

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Seddik Ben Yahia - Jijel
Faculté des Sciences et de la Technologie



جامعة محمد الصديق بن يحيى - جيجل
كلية العلوم والتكنولوجيا

Département D'Électrotechnique

Mémoire

présenté en vue de l'obtention du diplôme

Master en Electrotechnique

Option : Machines électriques

Thème

**Calcul de potentiel vecteur magnétique par des méthodes
analytique, semi-analytique et numérique**

par :

Mr / Hamza DOUH

et

Mr / Walid BENAMOR

Travail proposé et dirigé par :

Mr / Ammar BOULASSEL

Promotion 2019

Remerciements

Tout d'abord, louange à « ALLAH » qui nous a guidé sur le droit chemin tout au long du travail et nous a inspiré les bons et les justes réflexes. Sans sa miséricorde, ce travail n'aura pas abouti.

*Nous tenons à exprimer mes remerciements et ma gratitude à monsieur l'encadreur **Ammar BOULASSEL**, pour tous ses efforts, ses conseils, son soutien moral et scientifique nous a permis de mener à terme ce travail.*

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury qui ont accepté d'évaluer ce travail.

Mes vifs remerciements vont également à l'ensemble des enseignants de département électrotechnique de l'université Mohamed Seddik ben Yahia pour la formation qu'ils nous ont assuré au long de notre cursus universitaire et tous ceux à qui nous devons notre formation.

Pour terminer, je tiens à remercier tous mes collègues et mes amis qui m'ont aidé et qui m'ont apporté leur soutien moral et à tous ceux qui ont participé de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Sommaire

Introduction générale.....	1
-----------------------------------	----------

Chapitre I

Résolution de l'équation de Laplace par la méthode analytique

I.1.Introduction	3
I.2. Principe de la méthode dans les coordonnées rectangulaire (cartésienne)	3
I.3. Application numérique.....	11
I.4.Conclusion.....	12

Chapitre II

Résolution de l'équation de Laplace par une méthode numérique

II.1. Introduction.....	13
II .2. Dérivée numérique, cas d'un pas constant.....	13
II .2.1. Utilisation des différences à droite (ou progressive)	13
II.2.1.a. Dérivées successives de $f(x)$ en x_j à l'ordre 1 en h	13
II.2.1.b. Les dérivées successives de $f(x)$ en x_j à l'ordre 2 en h	14
II .2.2. Utilisation des différences à gauche (ou régressive)	15
II.2.2.a. Dérivées successives de $f(x)$ en x_j à l'ordre 1 en h	15
II.2.2.b. Dérivées successives de $f(x)$ en x_j à l'ordre 2 en h	16
II.2.3. Utilisation des différences centrées.....	16
II.2.4.Approximation de la dérivée croisée $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$	18
II.3. Incertitude sur le calcul des dérivées.....	19
II.4. Classification des équations aux dérivées partielles.....	19
II.4.1. Classification mathématique des EDP linéaires du second ordre (cas de deux variables indépendantes)	20
II.4.2. Classification mathématique dans le cas général (n variables indépendantes).....	21

II.4.3. Exemples.....	21
II.5. Résolution des équations aux dérivées partielles.....	22
II.5.1. Discrétisation du domaine.....	22
II.6. Méthodes de résolution des E.D.P elliptiques.....	23
II.6.1. Expression à l'aide des différences finies.....	23
II.6.2 Exemple.....	23
II.7. Approximation des dérivées aux nœuds avoisinants une frontière irrégulière.....	28
II.7.1 Exemple.....	29
II.8. Conclusion.....	31

Chapitre III

Résolution de l'équation de Laplace par une méthode semi numérique

III.1. Introduction.....	32
III.2. Solution fondamentale.....	33
III.3. Méthode directe des équations d'intégrale des frontières pour l'équation de Laplace....	35
III.4. Différents types d'éléments de frontières.....	40
III.5. Méthode des équations intégrale de frontière avec des éléments aux frontières constantes	41
III.6. Evaluation des intégrales de ligne.....	46
III.6.1 Eléments hors diagonale, $i \neq j$	46
III.6.1.a. L'intégrale de G_{ij}	48
III.6.1.b.L'intégrale de H_{ij}	48
III.6.2. Eléments diagonaux, $i = j$	49
III.7. Evaluation dans le domaine d'intégral.....	50
III.8. Exemple.....	51
III.9. Conclusion.....	53

Chapitre VI

Application numérique

VI.1. Introduction.....	54
IV.2. Géométrie du problème à résoudre.....	54
IV.3. Calcul de potentiel vecteur magnétique par la méthode d'analytique.....	55
VI.3.1. Problème à résoudre.....	55
IV.4. Calcul de potentiel vecteur magnétique par la méthode numérique.....	57
IV.4.1. Méthode des différences finies.....	57
VI.4.1.a. Exemple (1)	57
VI.4.1.b. Exemple (2)	60
IV.5. Calcul de potentiel vecteur magnétique par la méthode de semi analytique.....	63
VI.6. Conclusion.....	64
 Conclusion générale.....	 65

Liste des Figures

Figure I.1 : Section droite d'un conducteur sous forme rectangulaire.....	3
Figure I.2 : L'application de la superposition réduire le problème(a) au problème(b).....	8
Figure I.3: Lignes équipotentiels dans un conducteur rectangulaire.....	11
Figure I.4: Lignes équipotentiels totales dans un conducteur rectangulaire.....	12
Figure.II.1 : Représentation des différences centrées.....	17
Figure.II.2 : Maillage du domaine.....	23
Figure.II.3 : Problème elliptique.....	24
Figure.II.4 : Maillage.....	25
Figure.II.5 : Introduction des conditions aux limites mixtes.....	27
Figure.II.6 : Frontière irrégulière.....	29
Figure.II.7 : Place de problème.....	30
Figure.II.8 : Distribution des équipotentiels vecteurs magnétiques dans une plaque ferromagnétique.....	30
Figure.II.9 : Traçage des équipotentiels vecteur magnétique pour trois chenins axiales...31	
Figure III.1 :Domaine circulaire Ω , de rayon ρ avec une source P en son centre.....	34
Figure III.2 : Domaine Ω avec des conditions aux limites mixtes.....	36
Figure III.3 : Définitions géométrique liée à un point du coin P d'une limite non lisse.....	37
Figure III.4 : Différents types d'éléments de frontières.....	41
Figure III.5 : Emplacement des points nodaux et les distances relatives pour une discrétisation des éléments constante.....	42
Figure III.6 : Systèmes de coordonnées globales et locales.....	47
Figure III.7 : Définition des angles impliqués dans l'intégration numérique sur des éléments constants.....	49
Figure III.8 : Discrétisation du domaine Ω en éléments triangulaires.....	51
Figure III.9: Domaine carré Ω et conditions aux limites de l'exemple.....	52

Figure III.10: Discrétisation des éléments de frontière et Points internes de l'exemple.....	52
Figure. IV.1 : Problème à résoudre.....	54
Figure. IV.2 :Représentation de l'induction magnétique \vec{B}	54
Figure. IV.3 :Représentation de potentiel magnétique \vec{A}	55
Figure. IV.4 : Représentation des conditions aux limites du problème.....	55
Figure .VI.5 : L'application de la superposition réduire le problème(a) au problème(b).....	56
Figure .VI.6 : Distribution des équipotentiels vecteur magnétique dans plaqua ferromagnétique.....	56
Figure .VI.7 : Traçage des équipotentiels vecteurs magnétiques pour trois Chenins axiales.....	57
Figure .VI.8 : Représentation des conditions aux limites du problème.....	58
Figure .VI.9 : Distribution des équipotentiels vecteur magnétique dans plaqua ferromagnétique.....	58
Figure .VI.10 : Traçage des équipotentiels vecteurs magnétique pour trois chenins axiales.....	59
Figure .VI.11: Domaine Ω et conditions aux limites de l'exemple.....	60
Figure .VI.12 : Maillage de domaine d'étude par la méthode des différences finies	60
Figure .VI.13 : Distribution des équipotentiels vecteur magnétique dans plaqua ferromagnétique.....	61
Figure .VI.14 : Traçage de l'équipotentiel vecteur magnétique pour trois chenins axiales.....	62
Figure.VI.15 : Domaine carré Ω et conditions aux limites de l'exemple.....	63
Figure .VI.16 : Discrétisation des éléments de frontière et Points internes de l'exemple.....	63

Liste des Tableaux

Tableau.II.1 : Données des quatre premières dérivées l'ordre 2 en h.....	15
Tableau.II.2 : Données des quatre premières dérivées l'ordre 1 en h.....	16
Tableau.II.3 : Donnée des quatre premières dérivées l'ordre 2 en h.....	16
Tableau.II.4 : données des quatre premières dérivées à l'ordre 2 en h.....	18

Tableau. III.1: Limite calculée et valeurs internes pour diverses limites discrétisations de....53

Tableau. VI.1: Valeurs calculées et exactes de potentiel vecteur magnétique aux nœuds de frontière et interne en fonction de nombre d'éléments des pointes aux frontières N64

Introduction générale

L'objectif est de présenter les méthodes, numérique, analytique et semi analytique les plus utilisées, pour résoudre les problèmes régis par les équations aux dérivées partielles (EDP). Pour bien assimiler et valider ces méthodes, on doit connaître, en amont, les méthodes analytiques, semi analytiques, numériques et notamment l'expérimentales, ces dernières pour valider les résultats des trois premières méthodes.

Les trois premiers chapitres, donnent les principales méthodes de la résolution des problèmes, sans oublier l'introduction des différentes conditions aux limites, l'état exceptionnel est la résolution des EDP de Laplace pour les problèmes elliptiques.

Le premier chapitre explique le principe de la méthode analytique, pour résoudre les EDP par l'utilisation de la méthode de séparation des variables, si le problème est en 2D, c.-à-d. $f(x,y)$ cette fonction qui a deux variables, est séparée en deux sous fonction ayant une seule variable, dans ce cas $f(x,y) = f(x)f(y)$. Pour simplifier le problème, l'équation différentielle de Laplace est résolue, sujet aux conditions aux limites qui peuvent être appliquées directement à l'équation séparée, la solution f est représentée comme des séries infinies en fonction de f_n , la solution complète se fait, par un développement de f_n en série de Fourier.

On expose dans la première partie de chapitre deux la dérivée numérique par les différences divisées sur un pas constant utilisant les différences à droite (progressive), à gauche (régressive) et centrée sur base entière. Ces divisés numériques sont les bases de la méthode des différences finies, la méthode des différences finies est basée sur la discrétisation du domaine en un double réseau de parallèles aux axes et régulièrement espacés, la résolution des EDP elliptiques de Laplace se fait par la définition de maillage couvrant le domaine et sa frontière, les dérivées sont exprimées, en tout nœud intérieur au domaine, à l'aide des différences finies, ces termes contiennent des points situés sur la frontière. La dernière étape, est d'exprimer les valeurs de la fonction en tout point sur la frontière en tenant compte des conditions aux limites. On résout un système d'équations à n inconnus par des techniques de résolution.

Le chapitre trois, traite la méthode des équations d'intégrales des frontières (MEIF), aussi, comme dans le premier chapitre, les problèmes elliptiques, type de Laplace. La solution fondamentale est basée sur la fonction (l'identité) de Green, la méthode directe des équations

intégrales des frontières est appliquée, avec l'introduction des conditions aux limites mixtes (Dirichlet et Neumann). Généralement, on cherche la solution lorsqu'un point P se situe à l'intérieur de domaine Ω , à l'extérieur et sur la limite (la frontière), cela grâce à l'identité de Green. On trouve trois types de solution, les équations qui constituent la solution peuvent être combinées en une seule équation générale dépend d'un coefficient arbitraire $\varepsilon(p)$, ce dernier dépend de la position du point p . L'équation générale s'écrit sous forme intégrale, ici les éléments aux frontières utilisés sont constantes. La résolution d'un système d'équations par séparation des inconnus à partir des quantités connues, on trouve deux sous-systèmes égaux droite et gauche, on déplace tous les inconnus sur le côté gauche et on résout finalement un système d'équations linéaire.

Le dernier chapitre est consacré à l'application numérique des trois méthodes déjà vues aux chapitres précédents, la résolution de problème d'une plaque ferromagnétique, soumis à un champ magnétique axial, grâce, au supposition que la bobine est suffisamment longue, ce type des problèmes est traité comme un problème de Laplace, avec l'introduction des conditions aux limites sur les côtés de la plaque seulement, c.à.d. on enlève la bobine (la source de courant) et lui remplacer par ces conditions aux limites.

L'examinassions numériques de ces méthodes donne des bons résultats. On finit ces chapitres par des conclusions .

I.1.Introduction :

Dans ce chapitre analyse la méthode de séparation des variables qui permet de résoudre l'équation de Laplace dans une région rectangulaire lorsque l'on impose des conditions pour la solution sur chaque côté de rectangle.

I.2. Principe de la méthode dans les coordonnées rectangulaire (cartésienne) :

Pour ne pas compliquer les idées nous considérons l'équation de Laplace en 2D Seulement Considérons le problème de Dirichlet d'un rectangle qui possède une longueur infinie (Oz) ; ce rectangle est un conducteur à travers la surface comme dans la figure (I.1) [1].

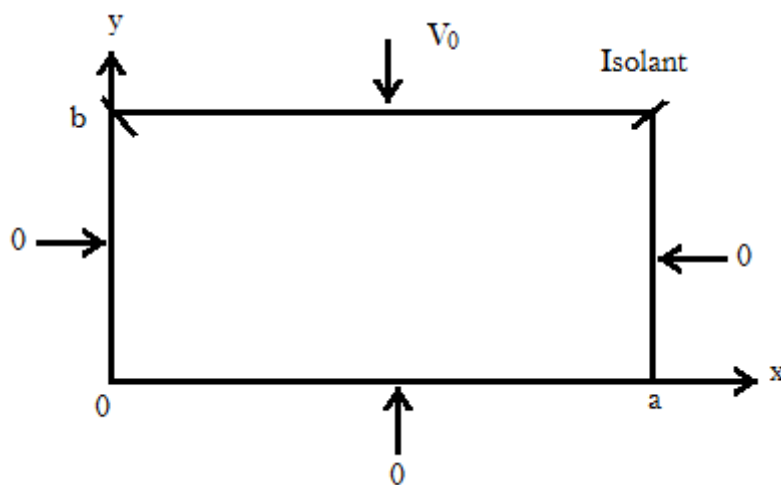


Figure I.1 : Section droite d'un conducteur sous forme rectangulaire.

Pour simplifier le problème, les trois côtés : bas, droit et gauche sont maintient à un potentiel égale à zéro, le cote supérieur est fixé à un potentiel égale à V_0 , se sont les conditions au limites. L'équation différentielle à résolue est :

$$\frac{\partial V^2}{\partial X^2} + \frac{\partial V^2}{\partial Y^2} = 0 \quad (\text{I.1})$$

Sujet aux conditions aux limites :

$$V(0, y) = 0 \quad (\text{I.2a})$$

$$V(a, y) = 0 \quad (\text{I.2b})$$

$$V(x, 0) = 0 \quad (\text{I.2c})$$

$$V(x, b) = V_0 \quad (\text{I.2d})$$

La solution prend l'expression suivante :

$$V(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \quad (\text{I.3})$$

La substitution de cette équation dans l'équation (I.1) puis la division par $X \cdot Y$ donne cette expression :

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0 \quad (\text{I.4})$$

Ou' bien :

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda$$

Ou' λ est un constant de séparation, donc on trouve ces deux équations :

$$X'' - \lambda X = 0 \quad (\text{I.5})$$

$$Y'' + \lambda Y = 0 \quad (\text{I.6})$$

Pour la résolution de l'équation différentielle (I.5) et (I.6), nous entrons les conditions aux limites de l'équation (I.2). Donc, ces équations aux limites peuvent être appliquées directement à l'équation séparée, nous avons : ($V = X \cdot Y$)

$$V(0, y) = 0 \quad X(0) = 0 \quad (\text{I.7a})$$

$$V(a, y) = 0 \quad X(a) = 0 \quad (\text{I.7b})$$

$$V(x, 0) = 0 \quad Y(0) = 0 \quad (\text{I.7c})$$

$$V(x, b) = V_0 \quad X(x) \cdot Y(y) = V_0 \quad (\text{I.7d})$$

Noter que seulement les conditions homogènes sont séparées.

Pour résoudre l'équation (I.5), nous étudions ces trois cases possibles de λ : $\lambda = 0$; $\lambda > 0$ et $\lambda < 0$.

case1: $\lambda = 0$

Dans ce cas, l'équation (I.5) réduit à :

$$X'' = 0$$

Ou' bien

$$\frac{d^2 X}{d X^2} = 0 \quad (\text{I.8})$$

Qui a la solution suivante :

$$X(x) = a_1 x + a_2 \quad (\text{I.9})$$

a_1 et a_2 sont des constants.

L'introduction des conditions aux limites de l'équation (I.7a) et (I.7b) pour déterminer a_1 et a_2 :

$$X(0) = 0 \quad a_2 = 0$$

$$X(a) = 0 \quad a_1 = 0$$

Donc : $X(x) = 0$, une solution particulière. Dans ce cas ou ($\lambda = 0$) est un cas inacceptable.

case2: $\lambda > 0$

On suppose que $\lambda = \alpha^2$

Donc l'équation (I.5) sera :

$$X'' - \alpha^2 X = 0 \quad (\text{I.10})$$

La solution générale prend cette forme :

$$X = b_1 e^{-\alpha x} + b_2 e^{\alpha x} \quad (\text{I.11})$$

Ou bien :

$$X = b_3 \sinh(\alpha x) + b_4 \cosh(\alpha x) \quad (\text{I.12})$$

Les conditions aux limites sont appliquées pour déterminer les constants b_3 et b_4 :

$$X(0) = 0 \quad b_4 = 0$$

$$X(a) = 0 \quad b_3 = 0$$

Depuis que $\text{Sinh}(\alpha, x)$ est toujours égale à zéro pour $\alpha > 0$, donc $H(x)=0$, est une solution particulière, est nous constatons que $\lambda > 0$ n'est pas valide.

case3: $\lambda < 0$

On suppose que $\lambda = -\beta^2$

Donc :

$$X'' = \beta^2 X = 0 \quad (\text{I.13})$$

La solution de cette équation est :

$$X = A_1 e^{j\beta x} + A_2 e^{-j\beta x} \quad (\text{I.14a})$$

Ou bien

$$X = B_1 \sin \beta x + B_2 \cos \beta x \quad (\text{I.15})$$

Donc :

$$X(0) = 0 \quad B_2 = 0$$

$$X(a) = 0 \quad \sin \beta a = 0 = \sin(n\pi)$$

Ou bien :

$$\beta = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{I.16})$$

Donc, on trouve des solutions infinies par des valeurs de λ dans laquelle l'équation (I.5) a des solutions :

$$\lambda = -\beta^2 = -\frac{n^2 \pi^2}{a^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{I.17})$$

Elles sont les valeurs propres de problème et les fonctions propres correspondantes :

$$X_n(x) = \sin(\beta x) = \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (\text{I.18})$$

À partir de l'équation (I.17), noter que ce n'est pas nécessaire d'introduire les valeurs négatives de n . elles donnent les mêmes valeurs propres. Aussi, nous excluons $n = 0$, qui donne une solution particulière $X=0$ comme dans le cas 1 quand $\lambda=0$.

