{-1} * p_\xi) + ik_1(\varepsilon^{-1} * p_{\xi_1}) + ik_2(\varepsilon^{-1} * p_{\xi_2}), \tag{2.74}$$

c'est-à-dire

$$(k\bar{\omega}(\tau)) = (k\omega(\tau)), \quad (k_i\bar{\omega}(\tau)) = (k_i\omega(\tau)), \tag{2.75}$$

de plus

$$\bar{\omega} * \varepsilon * \bar{\omega} = \omega * \varepsilon * \omega + 2i\left(p_\xi (k\omega) + p_{\xi_1} (k_1\omega) + p_{\xi_2} (k_2\omega)\right), \tag{2.76}$$

et

$$\varepsilon * \bar{\omega} = \varepsilon * \omega + i (kp_\xi) + i \left(k_1 p_{\xi_1}\right) + i \left(k_2 p_{\xi_2}\right). \tag{2.77}$$

La fonction de Green prend la forme

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_g(x_b, x_a) = {} & \exp\left\{i\left(\gamma.\frac{\delta_L}{\delta\theta}\right)\right\}\exp\left\{i\left(\Gamma.\frac{\delta_L}{\delta\vartheta}\right)\right\}\int_0^\infty d\lambda\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp\left\{ip(x_b - x_a) + i\lambda\left(p^2 - M^2\right)\right\} \\
& \times\int d\varphi_b\int d\varphi_a\delta(\varphi_a - kx_a)\int D\varphi\int Dp_\varphi\prod_{i=1}^{2}\int d\varphi_{ib}\int d\varphi_{ia}\delta(\varphi_{ia} - k_ix_a)\int D\varphi_i\int Dp_{\varphi_i} \\
& \times\int d\xi_a\int d\xi_b\int Dp_\xi\int D\xi\int_{E_1} D\omega\delta\left(\xi_a + \frac{1}{2}(k(\omega-\theta))\right)\int_{E_2} D\Upsilon \\
& \times\exp\left\{\begin{array}{c}
i\displaystyle\int_0^\lambda d\tau\left[\begin{array}{c}
-\frac{i}{2}g\left(p\left(\varepsilon*\omega - i(kp_\xi) - i\left(k_1p_{\xi_1}\right) - i\left(k_2p_{\xi_2}\right)\right)\xi\right) + p_\xi\dot{\xi} \\
-\frac{i}{2}gp\left(\varepsilon*\omega - i(kp_\xi) - i\left(k_1p_{\xi_1}\right) - i\left(k_2p_{\xi_2}\right)\right)\xi\left(b.\varphi_1 + c.\varphi_2\right) \\
+p_\varphi\left(\dot{\varphi} + 2(k.p)\right) + p_{\varphi_1}\left(\dot{\varphi}_1 + 2(k_1p)\right) + p_{\varphi_2}\left(\dot{\varphi}_2 + 2(k_2p)\right) \\
-\frac{i}{2}g(p.\theta)\left(b\varphi_1 + c\varphi_2\right)\xi - i\left(\Upsilon.\dot{\Upsilon}\right)
\end{array}\right] \\
-\frac{1}{2}\left(\omega*\varepsilon*\omega - 2i(k.\omega)p_\xi - 2i(k_1.\omega)p_{\xi_1} - 2i(k_1.\omega)p_{\xi_2}\right) + (\Upsilon(\lambda).\Upsilon(0))
\end{array}\right\}_{\theta=\vartheta=0}.
\end{aligned} \tag{2.78}$$

Il est remarquable de noter au passage que ces changements laisse la mesure inchangeable i.e. $D\bar{\omega} = D\omega$.

A ce moment, il est intéressant de faire une intégration sur les vitesses ω qui possèdent par définition une fonction de Dirac. Donc nous allons d'abord écrire les fonction de Dirac sous forme d'intégrale $\delta(\xi_a + \frac{1}{2}(k(\omega-\theta))) = \int dp_{\xi_a}\exp\left\{ip_{\xi_a}(\xi_a + \frac{1}{2}(k(\omega-\theta)))\right\}$.

Nous avons

$$\tilde{S}_g(x_b,x_a)=\exp\left\{i\left(\gamma\frac{\delta_L}{\delta\theta}\right)\right\}\exp\left\{i\left(\Gamma\frac{\delta_L}{\delta\vartheta}\right)\right\}\int_0^\infty d\lambda\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp\left\{ip(x_b-x_a)+i\lambda\left(p^2-M^2\right)\right\}$$
$$\times\int d\varphi_b\int d\varphi_a\delta(\varphi_a-kx_a)\int D\varphi\int Dp_\varphi\prod_{i=1}^{2}\int d\varphi_{ib}\int d\varphi_{ia}\delta(\varphi_{ia}-k_ix_a)\int D\varphi_i\int Dp_{\varphi_i}$$
$$\times\int d\xi_a\int dp_{\xi_a}\int d\xi_b\int Dp_\xi\int D\xi\int_{E_1}D\omega\int_{E_2}D\Upsilon$$
$$\times\exp\left\{\begin{array}{c} i\int\limits_0^\lambda d\tau\left[\begin{array}{c}-\frac{i}{2}g\left(p\left(\varepsilon*\omega-i\left(kp_\xi\right)-i\left(k_1p_{\xi_1}\right)-i\left(k_2p_{\xi_2}\right)\right)\xi\right)\\ -\frac{i}{2}gp\left(\varepsilon*\omega-i\left(kp_\xi\right)-i\left(k_1p_{\xi_1}\right)-i\left(k_2p_{\xi_2}\right)\right)\xi\left(b.\varphi_1+c.\varphi_2\right)\\ -\frac{i}{2}g\left(p.\theta\right)\left(b\varphi_1+c\varphi_2\right)\xi+p_\varphi\left(\dot{\varphi}+2\left(k.p\right)\right)+p_{\varphi_1}\left(\dot{\varphi}_1+2\left(k_1p\right)\right)\\ +p_{\varphi_2}\left(\dot{\varphi}_2+2\left(k_2p\right)\right)+p_\xi\dot{\xi}+p_{\xi_a}\left(\xi_a+\frac{1}{2}\left(k\left(\omega-\theta\right)\right)\right)-i\left(\Upsilon.\dot{\Upsilon}\right)\end{array}\right]\\ -\frac{1}{2}\left(\omega*\varepsilon*\omega-2i\left(k\omega\right)p_\xi-2i\left(k_1\omega\right)p_{\xi_1}-2i\left(k_1\omega\right)p_{\xi_2}\right)+\left(\Upsilon(\lambda)\Upsilon(0)\right)\end{array}\right\}_{\theta=\vartheta=0},\tag{2.79}$$

où p_{ζ_a} est une variable de Grassmann.

Nous observons que les intégrales sur les ω^μ $(\mu=0,1,2,3)$ ont la forme

$$\int D\omega\exp\left\{\int_0^\lambda\left[-\frac{1}{2}\omega_\mu\varepsilon\omega^\mu+N_\mu\omega^\mu\right]d\tau\right\},\tag{2.80}$$

avec

$$N_\mu\left(\tau\right)=-\frac{ig}{2}\int_0^\lambda p_\mu\xi\left(s\right)\left(1+\left(b\varphi_1+c\varphi_2\right)\right)\varepsilon\left(\tau-s\right)ds+\frac{1}{2}k_\mu p_{\xi_a}.\tag{2.81}$$

Donc, après intégration (2.79) se réduit

$$\tilde{S}_g(x_b,x_a)=\exp\left\{i\left(\gamma\frac{\delta_L}{\delta\theta}\right)\right\}\exp\left\{i\left(\Gamma\frac{\delta_L}{\delta\vartheta}\right)\right\}\int_0^\infty d\lambda\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp\left\{ip(x_b-x_a)+i\lambda\left(p^2-M^2\right)\right\}$$
$$\times\int d\varphi_b\int d\varphi_a\delta(\varphi_a-kx_a)\int D\varphi\int Dp_\varphi\prod_{i=1}^{2}\int d\varphi_{ib}\int d\varphi_{ia}\delta(\varphi_{ia}-k_ix_a)\int D\varphi_i\int Dp_{\varphi_i}$$
$$\times\int d\xi_a\int dp_{\xi_a}\int d\xi_b\int Dp_\xi\int D\xi\int_{E_2}D\Upsilon$$
$$\times\exp\left\{\begin{array}{c} i\int\limits_0^\lambda d\tau\left[\begin{array}{c} p_\varphi\left(\dot{\varphi}+2\left(k.p\right)\right)+p_{\varphi_1}\left(\dot{\varphi}_1+2\left(k_1p\right)\right)+p_{\varphi_2}\left(\dot{\varphi}_2+2\left(k_2p\right)\right)\\ +p_\xi\dot{\xi}+p_{\xi_a}(\xi_a-\frac{1}{2}\left(k.\theta\right))-i\left(\Upsilon.\dot{\Upsilon}\right)\end{array}\right]\\ +\left(\Upsilon(\lambda)\Upsilon(0)\right)\end{array}\right\}_{\theta=\vartheta=0}. \tag{2.82}$$

Notons que nous avons simplifié les calculs, grace aux propriétés (1.11) et (1.13).

L'intégration sur les p_ξ donne $\dot{\xi}=0$, ce qui signifie

$$\xi_a = \xi_b=c^{st}. \tag{2.83}$$

i.e. la variable ξ est constant au bout du temps.

Donc, nous avons

$$\tilde{S}_g(x_b,x_a)=\exp\left\{i\left(\gamma\frac{\delta_L}{\delta\theta}\right)\right\}\exp\left\{i\left(\Gamma\frac{\delta_L}{\delta\vartheta}\right)\right\}\int_0^\infty d\lambda\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp\left\{ip(x_b-x_a)+i\lambda\left(p^2-M^2\right)\right\}$$
$$\times\int d\varphi_b\int d\varphi_a\delta(\varphi_a-kx_a)\int D\varphi\int Dp_\varphi\prod_{i=1}^{2}\int d\varphi_{ib}\int d\varphi_{ia}\delta(\varphi_{ia}-k_ix_a)\int D\varphi_i\int Dp_{\varphi_i}$$
$$\times\int d\xi_a\int dp_{\xi_a}\int D\xi\int_{E_2}D\Upsilon$$
$$\times\exp\left\{\begin{array}{c} i\int\limits_0^\lambda d\tau\left[\begin{array}{c} p_\varphi\left(\dot{\varphi}+2\left(k.p\right)\right)+p_{\varphi_1}\left(\dot{\varphi}_1+2\left(k_1p\right)\right)+p_{\varphi_2}\left(\dot{\varphi}_2+2\left(k_2p\right)\right)\\ +p_{\xi_a}(\xi_a-\frac{1}{2}\left(k.\theta\right))-i\left(\Upsilon.\dot{\Upsilon}\right)\end{array}\right]\\ +\left(\Upsilon(\lambda)\Upsilon(0)\right)\end{array}\right\}_{\theta=\vartheta=0}. \tag{2.84}$$

Faisons une intégration sur les p_{ξ_a}, nous pouvons obtenir un résultat essentiel $\xi_a-\frac{1}{2}\left(k.\theta\right)=0$, ce qui signifie que $\xi_a=\xi_b=\frac{1}{2}\left(k.\theta\right)$.

Dans ce cas, la fonction de Green se simplifié

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_g(x_b,x_a) &= \exp\left\{i\left(\gamma\frac{\delta_L}{\delta\theta}\right)\right\}\exp\left\{i\left(\Gamma\frac{\delta_L}{\delta\vartheta}\right)\right\} \\
&\times\int_0^\infty d\lambda\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp\left\{ip(x_b-x_a)+i\lambda\left(p^2-M^2\right)\right\} \\
&\times\int d\varphi_b\int d\varphi_a\delta(\varphi_a-kx_a)\int D\varphi\int Dp_\varphi \\
&\times\prod_{i=1}^{2}\int d\varphi_{ib}\int d\varphi_{ia}\delta(\varphi_{ia}-k_ix_a)\int D\varphi_i\int Dp_{\varphi_i}\int d\xi_a\int D\xi\int_{E_2}D\Upsilon \\
&\times\exp\left\{\begin{array}{c} i\int\limits_0^\lambda d\tau\left[\begin{array}{c} p_\varphi\left(\dot{\varphi}+2\left(k.p\right)\right)+p_{\varphi_1}\left(\dot{\varphi}_1+2\left(k_1p\right)\right)+p_{\varphi_2}\left(\dot{\varphi}_2+2\left(k_2p\right)\right) \\ -i\left(\Upsilon.\dot{\Upsilon}\right)\end{array}\right] \\ +\left(\Upsilon(\lambda)\Upsilon(0)\right)\end{array}\right\}_{\theta=\vartheta=0}.
\end{aligned}\tag{2.85}$$

L'intégration sur les p_φ et p_{φ_i} $(i=1,2)$, donne encore des fonctions de Dirac

$$\delta\left(\dot{\varphi}+2\left(k.p\right)\right),\qquad\delta(\dot{\varphi}_i+2\left(k_i.p\right)),\tag{2.86}$$

et si nous intégrons sur les variables φ et φ_i, nous pouvons remarquer que la seule contribution essentielle pour la détermination de la fonction de Green est le résultat des équations de trajectoires suivantes

$$\frac{d\varphi}{d\tau}\;=\;-2\left(k.p\right),\qquad\frac{d\varphi_i}{d\tau}=-2\left(k_i.p\right),\tag{2.87}$$

c'est-à-dire

$$\varphi\left(\tau\right)\;=\;-2\left(k.p\right)\tau+c^{te},\qquad\varphi_i\left(\tau\right)=-2\left(k_i.p\right)\tau+c^{te}.\tag{2.88}$$

Maintenant, nous allons introduire les trois représentations d'intégrale de δ (2.37). Puis, faisons le changement inverse du moment p en $p-\left(kp_{\varphi_b}\right)-\left(k_1p_{\varphi_{1b}}\right)-\left(k_2p_{\varphi_{2b}}\right)$. Ensuite, réintroduisons (2.56).

La fonction de Green $\tilde{S}_g(x_b, x_a)$ prend la forme

$$\tilde{S}_g(x_b, x_a) = \exp\left\{i\left(\gamma\frac{\delta_L}{\delta\theta}\right)\right\}\int_0^\infty d\lambda\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp\left\{ip(x_b - x_a) + i\lambda\left(p^2 - M^2\right)\right\}$$
$$\times\exp\left\{\begin{array}{l} i\int\limits_{\varphi_a}^{\varphi_b} d\varphi\,(k.\theta)\left(-\frac{ig}{8(k.p)}(k.p)\left(\frac{d\left(\Gamma_a t_b^a\Gamma_b\right)}{d\varphi}\left(\Gamma_a t_b^a\Gamma_b\right)\right)\right) \\ +\frac{(k.\theta)}{(k.p)}\left(\frac{k^2}{128}\int\limits_{\varphi_a}^{\varphi_b} d\varphi\frac{p^2}{(k.p)}\left(\frac{d\left(\Gamma_a t_b^a\Gamma_b\right)}{d\varphi}\left(\Gamma_a t_b^a\Gamma_b\right)\right)^2\right) \\ +\frac{g^2}{64}\int\limits_{\varphi_{1a}}^{\varphi_{1b}} d\varphi_1\int\limits_{\varphi_{2a}}^{\varphi_{2b}} d\varphi_2\frac{1}{(k.p)}\left(b\varphi_1 + c\varphi_2\right)(k.\theta)\left(\Gamma_a t_b^a\Gamma_b\right) \end{array}\right\}_{\theta=0}. \tag{2.89}$$

A ce niveau, nous allons appliqué sur (2.89) l'opérateur

$$\left[\exp\left(i\left(\gamma\frac{\delta_L}{\delta\theta}\right)\right)I(\theta)\right]_{\theta=0} = I\left(\frac{\partial_L}{\partial\theta}\right)\exp\left(i\left(\gamma\theta\right)\right)|_{\theta=0}, \tag{2.90}$$

avec

$$I(\theta) = \exp\left\{\begin{array}{l} i\int\limits_{\varphi_a}^{\varphi_b} d\varphi\,(k.\theta)\left(-\frac{ig}{8(k.p)}(k.p)\left(\frac{d\left(\Gamma_a t_b^a\Gamma_b\right)}{d\varphi}\left(\Gamma_a t_b^a\Gamma_b\right)\right)\right) \\ +\frac{(k.\theta)}{(k.p)}\left(\frac{k^2}{128}\int\limits_{\varphi_a}^{\varphi_b} d\varphi\frac{p^2}{(k.p)}\left(\frac{d\left(\Gamma_a t_b^a\Gamma_b\right)}{d\varphi}\left(\Gamma_a t_b^a\Gamma_b\right)\right)^2\right) \\ +\frac{g^2}{64}\int\limits_{\varphi_{1a}}^{\varphi_{1b}} d\varphi_1\int\limits_{\varphi_{2a}}^{\varphi_{2b}} d\varphi_2\frac{1}{(k.p)}\left(b\varphi_1 + c\varphi_2\right)(k.\theta)\left(\Gamma_a t_b^a\Gamma_b\right) \end{array}\right\}. \tag{2.91}$$

et

$$\frac{\partial_L^2}{\partial\theta^\alpha\partial\theta^\beta}\theta_\mu\theta_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu = -2i\sigma_{\alpha\beta}, \quad \exp\left(i\left(\gamma\theta\right)\right) = 1 + i\left(\gamma\theta\right) - \frac{1}{2}\theta_\mu\theta_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu + \frac{i}{6}\theta_\mu\theta_\nu\theta_\sigma\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma, \tag{2.92}$$

Nous trouverons

$$\begin{aligned}\tilde{S}_g(x_b, x_a) = &\int_0^\infty d\lambda \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \exp\left\{ip(x_b - x_a) + i\lambda\left(p^2 - M^2\right)\right\} \\ &\times \exp\left\{-\frac{i}{2}\int_{\varphi_a}^{\varphi_b} dt\vec{\sigma}.\left(\frac{d\vec{m}\,(t)}{dt} \times \vec{m}\,(t)\right)\right\} \\ &\times \exp\left\{i\frac{\tau g}{2pk}\int_{\varphi_a}^{\varphi_b} dt\left(p\left[k_{\mu 1}\Omega_1(t) + k_{\mu 2}\Omega_2(t)\right] - \frac{g\tau}{4}\left[k_{\mu 1}\Omega_1(t) + k_{\mu 2}\Omega_2(t)\right]^2\right)\right\} \\ &\times \exp\left\{-i\frac{\tau g}{2}\left(x_b\left[k_{\mu 1}\Omega_1(\varphi_b) + k_{\mu 2}\Omega_2(\varphi_b)\right] - x_a\left[k_{\mu 1}\Omega_1(\varphi_a) + k_{\mu 2}\Omega_2(\varphi_a)\right]\right)\right\} \\ &\times \exp\left\{\frac{\tau g}{4pk}\not{k}\left(\left[\not{k}_{\mu 1}\Omega_1(\varphi_b) + \not{k}_{\mu 2}\Omega_2(\varphi_b)\right] - \left[\not{k}_{\mu 1}\Omega_1(\varphi_a) + \not{k}_{\mu 2}\Omega_2(\varphi_a)\right]\right)\right\}.\end{aligned} \tag{2.93}$$

avec

$$\Omega_1(\varphi) = \int^\varphi dtb\,(t)\ ; \qquad \Omega_2(\varphi) = \int^\varphi dtc\,(t)\,. \tag{2.94}$$

Notons que nous avons adopté la notation de Dirac ($\not{a} = \gamma^\mu a_\mu$).

Maintenant, agissons sur (2.93) par l'opérateur

$$\left(-\hat{\not{p}} + \frac{g}{8}\not{k}\,(b.(k_1.x) + c.(k_2.x))\left(\Gamma_a t_b^a \Gamma_b\right) + \frac{\not{k}}{32g}\left(\left(\Gamma_a t_b^a \Gamma_b\right)'\left(\Gamma_a t_b^a \Gamma_b\right)\right) + M\right)\Big|_b\,, \tag{2.95}$$

nous allons trouvé

$$\begin{aligned}\tilde{S}_g(x_b, x_a) = &\int_0^\infty d\lambda \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \exp\left\{ip(x_b - x_a) + i\lambda\left(p^2 - M^2\right)\right\}(-\not{p} + M) \\ &\times \exp\left\{-\frac{i}{2}\int_{kx_a}^{kx_b} dt\vec{\sigma}.\left(\frac{d\vec{m}\,(t)}{dt} \times \vec{m}\,(t)\right)\right\} \\ &\times \exp\left\{i\frac{\tau g}{2pk}\int_{kx_a}^{kx_b} dt\left(p\left[k_{\mu 1}\Omega_1(t) + k_{\mu 2}\Omega_2(t)\right] - \frac{g\tau}{4}\left[k_{\mu 1}\Omega_1(t) + k_{\mu 2}\Omega_2(t)\right]^2\right)\right\} \\ &\times \exp\left\{-i\frac{\tau g}{2}\left(x_b\left[k_{\mu 1}\Omega_1(kx_b) + k_{\mu 2}\Omega_2(kx_b)\right] - x_a\left[k_{\mu 1}\Omega_1(kx_a) + k_{\mu 2}\Omega_2(kx_a)\right]\right)\right\} \\ &\times \exp\left\{\frac{\tau g}{4pk}\not{k}\left(\left[\not{k}_{\mu 1}\Omega_1(kx_b) + \not{k}_{\mu 2}\Omega_2(kx_b)\right] - \left[\not{k}_{\mu 1}\Omega_1(kx_a) + \not{k}_{\mu 2}\Omega_2(kx_a)\right]\right)\right\}.\end{aligned} \tag{2.96}$$

Après intégration sur λ, (2.96) se réduit à

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_g(x_b,x_a) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4p}{p^2-M^2+i0}\exp\{ip(x_b-x_a)\}\left(-\not{p}+M\right) \\
&\times \exp\left\{-\frac{i}{2}\int_{kx_a}^{kx_b} dt\vec{\sigma}.\left(\frac{d\vec{m}(t)}{dt}\times\vec{m}(t)\right)\right\} \\
&\times \exp\left\{i\frac{\tau g}{2pk}\int_{kx_a}^{kx_b} dt\left(p\left[k_{\mu 1}\Omega_1(t)+k_{\mu 2}\Omega_2(t)\right]-\frac{g\tau}{4}\left[k_{\mu 1}\Omega_1(t)+k_{\mu 2}\Omega_2(t)\right]^2\right)\right\} \\
&\times \exp\left\{-i\frac{\tau g}{2}\left(x_b\left[k_{\mu 1}\Omega_1(kx_b)+k_{\mu 2}\Omega_2(kx_b)\right]-x_a\left[k_{\mu 1}\Omega_1(kx_a)+k_{\mu 2}\Omega_2(kx_a)\right]\right)\right\} \\
&\times \exp\left\{\frac{\tau g}{4pk}\not{k}\left(\left[\not{k}_{\mu 1}\Omega_1(kx_b)+\not{k}_{\mu 2}\Omega_2(kx_b)\right]-\left[\not{k}_{\mu 1}\Omega_1(kx_a)+\not{k}_{\mu 2}\Omega_2(kx_a)\right]\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{2.97}$$

Remarquons que cette forme de $\tilde{S}_g(x_b,x_a)$, n'est pas symétrique par rapport à la position initiale x_a et finale x_b. Pour rendre (2.97) symétrique, nous allons utilisé la propriété

$$\begin{aligned}
&\exp\left\{\frac{\tau g}{4pk}\not{k}\left(\left[\not{k}_{\mu 1}\Omega_1(kx_b)+\not{k}_{\mu 2}\Omega_2(kx_b)\right]-\left[\not{k}_{\mu 1}\Omega_1(kx_a)+\not{k}_{\mu 2}\Omega_2(kx_a)\right]\right)\right\} \\
= &\ 1+\frac{\tau g}{4pk}\not{k}\left(\left[\not{k}_{\mu 1}\Omega_1(kx_b)+\not{k}_{\mu 2}\Omega_2(kx_b)\right]-\left[\not{k}_{\mu 1}\Omega_1(kx_a)+\not{k}_{\mu 2}\Omega_2(kx_a)\right]\right) \\
= &\left(1+\frac{\tau g}{4pk}\not{k}\left[\not{k}_{\mu 1}\Omega_1(kx_b)+\not{k}_{\mu 2}\Omega_2(kx_b)\right]\right)\left(1-\frac{\tau g}{4pk}\not{k}\left[\not{k}_{\mu 1}\Omega_1(kx_a)+\not{k}_{\mu 2}\Omega_2(kx_a)\right]\right),
\end{aligned} \tag{2.98}$$

et à l'aide de (3.60), la fonction de Green $\tilde{S}(x_b,x_a)$ d'une particule de Dirac en mouvement dans un champ non-Abélien est la suivante :

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_g(x_b,x_a) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4p}{p^2-M^2+i0}\exp\{ip(x_b-x_a)\}\exp\left\{-\frac{i}{2}\int_{kx_a}^{kx_b} dt\vec{\sigma}.\left(\frac{d\vec{m}(t)}{dt}\times\vec{m}(t)\right)\right\} \\
&\times\left(1+\frac{\tau g}{4pk}\not{k}\left[\not{k}_{\mu 1}\Omega_1(kx_b)+\not{k}_{\mu 2}\Omega_2(kx_b)\right]\right)\left(-\not{p}+M\right) \\
&\times\left(1-\frac{\tau g}{4pk}\not{k}\left[\not{k}_{\mu 1}\Omega_1(kx_a)+\not{k}_{\mu 2}\Omega_2(kx_a)\right]\right) \\
&\times \exp\left\{i\frac{\tau g}{2pk}\int_{kx_a}^{kx_b} dt\left(p\left[k_{\mu 1}\Omega_1(t)+k_{\mu 2}\Omega_2(t)\right]-\frac{g\tau}{4}\left[k_{\mu 1}\Omega_1(t)+k_{\mu 2}\Omega_2(t)\right]^2\right)\right\} \\
&\times \exp\left\{-i\frac{\tau g}{2}\left(x_b\left[k_{\mu 1}\Omega_1(kx_b)+k_{\mu 2}\Omega_2(kx_b)\right]-x_a\left[k_{\mu 1}\Omega_1(kx_a)+k_{\mu 2}\Omega_2(kx_a)\right]\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{2.99}$$

2.2.4 Détermination des fonctions d'ondes

Utilisons la théorème de résidus pour les deux pôles

$$p^0_{\pm} = \pm\omega - i0^+ = \pm(\mathbf{p}^2 + M^2)^{-\frac{1}{2}} - i0^+, \tag{2.100}$$

nous obtenons le noyau

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_g(x_b, x_a) = -i\theta(t_a - t_b) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\frac{M}{p^0}\right) \exp\{ip(x_b - x_a)\} \\
\times \exp\left\{-\frac{i}{2}\int_{kx_a}^{kx_b} dt\vec{\sigma}.\left(\frac{d\vec{m}(t)}{dt} \times \vec{m}(t)\right)\right\} \\
\times \left(1 + \frac{\tau g}{4pk}\not{k}\left[\not{\gamma}_{\mu1}\Omega_1(kx_b) + \not{\gamma}_{\mu2}\Omega_2(kx_b)\right]\right)\frac{\not{p}+M}{2M}\left(1 - \frac{\tau g}{4pk}\not{k}\left[\not{\gamma}_{\mu1}\Omega_1(kx_a) + \not{\gamma}_{\mu2}\Omega_2(kx_a)\right]\right) \\
\times \exp\left\{i\frac{\tau g}{2pk}\int_{kx_a}^{kx_b} dt\left(p\left[k_{\mu1}\Omega_1(t) + k_{\mu2}\Omega_2(t)\right] - \frac{g\tau}{4}\left[k_{\mu1}\Omega_1(t) + k_{\mu2}\Omega_2(t)\right]^2\right)\right\} \\
\times \exp\left\{-i\frac{\tau g}{2}\left(x_b\left[k_{\mu1}\Omega_1(kx_b) + k_{\mu2}\Omega_2(kx_b)\right] - x_a\left[k_{\mu1}\Omega_1(kx_a) + k_{\mu2}\Omega_2(kx_a)\right]\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{2.101}$$

L'introduction des opérateurs de projection sur les états d'énergies positives et négatives

$$\Lambda_+ = \sum_{\pm s} u(p,s)\bar{u}(p,s) = \frac{\not{p}+M}{2M}, \quad \Lambda_- = \sum_{\pm s} v(p,s)\bar{v}(p,s) = \frac{-\not{p}+M}{2M}, \tag{2.102}$$

et par l'identification avec la décomposition spectrale [69]

$$\tilde{S}_g(x_b, x_a) = -i\theta(t_b - t_a)\int d^3p \sum_{\pm s} \Psi^+_{s,p}(x_b)\bar{\Psi}^+_{s,p}(x_a) + i\theta(t_b - t_a)\int d^3p \sum_{\pm s} \Psi^-_{s,p}(x_b)\bar{\Psi}^-_{s,p}(x_a), \tag{2.103}$$

les fonctions d'ondes normalisées de la particule et l'anti-particule respectivement, dans un champ non-Abélien sont données

$$\begin{aligned}
\Psi^{+}_{s,p}(x) = {} & \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{M}{p^{0}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\tau g}{4pk}\not{k}\left[\not{k}_{\mu 1}\Omega_{1}\left(kx_{b}\right)+\not{k}_{\mu 2}\Omega_{2}\left(kx_{b}\right)\right]\right)u(p,s) \\
& \times \exp\left\{-i\frac{\tau g}{2}x_{b}\left[k_{\mu 1}\Omega_{1}\left(kx_{b}\right)+k_{\mu 2}\Omega_{2}\left(kx_{b}\right)\right]\right\} \\
& \times \exp\left\{\begin{array}{c} ipx-\frac{i}{2}\int_{kx_{a}}^{kx_{b}}dt\vec{\sigma}.\left(\frac{d\vec{m}(t)}{dt}\times\vec{m}\left(t\right)\right) \\ +\frac{i\tau g}{2pk}\int_{kx_{a}}^{kx_{b}}dt\left(p\left[k_{\mu 1}\Omega_{1}\left(t\right)+k_{\mu 2}\Omega_{2}\left(t\right)\right]-\frac{g\tau}{4}\left[k_{\mu 1}\Omega_{1}\left(t\right)+k_{\mu 2}\Omega_{2}\left(t\right)\right]^{2}\right)\end{array}\right\},
\end{aligned} \tag{2.104}$$

et

$$\begin{aligned}
\Psi^{-}_{s,p}(x) = {} & \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{M}{p^{0}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\tau g}{4pk}\not{k}\left[\not{k}_{\mu 1}\Omega_{1}\left(kx_{a}\right)+\not{k}_{\mu 2}\Omega_{2}\left(kx_{a}\right)\right]\right)v(p,s) \\
& \times \exp\left\{i\frac{\tau g}{2}x_{a}\left[k_{\mu 1}\Omega_{1}\left(kx_{a}\right)+k_{\mu 2}\Omega_{2}\left(kx_{a}\right)\right]\right\} \\
& \times \exp\left\{\begin{array}{c} -ipx-\frac{i}{2}\int_{kx_{a}}^{kx_{b}}dt\vec{\sigma}.\left(\frac{d\vec{m}(t)}{dt}\times\vec{m}\left(t\right)\right) \\ +\frac{i\tau g}{2pk}\int_{kx_{a}}^{kx_{b}}dt\left(p\left[k_{\mu 1}\Omega_{1}\left(t\right)+k_{\mu 2}\Omega_{2}\left(t\right)\right]-\frac{g\tau}{4}\left[k_{\mu 1}\Omega_{1}\left(t\right)+k_{\mu 2}\Omega_{2}\left(t\right)\right]^{2}\right)\end{array}\right\},
\end{aligned} \tag{2.105}$$

où les spineurs $u(p,s)$ et $v(p,s)$ sont solution de l'équation de Dirac libre avec

$$\bar{u}(p,s)u(p,s) = 1 \qquad , \qquad \bar{v}(p,s)v(p,s) = -1. \tag{2.106}$$

2.2.5 Conclusion

Dans cette partie, nous avons traiter par la méthode des intégrales de chemins (approche dite globale), un problème des particules de Dirac soumise à l'action d'un potentiel non-Abélien du groupe $SU(2)$ de $(3+1)$ dimensions. Nous avons montré la puissance de la méthode des intégrales de chemins à résoudre des problèmes concrets, par le calcul de la fonction de Green à l'aide d'un action qui a une forme simple, donc notre problème a trouvé sa solution de manière simple en utilisant une voie directe.