On peut résoudre l'équation (I.6) pour chercher $Y_n(y)$ correspondants à $X_n(x)$, donc nous résolvons :

$$Y'' - \beta^2 Y = 0 \quad (\text{I.19})$$

C'est une équation semblable l'équation (I.10), qui a une solution comme dans le cas de l'équation (II.12). Donc la solution de l'équation (I.19) prend la forme :

$$Y_n(y) = a_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + b_n \cosh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \quad (\text{I.20})$$

L'introduction des conditions aux limites de l'équation (I.7c)

$$Y(0) \rightarrow 0 \rightarrow B_n = 0$$

Donc on trouve :

$$Y_n(y) = a_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \quad (\text{I.21})$$

La substitution des équations (I.18) et (I.21) dans l'équation (I.3). On trouve :

$$V_n(x, y) = X_n(x)Y_n(y) = a_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad (\text{I.22})$$

Qui satisfait l'équation (I.1) et les conditions aux limites (I.2a) (I.2b) et (I.2c). Par le principe de superpositions, une combinaison linéaire des solutions V_n chaque une avec des différentes valeurs de n et les coefficients arbitraires a_n qui sont aussi des solutions de l'équation (I.1). Donc il faut représenter la solution V de l'équation (I.1) comme des séries infinies en fonction de V_n :

$$V_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \quad (\text{I.23})$$

Maintenant. On détermine les coefficients a_n par l'introduction des conditions aux limites inhomogène de l'équation (I.2d) dans l'équation (I.23) on trouve :

$$V_n(x, b) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \quad (\text{I.24})$$

Le développement de V_0 en série de Fourier donc :

$$a_n \sin\left(\frac{n\pi b}{a}\right) = \frac{2}{b} \int_0^b V_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \frac{2V_0}{n\pi} (1 - \cos n\pi)$$

Ou bien

$$a_n = \begin{cases} \frac{4V_0}{n\pi} \frac{1}{\sin\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} & n = \text{impaire} \\ 0 & n = \text{paire} \end{cases} \quad (\text{I.25})$$

La substitution de l'équation (I.25) dans l'équation (I.23) donne la solution complète

$$V(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=\text{impaire}}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)}{n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \quad (\text{I.26a})$$

On remplace n par (2k-1), cette équation devient :

$$V(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{(2k-1)\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{(2k-1)\pi y}{a}\right)}{n \sinh\left(\frac{(2k-1)\pi b}{a}\right)} \quad (\text{I.26b})$$

Inhomogène comme dans la section précédente on considère le problème de la figure (I-2b) mais il a quatre conditions aux limites comme dans la figure (I-2a)

Le problème peut être reposer sur la résolution de l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{I.27})$$

Sujet aux conditions inhomogènes de Dirichlet suivantes :

$$V(x, 0) = V_1$$

$$V(a, y) = V_2$$

$$V(x, b) = V_3$$

$$V(0, y) = V_4 \quad (\text{I.28})$$

Depuis que l'équation de Laplace est une équation linéaire homogène, le problème peut être simplifié par l'application de principe de superposition si on pose :

$$V = V_I + V_{II} + V_{III} + V_{IV} \quad (\text{I.29})$$

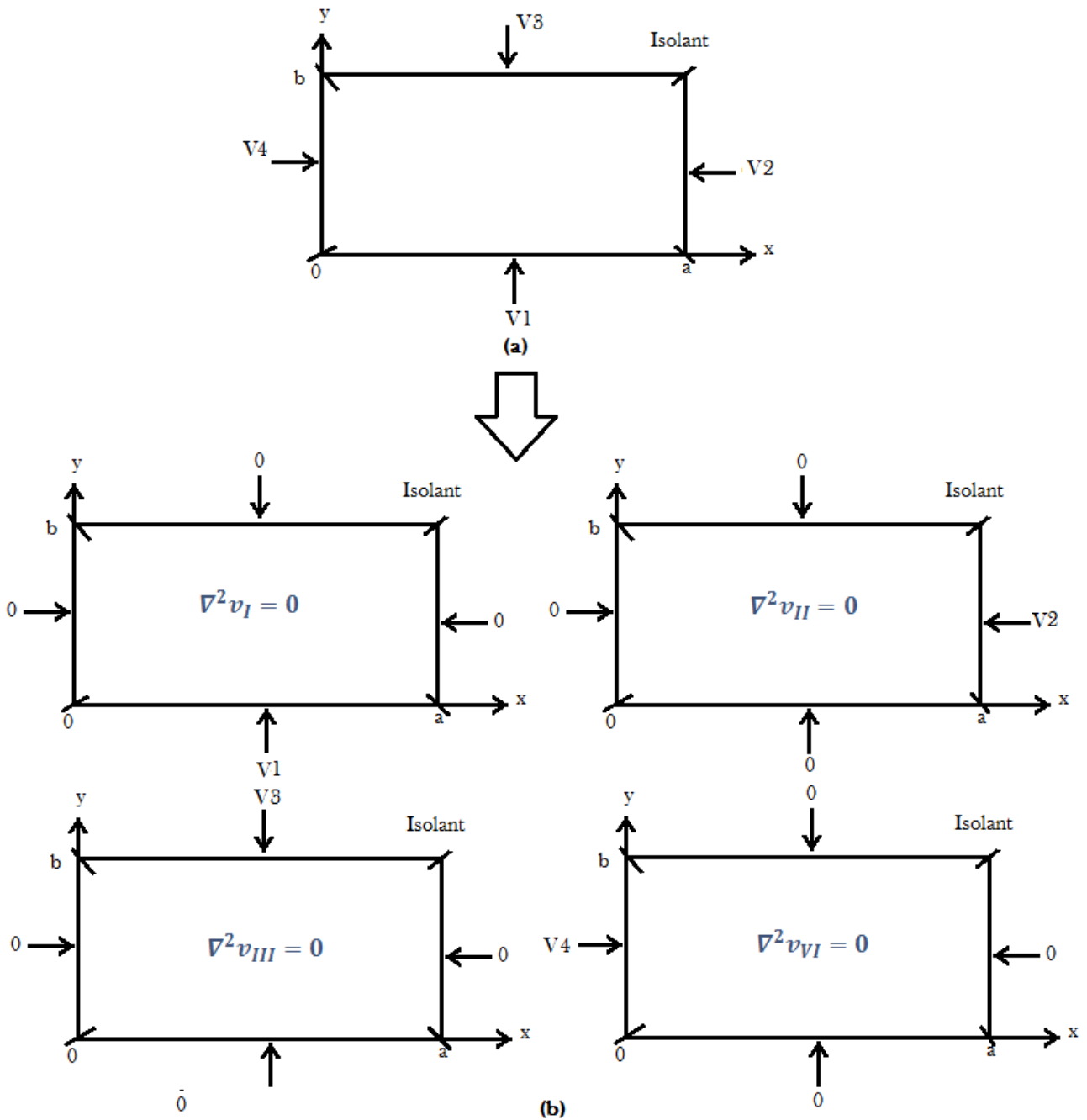


Figure I.2 : L'application de la superposition réduire le problème(a) au problème(b).

On veut réduire le problème à quatre problèmes simples, chaque un est associé à l'autre par les conditions inhomogènes, le réduit est un problème simple qui a été illustré dans la figure(I-2b) est fixé comme suit :

$$\frac{\partial^2 v_I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_I}{\partial y^2} = 0 \tag{I.30}$$

Sujet à :

$$V_I(x, 0) = V_1$$

$$V_I(x, b) = 0$$

$$V_I(0, y) = 0 \tag{I.31}$$

$$V_I(a, y) = 0$$

$$\frac{\partial^2 V_{II}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_{II}}{\partial Y^2} = 0 \tag{I.32}$$

Sujet à :

$$V_{II}(x, 0) = 0$$

$$V_{II}(x, b) = V_2$$

$$V_{II}(0, y) = 0 \tag{I.33}$$

$$\frac{\partial^2 V_{III}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_{III}}{\partial Y^2} = 0 \tag{I.34}$$

Sujet à :

$$V_{III}(x, 0) = 0$$

$$V_{III}(x, b) = 0$$

$$V_{III}(0, y) = V_3 \tag{I.35}$$

$$V_{III}(a, y) = 0$$

$$\frac{\partial^2 V_{IV}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_{IV}}{\partial Y^2} = 0 \tag{I.36}$$

Sujet à :

$$V_{IV}(x, 0) = 0$$

$$V_{IV}(x, b) = 0$$

$$V_{IV}(0, y) = 0 \tag{I.37}$$

$$V_{IV}(a, y) = V_4$$

Il est clair que le problème réduit dans l'équation (I.34) et (I.35) avec la solution V_{III} est le même que le problème dans la figure(I.2) les trois autres problèmes sont aussi semblables.

La solution V_I, V_{II}, V_{III} et V_{IV} peut être obtenue par la même procédure comme dans la section précédente, mais avec un propre changement des variables de l'équation (I.26)

$$V_I = \frac{4V_1}{\pi} \sum_{n=\text{impaire}}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi(b-y)}{a}\right)}{n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \quad (\text{I.38})$$

$$V_{II} = \frac{4V_2}{\pi} \sum_{n=\text{impaire}}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)}{n \sinh\left(\frac{n\pi b}{b}\right)} \quad (\text{I.39})$$

$$V_{III} = \frac{4V_3}{\pi} \sum_{n=\text{impaire}}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)}{n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \quad (\text{I.40})$$

$$V_{IV} = \frac{4V_4}{\pi} \sum_{n=\text{impaire}}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sinh\left(\frac{n\pi(a-x)}{b}\right)}{n \sinh\left(\frac{n\pi b}{b}\right)} \quad (\text{I.41})$$

On obtient la solution complète par la substitution des équations (I.30) à (I.31) dans l'équ (I.29).

I.3. Application numérique :

On applique la méthode de séparation des variables précédente à un rectangle, les conditions aux limites sont : 5 wb/m sur le côté gauche, 15 wb/m sur le côté bas, 10 wb/m sur le côté haut et 20 sur le côté droit. Les résultats sont représentés sur la figure (I-3).

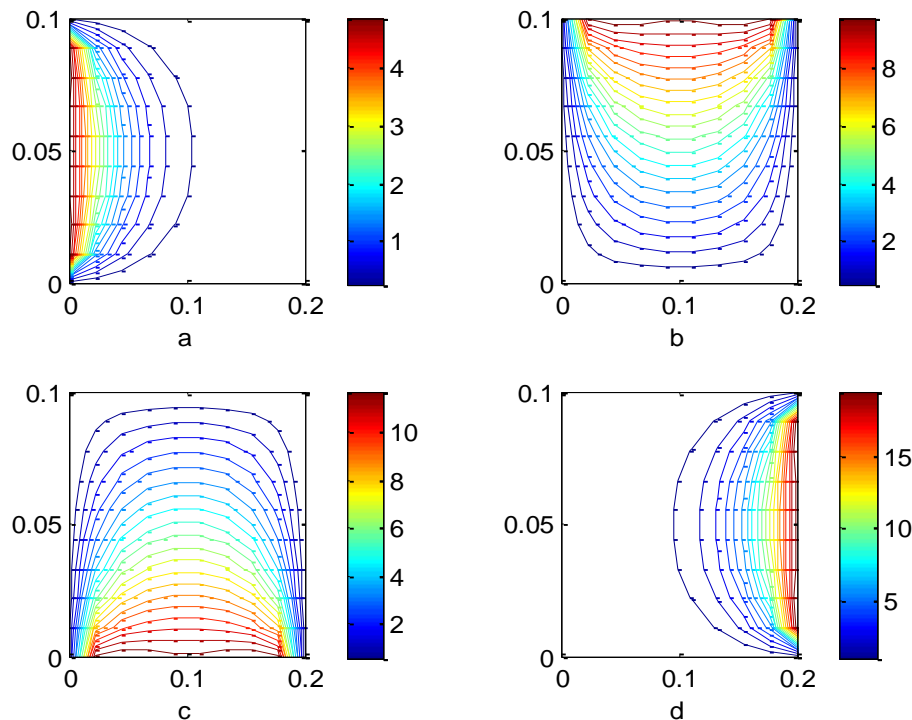


Figure I.3: Lignes équipotentielles séparées dans un conducteur rectangulaire.

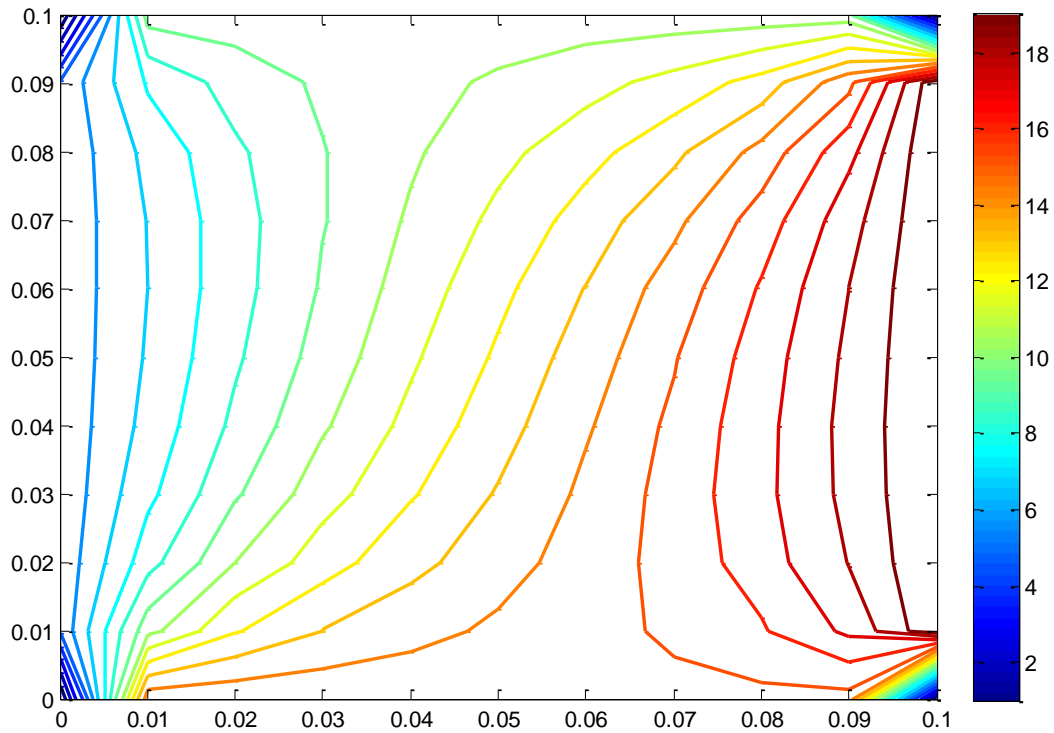


Figure I.4: Lignes équipotentielles totales dans un conducteur rectangulaire.

I.4.Conclusion :

Lorsque les conditions aux limites sont spécifiées sur des plans parallèles, le système de coordonnées cartésienne est le plus adéquat pour exprimer ces conditions et obtenir une solution du problème de l'équation de Laplace.

II.1. Introduction :

En analyse numérique, la méthode des différences finies est une technique courante de recherche de solutions approchées d'équations aux dérivées partielles qui consiste à résoudre un système de relations (schéma numérique) liant les valeurs des fonctions inconnues en certains points suffisamment proches les uns des autres.

Cette méthode apparaît comme étant la plus simple à mettre en œuvre car elle procède en deux étapes : d'une part la discrétisation par différences finies des opérateurs de dérivation/différentiation, d'autre part la convergence du schéma numérique ainsi obtenu lorsque la distance entre les points diminue [2].

II .2. Dérivée numérique, cas d'un pas constant :

Les formules pour les dérivées peuvent être obtenues à partir des formules d'interpolation de Newton pour un pas constant, mais peuvent aussi être établies en utilisant les développements en séries de Taylor.

II .2.1. Utilisation des différences à droite (ou progressive) :

II.2.1.a. Dérivées successives de $f(x)$ en x_j à l'ordre 1 en h :

Calcul de f'_j : l'erreur commise est de l'ordre de h [3]

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(x) + \dots \quad (II.1)$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2} f''(x) - \frac{h^2}{3!} f^{(3)}(x) - \dots \quad (II.2)$$

Donc :

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + 0(h) \quad (II.3)$$

Si $x = x_j$ alors

$$f'(x_j) = \frac{f(x_{j+h}) - f(x_j)}{h} + 0(h) \quad (II.4)$$

$$f'_j = \frac{f_{j+1} - f_j}{h} \delta(h) = \frac{\Delta + f_j}{h} + 0(h) \quad (II.5)$$

Calcul de f'_j :

$$(-2) * \left\{ f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(x) + \dots \right.$$

$$\left. + \{ f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + 2h^2 f''(x) + \frac{8h^3}{6} f^{(3)}(x) + \dots \right.$$

$$-2f(x+h) + f(x+2h) = -f(x) + h^2 f''(x) + h^3 f'''(x) \quad (II.6)$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - 2f(x+h) + f(x+2h)}{h^2} - hf'''(x) \quad (II.7)$$

$$f''_j = \frac{f_j - 2f_{j+1} + f_{j+2}}{h^2} \delta(h) = \frac{\Delta^2 + f_j}{h^2} + 0(h) \quad (II.8)$$

$$f_j^{(n)} = \frac{\Delta^n + f_j}{h^n} + 0(h) \quad (II.9)$$

II.2.1.b. Les dérivées successives de $f(x)$ en x_j à l'ordre 2 en h :

On obtient une meilleure précision en prenant plus de termes dans le développement en séries, ainsi pour trouver f'_j on utilise le développement jusqu'à l'ordre 2.

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f'''(x) + \dots \quad (II.10)$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2} f''(x) - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(x) - \dots$$

$$= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2} \left[\frac{f(x) - 2f(x+h) + f(x+2h)}{h^2} - hf'''(x) - \dots \right] - \frac{h^2}{6} f'''(x)$$

$$= \frac{2f(x+h) - 2f(x) - f(x) + 2f(x+h) - f(x+2h)}{2h} - \frac{4h^2}{3} f'''(x) + \dots$$

$$f'(x) = \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h} + \frac{h^2}{3} f'''(x) + \dots \quad (II.11)$$

Si : $x = x_j$

$$f'_j = \frac{-3f_j + 4f_{j+1} - f_{j+2}}{2h} + 0(h^2) \tag{II.12}$$

Par des démonstrations similaires on obtient $f', f'', f''' \dots$ à l'ordre 2 en h

	f_j	f_{j+1}	f_{j+2}	f_{j+3}	f_{j+4}	f_{j+5}	
$2hf'_j$	-3	4	-1				$+0(h^2)$
$h^2f''_j$	2	-5	4	-1			$+0(h^2)$
$2h^3f^{(3)}_j$	-5	18	-24	14	-3		$+0(h^2)$
$h^4f^{(4)}_j$	3	14	26	-24	11	-2	$+0(h^2)$

Tableau.II.1 : Données des quatre premières dérivées l'ordre 2 en h.

II .2.2. Utilisation des différences à gauche (ou régressive) :

Cette méthode permet d'obtenir la dérivée d'ordre n au point $x_j(f_j^n)$ comme combinaison linéaire des $f_j, f_{j-1}, f_{j-2}, \dots \dots \dots f_{j-n}$

II.2.2.a. Dérivées successives de f(x) en x_j à l'ordre 1 en h :

$$f(x - h) = -f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots \tag{II.13}$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x - h)}{h} + \frac{h}{2} f''(x) + \dots \tag{II.14}$$

Donc

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + 0(h) \tag{II.15}$$

Pour $x = x_j$

$$\text{alors } f'(x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_j-h)}{h} + 0(h) \tag{II.16}$$

$$1. f'_j = \frac{f_j - f_{j-1}}{h} \delta(h) = \frac{\Delta^- f_j}{h} + 0(h) \tag{II.17}$$

$$f_j^{(n)} = \frac{\Delta^n - f_j}{h^n} + 0(h) \quad (II.18)$$

Pour trouver la dérivée à l'ordre 1 en h d'ordre (n), on utilise (n+1) points. Pour la dérivée Première à l'ordre 1 en h, on prend les deux premiers termes du polynôme.

	f_j	f_{j-1}	f_{j-2}	f_{j-3}	f_{j-4}	
hf'_j	1	-1				$+0(h)$
$h^2f''_j$	1	-2	1			$+0(h)$
$h^3f_j^{(3)}$	1	-3	3	-1		$+0(h)$
$h^4f_j^{(4)}$	1	-4	6	-4	1	$+0(h)$

Tableau.II.2 : Données des quatre premières dérivées l'ordre 1 en h.

II.2.2.b. Dérivées successives de f(x) en x_j à l'ordre 2 en h :

On procède comme au paragraphe 3.1b à partir du développement de f(x-h) au lieu de f(x+h). Les premières dérivées à l'ordre 2 en h sont données dans le tableau suivant :

	f_j	f_{j-1}	f_{j-2}	f_{j-3}	f_{j-4}	f_{j-5}	
$2hf'_j$	3	-4	1				$+0(h^2)$
$h^2f''_j$	2	-5	2	-1			$+0(h^2)$
$2h^3f_j^{(3)}$	5	-18	24	14	3		$+0(h^2)$
$h^4f_j^{(4)}$	3	-14	26	-24	11	-2	$+0(h^2)$

Tableau.II.3 : Donnée des quatre premières dérivées l'ordre 2 en h.

Pour trouver la dérivée nième du polynôme à l'ordre 2 en h, on utilise (n+2) points ou bien pour la dérivée première à l'ordre 2 en h, on prend les trois premiers termes du polynôme.

II.2.3. Utilisation des différences centrées :

Pour calculer $f_j^{(n)}$ on utilise les points situés de part et d'autre de x_j

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x) \dots \quad (II.19)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x) \dots \quad (II.20)$$

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(x) + \dots \quad (II.21)$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{3!} f^{(3)}(x) \quad (II.22)$$

Si $x = x_j$

$$\text{alors } f'_j = \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2h} - \frac{h^2}{6} f_j^{(3)} \quad (II.23)$$

Malgré qu'on ait utilisé deux points, l'erreur est de l'ordre 2 en h (plus précise) :

$$f'_j = \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2h} + O(h^2) \quad (II.24)$$

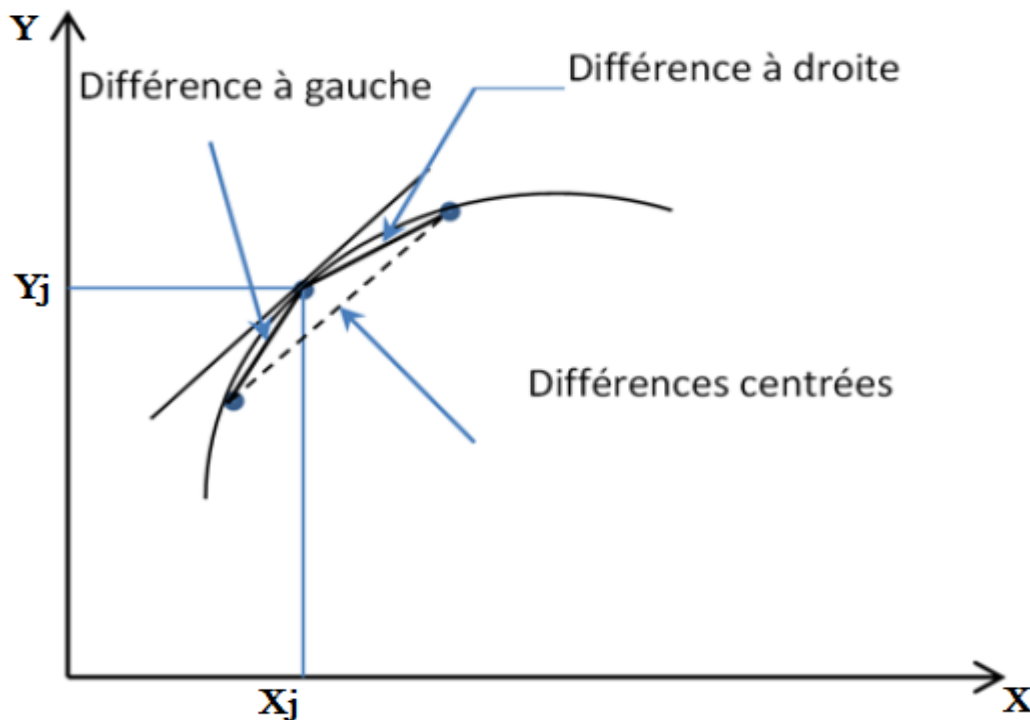


Figure.II.1 : Représentation des différences centrées.

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + \frac{h^4}{12} f^{(4)}(x) \dots \dots \dots \quad (II.25)$$

$$f''(x) = \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} - \frac{h^4}{12} f^{(4)}(x) \dots \dots \dots \quad (II.26)$$

$$f''_j = \frac{f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}}{h^2} - \frac{h^4}{12} f_j^{(4)} \dots \dots \dots \quad (II.27)$$

Lorsque n est paire $n = 2p$:

$$f_j^{(2p)} = \frac{\Delta^{2p} - f_{j+p} + \Delta^{2p} + f_{j-p}}{h^{2p}} + 0(h^2) \quad (II.28)$$

Lorsque n est paire $n = 2p + 1$:

$$f_j^{(2p+1)} = \frac{\Delta^{2p+1} - f_{j+p} + \Delta^{2p+1} + f_{j-p}}{h^{2p+1}} + 0(h^2) \quad (II.29)$$

	f_{j-2}	f_{j-1}	f_j	f_{j+1}	f_{j+2}	
$2hf'_j$		-1	0	1		$+0(h^2)$
$h^2f''_j$		1	-2	1		$+0(h^2)$
$2h^3f_j^{(3)}$	-1	2	0	-2	1	$+0(h^2)$
$h^4f_j^{(4)}$	1	-4	6	-4	1	$+0(h^2)$

Tableau.II.4 : données des quatre premières dérivées à l'ordre 2 en h.