Notons que nous avons montré à la fin de cette thèse que les fonctions δ de Dirac qui apparaissent au bout des calculs ont exactement le même argument que les équations du mécanique classique (voir Annexe 2).

2.3 Propagateur de Dirac : projection locale

2.3.1 Introduction

Derrière cette partie, nous proposons de déterminer la fonction de Green pour des particules de Dirac de masse M, en interaction avec un champ non-Abélien A_{μ}^{a} du groupe $SU(2)$ donné par les deux équations (1.8) et (1.9).

Pour ce là, nous allons utilisé la description des intégrale de chemins pour le noyau de Fradkin-Gitman. Nous montrons qu'à l'aide de quelques propriétés de ce champ, la fonction de Green pour une particule spinorielle peut être obtenue analytiquement.

Concernant le point de vue de littérature, nous pouvons voir qu'il existe peut de travail qui examine le problème de Dirac analytiquement avec solution exacte. Nous pouvons cité, par exemple les cas simple du champ constant [11], l'onde plane [56, 57], les champs électromagnétiques croisés [58, 59], et la combinaison entre un champ électromagnétique homogène constant avec le champ d'une onde plane [60, 61].

Par le formalisme des intégrales de chemins, nous pouvons cité [51, 52, 62, 63], où les interactions ont une forme classique.

Pour le cas non-Abélien, en exception du formalise donné par Gitman dans ce livre [53] où, nous avons utilisé dans cette partie, il n'existe aucun calcul explicite du propagateur par le formalisme des intégrales de chemins.

Notons que ce problème fait l'objet de Obukhov [48] où il a calculé les fonctions de Green pour des particules de Dirac (spin $\frac{1}{2}$), en solutionnant l'équation de Yang-Mills.

Nous traitons aussi, dans cette partie le cas des particules de Dirac par une approche dite locale.

2.3.2 Construction de la fonction de Green $\tilde{S}_l(x_b, x_a)$

Nous proposons de calculer la fonction de Green pour des particules de Dirac en mouvement dans un champ non-Abélien A_μ^a de forme (1.8) et (1.9) où, nous utilisons l'approche des intégrales de chemins. La fonction de Green S_l que nous proposons de déterminer par l'approche locale est solution de l'équation [48]

$$\begin{pmatrix} -(\gamma\hat{p}) + \frac{g}{8}(\gamma k)\left(b.(k_1.x) + c.(k_2.x)\right)\left(\Gamma_a t_b^a \Gamma_b\right) \\ +\frac{1}{32g}(\gamma k)\left(\frac{d\left(\Gamma_a t_b^a \Gamma_b\right)}{d(k.x)}\left(\Gamma_a t_b^a \Gamma_b\right)\right) - M \end{pmatrix} S_l(x_b, x_a) = \delta^4(x_b, x_a), \tag{2.107}$$

où γ^μ sont les matrices de Dirac qui obéissent les relations : $[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_- = 2g^{\mu\nu}$; $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$.

Par ordre, pour déterminer la fonction de Green, nous suivrons la méthode [51]. Nous introduisons des identités et des variables qui dépends des caractéristiques du champ non-Abélien et d'autres sont reliés au spin respectivement.

D'abord, nous savons que le noyau

$$S_l(x_b, x_a) \quad = \quad < x_b \mid \hat{S}_l \mid x_a >, \tag{2.108}$$

est un élément de matrice de l'opérateur $\hat{S}_l$, solution de l'équation symbolique

$$\begin{pmatrix} -(\gamma\hat{p}) + \frac{g}{8}(\gamma k)\left(b.(k_1.x) + c.(k_2.x)\right)\left(\Gamma_a t_b^a \Gamma_b\right) \\ +\frac{1}{32g}(\gamma k)\left(\frac{d\left(\Gamma_a t_b^a \Gamma_b\right)}{d(k.x)}\left(\Gamma_a t_b^a \Gamma_b\right)\right) - M \end{pmatrix} \hat{S}_l \quad = \quad I, \tag{2.109}$$

ou bien

$$\hat{S}_l \quad = \quad \frac{I}{\begin{pmatrix} -(\tilde{\gamma}\hat{p}) + \frac{g}{8}(\tilde{\gamma} k)\left(b.(k_1.x) + c.(k_2.x)\right)\left(\Gamma_a t_b^a \Gamma_b\right) \\ +\frac{(\tilde{\gamma} k)}{32g}\left(\frac{d\left(\Gamma_a t_b^a \Gamma_b\right)}{d(k.x)}\left(\Gamma_a t_b^a \Gamma_b\right)\right) - M\gamma^5 \end{pmatrix}}\gamma^5 = \tilde{S}_l\gamma^5. \tag{2.110}$$

γ^5 est introduit pour la raison d'homogénéité ; $\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$; $\left(\gamma^5\right)^2 = -1$.

Donc, nous pouvons écrire $\hat{S}_l$ sous forme exponentielle

$$\tilde{S}_l = \int_0^\infty d\lambda \int d\chi \exp\left(-i\lambda \hat{H}_l(\chi, \hat{p}, \hat{x})\right), \tag{2.111}$$

où les paramètres λ et χ représentent respectivement les variables bosoniques et fermioniques [53], où χ vérifie les propriétés

$$\chi^2 = 0; \quad \int d\chi = 0; \quad \int \chi d\chi = 1, \tag{2.112}$$

avec

$$\begin{aligned}\hat{H}_l(\chi, \hat{p}, \hat{x}) = p^2 - M^2 - ig(k.\sigma.k)&\left(\left(\frac{1}{32g}\left(\Gamma_a t_b^a \Gamma_b\right)'\left(\Gamma_a t_b^a \Gamma_b\right)\right) + \left\{(b.(k_1.x) + c.(k_2.x))\left(\frac{1}{8}\Gamma_a t_b^a \Gamma_b\right)\right\}'\right)\\ &- \frac{1}{16}\left(\left(\sigma\left(\left(\Gamma_a t_b^a \Gamma_b\right)'\left(\Gamma_a t_b^a \Gamma_b\right)\right)\right)(\hat{p}.k) + (b.(k_1.x) + c.(k_2.x))\left(\sigma\left(\frac{1}{4}\Gamma_a t_b^a \Gamma_b\right)\right)(\hat{p}.k)\right)\\ &+ \chi\left(-(\tilde{\gamma}\hat{p}) + \frac{g}{8}(\tilde{\gamma}k)(b.(k_1.x) + c.(k_2.x))\left(\Gamma_a t_b^a \Gamma_b\right) + \frac{(\tilde{\gamma}k)}{32g}\left(\left(\Gamma_a t_b^a \Gamma_b\right)'\left(\Gamma_a t_b^a \Gamma_b\right)\right) - M\gamma^5\right).\end{aligned} \tag{2.113}$$

Notons que le prime signifie la dérivation par rapport au produit $(k.x)$.

Dans l'espace de configuration, nous avons [11]

$$\tilde{S}_l(x_b, x_a) = \int_0^\infty d\lambda \int d\chi < x_b \mid \exp\left(-i\lambda H_l(\chi, \hat{p}, \hat{x})\right) \mid x_a > . \tag{2.114}$$

Maintenant, passons au formulation des intégrales de chemins. Par ordre, pour construire la fonction de Green :

D'abord, nous subdivisons l'intervalle $[x_a, x_b]$ à N petits intervalles égaux de longueur $\triangle\tau = \frac{1}{N}$.

Puis, nous insérons les projecteurs

$$\int d^4x \mid x\rangle\langle x \mid = 1; \quad \int d^4p \mid p\rangle\langle p \mid = 1; \quad \langle x \mid p\rangle = \frac{1}{(2\pi)^4} \exp(ipx). \tag{2.115}$$

Ensuite, nous éliminons les opérateurs par l'utilisation des relations

$$\hat{x}^{\mu} \mid x\rangle = x^{\mu} \mid x\rangle; \qquad \hat{p}^{\mu} \mid p\rangle = p^{\mu} \mid p\rangle. \tag{2.116}$$

Donc, nous pouvons écrire la fonction de Green on choisissons la prescription de mid-point

$$\tilde{S}_l(x_b, x_a) = iT_1T_2 \int_0^{\infty} d\lambda \int Dx \int Dp \exp\left\{ i\int_0^{\lambda} d\tau \left[p\dot{x} + (p^2 - M^2)\right]\right\}$$
$$\times \exp\left\{ i\int_0^{\lambda} d\tau \left[\begin{array}{c} -\frac{1}{16}(\hat{p}.k)\left(\sigma\left(\left(\Gamma_a t_b^a \Gamma_b\right)'\left(\Gamma_a t_b^a \Gamma_b\right)\right)\right) \\ -\frac{1}{16}(\hat{p}.k)\left(b.(k_1.x) + c.(k_2.x)\right)\left(\sigma\left(\frac{1}{4}\Gamma_a t_b^a \Gamma_b\right)\right) \\ -ig\,(k.\sigma.k)\left(\frac{1}{32g}\left(\Gamma_a t_b^a \Gamma_b\right)'\left(\Gamma_a t_b^a \Gamma_b\right)\right) \\ -ig\,(k.\sigma.k)\left\{\left(b.(k_1.x) + c.(k_2.x)\right)\left(\frac{1}{8}\Gamma_a t_b^a \Gamma_b\right)\right\}' \\ +\chi\left(\begin{array}{c} -(\tilde{\gamma}\hat{p}) + \frac{g}{8}(\tilde{\gamma}k)\left(b.(k_1.x) + c.(k_2.x)\right)\left(\Gamma_a t_b^a \Gamma_b\right) \\ +\frac{(\tilde{\gamma}k)}{32g}\left(\left(\Gamma_a t_b^a \Gamma_b\right)'\left(\Gamma_a t_b^a \Gamma_b\right)\right) - M\gamma^5 \end{array}\right) \end{array}\right]\right\}, \tag{2.117}$$

où, le produit T_1T_2 est introduit à cause de la présence des matrices γ et les opérateurs Γ qui ne commutent pas. Pour éliminer le produit T_1T_2 nous insérons (2.55) et (2.56).

Donc, nous allons obtenir

$$\tilde{S}_l(x_b, x_a) = \exp\left\{i\left(\gamma\frac{\delta_L}{\delta\theta}\right)\right\}\exp\left\{i\left(\Gamma\frac{\delta_L}{\delta\vartheta}\right)\right\}\int_0^{\infty} d\lambda \int d\chi \int Dx \int Dp \int_{E_1} D\Psi \int_{E_2} D\Upsilon$$
$$\times \exp\left\{ i\int_0^{\lambda} d\tau \left(\begin{array}{c} p\dot{x} + p^2 - M^2 - i\frac{g}{4}\left(b.(k_1.x) + c.(k_2.x)\right)\left(t_\beta^\alpha \Upsilon_\alpha \Upsilon_\beta\right)(p.\Psi)(k.\Psi) \\ +\chi\left(\begin{array}{c} -(p.\Psi) + \frac{i}{32}(k.\Psi)\left(\Psi\left(t_\beta^\alpha \Upsilon'_\alpha \Upsilon_\beta\right)\right) \\ +i\frac{g}{8}(k.\Psi)\left(b.(k_1.x) + c.(k_2.x)\right)\left(t_\beta^\alpha \Upsilon_\alpha \Upsilon_\beta\right) - M\Psi^5 \end{array}\right) \\ -\frac{i}{16}\left(t_\beta^\alpha \Upsilon'_\alpha \Upsilon_\beta\right)(p.\Psi)(k.\Psi) - i\left(\Psi.\dot{\Psi}\right) - i\left(\Upsilon.\dot{\Upsilon}\right) \end{array}\right) \\ + (\Psi(\lambda)\Psi(0)) + (\Upsilon(\lambda)\Upsilon(0)) \right\}_{\theta=\vartheta=0}, \tag{2.118}$$

qui est la fonction de Green à calculer par la méthode des intégrales de chemins.

Avant de passer aux intégrations, notons que l'action dépend des produits $(k.x)$ et $(k_i.x)$; $(i = 1, 2)$. Donc, nous allons posé $\varphi = (k.x)$, $\varphi_i = (k_i.x)$, puis nous allons joué φ et φ_i un rôle indépendant des variables $(k.x)$ et $(k_i.x)$ respectivement.

2.3.3 Calcul de la fonction de Green $\tilde{S}_l(x_b, x_a)$

Introduisons les trois identités (2.23) [50, 51, 52], Nous obtenons

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_l(x_b,x_a) &= \exp\left\{i\left(\gamma\frac{\delta_L}{\delta\theta}\right)\right\}\exp\left\{i\left(\Gamma\frac{\delta_L}{\delta\vartheta}\right)\right\}\exp\left\{i\int_0^\lambda d\tau\left[p\dot{x}+(p^2-M^2)\right]\right\} \\
&\times\int_0^\infty d\lambda\int d\chi\int Dx\int Dp\int_{E_1}D\Psi\int_{E_2}D\Upsilon\int d\varphi_b\int d\varphi_a\delta(\varphi_a-kx_a) \\
&\times\int D\varphi\int Dp_\varphi\prod_{i=1}^{2}\int d\varphi_{ib}\int d\varphi_{ia}\delta(\varphi_{ia}-k_ix_a)\int D\varphi_i\int Dp_{\varphi_i} \\
&\times\exp\left\{\begin{array}{c} i\int_0^\lambda d\tau\left(\begin{array}{c} -i\frac{g}{32}(p.\Psi)(k.\Psi)\left(t_b^a\Upsilon_a'\Upsilon_b\right)+\left(p_\varphi\dot{\varphi}\right)+\left(p_{\varphi_1}\dot{\varphi}_1\right)+\left(p_{\varphi_2}\dot{\varphi}_2\right) \\ -\left(\left(kp_\varphi\right)+\left(k_1p_{\varphi_1}\right)+\left(k_2p_{\varphi_2}\right)\right)\dot{x} \\ -\chi\left(\begin{array}{c}(p.\Psi)-\frac{ig}{2}(k.\Psi)\left(\Psi\left(t_b^a\Upsilon_a'\Upsilon_b\right)\right) \\ -i\frac{g}{2}(k.\Psi)\left(b\varphi_1+c\varphi_2\right)\left(t_b^a\Upsilon_a\Upsilon_b\right)+M\Psi^5\end{array}\right) \\ -ig(p.\Psi)(k.\Psi)\left(b\varphi_1+c\varphi_2\right)\left(t_b^a\Upsilon_a\Upsilon_b\right)-i\left(\Psi.\dot{\Psi}\right)-i\left(\Upsilon.\dot{\Upsilon}\right)\end{array}\right) \\ +(\Psi(\lambda)\Psi(0))+(\Upsilon(\lambda)\Upsilon(0))\end{array}\right\}_{\theta=\vartheta=0},
\end{aligned} \tag{2.119}$$

où la prime maintenant, exprime la dérivation par rapport à φ.

Faisons un changement sur p par l'introduction de

$$p^2 = P^2+2p_\varphi(k.p)+2p_{\varphi_1}(k_1p)+2p_{\varphi_2}(k_2p). \tag{2.120}$$

où la mesure dp reste inchangeable i.e.

$$dp = dP. \tag{2.121}$$

Donc, nous avons

$$\tilde{S}_l(x_b,x_a) = \exp\left\{i\left(\gamma\frac{\delta_L}{\delta\theta}\right)\right\}\exp\left\{i\left(\Gamma\frac{\delta_L}{\delta\vartheta}\right)\right\}\exp\left\{i\int_0^\lambda d\tau\left[p\dot{x}+(p^2-M^2)\right]\right\}$$
$$\times\int_0^\infty d\lambda\int d\chi\int Dx\int Dp\int_{E_1} D\Psi\int_{E_2} D\Upsilon$$
$$\times\int d\varphi_b\int d\varphi_a\delta(\varphi_a-kx_a)\int D\varphi\int Dp_\varphi\prod_{i=1}^{2}\int d\varphi_{ib}\int d\varphi_{ia}\delta(\varphi_{ia}-k_ix_a)\int D\varphi_i\int Dp_{\varphi_i}$$
$$\times\exp\left\{i\int_0^\lambda d\tau\left(\begin{array}{c} -i\frac{g}{32}(p.\Psi)(k.\Psi)\left(t^a_b\Upsilon'_a\Upsilon_b\right) \\ +p_\varphi(\dot{\varphi}+2(k.p))+p_{\varphi_1}\left(\dot{\varphi}_1+2(k_1p)\right)+p_{\varphi_2}\left(\dot{\varphi}_2+2(k_2p)\right) \\ -ig(p.\Psi)(k.\Psi)\left(b\varphi_1+c\varphi_2\right)\left(t^a_b\Upsilon_a\Upsilon_b\right) \\ -\chi\left(\begin{array}{c}(p.\Psi)-\frac{ig}{2}(k.\Psi)\left(\Psi\left(t^a_b\Upsilon'_a\Upsilon_b\right)\right) \\ -i\frac{g}{2}(k.\Psi)\left(b\varphi_1+c\varphi_2\right)\left(t^a_b\Upsilon_a\Upsilon_b\right)+M\Psi^5\end{array}\right) \\ -i\left(\Psi.\dot{\Psi}\right)-i\left(\Upsilon.\dot{\Upsilon}\right)\end{array}\right) \\ +(\Psi(\lambda)\Psi(0))+(\Upsilon(\lambda)\Upsilon(0))\right\}_{\theta=\vartheta=0}, \tag{2.122}$$

avec

$$b = b(\varphi), \quad c = c(\varphi). \tag{2.123}$$

Intégrons par partie le premier terme dans l'action, puis intégrons sur tous les chemins $x(\tau)$, nous obtenons une fonction de Dirac $\delta(\dot{p})$. Après, nous intégrons successivement sur tous les chemins p_n, l'intégrale $\int Dp$ est réduit à un simple intégrale $\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$

$$\int Dp \;\rightarrow\; \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}, \tag{2.124}$$

nous déduisons que le moment des particules est constant durant le mouvement.

Nous avons

$$
\begin{aligned}
\tilde{S}_l(x_b, x_a) = {} & \exp\left\{ i\left(\gamma\frac{\delta_L}{\delta\theta}\right)\right\} \exp\left\{ i\left(\Gamma\frac{\delta_L}{\delta\vartheta}\right)\right\} \int_0^\infty d\lambda \int d\chi \\
& \times \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp\left\{ ip(x_b - x_a) + i\lambda\left(p^2 - M^2\right)\right\} \int_{E_1} D\Psi \int_{E_2} D\Upsilon \\
& \times \int d\varphi_b \int d\varphi_a \delta(\varphi_a - kx_a) \int D\varphi \int Dp_\varphi \times \prod_{i=1}^{2} \int d\varphi_{ib} \int d\varphi_{ia} \delta(\varphi_{ia} - k_i x_a) \int D\varphi_i \int Dp_{\varphi_i} \\
& \times \exp\left\{ \begin{array}{c} i\int\limits_0^\lambda d\tau \left[\begin{array}{c} -i\frac{g}{32}(p.\Psi)(k.\Psi)\left(t_b^a \Upsilon'_a \Upsilon_b\right) \\ +p_\varphi\left(\dot{\varphi} + 2(k.p)\right) + p_{\varphi_1}\left(\dot{\varphi}_1 + 2(k_1 p)\right) + p_{\varphi_2}\left(\dot{\varphi}_2 + 2(k_2 p)\right) \\ -ig(p.\Psi)(k.\Psi)\left(b\varphi_1 + c\varphi_2\right)\left(t_b^a \Upsilon_a \Upsilon_b\right) \\ -\chi\left(\begin{array}{c} (p.\Psi) - \frac{ig}{2}(k.\Psi)\left(\Psi\left(t_b^a \Upsilon'_a \Upsilon_b\right)\right) \\ -i\frac{g}{2}(k.\Psi)\left(b\varphi_1 + c\varphi_2\right)\left(t_b^a \Upsilon_a \Upsilon_b\right) + M\Psi^5 \end{array}\right) \\ -i\left(\Psi.\dot{\Psi}\right) - i\left(\Upsilon.\dot{\Upsilon}\right) \end{array}\right] \\ +\left(\Psi(\lambda)\Psi(0)\right) + \left(\Upsilon(\lambda)\Upsilon(0)\right) \end{array}\right\}_{\theta=\vartheta=0} .
\end{aligned}
\tag{2.125}
$$

Comme nous avons fait déjà pour l'approche globale, nous allons posé

$$
\xi_a = (k.\Psi_a), \tag{2.126}
$$

puis, nous allons inséré dans (2.125) l'identité qui caractérise l'interaction spin-champ [50]

$$
\begin{aligned}
1 = {} & \int d\xi_a d\xi_b \delta(\xi_a - (k.\Psi_a)) \int Dp_\xi \int D\xi \\
& \times \exp\left\{ i\int\limits_0^\lambda p_\xi(\dot{\xi} - \left(k.\dot{\Psi}\right))d\tau \right\}.
\end{aligned}
\tag{2.127}
$$

Par la suite la fonction de Green prend la forme

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_l(x_b, x_a) &= \exp\left\{i\left(\gamma\frac{\delta_L}{\delta\theta}\right)\right\}\exp\left\{i\left(\Gamma\frac{\delta_L}{\delta\vartheta}\right)\right\}\int_0^\infty d\lambda\int d\chi \\
&\times\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp\left\{ip(x_b - x_a) + i\lambda\left(p^2 - M^2\right)\right\}\int_{E_1} D\Psi\int_{E_2} D\Upsilon \\
&\times\int d\varphi_b\int d\varphi_a\delta(\varphi_a - kx_a)\int D\varphi\int Dp_\varphi\prod_{i=1}^{2}\int d\varphi_{ib}\int d\varphi_{ia}\delta(\varphi_{ia} - k_ix_a) \\
&\times\int D\varphi_i\int Dp_{\varphi_i}\int d\xi_a d\xi_b\delta(\xi_a - (k\Psi_a))\int D\xi\int Dp_\xi \\
&\times\exp\left\{\begin{array}{c} i\int\limits_0^\lambda d\tau\left[\begin{array}{c} -i\frac{g}{32}(p.\Psi)(k.\Psi)\left(t_b^a\Upsilon'_a\Upsilon_b\right) \\ +p_\varphi\left(\dot{\varphi} + 2(k.p)\right) + p_{\varphi_1}\left(\dot{\varphi}_1 + 2(k_1p)\right) + p_{\varphi_2}\left(\dot{\varphi}_2 + 2(k_2p)\right) \\ -ig(p.\Psi)(k.\Psi)\left(b\varphi_1 + c\varphi_2\right)\left(t_b^a\Upsilon_a\Upsilon_b\right) \\ -\chi\left(\begin{array}{c} (p.\Psi) - \frac{ig}{2}(k.\Psi)\left(\Psi.\left(t_b^a\Upsilon'_a\Upsilon_b\right)\right) \\ -i\frac{g}{2}(k.\Psi)\left(b\varphi_1 + c\varphi_2\right)\left(t_b^a\Upsilon_a\Upsilon_b\right) + M\Psi^5 \end{array}\right) \\ +p_\xi(\dot{\xi} - (k.\Psi)) - i\left(\Psi.\dot{\Psi}\right) - i\left(\Upsilon.\dot{\Upsilon}\right) \end{array}\right] \\ +\left(\Psi(\lambda)\Psi(0)\right) + \left(\Upsilon(\lambda)\Upsilon(0)\right) \end{array}\right\}_{\theta=\vartheta=0}.
\end{aligned} \tag{2.128}$$

Passons maintenant, aux intégrations sur les vitesses ω.

D'abord, il est préférable de remplacer les intégrales sur les Ψ par des intégrales sur les ω. Nous allons utilisé ((2.68), (2.69) et (2.72)), comme nous avons fait déjà dans le cas de Dirac (projection globale).

La fonction de Green devient

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_l(x_b,x_a) = {} & \exp\left\{i\left(\gamma\frac{\delta_L}{\delta\theta}\right)\right\}\exp\left\{i\left(\Gamma\frac{\delta_L}{\delta\vartheta}\right)\right\}\int_0^\infty d\lambda\int d\chi \\
& \times\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp\left\{ip(x_b-x_a)+i\lambda\left(p^2-M^2\right)\right\}\int_{E_2}D\Upsilon \\
& \times\int d\varphi_b\int d\varphi_a\delta(\varphi_a-kx_a)\int D\varphi\int Dp_\varphi\prod_{i=1}^{2}\int d\varphi_{ib}\int d\varphi_{ia}\delta(\varphi_{ia}-k_ix_a)\int D\varphi_i\int Dp_{\varphi_i} \\
& \times\int d\xi_a\int d\xi_b\int Dp_\xi\int D\xi\int_{E_1}D\omega\delta\left(\xi_a+\frac{1}{2}\left(k(\omega-\theta)\right)\right) \\
& \times\exp\left\{\begin{array}{c} i\int\limits_0^\lambda d\tau\left[\begin{array}{c}
-\frac{i}{2}gp\left(\varepsilon*\omega\right)\xi-\frac{i}{2}gp\left(\varepsilon*\omega\right)\xi\left(b\varphi_1+c\varphi_2\right) \\
+p_\varphi\left(\dot{\varphi}+2\left(k.p\right)\right)+p_{\varphi_1}\left(\dot{\varphi}_1+2\left(k_1p\right)\right)+p_{\varphi_2}\left(\dot{\varphi}_2+2\left(k_2p\right)\right) \\
+\chi\left(\begin{array}{c}
-\frac{1}{2}p\left(\varepsilon*\omega\right)-\frac{1}{2}\left(p.\theta\right)+\frac{i}{4}g\left(\varepsilon*\omega\right)\left(t_b^a\Upsilon'_a\Upsilon_b\right) \\
+\frac{i}{4}g\left(\varepsilon*\omega\right)\xi\left(b\varphi_1+c\varphi_2\right) \\
+\frac{i}{4}g\left(\theta\xi\right)\left(b\varphi_1+c\varphi_2\right)\left(t_b^a\Upsilon_a\Upsilon_b\right)-\frac{M}{2}\left(\varepsilon*\omega^5+\theta^5\right)
\end{array}\right) \\
-\frac{i}{2}g\left(p.\theta\right)\left(b\varphi_1+c\varphi_2\right)\xi+p_\xi\dot{\xi}-i\left(\Upsilon.\dot{\Upsilon}\right)
\end{array}\right] \\
-\frac{1}{2}\left(\omega*\varepsilon*\omega\right)+\left(\Upsilon(\lambda)\Upsilon(0)\right)
\end{array}\right\}_{\theta=\vartheta=0}.
\end{aligned} \tag{2.129}$$

Ensuite, remplaçons les vitesses ω dans (2.129) par $\bar{\omega}$ comme nous avons fait déjà dans le cas de Dirac (projection globale) :

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}(\tau) & \longrightarrow \omega(\tau)+ik(\varepsilon^{-1}*p_\xi)+ik_1(\varepsilon^{-1}*p_{\xi_1})+ik_2(\varepsilon^{-1}*p_{\xi_2}); \\
(\ k\bar{\omega}(\tau)) & = (k\omega(\tau)),\quad (k_i\bar{\omega}(\tau))=(k_i\omega(\tau));\quad (i=1,2)
\end{aligned} \tag{2.130}$$

et

$$\bar{\omega}*\varepsilon*\bar{\omega} = \omega*\varepsilon*\omega+2i\left(p_\xi\left(k\omega\right)+p_{\xi_1}\left(k_1\omega\right)+p_{\xi_2}\left(k_2\omega\right)\right), \tag{2.131}$$

de plus

$$\varepsilon*\bar{\omega} = \varepsilon*\omega+i\left(kp_\xi\right)+i\left(k_1p_{\xi_1}\right)+i\left(k_2p_{\xi_2}\right). \tag{2.132}$$

La fonction de Green prend la forme

$$
\begin{aligned}
\tilde{S}_l(x_b, x_a) &= \exp\left\{i\left(\gamma\frac{\delta_L}{\delta\theta}\right)\right\}\exp\left\{i\left(\Gamma\frac{\delta_L}{\delta\vartheta}\right)\right\}\int_0^\infty d\lambda\int d\chi \\
&\times\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp\left\{ip(x_b - x_a) + i\lambda\left(p^2 - M^2\right)\right\}\int_{E_2} D\Upsilon \\
&\times\int d\varphi_b\int d\varphi_a\delta(\varphi_a - kx_a)\int D\varphi\int Dp_\varphi\prod_{i=1}^{2}\int d\varphi_{ib}\int d\varphi_{ia}\delta(\varphi_{ia} - k_ix_a)\int D\varphi_i\int Dp_{\varphi_i} \\
&\times\int d\xi_a\int d\xi_b\int Dp_\xi\int D\xi\int_{E_1} D\omega\delta\left(\xi_a + \frac{1}{2}\left(k(\omega-\theta)\right)\right) \\
&\times\exp\left\{\begin{array}{c}
i\int\limits_0^\lambda d\tau\left[\begin{array}{c}
-\frac{i}{2}g\left(p\left(\varepsilon*\omega - i\left(kp_\xi\right) - i\left(k_1p_{\xi_1}\right) - i\left(k_2p_{\xi_2}\right)\right)\xi\right) \\
-\frac{i}{2}gp\left(\varepsilon*\omega - i\left(kp_\xi\right) - i\left(k_1p_{\xi_1}\right) - i\left(k_2p_{\xi_2}\right)\right)\xi\left(b\varphi_1 + c\varphi_2\right) \\
+p_\varphi\left(\dot{\varphi} + 2\left(k.p\right)\right) + p_{\varphi_1}\left(\dot{\varphi}_1 + 2\left(k_1p\right)\right) + p_{\varphi_2}\left(\dot{\varphi}_2 + 2\left(k_2p\right)\right) \\
+\chi\left(\begin{array}{c}
-\frac{1}{2}p\left(\varepsilon*\omega - i\left(kp_\xi\right) - i\left(k_1p_{\xi_1}\right) - i\left(k_2p_{\xi_2}\right)\right) \\
+\frac{i}{4}g\left[\begin{array}{c}\varepsilon*\omega - i\left(kp_\xi\right) \\ -i\left(k_1p_{\xi_1}\right) - i\left(k_2p_{\xi_2}\right)\end{array}\right]\left(t_b^a\Upsilon_a'\Upsilon_b\right) \\
+\frac{i}{4}g\left[\begin{array}{c}\varepsilon*\omega - i\left(kp_\xi\right) \\ -i\left(k_1p_{\xi_1}\right) - i\left(k_2p_{\xi_2}\right)\end{array}\right]\xi\left(b\varphi_1 + c\varphi_2\right) \\
-\frac{1}{2}\left(p.\theta\right) + \frac{i}{4}g\left(\theta\xi\right)\left(b\varphi_1 + c\varphi_2\right)\left(t_b^a\Upsilon_a\Upsilon_b\right) \\
-\frac{M}{2}\left(\varepsilon*\omega^5 + \theta^5\right)
\end{array}\right) \\
-\frac{i}{2}g\left(p.\theta\right)\left(b\varphi_1 + c\varphi_2\right)\xi + p_\xi\dot{\xi} - i\left(\Upsilon.\dot{\Upsilon}\right)
\end{array}\right] \\
-\frac{1}{2}\left(\omega*\varepsilon*\omega - 2i\left(k\omega\right)p_\xi - 2i\left(k_1\omega\right)p_{\xi_1} - 2i\left(k_1\omega\right)p_{\xi_2}\right) + \left(\Upsilon(\lambda)\Upsilon(0)\right)
\end{array}\right\}_{\theta=\vartheta=0}.
\end{aligned}
\tag{2.133}
$$

Remarquons que nous avons les variables ω dans la fonction δ de Dirac. Donc, nous allons écrire les fonction de Dirac sous forme d'intégrale

$$
\delta(\xi_a + \frac{1}{2}\left(k(\omega-\theta)\right)) = \int dp_{\xi_a}\exp\left\{ip_{\xi_a}(\xi_a + \frac{1}{2}\left(k(\omega-\theta)\right))\right\},
\tag{2.134}
$$

puis, nous allons inséré cette intégrale dans (2.133).