II.2.4.Approximation de la dérivée croisée $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \Big|_{i,j} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{i,j} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{i,j+1} - \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{i,j-1}}{2k} + 0(h^2) \quad (II.30)$$

Or

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{i,j+1} = \frac{f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1}}{2h} + 0(h^2) \quad (II.31)$$

Et

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{i,j-1} = \frac{f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j-1}}{2h} + 0(h^2) \quad (II.32)$$

Donc :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \Big|_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \Big|_{i,j} = \frac{1}{4hk} [f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j+1} - f_{i-1,j-1} + f_{i+1,j-1}] + 0(h^2) \quad (II.33)$$

II.3. Incertitude sur le calcul des dérivées :

On peut montrer que lorsque $f(x)$ est approchée par un polynôme $p_n(x)$ on a :

$$\frac{df(x)}{dx} - \frac{dp_n(x)}{dx} = \frac{ds_n(x)}{dx} \frac{f^{(n+1)}(c_1)}{(n+1)!} + s_n(x) \frac{f^{(n+2)}(c_2)}{(n+2)!} \quad (II.34)$$

Où c_1 et c_2 appartiennent à l'intervalle d'interpolation.

$$s_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots \dots \dots (x - x_n) \quad (II.35)$$

Lorsque $x = x_j$ $s_n(x_j) = 0$

$$E'(x_j) = \frac{f^{(n+1)}(c_1)}{(n+1)!} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (x_j - x_i) \quad (II.36)$$

$$\left. \frac{ds_n}{dx} \right|_{x=x_j} = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (x_j - x_i) \quad (II.37)$$

Si $f^{(n+1)}(x)$ admet un majorant connu, on a d'après (II.34) une idée de l'incertitude sur le calcul de la dérivée première. Malheureusement il est rare qu'on ait ce renseignement surtout si $f(x)$ est donnée sous forme de table.

II.4. Classification des équations aux dérivées partielles :

Une équation aux dérivées partielles (EDP) est une relation faisant intervenir les variables indépendantes $x_1, x_2, \dots \dots \dots$, la fonction f et ses dérivées partielles. Par exemple, si f est une fonction de deux variables, une

EDP peut s'écrire par la relation :

$$F \left(x, y, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \dots \dots \dots \right) = 0 \quad (II.38)$$

On appelle ordre de l'EDP l'ordre le plus élevé des dérivées partielles intervenant dans l'EDP, par exemple :

$$\text{d'ordre 3 } 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial x} + f + c = 0 \quad (II.39)$$

$$\text{d'ordre 2 } \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 - c = 0 \quad (II.40)$$

L'EDP est dite linéaire si F est linéaire par rapport à ses arguments f et ses dérivées partielles, et si les coefficients qui les lient ne dépendent que de (x, y) ; sinon elle est non linéaire. Par exemple, l'EDP du second ordre :

$$a_1 + a_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + a_4 \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + a_6 f + a_7 = 0 \quad (II.41)$$

est linéaire si les a_i ne dépendent que de (x, y) .

II.4.1. Classification mathématique des EDP linéaires du second ordre (cas de deux variables indépendantes) :

De très nombreux phénomènes physiques se traduisent par les EDP linéaires du second ordre du type (II.41) qui peuvent s'écrire sous la forme :

$$a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + c \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = d \quad (II.42)$$

Où a , b et c ne dépendent que de (x, y) et d est une fonction linéaire de $\left(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

Il y a trois types d'équations aux dérivées partielles représentés par l'équation (II.42) :

- Lorsque la quantité $\Delta = (b^2 - 4ac) < 0$ l'équation (II.42) est dite du type elliptique.
- Lorsque la quantité $\Delta = (b^2 - 4ac) = 0$ l'équation (II.42) est dite du type parabolique.
- Lorsque la quantité $\Delta = (b^2 - 4ac) > 0$ l'équation (II.42) est dite du type hyperbolique.

Cette appellation est faite par analogie avec l'équation générale du second ordre en géométrie analytique :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 4 \quad (II.43)$$

Ainsi, selon le signe du discriminant $\Delta = (b^2 - 4ac)$ nous obtenons différentes formes géométriques :

$$\text{ellipse } \Delta = (b^2 - 4ac) < 0 \quad (II.43.a)$$

$$\text{parabole } \Delta = (b^2 - 4ac) = 0 \quad (II.43.b)$$

$$\text{hyperbole } \Delta = (b^2 - 4ac) > 0 \quad (II.43.c)$$

II.4.2. Classification mathématique dans le cas général (n variables indépendantes) :

Si f est une fonction de n variables indépendantes, les EDP linéaires du second ordre s'ont du type :

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1 \dots x_n) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^n b_i(x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} + c(x_1 \dots x_n) + d(x_1 \dots x_n) = 0 \quad (II.44)$$

- Si tous les a_i sont non nuls et de même signe, l'EDP est de type elliptique.
- Si tous les a_i sont non nuls et sont ; à une exception près, de même signe, l'EDP est de type hyperbolique.
- Si un seul des a_i est nul (noté a_{i_0}) et tous les autres de même signe et si b_{i_0} est non nul, l'EDP est de type parabolique.

Les fonctions a_i et b_i étant dépendantes des variables $(x_1 \dots x_n)$ la classification est évidemment fonction du point $(x_1 \dots x_n)$ considéré. Une EDP peut donc être de différents types suivant les points considérés : on dit qu'elle est de type mixte.

II.4.3. Exemples :

soient $f(x, y)$ une fonction de deux variables et $g(x, y, t)$ une fonction de trois variables.

Une EDP elliptique

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad (II.45)$$

Une EDP hyperbolique

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \quad (II.46)$$

Une EDP parabolique

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \quad (II.47)$$

$$x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad (II.48)$$

Elliptique pour $x > 0$

Hyperbolique pour $x < 0$

Parabolique pour $x = 0$

II.5. Résolution des équations aux dérivées partielles :

Pour obtenir une approximation numérique de la solution de ce problème, nous devons approcher les dérivées partielles de l'E.D. P en chaque nœud du domaine discrétisé (maillage) en utilisant les valeurs de la variable dépendante en ce nœud et aux nœuds avoisinants.

II.5.1. Discrétisation du domaine :

Les calculs par différences finies sont effectués suivant un maillage obtenu par un double réseau de parallèles aux axes et régulièrement espacés. L'intersection de deux droites du maillage définit un nœud M de coordonnées (x_M, y_M) . Si les parallèles à l'axe sont espacées de $\Delta x = h$ et les parallèles à l'axe y de $\Delta y = k$, le nœud a comme coordonnées :

$$x_M = i\Delta x = ih \quad (II.49)$$

Et

$$y_M = j\Delta y = jk \quad (II.50)$$

D'une manière condensée (i, j) , la fonction $f(x, y)$ prend au point $M(x_M, y_M)$ la valeur $f(i\Delta x, j\Delta y) = f(ih, jk) = f_{i,j}$

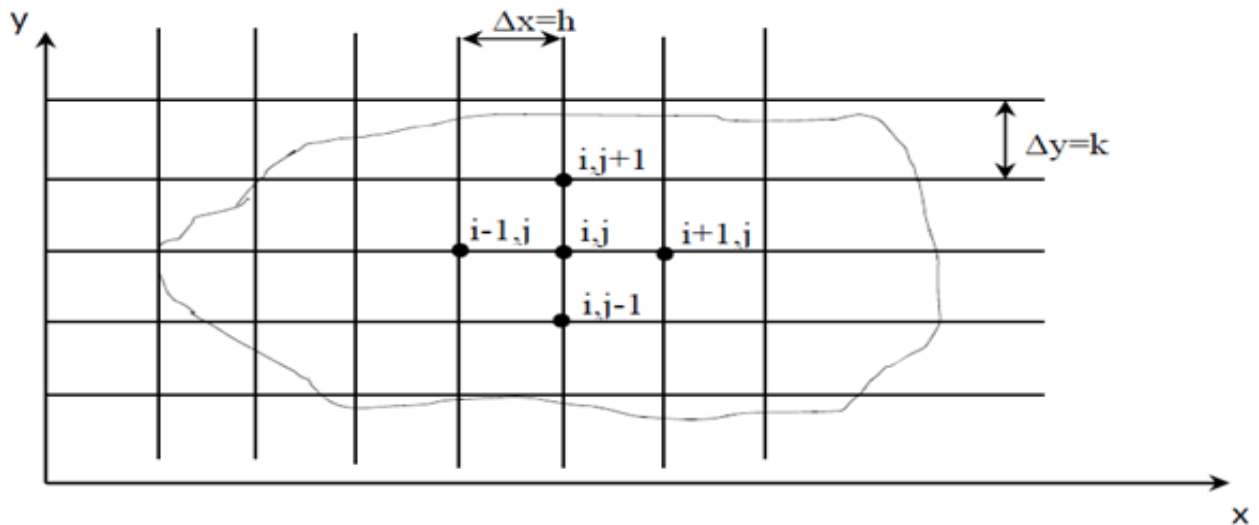


Figure.II.2 : Maillage du domaine.

II.6. Méthodes de résolution des E.D.P elliptiques :

II.6.1. Expression à l'aide des différences finies :

La mise en équation à l'aide des différences finies comporte :

Définir un maillage couvrant le domaine et sa frontière, En tout nœud intérieur au domaine, exprimer les dérivées à l'aide des différences finies. Ces termes contiennent des points situés sur la frontière, Exprimer les valeurs de la fonction en tout point sur la frontière en tenant compte des conditions aux limites. On obtient alors un système de n équations à n inconnus dont on résout par l'une des techniques de résolution [4].

II.6.2. Exemple :

Déterminer la fonction $f(x, y)$ dans le domaine rectangulaire ($0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b \leq b$), f satisfait l'équation de Laplace $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ avec les conditions aux limites suivantes

$$: \begin{cases} f(x = 0, y) = f_0 \\ f(x = a, y) = f_a \\ f(c \leq x \leq a, y = 0) = f_a \quad \text{Dirichlet} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x \leq c, y = 0) = 0 \quad \text{Neumann} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y = b) = 0 \end{cases} \quad (II. 51)$$

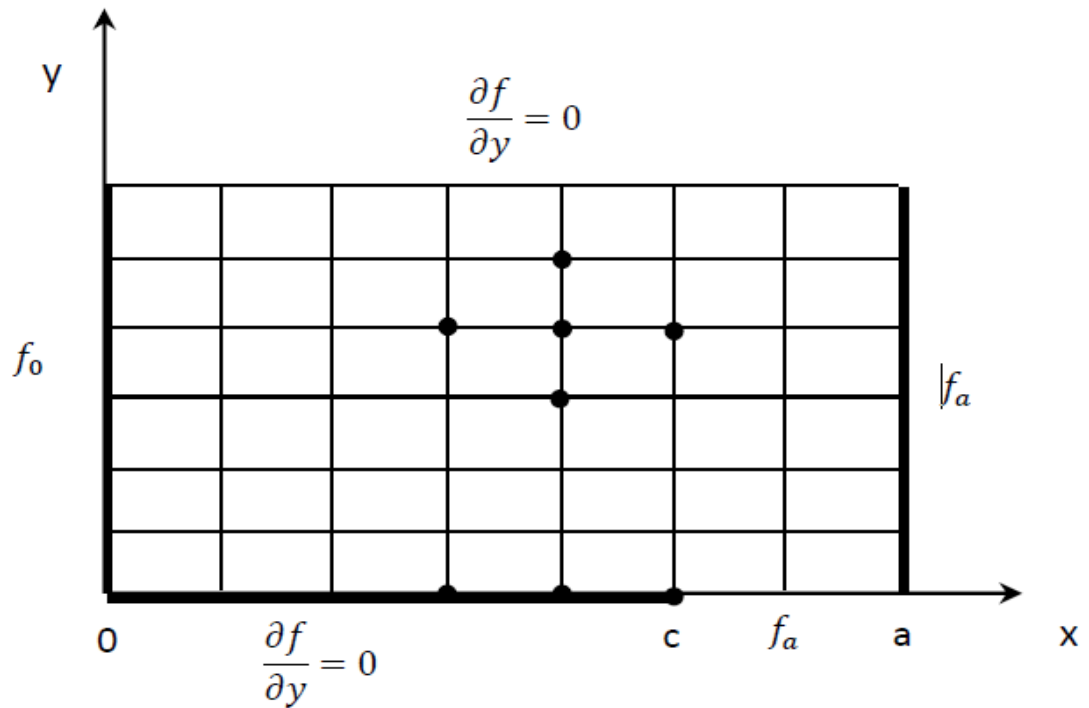


Figure.II.3 : Problème elliptique.

- On définit un maillage qui coïncide avec les frontières du domaine ;
- On choisit $(n + 1)$ pas sur x de valeur $\Delta x = \frac{a}{n+1}$. Choisissons Δx sous multiple de a et de $a - c$ de façon que $x = c$ corresponde au $p^{\text{ième}}$ pas sur x . On choisit le maillage de telle façon que

$$\begin{aligned} c_1 \Delta x &= a; \\ c_2 \Delta x &= (a - c) \end{aligned}$$

Ce qui veut dire une ligne du maillage qui passe par le point c . Si on trouve une discontinuité des limites, on procède de la même manière.

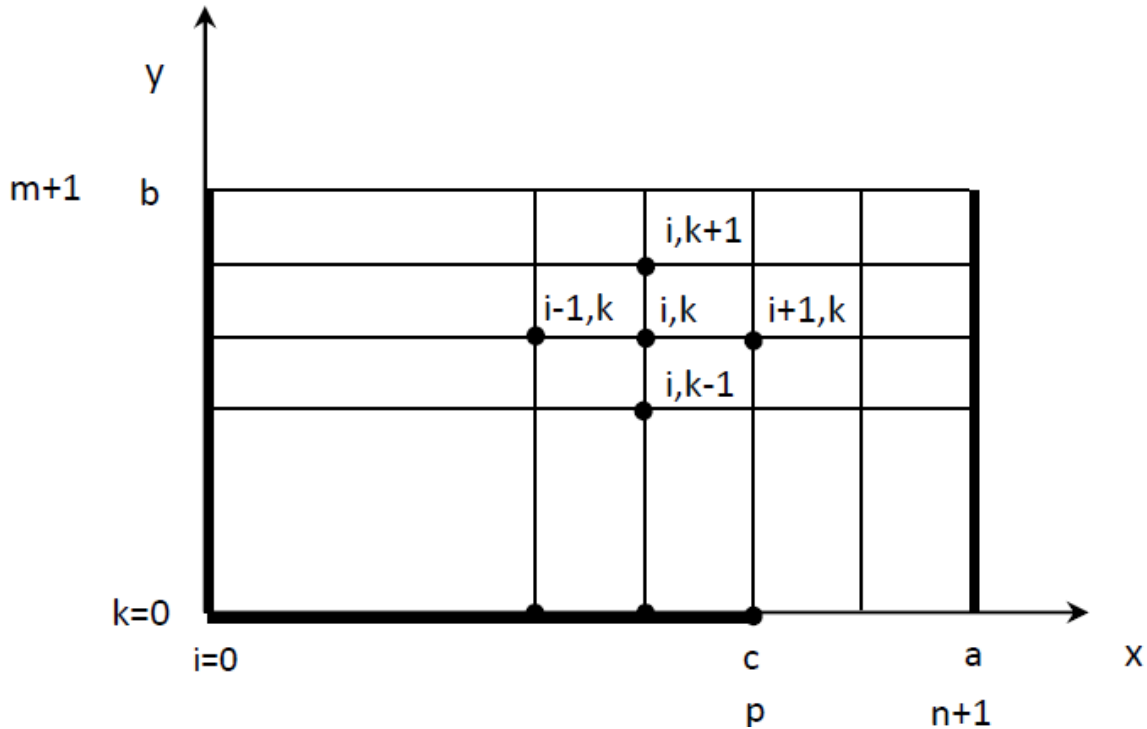


Figure.II.4 : Maillage.

- On choisit $(m + 1)$ pas sur y de valeur $\Delta y = \frac{b}{m+1}$ Choisissons Δx sous multiple de a et de $a - c$ de façon que $x = c$ corresponde au $p^{ième}$ pas sur ;
- En chaque nœud interne ($1 \leq i \leq n; 1 \leq k \leq m$) , on exprime l'équation aux D.P de Laplace à l'aide des différences finies (différences centrées), ce qui donne :

$$\frac{f_{i+1,k} - 2f_{i,k} + f_{i-1,k}}{\Delta x^2} + \frac{f_{i,k+1} - 2f_{i,k} + f_{i,k-1}}{\Delta y^2} = 0 \quad (II.52)$$

L'équation obtenue fait intervenir les points à la frontière ($i = 0; i = n; k = 0; k = m + 1$)

Remarque :

Lorsque

- $\begin{cases} i = n, & \text{il faut intervenir les valeurs } f_{n+1,k} \\ k = m, & \text{il faut intervenir les valeurs } f_{i,m+1} \\ i = 1, & \text{il faut intervenir les valeurs } f_{0,k} \\ k = 1, & \text{il faut intervenir les valeurs } f_{i,0} \end{cases} \quad (II.53)$

- Il faut maintenant exprimer les conditions aux limites, elle porte sur

$$i = 1; i = n; k = 1; m.$$

$$f_{0,k} = f_0$$

$$f_{n+1,k} = f_0$$

- On approche les conditions aux limites :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{i,0} = 0 \quad (i < p)$$

Par les différences à droite d'ordre 2 en h

$$\frac{-3f_{i,0} + 4f_{i,1} - f_{i,2}}{2\Delta y} \quad (II.54)$$

On tire $f_{i,0} = \frac{4}{3}f_{i,1} - \frac{1}{3}f_{i,2}$

Pour $i \geq p$ $f_{i,0} = f_0$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{i,m+1} = 0$$

Par les différences à gauche d'ordre 2 en h

$$\frac{-3f_{i,m+1} - 4f_{i,m} + f_{i,m-1}}{2\Delta y} \quad (II.55)$$

On tire $f_{i,m+1} = \frac{4}{3}f_{i,m} - \frac{1}{3}f_{i,m-1}$

Récapitulatif

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{f_{i+1,k} - 2f_{i,k} + f_{i-1,k}}{\Delta x^2} + \frac{f_{i+1,k} - 2f_{i,k} + f_{i,k-1}}{\Delta y^2} \\ f_{0,k} = f_0 \\ f_{n+1,k} = f_0 \\ i < p \quad f_{i,0} = \frac{4}{3}f_{i,1} - \frac{1}{3}f_{i,2} \\ i \geq p \quad f_{i,0} = f_0 \\ f_{i,m+1} = \frac{4}{3}f_{i,m} - \frac{1}{3}f_{i,m-1} \end{array} \right. \quad (II.56)$$

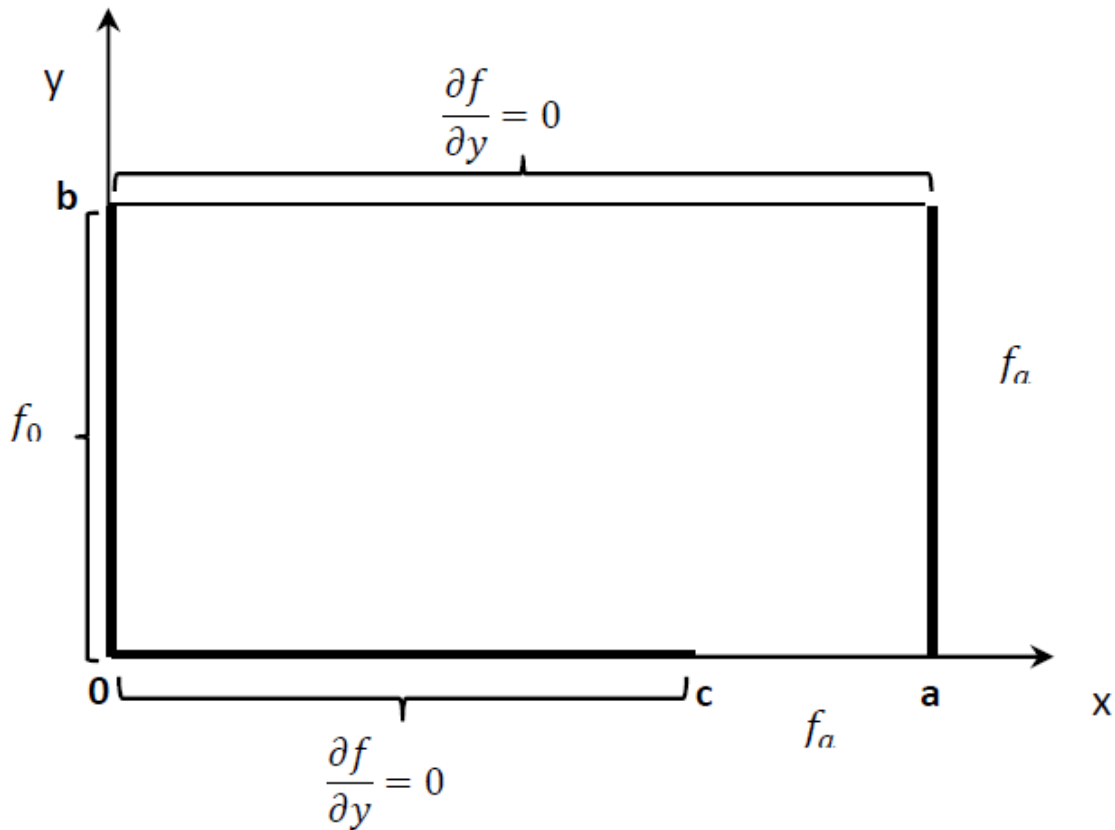


Figure.II.5 : Introduction des conditions aux limites mixtes.

Nœud (1,1): $i = 1, k = 1$

$$\frac{1}{\Delta x^2} [f_{0,1} - 2f_{1,1} + f_{1,0}] + \frac{1}{\Delta y^2} [f_{0,1} - 2f_{1,1} + f_{1,0}] = 0 \tag{II.57}$$

$f_{0,1}$ et $f_{1,0}$ sont tirées des conditions aux limites.