Nous avons

$$\tilde{S}_l(x_b,x_a)=\exp\left\{i\left(\gamma\frac{\delta_L}{\delta\theta}\right)\right\}\exp\left\{i\left(\Gamma\frac{\delta_L}{\delta\vartheta}\right)\right\}\int_0^\infty d\lambda\int d\chi$$
$$\times\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp\left\{ip(x_b-x_a)+i\lambda\left(p^2-M^2\right)\right\}\int_{E_2}D\Upsilon$$
$$\times\int d\varphi_b\int d\varphi_a\delta(\varphi_a-kx_a)\int D\varphi\int Dp_\varphi\prod_{i=1}^{2}\int d\varphi_{ib}\int d\varphi_{ia}\delta(\varphi_{ia}-k_ix_a)\int D\varphi_i\int Dp_{\varphi_i}$$
$$\times\int d\xi_a\int dp_{\xi_a}\int d\xi_b\int Dp_\xi\int D\xi\int_{E_1}D\omega\delta\left(\xi_a+\frac{1}{2}\left(k(\omega-\theta)\right)\right)$$
$$\times\exp\left\{\begin{array}{c} i\int\limits_0^\lambda d\tau\left[\begin{array}{c}-\frac{i}{2}g\left(p\left(\varepsilon*\omega-i\left(kp_\xi\right)-i\left(k_1p_{\xi_1}\right)-i\left(k_2p_{\xi_2}\right)\right)\xi\right)\\ -\frac{i}{2}gp\left(\varepsilon*\omega-i\left(kp_\xi\right)-i\left(k_1p_{\xi_1}\right)-i\left(k_2p_{\xi_2}\right)\right)\xi\left(b\varphi_1+c\varphi_2\right)\\ +p_\varphi\left(\dot{\varphi}+2\left(k.p\right)\right)+p_{\varphi_1}\left(\dot{\varphi}_1+2\left(k_1p\right)\right)+p_{\varphi_2}\left(\dot{\varphi}_2+2\left(k_2p\right)\right)\\ +\chi\left(\begin{array}{c}-\frac{1}{2}p\left[\varepsilon*\omega-i\left(kp_\xi\right)-i\left(k_1p_{\xi_1}\right)-i\left(k_2p_{\xi_2}\right)\right]\\ +\frac{i}{4}g\left[\begin{array}{c}\varepsilon*\omega-i\left(kp_\xi\right)\\ -i\left(k_1p_{\xi_1}\right)-i\left(k_2p_{\xi_2}\right)\end{array}\right]\left(t_b^a\Upsilon'_a\Upsilon_b\right)\\ +\frac{i}{4}g\left[\begin{array}{c}\varepsilon*\omega-i\left(kp_\xi\right)\\ -i\left(k_1p_{\xi_1}\right)-i\left(k_2p_{\xi_2}\right)\end{array}\right]\xi\left(b\varphi_1+c\varphi_2\right)\\ -\frac{1}{2}\left(p.\theta\right)+\frac{i}{4}g\left(\theta\xi\right)\left(b\varphi_1+c\varphi_2\right)\left(t_b^a\Upsilon_a\Upsilon_b\right)\\ -\frac{M}{2}\left(\varepsilon*\omega^5+\theta^5\right)\end{array}\right)\\ -\frac{i}{2}g\left(p.\theta\right)\left(b\varphi_1+c\varphi_2\right)\xi+p_\xi\dot{\xi}+p_{\xi_a}\left(\xi_a+\frac{1}{2}\left(k\left(\omega-\theta\right)\right)\right)\\ -i\left(\Upsilon.\dot{\Upsilon}\right)\end{array}\right]\\ -\frac{1}{2}\left(\omega*\varepsilon*\omega-2i\left(k\omega\right)p_\xi-2i\left(k_1\omega\right)p_{\xi_1}-2i\left(k_1\omega\right)p_{\xi_2}\right)+\left(\Upsilon(\lambda)\Upsilon(0)\right)\end{array}\right\}_{\theta=\vartheta=0}. \tag{2.135}$$

Maintenant, nous intégrons d'abord, sur la variable ω^5, nous avons le résultat simple suivant

$$\int D\omega^5\exp\left\{-\frac{1}{2}\omega_5*\varepsilon*\omega^5-\frac{iM}{2}\varepsilon*\omega^5\chi\right\}\;=\;1. \tag{2.136}$$

Ensuite, nous voyons que les intégrales sur les ω^{μ} $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ ont la forme

$$\int D\omega \exp\left\{\int_0^{\lambda}\left[-\frac{1}{2}\omega_{\mu}\varepsilon\omega^{\mu} + L_{\mu}\omega^{\mu}\right]d\tau\right\}, \tag{2.137}$$

avec

$$\begin{aligned}L_{\mu}(\tau) = & -\frac{ig}{2}\int_0^{\lambda} p_{\mu}\xi(s)\left(1 + \left(b\varphi_{1} + c\varphi_{2}\right)\right)\varepsilon(\tau - s)\,ds \\ & + \chi\int_0^{\lambda}\left(-\frac{1}{2}p_{\mu} + \frac{i}{4}gk_{\mu}\left(\left(t^{a}_{b}\Upsilon'_{a}\Upsilon_{b}\right) + \xi(s)\left(b\varphi_{1} + c\varphi_{2}\right)\right)\right)\varepsilon(\tau - s)\,ds + \frac{1}{2}k_{\mu}p_{\xi_a}.\end{aligned} \tag{2.138}$$

Aprés intégration, (2.135) se réduit à

$$\begin{aligned}\tilde{S}_l(x_b, x_a) = & \exp\left\{i\left(\gamma\frac{\delta_L}{\delta\theta}\right)\right\}\exp\left\{i\left(\Gamma\frac{\delta_L}{\delta\vartheta}\right)\right\}\int_0^{\infty}d\lambda\int d\chi\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp\left\{ip(x_b - x_a) + i\lambda\left(p^2 - M^2\right)\right\} \\ & \times\int d\varphi_{b}\int d\varphi_{a}\delta(\varphi_{a} - kx_{a})\int D\varphi\int Dp_{\varphi}\prod_{i=1}^{2}\int d\varphi_{ib}\int d\varphi_{ia}\delta(\varphi_{ia} - k_{i}x_{a})\int D\varphi_{i}\int Dp_{\varphi_i} \\ & \times\int d\xi_{a}\int dp_{\xi_a}\int d\xi_{b}\int Dp_{\xi}\int D\xi\int_{E_2}D\Upsilon \\ & \times\exp\left\{\begin{array}{c} i\int\limits_0^{\lambda}d\tau\left[\begin{array}{c} p_{\varphi}\left(\dot{\varphi} + 2\left(k.p\right)\right) + p_{\varphi_1}\left(\dot{\varphi}_{1} + 2\left(k_{1}p\right)\right) + p_{\varphi_2}\left(\dot{\varphi}_{2} + 2\left(k_{2}p\right)\right) \\ +\chi\left(\begin{array}{c} -\frac{1}{2}(p.\theta) + \frac{i}{4}g\left(t^{a}_{b}\Upsilon'_{a}\Upsilon_{b}\right) + \frac{i}{4}g\xi\left(b\varphi_{1} + c\varphi_{2}\right) \\ + \frac{i}{4}g\left(\theta\xi\right)\left(b\varphi_{1} + c\varphi_{2}\right)\left(t^{a}_{b}\Upsilon_{a}\Upsilon_{b}\right) - \frac{M}{2}\theta^5\end{array}\right) \\ +p_{\xi}\dot{\xi} + p_{\xi_a}(\xi_{a} - \frac{1}{2}(k.\theta)) - i\left(\Upsilon.\dot{\Upsilon}\right)\end{array}\right] \\ +\left(\Upsilon(\lambda)\Upsilon(0)\right)\end{array}\right\}_{\theta=\vartheta=0}.\end{aligned} \tag{2.139}$$

Notons que nous avons simplifié les calculs, grace aux propriétés (1.11) et (1.13).

L'intégration sur p_{ξ} donne

$$\dot{\xi} = 0 \rightarrow \xi_{a} = \xi_{b} = c^{st}. \tag{2.140}$$

Par la suite, nous avons

$$\begin{array}{l}\tilde{S}_l(x_b,x_a)=\exp\left\{i\left(\gamma\dfrac{\delta_L}{\delta\theta}\right)\right\}\exp\left\{i\left(\Gamma\dfrac{\delta_L}{\delta\vartheta}\right)\right\}\displaystyle\int_0^\infty d\lambda\int d\chi\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp\left\{ip(x_b-x_a)+i\lambda\left(p^2-M^2\right)\right\}\\ \qquad\times\displaystyle\int d\varphi_b\int d\varphi_a\delta(\varphi_a-kx_a)\int D\varphi\int Dp_\varphi\\ \qquad\times\displaystyle\prod_{i=1}^{2}\int d\varphi_{ib}\int d\varphi_{ia}\delta(\varphi_{ia}-k_ix_a)\int D\varphi_i\int Dp_{\varphi_i}\int d\xi_a\int dp_{\xi_a}\int D\xi\int_{E_2}D\Upsilon\\ \qquad\times\exp\left\{\begin{array}{c} i\displaystyle\int_0^\lambda d\tau\left[\begin{array}{c}p_\varphi\left(\dot\varphi+2\left(k.p\right)\right)+p_{\varphi_1}\left(\dot\varphi_1+2\left(k_1p\right)\right)+p_{\varphi_2}\left(\dot\varphi_2+2\left(k_2p\right)\right)\\ +\chi\left(\begin{array}{c}-\frac{1}{2}\left(p.\theta\right)+\frac{i}{4}g\left(t_b^a\Upsilon'_a\Upsilon_b\right)+\frac{i}{4}g\xi\left(b\varphi_1+c\varphi_2\right)\\ +\frac{i}{4}g\left(\theta\xi\right)\left(b\varphi_1+c\varphi_2\right)\left(t_b^a\Upsilon_a\Upsilon_b\right)-\frac{M}{2}\theta^5\end{array}\right)\\ +p_{\xi_a}(\xi_a-\frac{1}{2}\left(k.\theta\right))-i\left(\Upsilon.\dot\Upsilon\right)\end{array}\right]\\ +\left(\Upsilon(\lambda)\Upsilon(0)\right)\end{array}\right\}_{\theta=\vartheta=0}.\end{array}\tag{2.141}$$

Intégrons sur p_{ξ_a}, nous pouvons avoir le résultat essentiel suivant

$$\xi_a-\frac{1}{2}\left(k.\theta\right)\ =\ 0\ \rightarrow\ \xi_a=\xi_b=\frac{1}{2}\left(k.\theta\right).\tag{2.142}$$

Donc la fonction de Green prend la forme simple suivante

$$\begin{array}{l}\tilde{S}_l(x_b,x_a)=\exp\left\{i\left(\gamma\dfrac{\delta_L}{\delta\theta}\right)\right\}\exp\left\{i\left(\Gamma\dfrac{\delta_L}{\delta\vartheta}\right)\right\}\displaystyle\int_0^\infty d\lambda\int d\chi\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp\left\{ip(x_b-x_a)+i\lambda\left(p^2-M^2\right)\right\}\\ \qquad\times\displaystyle\int d\varphi_b\int d\varphi_a\delta(\varphi_a-kx_a)\int D\varphi\int Dp_\varphi\\ \qquad\times\displaystyle\prod_{i=1}^{2}\int d\varphi_{ib}\int d\varphi_{ia}\delta(\varphi_{ia}-k_ix_a)\int D\varphi_i\int Dp_{\varphi_i}\int d\xi_a\int D\xi\int_{E_2}D\Upsilon\\ \qquad\times\exp\left\{\begin{array}{c} i\displaystyle\int_0^\lambda d\tau\left[\begin{array}{c}p_\varphi\left(\dot\varphi+2\left(k.p\right)\right)+p_{\varphi_1}\left(\dot\varphi_1+2\left(k_1p\right)\right)+p_{\varphi_2}\left(\dot\varphi_2+2\left(k_2p\right)\right)\\ +\chi\left(\begin{array}{c}-\frac{1}{2}\left(p.\theta\right)+\frac{i}{4}g\left(t_b^a\Upsilon'_a\Upsilon_b\right)+\frac{i}{4}g\xi\left(b\varphi_1+c\varphi_2\right)\\ +\frac{i}{4}g\left(\theta\xi\right)\left(b\varphi_1+c\varphi_2\right)\left(t_b^a\Upsilon_a\Upsilon_b\right)-\frac{M}{2}\theta^5\end{array}\right)\\ -i\left(\Upsilon.\dot\Upsilon\right)\end{array}\right]\\ +\left(\Upsilon(\lambda)\Upsilon(0)\right)\end{array}\right\}_{\theta=\vartheta=0}.\end{array}\tag{2.143}$$

Faisons les intégrations sur les p_{φ} et p_{φ_i} $(i = 1, 2)$, nous obtenons des fonctions δ de Dirac

$$\delta\left(\dot{\varphi} + 2\left(k.p\right)\right) \qquad , \qquad \delta(\dot{\varphi}_i + 2\left(k_i.p\right), \tag{2.144}$$

et si nous faisons une intégration sur les variables φ, φ_i, nous pouvons voir que la seule contribution pour déterminer la fonction de Green est le résultat des équations de trajectoires

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = -2\left(k.p\right), \tag{2.145}$$

et

$$\frac{d\varphi_i}{d\tau} = -2\left(k_i.p\right). \tag{2.146}$$

Ce qui nous permet d'écrire les équations de mouvement suivants

$$\varphi\left(\tau\right) = -2\left(k.p\right)\tau + c^{te}, \tag{2.147}$$

et

$$\varphi_i\left(\tau\right) = -2\left(k_i.p\right)\tau + c^{te}. \tag{2.148}$$

Maintenant, introduisons les trois représentations d'intégrale de la fonction δ (2.37). Puis, faisons le changement inverse du moment

$$p \rightarrow p - \left(kp_{\varphi_b}\right) - \left(k_1 p_{\varphi_{1b}}\right) - \left(k_2 p_{\varphi_{2b}}\right). \tag{2.149}$$

Ensuite, réintroduisons (2.56). La fonction de Green $\tilde{S}(x_b, x_a)$ prend la forme

$$\tilde{S}_l(x_b,x_a) = \exp\left\{i\left(\gamma\frac{\delta_L}{\delta\theta}\right)\right\}\int_0^\infty d\lambda\int d\chi\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp\left\{ip(x_b-x_a)+i\lambda\left(p^2-M^2\right)\right\}$$
$$\times\exp\left\{\begin{array}{c}\frac{g}{8(k.p)}\int_{\varphi_a}^{\varphi_b}d\varphi\,(k.\theta)\,(k.p)\left(\frac{d\left(\Gamma_a t_b^a\Gamma_b\right)}{d\varphi}\left(\Gamma_a t_b^a\Gamma_b\right)\right)\\+\frac{k^2}{128}\frac{(k.\theta)}{(k.p)}\int_{\varphi_a}^{\varphi_b}d\varphi\frac{p^2}{(k.p)}\left(\frac{d\left(\Gamma_a t_b^a\Gamma_b\right)}{d\varphi}\left(\Gamma_a t_b^a\Gamma_b\right)\right)^2\\+\frac{g^2}{64}\int_{\varphi_{1a}}^{\varphi_{1b}}d\varphi_1\int_{\varphi_{2a}}^{\varphi_{2b}}d\varphi_2\frac{1}{(k.p)}\left(b\varphi_1+c\varphi_2\right)(k.\theta)\left(\Gamma_a t_b^a\Gamma_b\right)\end{array}\right\}_{\theta=0}$$
$$\times\exp\left\{\chi\left(\begin{array}{c}-\frac{i}{2}\left((p.\theta)+M\theta^5\right)-\frac{i}{4(k.p)^2}\int_{\varphi_a}^{\varphi_b}d\varphi\,(k.\theta)\,\frac{p^2}{\left(1-\frac{1}{2}\chi\right)}\\+\frac{g}{16}\int_{\varphi_a}^{\varphi_b}d\varphi\,(k.\theta)\left(\frac{d\left(\Gamma_a t_b^a\Gamma_b\right)}{d\varphi}\left(\Gamma_a t_b^a\Gamma_b\right)\right)\\+\frac{ig}{16}\frac{(k.\theta)}{(k.p)}\int_{\varphi_a}^{\varphi_b}d\varphi\frac{p^2}{(k.p)}\left(\frac{d\left(\Gamma_a t_b^a\Gamma_b\right)}{d\varphi}\left(\Gamma_a t_b^a\Gamma_b\right)\right)\\+\frac{g}{64}\frac{(k.\theta)}{(k.p)}\int_{\varphi_a}^{\varphi_b}d\varphi\frac{1}{(k.p)}\left(\frac{d\left(\Gamma_a t_b^a\Gamma_b\right)}{d\varphi}\left(\Gamma_a t_b^a\Gamma_b\right)\right)^2\end{array}\right)\right\}_{\theta=0}. \tag{2.150}$$

A ce niveau nous pouvons intégrer sur la variable χ [53]. Grâce aux propriétés

$$\chi^2 = 0; \qquad \int d\chi = 0, \tag{2.151}$$

et

$$\int \chi d\chi = 1, \tag{2.152}$$

nous pouvons obtenir le résultat suivant

$$\tilde{S}_l(x_b,x_a)=\exp\left\{i\left(\gamma\frac{\delta_L}{\delta\theta}\right)\right\}\int_0^{\infty}d\lambda\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp\left\{ip(x_b-x_a)+i\lambda\left(p^2-M^2\right)\right\}\left(\frac{1}{2}\left((p.\theta)+M\theta^5\right)\right)$$
$$\times\exp\left\{\begin{array}{c}-\frac{g}{16}\int\limits_{\varphi_a}^{\varphi_b}d\varphi\frac{(k.\theta)}{(k.p)}\left((k.p)+i\frac{p^2}{(k.p)}+\frac{g}{8}(k.p)\right)\left(\frac{d\left(\Gamma_a t_b^a\Gamma_b\right)}{d\varphi}\left(\Gamma_a t_b^a\Gamma_b\right)\right)\\+\frac{(k.\theta)}{(k.p)}\int\limits_{\varphi_a}^{\varphi_b}d\varphi\left(\frac{1}{128}(k.p)-\frac{g}{64(k.p)}\right)\left(\frac{d\left(\Gamma_a t_b^a\Gamma_b\right)}{d\varphi}\left(\Gamma_a t_b^a\Gamma_b\right)\right)^2\\+\frac{g^2}{64}\int\limits_{\varphi_{1a}}^{\varphi_{1b}}d\varphi_1\int\limits_{\varphi_{2a}}^{\varphi_{2b}}d\varphi_2\frac{1}{(k.p)}\left(b\varphi_1+c\varphi_2\right)(k.\theta)\left(\Gamma_a t_b^a\Gamma_b\right)\end{array}\right\}_{\theta=0}. \tag{2.153}$$

Par l'application de l'opérateur

$$\left[\exp\left(i\left(\gamma\frac{\delta_L}{\delta\theta}\right)\right)f(\theta)\right]_{\theta=0}\quad=\quad f\left(\frac{\partial_L}{\partial\theta}\right)\exp\left(i\left(\gamma\theta\right)\right)|_{\theta=0}, \tag{2.154}$$

avec

$$f(\theta)\quad=\quad\frac{1}{2}\left((p.\theta)+M\theta^5\right)\exp\left\{\begin{array}{c}-\frac{g}{16}\int\limits_{\varphi_a}^{\varphi_b}d\varphi\frac{(k.\theta)}{(k.p)}\left((k.p)+i\frac{p^2}{(k.p)}+\frac{g}{8}(k.p)\right)\left(\frac{d\left(\Gamma_a t_b^a\Gamma_b\right)}{d\varphi}\left(\Gamma_a t_b^a\Gamma_b\right)\right)\\+\frac{(k.\theta)}{(k.p)}\int\limits_{\varphi_a}^{\varphi_b}d\varphi\left(\frac{1}{128}(k.p)-\frac{g}{64(k.p)}\right)\left(\frac{d\left(\Gamma_a t_b^a\Gamma_b\right)}{d\varphi}\left(\Gamma_a t_b^a\Gamma_b\right)\right)^2\\+\frac{g^2}{64}\int\limits_{\varphi_{1a}}^{\varphi_{1b}}d\varphi_1\int\limits_{\varphi_{2a}}^{\varphi_{2b}}d\varphi_2\frac{1}{(k.p)}\left(b\varphi_1+c\varphi_2\right)(k.\theta)\left(\Gamma_a t_b^a\Gamma_b\right),\end{array}\right\}, \tag{2.155}$$

et

$$\frac{\partial_L^2}{\partial\theta^\alpha\partial\theta^\beta}\theta_\mu\theta_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu=-2i\sigma_{\alpha\beta},\quad\exp\left(i\left(\gamma\theta\right)\right)=1+i\left(\gamma\theta\right)-\frac{1}{2}\theta_\mu\theta_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu+\frac{i}{6}\theta_\mu\theta_\nu\theta_\sigma\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma+\theta_0\theta_1\theta_2\theta_3\gamma^5, \tag{2.156}$$

sur (2.153), nous déduisons

$$\tilde{S}_l(x_b, x_a) = \int_0^\infty d\lambda \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp\left\{ip(x_b - x_a) + i\lambda\left(p^2 - M^2\right)\right\}$$
$$\times \exp\left\{\frac{i}{(k.p)}\left(\frac{g}{64}\frac{(p\sigma k)}{(k.p)}\int_{\varphi_a}^{\varphi_b} d\varphi\left(b\frac{k_1}{k} + c\frac{k_2}{k}\right)\varphi\frac{dm(\varphi)}{d\varphi}\right)\right\}. \tag{2.157}$$

Maintenant, agissons sur (2.157) par l'opérateur

$$\left(-\hat{\not p} + \frac{g}{8}\not k\,(b.(k_1.x) + c.(k_2.x))\left(\Gamma_a t_b^a \Gamma_b\right) + \frac{\not k}{32g}\left(\left(\Gamma_a t_b^a \Gamma_b\right)'\left(\Gamma_a t_b^a \Gamma_b\right)\right) + M\gamma^5\right)|_b\,, \tag{2.158}$$

puis, enlevons γ^5. Nous allons trouvé

$$\tilde{S}_l(x_b, x_a) = \int_0^\infty d\lambda \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp\left\{ip(x_b - x_a) + i\lambda\left(p^2 - M^2\right)\right\}(-\not p + M)$$
$$\times \exp\left\{\frac{i}{(k.p)}\left(\frac{g}{64}\frac{(p\sigma k)}{(k.p)}\int_{kx_a}^{kx_b} dt\left(b\frac{k_1}{k} + c\frac{k_2}{k}\right)t\frac{dm(t)}{dt}\right)\right\}. \tag{2.159}$$

Après intégration sur λ, (2.159) se réduit à

$$\tilde{S}_l(x_b, x_a) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4p}{p^2 - M^2 + iO} \exp\left\{ip(x_b - x_a)\right\}(-\not p + M)$$
$$\times \exp\left\{\frac{i}{(k.p)}\left(\frac{g}{64}\frac{(p\sigma k)}{(k.p)}\int_{kx_a}^{kx_b} dt\left(b\frac{k_1}{k} + c\frac{k_2}{k}\right)t\frac{dm(t)}{dt}\right)\right\}. \tag{2.160}$$

Maintenant, intégrons par partie le terme en exposant, la fonction de Green $\tilde{S}_l(x_b, x_a)$ prend la forme

$$
\begin{aligned}
\tilde{S}_l(x_b,x_a) = {}& \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4p}{p^2-M^2+i0^+}\exp\{ip(x_b-x_a)\}(-\not{p}+M)\\
&\times \exp\left\{\frac{ig}{64\,(k.p)^2}(p\sigma k)\left(\frac{k_1}{k}b(kx_b)+\frac{k_2}{k}c(kx_b)\right)(kx_b)\,m(kx_b)\right\}\\
&\times \exp\left\{-\frac{ig}{64\,(k.p)^2}(p\sigma k)\left(\frac{k_1}{k}b(kx_a)+\frac{k_2}{k}c(kx_a)\right)(kx_a)\,m(kx_a)\right\}\\
&\times \exp\left\{-\frac{ig}{64\,(k.p)^2}(p\sigma k)\int_{kx_a}^{kx_b}dt\left(\frac{k_1}{k}\left(b(t)+tb'(t)\right)+\frac{k_2}{k}\left(c(t)+tc'(t)\right)\right)m(t)\right\},
\end{aligned}
\tag{2.161}
$$

où la prime désigne la dérivation par rapport à t.

A l'aide des propriétés (1.13). Puis, par l'utilisation de (2.98) nous pouvons arrangé l'écriture de (2.161). Donc, nous pouvons déduire la forme finale de la fonction de Green $\tilde{S}_l(x_b,x_a)$ dans la représentation locale, pour des particules de Dirac en interaction avec un champ non-Abélien

$$
\begin{aligned}
\tilde{S}_l(x_b,x_a) = {}& \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4p}{p^2-M^2+i0}\exp\{ip(x_b-x_a)\}\exp\left\{-\frac{i}{2}\int_{kx_a}^{kx_b}dt\vec{\sigma}.\left(\frac{d\vec{m}\,(t)}{dt}\times\vec{m}\,(t)\right)\right\}\\
&\times\left(1+\frac{\tau g}{4pk}\not{k}\left[\not{k}_{\mu1}\Omega_1\,(kx_b)+\not{k}_{\mu2}\Omega_2\,(kx_b)\right]\right)\\
&\times(-\not{p}+M)\left(1-\frac{\tau g}{4pk}\not{k}\left[\not{k}_{\mu1}\Omega_1\,(kx_a)+\not{k}_{\mu2}\Omega_2\,(kx_a)\right]\right)\\
&\times\exp\left\{i\frac{\tau g}{2pk}\int_{kx_a}^{kx_b}dt\left(p\left[k_{\mu1}\Omega_1\,(t)+k_{\mu2}\Omega_2\,(t)\right]-\frac{g\tau}{4}\left[k_{\mu1}\Omega_1\,(t)+k_{\mu2}\Omega_2\,(t)\right]^2\right)\right\}\\
&\times\exp\left\{-i\frac{\tau g}{2}\left(x_b\left[k_{\mu1}\Omega_1\,(kx_b)+k_{\mu2}\Omega_2\,(kx_b)\right]-x_a\left[k_{\mu1}\Omega_1\,(kx_a)+k_{\mu2}\Omega_2\,(kx_a)\right]\right)\right\},
\end{aligned}
\tag{2.162}
$$

avec

$$
\Omega_1\,(kx) = \int^{kx}dtb\,(t)\ ;\qquad \Omega_2\,(kx)=\int^{kx}dtc\,(t)\,,
\tag{2.163}
$$

où nous avons adopté la notation de Dirac ($\not{a}=\gamma^{\mu}a_{\mu}$).