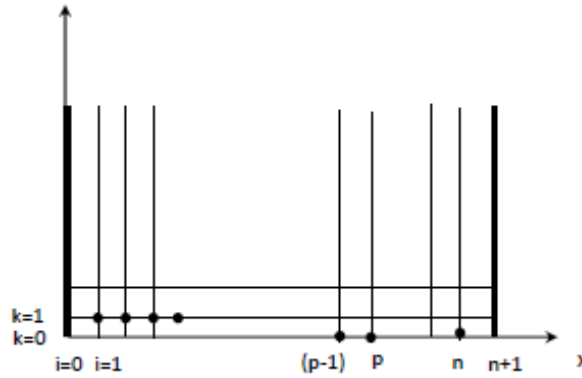
$$\begin{cases} f_{0,1} = f_0 \\ f_{1,0} = \frac{4}{3}f_{1,1} - \frac{1}{3}f_{1,2} \end{cases}$$

On remplace dans l'équation, on obtient :

$$\frac{1}{\Delta x^2} [-2f_{1,1} + f_{2,1}] - \frac{1}{3(\Delta y^2)} [f_{1,1} - f_{1,2} + \dots] = \frac{1}{\Delta x^2} f_0 \tag{II.58}$$

Pour $x < c$

$$\text{pour } \begin{cases} i = 2, & k = 1 \\ \vdots \\ i = p - 1, & k = 1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta x^2} [f_{i+1,1} - 2f_{i,1} + f_{i-1,1}] + \frac{1}{\Delta y^2} [f_{i,2} - 2f_{i,1} + f_{i,0}] = 0 \\ f_{i,0} = \frac{4}{3} f_{i,1} - \frac{1}{3} f_{i,2} \end{cases} \quad (II.59)$$

On remplace $f_{i,0}$ on obtient l'équation :

$$\frac{1}{\Delta x^2} [f_{i+1,1} - 2f_{i,1} + f_{i-1,1}] - \frac{1}{3(\Delta y^2)} [f_{i,1} - f_{i,2}] = 0 \quad (II.60)$$

Pour $x \geq c$

Pour $p \leq i \leq n - 1$ et $k = 1$

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta x^2} [f_{i+1,1} - 2f_{i,1} + f_{i-1,1}] + \frac{1}{\Delta y^2} [f_{i,2} - 2f_{i,1} + f_{i,0}] = 0 \\ f_{i,0} = f_0 \end{cases} \quad (II.61)$$

On remplace $f_{i,0}$ on obtient l'équation :

$$\frac{1}{\Delta x^2} [f_{i+1,1} - 2f_{i,1} + f_{i-1,1}] - \frac{1}{\Delta y^2} [f_{i,2} - 2f_{i,1} + f_0] = -\frac{1}{\Delta y^2} f_0 \quad (II.62)$$

On est ainsi ramené à la résolution d'un système de $m \times n$ équation à $m \times n$ inconnus. On peut utiliser pour cela soit une méthode directe ou itérative.

II.7. Approximation des dérivées aux nœuds avoisinants une frontière irrégulière :

Lorsque la frontière rencontre le maillage rectangulaire en des points qui ne sont pas des nœuds du maillage (voir figure), les formules précédemment utilisées pour approcher les dérivées aux nœuds à proximité du maillage ne sont pas valables car le pas varie de part et d'autre de ces nœuds. Ce paragraphe concerne les approximations par les différences finies des dérivées en un point tel que « O », proche de la frontière \mathbf{F} sur laquelle les valeurs de f sont supposées connues [5]

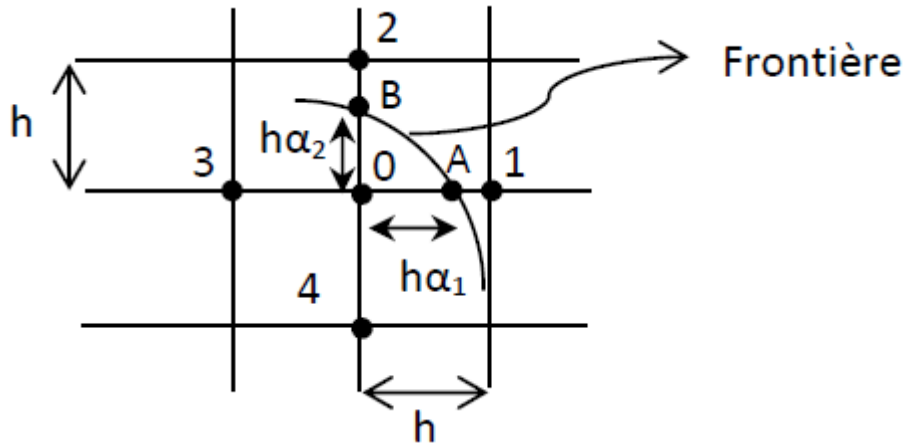


Figure.II.6 : Frontière irrégulière.

Ainsi, pour le cas simple d'un maillage carré de pas h le théorème de Taylor donne :

$$f_A = f_0 + ha_1 \frac{\partial f_0}{\partial x} + \frac{1}{2} h^2 + a_1^2 \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} + o(h^3) \quad (II.63)$$

$$f_3 = f_0 + h \frac{\partial f_0}{\partial x} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} + o(h^3) \quad (II.64)$$

L'élimination de $\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2}$ donne :

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} = \frac{1}{h} \left[\frac{1}{a_1(1+a_1)} f_A - \frac{(1-a_1)}{a_1} f_0 - \frac{a_1}{(1+a_1)} f_3 \right] o(h^2) \quad (II.65)$$

De même l'élimination de $\frac{\partial f_0}{\partial x}$ mène à :

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2} \left[\frac{2}{a_1(1+a_1)} f_A + \frac{2}{(1-a_1)} f_3 - \frac{2}{a_1} f_0 \right] + o(h) \quad (II.66)$$

Donc, l'équation de Laplace au point « O » s'écrit :

$$\frac{2}{a_1(1+a_1)} f_A + \frac{2}{a_2(1+a_2)} f_B + \frac{2}{(1+a_1)} f_3 + \frac{2}{(1+a_2)} f_4 - 2 \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) f_0 = 0 \quad (II.67)$$

II.7.1. Exemple :

On applique la méthode des différences finis précédente à un rectangle, les conditions aux limites sont : sur le côté droit 0.02 wb/m, sur côté gauche 0.05wb/m, sur le côté haut 0.01 wb/met le côté bas 0.0015wb/m.

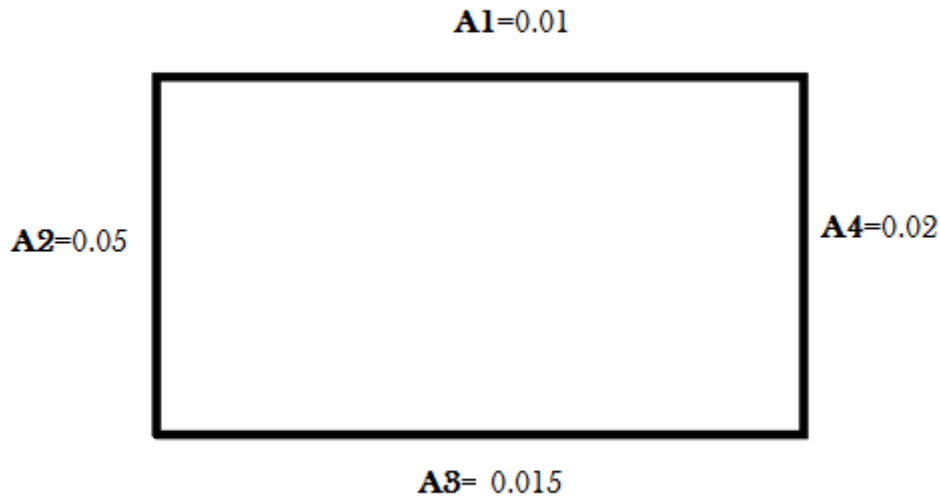


Figure.II.7 : Pace de problème.

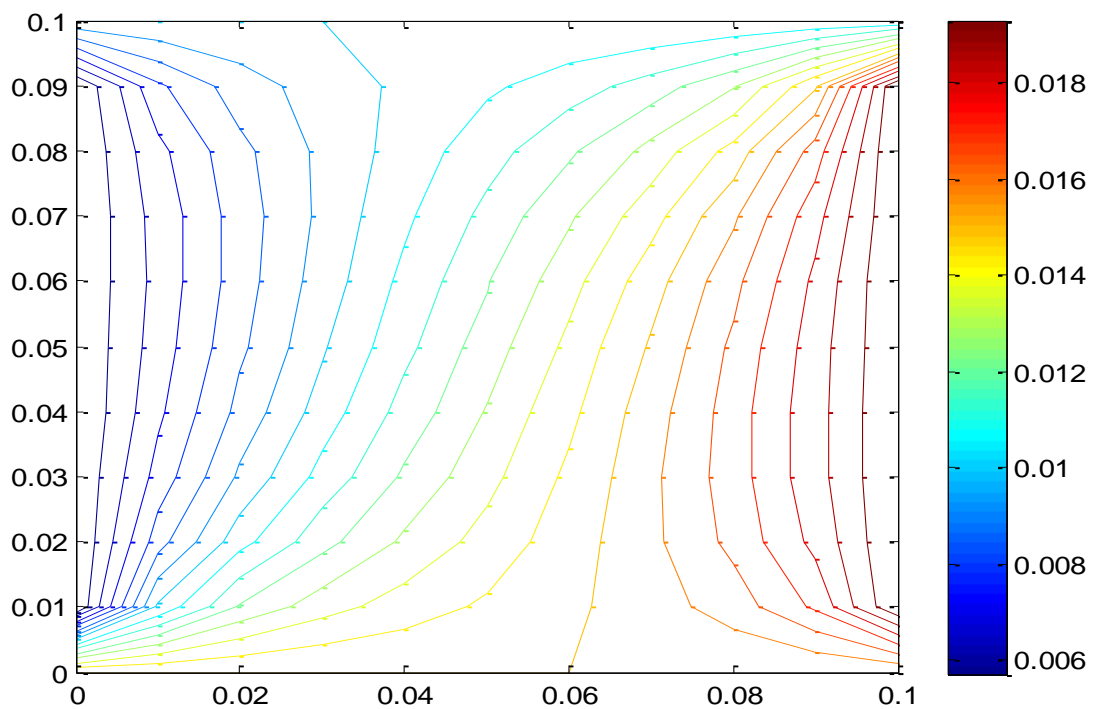


Figure.II.8 : Distribution des équipotentiels vecteurs magnétiques dans une plaque ferromagnétique

Cette figure représente la distribution des iso-valeurs maximales et minimales des équipotentiels qui se trouvent ou cotés droite et gauche, les valeurs intermédiaires se trouvent aux milieux de la plaque représentée les gradations de côté haut vers le côté bas respectant les conditions au limite haute et basse.

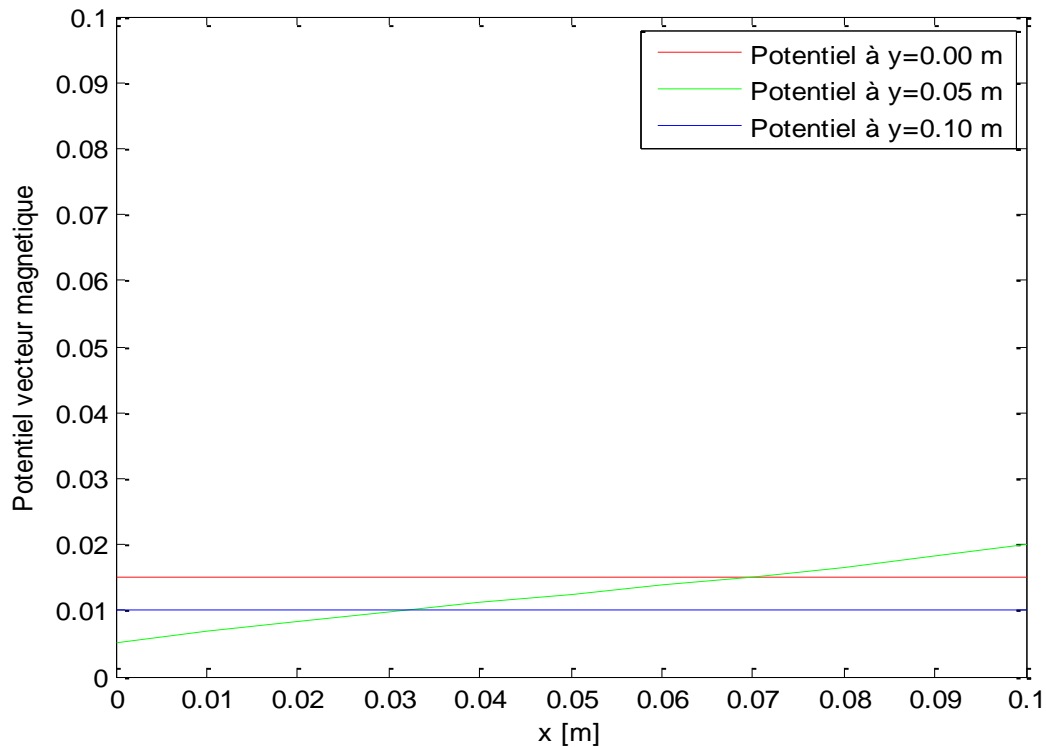


Figure.II.9 : Traçage des équipotentiels vecteur magnétique pour trois chemins axiales.

Cette figure représente trois chemins axiales (suivant OX) à $y=0$, $y=0.05$ et $y=0.1$ respectivement, Les conditions aux limites sont bien respectées la figure (II.9). La courbe en vert, montre l'augmentation de potentiel vecteur magnétique de côté gauche vers la droite.

II.8. Conclusion :

La résolution numérique des équations aux dérivées partielles reste difficile à relever, il existe des méthodes numériques qui permettent la résolution des EDP telles que la méthode des éléments finis et la méthode des volumes finis, pour les équations aux dérivées partielles, la méthode des différences finies pose des problèmes, l'équations d'onde par exemple, il fallait simplifier la géométrie circulaire en une géométrie, contenant des rectangles, proche à celle de l'origine.

III.1. Introduction :

Dans ce chapitre, la méthode des équations intégrales des frontières (MEIF) est développée pour la solution des problèmes dans l'ingénierie décrits par l'équation de potentielle suivante :

$$\nabla^2 \mu = f(x, y); (x, y) \in \Omega \quad (\text{III. 1})$$

C'est l'équation qui gouverne la théorie des potentiels, ou, SIF=0, l'équation précédente est connue comme l'équation de Laplace, alors, si ($f \neq 0$) elle s'appelle l'équation de Poisson. Sa solution $\mu(x, y)$ représente le potentiel produit en un point (x, y) dans le domaine Ω en raison d'une source $f(x, y)$ distribué sur le domaine Ω .

L'équation potentielle (III.1) décrit la réponse des nombreux systèmes physiques. Il apparaît dans des problèmes statiques, tels que l'écoulement du fluide transfert de chaleur induction magnétique ainsi que dans la torsion des barres prismatiques, flexion des membranes, etc.

L'équation (3.1) est de type elliptique puisque $\Delta < 0$. Sa solution est recherchée dans un domaine Ω fermé avoir une limite sur laquelle la fonction a une fonction $\partial \mu / \partial n$ dans le sens normal à Γ . Cette solution satisfait aux conditions aux limites du problème sur la frontière Γ . Les problèmes de valeur de frontière pour l'équation de potentielle peuvent être classés comme suit [6] :

a) Problème de Dirichlet :

$$\text{Dans le domaine } \Omega \quad \nabla^2 \mu = f \quad (\text{III. 2. a})$$

$$\text{Sur la limite } \Gamma \quad \mu = \bar{u} \quad (\text{III. 2. b})$$

b) Problème de Neumann :

$$\text{Dans le domaine } \Omega \quad \nabla^2 \mu = f \quad (\text{III. 3. a})$$

$$\text{Sur la limite } \Gamma \quad \frac{\partial \mu}{\partial n} = \bar{u}_n \quad (\text{III. 3. b})$$

c) Problème mixte :

$$\text{Dans le domaine } \Omega \quad \nabla^2 \mu = f \quad (\text{III. 4. a})$$

$$\text{Sur la limite } \Gamma_1 \quad \mu = \bar{u} \quad (\text{III. 4. b})$$

$$\text{Sur la limite } \Gamma_2 \quad \frac{\partial \mu}{\partial n} = \bar{u}_n \quad (\text{III. 4. c})$$

$$\text{Où } \Gamma^1 \cup \Gamma^2 = \Gamma \quad \text{et } \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = [\emptyset]$$

d) Problème Robin :

$$\text{Dans le domaine } \Omega \quad \nabla^2 \mu = f \quad (\text{III. 5a})$$

$$\text{Sur la limite } \Gamma \quad \mu + k(s) \frac{\partial \mu}{\partial n} = 0 \quad (\text{III. 5. b})$$

Les quantités indiquées par \bar{u} , \bar{u}_n et $k(s)$ sont des fonctions connues sont définies sur la frontière.

Les quatre problèmes peuvent être exprimés par une formulation unique qui est :

$$\text{Dans le domaine } \Omega \quad \nabla^2 \mu = f \quad (\text{III. 6. a})$$

$$\text{Sur la limite } \Gamma \quad \alpha \mu + \beta \frac{\partial \mu}{\partial n} = \gamma \quad (\text{III. 6. b})$$

Où $\alpha = \alpha(s)$, $\beta = \beta(s)$ et $\gamma = \gamma(s)$ sont des fonctions connues définies sur la limite Γ . Apparemment chacun des quatre expressions de problème la valeur aux limites précédentes (Les équations (III.2)-(III.5)) peuvent être dérivées de l'équation (III.6) en spécifiant de manière appropriée les fonctions γ .

III.2. Solution fondamentale :

Considérons une source ponctuelle placée au point $P(x, y)$ dans un plan (xy) . Sa densité à $Q(\xi, \eta)$ peut être exprimé mathématiquement par la fonction delta.

$$f(Q) = \delta(Q - P) \quad (\text{III. 7})$$

Le potentiel $v = v(Q, P)$ produit au point Q vérifie cette équation

$$\nabla^2 v = \delta(Q - P) \quad (\text{III. 8})$$

Une solution particulière et singulière de l'équation (III.8) est appelé la solution fondamentale de l'équation de potentielle (III.1). Il est déterminé en écrivant équation. (III.8) en coordonnées polaires avec l'origine identique à la source ponctuelle P. Puisque cette solution

est axisymétrique par rapport à la source P, elle est indépendante de l'angle polaire θ , et donc l'équation. (III.8) devient :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = \delta(Q - P) \quad (\text{III.9})$$

Où

$$r = |Q - P| = \sqrt{(\varepsilon - x)^2 + (n - y)^2} \quad (\text{III.10})$$

La partie droite de l'équation. (III.8) disparaît à tous les points du plan (xy), sauf à l'origine $r=0$, où elle a une valeur infinie. En dehors du point $r=0$, l'équation (III.9) est écrite comme suite $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = 0$

Après l'intégration deux fois elle donne $v = A \cdot \log(r) + B$

Où : A et B sont des constants arbitraires. Puisque on cherche une solution particulière, on peut définir $B=0$. L'autre constante A, peut être déterminé de la manière suivante.

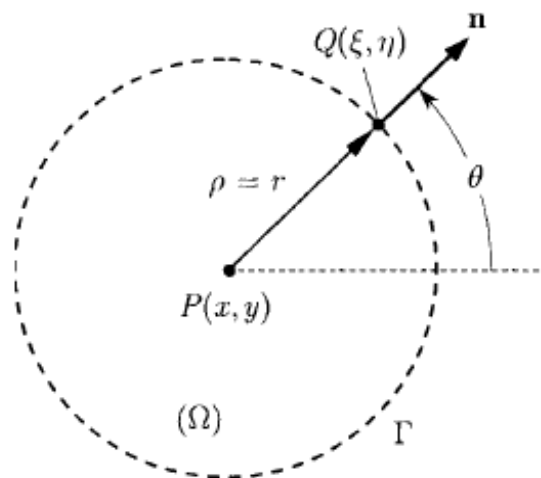


Figure III.1 :Domaine circulaire Ω , de rayon ρ avec une source P en son centre.

En raison de la nature axisymétrique du problème (figure III.1), on trouve :

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial r} = A \frac{1}{r} \quad \text{et} \quad ds = r d\theta \quad (\text{III.11})$$

L'application de l'identité de Green, pour $u=1$ et $v=A \log(r)$ donne cette expression :

$$-\int_{\Omega} \nabla^2 \mu d\Omega = -\int_r \frac{\partial v}{\partial n} ds$$

Où Ω est le cercle centré en point P et de rayon ρ . Utilisant ensuite les équations. (III.8) et (III.11), et en notant que pour les points sur la limite Γ , c'est-à-dire $r=\rho$, les relations précédentes sont écrit comme suite :

$$\int_{\Omega} \delta(Q - P)dv = \int_0^{2\pi} A \frac{1}{\rho} \rho d\theta$$

L'application dé, cette dernière prendre la forme suivante :

$$1=2\pi A$$

Ce qui donne :

$$A = \frac{1}{2\pi} \quad (\text{III.12})$$

Par conséquent, la solution fondamentale devient

$$V = \frac{1}{2\pi} \ln r \quad (\text{III.13})$$

À partir de l'équation (III.10), il est évident que la solution fondamentale ne change pas de son valeur quand les points P et Q change leur rôle Cela signifie que v est symétrique respectivement à ces points, à savoir

$$v(Q, P) = v(P, Q) \quad (\text{III.14})$$

La solution fondamentale (III.13) est également connue dans la littérature sous le nom *l'espace libre de la fonction de Green*.

III.3. Méthode directe des équations d'intégrale des frontières pour l'équation de Laplace :

Dans cette section nous dérivons la solution de l'équation de Laplace

$$\text{Dans le domaine } \Omega \quad \nabla^2 \mu = f \quad (\text{III.15})$$

Avec les conditions aux limites mixtes (voir Fig. III.2)

$$\text{sur la limite } \Gamma_1 \quad \mu = \bar{u} \quad (\text{III.16.a})$$

$$\text{sur la limite } \Gamma_2 \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{u}_n \quad (\text{III.16.b})$$

Où $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$. Dans la littérature, la condition (III.16.a) est une référence essentielle à la cinématique tandis que (III.16.b) est naturel. Au lieu des conditions aux limites (III.16), on peut utiliser la condition générale (III.6.b), mais actuellement on évite cette condition pour le souci de simplicité [7].

L'application de l'identité de Green, pour les fonctions u et v qui satisfont les équations (III.15) et (III.8) respectivement et en supposant que la source se trouve au point P , on obtient

$$-\int_{\Omega} u(Q) \delta(Q-p) d\Omega_{\varphi} = \int_{\Gamma} \left[v(q,P) \frac{\partial u(q)}{\partial n_q} - u(q) \frac{\partial v(q,P)}{\partial n_q} \right] ds_q \quad (\text{III.17})$$

Où : $P, Q \in \Omega$ et $q \in \Gamma$.

Dans les équations précédentes et ci-après, les points à l'intérieur du domaine Ω sont notés par lettres capitales, par exemple P, Q , tandis que les points sur la limite Γ sont notés par minuscules, par exemple p, q . Les indices des différentiels par exemple ds_Q, ds_q et les dérivés, par exemple $\frac{\partial u(q)}{\partial n_q}$, dénotent les points qui varient au cours de l'intégration ou différenciation, respectivement.

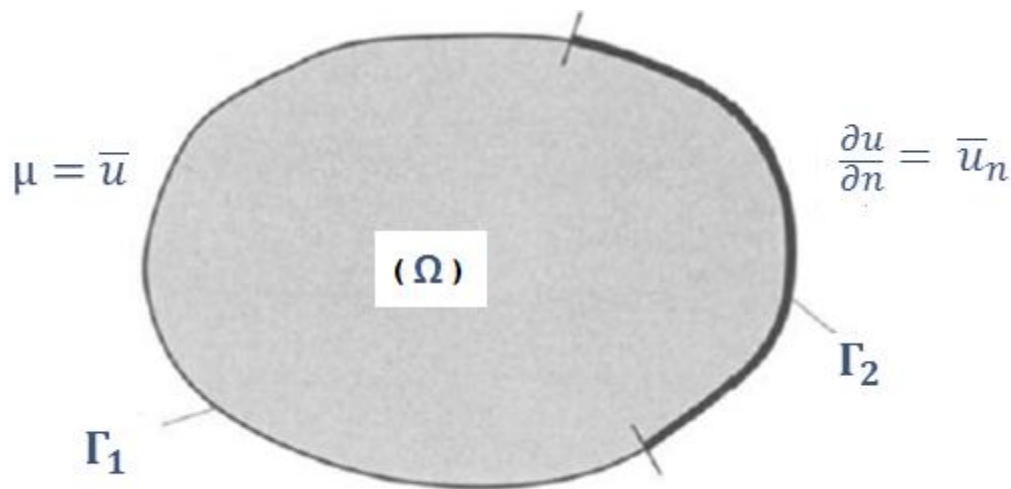


Figure III.2 : Domaine Ω avec des conditions aux limites mixtes.

A partir des équations (III.14), l'équation (III.17) est écrite comme suite :

$$U(P) = - \int_{\Gamma} \left[v(q,P) \frac{\partial u(q)}{\partial n_q} - u(q) \frac{\partial v(q,P)}{\partial n_q} \right] ds_q \quad (\text{III.18})$$

Les deux fonctions v et $\frac{\partial v}{\partial n}$ dans l'équation précédente sont des quantités connues. Ce sont la solution fondamentale de l'équation de Laplace et de sa dérivée normale au point q de la limite qui sont donnés comme suite :

$$v = \frac{1}{2\pi} \ln r \quad (\text{III.19})$$

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{1}{2\pi} \frac{\cos\varphi}{r} \quad (\text{III.20})$$

Où : $r = |q - P|$ et $\varphi = \text{angle}(r, n)$

L'expression (III.18) est la solution de l'équation différentielle (III.15) en tout point P à l'intérieur du domaine Ω (pas sur la limite Γ), elle est en termes des valeurs limites de u et sa dérivée normale $\frac{\partial u}{\partial n}$. La relation (III.18) est appelée *la représentation intégrale de la solution* pour l'équation de Laplace. Il est appaait que pour les conditions aux limites (III.16a) et (III.16b) qu'une seule quantité u ou $\frac{\partial u}{\partial n}$ est arrangé en un point $q(\varepsilon, n)$ sur la limite. Par conséquent, ce n'est pas encore possible de déterminer la solution à partir de la représentation intégrale (III.18). Pour cet objectif nous allons évaluer la quantité au limite qui n'est pas arrangée par les conditions limites (u ou $\frac{\partial u}{\partial n}$) en dérivant la représentation intégrale de u pour les points $P \equiv p$ situés sur la frontière Γ .

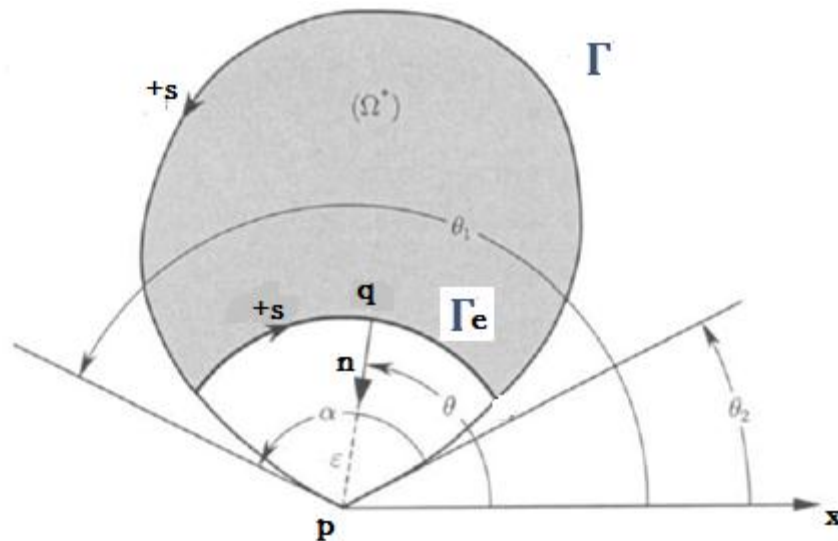


Figure III.3 : Définitions géométrique liée à un point du coin P d'une limite non lisse.

Nous étudions le cas général où la frontière n'est pas lisse et P est un point du coin (voir Fig. III.3). Nous considérons le domaine Ω^* qui résulte de Ω après soustraction d'une petite section circulaire de centre P , de rayon ε et renfermé par les arcs PA et PB . L'arc de cercle AB est noté Γ_ε et la somme des arcs AP et PB par ℓ . La normale à l'extérieur à Γ_ε coïncide avec le rayon ε et la direction vers le centre P . L'angle entre les tangentes de la limite au point P est noté α . Evidemment, il est :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\theta_1 - \theta_2) = \alpha$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\Gamma \varepsilon) = 0$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\Gamma - \ell) = \Gamma$$

Ensuite, nous appliquons l'identité dans le domaine Ω^* pour les fonctions u et v satisfaisant par les équations. (III.15) et (III.8) respectivement. Puisque le point P est en dehors du domaine Ω^* , où $\delta(Q - P) = 0$ suivre cette expression

$$\int_{\Omega^*} \delta(Q - P) d\Omega = 0$$

Et par conséquent l'identité de Green donne

$$0 = \int_{\Gamma - \ell} (v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}) ds + \int_{\Gamma \varepsilon} (v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}) ds \quad (\text{III.21})$$

Nous examinerons ensuite le comportement des intégrales dans l'équation ci-dessus lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Apparemment, la première intégrale devient :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \ell} (v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}) ds = \int_{\Gamma} (v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}) ds \quad (\text{III.22})$$

Tandis que la deuxième intégrale est écrite ainsi :

$$\int_{\Gamma \varepsilon} (v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}) ds = \int_{\Gamma \varepsilon} \frac{1}{2\pi} \frac{\partial u}{\partial n} \ln r ds - \int_{\Gamma \varepsilon} \frac{1}{2\pi} U \frac{\cos \varphi}{r} ds = I_1 + I_2 \quad (\text{III.23})$$

Pour l'arc circulaire $\Gamma \varepsilon$, ou $r = \varepsilon$ et $\varphi = \pi$. En outre, $ds = \varepsilon(-d\theta)$ parce que l'angle θ est positif dans le sens antihoraire, qui est opposé l'augmentation de s . Donc la première des deux intégrales résultantes dans l'équation (III.23) prend la forme :

$$I_1 = \int_{\Gamma \varepsilon} \frac{1}{2\pi} \frac{\partial u}{\partial n} \ln r ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2\pi} \frac{\partial u}{\partial n} \varepsilon \ln \varepsilon d(-\theta) \quad (\text{III.24})$$

Selon le théorème de la valeur moyenne de calcul intégral la valeur d'une intégrale est égal à la valeur de son intégrateur à un point donné O dans l'intervalle d'intégration multiplié par la longueur de cet intervalle Par conséquent [7],

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_O \varepsilon \ln \varepsilon (\theta_1 - \theta_2)$$

Quand $\varepsilon \rightarrow 0$, le point de l'arc se rapproche du point P . Dans ce cas la dérivée $\left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_p$ n'est pas

définie, mais elle est limitée :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon \log(\varepsilon)) = 0$$

Ce qui implique que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1 = 0 \quad (\text{III.25})$$

D'une manière similaire la deuxième intégrale dans la partie droite de l'équation (III.23) peut être écrit comme

$$I_2 = - \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{2\pi} U \frac{\cos \varphi}{r} ds = - \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2\pi} u \frac{-1}{\varepsilon} \varepsilon d(-\theta)$$

Où en appliquant le théorème de la valeur moyenne :

$$I_2 = - \frac{1}{2\pi} u_0 (\theta_1 - \theta_2) = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2\pi} u_0$$

Et enfin

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_2 = \frac{a}{2\pi} u(P) \quad (\text{III.26})$$

A partir des équations (III.25) et (III.26), l'équation (III.23) devient :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \left[v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right] ds = \frac{a}{2\pi} u(P) \quad (\text{III.27})$$

En remplaçant maintenant les équations (III.22) et (III.27) dans l'équation (III.21), cette dernière donne pour $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\frac{a}{2\pi} u(P) = \int_{T\Gamma} \left[v(P, q) \frac{\partial u(q)}{\partial n_q} - u(q) \frac{\partial v(p, q)}{\partial n_q} \right] ds_q \quad (\text{III.28})$$

La dernière expression est la représentation intégrale de la solution pour l'équation de Laplace (III.15) en les points $P \in \Gamma$, où la limite n'est pas lisse. Pour les points P , où la limite est lisse, on a $a = \pi$, ainsi l'équation (III.28) devienne

$$\frac{1}{2} u(P) = \int_{\Gamma} \left[v(P, q) \frac{\partial u(q)}{\partial n_q} - u(q) \frac{\partial v(p, q)}{\partial n_q} \right] ds_q \quad (\text{III.29})$$

Une comparaison entre les équations (III.18) et (III.28) montrée que la fonction u est discontinue quand le point $P \in \Omega$ se rapproche au point $p \in T$. Elle présente une saute égale à $(1 - a/2\pi)$ pour les points du coin (équations III.28), ou $1/2$ pour les points sur les parties lisses de la frontière T (équations III.29). Lorsque le point P est situé en dehors de domaine Ω , l'identité donne

$$0 = - \int_{\Gamma} \left[v(P, q) \frac{\partial u(q)}{\partial n_q} - u(q) \frac{\partial v(p, q)}{\partial n_q} \right] ds_q \quad (\text{III.30})$$

Les équations (III.18), (III.29) et (III.30) peuvent être combinées en une seule équation générale

$$\varepsilon(P) u(P) = - \int_{\Gamma} \left[v(P, q) \frac{\partial u(q)}{\partial n_q} - u(q) \frac{\partial v(p, q)}{\partial n_q} \right] ds_q \quad (\text{III.31})$$

Où $\varepsilon(P)$ est un coefficient qui dépend de la position du point P et qui est défini comme

$$\varepsilon(P) = \begin{cases} 1 & \text{pour } P \text{ à l'intérieur de } \Omega \\ \frac{1}{2} & \text{pour } P \equiv p \text{ sur la limite} \\ 0 & \text{pour } P \text{ à l'extérieur de } \Omega \end{cases}$$

Équation (III.29) constitue une relation de compatibilité entre les valeurs aux limites u et $\frac{\partial u}{\partial n}$, ce qui signifie que seulement une des quantités u et $\frac{\partial u}{\partial n}$ peut être arrangé à chaque point de la limite. En même temps, l'équation (III.29) peut être consulté comme une équation intégrale sur la limite Γ , c'est une frontière avec inconnu la quantité qui n'est pas prescrite par la condition limite. Dans la suite nous supposons une frontière lisse Γ . Ainsi pour le problème de Dirichlet ($u = \bar{u}$ sur T), l'équation (III.29) s'écrit comme

$$\frac{1}{2}\bar{u} = - \int_{\Gamma} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - \bar{u} \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds \quad (\text{III.32.a})$$

Dans laquelle, la seule inconnue est la fonction $\frac{\partial u}{\partial n}$ sur Γ . Pour le problème de Neumann ou ($\frac{\partial u}{\partial n} = \bar{u}_n$), l'équation (III.29) devient

$$\frac{1}{2}u = - \int_{\Gamma} \left(v \bar{u}_n - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds \quad (\text{III.32.b})$$

avec seulement la fonction inconnue sur Γ . Pour les problèmes de conditions aux limites mixtes, l'équation (III.29) est traitée comme deux équations distinctes (voir l'équation III.16)

$$\frac{1}{2}\bar{u} = - \int_{\Gamma} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - \bar{u} \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds \quad (\text{III.33.a})$$

$$\frac{1}{2}u = - \int_{\Gamma} \left(v \bar{u}_n - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds \quad (\text{III.33.b})$$

III.4. Différents types d'éléments de frontières :

En cas de éléments constants, le segment de frontière est approché par une ligne droite, qui relie ses points extrêmes. Le nœud est placé au milieu de la ligne droite et la quantité limite est supposée pour être constante le long de l'élément, elle est égale à sa valeur au point nodal (Fig. a). Pour les éléments linéaires, le segment de frontière est approché à nouveau par une ligne droite reliant ses extrémités. L'élément à deux nœuds généralement placés aux points extrêmes et la quantité de frontière est supposé pour varier linéairement entre les valeurs nodales (fig. b). Finalement pour les éléments paraboliques, la géométrie est approchée par un arc parabolique. L'élément a trois nœuds, dont deux nœuds sont placés aux extrémités et le troisième quelque part entre les deux, généralement au point milieu (fig.c).

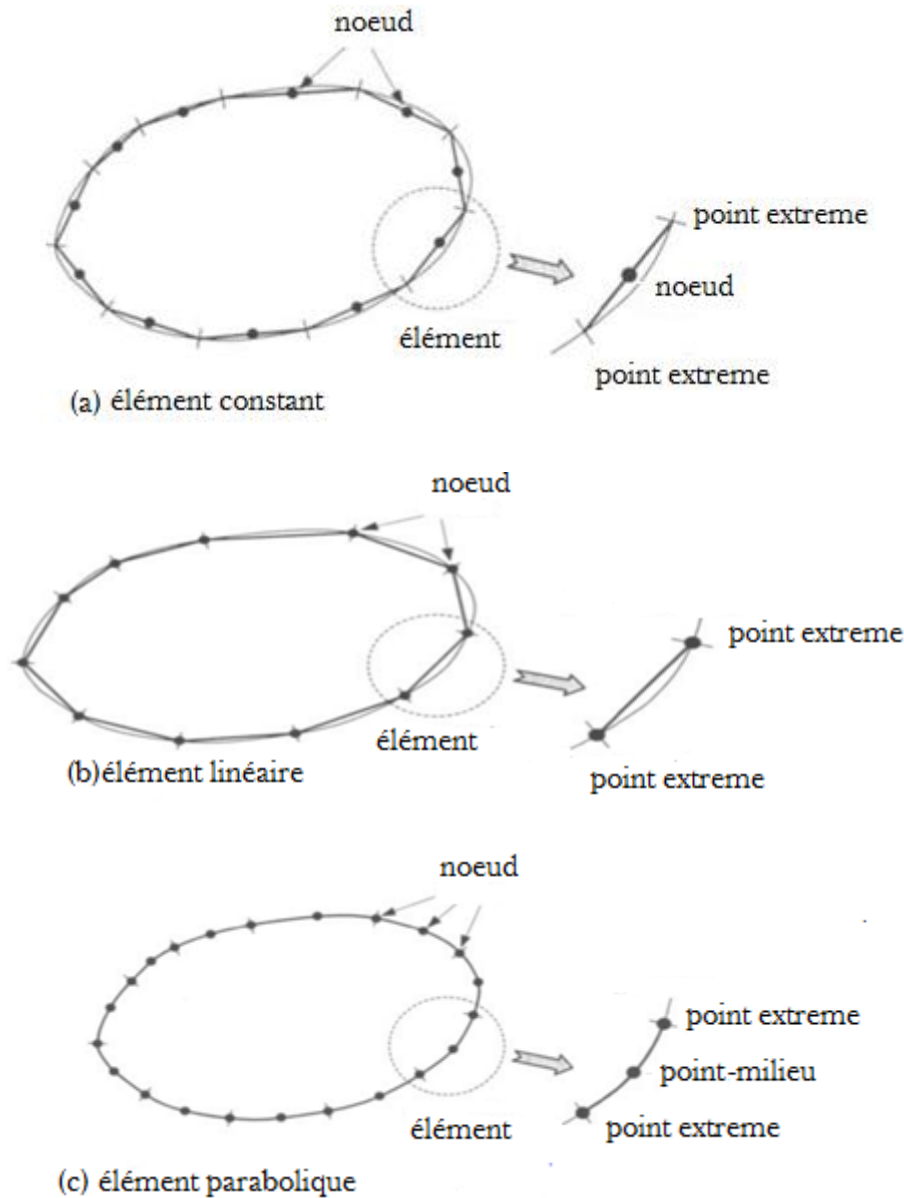


Figure III.4 : Différents types d'éléments de frontières.

III.5. Méthode des équations intégrale de frontière avec des éléments aux frontières constantes :

La frontière T est discrétisée en N éléments constants, qui sont numérotés dans le sens anti horaire. Les valeurs de la quantité au limite u et sa normale dérivé $\partial u / \partial n$ (noté aussi u_n) sont supposés constants sur chaque élément et se situent au milieu de l'élément.

La forme discrétisée des équations (III.34) est exprimée pour un point donné p_i sur T comme :

$$\frac{1}{2} \dot{u}_i = - \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} v(p_i, q) \frac{\partial u(q)}{\partial n_q} ds_q + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} v(q) \frac{\partial u(p_i, q)}{\partial n_q} ds_q \quad (\text{III.34})$$

Où Γ est le segment (ligne droite) sur lequel se trouve le $j^{\text{ième}}$ nœud est localisé et sur lequel l'intégration est effectuée Etp_i est le point nodal du $j^{\text{ième}}$ élément. Pour les éléments constants la frontière est lisse aux points nodaux Par conséquent $\varepsilon(P) = 1/2$. En outre les valeurs de u et $\partial u / \partial n$ sont constantes sur chaque élément, alors elles peuvent être déplacées en dehors de l'intégrale Désignant par u^j et u_n^j les valeurs de u et u_n , respectivement, sur le $j^{\text{ième}}$ élément, l'équation (III.34) peut être écrite comme :

$$\frac{1}{2}u^i + \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} \frac{\partial v}{\partial n} ds \right) u^j = \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} v ds \right) u_n^j \quad (\text{III.35})$$

Les intégrales impliquées dans l'équation ci-dessus concernent le nœud p_i , où la solution fondamentale est appliquée au nœud p_j ($j = 1, 2, \dots, N$) (Fig. III.5). Leurs valeurs expriment la contribution des valeurs nodales u^j et u_n^j à la formation de la valeur $(1/2)u^i$. Pour cette raison ils sont souvent appelés les coefficients d'influence. Ces coefficients sont notés \hat{H}_{ij} et G_{ij} qui est définis comme :

$$\hat{H}_{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial v(p_i, q)}{\partial n_q} ds \quad \text{et} \quad G_{ij} = \int_{\Gamma_j} v(p_i, q) ds \quad (\text{III.36})$$

Où le point p_i reste constant (point de référence), alors que le point q varie sur le $j^{\text{ième}}$ élément (point d'intégration).

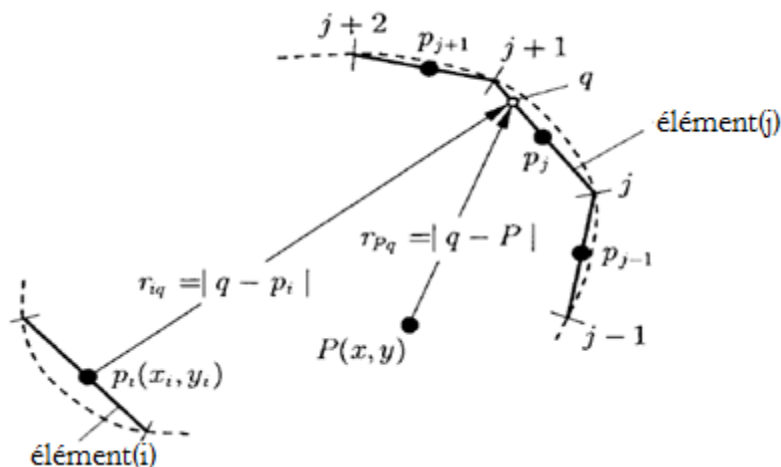


Figure III.5 : Emplacement des points nodaux et les distances relatives pour une discrétisation des éléments constante.

Introduire la notation (III.36) dans l'équation (III.35), la forme discrète de la solution devient :

$$-\frac{1}{2}u^i + \sum_{j=1}^N \hat{H}_{ij}u^j = \sum_{j=1}^N G_{ij}u_n^j \quad (\text{III.37})$$

De plus, on pose :

$$H_{ij} = \hat{H}_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ij} \quad (\text{III.38})$$

Où δ_{ij} est le delta de Kronecker, défini comme suite $\delta_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ et $\delta_{ij} = 1$ pour $i = j$, l'équation (4.4) peut être écrit comme suite:

$$\sum_{j=1}^N H_{ij}u^j = \sum_{j=1}^N G_{ij}u_n^j \quad (\text{III.39})$$

L'équation (III.39) est appliquée consécutivement pour tous les nœuds p_i ($i = 1, 2, \dots, N$) produisant un système de N équations algébriques linéaires, qui sont disposées sous forme de matrice :

$$[H]\{u\} = [G]\{u_n\} \quad (\text{III.40})$$

Où : [H] et [G] sont $N \times N$ matrices carrées, et $\{u\}$ et $\{u_n\}$ sont des vecteurs de dimension N.