Remarquons que $\tilde{S}_l(x_b, x_a)$ donné par (2.162) est symétrique par rapport aux deux positions initiale x_a et finale x_b respectivement.

2.3.4 Détermination des fonctions d'ondes

Utilisons la théorème de résidus pour les deux pôles (2.100), nous obtenons le noyau

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_l(x_b, x_a) = & -i\theta(t_a - t_b) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\frac{M}{p^0}\right) \exp\{ip(x_b - x_a)\} \\
& \times \exp\left\{-\frac{i}{2}\int_{kx_a}^{kx_b} dt\vec{\sigma}.\left(\frac{d\vec{m}(t)}{dt} \times \vec{m}(t)\right)\right\} \\
& \times \left(1 + \frac{\tau g}{4pk}\not{k}\left[\not{k}_{\mu 1}\Omega_1(kx_b) + \not{k}_{\mu 2}\Omega_2(kx_b)\right]\right)\frac{\not{p}+M}{2M}\left(1 - \frac{\tau g}{4pk}\not{k}\left[\not{k}_{\mu 1}\Omega_1(kx_a) + \not{k}_{\mu 2}\Omega_2(kx_a)\right]\right) \\
& \times \exp\left\{i\frac{\tau g}{2pk}\int_{kx_a}^{kx_b} dt\left(p\left[k_{\mu 1}\Omega_1(t) + k_{\mu 2}\Omega_2(t)\right] - \frac{g\tau}{4}\left[k_{\mu 1}\Omega_1(t) + k_{\mu 2}\Omega_2(t)\right]^2\right)\right\} \\
& \times \exp\left\{-i\frac{\tau g}{2}\left(x_b\left[k_{\mu 1}\Omega_1(kx_b) + k_{\mu 2}\Omega_2(kx_b)\right] - x_a\left[k_{\mu 1}\Omega_1(kx_a) + k_{\mu 2}\Omega_2(kx_a)\right]\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{2.164}$$

Utilisons (2.102) puis, fesons une identification avec la décomposition du spectre [69]

$$\tilde{S}_l(x_b, x_a) = -i\theta(t_b - t_a)\int d^3p\sum_{\pm s}\Psi^+_{s,p}(x_b)\bar{\Psi}^+_{s,p}(x_a) + i\theta(t_b - t_a)\int d^3p\sum_{\pm s}\Psi^-_{s,p}(x_b)\bar{\Psi}^-_{s,p}(x_a), \tag{2.165}$$

les fonctions d'ondes liées à la particule et l'anti-particule, dans un champ non-Abélien sont respectivement de formes

$$\begin{aligned}
\Psi^+_{s,p}(x) = & \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{M}{p^0}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{\tau g}{4pk}\not{k}\left[\not{k}_{\mu 1}\Omega_1(kx_b) + \not{k}_{\mu 2}\Omega_2(kx_b)\right]\right)u(p,s) \\
& \times \exp\left\{-i\frac{\tau g}{2}x_b\left[k_{\mu 1}\Omega_1(kx_b) + k_{\mu 2}\Omega_2(kx_b)\right]\right\} \\
& \times \exp\left\{\begin{array}{c} ipx - \frac{i}{2}\int_{kx_a}^{kx_b} dt\vec{\sigma}.\left(\frac{d\vec{m}(t)}{dt} \times \vec{m}(t)\right) \\ +\frac{i\tau g}{2pk}\int_{kx_a}^{kx_b} dt\left(p\left[k_{\mu 1}\Omega_1(t) + k_{\mu 2}\Omega_2(t)\right] - \frac{g\tau}{4}\left[k_{\mu 1}\Omega_1(t) + k_{\mu 2}\Omega_2(t)\right]^2\right)\end{array}\right\},
\end{aligned} \tag{2.166}$$

et

$$\begin{aligned}\Psi^{-}_{s,p}(x) = {} & \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}(\frac{M}{p^{0}})^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\tau g}{4pk}\not{k}\left[\not{k}_{\mu 1}\Omega_{1}\left(kx_{a}\right)+\not{k}_{\mu 2}\Omega_{2}\left(kx_{a}\right)\right]\right)v(p,s)\\ & \times\exp\left\{i\frac{\tau g}{2}x_{a}\left[k_{\mu 1}\Omega_{1}\left(kx_{a}\right)+k_{\mu 2}\Omega_{2}\left(kx_{a}\right)\right]\right\}\\ & \times\exp\left\{\begin{array}{c}-ipx-\frac{i}{2}\int_{kx_{a}}^{kx_{b}}dt\vec{\sigma}.\left(\frac{d\vec{m}(t)}{dt}\times\vec{m}\left(t\right)\right)\\ +\frac{i\tau g}{2pk}\int_{kx_{a}}^{kx_{b}}dt\left(p\left[k_{\mu 1}\Omega_{1}\left(t\right)+k_{\mu 2}\Omega_{2}\left(t\right)\right]-\frac{g\tau}{4}\left[k_{\mu 1}\Omega_{1}\left(t\right)+k_{\mu 2}\Omega_{2}\left(t\right)\right]^{2}\right)\end{array}\right\},\end{aligned} \tag{2.167}$$

où les spineurs $u(p,s)$

$$\bar{u}(p,s)u(p,s) = 1, \tag{2.168}$$

et $v(p,s)$

$$\bar{v}(p,s)v(p,s) = -1, \tag{2.169}$$

sont solution de l'équation de Dirac libre.

2.3.5 Conclusion

Dans cette partie, nous avons calculé par une approche dite locale des intégrales de chemins, la fonction de Green relié au mouvement des particules de Dirac dans un champ non-Abélien du groupe $SU(2)$ de $(3+1)$ dimensions. Puis nous avons extraire les fonctions d'ondes dans le cas de l'équation de Dirac exactement comme les résultats obtenus par Obukhov i.e. les deux équations (13 et 14) de l'article [48].

Par l'utilisation seulement de quelques changements et à l'aide des fonctions δ de Dirac qui apparaissent durant les calculs, nous avons fait aisément les intégrations. Il est remarquable de noter que ces fonctions δ que nous avons déduits ont exactement le même argument que les équations de la mécanique classique (voire Annexe 3).

Nous pouvons conclure que les trajectoires classiques jouent un rôle essentiel pour la détermination des fonctions de Green pour ce genre de problème.

Chapitre 3

Processus de création de paires de particules par un champ de jauge de type non-Abélien

3.1 Introduction

Nous savons déjà, que la physique moderne est basée sur la théorie de jauge. De plus, nous savons que quelques processus physiques de la chromodynamique quantique sont décrites par des équations couplées i.e. l'équation de Dirac et l'équation de Yang Mills. En générale, la solution de ces deux équations est possible sauf pour des cas particuliers, car elles sont besoins d'une résolution simultanée. Par contre, il existe plusieurs champs qui ont des caractéristiques particulières i.e. d'une part leurs densité d'énergie est limité et d'autre part, la direction est la magnitude du vecteur de Poynting sont constants. De plus la magnitude du vecteur de Poynting est égale à la densité d'énergie.

Les champs qui satisfaire ses critères, sont les champs des ondes planes. Dans, le cas non-Abélien, ces ondes sons caractérisées par l'équation de mouvement

$$\partial^{\mu} F^{a}_{\mu\nu} + c^{abc} A^{\mu b} F^{c}_{\mu b} \quad = \quad 0, \tag{3.1}$$

où

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + c^{abc} A^a_\nu A^a_\mu, \tag{3.2}$$

est le champ d'onde plane qui a été discuté par Coleman [49] et la configuration pour le cas particulier du groupe $SU(2)$ a été considérée par Obukhov [48], où il a obtenu des solutions analytiques pour l'équation de Dirac.

Dans ce chapitre, nous allons considéré la même configuration pour une onde plane non-Abélienne pour traité le processus création de paires.

Nous pouvons cité quelques travaux concernant ce cas, par exemple [70, 15, 71, 72, 73, 74, 18]. En particulier [11] où une expression analytique a été obtenu pour la probabilité de création de paires quand le vide est perturbé par un champ électrique constant. Récemment, la détermination du probabilité quand l'interaction est un champ électrique chromodynamique qui dépend de temps [75, 76].

L'onde plane non-Abélienne en question, concernant notre travail a la forme [48]

$$A_\mu = A^a_\mu \sigma^a = \vec{A}_\mu \vec{\sigma}, \tag{3.3}$$

où

$$\vec{A}_\mu = k_\mu \left\{ \vec{m} \left[(k_1.x)\, b + (k_2.x) c \right] + \frac{1}{g} \left(\frac{d\vec{m}}{d\,(kx)} \times \vec{m} \right) \right\}, \tag{3.4}$$

sont les composantes partielles du champ, $\sigma^a = \left(\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3\right)$ sont les générateurs du groupe $SU(2)$, $a = (1, 2, 3)$ sont des index de couleurs, $b = b(kx)$, $c = c(kx)$ et $\vec{m} = \vec{m}(kx)$ sont des fonctions qui dépendent du produit (kx). De plus, elle existe une condition sur $\vec{m}$

$$\vec{m}^2 = 1. \tag{3.5}$$

Les quatre vecteurs de polarisation k_1, k_2 caractérisent les couleurs d'onde et k représente les quatre vecteurs isotropique de l'onde, g est un constant de couplage.

De plus, les vecteurs d'onde satisfirent les conditions

$$k^2 = kk_1 = kk_2 = k_1 k_2 = 0, \tag{3.6}$$

et par conséquent, la condition de Lorentz

$$\partial_\mu A^{\mu a} = 0, \tag{3.7}$$

est satisfait, pour chaque composante partielle.

Dans ce travail, nous proposons de déterminer la probabilité de création de paires. Nous allons prendre en considération les particules de Klein Gordon et de Dirac, où le vide est perturbé par un champ non-Abélien du groupe $SU(2)$ défini par (3.3) et (3.4).

Un calcul similaire de la probabilité, par l'utilisation d'une onde plane non-Abélienne de forme simple [77] a été performé en accord avec notre approche purement algébrique. Nous utilisons cette approche pour une forme plus compliquée concernant le champ donné par (3.3) et (3.4).

D'abord, nous allons démarré notre étude pour le cas des particules de Klein Gordon.

3.2 Création de paires de particules sans spin

3.2.1 Calcul du noyau $K(x_b, x_a; s)$

Le mouvement est décrit par l'équation de Klein Gordon et l'amplitude de transition vide-vide est donnée par

$$\mathcal{A}(vide - vide) = \int D\phi D\phi^* e^{i\int d^4x\phi^* \hat{O}_{KG}\phi}, \tag{3.8}$$

où

$$\hat{O}_{KG} = \left(\hat{p} + \frac{g}{2}A(kx)\right)^2 - M^2, \tag{3.9}$$

est l'opérateur de Klein-Gordon.

En accord avec la procédure de well-known, cette amplitude i.e. intégrale multiples, peut être calculé en considérant les vecteurs propres ψ_n avec les valeurs propres λ_n de $\hat{O}_{KG}$ comme suit

$$\hat{O}_{KG}\psi_n(x) = \lambda_n\psi_n(x), \tag{3.10}$$

où la décomposition dans la base ψ_n soit comme suit

$$\phi(x) = \sum_n a_n\psi_n(x), \tag{3.11}$$

avec

$$\int d^4x\psi_m^*(x)\psi_n(x) = \delta_{nm}. \tag{3.12}$$

Donc, l'amplitude de transition vide-vide égale à

$$\mathcal{A}(vide-vide) = N\int\prod_i da_i\prod_j da_j^* e^{i\sum_n |a_n|^2\lambda_n} = N\prod_n\frac{1}{\lambda_n} = \frac{N}{\det\hat{O}_{KG}}. \tag{3.13}$$

Ce qui signifie que $\mathcal{A}(vide-vide)$ est proportionnelle à l'inverse de l'opérateur $\hat{O}_{KG}$. La constante N est fixé en revenant au cas où l'interaction est nulle.

Par l'utilisation de la formule well-known, le déterminant devient un exponentiel

$$\frac{1}{\det\hat{O}_{KG}} = e^{-tr\ln\hat{O}_{KG}}, \tag{3.14}$$

et à l'aide de l'égalité

$$\ln\frac{a}{b} = \int_0^{+\infty}\frac{ds}{s}\left[e^{is\left(b+i0^+\right)} - e^{is\left(a+i0^+\right)}\right], \tag{3.15}$$

nous avons

$$\mathcal{A}_{creat.} = \mathcal{A}(vide - vide) = e^{iW_{spin\ 0}}, \tag{3.16}$$

où

$$W_{spin\ 0} = -i\int_0^{+\infty}\frac{ds}{s}tr\left\{e^{is\left(\left(\hat{p}+\frac{g}{2}\hat{A}\right)^2-M^2\right)} - e^{is\left(\hat{p}^2-M^2\right)}\right\}, \tag{3.17}$$

représente l'action effective pour une particule de Klein Gordon de spin 0 en interaction avec un champ non-Abélien du groupe $SU(2)$.

Notons que le symbole $tr = tr_x.tr_\sigma$ signifié la trace relié à l'espace de configuration ($\int d^4x \langle x| . |x\rangle$) et aux générateurs de groupe $SU(2)$) respectivement.

A partir de la forme de l'amplitude de transition vide-vide, $\mathcal{A}_{creat.}$, la probabilité est définie comme suit

$$\mathcal{P}_{creat.} = 1 - |\mathcal{A}_{creat.}|^2. \tag{3.18}$$

Maintenant, nous allons considéré le conjugué canonique des opérateurs $\hat{p}$ et $\hat{x}$

$$\left[\hat{x}_\mu, \hat{p}_\nu\right] = -ig_{\mu\nu}, \tag{3.19}$$

où leurs actions sur les kets $\mid x\rangle$ et$\mid p\rangle$ sont définis par

$$\hat{x}_\mu \mid x\rangle = x_\mu \mid x\rangle, \quad \hat{p}_\mu \mid p\rangle = p_\mu \mid p\rangle, \tag{3.20}$$

Notons que $\langle x \mid p\rangle = \frac{e^{ipx}}{(2\pi)^2}$ représente le produit scalaire, qui nous a permet de faire le passage entre les kets$\mid x\rangle$ et les kets$\mid p\rangle$. Par la suite, le tenseur métrique devient $diag\left(g_{\mu\nu}\right) = (1, -1, -1, -1)$.

Il est claire que l'action effective relié aux particules de Klein Gordon en mouvement dans un champ non-Abélien est une fonction des éléments diagonaux du noyau $K\left(x_b, x_a; s\right)|_{x_b=x_a=x}$ dans l'espace de configuration. Dans ce cas, le noyau prend la forme

$$\begin{aligned} K\left(x_b, x_a; s\right) &= \theta\left(s\right) e^{is\left[\left(-i\partial_b + \frac{g}{2}A_b\right)^2 - M^2\right]} \delta\left(x_b - x_a\right) \\ &= \theta\left(s\right) \langle x_b \mid e^{is\left[\left(\hat{p} + \frac{g}{2}\hat{A}\right)^2 - M^2\right]} \mid x_a \rangle, \end{aligned} \tag{3.21}$$

où x_a et x_b représentent respectivement la position initiale et la position finale de la particule.

Passons maintenant au calcul de cette noyau. D'abord, notons que l'expression de chaque composante du champ non-Abélien $\hat{A}$ définie par les deux équations (3.3) et (3.4), sont multipliés par σ^a. Donc, nous allons choisir une fonction f (2×2) de forme matricielle pour faire des transformations, soit

$$f = \frac{1}{2}\left(1 + \tau\vec{\sigma}\vec{m}\left(kx\right)\right), \tag{3.22}$$

où

$$\tau^2 = 1. \tag{3.23}$$

Cette transformation, modifiée la forme de $\hat{A}$ tel que

$$\begin{aligned} \left(\hat{p} + \frac{g}{2}\hat{A}\right)^2 f &= \hat{p}^2 f + \frac{g^2}{4}\hat{A}^2 f + g\hat{p}\hat{A}f \\ &= \frac{1}{2}\hat{p}^2\left(1 + \tau\vec{\sigma}\vec{m}\left(kx\right)\right) + \frac{g^2}{8}\hat{A}^2\left(1 + \tau\vec{\sigma}\vec{m}\left(kx\right)\right) + \frac{1}{2}g\hat{p}\hat{A}\left(1 + \tau\vec{\sigma}\vec{m}\left(kx\right)\right). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Développons le calcul de (3.24), nous allons trouvé

$$\begin{aligned} \left(\hat{p} + \frac{g}{2}\hat{A}\right)^2 f = &\frac{1}{2}\left(1 + \tau\vec{\sigma}\vec{m}\left(kx\right)\right)\left(\hat{p}^2 + \frac{g^2}{4}\left(k_\mu\left\{\tau\left[k_1 x)b + (k_2.x)c\right] + \frac{1}{g}\vec{\sigma}.\left(\frac{d\vec{m}}{d\left(kx\right)} \times \vec{m}\right)\right\}\right)^2\right) \\ &+\frac{1}{2}\left(1 + \tau\vec{\sigma}\vec{m}\left(kx\right)\right)\left(g\hat{p}\left(k_\mu\left\{\tau\left[k_1 x)b + (k_2.x)c\right] + \frac{1}{g}\vec{\sigma}.\left(\frac{d\vec{m}}{d\left(kx\right)} \times \vec{m}\right)\right\}\right)\right). \end{aligned} \tag{3.25}$$

Donc, nous pouvons déduire

$$\left(\hat{p}+\frac{g}{2}\hat{A}\right)^{2} f = f\left(\hat{p}+\frac{g}{2}\hat{A}_{new}\right)^{2}, \tag{3.26}$$

ce qui signifie que nous avons obtenir à partir de $\hat{A}_{\mu}$ une nouvelle forme du champ non-Abélien $\hat{A}_{\mu new}$ tel que

$$\hat{A}_{\mu new} = k_{\mu}\left\{\tau\left[k_{1}x)b+(k_{2}.x)c\right]+\frac{1}{g}\vec{\sigma}.\left(\frac{d\vec{m}}{d\left(kx\right)}\times\vec{m}\right)\right\}, \tag{3.27}$$

qui satisfait la condition de Lorentz $\partial_{\mu}A^{\mu a}_{new}=0$.

Notons que l'expression du nouveau champ $\hat{A}_{\mu new}$ a été obtenue par l'utilisation des relations bien connues

$$\left(\vec{\sigma}.\vec{a}\right)\left(\vec{\sigma}.\vec{b}\right) = \vec{a}.\vec{b}+\vec{\sigma}.\left(\vec{a}\times\vec{b}\right), \tag{3.28}$$

et

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c} = \left(\vec{a}.\vec{c}\right).\vec{b}-\left(\vec{b}.\vec{c}\right).\vec{a}, \tag{3.29}$$

notons encore que les calculs sont simplifiées à l'aide des propriétés (3.6) et (3.7). Donc, l'expression de $\hat{A}_{new}$ ne dépend que d'un seul terme avec les générateurs σ^{a}.

Maintenant, faisons le développement de l'exponentielle $e^{is\hat{O}_{KG}\left(f.\frac{1}{f}\right)}$ comme suit

$$\begin{aligned} e^{is\hat{O}_{KG}\left(f.\frac{1}{f}\right)} &= 1+is\hat{O}_{KG}\left(f.\frac{1}{f}\right)+... \\ &= f\left(1+is\left[\left(\hat{p}+\frac{g}{2}\hat{A}_{new}\left(k\hat{x}\right)\right)^{2}-M^{2}\right]+...\right)\frac{1}{f}, \end{aligned} \tag{3.30}$$

par la suite, il est claire que le noyau K prend la forme

$$K\left(x_{b},x_{a};s\right) = f_{b}\theta\left(s\right)\langle x_{b}\mid e^{is\left[\left(\hat{p}+\frac{g}{2}\hat{A}_{new}(k\hat{x})\right)^{2}-M^{2}\right]}\mid x_{a}\rangle\frac{1}{f_{a}}. \tag{3.31}$$

Le calcul du propagateur est réduit donc, au détermination du noyau de la particule de Klein Gordon en interaction avec le nouveau champ non-Abélien $\hat{A}_{\mu new}$ du groupe $SU(2)$ qui a été construit à partir de $\hat{A}$. La procédure de calcul est la suivante : d'abord, les variables du champ devient des opérateurs avec leurs conjugués. Ensuite, par l'utilisation de quelque changement, nous allons obtenir des opérateurs unitaires.

Nous allons démarré par les trois variables du champ kx, k_1x et k_2x. Pour cela, nous définitions trois nouveaux opérateurs $\hat{\varphi}$,$\hat{\varphi}_1$ et $\hat{\varphi}_2$comme suit

$$\hat{\varphi} = k\hat{x}; \qquad \hat{\varphi}_1 = k_1\hat{x}\,; \qquad \hat{\varphi}_2 = k_2\hat{x}, \tag{3.32}$$

où leurs actions sur leurs propres kets sont

$$\hat{\varphi} \mid \varphi\rangle = \varphi \mid \varphi\rangle; \qquad \hat{\varphi}_1 \mid \varphi_1\rangle = \varphi_1 \mid \varphi_1\rangle; \qquad \hat{\varphi}_2 \mid \varphi_2\rangle = \varphi_2 \mid \varphi_2\rangle. \tag{3.33}$$

De plus, nous allons associé aux $\left(\hat{\varphi}, \hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2\right)$ respectivement, leurs conjugués $\left(\hat{p}_{\varphi}, \hat{p}_{\varphi_1}, \hat{p}_{\varphi_2}\right)$ tels que

$$[\hat{\varphi}, \hat{p}_{\varphi}] = i\,; \quad [\hat{\varphi}, \hat{x}_{\mu}] = [\hat{\varphi}, \hat{p}_{\mu}] = [\hat{p}_{\hat{\varphi}}, \hat{x}_{\mu}] = [\hat{p}_{\hat{\varphi}}, \hat{p}_{\mu}] = 0; \tag{3.34}$$

$$\left[\hat{\varphi}_1, \hat{p}_{\varphi_1}\right] = i\,; \quad [\hat{\varphi}_1, \hat{x}_{\mu}] = [\hat{\varphi}_1, \hat{p}_{\mu}] = \left[\hat{p}_{\varphi_1}, \hat{x}_{\mu}\right] = \left[\hat{p}_{\varphi_1}, \hat{p}_{\mu}\right] = 0; \tag{3.35}$$

$$\left[\hat{\varphi}_2, \hat{p}_{\varphi_2}\right] = i\,; \quad [\hat{\varphi}_2, \hat{x}_{\mu}] = [\hat{\varphi}_2, \hat{p}_{\mu}] = \left[\hat{p}_{\varphi_2}, \hat{x}_{\mu}\right] = \left[\hat{p}_{\varphi_2}, \hat{p}_{\mu}\right] = 0. \tag{3.36}$$

A ce niveau, il est nécessaire d'introduire les trois identités suivantes

$$\begin{aligned}
\int\!\!\int d\varphi_b d\varphi_a \delta(\varphi_a - kx_a)\delta(\varphi_b - \varphi_a - k\left(x_b - x_a\right)) &= \int\!\!\int d\varphi_b d\varphi_a \delta(\varphi_a - kx_a)\langle\varphi_b \mid \varphi_a\rangle = 1;\\
\int\!\!\int d\varphi_{1b} d\varphi_{1a} \delta(\varphi_{1a} - k_1x_a)\delta(\varphi_{1b} - \varphi_{1a} - k_1\left(x_b - x_a\right)) &= \int\!\!\int d\varphi_{1b} d\varphi_{1a} \delta(\varphi_{1a} - k_1x_a)\langle\varphi_{1b} \mid \varphi_{1a}\rangle = 1;\\
\int\!\!\int d\varphi_{2b} d\varphi_{2a} \delta(\varphi_{2a} - k_2x_a)\delta(\varphi_{2b} - \varphi_{2a} - k_2\left(x_b - x_a\right)) &= \int\!\!\int d\varphi_{2b} d\varphi_{2a} \delta(\varphi_{2a} - k_2x_a)\langle\varphi_{2b} \mid \varphi_{2a}\rangle = 1,
\end{aligned} \tag{3.37}$$

où nous avons adapté la notation bra-ket.

Donc, le noyau prend la forme

$$K(x_b, x_a; s) = \theta(s) \begin{pmatrix} f_b \int d\varphi_b d\varphi_a d\varphi_{1b} d\varphi_{1a} d\varphi_{2b} d\varphi_{2a} \delta(\varphi_a - kx_a)\delta(\varphi_{1a} - k_1 x_a)\delta(\varphi_{2a} - k_2 x_a) \\ \times \langle x_b, \varphi_b, \varphi_{1b}, \varphi_{2b} \mid e^{is\left[\left(\hat{p}+\frac{g}{2}\hat{A}_{new}\right)^2 - M^2\right]} \mid x_a, \varphi_a, \varphi_{1a}, \varphi_{2a}\rangle \frac{1}{f_a} \end{pmatrix}. \tag{3.38}$$

Maintenant, nous allons introduire un changement sur l'opérateur du moment $\hat{p}$ comme suit

$$\hat{p} \rightarrow \hat{p} + k\hat{p}_\varphi + k_1 \hat{p}_{\varphi 1} + k_2 \hat{p}_{\varphi 2}. \tag{3.39}$$

Notons que ce changement laisse le commutateur $\left[\hat{x}_\mu, \hat{p}_\nu\right]$ inchangeable, et à l'aide des relations (3.6), nous avons

$$\begin{aligned} \left(\hat{p} + \frac{g}{2}\hat{A}_{new}(k\hat{x})\right)^2 &= \hat{p}^2 + g\hat{p}\hat{A}_{new} \\ &\rightarrow \hat{p}^2 + g\hat{p}\hat{A}_{new} + 2k\hat{p}\hat{p}_\varphi + 2k_1\hat{p}\hat{p}_{\varphi 1} + 2k_2\hat{p}\hat{p}_{\varphi 2} + k_1^2\hat{p}_{\varphi 1}^2 + k_2^2\hat{p}_{\varphi 2}^2. \end{aligned} \tag{3.40}$$

A ce niveau, nous allons considéré le deuxième et le troisième terme de (3.40). D'abord, nous remarquons que

$$2\hat{p}k\hat{p}_\varphi + g\hat{p}\hat{A}_{new} = 2\hat{p}k\hat{p}_\varphi \left(1 + \frac{1}{\hat{p}_\varphi}\frac{g\hat{p}\hat{A}_{new}}{2\hat{p}k}\right), \tag{3.41}$$

où l'inverse de l'opérateur $\hat{p}_\varphi$ est défini sous forme d'intégrale

$$\frac{1}{\hat{p}_\varphi}(.) \rightarrow i\int^{\hat{\varphi}} du\,(.)\,, \tag{3.42}$$

Donc, successivement nous avons

$$1 + \frac{1}{\hat{p}_\varphi}\frac{g\hat{p}\hat{A}_{new}}{2\hat{p}k} = 1 + i\frac{g}{2\hat{p}k}\int^{\hat{\varphi}} \hat{p}\hat{A}_{new}\left(u, \hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2\right) du, \tag{3.43}$$

et

$$2\hat{p}k\hat{p}_{\varphi} + g\hat{p}\hat{A}_{new} = 2\hat{p}ke^{-i\hat{S}_1}\hat{p}_{\varphi}e^{i\hat{S}_1}, \tag{3.44}$$

où

$$\hat{S}_1 = +\tau\frac{g}{2}\left(\hat{\varphi}_1 B(\hat{\varphi}) + \hat{\varphi}_2 C(\hat{\varphi})\right) + \frac{1}{2}\vec{\sigma}.\vec{M}(\hat{\varphi}), \tag{3.45}$$

avec

$$B(\hat{\varphi}) = \int^{\hat{\varphi}} dub(u)\ ; \quad C(\hat{\varphi}) = \int^{\hat{\varphi}} duc(u)\ ; \quad \vec{M}(\hat{\varphi}) = \int^{\hat{\varphi}} du\left(\frac{d\vec{m}(u)}{du} \times \vec{m}(u)\right). \tag{3.46}$$

Utilisons les relations de commutation (3.34), (3.35) et (3.36), nous allons trouvé aisément que

$$\left(\hat{p} + \frac{g}{2}\hat{A}_{new}(k\hat{x})\right)^2 = e^{-i\hat{S}_1}\left(\begin{array}{c} \left(\hat{p} + k\hat{p}_{\varphi} + k_1\hat{p}_{\varphi 1} + k_2\hat{p}_{\varphi 2}\right)^2 - \tau g\hat{p}\bar{A}(\hat{\varphi}) \\ +\frac{(\tau g)^2}{4}\bar{A}(\hat{\varphi})^2 - \tau g\left(B(\hat{\varphi})k_1^2\hat{p}_{\varphi_1} + C(\hat{\varphi})k_2^2\hat{p}_{\varphi_2}\right) \end{array}\right)e^{i\hat{S}_1}, \tag{3.47}$$

où

$$\bar{A}_{\mu}(\hat{\varphi}) = k_{\mu 1}B(\hat{\varphi}) + k_{\mu 2}C(\hat{\varphi}). \tag{3.48}$$

De plus, si nous introduisons le changement inverse

$$\hat{p} + k_1\hat{p}_{\varphi_1} + k_2\hat{p}_{\varphi_2} \rightarrow \hat{p}, \tag{3.49}$$

nous allons obtenir le résultat

$$\left(\hat{p} + \frac{g}{2}\hat{A}_{new}(k\hat{x})\right)^2 = e^{-i\hat{S}_1}\left(\hat{p}^2 + 2\hat{p}k\hat{p}_{\varphi} - \tau g\hat{p}\bar{A}((\hat{\varphi})) + \frac{(\tau g)^2}{4}\bar{A}^2(\hat{\varphi})\right)e^{i\hat{S}_1}. \tag{3.50}$$

Répétons les même procédures, l'expressions précédente peut être réduit à

$$\hat{p}^2 + 2\hat{p}k\hat{p}_\varphi - \tau g\hat{p}\bar{A}\left((\hat{\varphi})\right) + \frac{(\tau g)^2}{4}\bar{A}^2\left(\hat{\varphi}\right) = e^{-i\hat{S}_2}\left(\hat{p}^2 + 2\hat{p}k\hat{p}_\varphi\right)e^{i\hat{S}_2}. \tag{3.51}$$