Supposons les conditions aux limites sont de type mixtes Dans ce cas la partie T_1 de la limite sur laquelle est décrit et la partie T_2 sur laquelle u_n est décrit sont discrétisés dans N_1 et N_2 éléments constants respectivement ($\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$, $N_1 + N_2 = N$). Par conséquent, l'équation (3.40) contient à nouveau N inconnus, C'est $N - N_1$ valeurs de u sur Γ_2 et $N - N_2$ valeurs de u_n sur Γ_1 . Ces N quantités inconnues peuvent être déterminés d'un système de l'équation (III.40).

Avant de résoudre le système d'équations il faut séparer l'inconnu à partir des quantités connues. L'équation (III.40) peuvent être écrites après la répartition de la matrice de la manière suivante :

$$[[H_{11}] [H_{12}]] \begin{Bmatrix} \{\bar{u}\}_1 \\ \{u\}_2 \end{Bmatrix} = [[G_{11}] [G_{12}]] \begin{Bmatrix} \{u_n\}_1 \\ \{\bar{u}_n\}_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.41})$$

On $\{\bar{u}\}_1$ et $\{\bar{u}_n\}_2$ indiquent les quantités prescrites sur Γ_1 et Γ_2 , respectivement tandis que $\{u_n\}_1$ et $\{u\}_2$ désignent les inconnus correspondants Porter les multiplications et en déplaçant toutes les inconnues sur le côté gauche de l'équation on obtient :

$$[A]\{X\} = \{B\} \quad (\text{III.42})$$

Où :

$$[A] = [[H_{12}] - [G_{11}]] \quad (\text{III.43.a})$$

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} \{u\}_1 \\ \{u_n\}_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.43.b})$$

$$\{B\} = -[H_{11}]\{\bar{u}\}_1 + [G_{12}]\{\bar{u}_n\}_2 \quad (\text{III.43.c})$$

[A] Est une matrice carrée de dimensions $N \times N$, et $\{X\}, \{B\}$ sont des vecteurs de dimension N . Le réarrangement précédent des matrices est efficace si les N_1 points où les valeurs de u sont prescrites, ainsi aussi les N_2 points où les valeurs de u_n sont prescrites, sont consécutifs. Autrement, le partitionnement des matrices dans l'équation (III.41) doit être précédé d'un réarrangement approprié des colonnes dans [H] et [G]. La matrice [A] et le vecteur {B} peuvent également être construits en utilisant une autre méthode plus simple. La procédure qui est basée sur l'observation que la matrice [A] finira par contenir toutes les colonnes de [H] et [G] qui correspondent aux valeurs limites inconnues de u et u_n , alors que le vecteur {B} donnera la somme de ces colonnes de [H] et [G], qui correspondent aux valeurs connues u et u_n , après qu'ils ont été multipliés par ces valeurs. Il convient de noter qu'un changement de signe se produit, lorsque les colonnes de [G] ou [H] sont déplacées de l'autre côté de l'équation. La procédure susmentionnée est plus appropriée pour écrire le programme informatique. La solution des équations simultanées (III.42) donne les quantités de frontière inconnues u et u_n . Donc, la connaissance de toutes les quantités de frontière sûre, la solution u peut être calculée en tout point $P(x, y)$ du domaine Ω par l'évaluation de l'équation (III.31) pour $\varepsilon(p) = 1$. Appliquant la même discrétisation que dans l'équation (III.34), nous arrivons à l'expression suivante :

$$u(P) = \sum_{j=1}^N \hat{H}_{ij} u^j - \sum_{j=1}^N G_{ij} u_n^j \quad (\text{III.44})$$

Les coefficients G_{ij} et \hat{H}_{ij} sont à nouveau calculés à partir des intégrales de l'équation (III.36), mais dans ce cas le point au frontière P_i est remplacé dans les expressions par le point de champ P dans le domaine Ω .

Les dérivées partielles $\partial U / \partial x$ et $\partial u / \partial y$ peuvent être évalués à des points dans Ω par différenciation directe de l'équation (III.31) pour $\varepsilon(P) = 1$. Depuis la solution fondamentale et ses dérivées sont des fonctions continues de x et y , les passages de différenciation sous forme intégral donnant :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \int_T \left[\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right) \right] ds \quad (\text{III.45})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = - \int_T \left[\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right) \right] ds \quad (\text{III.46})$$

Où les dérivés de la solution fondamentale (III.13) sont obtenus comme suit :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial y}, & \frac{\partial v}{\partial n} &= \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right) &= -\frac{1}{2\pi r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right) &= -\frac{1}{2\pi r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial r}{\partial x} &= -\frac{\partial r}{\partial \varepsilon} = -\frac{\varepsilon-x}{r}, & \frac{\partial r}{\partial y} &= -\frac{\partial r}{\partial \eta} = -\frac{\eta-y}{r} \\ \frac{\partial r}{\partial n} &= \nabla r \cdot n = \frac{\partial r}{\partial \varepsilon} n_x + \frac{\partial r}{\partial \eta} n_y, & \frac{\partial r}{\partial t} &= \nabla r \cdot t = -\frac{\partial r}{\partial \varepsilon} n_y + \frac{\partial r}{\partial \eta} n_x \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.47})$$

La dernière équation dé(III.47) est obtenu en notant que les composants du vecteur unitaire tangentiel t sont $t_x = -n_y$ et $t_y = n_x$. La différenciation par rapport à n est effectuée en tous point $q(\varepsilon, \eta) \in \Gamma$, tout en fait la différenciation par rapport à x ou y est l'on fait l'évaluation au point $p(x, y) \in \Omega$.

Les équations (III.45) et (III.46) sont discrétisées de la même manière que l'équation (III.34) et elles produiront les expressions suivantes pour l'évaluation des dérivés μ_x et μ_y au point $P(x, y)$.

$$\mu_x(P) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_p = \sum_{j=1}^N (\hat{H}_{pj})_x u^j - \sum_{j=1}^N (G_{pj})_x u_n^j \quad (\text{III.48})$$

$$\mu_y(P) = \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_p = \sum_{j=1}^N (\hat{H}_{pj})_y u^j - \sum_{j=1}^N (G_{pj})_y u_n^j \quad (\text{III.49})$$

Où les coefficients d'influence sont donnés par les intégrales

$$\left. \begin{aligned} (G_{PJ})_{.x} &= \int_{T_j} \frac{\partial u(P,q)}{\partial x} ds, & (\hat{H}_{pj})_{.x} &= \int_{T_j} \frac{\partial}{\partial n_p} \left[\frac{\partial v(P,q)}{\partial n_q} \right] ds \\ (G_{PJ})_{.y} &= \int_{T_j} \frac{\partial u(P,q)}{\partial y} ds, & (\hat{H}_{pj})_{.y} &= \int_{T_j} \frac{\partial}{\partial n_p} \left[\frac{\partial v(P,q)}{\partial n_q} \right] ds \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.50})$$

III.6. Evaluation des intégrales de ligne :

Les intégrales de ligne G_{ij} et H_{ij} définies dans l'équation (III.36) sont évaluées numériquement en utilisant une quadrature normalisée de Gauss. Bien entendu, ces intégrales peuvent être évaluées à travers langages symboliques, par exemple Mathématique ou Maple, mais les expressions résultantes sont très longues et couvrent généralement plus d'une page. Par conséquent, l'avantage de la précision sur l'intégration numérique est plutôt perdu, en raison de la complexité des expressions mathématiques. Pour cette raison, l'intégration gaussienne reste la même méthode la plus appropriée pour calculer les intégrales de ligne. Deux cas sont distingués pour les intégrales des coefficients d'influence :

III.6.1. Eléments hors diagonale, $i \neq j$:

Dans ce cas, le point $P_i(x_i, y_i)$ est en dehors de l'élément j , ce qui signifie que la distance $r = |q - P_i|$, ne disparaît pas et, par conséquent, l'intégrale est régulière. L'intégration gaussienne s'effectue sur l'intervalle $-1 \leq \varepsilon \leq 1$.

$$\int_{-1}^1 f(\varepsilon) d\varepsilon = \sum_{k=1}^n w_k f(\varepsilon_k) \quad (\text{III.51})$$

Où n est le nombre de points d'intégration (points de Gauss) et ε_k et w_k ($k = 1, 2, \dots, n$) sont les abscisses et les poids de la quadrature d'ordre n .

Considérons l'élément j sur lequel l'intégration sera réalisée. Cet élément est défini par les coordonnées (x_i, y_i) et (x_{i+1}, y_{i+1}) de ses points d'extrémité, qui sont exprimés dans un système global ayant les axes x et y , et au point de l'origine O (Fig. III.6). Ensuite, un système local d'axes x' et y' est introduit à partir du point P_j de l'élément. Les coordonnées locales $(x', 0)$ du point q sur le j^{me} élément sont liées aux coordonnées globales du système xy à travers les expressions

$$x = \frac{x_{j+1} + x_j}{2} + \frac{x_{j+1} - x_j}{l_j} x' \quad (\text{III.52.a})$$

$$y = \frac{y_{j+1} + y_j}{2} + \frac{y_{j+1} - y_j}{l_j} x', \quad -\frac{l_j}{2} \leq x' \leq \frac{l_j}{2} \quad (\text{III.52.b})$$

Où l_j est la longueur de l'élément j^{me} et elle est donnée en termes de coordonnées des points finaux comme suit :

$$l_j = \sqrt{(x_{j+1} - x_j)^2 + (y_{j+1} - y_j)^2}$$

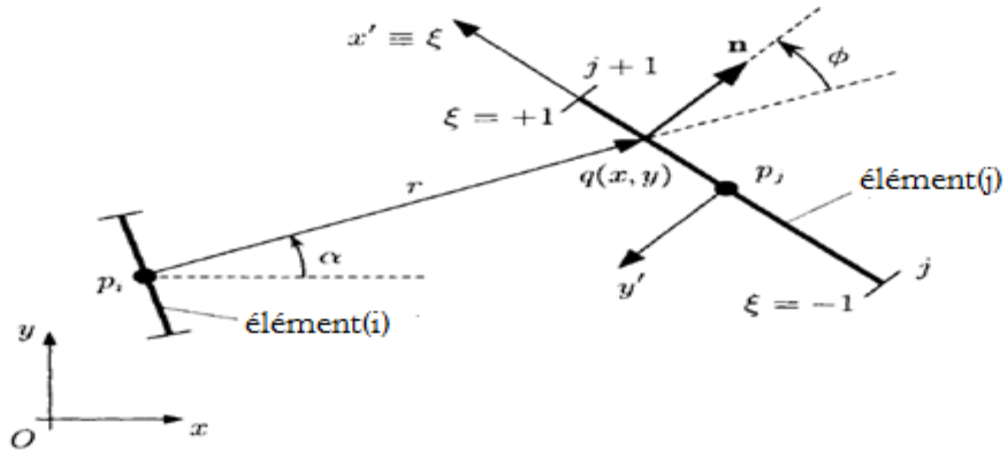


Figure III.6 : Systèmes de coordonnées globales et locales.

Les expressions qui mappent les coordonnées globales sur l'intervalle d'intégration $[-1, +1]$ sont obtenues en introduisant aux équations (III.52) la relation géométrique :

$$\frac{x'}{l_j/2} = \varepsilon$$

Ainsi, la transformation des coordonnées résultantes devient :

$$x(\varepsilon) = \frac{x_{j+1} + x_j}{2} + \frac{x_{j+1} - x_j}{2} \varepsilon \quad (\text{III.53.a})$$

$$y(\varepsilon) = \frac{y_{j+1} + y_j}{2} + \frac{y_{j+1} - y_j}{l_j} \varepsilon \quad (\text{III.53.b})$$

De plus :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\frac{x_{j+1} - x_j}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_{j+1} - y_j}{2}\right)^2} d\varepsilon = \frac{l_j}{2} d\varepsilon \quad (\text{III.54})$$

Par conséquent, le jacobéenne de la transformation est :

$$|J(\varepsilon)| = \frac{l_j}{2}$$

Sur la base de ce qui suit, les intégrales des coefficients d'influence sont évaluées numériquement de la manière suivante :

III.6.1.a. L'intégrale de G_{ij} :

$$G_{ij} = \int_{T_j} u ds = \int_{-1}^1 \frac{1}{2\pi} \ln[r(\varepsilon)] \frac{l_j}{2} d\varepsilon = \frac{l_j}{4\pi} \sum_{k=1}^n \ln|r(\varepsilon_k)| w_k \quad (\text{III.55})$$

Où

$$r(\varepsilon_k) = \sqrt{[x(\varepsilon_k) - x_i]^2 + [y(\varepsilon_k) - y_i]^2} \quad (\text{III.56})$$

III.6.1.b. L'intégrale de H_{ij} :

Cette intégrale peut également être évaluée analytiquement selon les Référent la (Fig. III.7), nous remarquons que

$$ds \cos \varnothing = r d\alpha$$

Qui peut être utilisé avec les équations. (III.47) et (A.7) pour dériver cette expression

$$\hat{H}_{ij} = \int_{T_j} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_{T_j} \frac{1}{2\pi} \frac{\cos \varnothing}{r} ds = \int_{T_j} \frac{1}{2\pi} d\alpha = \frac{\alpha_{j+1} - \alpha_j}{2\pi} \quad (\text{III.57})$$

Les angles α_{j+1} et α_j sont calculés à partir de

$$\tan(\alpha_{j+1}) = \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j} \quad (\text{III.58})$$

$$\tan(\alpha_j) = \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i} \quad (\text{III.59})$$

Où x_{j+1}, y_{j+1} et x_j, y_j sont les coordonnées des points de l'extrémité de j^{me} élément et elle est donnée en termes de coordonnées des points finaux comme

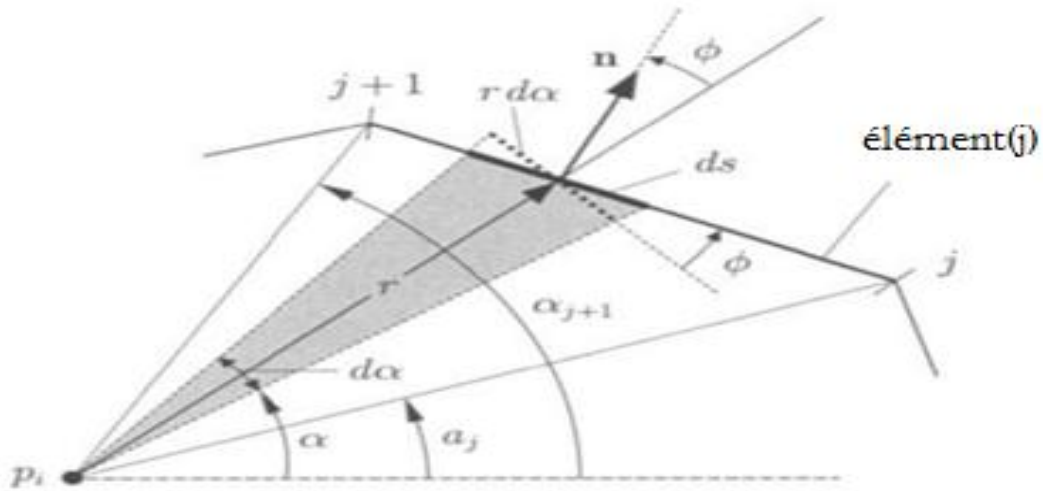


Figure III.7 : Définition des angles impliqués dans l'intégration numérique sur des éléments constants.

III.6.2. Éléments diagonaux, $i = j$:

Dans ce cas, le nœud P_i coïncide avec le nœud P_j , et r repose sur l'élément. Par conséquent $\phi = \frac{\pi}{2}$ ou $\phi = \frac{3\pi}{2}$ qui donne $\cos\phi = 0$. De plus, nous avons

$$x_{pj} = \frac{x_{j+1} + x_j}{2}, \quad y_{pj} = \frac{y_{j+1} + y_j}{2}$$

Et

$$r(\varepsilon) = \sqrt{[x(\varepsilon) - x_{pj}]^2 + [y(\varepsilon) - y_{pj}]^2} = \frac{l_j}{2} |\varepsilon| \quad (\text{III.60})$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} G_{jj} &= \int_{T_j} \frac{1}{2\pi} \ln r ds = 2 \int_0^{\frac{l_j}{2}} \frac{1}{2\pi} \ln r dr \\ &= \frac{1}{\pi} [r \ln r - r]_0^{\frac{l_j}{2}} = \frac{1}{\pi} \frac{l_j}{2} \left[\ln \left(\frac{l_j}{2} \right) - 1 \right] \end{aligned} \quad (\text{III.61.a})$$

Et

$$H_{jj} = \frac{1}{2\pi} \int_{T_j} \frac{\cos\phi}{r} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\cos\phi}{|\varepsilon|} d\varepsilon = \frac{2}{2\pi} [\cos\phi \ln|\varepsilon|]_0^1 = 0 \quad (\text{III.61.b})$$

Il convient de noter que pour les éléments d'ordre supérieur (par exemple, linéaires ou paraboliques), les intégrations analytiques ne sont pas applicables, et pour cette raison, d'autres techniques d'intégration sont employées.

III.7. Evaluation dans le domaine d'intégral :

La représentation intégrale de la solution de l'équation de Poisson (III.36) peut être écrit pour la frontière qui a été discrétisée en N éléments constants, comme

$$\varepsilon^i u^i = \int_{\Omega} v f d\Omega - \sum_{j=1}^N \int_{T_j} v \frac{\partial u}{\partial n} ds + \sum_{j=1}^N \int_{T_j} u \frac{\partial v}{\partial n} ds \quad (\text{III.62})$$

Dans certains cas, les techniques présentées à la section 3.4 pour transformer le domaine d'intégral à l'intégral de ligne de frontière ne convient pas.

$$F^i = \int_{\Omega} v(p_i, Q) f(Q) d\Omega_Q \quad (\text{III.63})$$

Si des techniques plus avancées ne sont pas utilisé, le seul recours est une discrétisation de domaine. Le domaine Ω est divisé dans M éléments ou cellules bidimensionnels, par ex. cellules triangulaires ou rectangulaires (voir Fig. III.8), sur laquelle l'intégration numérique est effectuée. Ainsi, en utilisant une intégration gaussienne à deux dimensions, L'équation (III.63) devient

$$F^i = \sum_{j=1}^M [\sum_{k=1}^n w_k v(p_i, Q_k) f(Q_k)] A_j \quad (\text{III.64})$$

Où Q_k et w_k ($k = 1, 2, \dots, n$) sont le k^{me} point d'intégration et le poids correspondant pour la quadrature gaussienne de la j^{me} cellule, et A_j ($j = 1, 2, \dots, M$) est la surface de la cellule Au moyen de l'équation (III.64) et la notation introduite dans les équations. (III.36) et (III.38), l'équation (III.62) prend la forme de matrice suivante

$$[H]\{u\} + \{F\} = [G]\{u_n\} \quad (\text{III.65})$$

Les équations (III.65) sont d'abord réordonnées sur la base des conditions aux limites spécifiées, puis résolues pour les quantités aux limites inconnues. Les valeurs de u en des points dans Ω peuvent alors être calculées à partir de l'équation. (III.62) pour Il est à noter que, pour un point i ($i = 1, 2, \dots, M$) situé sur la j^{me} cellule, l'intégrale de domaine présente une singularité logarithmique et un soin particulier doit être pris pour son évaluation[8].

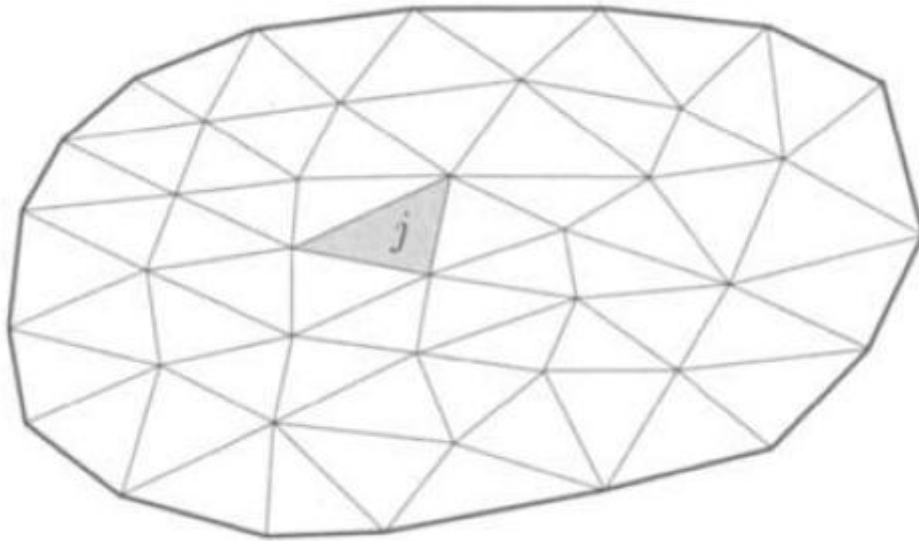


Figure III.8 : Discretisation du domaine Ω en éléments triangulaires.

III.8. Exemple :

Le but de cet exemple est d'illustrer l'utilisation de notre programme en résolvant un problème simple de potentiel. Le domaine Ω est un carré avec des conditions aux limites mixtes. La frontière est discrétisée en 16 éléments constants et la solution est recherchée en 9 points internes.

La solution exacte est: $u(x, y) = 100(1 + x)$.

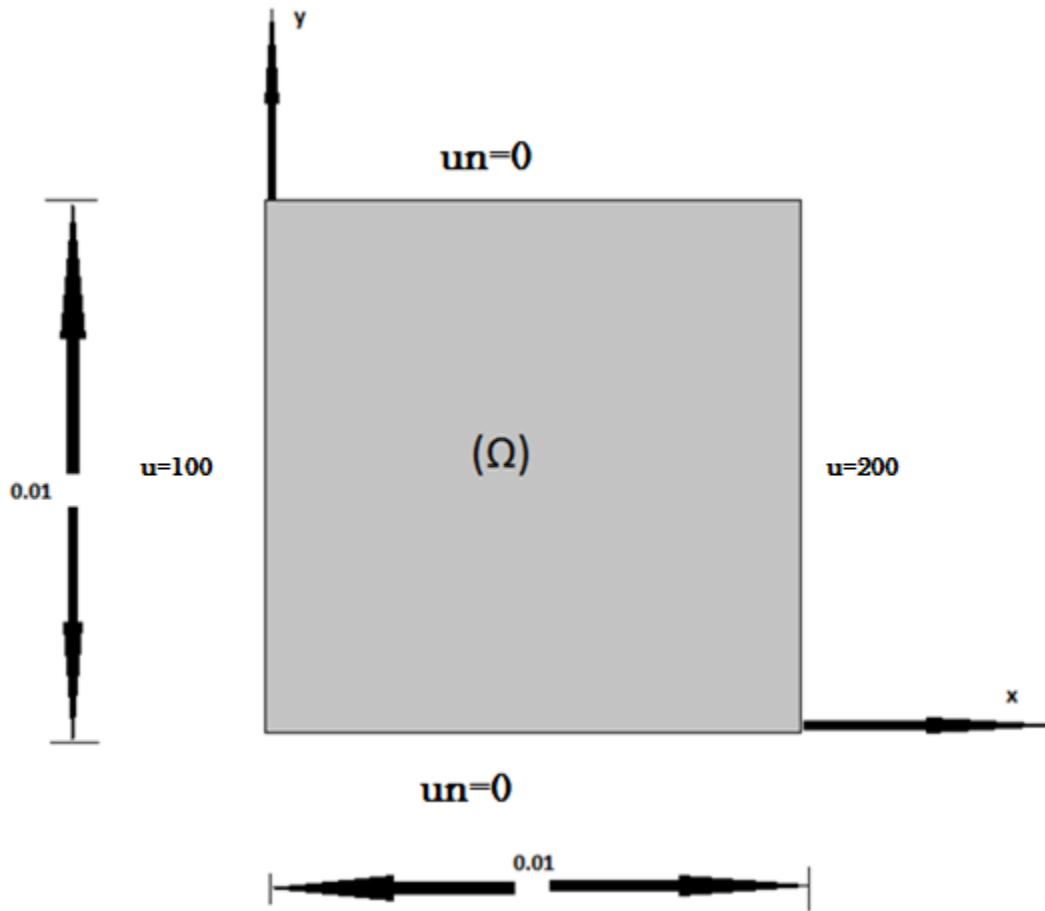


Figure III.9: Domaine carré Ω et conditions aux limites de l'exemple.

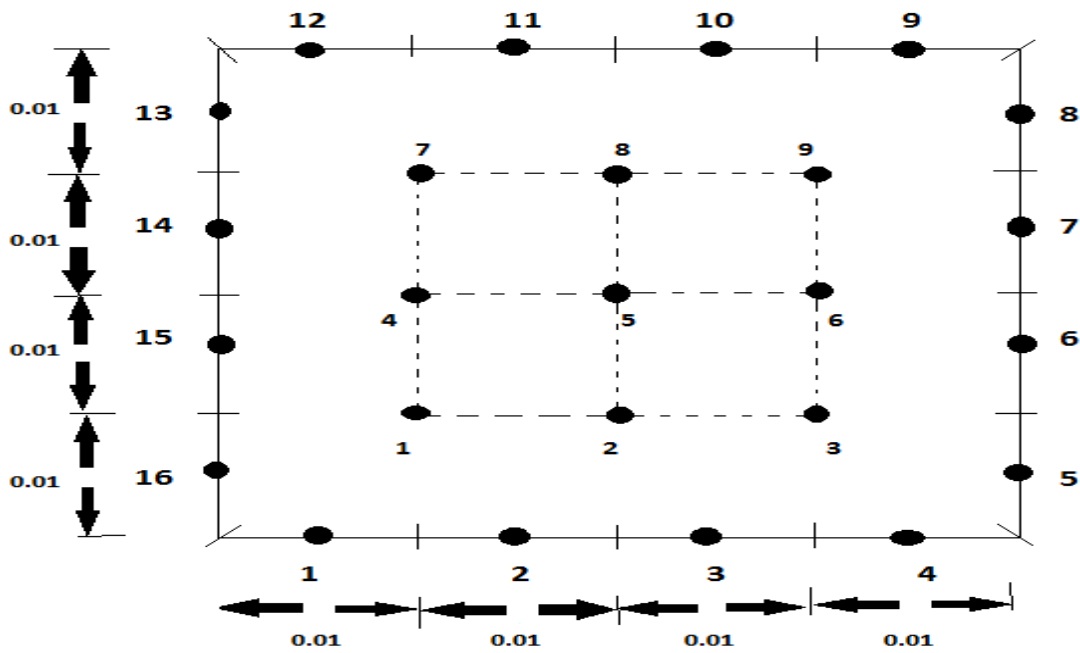


Figure III.10: Discrétisation des éléments de frontière et Points internes de l'exemple.

Point	Nombre d'éléments limites, N					Exacte
	16	48	80	112	144	
Valeurs de u aux nœuds limites						
1	111.88	112.36	112.43	112.46	112.47	112.50
2	137.32	137.47	137.48	137.49	137.49	137.50
3	162.68	162.53	162.52	162.51	162.51	162.50
4	188.12	187.64	187.57	187.54	187.53	187.50
Valeurs de u_n aux noeuds limites						
15	105.520	98.215	99.486	99.665	99.774	100.00
16	98.417	99.800	99.909	99.946	99.964	100.00
Valeurs de u aux points internes						
1	124.89	124.98	124.99	124.99	125.00	125.00
5	150.00	150.00	150.00	150.00	150.00	150.00
9	175.11	175.02	175.01	175.01	175.00	175.00

Tableau III.1: Limite calculée et valeurs internes pour diverses limites discrétisations de.

Comme il était prévu, la solution obtenue est symétrique par rapport à l'axe passant par le centre du carré et étant parallèle à la l'axe ox . Le tableau présente les valeurs calculées sur la limite et à l'intérieur du domaine en fonction du nombre N d'éléments de limite. En comparant ces résultats aux valeurs exactes, il apparaît qu'ils convergent rapidement et que les valeurs limites calculées de u_n et u sont très proches des exactes.

La précision aux points internes est encore mieux, étant attribué au fait que ces valeurs sont calculées à partir de (III.44), qui est une forme résiduelle pondérée pour toutes les valeurs limites.

III.9. Conclusion :

Les équations intégrales de frontières permettent de résoudre le problème de Laplace, qui régit des phénomènes physiques assez nombreux pour justifier à lui seul des études comme la nôtre, cependant, tout au long de notre chapitre, nous avons posé des indications pour le couplage de ces équations avec les méthodes variationnelles associées aux éléments finis pour les problèmes de magnétisme, c'est dans ce couplage que la méthode des équations intégrales de frontières tient sa justification.

VI.1. Introduction :

Dans ce chapitre nous allons appliquer les procédures requise dans les précédents chapitres pour le calcul de potentiel vecteur magnétique par des méthodes analytique, semi-analytique et numérique, l'outil de programmation utilisé est l'environnement Matlab. Nous allons utiliser toutes les méthodes pour obtenir les résultats.

IV.2. Géométrie du problème à résoudre :

Une plaque soumis à champ axiale crée par une bobine cette bobine est suffisamment longue pour assurer une induction magnétique parallèle à l'axe (OX). la bobine est alimentée par un courant I , comme indiqué sur la figure souvent :

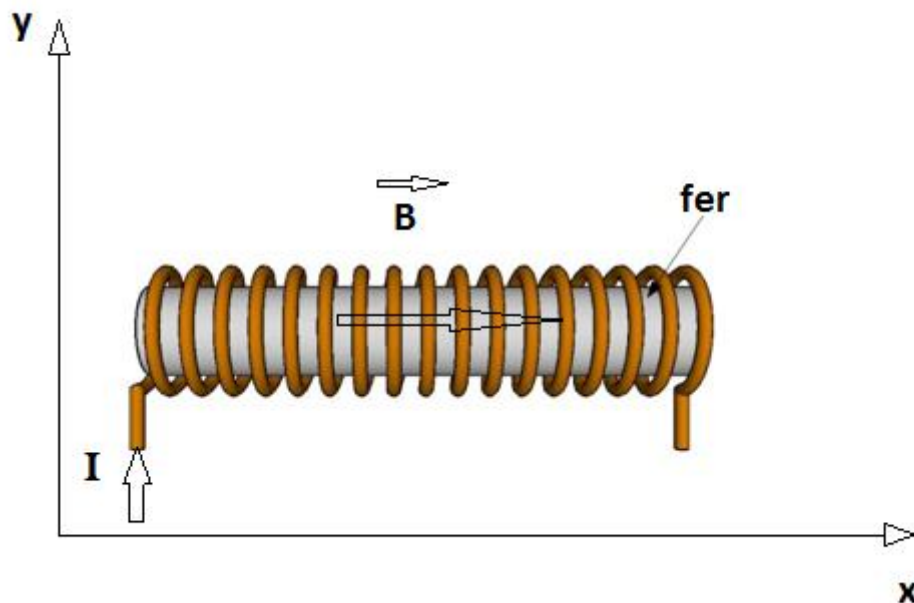


Figure. IV.1 : Problème à résoudre.

$$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j}$$

L'induction magnétique \vec{B} à une seule composante B_x

$$\vec{B} = \text{Rot} \vec{A}$$

Donc : \vec{A} est perpendiculaire à \vec{B}

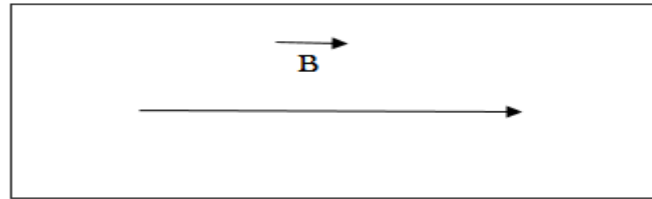


Figure. IV.2 :Représentation de l'induction magnétique \vec{B} .

On peut modéliser ce problème par une autre méthode, on impose certaines conditions sur les côtés hantes et basses de la plaque.

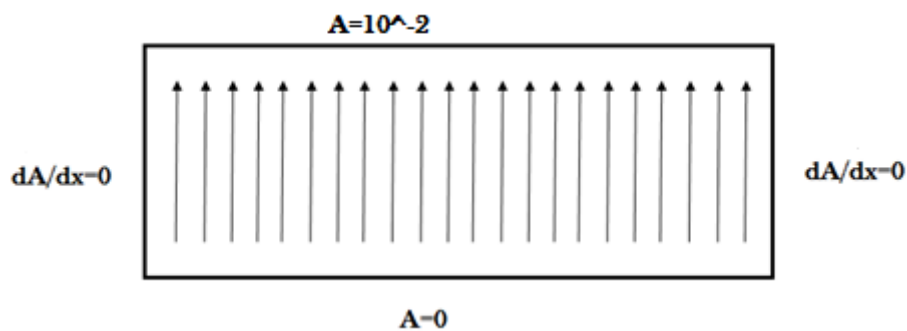


Figure. IV.3 :Représentation de potentiel magnétique \vec{A} .

IV.3. Calcul de potentiel vecteur magnétique par la méthode d'analytique :

VI.3.1. Problème à résoudre :

On applique la méthode de séparation des variables précédente à un rectangle, les conditions aux limites sont sur les côtés droite, gauche et bas sont nulles, sur le côté haut ont 0.010

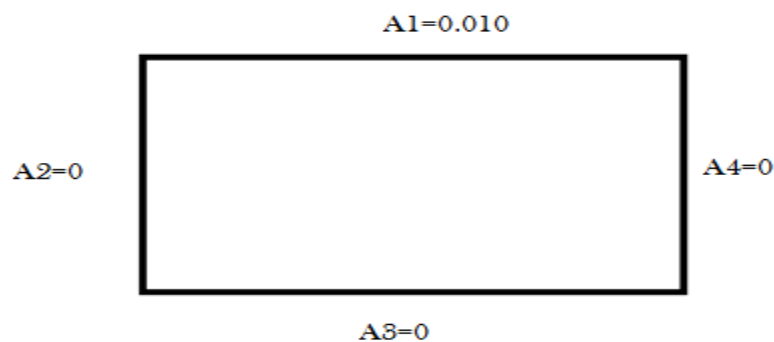


Figure. IV.4 : Représentation des conditions aux limites du problème.

On trouve le problème à résoudre les résultats obtenus après programmation dans l'environnement Matlab

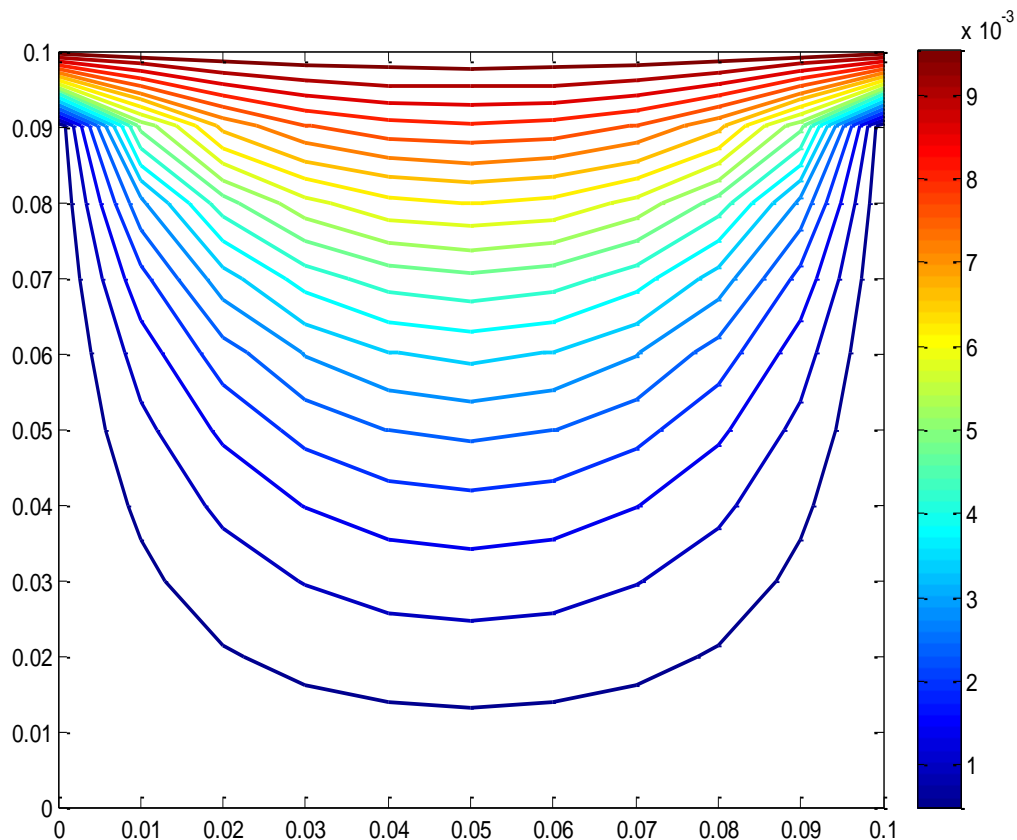


Figure .VI.6 : Distribution des équipotentiels vecteur magnétique dans plaque ferromagnétique.

Cette figure représente la distribution des iso-valeurs de potentielle vecteur magnétique, les courbes de potentielle sont fermées autours de la condition aux limite imposée $10*10^{-2}$.

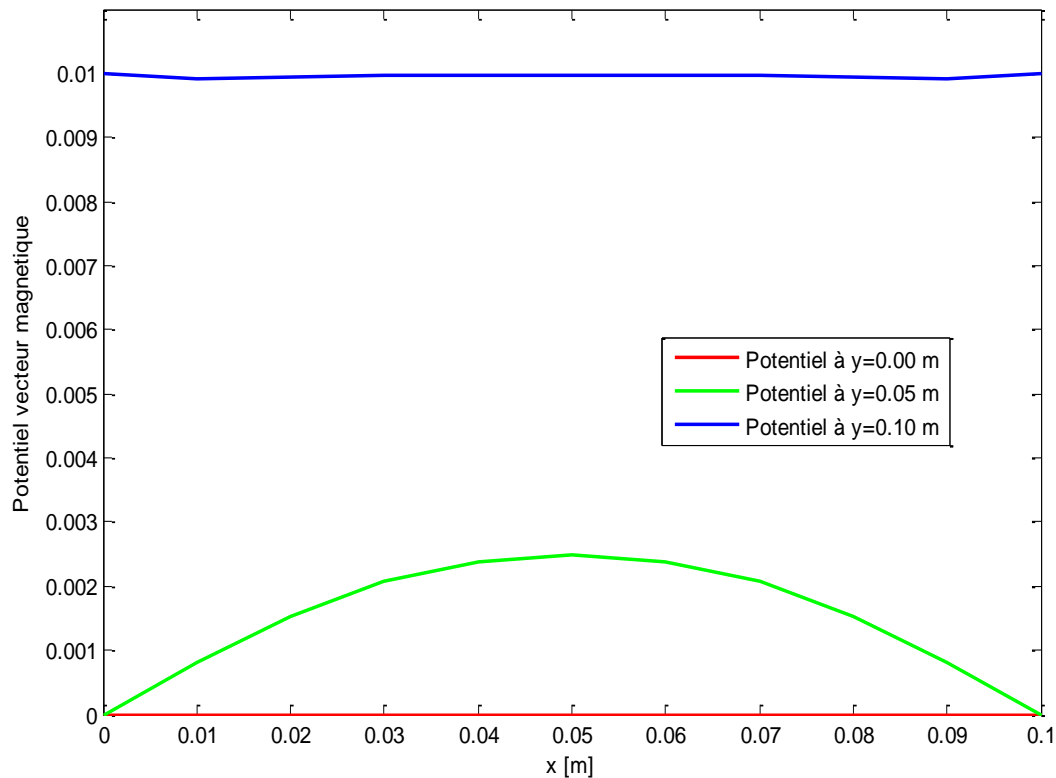


Figure .VI.7 : Traçage des équipotentiels vecteurs magnétiques pour trois chemins axiaux.

Cette figure représente trois chemins axiaux (suivant OX) $y=0$ m, $y=0.05$ m et $y=0.1$ m respectivement, Les conditions aux limites sont bien respectées On voit l'augmentation de valeur des potentiels vecteurs magnétiques aux milieux de la plaque.

Remarque :

On remarque des fluctuations sur la courbe qui se traduit par une limite de la somme de l'équations III-38 à III-41, de $i=1:+\infty$, cette somme est limitée de $i=1:111$, due aux erreurs des calculs surtout sur le sinus hyperbolique dans les expressions de ces équations précédentes.

IV.4. Calcul de potentiel vecteur magnétique par une méthode numérique :

IV.4.1. Méthode des différences finies :

VI.4.1.a. Exemple 1 :

On applique la méthode des différences finies précédente à une plaque rectangulaire, les conditions aux limites sont : sur le côté droit nulle, sur le côté gauche nulle, sur le côté haut 0.01 et le côté bas est supposée nulle aussi.

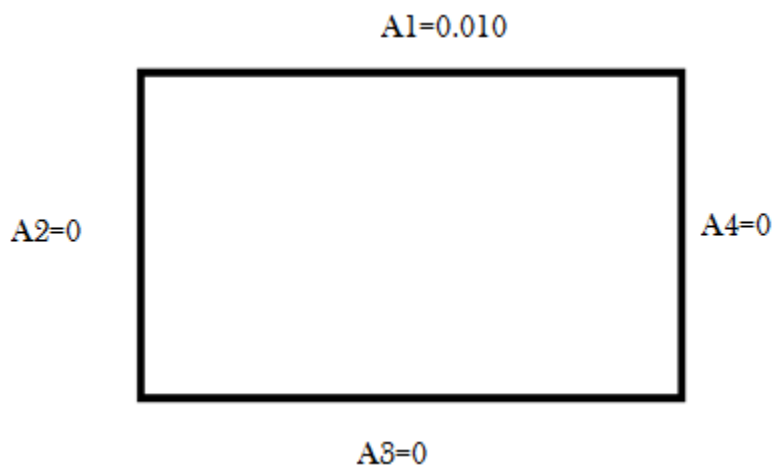


Figure .VI.8 : Représentation des conditions aux limites du problème.

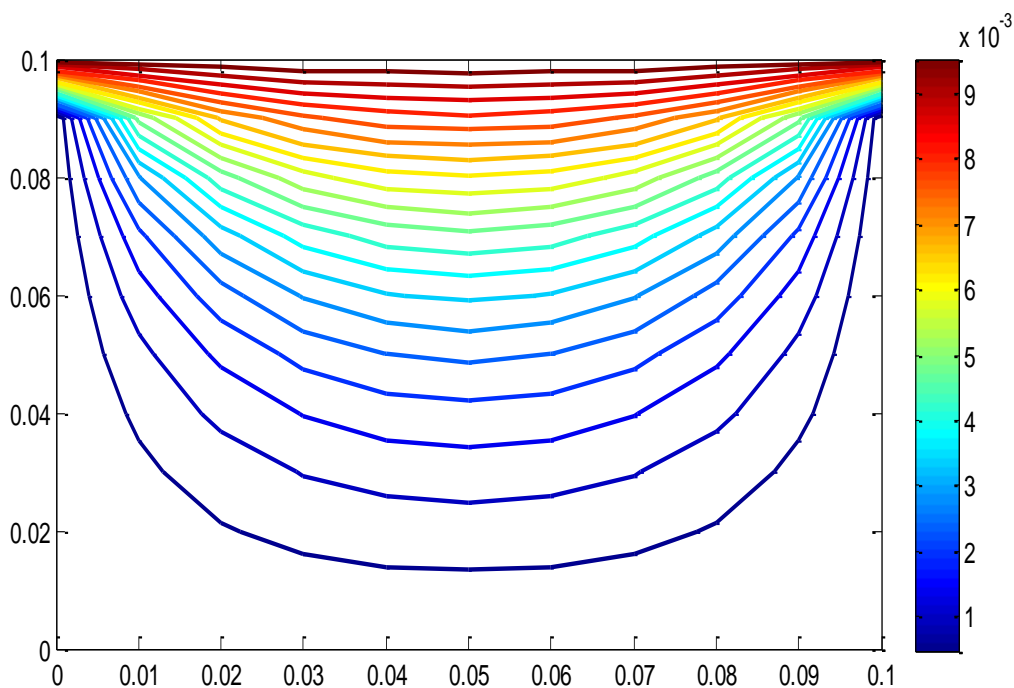


Figure .VI.9 : Distribution des équipotentiels vecteur magnétique dans la plaque ferromagnétique.