Donc, il apparaisse une autre phase dans l'exponentielle

$$\hat{S}_2 = \frac{\tau g}{2\hat{p}k}\int^{\hat{\varphi}} du\left(-\hat{p}\bar{A}\left(u\right) + \frac{\tau g}{4}\bar{A}^2\left(u\right)\right). \tag{3.52}$$

Introduisons, pour la dernière fois le changement inverse

$$\hat{p} + k\hat{p}_\varphi \rightarrow \hat{p}, \tag{3.53}$$

et par la suite, l'expression (3.50) se réduit à

$$\left(\hat{p} + \frac{g}{2}\hat{A}_{new}\left(k\hat{x}\right)\right)^2 = e^{-i\left(\hat{S}_1+\hat{S}_2\right)}\hat{p}^2 e^{i\left(\hat{S}_1+\hat{S}_2\right)}. \tag{3.54}$$

Donc, nous avons réduit la forme du noyau relié au champ $\hat{A}_{new}$ à celle relié au cas libre avec l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}\langle x_b,\varphi_b,\varphi_{1b},\varphi_{2b} \mid & e^{is\left(\left(\hat{p}+\frac{g}{2}\hat{A}_{new}\right)^2-M^2\right)} \mid x_a,\varphi_a,\varphi_{1a},\varphi_{2a}\rangle \\ &= \langle x_b,\varphi_b,\varphi_{1b},\varphi_{2b} \mid e^{-i\left(\hat{S}_1+\hat{S}_2\right)}e^{is\left(\hat{p}^2-M^2\right)}e^{i\left(\hat{S}_1+\hat{S}_2\right)} \mid x_a,\varphi_a,\varphi_{1a},\varphi_{2a}\rangle,\end{aligned} \tag{3.55}$$

où la somme des deux phases est une fonction des quatre opérateurs $\hat{p}$, $\hat{\varphi}$, $\hat{\varphi}_1$, $\hat{\varphi}_2$ et $\vec{\sigma}$.

$$\hat{S}_1 + \hat{S}_2 = \tau\frac{g}{2}\left[\hat{\varphi}_1 B\left(\hat{\varphi}\right) + \hat{\varphi}_2 C\left(\hat{\varphi}\right)\right] + \frac{1}{2}\vec{\sigma}.\vec{M}\left(\hat{\varphi}\right) - \frac{\tau g}{2\hat{p}k}\int^{\hat{\varphi}} du\left(\hat{p}\bar{A}\left(u\right) - \frac{\tau g}{4}\bar{A}^2\left(u\right)\right). \tag{3.56}$$

Maintenant, agissons par les opérateurs $\hat{\varphi}$,$\hat{\varphi}_1$, $\hat{\varphi}_2$ sur les bras et les kets. L'élément de matrice de (3.55) est simplement égale à

$$e^{-i\left(\hat{S}_{1b}+\hat{S}_{2b}\right)}\langle x_b,\varphi_b,\varphi_{1b},\varphi_{2b} \mid e^{is\left(\hat{p}^2-M^2\right)} \mid x_a,\varphi_a,\varphi_{1a},\varphi_{2a}\rangle e^{i\left(\hat{S}_{1a}+\hat{S}_{2a}\right)}, \tag{3.57}$$

où $\left(\hat{S}_{1b} + \hat{S}_{2b}\right)$ et $\left(\hat{S}_{1a} + \hat{S}_{2a}\right)$ sont respectivement des fonctions qui dépendent des variables $\left(\varphi_b, \varphi_{1b}, \varphi_{2b}, \varphi_a, \varphi_{1a}, \varphi_{2a}\right)$ et l'opérateur $\hat{p}$. Par ordre, pour fixer les variables $\left(\varphi_b, \varphi_a, \varphi_{1b}, \varphi_{1a}, \varphi_{2b}, \varphi_{2a}\right)$ respectivement, aux $(kx_b, kx_a, k_1x_b, k_1x_a, k_2x_b, k_2x_a)$, nous procédons aux intégrations sur les six variables φ, et à l'aide du fonction δ de Dirac, nous allons trouvé

$$K(x_b, x_a; s) = f_b \langle x_b \mid e^{-i\left(\hat{S}_{1b}+\hat{S}_{2b}\right)} e^{is\left(\hat{p}^2-M^2\right)} e^{i\left(\hat{S}_{1a}+\hat{S}_{2a}\right)} \mid x_a \rangle \frac{1}{f_a}, \tag{3.58}$$

où la phase, maintenant est seulement fonction des opérateurs $\hat{x}$ et $\hat{p}$

$$\hat{S}_1 + \hat{S}_2 = \frac{g\tau}{2}\hat{x}\bar{A}\left(k\hat{x}\right) + \frac{1}{2}\vec{\sigma}.\vec{M}\left(k\hat{x}\right) - \frac{g\tau}{2\hat{p}k}\int^{k\hat{x}} du \left(\hat{p}\bar{A}\left(u\right) - \frac{g\tau}{4}\bar{A}^2\left(u\right)\right). \tag{3.59}$$

Il est facile d'éliminer l'opérateur $\hat{x}$: il devient respectivement un variable x_a et x_b quand il agisse sur le ket $\mid x_a\rangle$ et le bras $\langle x_b \mid$. Pour éliminer l'opérateur $\hat{p}$, nous devons d'abord, inséré la relation de fermeture $\int d^4p \mid p\rangle\langle p \mid = 1$. Puis, nous introduisons le produit scalaire $\langle x \mid p\rangle = (2\pi)^{-2} e^{ipx}$.

Finalement, le noyau de relatif aux particules de Klein Gordon $K(x_b, x_a; s)$ prend la forme

$$\begin{aligned} K(x_b, x_a; s) &= f_b e^{-\frac{i}{2}\int_{kx_a}^{kx_b} du\,\vec{\sigma}.\left(\frac{d\vec{m}}{du}\times\vec{m}(u)\right)} \frac{1}{f_a} e^{-i\frac{\tau g}{2}\left(x_b\bar{A}(kx_b)-x_a\bar{A}(kx_a)\right)} \\ &\times \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{i\left\{p(x_b-x_a)+\left(p^2-M^2\right)s+\frac{\tau g}{2pk}\int_{kx_a}^{kx_b} du\left(p\bar{A}(u)-\frac{g\tau}{4}\bar{A}^2(u)\right)\right\}}. \end{aligned} \tag{3.60}$$

3.2.2 Probabilité de création de paires de particules $\mathcal{P}_{creat.}$

Maintenant, nous devons prendre la trace, d'abord, pour l'espace de configuration, ensuite, pour les générateurs de groupe

$$\begin{aligned} tr_\sigma tr_x K &= \lim_{\tau^2\to 1} tr_\sigma \int d^4 x K(x,x;s) = \lim_{\tau^2\to 1} tr_\sigma \int d^4 x \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} f\frac{1}{f} e^{i\left(p^2-M^2\right)s} \\ &= \lim_{\tau^2\to 1} e^{-iM^2 s}\int d^4 x tr_\sigma \left(f\frac{1}{f}\right)\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip^2 s} = 2e^{-iM^2 s}\int d^4 x \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip^2 s} \\ &= 2e^{-iM^2 s}\int_{TL^3} d^4 x \int \frac{dp^0 dp^1 dp^2 dp^3}{(2\pi)^4} e^{i\left(\left(p^0\right)^2-\left(p^1\right)^2-\left(p^2\right)^2-\left(p^3\right)^2\right)s} \\ &= \frac{-i}{8\pi^2}\frac{e^{-iM^2 s}}{s^2} TL^3. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Remarquons, que l'action effective (3.17) est nulle i.e. $W_{spin\ 0} = 0$. Par la suite, la probabilité de création de paires pour les particules de Klein Gordon est nulle

$$\mathcal{P}_{creat.} = 0. \tag{3.62}$$

3.2.3 Résultat

Le dernier résultat, montre qu'il est impossible de créer des particules de Klein Gordon de spin 0 à partir d'une perturbation du vide par un champ non-Abélien du groupe $SU(2)$ défini par les deux équations (3.3) et (3.4).

3.3 Création de paires de particules de spin $1/2$

3.3.1 Calcul du noyau $S_D(x_b, x_a; s)$

Dans le cas des particules de Dirac, en interaction avec le même genre des champs i.e. champ non-Abélien du groupe $SU(2)$ de la forme (3.3) et (3.4), l'amplitude de transition vide-vide est donné par l'équation

$$\mathcal{A}(vide - vide) \;=\; \int D\overline{\psi} D\psi e^{i\int d^4x\overline{\psi}\hat{O}_D\psi}, \tag{3.63}$$

où ψ et $\overline{\psi}$ sont maintenant, des variables de Grassmann, et

$$\hat{O}_D \;=\; \hat{\not{p}} + \frac{g}{2}\hat{\not{A}} - M, \tag{3.64}$$

représente l'opérateur de Dirac.

Notons que nous avons adopté la notation de Dirac ($\hat{\not{a}} = \gamma^\mu \hat{a}_\mu$).

Utilisons les mêmes procédures, que nous avons utilisés dans le cas de spin 0, les intégrations sur les variables $\overline{\psi}$ et ψ donnent

$$\mathcal{A}(vide - vide) \;\simeq\; \det \hat{O}_D. \tag{3.65}$$

Concernant, la charge conjugué, le déterminant reste inchangeable, par la suite l'amplitude de transition vide-vide devient

$$\mathcal{A}(vide - vide) \;=\; N\sqrt{\det \hat{O}_D \hat{O}_D^c} = e^{iW_{spin\ 1/2}}, \tag{3.66}$$

où la constante N soit fixé dans le cas libre.

Comme précédemment, après le changement de la fonction ln à une intégrale sur l'exponentielle (3.15), l'action effective pour une particule de Dirac de spin 1/2 en interaction avec un champ non-Abélien du groupe $SU(2)$, a la forme

$$W_{spin\ 1/2} \;=\; \frac{i}{2} tr \ln \frac{\hat{p}^2 - M^2}{\left(\hat{\not{p}} + \frac{g}{2}\hat{\not{A}}\right)^2 - M^2} = \frac{i}{2} tr \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-isM^2} \left(e^{is\left(\hat{\not{p}} + \frac{g}{2}\hat{\not{A}}\right)^2} - e^{is\hat{p}^2} \right), \tag{3.67}$$

où le symbole $tr = tr_\gamma tr_\sigma tr_x$ représente le produit des traces reliés respectivement à l'espace de configuration, les générateurs du groupe $SU(2)$ et les matrices γ^μ de Dirac.

Il est claire que la détermination de $W_{spin\ 1/2}$ insiste la définition du noyau S_D donné par

$$S_D\left(x_b, x_a; s\right) = \langle x_b \mid e^{is\left(\hat{\not{p}}+\frac{g}{2}\hat{\not{A}}\right)^2} \mid x_a >, \tag{3.68}$$

avec

$$\begin{aligned}\left(\hat{\not{p}}+\frac{g}{2}\hat{\not{A}}\right)^2 &= \hat{p}^2+\frac{g^2}{4}\hat{A}^2+g\hat{p}\hat{A}+\frac{g}{4}\sigma^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu-\frac{g}{4}\sigma^{\mu\nu}\partial_\nu A_\mu \\ &= \left(\hat{p}+\frac{g}{2}\hat{A}\right)^2+\frac{g}{4}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu},\end{aligned} \tag{3.69}$$

où

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma^\mu,\gamma^\nu\right], \tag{3.70}$$

et

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu=\vec{\sigma}\vec{m}\left[b\left(k_\nu k_{1\mu}-k_{1\nu}k_\mu\right)+c\left(k_\nu k_{2\mu}-k_\mu k_{2\nu}\right)\right]=\vec{\sigma}\vec{m}T_{\mu\nu}, \tag{3.71}$$

représente le tenseur électromagnétique, avec $T_{\mu\nu}=b\left(k_\nu k_{1\mu}-k_{1\nu}k_\mu\right)+c\left(k_\nu k_{2\mu}-k_\mu k_{2\nu}\right)$.

Utilisons la même méthode, que nous avons utilisé pour le cas de spin 0, par l'introduction une autre fois la même fonction f définie par (3.22)

$$\left(\hat{\not{p}}+\frac{g}{2}\hat{\not{A}}\right)^2 f = \left(\left(\hat{p}+\frac{g}{2}\hat{A}\right)^2+\frac{g}{4}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right)f=\left(\hat{p}+\frac{g}{2}\hat{A}\right)^2 f+\left(\frac{g}{4}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right)f. \tag{3.72}$$

Passons aux calculs explicites de (3.72).

- Concernant le premier terme : le même calcul est fait pour le cas de Klein Gordon où le résultat est donné par (3.26).

- Pour le deuxième terme : nous avons

$$\begin{aligned}
\left(\frac{g}{4}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right)f &= \left(\frac{g}{4}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right)\left(1+\tau\vec{\sigma}\vec{m}\,(kx)\right) \\
&= \left(\frac{g}{4}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right)+\tau\left(\frac{g}{4}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right)\left(\vec{\sigma}\vec{m}\,(kx)\right) \\
&= \left(\frac{g}{4}\sigma^{\mu\nu}\vec{\sigma}\vec{m}T_{\mu\nu}\right)+\tau\left(\frac{g}{4}\sigma^{\mu\nu}\vec{\sigma}\vec{m}T_{\mu\nu}\right)\left(\vec{\sigma}\vec{m}\,(kx)\right) \\
&= \frac{g}{4}\sigma^{\mu\nu}\left(\vec{\sigma}\vec{m}T_{\mu\nu}\right)+\tau\left(\vec{\sigma}\vec{m}T_{\mu\nu}\right)\left(\vec{\sigma}\vec{m}\,(kx)\right) \\
&= \left(1+\tau\vec{\sigma}\vec{m}\,(kx)\right)\left(\frac{g\tau}{4}\sigma^{\mu\nu}T_{\mu\nu}\right)=f\left(\frac{g\tau}{4}\sigma^{\mu\nu}T_{\mu\nu}\right).
\end{aligned} \tag{3.73}$$

Donc, nous pouvons obtenir le résultat

$$\left(\hat{\not p}+\frac{g}{2}\hat{\not A}\right)^{2}f \;=\; f\left[\left(\hat{p}+\frac{g}{2}\hat{A}_{new}\right)^{2}+\tau\frac{g}{4}\sigma^{\mu\nu}T_{\mu\nu}\right]. \tag{3.74}$$

Par ce choix, nous pouvons déduire que le calcul du noyau S_D peut être réduit à un calcul concernant le cas de spin 0, avec l'addition d'un seul terme $\tau\frac{g}{4}\sigma^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ dans l'expression (3.45) de S_1 et par la suite, nous allons obtenir l'égalité suivante

$$\frac{\tau g}{4pk}\sigma^{\mu\nu}k_{\nu}\left(Bk_{1\mu}+Ck_{2\mu}\right) \;=\; -i\frac{\tau g}{4pk}\not k\bar{\not A}, \tag{3.75}$$

avec $\bar{\not A}=\gamma^{\mu}\bar{A}_{\mu}$, où $\bar{A}_{\mu}$ est donné par (3.48). Notons que les calculs sont simplifiées grâce aux (3.6) et (3.7).

Donc, le résultat que nous allons trouvé pour le noyau S_D est le même pour le noyau $K(x_b,x_a;s)$ (3.60), avec l'addition d'un facteur

$$\begin{aligned}
e^{\frac{\tau g}{4pk}\not k\left(\bar{\not A}(kx_b)-\bar{\not A}(kx_a)\right)} &= 1+\frac{\tau g}{4pk}\not k\left(\bar{\not A}\,(kx_b)-\bar{\not A}\,(kx_a)\right) \\
&= \left(1+\frac{\tau g}{4pk}\not k\bar{\not A}\,(kx_b)\right)\left(1-\frac{\tau g}{4pk}\not k\bar{\not A}\,(kx_a)\right).
\end{aligned} \tag{3.76}$$

Finalement, le noyau relatif aux particules de Dirac $S_{_D}(x_b, x_a; s)$ prend la forme

$$\begin{aligned} S_{_D}(x_b, x_a; s) &= f_b e^{-\frac{i}{2}\int_{kx_a}^{kx_b} du\vec{\sigma}.\left(\frac{d\vec{m}}{du}\times\vec{m}(u)\right)} \frac{1}{f_a} e^{-i\frac{\tau g}{2}\left(x_b\bar{A}(kx_b)-x_a\bar{A}(kx_a)\right)} \\ &\times \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\left(1+\frac{\tau g}{4pk}\not{k}\not{\bar{A}}_b\right)\left(1-\frac{\tau g}{4pk}\not{k}\not{\bar{A}}_a\right) \\ &\times e^{i\left\{p(x_b-x_a)+\left(p^2-M^2\right)s+\frac{\tau g}{2pk}\int_{kx_a}^{kx_b} du\left(p\bar{A}(u)-\frac{g\tau}{4}\bar{A}^2(u)\right)\right\}}. \end{aligned} \tag{3.77}$$

3.3.2 Probabilité de création de paires de particules $\mathcal{P}_{_{creat.}}$

Après avoir déterminé le noyau S_D, il est facile de calculer les traces

$$tr_\gamma tr_\sigma tr_x S_D = tr_\gamma\left(\frac{-i}{8\pi^2}\frac{e^{-iM^2s}}{s^2}TL^3\right) = \frac{-i}{2\pi^2}\frac{e^{-iM^2s}}{s^2}TL^3, \tag{3.78}$$

ce qui montre que l'action effective est nulle

$$W_{_{spin\ 1/2}} = 0, \tag{3.79}$$

par la suite, la probabilité de création de paires pour des particules de spin 1/2, elle aussi est nulle

$$\mathcal{P}_{_{creat.}} = 0. \tag{3.80}$$

3.3.3 Résultat

Le dernier résultat, montre qu'il est impossible de créer des particules de Dirac de spin 1/2 à partir d'une perturbation du vide par un champ non-Abélien du groupe $SU(2)$ défini par les deux équations (3.3) et (3.4).

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons déterminé la probabilité de création de paires pour les deux cas : particules de Klein Gordon de spin 0, et les particule de Dirac de spin 1/2, à partir du vide perturbé par champ d'onde plane non-Abélien. Grâce au transformation (3.22) et par l'utilisation de quelques changements, nous avons obtenu l'expression des deux noyaux de Klein Gordon $K(x_b, x_a; s)$ et de Dirac $S_D(x_b, x_a; s)$, qui sont simplement fonction de produit de deux facteurs : le premier facteur, contient les générateurs de groupe $SU(2)$ tandis que le deuxième facteur (si nous prenons la trace ou non des matrices γ) contient une fonction Lagrangienne au voisinage $x_a \simeq x_b$, cette fonction dépend seulement des invariants électromagnétique.

Les calculs sont performés algébriquement, où nous avons montré pour les deux cas spin 0 et spin1/2, que le champ non-Abélien défini par (3.3) et (3.4) est incapable de créer des particules à partir du vide.

Notons que nous avons donné dans (Annexe 4), des remarques concernant le processus création de paires. Nous avons clarifié le rôle de la fonction f donné par (3.22). De plus, nous avons montré que grâce aux quelques approximations, notre calcul et le même trouvé par Schwinger dans son article [11] concernant le champ constant.

Chapitre 4

Conclusion générale

Dans cette thèse, nous avons fait une étude exacte et détaillée sur le mouvement des particules libres de Klein Gordon de spin 0 et de Dirac de spin $\frac{1}{2}$, en interactions avec un champ non-Abélien du groupe $SU(2)$. D'abord, l'étude a été faite par la méthode des intégrales de chemins. Ensuite, par le processus de création de paires de particules où les calculs sont performés algébriquement.

Concernant le formalisme des intégrales de chemins, nous avons d'abord, calculé la fonction de Green $\tilde{G}(x_b, x_a)$ relative aux particules de Klein Gordon, via l'utilisation des shifts et grâce aux quelques caractéristiques simples dont elles dépend le champ non-Abélien A_{μ}^{a} du groupe $SU(2)$ donné par les deux équations (1.8) et (1.9). Puis, nous avons calculé la fonction de Green relative aux particules de Dirac en interaction avec le même champ non-Abélien A_{μ}^{a} où nous avons utilisé deux approches. La première approche est dite globale où le Hamiltonien qui décrit le mouvement des particules est donné par (2.51). La deuxième approche est dite locale où le mouvement des particules est aussi gouverné par un autre Hamiltonien donné par (2.113). La seule différence entre les deux approches, c'est qu'il y a un terme supplémentaire (partie fermionique) dans (2.113) qui dépend des variables fermioniques χ qui ont possèdent quelques propriétés spécifiques. Nous avons introduire la matrice γ^{5} pour la raison d'homogénéité.

Il est intéressant, de remarquer que le mouvement des particules de Dirac est décrit par deux variables : une bosonique et l'autre Grassmannienne (variable de type fermionique). Remarquons aussi, que les mouvements sont quadri-dimensionnels. Donc, l'étude par le formalisme des intégrales de chemins, nécessite l'introduction de trois identités qui jouent les rôles des contraintes i.e. les mouvements deviennent uni-dimensionnels, ce qui nous a permis par la suite d'extraire des équations identiques à celles de la mécanique classique (Annexe 1, Annexe 2 et Annexe 3).

Concernant le processus de création de paires de particules, nous avons déterminé d'abord, les deux noyaux $K\left(x_b, x_a; s\right)$ et $S_D\left(x_b, x_a; s\right)$ de Klein Gordon (spin 0) et de Dirac (spin $\frac{1}{2}$) respectivement. Ensuite, nous avons calculé l'amplitude de probabilité (d'ailleurs nulle) en considérant une paire de particule et d'antiparticule. Ce qui nous a permet d'arracher un résultat essentielle concernant la perturbation de vide par des champs qui ont des caractéristiques un peut spéciales i.e. champs de jauge de type non-Abélien du groupe $SU(2)$ (3.3) et (3.4). Ce genre des champs, ne peut pas créés des paires de particules à partir du vide. C'est ainsi que les résultats obtenus sont les mêmes trouvé par Schwinger dans son article [11] concernant le champ constant, où nous avons démontré clairement dans l'Annexe 4, le rôle de la fonction f définie par la relation (3.22).

Nous pouvons conclure à la fin de ce travail que :

- nous avons apprendre comment calculer les intégrales de chemins par la manipulation des variables de type bosoniques relatives à la position (mouvement externe) et surtout les variables de Grassmann relatives à la variable du spin (mouvement interne).

- nous avons réussir à contourner les difficultés rencontrées.

- nous avons apprendre comment maitriser les calculs sur les opérateurs i.e. la commutation et l'anti-commutation des opérateurs.

- nous avons réussir à gérer des situations où les calculs sont traités d'une manière algébrique.

Notons à la fin de ce travail que les calculs sont difficilement maîtrisables, lorsque le champ extérieur n'a pas une forme standard. Par la suite, trouver des solutions exactes à ce genre de problèmes soit d'une manière analytique ou d'une manière algébrique devient difficile.

Annexes

Annexe 1

Nous voulons montrer, que nous pouvons trouver les mêmes équations apparues dans les fonctions de Klein Gordon, par l'utilisation des équations de mouvement.

En effet pour la particule de Klein Gordon de spin 0, nous avons l'action (2.22)

$$Action_1 = \int_0^\lambda d\tau \left\{ \begin{array}{c} p\dot{x} + \left(p^2 - M^2 - i\frac{g}{4}\left(b.(k_1.x) + c.(k_2.x)\right)\left(t_b^a \Upsilon_a \Upsilon_b\right)(k.p)\right) \\ -i\left(\Upsilon.\dot{\Upsilon}\right) \end{array} \right\}. \tag{4.1}$$

D'abord dérivons (4.1) par rapport aux x^μ

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \frac{\delta Action_1}{\delta x^\mu} \\ \rightarrow \quad & \dot{p} + i\frac{g}{4}k \left[\begin{array}{c} \left[(k_1 b + k_2 c) + \left(k_1 b'(k_1.x) + k_2 c'(k_2.x)\right)\right]\left(t_b^a \Upsilon_a \Upsilon_b\right) \\ +\left(b.(k_1.x) + c.(k_2.x)\right)\left(t_b^a \Upsilon'_a \Upsilon_b - t_b^a \Upsilon_a \Upsilon'_b\right) \end{array} \right] = 0, \end{aligned} \tag{4.2}$$

ce qui signifie $p = const.$

Ensuite dérivons (4.1) par rapport aux p^μ

$$\dot{x} = -\frac{\delta Action_1}{\delta p^\mu} = 0 \rightarrow \dot{x} + 2p - i\frac{g}{4}k\left(b.(k_1.x) + c.(k_2.x)\right)\left(t_b^a \Upsilon_a \Upsilon_b\right) = 0. \tag{4.3}$$

Pour les variables de Grassmann

$$\frac{\delta Action_1}{\delta \Upsilon^\mu} = 0 \rightarrow -2i\dot{\Upsilon} - i\frac{g}{2}k\left(b.(k_1.x) + c.(k_2.x)\right)\left(t_b^a \Upsilon_a \Upsilon_b\right) = 0. \tag{4.4}$$

Multiplions les équations précédentes par k_μ et $k_{\mu i}(i=1,2)$, nous trouvons

$$(k.\dot{p}) = 0 \to (k.p) = const; \tag{4.5}$$

$$(k.\dot{x}) = -2\,(k.p) \to \dot{\varphi} = -2\,(k.p)\,; \tag{4.6}$$

$$k_i\dot{x} = -2\,(k_i.p) \to \dot{\varphi}_i = -2\,(k_i.p)\,. \tag{4.7}$$

De plus $\left(k.\dot{\Upsilon}\right) = 0$.

Annexe 2

Nous voulons montrer, que nous pouvons trouver les mêmes équations apparues dans les fonctions de Dirac (approche globale), par l'utilisation des équations de mouvement.

En effet pour la particule de Dirac de spin $\frac{1}{2}$, nous avons l'action (2.57)

$$Action_2 = \int_0^\lambda d\tau \left\{ p\dot{x} + \left(\begin{array}{c} p^2 - M^2 - i\frac{g}{4}\left(b.(k_1.x) + c.(k_2.x)\right)\left(t^a_b\Upsilon_a\Upsilon_b\right)(p.\Psi)(k.\Psi) \\ -\frac{i}{16}\left(t^\alpha_\beta\Upsilon'_\alpha\Upsilon_\beta\right)(p.\Psi)(k.\Psi) \\ -i\left(\Psi.\dot{\Psi}\right) - i\left(\Upsilon.\dot{\Upsilon}\right) \end{array} \right) \right\}. \tag{4.8}$$

D'abord dérivons (4.8) par rapport aux x^μ

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \frac{\delta Action_2}{\delta x^\mu} \\ &\to 0 = \dot{p} + i\frac{g}{4}k \left[\begin{array}{c} \left[(k_1 b + k_2 c) + \left(k_1 b'(k_1.x) + k_2 c'(k_2.x)\right)\right]\left(t^a_b\Upsilon_a\Upsilon_b\right) \\ + \left(b.(k_1.x) + c.(k_2.x)\right)\left(t^a_b\Upsilon'_a\Upsilon_b - t^a_b\Upsilon_a\Upsilon'_b\right) \end{array} \right] \\ &\quad + \frac{i}{16}k\left(t^a_b\Upsilon''_a\Upsilon_b - t^a_b\Upsilon'_a\Upsilon'_b\right)(p.\Psi)\,, \end{aligned} \tag{4.9}$$

ce qui signifie $p = const$.

Ensuite dérivons (4.8) par rapport aux p^{μ}

$$\dot{x} = -\frac{\delta Action_2}{\delta p^{\mu}} \rightarrow \dot{x} + 2p - i\frac{g}{4}k\left(b.(k_1.x) + c.(k_2.x)\right)\left(t^a_b \Upsilon_a \Upsilon_b\right) + i\frac{g}{4}\left(t^a_b \Upsilon'_a \Upsilon_b\right)(k.\Psi)\Psi = 0. \tag{4.10}$$

Pour les variables de Grassmann

$$\begin{aligned}\frac{\delta Action_2}{\delta \Psi^{\mu}} &= 0 \\ &\rightarrow -2i\dot{\Psi} - \frac{i}{4}\left(\frac{1}{4}\left(t^a_b \Upsilon'_a \Upsilon_b\right) + g\left(b.(k_1.x) + c.(k_2.x)\right)\left(t^a_b \Upsilon_a \Upsilon_b\right)\right)\left((k.\Psi)p - (p.\Psi)k\right) = 0,\end{aligned} \tag{4.11}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\delta Action_2}{\delta \Upsilon^{\mu}} &= 0 \\ &\rightarrow -2i\dot{\Upsilon} - i\frac{g}{2}k\left(b.(k_1.x) + c.(k_2.x)\right)\left(t^a_b \Upsilon_a \Upsilon_b\right) - \frac{i}{8}\left(t^a_b \Upsilon_a \Upsilon_b\right)(k.\Psi)p = 0.\end{aligned} \tag{4.12}$$

Multiplions les équations précédentes par k_{μ} et $k_{\mu i}(i = 1, 2)$, nous trouvons

$$(k.\dot{p}) = 0 \rightarrow (k.p) = const; \tag{4.13}$$

$$(k.\dot{x}) = -2(k.p) \rightarrow \dot{\varphi} = -2(k.p); \tag{4.14}$$

$$k_i\dot{x} = -2(k_i.p) \rightarrow \dot{\varphi}_i = -2(k_i.p), \tag{4.15}$$

de plus $\left(k.\dot{\Psi}\right) = 0$ et $\left(k.\dot{\Upsilon}\right) = 0$.

Annexe 3

Nous voulons montrer, que nous pouvons trouver les mêmes équations apparues dans les fonctions de Dirac (approche locale), par l'utilisation des équations de mouvement.