Cette figure représente la distribution des iso-valeurs de potentiel vecteur magnétique, les courbe de potentiel sont fermées, en trouve la condition aux limite imposées 10^{-2} .

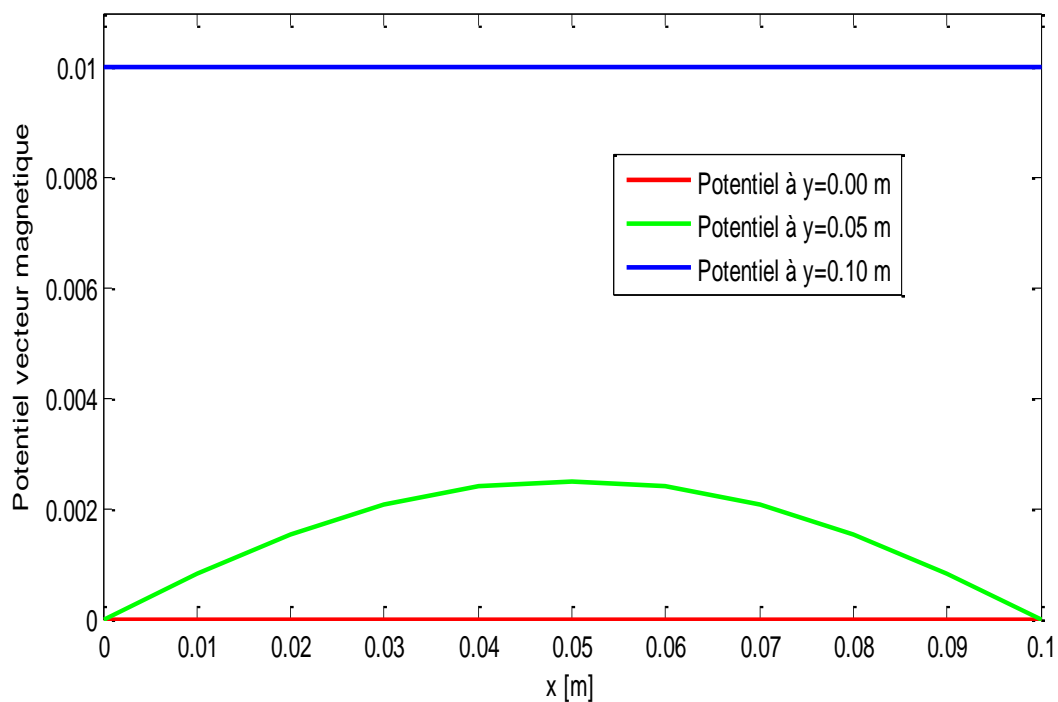


Figure .VI.10 : : Traçage des équipotentiels vecteurs magnétiques pour trois chemins axiales.

Cette figure représente trois chemins axiales suivant l'axe OX $y=0\text{m}$, $y=0.05\text{m}$ et $y=0.1\text{m}$ respectivement, Les conditions aux limites sont bien respectées

La courbe en vert montre l'augmentation de potentiel vecteur magnétique de côté gauche vers la droite.

VI.4.1.b. Exemple 2 :

Nous traitons le même problème que celui précédent, mais avec des conditions aux limites mixtes de Dirichlet aux cotés droite et gauche, de Neumann en haut et en bas.

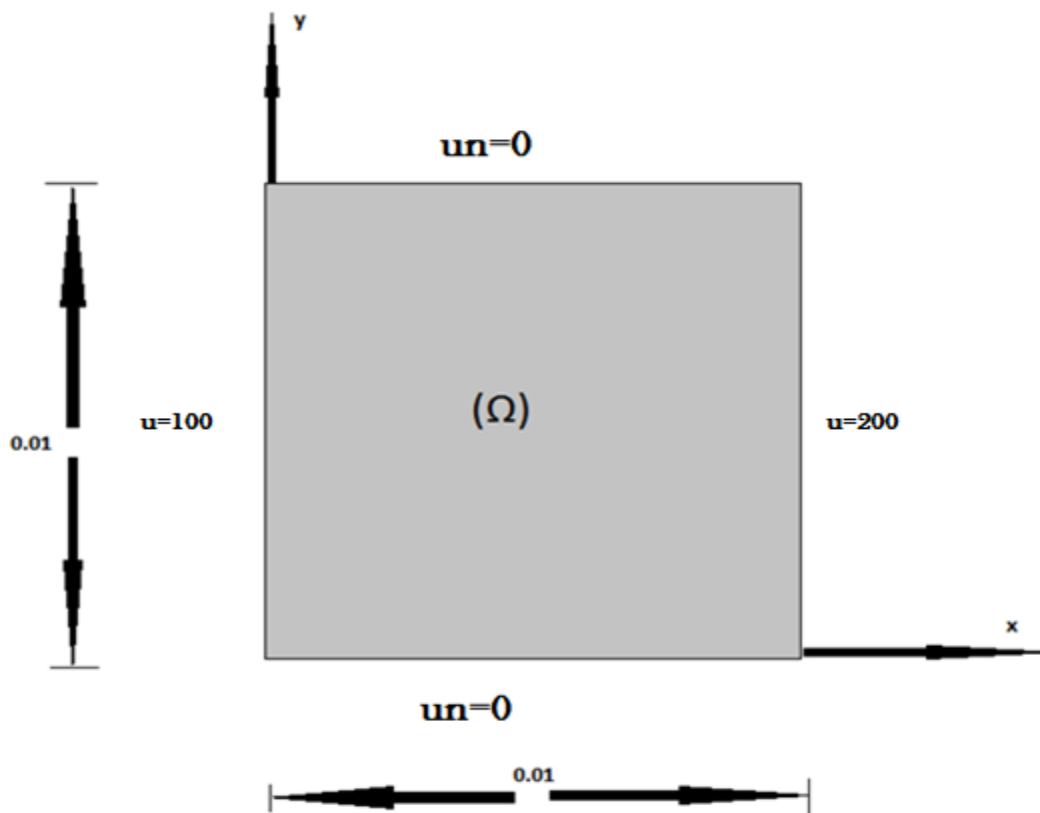


Figure .VI.11: Domaine Ω et conditions aux limites de l'exemple.

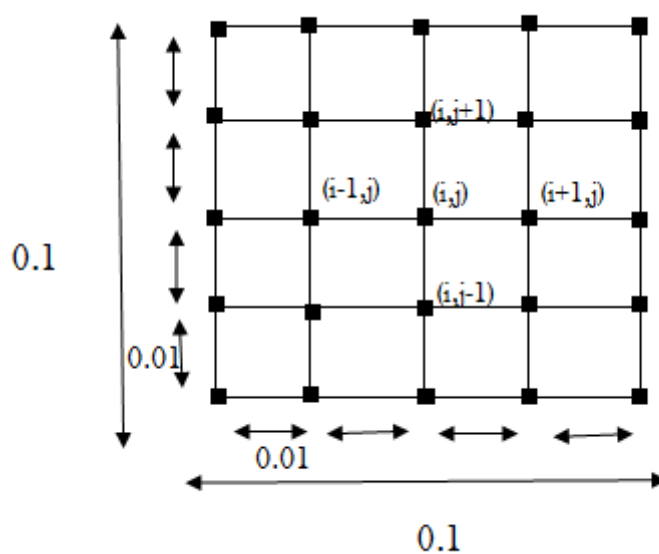


Figure .VI.12 : Maillage de domaine d'étude par la méthode des différences finies.

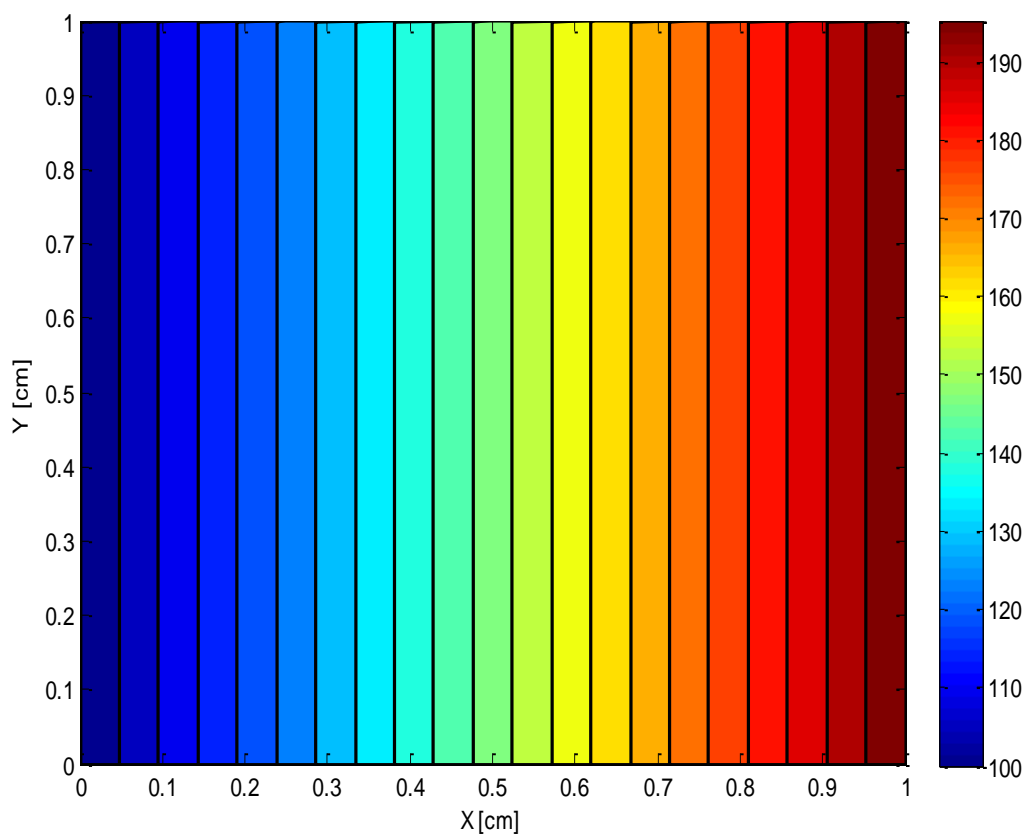


Figure .VI.13 : Distribution des équipotentiels vecteur magnétique dans la plaque ferromagnétique.

Lors de l'introduction des conditions aux limites de type Neumann aux cotés haut et bas, on voit que les lignes équipotentiels sont perpendiculaires à l'axe OX pour les deux côtés, l'augmentation des iso-valeurs de cotés gauche et droite sont bien illustrées sur la figure (VI.13).

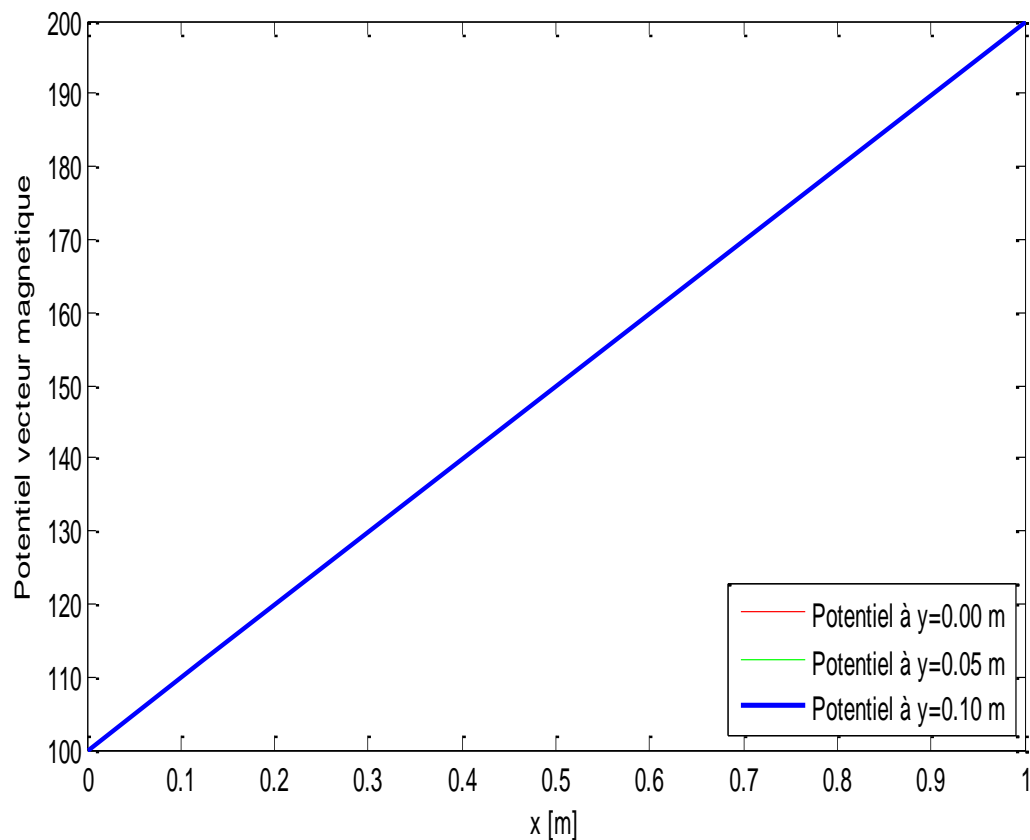


Figure .VI.14 : Traçage de potentiel vecteur magnétique pour trois chemins axiales.

Cette figure représente la variation de potentiel vecteur magnétique pour trois chemins axiales suivant l'axe (OX) à $y=0$ m, $y=0.05$ m et $y=0.1$ m respectivement, Les conditions aux limites sont bien respectées, les courbes sont identiques et montrent l'augmentation de potentiel vecteur magnétique de côté gauche vers la droite.

IV.5. Calcul de potentiel vecteur magnétique par une méthode semi analytique :

Dans cet exemple, le nombre d'éléments ($N = 16$) est relativement petit et le fichier de données peut donc être créé manuellement. Le domaine d'étude de la figure VI.15 a la forme carrée est discrétisé comme dans la figure VI.16.

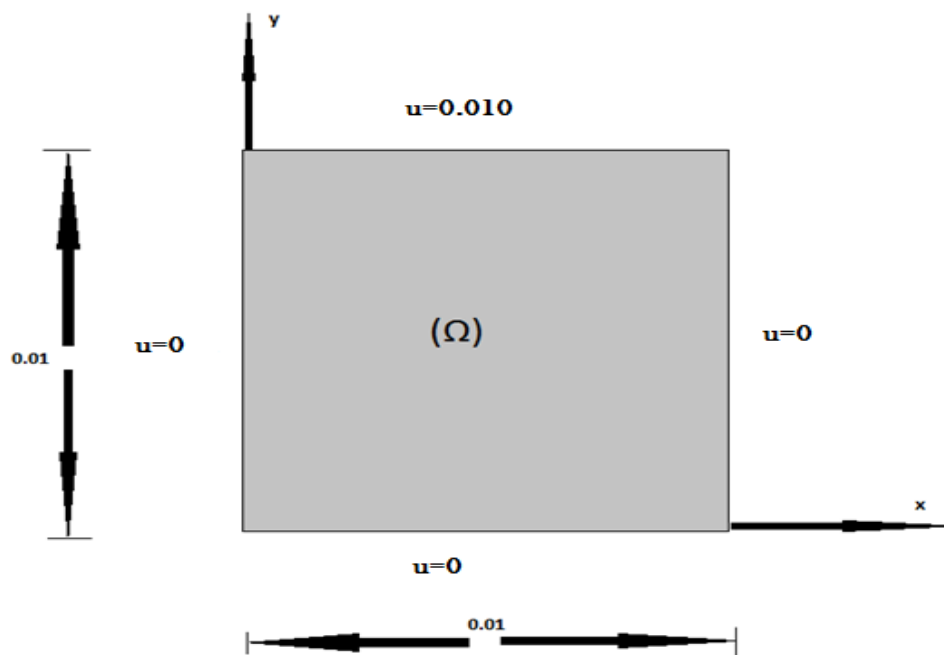


Figure.VI.15 : Domaine carré Ω et conditions aux limites.

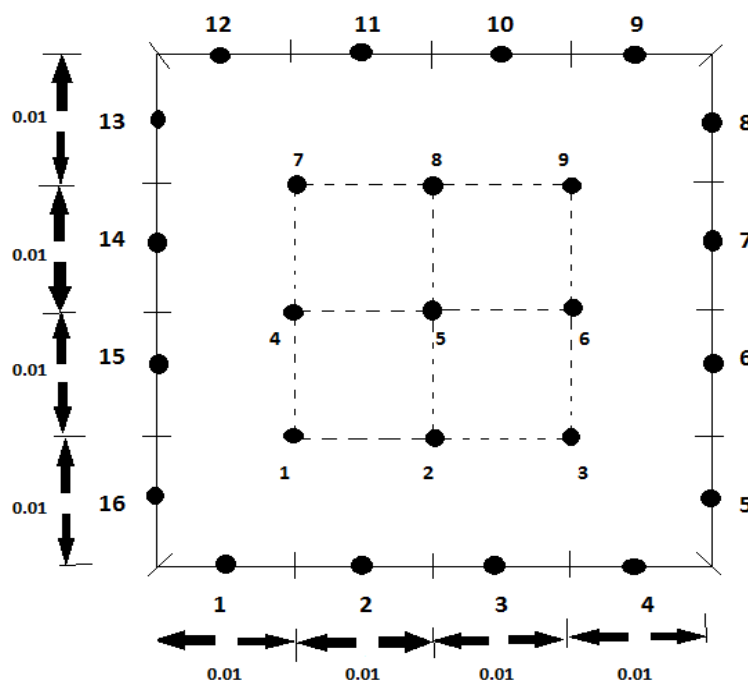


Figure .VI.16 : Discrétisation des éléments de frontière et Points internes de l'exemple.

Point	Nombre d'éléments des pointes aux frontières N					Exacte
	16	48	80	112	144	
Valeurs de u aux nœuds frontières						
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0
9	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
10	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
11	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
12	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
Valeurs de u aux points internes						
1	0.000677	0.000679	0.000679	0.000679	0.000679	0.00068
5	0.0025	0.0025	0.0025	0.0025	0.0025	0.0025
9	0.00432	0.00432	0.00432	0.00432	0.00432	0.00432

Tableau. VI.1: Valeurs calculées et exactes de potentiel vecteur magnétique aux nœuds de frontière et interne en fonction de nombre d'éléments des pointes aux frontières N.

La solution obtenue est symétrique par rapport à l'axe, passant par le centre du carré et étant parallèle à l'axe (ox). La table présente les valeurs calculées sur la limite et à l'intérieur du domaine en fonction du nombre N d'éléments de limite. En comparant ces résultats aux valeurs exactes, il apparaît qu'elles convergent rapidement et que les valeurs de u calculées aux limites sont très proches à celles exactes.

VI.6. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons proposé un problème qui a été résolu en répétant les méthodes utilisées dans MATLAB et créant des programmes pour calculer les potentiels vecteurs magnétiques de manière analytique, semi-analytique et numérique. Les mêmes résultats ont été obtenus par l'application numérique de ces trois méthodes.

Conclusion générale

Ce travail consiste à étudier l'équation de Laplace par des méthodes analytique, semi analytique et numérique, Décriront le principe de ces méthodes de résolution dans le cas statique.

La méthode de séparation des variables est une méthode analytique en coordonnées cartésiennes. Lorsque les conditions aux limites sont spécifiées sur des plans, le système en coordonnées cartésiennes est les plus adéquats pour exprimer ces conditions et obtenir une solution du problème de l'équation de Laplace.

La détermination des constantes à donner lien à certaine difficulté, du fait que la résolution nécessite des méthodes qui compliquent la solution (fonction de Bessel en coordonnées cylindriques), qu'il s'agira de déterminer en fonction des valeurs imposées pour le potentiel sur le bord du domaine de problème.

La méthode des différences finies est basée sur l'approximation locale des dérivées apparaissant dans les équations différentielles d'origines sur la base de développement limité de Taylor, les fonctions dérivées sont approchées par plusieurs types de schémas aux différences finies : différences finis en avant, en arrière et centrées.

La méthode utilise un maillage, ou une grille du domaine total, la méthode peut résoudre aussi bien des problèmes à domaines régulier et irrégulier.

Nous avons aussi, étudié la résolution de l'équation de Laplace par la méthode des équations intégrales de frontières basées sur l'identité de Green, les résultats obtenus confirment la validité du programme numérique de la méthode semi analytique. L'utilisation de cette méthode pour l'étude des géométries plus complexes est possible.

La méthode des équations intégrales de frontières permet de résoudre les problèmes linéaires par intégration sur la frontière de chaque région de la géométrie étudiée. Cette méthode ne permet pas un traitement local si en tient en compte la saturation (la non-linéarité).

Les trois méthodes peuvent résoudre autres problèmes non seulement de Laplace, mais elles traites aussi des problèmes de type Poisson. Chaque méthode a des avantages et des inconvénients. La précision des résultats varie d'une méthode à une autre selon la troncature utilisée.

Lorsque les champs ne dépendent que d'une seule coordonnée, les dérivées partielles sont remplacées par une différentielle et la résolution des problèmes se simplifie considérablement.

[1] Matthew N.O. Sadiku, Numerical techniques in electromagnetics [2nd ed.] 2001 by CRC Press LLC. ISBN 0-8493-1395-3.

[2] https://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9thode_des_diff%C3%A9rences_finies

[3] Melle. MEZIANI Amel « Application de la méthode des éléments de frontières dans le cas des réservoirs semi-infinis » mémoire de master, université de Bejaia 2013.

[4] Curtis F. Gerald, Patrick O. Wheatley « *Applied Numerical Analysis* ». Third Edition, Addison- Wesley Publishing Company, FST-Mohammedia, (2008)

[5]2. M. Kadja, « Résolution numérique des équations aux dérivées partielles : Méthodes des différences finies », Cours et exercices résolus. Les éditions de l'université Oum-El-Bouaghi, 2000/2001

[6] Fredholm, I., 1900. Ofversight af Kongl, Svenska Vetenskaps - Akademiens Forhandlingar, Vol.57, pp.39-46.

[7] Jaswon, M.A., 1963. Integral Equation Methods in Potential Theory, I, Proceeding of the Royal Society, London, Vol.275 (A), pp.23-32.

[8] T. John KATSIKADELIS « boundary elements theory and applications» ELSEVLER, Athéne, 2002.