En effet pour la particule de Dirac de spin $\frac{1}{2}$, nous avons l'action (2.118)

$$
Action_3 = \int_0^\lambda d\tau \left\{ \begin{array}{c} p\dot{x} + \left(\begin{array}{c} p^2 - M^2 - i\frac{g}{4}\left(b.(k_1.x) + c.(k_2.x)\right)\left(t^a_b \Upsilon_a \Upsilon_b\right)(p.\Psi)(k.\Psi) \\ -\frac{i}{16}\left(t^a_b \Upsilon'_a \Upsilon_b\right)(p.\Psi)(k.\Psi) \end{array} \right) \\ +\chi \left(\begin{array}{c} -(p.\Psi) + \frac{i}{32}(k.\Psi)\left(\Psi\left(t^a_b \Upsilon'_a \Upsilon_b\right)\right) \\ +i\frac{g}{8}(k.\Psi)\left(b.(k_1.x) + c.(k_2.x)\right)\left(t^a_b \Upsilon_a \Upsilon_b\right) \\ -M\Psi^5 \end{array} \right) \\ -i\left(\Psi.\dot{\Psi}\right) - i\left(\Upsilon.\dot{\Upsilon}\right) \end{array} \right\}. \tag{4.16}
$$

D'abord dérivons (4.16) par rapport aux x^μ

$$
\begin{aligned}
\dot{p} &= \frac{\delta Action_3}{\delta x^\mu} \\
&\rightarrow \dot{p} + i\frac{g}{4}k \left[\begin{array}{c} \left[(k_1 b + k_2 c) + \left(k_1 b'(k_1.x) + k_2 c'(k_2.x)\right)\right]\left(t^a_b \Upsilon_a \Upsilon_b\right) \\ + \left(b.(k_1.x) + c.(k_2.x)\right)\left(t^a_b \Upsilon'_a \Upsilon_b - t^a_b \Upsilon_a \Upsilon'_b\right) \end{array} \right] \\
&\quad + \frac{i}{16}k\left(t^a_b \Upsilon''_a \Upsilon_b - t^a_b \Upsilon'_a \Upsilon'_b\right)(p.\Psi) \\
&\quad -\chi \left(\begin{array}{c} \frac{i}{32}(k.\Psi)\left(\left(t^a_b \Upsilon''_a \Upsilon_b - t^a_b \Upsilon'_a \Upsilon'_b\right)\right)\Psi \\ +i\frac{g}{8}k\left[(k_1 b + k_2 c) + \left(k_1 b'(k_1.x) + k_2 c'(k_2.x)\right)\right]\left(t^a_b \Upsilon_a \Upsilon_b\right) \\ +i\frac{g}{8}k\left(b.(k_1.x) + c.(k_2.x)\right)\left(t^a_b \Upsilon'_a \Upsilon_b - t^a_b \Upsilon_a \Upsilon'_b\right) \end{array} \right) = 0 \\
&\rightarrow \dot{p} = 0,
\end{aligned} \tag{4.17}
$$

ce qui signifie $p = const.$

Ensuite dérivons (4.16) par rapport aux p^μ

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = -\frac{\delta Action_3}{\delta p^\mu} \\
&\rightarrow \dot{x} + 2p - i\frac{g}{4}k\left(b.(k_1.x) + c.(k_2.x)\right)\left(t^a_b \Upsilon_a \Upsilon_b\right) + i\frac{g}{4}\left(\left(t^a_b \Upsilon'_a \Upsilon_b\right)\right)(k.\Psi)\Psi - \chi\Psi = 0.
\end{aligned} \tag{4.18}
$$

Pour les variables de Grassmann

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta Action_3}{\delta \Psi^{\mu}} &= 0 \\
&\rightarrow -2i\dot{\Psi} - \frac{i}{4}\left(\frac{1}{4}\left(t_{b}^{a}\Upsilon_{a}^{\prime}\Upsilon_{b}\right) + g\left(b.(k_{1}.x) + c.(k_{2}.x)\right)\left(t_{b}^{a}\Upsilon_{a}\Upsilon_{b}\right)\right)\left(\left(k.\Psi\right)p - \left(p.\Psi\right)k\right) \\
&\quad -\chi\left(-p + \frac{i}{32}\left(k.\Psi\right)\left(t_{b}^{a}\Upsilon_{a}^{\prime}\Upsilon_{b}\right)k + i\frac{g}{8}k\left(b.(k_{1}.x) + c.(k_{2}.x)\right)\left(t_{b}^{a}\Upsilon_{a}\Upsilon_{b}\right)\right) = 0,
\end{aligned} \tag{4.19}
$$

de plus

$$
\frac{\delta Action_3}{\delta \Psi^{5}} = 0 \rightarrow -2i\dot{\Psi}^{5} = -M\chi \rightarrow \Psi^{5} = -\frac{i}{2}M\chi\tau + const, \tag{4.20}
$$

et

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\delta Action_3}{\delta \Upsilon^{\mu}} \\
&\rightarrow 0 = -2i\dot{\Upsilon} - i\frac{g}{2}k\left(b.(k_{1}.x) + c.(k_{2}.x)\right)\left(t_{b}^{a}\Upsilon_{a}\Upsilon_{b}\right) - \frac{i}{8}\left(t_{b}^{a}\Upsilon_{a}\Upsilon_{b}\right)\left(k.\Psi\right)p \\
&\quad -\chi\left(\frac{i}{16}\left(k.\Psi\right)\Psi + i\frac{g}{4}\left(b.(k_{1}.x) + c.(k_{2}.x)\right)k\right)\left(t_{b}^{a}\Upsilon_{a}\Upsilon_{b}\right).
\end{aligned} \tag{4.21}
$$

Multiplions les équations précédentes par k_{μ} et $k_{\mu i}(i = 1, 2)$, nous trouvons

$$
(k.\dot{p}) = 0 \rightarrow (k.p) = const; \tag{4.22}
$$

$$
(k.\dot{x}) = -2\left(k.p\right) \rightarrow \dot{\varphi} = -2\left(k.p\right); \tag{4.23}
$$

$$
k_{i}\dot{x} = -2\left(k_{i}.p\right) \rightarrow \dot{\varphi}_{i} = -2\left(k_{i}.p\right), \tag{4.24}
$$

de plus $\left(k.\dot{\Psi}\right) = 0$ et $\left(k.\dot{\Upsilon}\right) = 0$.

Annexe 4

Par ordre, pour clarifié le rôle de la fonction f définie par (3.22), nous allons retourné aux équations (3.60) et (3.77) qui représentent les deux noyaux de Klein Gordon et de Dirac respectivement. Nous allons procédé aux intégrations sur les p, dans le but d'écrire $K\left(x_b, x_a; s\right)$ ou $S_D\left(x_b, x_a; s\right)$ sous une forme plus approprié.

Pour cela, nous allons introduire l'identité

$$\int d\omega\delta\left(\omega - pks\right) = \int d\omega\frac{dp_\omega}{2\pi}e^{ip_\omega(\omega - pks)} = 1, \tag{4.25}$$

dans l'expression (3.77). Nous allons obtenir

$$\begin{aligned} S_{D}\left(x_b, x_a; s\right) &= f_b e^{-\frac{i}{2}\int_{kx_a}^{kx_b} du\vec{\sigma}.\left(\frac{d\vec{m}}{du}\times\vec{m}(u)\right)}\frac{1}{f_a}e^{-i\frac{\tau g}{2}\left(x_b\bar{A}(kx_b) - x_a\bar{A}(kx_a)\right)} \\ &\times\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int d\omega\int\frac{dp_\omega}{2\pi}\left(1 + \frac{\tau gs}{4\omega}\not{k}\not{\bar{A}}_b\right)\left(1 - \frac{\tau gs}{4\omega}\not{k}\not{\bar{A}}_a\right) \\ &\times e^{i\left\{p_\omega(\omega - pks) + p(x_b - x_a) + \left(p^2 - M^2\right)s + \frac{\tau gs}{2\omega}\int_{kx_a}^{kx_b} du\left(p\bar{A}(u) - \frac{g\tau}{4}\bar{A}^2(u)\right)\right\}}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

L'identité (4.25) ségnifi que

$$\omega - pks = 0 \rightarrow pk = \frac{\omega}{s}. \tag{4.27}$$

Puis, faisons le changement $p \rightarrow p + \frac{1}{2}kp_\omega$. Les trois termes qui dépends de p dans l'exposent de l'exponentielle devient

$$\begin{aligned} & p_\omega\left(\omega - pks\right) + p\left(x_b - x_a\right) + \left(p^2 - M^2\right)s \\ \rightarrow\ & p_\omega\left(\omega - \left(p + \frac{1}{2}kp_\omega\right)ks\right) + \left(p + \frac{1}{2}kp_\omega\right)\left(x_b - x_a\right) + \left(\left(p + \frac{1}{2}kp_\omega\right)^2 - M^2\right)s \\ =\ & p_\omega\left(\omega - pks + \frac{1}{2}kp_\omega ks\right) + p\left(x_b - x_a\right) + \frac{1}{2}kp_\omega\left(x_b - x_a\right) + \left(p^2 + pkp_\omega + \left(kp_\omega\right)^2 - M^2\right)s \\ =\ & p_\omega\omega - pkp_\omega s + p\left(x_b - x_a\right) + \frac{1}{2}kp_\omega\left(x_b - x_a\right) + \left(p^2 - M^2\right)s + pkp_\omega s \\ =\ & p_\omega\left(\omega + \frac{1}{2}k\left(x_b - x_a\right)\right) + p\left(x_b - x_a\right) + \left(p^2 - M^2\right)s, \end{aligned} \tag{4.28}$$

les autres termes restes inchangeables.

Par la suite, le noyau devient

$$
\begin{aligned}
S_D\left(x_b, x_a; s\right) &= f_b e^{-\frac{i}{2}\int_{kx_a}^{kx_b} du\,\vec{\sigma}.\left(\frac{d\vec{m}}{du}\times\vec{m}(u)\right)} \frac{1}{f_a} e^{-i\frac{\tau g}{2}\left(x_b \bar{A}(kx_b) - x_a \bar{A}(kx_a)\right)} \\
&\times \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int d\omega \frac{dp_\omega}{2\pi} \left(1 + \frac{\tau g s}{4\omega} \not{k}\bar{\not{A}}_b\right)\left(1 - \frac{\tau g s}{4\omega}\not{k}\bar{\not{A}}_a\right) \\
&\times e^{i\left\{p_\omega\left(\omega + \frac{1}{2}k(x_b - x_a)\right) + p(x_b - x_a) + \left(p^2 - M^2\right)s + \frac{\tau g s}{2\omega}\int_{kx_a}^{kx_b} du\left(p\bar{A}(u) - \frac{g\tau}{4}\bar{A}^2(u)\right)\right\}}.
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

Maintenant, nous allons performé les intégration sur les p_ω : il apparue une fonction de Dirac $\delta\left(\omega + \frac{1}{2}k\left(x_b - x_a\right)\right)$

$$
\begin{aligned}
S_D\left(x_b, x_a; s\right) &= f_b e^{-\frac{i}{2}\int_{kx_a}^{kx_b} du\,\vec{\sigma}.\left(\frac{d\vec{m}}{du}\times\vec{m}(u)\right)} \frac{1}{f_a} e^{-i\frac{\tau g}{2}\left(x_b \bar{A}(kx_b) - x_a \bar{A}(kx_a)\right)} \\
&\times \int \frac{d^4p}{(2\pi)_4} \int \frac{d\omega}{2\pi} \delta\left(\omega + \frac{1}{2}k\left(x_b - x_a\right)\right) \left(1 + \frac{\tau g s}{4\omega} \not{k}\bar{\not{A}}_b\right)\left(1 - \frac{\tau g s}{4\omega}\not{k}\bar{\not{A}}_a\right) \\
&\times e^{i\left\{p(x_b - x_a) + \left(p^2 - M^2\right)s + \frac{\tau g s}{2\omega}\int_{kx_a}^{kx_b} du\left(p\bar{A}(u) - \frac{g\tau}{4}\bar{A}^2(u)\right)\right\}},
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

intégration sur ω, nous avons le résultat

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{d\omega}{2\pi} \delta\left(\omega + \frac{1}{2}k\left(x_b - x_a\right)\right)\left(1 + \frac{\tau g s}{4\omega}\not{k}\bar{\not{A}}_b\right)\left(1 - \frac{\tau g s}{4\omega}\not{k}\bar{\not{A}}_a\right) e^{i\left\{\frac{\tau g s}{2\omega}\int_{kx_a}^{kx_b} du\left(p\bar{A}(u) - \frac{g\tau}{4}\bar{A}^2(u)\right)\right\}} \\
= &\left(1 - \frac{\tau g s}{2k\left(x_b - x_a\right)}\not{k}\bar{\not{A}}_b\right)\left(1 + \frac{\tau g s}{2k\left(x_b - x_a\right)}\not{k}\bar{\not{A}}_a\right) e^{i\left\{-\frac{\tau g s}{k(x_b - x_a)}\int_{kx_a}^{kx_b} du\left(p\bar{A}(u) - \frac{g\tau}{4}\bar{A}^2(u)\right)\right\}}.
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

Donc, S_D se réécrit

$$
\begin{aligned}
S_D\left(x_b, x_a; s\right) &= f_b e^{-\frac{i}{2}\int_{kx_a}^{kx_b} du\,\vec{\sigma}.\left(\frac{d\vec{m}}{du}\times\vec{m}(u)\right)} \frac{1}{f_a} e^{-i\frac{\tau g}{2}\left(x_b \bar{A}(kx_b) - x_a \bar{A}(kx_a)\right)} \\
&\times \left(1 - \frac{\tau g s}{2k\left(x_b - x_a\right)}\not{k}\bar{\not{A}}_b\right)\left(1 + \frac{\tau g s}{2k\left(x_b - x_a\right)}\not{k}\bar{\not{A}}_a\right) \\
&\times \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{i\left\{p\left[(x_b - x_a) - \frac{\tau g s}{k(x_b - x_a)}\int_{kx_a}^{kx_b} du\bar{A}(u)\right]\right\}} e^{i\left\{\left(p^2 - M^2\right)s + \frac{(\tau g)^2 s}{4k(x_b - x_a)}\int_{kx_a}^{kx_b} du\bar{A}^2(u)\right\}}
\end{aligned}
\tag{4.32}
$$

ou bien

$$
\begin{aligned}
S_{_D}\left(x_b,x_a;s\right) &= f_b e^{-\frac{i}{2}\int_{kx_a}^{kx_b} du\vec{\sigma}.\left(\frac{d\vec{m}}{du}\times\vec{m}(u)\right)}\frac{1}{f_a}e^{-i\frac{\tau g}{2}\left(x_b\bar{A}(kx_b)-x_a\bar{A}(kx_a)\right)} \\
&\times\left(1-\frac{\tau g s}{2k\left(x_b-x_a\right)}\not{k}\bar{\not{A}}_b\right)\left(1+\frac{\tau g s}{2k\left(x_b-x_a\right)}\not{k}\bar{\not{A}}_a\right) \\
&\times\int\frac{d^4p}{\left(2\pi\right)^4}e^{i\left(p^2s+pX\right)}e^{i\left\{-M^2s+\frac{(\tau g)^2 s}{4k(x_b-x_a)}\int_{kx_a}^{kx_b}du\bar{A}^2(u)\right\}},
\end{aligned}
\tag{4.33}
$$

avec

$$
X = x_b - x_a - \frac{g\tau s}{k\left(x_b-x_a\right)}\int_{kx_a}^{kx_b} du\bar{A}\left(u\right). \tag{4.34}
$$

Donc, la fonction qui dépend de p devient une Gaussienne, c'est ainsi que le résultat de l'intégration est bien déterminé

$$
\begin{aligned}
\int d^4pe^{i\left(p^2s+pX\right)} &= -i\left(\frac{\pi}{s}\right)^2\exp\left\{-i\frac{X^2}{4s}\right\} \\
&= -i\left(\frac{\pi}{s}\right)^2 e^{i\left\{\begin{array}{c} -\frac{(\tau g)^2 s}{4}\left(\frac{1}{k(x_b-x_a)}\int_{kx_a}^{kx_b}du\bar{A}\left(u\right)\right)^2 \\ -\frac{(x_b-x_a)^2}{4s}+\frac{\tau g}{2}\frac{1}{k(x_b-x_a)}\int_{kx_a}^{kx_b}du\left(x_b-x_a\right)\bar{A}\left(u\right)\end{array}\right\}}.
\end{aligned}
\tag{4.35}
$$

Nous avons

$$
\begin{aligned}
S_{_D}\left(x_b,x_a;s\right) = \frac{-i}{\left(4\pi s\right)^2} \quad & f_b e^{-\frac{i}{2}\int_{kx_a}^{kx_b} du\left[\vec{\sigma}.\left(\frac{d\vec{m}}{du}\times\vec{m}(u)\right)\right]}\frac{1}{f_a}e^{-i\frac{\tau g}{2}\left[x_b\bar{A}(kx_b)-x_a\bar{A}(kx_a)\right]} \\
&\times\left\{1-\frac{\tau g s}{2k\left(x_b-x_a\right)}\not{k}\bar{\not{A}}_b\right\}\left\{1+\frac{\tau g s}{2k\left(x_b-x_a\right)}\not{k}\bar{\not{A}}_a\right\} \\
&\times e^{i\left\{\begin{array}{c} -M^2s-\frac{(x_b-x_a)^2}{4s}+\frac{\tau g}{2}\frac{1}{k(x_b-x_a)}\int_{kx_a}^{kx_b}du\left(x_b-x_a\right)\bar{A}\left(u\right) \\ +\frac{(\tau g)^2 s}{4}\left[\frac{1}{k(x_b-x_a)}\int_{kx_a}^{kx_b}du\bar{A}^2\left(u\right)-\left(\frac{1}{k(x_b-x_a)}\int_{kx_a}^{kx_b}du\bar{A}\left(u\right)\right)^2\right]\end{array}\right\}}.
\end{aligned}
\tag{4.36}
$$

A ce niveau, nous allons considéré une approximation de S_D au voisinage de $x_a \simeq x_b$. Utilisons le développement autour du mid-point $\bar{x} = \frac{x_b+x_a}{2}$ et les propriétés de l'onde plane, les termes de l'équation (4.36) deviennent respectivement

$$
\begin{aligned}
& \frac{(g\tau)^2 s}{4k(x_b - x_a)} \left[\int_{kx_a}^{kx_b} du \bar{A}^2(u) - \frac{1}{k(x_b - x_a)} \left(\int_{kx_a}^{kx_b} du \bar{A}(u) \right)^2 \right] \\
= & \frac{(g\tau)^2 s}{4k(x_b - x_a)} \left[\int_{kx_a}^{kx_b} du \bar{A}_\mu(u) \bar{A}_\nu(u) - \frac{1}{k(x_b - x_a)} \left(\int_{kx_a}^{kx_b} du \bar{A}_\mu(u) \right) \left(\int_{kx_a}^{kx_b} du \bar{A}_\nu(u) \right) \right] \\
\simeq & \frac{(g\tau)^2 s}{4k(x_b - x_a)} \left[\left(-\frac{1}{12} k(x_b - x_a) \right) (x_b - x_a)^\mu k_\mu \bar{A}'_\nu(\bar{u}) \bar{A}'^\nu(\bar{u}) k^\rho (x_b - x_a)_\rho \right] \\
= & -\frac{(g\tau)^2 s}{48} (x_b - x_a)^\mu \bar{F}_{\mu\nu}(\bar{u}) \bar{F}^{\nu\rho}(\bar{u}) (x_b - x_a)_\rho \\
= & -\frac{g^2 s}{48} (x_b - x_a)^\mu F_{\mu\nu new}(\bar{u}) F^{\nu\rho}_{new}(\bar{u}) (x_b - x_a)_\rho ,
\end{aligned}
\tag{4.37}
$$

$$
\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{\tau g s}{2k(x_b - x_a)} \not{k} \bar{\not{A}}_b\right) \left(1 + \frac{\tau g s}{2k(x_b - x_a)} \not{k} \bar{\not{A}}_a\right) = 1 - \frac{\tau g s}{2k(x_b - x_a)} \not{k} \left(\bar{\not{A}}_b - \bar{\not{A}}_a\right) \\
= & e^{-\frac{\tau g s}{2k(x_b - x_a)} \not{k} \left(\bar{\not{A}}_b - \bar{\not{A}}_a\right)} \\
\simeq & e^{-\frac{\tau g s}{2} \not{k} \bar{\not{A}}'(\bar{u})} = e^{-i \frac{\tau g s}{4} \sigma^{\mu\nu} \bar{F}_{\mu\nu}} = e^{-i \frac{g s}{4} \sigma^{\mu\nu} F_{new\mu\nu}(\bar{u})},
\end{aligned}
\tag{4.38}
$$

$$
x_b \bar{A}(kx_b) - x_a \bar{A}(kx_a) \simeq (x_b - x_a) \bar{A}(\bar{u}) + (kx_b - kx_a) \left(\bar{x} \bar{A}'(\bar{u})\right),
\tag{4.39}
$$

$$
\frac{1}{k(x_b - x_a)} \int_{kx_a}^{kx_b} du (x_b - x_a) \bar{A}(u) \simeq (x_b - x_a) \bar{A}(\bar{u}),
\tag{4.40}
$$

$$
\int_{kx_a}^{kx_b} du \left[\vec{\sigma} . \left(\frac{d\vec{m}}{du} \times \vec{m}(u) \right) \right] \simeq (kx_b - kx_a) \vec{\sigma} \left(\frac{d\vec{m}}{du} \times \vec{m}(\bar{u}) \right),
\tag{4.41}
$$

où $\bar{u} = k\bar{x}$ et $\bar{A}'_\nu = \frac{d\bar{A}_\nu(\bar{u})}{d\bar{u}}$ représente la dérivation et $\bar{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \bar{A}_\nu - \partial_\nu \bar{A}_\mu$ est le tenseur usuel relié à $\bar{A}_\mu$ donné par (3.48).

Donc, $S_{_D}(x_b,x_a;s)$ se simplifié

$$S_{_D}(x_b,x_a;s)=\frac{-i}{(4\pi s)^2}\quad f_b e^{-\frac{i}{2}(kx_b-kx_a)\vec{\sigma}\left(\frac{d\vec{m}}{du}\times\vec{m}(\bar{u})\right)}\frac{1}{f_a}e^{-i\frac{\tau g}{2}\left[(x_b-x_a)\bar{A}(\bar{u})+(kx_b-kx_a)\left(\bar{x}\bar{A}'(\bar{u})\right)\right]}$$
$$\times e^{-i\frac{gs}{4}\sigma^{\mu\nu}F_{new\mu\nu}(\bar{u})}e^{i\left\{\begin{array}{c}-M^2 s-\frac{(x_b-x_a)^2}{4s}+\frac{\tau g}{2}(x_b-x_a)\bar{A}(\bar{u})\\ -\frac{g^2 s}{48}(x_b-x_a)^{\mu}F_{_{new\mu\nu}}(\bar{u})F^{\nu\rho}_{_{new}}(\bar{u})(x_b-x_a)_{_\rho}\end{array}\right\}},\tag{4.42}$$

où

$$\begin{aligned}&-\frac{(x_b-x_a)^2}{4s}-\frac{g^2 s}{48}(x_b-x_a)^{\mu}F_{_{new\mu\nu}}(\bar{u})F^{\nu\rho}_{_{new}}(\bar{u})(x_b-x_a)_{_\rho}\\ =\;&-\frac{(x_b-x_a)^{\mu}}{4s}\left[\delta^{\rho}_{_\mu}+\frac{(gs)^2}{12}\bar{F}_{_{\mu\nu}}(\bar{u})\bar{F}^{\nu\rho}(\bar{u})\right](x_b-x_a)_{_\rho},\end{aligned}\tag{4.43}$$

et

$$\left[\begin{array}{c}-\frac{i}{2}(kx_b-kx_a)\vec{\sigma}\left(\frac{d\vec{m}}{du}\times\vec{m}(\bar{u})\right)+\frac{\tau g}{2}(x_b-x_a)\bar{A}(\bar{u})\\ -i\frac{\tau g}{2}\left[(x_b-x_a)\bar{A}(\bar{u})+(kx_b-kx_a)\left(\bar{x}\bar{A}'(\bar{u})\right)\right]\end{array}\right]=-i\frac{g}{2}(x_b-x_a)A_{_{new}}(\bar{u}).\tag{4.44}$$

Donc, l'expression du noyau $S_{_D}$ relié au champ non-Abélien au voisinage du mid-point $x_b\simeq x_a$ a la forme

$$S_{_D}(x_b,x_a;s)\simeq\frac{-i}{(4\pi s)^2}f_b e^{-i\frac{g}{2}(x_b-x_a)A_{new}(\bar{u})}\frac{1}{f_a}e^{i\left\{\begin{array}{c}-M^2 s-\frac{gs}{4}\sigma^{\mu\nu}\bar{F}(\bar{u})\\ -\frac{(x_b-x_a)^{\mu}}{4s}\left[\delta^{\rho}_{_\mu}+\frac{(gs)^2}{12}\bar{F}_{_{\mu\nu}}(\bar{u})\bar{F}^{\nu\rho}(\bar{u})\right](x_b-x_a)_{_\rho}\end{array}\right\}}.\tag{4.45}$$

Grâce à la transformation (3.22), $S_{_D}$ est une produit de

- premier facteur

$$f_{_b}e^{-i\frac{g}{2}(x_b-x_a)A_{new}(u)}\frac{1}{f_a}\bigg|_{x_b\to x_a}\;\to\;1,\tag{4.46}$$

indépendant du variable s, mais dépend des générateurs du groupe $SU(2)$ où leurs trace égale à 2 $(tr=2)$.

- deuxième facteur, dépend de variable s, mais indépendant des générateurs du groupe $SU\left(2\right)$, qui a une forme similaire (en exception pour le signe de métrique) à l'expression obtenu par Schwinger pour un champ constant (Eq.3.12 of [11])

$$(\text{Eq.3.12 of [11]}) = \frac{-i}{16\pi^2}\frac{1}{s^2}e^{-\frac{1}{2}tr\ln\left((eFs)^{-1}\sinh(eFs)\right)}e^{i\left\{\frac{1}{4}(x'-x'')eF\coth(eFs)(x'-x'')+\frac{es}{2}\sigma F\right\}}, \tag{4.47}$$

avec $e=\frac{g}{2}$. Si nous prenons l'approximation pour des champs faibles $\left(F=\bar{F}<<\right)$, nous obtenons

$$(4.47)_{\vec{F}<<} = \frac{-i}{16\pi^2}\frac{1}{s^2}\left.e^{i\left\{-\frac{gs}{4}\sigma^{\mu\nu}\bar{F}_{\mu\nu}(u)-\frac{(x_b-x_a)^\mu}{4s}\left[\delta^\rho_\mu+\frac{(gs)^2}{12}\bar{F}_{\mu\nu}(u)\bar{F}^{\nu\rho}(u)\right](x_b-x_a)_\rho\right\}}\right|_{u=k\bar{x}}. \tag{4.48}$$

De plus, grâce au fonction f, les noyaux sont séparé en deux parties, une contient les générateurs du groupe $SU\left(2\right)$, l'autre pour $x_a\simeq x_b$ contient la fonction de Lagrange, qui dépend seulement des invariants électromagnétiques.

La fonctions de Lagrange, est définie à partir de l'action effective par la relation

$$W=\int d^4x\mathcal{L}. \tag{4.49}$$

Maintenant, utilisons les deux équations (3.17) et (3.67), puis contournons les divergences quand $s=0$, ensuite absorbons ces divergences par la normalisation des champs et des charges. La fonction de Lagrange finie et l'invariant de jauge pour un champ constant [11] (aprés qu'on prend la trace sur les matrices γ) est égale à

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{spin\ 1/2} = &-\left(1+2\times\frac{\left(\frac{g}{2}\right)^2}{12\pi^2}\int_0^\infty\frac{ds}{s}e^{-M^2s}\right)\mathcal{F}\\ &-2\times\frac{\left(\frac{g}{2}\right)^2}{8\pi^2}\int_0^\infty\frac{ds}{s^3}e^{-M^2s}\left[\left(\frac{g}{2}s\right)^2\mathcal{G}\frac{\operatorname{Re}\cosh\frac{g}{2}sX}{\operatorname{Im}\cosh\frac{g}{2}sX}-1-\frac{2}{3}\left(\frac{g}{2}s\right)^2\mathcal{F}\right],\end{aligned} \tag{4.50}$$

avec

$$X = 2\left(\mathcal{F}+i\mathcal{G}\right)^{1/2}, \tag{4.51}$$

$$\mathcal{F} = \bar{F}_{\mu\nu}\bar{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\vec{H}^2 - \vec{E}^2\right), \tag{4.52}$$

$$\mathcal{G} = \frac{1}{4}\bar{F}_{\mu\nu}\tilde{\bar{F}}^{\mu\nu} = \vec{E}.\vec{H}. \tag{4.53}$$

l'addition du facteur 2 parvient à partir du calcul de la trace du premier facteur de (4.47).

Aprés le développement en séries de $\frac{1}{M}$, nous allons trouvé $\mathcal{L}_{spin\ 1/2} = -\mathcal{F} + 2\times\frac{2\alpha^2(1/M)^3}{45M}\left[4\mathcal{F}^2 + 7\mathcal{G}\right] + ...$ où $\alpha = \frac{\left(\frac{g}{2}\right)^2}{4\pi}$.

Les coefficients en fonction de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont plus compatibles avec l'invariant de Lorentz. Dans notre cas, concernant l'onde plane, la fonction de Lagrange devient nulle quand $\mathcal{F} = \mathcal{G} = 0$ i.e. $\mathcal{L}_{spin\ 1/2}\Big|_{\mathcal{F}=\mathcal{G}=0} \to 0$.

Pour le cas de spin 0, le terme $tr\left(e^{-i\frac{gs}{4}\sigma^{\mu\nu}F_{new\mu\nu}(u)}\right)$ soit absent quand les matrices γ^μ soit abssents. Donc, l'invariant Lagrangien de jauge total the total est (Eq.3.54 of [11])

$$\mathcal{L}_{spin\ 0} = -\mathcal{F} + 2\times\frac{\left(\frac{g}{2}\right)^2}{16\pi^2}\int_0^\infty \frac{ds}{s^3}e^{-M^2 s}\left[\left(\frac{g}{2}s\right)^2\mathcal{G}\frac{1}{\mathrm{Im}\cosh\frac{g}{2}sX} - 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{g}{2}s\right)^2\mathcal{F}\right], \tag{4.54}$$

et après, le développement en séries de $\frac{1}{M}$, les coefficients compatible avec l'invariant de Lorentz, sont nuls pour l'onde plane. Nous avons

$$\mathcal{L}_{spin\ 0} = -\mathcal{F} + 2\times\frac{2\alpha^2(1/M)^3}{90M}\left[\frac{7}{4}\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}\right] + ...\Big|_{\mathcal{F}=\mathcal{G}=0}. \tag{4.55}$$

Bibliographie

[1] R.P. Feynman, Rev. Mod. Phys. **20**, 367 (1948).

[2] R.P. Feynman and A.R.Hibbs, Quantum Mechanics and Path Integrals, Mc-Graw-Hill, New York, (1965).

[3] A. Faddeev, K. Popov, Rev. Mod. Phys. **43**, 29 (1967).

[4] De Witt, Phys. Lett., A **37**, 67 (1968).

[5] B. Wilson, Eur. Phys. B **14**, 27 (1972).

[6] A. Kac, Phys. Lett., B **70**, 59(1974).

[7] O.Klein, Z. Phys. **53**, 157 (1929).

[8] F.Sauter, Z. Phys. **69**, 742 (1931) ; Z. Phys. **73**, 547 (1931).

[9] W.Heisenberg and H.Euler, Z. Phys. **98**, 714 (1936).

[10] G.V.Dunne, arXiv : hep-th/0406216.

[11] J.Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).

[12] A.Ringwald, Phys. Lett. B **510**, 107 (2001).

[13] M.Soffel, B.Müller and W.Greiner, Phys. Rep. **85**, 51 (1982).

[14] W.Greiner, B.Müller and J.Rafelski, Quantum Electrodynamics of Strong Fields, Springer-Verlag, Berlin, (1985).

[15] A. Casher, H.Neuberger and S.Nussinov, Phys. Rev. D **20**, 179 (1979).

[16] B. Andersson, G. Gustafson, G. Ingelman and C. Sjöstrand, Phys. Rep. **97**, 31 (1983).

[17] H. Neuberger, Phys. Rev. D **20**, 2936 (1979).

[18] R.C.Wang and C.Y.Wong, Phys. Rev. D **38**, 348 (1988).

[19] S.P. Kim and D.N.Page, Phys. Rev. D **75**, 045013 (2007).

[20] G. Gato and C.Y.Wong, Phys. Rev. D **46**, 997 (1992).

[21] C.Y.Wong, R.C.Wang and J.S.Wu, Phys. Rev. D **51**, 3940 (1995).

[22] Th. Schönfeld, A.Schäfer, B.Müller, K. Sailer, J. Reinhardt and W.Greiner, Phys. Lett.B **247**, 5 (1990).

[23] D. M. Gitman, J. Phys. A **10**, 2007 (1977).

[24] N.K. Glendenning and T.Matsui, Phys. Rev. D **28**, 2890 (1983).

[25] Y. Kluger, J.M.Eisenberg and B.Svetitsky, Int. J. Mod. Phys. E **2**, 333 (1993).

[26] Y. Kluger, E.Mottola and J.M.Eisenberg, Phys. Rev. D **58**, 125015 (1998).

[27] K. Kajantie and T.Matsui, Phys. Lett. B **164**, 373 (1985).

[28] G. Gato , A.K.Kerman and T.Matsui, Phys. Rev. D **36**, 114 (1987).

[29] M. Asakawa and T.Matsui, Phys. Rev. D **43,** 2871 (1991).

[30] J. Rau, Phys. Rev. D **50**, 6911 (1994).

[31] J. Rau and B.Müller, Phys. Rep. **272**, 1 (1996).

[32] S.M. Schmidt, D. Blaschke, G. Röpke, S.A. Smolyansky, A.V. Prozorkevich and V.D. Toneev, Int. J. Mod. Phys. E **7**, 709 (1998) ; Phys. Rev. D **59**, 094005 (1999).

[33] J.C.R. Bloch, V.A. Mizerny, A.V. Prozorkevich, C.D. Roberts, S.M. Schmidt, S.A. Smolyansky and D.V. Vinnik, Phys. Rev. D **60**, 116011 (1999).

[34] D.V. Vinnik, A.V. Prozorkevich, S.A. Smolyansky, V.D. Toneev, M.B. Hecht, C.D. Roberts and S.M. Schmidt, Eur. Phys. J. C **22**, 341 (2001).

[35] A.V. Tarakanov, A.V. Reichel, S.A. Smolyansky, D.V. Vinnik and S.M. Schmidt, arXiv :hep-ph/0212200.

[36] A.I. Nikishov, Sov. Phys. JETP **30**, 660 (1970).

[37] N.B. Narozhny and A.I. Nikishov, Sov. J. Nucl. Phys. **32**, 596 (1970).

[38] A.I. Nikishov, Nucl. Phys. B **21**, 346 (1970).

[39] A. Yildiz and P.H. Cox, Phys. Rev. D **21**, 1095 (1980).

[40] J. Ambjörn and R.J. Hughes, Ann. Phys. **145**, 340 (1983).

[41] M. Gyulassy and A. Iwazaki, Phys. Lett. B **165**, 157 (1985).

[42] G.C. Nayak and P. Nieuwenhuizen, Phys. Rev. D **71**, 125001 (2005).

[43] G.C. Nayak, Phys. Rev. D **72**, 125010 (2005).

[44] R. Brout, S. Massar, R. Parentani and Ph. Spindel, Phys. Rep. **260**, 329 (1995).

[45] T. Damour, Proceedings of the First Marcel Grossmann Meeting on General Relativity, NorthHolland, p. 459 (1977).

[46] N.D. Birrell and P.C.W. Davies, Quantum Fields in Curved Space, Cambridge Univ. Press, Cambrige, (1982).

[47] S.A. Fulling, Aspects of Quantum Field theory in Curved Space -Time, CambrigeUniv. Press, Cambridge (1989).

[48] A. Obukhov, V .K. Perez Fernandez, and V. R. Khalilov. Russ. Phys. J. **29**, 12 (1986).

[49] S. Coleman, Phys. Lett., B **70**, 59 (1977).

[50] T. Boudjedaa, L. Chetouani, L. Guechi, T.F. Hammann ; Phys. Scr. **46**, 289 (1992).

[51] S. Zeggari , T. Boudjedaa, L. Chetouani. Phys. Scr. **64** 285 (2001).

[52] N. Boudiaf, T. Boudjedaa, L Chetouani, Eur. Phys. J. C **20**, 3585 (2001).

[53] D. M. Gitman and A V Saa ; Class Quantum Grav. **10**, 1447(1993).

[54] E.S Frandkin and D.M. Gitman, Rev. D **44**, 3230 (1991).

[55] C. Alexandrou, R. Rosenfelder, and A.W. Schreiber, Phys. Rev. A **59,** 3 (1998).

[56] E. S. Fradkin ; Nucl. Phys. **76,** 588 (1965).

[57] B. M. Barbashov. JETP, **48,** 607 (1965).

[58] A. I. Nikishov, V.I. Ritus ; Zh. Ekps. Teor. Fiz. **56,** 2035 (1969).

[59] A. Barducci, F. Bordi and R. Casalbuoni. Nuov. Cim. B **64,** 287 (1981).

[60] I. A. Batalin, E. S. Fradkin ; Teor. Mat. Fiz. **5,** 190 (1970).

[61] S. P. Gavrilov, D. M Gitman and Sh. M. Shvartsman. Sov. J. Nucl. Phys. **29,**1392 (1979).

[62] N. Boudiaf ; A. Merdaci and L. Chetouani. J.Phys. A. Math. Theor. 4201530307 (2008).

[63] S. Haouat, L. Chetouani. Eur. Phys. J. C **53**, 289 (2008).

[64] D.C. Khandekar and S.V. Lawande. Phys. Rep. 137, (1986).

[65] F.A.Berezin, M. S. Marinove. ann. Phys. 104 (1977).

[66] L.Brink, P. Di-Vecchia and P. Howe. Nucl. Phys. B **118,** 76 (1977).

[67] D. M Gitman, Sh. M. Shvartsman. Phys; Lett, B **318,** 122-126 **(**1993**).**

[68] D. M. Gitman. Nucl. Phys. B **488**, 490 (1997).

[69] J.D. Bjorken, S.D. Drell, Relativistic quantum mechanics, Mc-Graw Hill, New York (1964).

[70] E. Brezin, C. Itzykson. Phys. Rev. D **2**, 1191 (1970).

[71] A. Casher, H. Neuberger, S. Nussinov. Phys. Rev. D **21**, 1966 (1980).

[72] I. K. Affeck, O. Alvarez, N. S. Manton. Nucl. Phys. B **197**, 509 (1982).

[73] L. Qiong-gui, J. Phys. G, Nucl. Part. Phys. **25**, 1793 (1999).

[74] L. Qiong-gui, J. Phys. G, Nucl. Part. Phys. **26,** L 17 (2000).

[75] G.C. Nayak, Phys. Rev. D 72, 125010 (2005).

[76] F. Cooper, G.C. Nayak. Phys. Rev. D **73**, 065005 (2006).

[77] B. Hamil and L. Chetouani. Phys. Scr. **89**,115301 (2014).

Articles

Eur. Phys. J. Plus (2015) **130**: 42
DOI 10.1140/epjp/i2015-15042-4

THE EUROPEAN PHYSICAL JOURNAL PLUS

Regular Article

Pair creation by a SU(2) non-Abelian plane wave

S. Boudieb[1,2] and L. Chetouani[2,a]

[1] Département de Physique, Université de Jijel, Jijel, Algeria
[2] Département de Physique, Université des Frères Mentouri, Constantine, Algeria

Received: 3 September 2014 / Revised: 23 January 2015
Published online: 10 March 2015 –

Abstract. A $SU(2)$ non-Abelian plane wave group is used to study the process of pair creation of particles of spin 0 and 1/2. Using the plane wave properties and some shifts and by algebric calculation, it is shown that in both cases of spin 0 and 1/2 the effective actions and the probabilities are null, *i.e.* no particles pair can be created from vacuum with such a field.

1 Introduction

It is well known that the basis of the modern physics is the gauge theory and that some physical processes, in quantum chromodynamics for example, are described by coupled equations such as Dirac and Yang-Mills equations. In general, the solution of these two equations is possible only for particular cases of configurations because a simultaneous resolution is required. However, among configurations there are fields which have particular characteristics as bounded energy density, the direction and the magnitude of the Poynting vector, respectively, constant and equal to the energy density. These fields are plane waves. In non-Abelian case, from the motion equation

$$\partial^\mu F^a_{\mu\nu} + c^{abc} A^{\mu b} F^c_{\mu b} = 0,$$

where

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + c^{abc} A^a_\nu A^a_\mu,$$

is the strength field, their characteristics have been discussed by [1] and the configuration in the particular case of $SU(2)$ group has been considered by Obukhov [2] who obtained analytical solutions for the Dirac equation.

In the present paper, it appears useful for us to consider this same configuration of the non-Abelian plane wave in the process of pair creation, known to be the one of the most important in physics. It is important to mention some works on this process, for example [3–9], and in particular [10], where an analytical expression has been obtained for the probability of pair creation when the vacuum is perturbed by a constant electric field and recently the determination of the probability when the interaction is a time-dependent electric chromodynamics field [11,12].

The non-Abelian plane wave in question, which is taken in consideration in the present work, has the following form [2]:

$$A_\mu = A^a_{\mu} \sigma^a = \vec{A}_\mu \vec{\sigma}, \tag{1}$$

where

$$\vec{A}_{\mu} = k_{\mu} \left\{ \vec{m} \left[(k_1 x)\, b + (k_2 x) c \right] + \frac{1}{g} \left(\frac{\mathrm{d}\vec{m}}{\mathrm{d}(kx)} \times \vec{m} \right) \right\} \tag{2}$$

are the partial components of the field, $\sigma^a = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ the $SU(2)$ generators of the group, $a = (1, 2, 3)$ the color index, $b = b(kx)$, $c = c(kx)$ and $\vec{m} = \vec{m}(kx)$ functions of the product kx only, in addition to the following condition on $\vec{m}$:

$$\vec{m}^2 = 1. \tag{3}$$

[a] e-mail: lyazidchetouani@gmail.com

The 4-polarization vectors k_1, k_2 and k characterize the color wave and the 4-isotropic vector. The coupling g is a constant.

Furthermore, the wave vectors are as follows:

$$k^2 = kk_1 = kk_2 = k_1 k_2 = 0, \tag{4}$$

and, consequently, the Lorentz condition

$$\partial_\mu A^{\mu a} = 0 \tag{5}$$

is satisfied for each partial component.

In this paper, our purpose is to determine the probability of pair creation by considering the Klein-Gordon and Dirac particles when the vacuum is perturbed by the non-Abelian field $SU(2)$ defined by eqs. (1) and (2). A similar calculation of the probability, using a plane wave non-Abelian with a simplest form [13] has been performed according to our purely algebraic approach. We use this approach for the more complicated form of field given by eqs. (1) and (2).

First, let us begin by the Klein-Gordon particles.

2 Pair creation of spinless particles

The motion is described by the Klein-Gordon equation and the vacuum-vacuum transition amplitude is given by the following expression:

$$\mathcal{A}(\text{vac.-vac.}) = \int D\phi D\phi^* e^{i\int \mathrm{d}^4x \phi^* \hat{O}_{KG}\phi}, \tag{6}$$

where $\hat{O}_{KG} = (\hat{p} + \frac{g}{2}A(kx))^2 - M^2$ is the Klein-Gordon operator.

According to the well-known procedure, this amplitude (multiple integral) can be calculated by considering the eigenvectors ψ_n and its corresponding eigenvalues λ_n of the operator $\hat{O}_{KG}$,

$$\hat{O}_{KG}\psi_n(x) = \lambda_n \psi_n(x),$$

and the decomposition on the basis ψ_n

$$\phi(x) = \sum_n a_n \psi_n(x),$$

with

$$\int \mathrm{d}^4x \psi_m^*(x)\psi_n(x) = \delta_{nm}.$$

Thus, the vacuum-vacuum amplitude is simply equal to

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\text{vac.-vac.}) &= N\int \prod_i \mathrm{d}a_i \prod_j \mathrm{d}a_j^* e^{i\sum_n |a_n|^2\lambda_n}\\ &= N\prod_n \frac{1}{\lambda_n} = \frac{N}{\det \hat{O}_{KG}}\,,\end{aligned}$$

i.e. $\mathcal{A}$ is inversely proportional to the determinant of the operator $\hat{O}_{KG}$. The constant N is fixed by reference to the case without interaction.

By using the familiar formula, the determinant $\det \hat{O}_{KG} = e^{\mathrm{tr}\ln \hat{O}_{KG}}$ is converted to an exponential and using the following equality:

$$\ln\frac{a}{b} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}s}{s}\left[e^{is(b+i0^+)} - e^{is(a+i0^+)}\right].$$

We obtain

$$\mathcal{A}_{\text{creat.}} = \mathcal{A}(\text{vac.-vac.}) = e^{iW_{spin\,0}}, \tag{7}$$

where

$$W_{spin\,0} = -i\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}s}{s}\,\mathrm{tr}\left\{e^{is\left((\hat{p}+\frac{g}{2}\hat{A})^2 - M^2\right)} - e^{is\left(\hat{p}^2 - M^2\right)}\right\}. \tag{8}$$

This is the effective action.

The symbol $\mathrm{tr} = \mathrm{tr}_x \cdot \mathrm{tr}_\sigma$ is the trace related to the configuration space $(\int \mathrm{d}^4x \langle x|(\cdot)|x\rangle)$ and to generators of the group $SU(2)$.

From the vacuum-vacuum amplitude $\mathcal{A}_{\mathrm{cre}}$, the probability is defined as follows:

$$\mathcal{P}_{\mathrm{creat.}} = 1 - |\mathcal{A}_{\mathrm{cre}}|^2. \tag{9}$$

Let us now consider the canonically conjugate operators $\hat{p}$ and $\hat{x}$,

$$\left[\hat{x}_\mu, \hat{p}_\nu\right] = -ig_{\mu\nu}. \tag{10}$$

Its action on the kets $|x\rangle$ and $|p\rangle$ is defined by

$$\hat{x}_\mu |x\rangle = x_\mu |x\rangle, \qquad \hat{p}_\mu |p\rangle = p_\mu |p\rangle, \tag{11}$$

with $\langle x|p\rangle = \frac{e^{ipx}}{(2\pi)^2}$ the scalar product in order to perform the passage $|x\rangle \to |p\rangle$. The metric tensor is $\mathrm{diag}(g_{\mu\nu}) = (1, -1, -1, -1)$.

It is clear that the effective action related to the KG particle in the non-Abelian field is a function of the diagonal element of the kernel $K(x_b, x_a; s)|_{x_b = x_a = x}$ (in the configuration space). The kernel is given by the following expression:

$$\begin{aligned} K(x_b, x_a; s) &= \theta(s) e^{is\left[\left(-i\partial_b + \frac{g}{2}A_b\right)^2 - M^2\right]} \delta\left(x_b - x_a\right) \\ &= \theta(s) \left\langle x_b \left| e^{is\left[\left(\hat{p} + \frac{g}{2}\hat{A}\right)^2 - M^2\right]} \right| x_a \right\rangle, \end{aligned} \tag{12}$$

with x_a and x_b the initial and final positions of the particle, respectively.

Let us proceed to the calculation of this kernel.

First, it can be noted, in $\hat{A}$, (eqs. (1) and (2)) that component is multiplied by σ^a. Let us choose the following matricial transformation f (2×2), whose role will be specified later:

$$f = \frac{1}{2}\left(1 + \tau \vec{\sigma} \vec{m}(kx)\right); \quad \tau^2 = 1. \tag{13}$$

It modifies $\hat{A}$ into $\hat{A}_{\mathrm{new}}$ according to

$$\left(\hat{p} + \frac{g}{2}\hat{A}\right)^2 f = f\left(\hat{p} + \frac{g}{2}\hat{A}_{\mathrm{new}}\right)^2, \tag{14}$$

where

$$\hat{A}_{\mu\mathrm{new}} = k_\mu \left\{ \tau\left[(k_1 x)b + (k_2 x)c\right] + \frac{1}{g}\vec{\sigma} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\vec{m}}{\mathrm{d}(kx)} \times \vec{m}\right)\right\}. \tag{15}$$

This is the new non-Abelian field which also satisfies the Lorentz condition. It is important to note that there is only one term with the generators σ^a.

The expression of $\hat{A}_{\mu\mathrm{new}}$ is obtained by using the well-known relations

$$\left(\vec{\sigma} \cdot \vec{a}\right)\left(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{\sigma} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right),$$

and

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} = \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) \cdot \vec{b} - \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right) \cdot \vec{a}.$$

From the following development:

$$\begin{aligned} e^{is\hat{O}_{KG}\left(f \cdot \frac{1}{f}\right)} &= 1 + is\hat{O}_{KG}\left(f \cdot \frac{1}{f}\right) + \dots \\ &= f\left(1 + is\left[\left(\hat{p} + \frac{g}{2}\hat{A}_{\mathrm{new}}(k\hat{x})\right)^2 - M^2\right] + \dots\right)\frac{1}{f}, \end{aligned}$$

it is obvious that the kernel becomes

$$K(x_b, x_a; s) = f_b \theta(s) \langle x_b | e^{is\left[\left(\hat{p} + \frac{g}{2}\hat{A}_{\mathrm{new}}(k\hat{x})\right)^2 - M^2\right]} |x_a\rangle \frac{1}{f_a}, \tag{16}$$

and its calculation is reduced to the determination of the kernel with the field $\hat{A}_{\mu\text{new}}$ instead $\hat{A}$.

The procedure of the calculation is as follows: First, the variables of the field are converted into operators and their conjugate operators are introduced. Then, by using some shift, the unitary operators appear.

Let us begin by the three variables kx, $k_1 x$ and $k_2 x$ of the field. For this, we define three new operators $\hat{\varphi}$, $\hat{\varphi}_1$ and $\hat{\varphi}_2$ as follows:

$$\hat{\varphi} = k\hat{x}; \qquad \hat{\varphi}_1 = k_1\hat{x}; \qquad \hat{\varphi}_2 = k_2\hat{x}, \tag{17}$$

whose action on their respective kets is

$$\hat{\varphi}|\varphi\rangle = \varphi|\varphi\rangle; \qquad \hat{\varphi}_1|\varphi_1\rangle = \varphi_1|\varphi_1\rangle; \qquad \hat{\varphi}_2|\varphi_2\rangle = \varphi_2|\varphi_2\rangle.$$

In addition, we associate $(\hat{\varphi}, \hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2)$ to their conjugates $(\hat{p}_\varphi, \hat{p}_{\varphi_1}, \hat{p}_{\varphi_2})$, respectively,

$$\begin{aligned}&[\hat{\varphi}, \hat{p}_\varphi] = i,\\ &[\hat{\varphi}, \hat{x}_\mu] = [\hat{\varphi}, \hat{p}_\mu] = [\hat{p}_{\hat{\varphi}}, \hat{x}_\mu] = [\hat{p}_{\hat{\varphi}}, \hat{p}_\mu] = 0,\end{aligned}$$

and the same relations for $(\hat{\varphi}_1, \hat{p}_{\hat{\varphi}_1})$ and $(\hat{\varphi}_2, \hat{p}_{\hat{\varphi}_2})$.

At this level, it is useful to introduce the following three identities, one for each new variable:

$$\begin{aligned}\iint \mathrm{d}\varphi_b\, \mathrm{d}\varphi_a \delta(\varphi_a - kx_a)\delta(\varphi_b - \varphi_a - k(x_b - x_a)) &= \iint \mathrm{d}\varphi_b\, \mathrm{d}\varphi_a \delta(\varphi_a - kx_a)\langle\varphi_b|\varphi_a\rangle = 1,\\ \iint \mathrm{d}\varphi_{1b}\, \mathrm{d}\varphi_{1a} \delta(\varphi_{1a} - k_1 x_a)\delta(\varphi_{1b} - \varphi_{1a} - k_1(x_b - x_a)) &= \iint \mathrm{d}\varphi_{1b}\, \mathrm{d}\varphi_{1a} \delta(\varphi_{1a} - k_1 x_a)\langle\varphi_{1b}|\varphi_{1a}\rangle = 1,\\ \iint \mathrm{d}\varphi_{2b}\, \mathrm{d}\varphi_{2a} \delta(\varphi_{2a} - k_2 x_a)\delta(\varphi_{2b} - \varphi_{2a} - k_2(x_b - x_a)) &= \iint \mathrm{d}\varphi_{2b}\, \mathrm{d}\varphi_{2a} \delta(\varphi_{2a} - k_2 x_a)\langle\varphi_{2b}|\varphi_{2a}\rangle = 1,\end{aligned} \tag{18}$$

where we have adopted the bra-ket notation.

Then, the kernel takes the following form:

$$\begin{aligned}K(x_b, x_a; s) = \theta(s) f_b \int &\mathrm{d}\varphi_b\, \mathrm{d}\varphi_a\, \mathrm{d}\varphi_{1b}\, \mathrm{d}\varphi_{1a}\, \mathrm{d}\varphi_{2b}\, \mathrm{d}\varphi_{2a} \delta(\varphi_a - kx_a)\delta(\varphi_{1a} - k_1 x_a)\delta(\varphi_{2a} - k_2 x_a)\\ &\times \left\langle x_b, \varphi_b, \varphi_{1b}, \varphi_{2b} \left| e^{is\left[\left(\hat{p} + \frac{g}{2}\hat{A}_{\text{new}}\right)^2 - M^2\right]} \right| x_a, \varphi_a, \varphi_{1a}, \varphi_{2a} \right\rangle \frac{1}{f_a}.\end{aligned} \tag{19}$$

Now, let us perform the following shift:

$$\hat{p} \to \hat{p} + k\hat{p}_\varphi + k_1\hat{p}_{\varphi_1} + k_2\hat{p}_{\varphi_2}. \tag{20}$$

As the commutator $[\hat{x}_\mu, \hat{p}_\nu]$ remains unchanged and using the relation (4) we obtain

$$\begin{aligned}\left(\hat{p} + \frac{g}{2}\hat{A}_{\text{new}}(k\hat{x})\right)^2 &= \hat{p}^2 + g\hat{p}\hat{A}_{\text{new}}\\ &\to \hat{p}^2 + g\hat{p}\hat{A}_{\text{new}} + 2k\hat{p}\hat{p}_\varphi + 2k_1\hat{p}\hat{p}_{\varphi_1} + 2k_2\hat{p}\hat{p}_{\varphi_2} + k_1^2\hat{p}_{\varphi_1}^2 + k_2^2\hat{p}_{\varphi_2}^2.\end{aligned} \tag{21}$$

Now, let us consider the second and third terms. First, we remark that

$$2\hat{p}k\hat{p}_\varphi + g\hat{p}\hat{A}_{\text{new}} = 2\hat{p}k\hat{p}_\varphi \left(1 + \frac{1}{\hat{p}_\varphi}\frac{g\hat{p}\hat{A}_{\text{new}}}{2\hat{p}k}\right), \tag{22}$$

and that the inverse of $\hat{p}_\varphi$ is an integral

$$\frac{1}{\hat{p}_\varphi}(\cdot) \to i\int^{\hat{\varphi}} \mathrm{d}u(\cdot). \tag{23}$$

Thus, successively, we have

$$1 + \frac{1}{\hat{p}_\varphi}\frac{g\hat{p}\hat{A}_{\text{new}}}{2\hat{p}k} = 1 + i\frac{g}{2\hat{p}k}\int^{\hat{\varphi}} \hat{p}\hat{A}_{\text{new}}(u, \hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2)\, \mathrm{d}u, \tag{24}$$

and then

$$2\hat{p}k\hat{p}_\varphi + g\hat{p}\hat{A}_{\text{new}} = 2\hat{p}k e^{-i\hat{S}_1}\hat{p}_\varphi e^{i\hat{S}_1}, \tag{25}$$

where

$$\hat{S}_1 = +\tau\frac{g}{2}\left(\hat{\varphi}_1 B(\hat{\varphi}) + \hat{\varphi}_2 C(\hat{\varphi})\right) + \frac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{M}(\hat{\varphi}), \tag{26}$$

with

$$B(\hat{\varphi}) = \int^{\hat{\varphi}} \mathrm{d}u b(u); \qquad C(\hat{\varphi}) = \int^{\hat{\varphi}} \mathrm{d}u c(u) \qquad \text{and} \qquad \vec{M}(\hat{\varphi}) = \int^{\hat{\varphi}} \mathrm{d}u \left(\frac{\mathrm{d}\vec{m}(u)}{\mathrm{d}u} \times \vec{m}(u)\right). \tag{27}$$

Using the commutation relations, it is easy to show the relation (21) is equal to

$$(21) = e^{-i\hat{S}_1}\left\{\begin{array}{c}\left(\hat{p} + k\hat{p}_{\varphi} + k_1\hat{p}_{\varphi_1} + k_2\hat{p}_{\varphi_2}\right)^2 \\ -\tau g\hat{p}\bar{A}\left(\hat{\varphi}\right) + \frac{(\tau g)^2}{4}\bar{A}(\hat{\varphi})^2 - \tau g\left(B(\hat{\varphi})k_1^2\hat{p}_{\varphi_1} + C(\hat{\varphi})k_2^2\hat{p}_{\varphi_2}\right)\end{array}\right\} e^{i\hat{S}_1}, \tag{28}$$

where

$$\bar{A}_\mu(\hat{\varphi}) = k_{\mu 1}B(\hat{\varphi}) + k_{\mu 2}C(\hat{\varphi}), \tag{29}$$

or, again, by using the inverse shift

$$\hat{p} + k_1\hat{p}_{\varphi_1} + k_2\hat{p}_{\varphi_2} \to \hat{p}, \tag{30}$$

we obtain the following result:

$$(21) = e^{-i\hat{S}_1}\left(\hat{p}^2 + 2\hat{p}k\hat{p}_{\varphi} - \tau g\hat{p}\bar{A}((\hat{\varphi})) + \frac{(\tau g)^2}{4}\bar{A}(\hat{\varphi})^2\right) e^{i\hat{S}_1}. \tag{31}$$

By repeating the same procedure, the following expression can be reduced to

$$\hat{p}^2 + 2\hat{p}k\hat{p}_{\varphi} - \tau g\hat{p}\bar{A}((\hat{\varphi})) + \frac{(\tau g)^2}{4}\bar{A}(\hat{\varphi})^2 = e^{-i\hat{S}_2}\left(\hat{p}^2 + 2\hat{p}k\hat{p}_{\varphi}\right) e^{\hat{S}_2}, \tag{32}$$

Thus, it appears in the exponential, another phase

$$\hat{S}_2 = \frac{\tau g}{2\hat{p}k}\int^{\hat{\varphi}} \mathrm{d}u\left(-\hat{p}\bar{A}(u) + \frac{\tau g}{4}\bar{A}(u)^2\right). \tag{33}$$

The inverse shift,

$$\hat{p} + k\hat{p}_{\varphi} \to \hat{p}, \tag{34}$$

reduces again the expression (31) to

$$(32) = e^{-i\left(\hat{S}_1 + \hat{S}_2\right)}\hat{p}^2 e^{i\left(\hat{S}_1 + \hat{S}_2\right)}. \tag{35}$$

Thus, we have reduced the kernel related to $\hat{A}_{\text{new}}$ at the one related to the free case with the following link:

$$\begin{aligned}&\left\langle x_b, \varphi_b, \varphi_{1b}, \varphi_{2b}\left| e^{is\left(\left(\hat{p} + \frac{g}{2}\hat{A}_{\text{new}}\right)^2 - M^2\right)}\right| x_a, \varphi_a, \varphi_{1a}, \varphi_{2a}\right\rangle = \\ &\left\langle x_b, \varphi_b, \varphi_{1b}, \varphi_{2b}\left| e^{-i(\hat{S}_1 + \hat{S}_2)} e^{is(\hat{p}^2 - M^2)} e^{i(\hat{S}_1 + \hat{S}_2)}\right| x_a, \varphi_a, \varphi_{1a}, \varphi_{2a}\right\rangle,\end{aligned} \tag{36}$$

where the sum of two phases is given by

$$\begin{aligned}\hat{S}_1 + \hat{S}_2 = {}& \tau\frac{g}{2}\left[\hat{\varphi}_1 B(\hat{\varphi}) + \hat{\varphi}_2 C(\hat{\varphi})\right] + \frac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{M}(\hat{\varphi}) \\ & - \frac{\tau g}{2\hat{p}k}\int^{\hat{\varphi}} \mathrm{d}u\left(\hat{p}\bar{A}(u) - \frac{\tau g}{4}\bar{A}(u)^2\right).\end{aligned} \tag{37}$$

This is a function of the four operators $\hat{p}$, $\hat{\varphi}$, $\hat{\varphi}_1$, $\hat{\varphi}_2$ and $\vec{\sigma}$.

By applying the three operators $\hat{\varphi}$, $\hat{\varphi}_1$, $\hat{\varphi}_2$ on the bras and kets, the following matrix element of eq. (19) is simply equal to

$$e^{-i(\hat{S}_{1b} + \hat{S}_{2b})}\left\langle x_b, \varphi_b, \varphi_{1b}, \varphi_{2b}\left| e^{is(\hat{p}^2 - M^2)}\right| x_a, \varphi_a, \varphi_{1a}, \varphi_{2a}\right\rangle e^{i(\hat{S}_{1a} + \hat{S}_{2a})}, \tag{38}$$

where $\hat{S}_{1b} + \hat{S}_{2b}$ and $\hat{S}_{1a} + \hat{S}_{2a}$ are, respectively, function of variables φ_b, φ_{1b}, φ_{2b}, φ_a, φ_{1a}, φ_2 and of operator $\hat{p}$.

In order to fix the variables $(\varphi_b, \varphi_a, \varphi_{1b}, \varphi_{1a}, \varphi_{2b}, \varphi_{2a})$, respectively, to $(kx_b, kx_a, k_1x_b, k_1x_a, k_2x_b, k_2x_a)$, we proceed to integrations on the six variables φ and thanks to Dirac functions δ, we obtain

$$K(x_b, x_a; s) = f_b \left\langle x_b \left| e^{-i(\hat{S}_{1b}+\hat{S}_{2b})} e^{is(\hat{p}^2-M^2)} e^{i(\hat{S}_{1a}+\hat{S}_{2a})} \right| x_a \right\rangle \frac{1}{f_a}, \tag{39}$$

where now the phase is

$$\begin{aligned}\hat{S}_1 + \hat{S}_2 &= \frac{g\tau}{2}\hat{x}\bar{A}(k\hat{x}) + \frac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{M}(k\hat{x}) \\ &\quad - \frac{g\tau}{2\hat{p}k}\int^{k\hat{x}} \mathrm{d}u \left(\hat{p}\bar{A}(u) - \frac{g\tau}{4}\bar{A}(u)^2\right),\end{aligned} \tag{40}$$

is only a function of the operators $\hat{x}$ and $\hat{p}$.

The operator $\hat{x}$ is easy to eliminate: it becomes, respectively, a variable x_a and x_b, when it acts on the ket $|x_a\rangle$ and the bras $\langle x_b|$. But it remains the operator $\hat{p}$.

In order to eliminate $\hat{p}$, respectively, we insert the projector $\int \mathrm{d}^4p|p\rangle\langle p| = 1$ and we use the scalar product $\langle x|p\rangle = \frac{e^{ipx}}{(2\pi)^2}$ and finally, the kernel is given by the following expression:

$$\begin{aligned}K(x_b, x_a; s) &= f_b e^{-\frac{i}{2}\int_{kx_a}^{kx_b} \mathrm{d}u\,\vec{\sigma}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\vec{m}}{\mathrm{d}u}\times\vec{m}(u)\right)} \frac{1}{f_a} e^{-i\frac{\tau g}{2}\left(x_b\bar{A}(kx_b) - x_a\bar{A}(kx_a)\right)} \\ &\quad\times \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4} e^{i\left\{p(x_b-x_a) + \left(p^2 - M^2\right)s + \frac{\tau g}{2pk}\int_{kx_a}^{kx_b}\mathrm{d}u\left(p\bar{A}(u) - \frac{g\tau}{4}\bar{A}(u)^2\right)\right\}}.\end{aligned} \tag{41}$$

Now, we must take the trace, first on the configuration space and then on the generators of the group. We obtain

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}_\sigma\,\mathrm{tr}_x\,K &= \lim_{\tau^2\to 1}\mathrm{tr}_\sigma \int \mathrm{d}^4x K(x, x; s) \\ &= \lim_{\tau^2\to 1}\mathrm{tr}_\sigma \int \mathrm{d}^4x \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4} f\frac{1}{f} e^{i\left(p^2 - M^2\right)s} \\ &= \lim_{\tau^2\to 1} e^{-iM^2s} \int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{tr}_\sigma\left(f\frac{1}{f}\right) \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4} e^{ip^2s} \\ &= 2e^{-iM^2s}\int \mathrm{d}^4x \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4} e^{ip^2s} \\ &= 2e^{-iM^2s}\int_{TL^3} \mathrm{d}^4x \int \frac{\mathrm{d}p^0\,\mathrm{d}p^1\,\mathrm{d}p^2\,\mathrm{d}p^3}{(2\pi)^4} e^{i\left(p^{0\,2} - p^{1\,2} - p^{2\,2} - p^{3\,2}\right)s} \\ &= \frac{-i}{8\pi^2}\frac{e^{-iM^2s}}{s^2} TL^3.\end{aligned} \tag{42}$$

It is obvious that the effective action (8) $W_{\mathrm{spin}\,0} = 0$ and therefore, the probability of pair creation of Klein Gordon particles is null

$$\mathcal{P}_{\mathrm{creat.}} = 0. \tag{43}$$

That means that the non-Abelian field of the $SU(2)$ group is unable to create spinless pairs particles from vacuum.

3 Pair creation of particles of spin 1/2

In the case of Dirac particles in interaction with the same non-Abelian field having the configuration equations (1) and (2), the vacuum-vacuum transition amplitude is given by

$$\mathcal{A}(\text{vac.-vac.}) = \int D\overline{\psi}D\psi e^{i\int \mathrm{d}^4x\overline{\psi}\left(\hat{\not{p}} + \frac{g}{2}\hat{\not{A}} - M\right)\psi}, \tag{44}$$

where now ψ and $\overline{\psi}$ are variables of Grassmann and $\hat{O} = \hat{\not{p}} + \frac{g}{2}\hat{\not{A}} - M$ (Dirac operator) where $\hat{\not{a}} = \gamma^\mu\hat{a}_\mu$.

By using the same procedure as the one used in the case of spin 0, the integrations on $\overline{\psi}$ and ψ give

$$\mathcal{A}(\text{vac.-vac.}) \simeq \det\hat{O}.$$

In the operation of charge conjugate the determinant remains unchanged, then the vacuum-vacuum transition amplitude becomes

$$\mathcal{A}(\text{vac.-vac.}) = N\sqrt{\det \hat{O}\hat{O}^c} = e^{iW_{\text{spin}\,1/2}}, \tag{45}$$

where the constant N is fixed by referring to the free case.

As previously done, after having changed the function ln into the integral of the exponential, the effective action for this case is as follows

$$W_{\text{spin}\,1/2} = \frac{i}{2}\,\mathrm{tr}\ln\frac{\hat{p}^2 - M^2}{\left(\hat{\not{p}} + \frac{g}{2}\hat{\not{A}}\right)^2 - M^2} = \frac{i}{2}\,\mathrm{tr}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{s} e^{-isM^2}\left(e^{is\left(\hat{\not{p}}+\frac{g}{2}\hat{\not{A}}\right)^2} - e^{is\hat{p}^2}\right), \tag{46}$$

where the symbol $\mathrm{tr} = \mathrm{tr}_\gamma\,\mathrm{tr}_\sigma\,\mathrm{tr}_x$ is the product of traces related to the configuration space, $SU(2)$ generators of group and Dirac matrices γ^μ, respectively.

It is obvious that the determination of $W_{\text{spin}\,1/2}$ requires the knowledge of the kernel S_D defined by

$$S_D(x_b, x_a; s) = \langle x_b | e^{is\left(\hat{\not{p}}+\frac{g}{2}\hat{\not{A}}\right)^2} | x_a\rangle, \tag{47}$$

since

$$\left(\hat{\not{p}} + \frac{g}{2}\hat{\not{A}}\right)^2 = \left(\hat{p} + \frac{g}{2}\hat{A}\right)^2 + \frac{g}{4}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \tag{48}$$

where

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right],$$

and

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \vec{\sigma}\vec{m}\left[b\left(k_\nu k_{1_\mu} - k_{1_\nu} k_\mu\right) + c\left(k_\nu k_{2_\mu} - k_\mu k_{2_\nu}\right)\right] = \vec{\sigma}\vec{m}T_{\mu\nu} \tag{49}$$

is the electromagnetic tensor. We use the method related to the case of spin 0 by introducing again the same function f defined in (13),

$$\left(\hat{\not{p}} + \frac{g}{2}\hat{\not{A}}\right)^2 f = f\left[\left(\hat{p} + \frac{g}{2}\hat{A}_{\text{new}}\right)^2 + \tau\frac{g}{4}\sigma^{\mu\nu}T_{\mu\nu}\right]. \tag{50}$$

It is obvious that the calculation of the kernel S_D is reduced to the one relative to the case of spin 0 with only an additional term $\tau\frac{g}{4}\sigma^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ in the expression of S_1 (eq. (26)) and having the following form:

$$\frac{\tau g}{4pk}\sigma^{\mu\nu}k_\nu\left(Bk_{1_\mu} + Ck_{2_\mu}\right) = -i\frac{\tau g}{4pk}\not{k}\bar{\not{A}}, \tag{51}$$

and the result is an additional factor in (41),

$$\begin{aligned} e^{\frac{\tau g}{4pk}\not{k}\left(\bar{\not{A}}(kx_b) - \bar{\not{A}}(kx_a)\right)} &= 1 + \frac{\tau g}{4pk}\not{k}\left(\bar{\not{A}}(kx_b) - \bar{\not{A}}(kx_a)\right) \\ &= \left(1 + \frac{\tau g}{4pk}\not{k}\bar{\not{A}}(kx_b)\right)\left(1 - \frac{\tau g}{4pk}\not{k}\bar{\not{A}}(kx_a)\right), \end{aligned} \tag{52}$$

that we have factorized and finally the kernel S_D takes the following form,

$$\begin{aligned} S_D(x_b, x_a; s) = {} & f_b e^{-\frac{i}{2}\int_{kx_a}^{kx_b}\mathrm{d}u\,\vec{\sigma}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\vec{m}}{\mathrm{d}u}\times\vec{m}(u)\right)}\frac{1}{f_a}e^{-i\frac{\tau g}{2}\left(x_b\bar{A}(kx_b) - x_a\bar{A}(kx_a)\right)} \\ & \times\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\left(1 + \frac{\tau g}{4pk}\not{k}\bar{\not{A}}_b\right)\left(1 - \frac{\tau g}{4pk}\not{k}\bar{\not{A}}_a\right) \\ & \times e^{i\left\{p(x_b - x_a) + \left(p^2 - M^2\right)s + \frac{\tau g}{2pk}\int_{kx_a}^{kx_b}\mathrm{d}u\left(p\bar{A}(u) - \frac{g\tau}{4}\bar{A}(u)^2\right)\right\}}. \end{aligned} \tag{53}$$

Having determined S_D, it easy to obtain the traces

$$\mathrm{tr}_\gamma\,\mathrm{tr}_\sigma\,\mathrm{tr}_x\,S_D = \mathrm{tr}_\gamma\left(\frac{-i}{8\pi^2}\frac{e^{-iM^2 s}}{s^2}TL^3\right) = \frac{-i}{2\pi^2}\frac{e^{-iM^2 s}}{s^2}TL^3,$$

and the effective action is thus trivial

$$W_{\text{spin}\,1/2} = 0,$$

and therefore the probability of pair creation of particles of spin 1/2 is null

$$\mathcal{P}_{\text{creat}} = 0. \tag{54}$$

Consequently, the non-Abelian field of the $SU(2)$ group is again unable to create pairs of Dirac particles from vacuum.

Remark

In order to clarify the role of function f (eq. (13)), let us return to eq. (41) and eq. (53) related to kernels K and S_D and then proceed to the integration on p in view to write S_D (or K) in the most appropriate form.

For this, let us introduce the following identity:

$$\int \mathrm{d}\omega \delta(\omega - pks) = \int \mathrm{d}\omega \frac{\mathrm{d}p_\omega}{2\pi} e^{ip_\omega(\omega - pks)} = 1,$$

in the expression of S_D.

We obtain

$$\begin{aligned} S_D(x_b, x_a; s) = {} & f_b e^{-\frac{i}{2}\int_{kx_a}^{kx_b} \mathrm{d}u \vec{\sigma}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\vec{m}}{\mathrm{d}u}\times\vec{m}(u)\right)} \frac{1}{f_a} e^{-i\frac{\tau g}{2}\left(x_b \bar{A}(kx_b) - x_a \bar{A}(kx_a)\right)} \\ & \times \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} \int \mathrm{d}\omega \frac{\mathrm{d}p_\omega}{2\pi} \left(1 + \frac{\tau g s}{4\omega}\ \not{k}\bar{\not{A}}_b\right)\left(1 - \frac{\tau g s}{4\omega}\ \not{k}\bar{\not{A}}_a\right) \\ & \times e^{i\left\{p_\omega(\omega - pks) + p(x_b - x_a) + \left(p^2 - M^2\right)s + \frac{\tau g s}{2\omega}\int_{kx_a}^{kx_b} \mathrm{d}u\left(p\bar{A}(u) - \frac{g\tau}{4}\bar{A}(u)^2\right)\right\}}. \end{aligned} \tag{55}$$

Then, let us change p into $p + \frac{1}{2}kp_\omega$. The three terms depending on p in the exponent of the exponential become

$$\begin{aligned} & p_\omega(\omega - pks) + p(x_b - x_a) + \left(p^2 - M^2\right)s \to \\ & p_\omega(\omega - pks) + p(x_b - x_a) + \frac{1}{2}kp_\omega(x_b - x_a) + \left(p^2 + pkp_\omega - M^2\right)s = \\ & p_\omega\left(\omega + \frac{1}{2}k(x_b - x_a)\right) + p(x_b - x_a) + \left(p^2 - M^2\right)s, \end{aligned} \tag{56}$$

the remaining terms remain unchanged.

Let us perform the integration on p_ω: it appears as a Dirac function $\delta(\omega + \frac{1}{2}k(x_b - x_a))$ and after integration on ω, S_D become

$$\begin{aligned} S_D(x_b, x_a; s) = {} & f_b e^{-\frac{i}{2}\int_{kx_a}^{kx_b} \mathrm{d}u \vec{\sigma}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\vec{m}}{\mathrm{d}u}\times\vec{m}(u)\right)} \frac{1}{f_a} e^{-i\frac{\tau g}{2}\left(x_b \bar{A}(kx_b) - x_a \bar{A}(kx_a)\right)} \\ & \times \left(1 - \frac{\tau g s}{2k(x_b - x_a)}\ \not{k}\bar{\not{A}}_b\right)\left(1 + \frac{\tau g s}{2k(x_b - x_a)}\ \not{k}\bar{\not{A}}_a\right) \\ & \times \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} e^{i\left\{p(x_b - x_a) + \left(p^2 - M^2\right)s - \frac{\tau g s}{k(x_b - x_a)}\int_{kx_a}^{kx_b} \mathrm{d}u\left(p\bar{A}(u) - \frac{g\tau}{4}\bar{A}(u)^2\right)\right\}}. \end{aligned} \tag{57}$$

Posing $X = x_b - x_a - \frac{g\tau s}{k(x_b - x_a)}\int_{kx_a}^{kx_b} \mathrm{d}u\bar{A}(u)$, the function in p being a Gaussian, then the result of integration is straightforward and finally S_D takes the following form:

$$\begin{aligned} S_D(x_b, x_a; s) = {} & \frac{-i}{(4\pi s)^2} f_b e^{-\frac{i}{2}\int_{kx_a}^{kx_b} \mathrm{d}u\left[\vec{\sigma}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\vec{m}}{\mathrm{d}u}\times\vec{m}(u)\right)\right]} \frac{1}{f_a} e^{-i\frac{\tau g}{2}\left[x_b \bar{A}(kx_b) - x_a \bar{A}(kx_a)\right]} \\ & \times \left\{1 - \frac{\tau g s}{2k(x_b - x_a)}\ \not{k}\bar{\not{A}}_b\right\}\left\{1 + \frac{\tau g s}{2k(x_b - x_a)}\ \not{k}\bar{\not{A}}_a\right\} \\ & \times e^{i\left\{\begin{array}{l} -M^2 s - \frac{(x_b - x_a)^2}{4s} + \frac{\tau g}{2}\frac{1}{k(x_b - x_a)}\int_{kx_a}^{kx_b} \mathrm{d}u(x_b - x_a)\bar{A}(u) \\ + \frac{(\tau g)^2 s}{4}\left[\frac{1}{k(x_b - x_a)}\int_{kx_a}^{kx_b} \mathrm{d}u\bar{A}(u)^2 - \left(\frac{1}{k(x_b - x_a)}\int_{kx_a}^{kx_b} \mathrm{d}u\bar{A}(u)\right)^2\right] \end{array}\right\}}. \end{aligned} \tag{58}$$

Now, let us consider the behavior of S_D for $x_a \simeq x_b$. Using a development around the midpoint $\bar{x} = \frac{x_b+x_a}{2}$ and the properties of the plane wave, the following terms become:

$$\frac{(g\tau)^2 s}{4k(x_b-x_a)}\left[\int_{kx_a}^{kx_b} \mathrm{d}u\bar{A}(u)^2 - \frac{1}{k(x_b-x_a)}\left(\int_{kx_a}^{kx_b}\mathrm{d}u\bar{A}(u)\right)^2\right] \simeq$$
$$-\frac{(g\tau)^2 s}{48}(x_b-x_a)^\mu k_\mu \bar{A}'_\nu(\bar{u})\bar{A}'^\nu(\bar{u})k^\rho(x_b-x_a)_\rho =$$
$$-\frac{(g\tau)^2 s}{48}(x_b-x_a)^\mu \bar{F}_{\mu\nu}(\bar{u})\bar{F}^{\nu\rho}(\bar{u})(x_b-x_a)_\rho =$$
$$-\frac{g^2 s}{48}(x_b-x_a)^\mu F_{\mathrm{new}\mu\nu}(\bar{u})F^{\nu\rho}_{\mathrm{new}}(\bar{u})(x_b-x_a)_\rho,$$
$$\left(1-\frac{\tau g s}{2k(x_b-x_a)}\ \not{k}\not{\bar{A}}_b\right)\left(1+\frac{\tau g s}{2k(x_b-x_a)}\ \not{k}\not{\bar{A}}_a\right) =$$
$$e^{-\frac{\tau g s}{2k(x_b-x_a)}\not{k}\left(\not{\bar{A}}_b-\not{\bar{A}}_a\right)} \simeq e^{-\frac{\tau g s}{2}\not{k}\not{\bar{A}}'(\bar{u})} = e^{-i\frac{\tau g s}{4}\sigma^{\mu\nu}\bar{F}_{\mu\nu}} = e^{-i\frac{g s}{4}\sigma^{\mu\nu}F_{\mathrm{new}\mu\nu}(\bar{u})},$$
$$x_b\bar{A}(kx_b) - x_a\bar{A}(kx_a) \simeq (x_b-x_a)\bar{A}(\bar{u}) + (kx_b-kx_a)\left(\bar{x}\bar{A}'(\bar{u})\right),$$
$$\frac{1}{k(x_b-x_a)}\int_{kx_a}^{kx_b}\mathrm{d}u(x_b-x_a)\bar{A}(u) \simeq (x_b-x_a)\bar{A}(\bar{u}),$$
$$\int_{kx_a}^{kx_b}\mathrm{d}u\left[\vec{\sigma}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\vec{m}}{\mathrm{d}u}\times\vec{m}(u)\right)\right] \simeq (kx_b-kx_a)\vec{\sigma}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{m}}{\mathrm{d}u}\times\vec{m}(\bar{u})\right),$$

where $\bar{u} = k\bar{x}$ and $\bar{A}'_\nu = \frac{\mathrm{d}\bar{A}_\nu(\bar{u})}{\mathrm{d}\bar{u}}$ is the derivative and $\bar{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu\bar{A}_\nu - \partial_\nu\bar{A}_\mu$ is the usual tensor related to $\bar{A}_\mu$ given by eq. (29).

Thus, the expression of S_D relating to non-Abelian field for $x_b \simeq x_a$ is

$$S_D(x_b,x_a;s) \simeq f_b e^{-i\frac{g}{2}(x_b-x_a)A_{\mathrm{new}}(\bar{u})}\frac{1}{f_a} \times \frac{-i}{(4\pi s)^2}e^{i\left\{-M^2 s-\frac{gs}{4}\sigma^{\mu\nu}\bar{F}(\bar{u})-\frac{(x_b-x_a)^\mu}{4s}\left[\delta^\rho_\mu+\frac{(gs)^2}{12}\bar{F}_{\mu\nu}(\bar{u})\bar{F}^{\nu\rho}(\bar{u})\right](x_b-x_a)_\rho\right\}}. \tag{59}$$

Thus, using the transformation f (eq. (13)), S_D is a product of two factors:

– First factor
$$f_b e^{-i\frac{g}{2}(x_b-x_a)A_{\mathrm{new}}(u)}\frac{1}{f_a}\bigg|_{x_b\to x_a} \to 1, \tag{60}$$
independent of the variable s, but dependent on $SU(2)$ generators group and where its trace is equal to 2.

– Second factor, depending on s, but independent of generators, having a similar form (except for the sign of the metric) to the expression obtained by Schwinger for constant fields (eq. (3.12) of ref. [10]).
It is important to remind eq. (3.12) of ref. [10] which is
$$\frac{-i}{16\pi^2}\frac{1}{s^2}e^{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\ln\left((eFs)^{-1}\sinh(eFs)\right)}e^{i\left\{\frac{1}{4}\left(x'-x''\right)eF\coth(eFs)\left(x'-x''\right)+\frac{es}{2}\sigma F\right\}}, \tag{61}$$
with $e = \frac{g}{2}$ and by taking its approximation for weak fields ($F = \bar{F} \ll$) we obtain
$$\underset{F\ll}{\longrightarrow}\frac{-i}{16\pi^2}\frac{1}{s^2}\,e^{i\left\{-\frac{gs}{4}\sigma^{\mu\nu}\bar{F}_{\mu\nu}(u)-\frac{(x_b-x_a)^\mu}{4s}\left[\delta^\rho_\mu+\frac{(gs)^2}{12}\bar{F}_{\mu\nu}(u)\bar{F}^{\nu\rho}(u)\right](x_b-x_a)_\rho\right\}}\bigg|_{u=k\bar{x}}. \tag{62}$$

Thus, using the function f, the kernels have been separated into two parts, the first part contains the generators of the group $SU(2)$ and the other part contains the Lagrange function, only based on electromagnetic invariants for $x_a \simeq x_b$.

As the Lagrange function is defined from the effective action by the relation

$$W = \int \mathrm{d}^4x\mathcal{L}, \tag{63}$$

and by using the eqs. (8) and (46) and after having removed by subtraction a logarithmic divergence at $s = 0$ and absorbed this divergence in a renormalization of fields and charges, the finite Lagrange function and gauge invariant for constant fields [10] (after having taken the trace on matrices γ) is equal to

$$\mathcal{L}_{\text{spin }1/2} = -\left(1 + 2 \times \frac{\left(\frac{g}{2}\right)^2}{12\pi^2} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{s} e^{-M^2 s}\right) \mathcal{F}$$
$$-2 \times \frac{\left(\frac{g}{2}\right)^2}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{s^3} e^{-M^2 s} \left[\left(\frac{g}{2}s\right)^2 \mathcal{G} \frac{\operatorname{Re}\cosh \frac{g}{2}sX}{\operatorname{Im}\cosh \frac{g}{2}sX} - 1 - \frac{2}{3}\left(\frac{g}{2}s\right)^2 \mathcal{F}\right], \tag{64}$$

with $X = 2(\mathcal{F} + i\mathcal{G})^{1/2}$, $\mathcal{F} = \bar{F}_{\mu\nu}\bar{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\vec{H}^2 - \vec{E}^2\right)$, $\mathcal{G} = \frac{1}{4}\bar{F}_{\mu\nu}\tilde{\bar{F}}^{\mu\nu} = \vec{E} \cdot \vec{H}$.

The added factor 2 comes from the trace of the first factor of eq. (60).

After development in series of $\frac{1}{M}$, $\mathcal{L}_{\text{spin }1/2}$ becomes

$$\mathcal{L}_{\text{spin }1/2} = -\mathcal{F} + 2 \times \frac{2\alpha^2 (1/M)^3}{45M}\left[4\mathcal{F}^2 + 7\mathcal{G}\right] + \ldots, \tag{65}$$

where $\alpha = \frac{(\frac{g}{2})^2}{4\pi}$.

The coefficients, function of $\mathcal{F}$ and $\mathcal{G}$ are well compatible with the Lorentz invariance. For our plane wave all the terms of the above series disappear

$$\mathcal{L}_{\text{spin }1/2}\Big|_{\mathcal{F}=\mathcal{G}=0} \to 0. \tag{66}$$

For the case of spin 0, the term $\operatorname{tr}(e^{-i\frac{gs}{4}\sigma^{\mu\nu}F_{\text{new}\mu\nu}(u)})$ being absent since there are no matrices γ^μ, the total Lagrangian, gauge invariant, is ((eq. (3.54) of ref. [10])

$$\mathcal{L}_{\text{spin }0} = -\mathcal{F} + 2 \times \frac{\left(\frac{g}{2}\right)^2}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{s^3} e^{-M^2 s}\left[\left(\frac{g}{2}s\right)^2 \mathcal{G} \frac{1}{\operatorname{Im}\cosh \frac{g}{2}sX} - 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{g}{2}s\right)^2 \mathcal{F}\right], \tag{67}$$

and, after the development in series $\frac{1}{M}$, the coefficients (compatible with the Lorentz invariance) are null for the plane wave

$$\mathcal{L}_{\text{spin }0} = -\mathcal{F} + 2 \times \frac{2\alpha^2(1/M)^3}{90M}\left[\frac{7}{4}\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}\right] + \ldots\Big|_{\mathcal{F}=\mathcal{G}=0}. \tag{68}$$

4 Conclusion

In this paper, we have determined the probability of pairs creation of the Klein-Gordon and Dirac particles from the vacuum perturbed by a non-Abelian plane wave. Due to the transformation (13) and by using some shifts the obtained expressions for kernels are simply a product of two factors: the first one contains the generators of the $SU(2)$ group and the second one, by taking (or not) the trace on the matrices γ it appears (for $x_a \simeq x_b$) the Lagrange function depending only of electromagnetic invariants. The calculation has been performed algebraically.

For the two cases (spin 0 and 1/2), it has been shown that the non-Abelian field defined by eqs. (1) and (2) is unable to create pairs of particles from the vacuum.

References

1. S. Coleman, Phys. Lett. B **70**, 59 (1977).
2. A. Obukhov, V.K. Perez Fernandez, V.R. Khalilov, Russ. Phys. J. **29**, 12 (1986).
3. E. Brezin, C. Itzykson, Phys. Rev. D **2**, 1191 (1970) and C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory* (Mc Graw-Hill, New York, 1980).
4. A. Casher, H. Neuberger, S. Nussinov, Phys. Rev. D **20**, 179 (1979).
5. A. Casher, H. Neuberger, S. Nussinov, Phys. Rev. D **21**, 1966 (1980).
6. I.K. Affeck, O. Alvarez, N.S. Manton, Nucl. Phys. B **197**, 509 (1982).
7. L. Qiong-gui, J. Phys. G, Nucl. Part. Phys. **25**, 1793 (1999).
8. L. Qiong-gui, J. Phys. G, Nucl. Part. Phys. **26**, L17 (2000).
9. R.C. Wang, C.Y. Wong, Phys. Rev. D **38**, 348 (1988).
10. J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).
11. G.C. Nayak, Phys. Rev. D **72**, 125010 (2005).
12. F. Cooper, G.C. Nayak, Phys. Rev. D **73**, 065005 (2006).
13. B. Hamil, L. Chetouani, Phys. Scr. **89**, 115301 (2014).

ملخص

اردنا من خلال إنجاز هذا العمل, أولا استعمال طريقة تكاملات الطريق من اجل حساب دالة قرين لجسيمات كلاين جوردن ذات سبين معدوم و جسيمات ديراك ذات سبين نصف, تتبادل التأثير مع حقل خارجي يتميز بكونه غير ابلي ثم استخرجنا دوال الموجة لكل حالة.

ثانيا إستعملنا طريقة إنتاج أزواج من الجسيمات بواسطة نفس الحقل السابق, من اجل حساب نواتي كلاين جوردن و ديراك ثم استنتجنا إحتمال إنتاج أزواج من الجسيمات الذي وجدناه معدوم, مما مكننا من استنتاج أن هذا النوع من الحقول لا يمكنه إنتاج أزواج من الجسيمات انطلاقا من الفراغ.

الكلمات المفتاح:

دالة غرين , سبين, جسيمات كلاين جوردن, جسيمات ديراك, إنتاج أزواج من الجسيمات, حقل غير ابيلي.

Résumé

Nous avons fait ce travail, dans le but de calculer d'abord, par la méthode des intégrales de chemin, la fonction de Green pour des particules de Klein Gordon (spin s=0) et de Dirac (spin s=½), en interaction avec un champ de jauge de type non-Abélien du groupe SU(2) à (3+1) dimension. Puis, nous avons extraire les fonctions d'ondes pour les deux cas.

En suite, nous avons utilisé le processus de création de paires de particules par le même champ, pour calculer les deux noyaux de Klein Gordon et de Dirac. Puis, nous avons calculé l'amplitude de probabilité (d'ailleurs nulle) en considérant une paire de particule et d'antiparticule. Ce qui nous a permet d'arracher un résultat essentielle: ce genre des champs, ne peut pas créés des paires de particules à partir du vide.

Mots clé:

fonction de Green, spin, particules de Klein Gordon, particules de Dirac, création de paires de particules, cham non-Abélien.

Summary

We have doing this travel, in the aim to calculate first, by using the path integral approch, the Green function for Klein Gordon particles (spin s=0) and Dirac particles (spin s=½), in interaction with a non-Abelian field of SU(2) group in (3+1) dimension. Then, we have extracted the waves functions for the two cases.

Second, we have using pair creation processus by the same field, for calculate the two kernels of Klein Gordon and Dirac. Then, we have deduced that the probability of pair creation is null. That means: the non-Abelian field of SU(2) group is unable to create pairs particles from vacuum.

Keywords

Green function, spin, Klein Gordon particles, Dirac particles, pair creation of particles, non-Abelian field.