

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université Mohamed Seddik Ben Yahia de Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Physique



N° d'ordre :

Série :

THESE

présentée pour obtenir le diplôme de

DOCTORAT en SCIENCES

Spécialité : Physique

Option : Physique Théorique

par

**SABRI Youcef**

THEME

**Physique des Trous Noirs en Présence des Distances Minimales**

**Devant le jury :**

<b>Président :</b>	T. Boudjedaa	Pr.	Université de Jijel
<b>Rapporteur :</b>	K. Nouicer	Pr.	Université de Jijel
<b>Examineurs :</b>	N. Belaloui	Pr.	Université Mentouri Constantine
	A. Bouda	Pr.	Université de Béjaia
	K. Ait Moussa	Pr.	Université Mentouri Constantine
	A. Bouchareb	MCA.	Université de Annaba

Soutenu le :

# Remerciements

*Ce mémoire de Doctorat s'est déroulée au Laboratoire de Physique Théorique (LPTh) de l'Université de Jijel. Je remercie Monsieur le Professeur K. Nouicer, et ses collègues T. Boudejdaa, Professeur, et A. Bounames, Professeur, de m'avoir accueilli et mis à ma disposition tous les moyens du LPTh durant les années de préparation de cette thèse. Mon séjour y a été des plus agréables et j'ai pu y bénéficier d'une ambiance stimulante.*

*Ce double statut est la résultante du fait que le Professeur K. Nouicer a accepté de diriger ma thèse de doctorat. Je dois dire que cette situation tout à fait exceptionnelle m'a permis de bénéficier d'un encadrement de très grande qualité et je tiens à lui exprimer ma plus sincère reconnaissance et toute ma sympathie. J'ai beaucoup apprécié mon encadreur pour son enthousiasme scientifique, pour son attention et son souci de rigueur permanents.*

*Je tiens à remercier Mr. le Professeur T. Boudjedaa de l'Université de Jijel d'avoir accepté de présider le jury, et Mrs les Professeurs A. Bouda de l'Université Abderahmane Mira de Béjaia, N. Belaloui et K. Ait Moussa de l'Université Mentouri de Constantine, et A. Bouchareb de l'Université Badji Mokhtar de Annaba d'avoir accepté d'examiner cette thèse en tant que membres du Jury.*

*Enfin, merci à ma mère, pour m'avoir toujours soutenu dans ce que j'entreprenais, mes sœurs, mes frères et toute ma famille.*

*J'adresse un grand merci à tout le monde et à toutes les personnes que j'aurais pu oublier.*

Youcef

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Introduction à la Relativité Générale</b>	<b>7</b>
2.1	Principes de la Relativité Générale . . . . .	7
2.1.1	Principe de Mach . . . . .	7
2.1.2	Principe d'équivalence . . . . .	8
2.1.3	Le principe de la covariance . . . . .	8
2.2	Variétés riemanniennes . . . . .	8
2.3	Équations d'Einstein . . . . .	10
2.3.1	Formalisme Lagrangien en relativité générale . . . . .	11
2.3.2	Tenseur énergie-moment . . . . .	14
2.3.2.1	Espace plat . . . . .	14
2.3.2.2	Généralisation à l'espace-temps courbé . . . . .	16
2.3.2.3	Fluide parfait . . . . .	16
2.3.2.4	Conditions d'énergie pour un fluide parfait . . . . .	16
2.4	Trou noir de Schwarzschild . . . . .	17
2.4.1	Symétrie sphérique et orthogonalité . . . . .	17
2.4.2	Solution des équations d'Einstein dans le vide . . . . .	18
2.4.2.1	Singularités et Horizons . . . . .	21
2.4.2.2	Coordonnées de Kruskal . . . . .	22
2.5	Thermodynamique des trous noirs . . . . .	23
2.5.1	Les principes de la thermodynamique . . . . .	23
2.5.1.1	Le Principe Zéro . . . . .	23
2.5.1.2	La première lois . . . . .	24
2.5.1.3	La deuxième loi . . . . .	25
2.5.1.4	La troisième loi . . . . .	26

2.5.2	Thermodynamique du trou noir de Schwarzschild . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Mécanique quantique avec GUP et approche des états cohérents dans la géométrie non commutative</b>	<b>28</b>
3.1	Mécanique quantique avec un GUP . . . . .	28
3.2	Approche des états cohérents de la géométrie non commutative . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Thermodynamique du trou noir de Schwarzschild en présence du GUP</b>	<b>37</b>
4.1	Température du trou noir . . . . .	38
4.2	Entropie microcanonique . . . . .	39
4.3	Évaporation du trou noir . . . . .	42
4.4	Temps de vie du trou noir . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Thermodynamique du trou noir de Schwarzschild dans une cavité isotherme en présence du GUP</b>	<b>48</b>
5.1	Action euclidienne . . . . .	48
5.1.1	Action de Gibbons-Hawking-York (GHY) . . . . .	49
5.1.1.1	La notion d'hypersurface . . . . .	49
5.1.2	Origine de l'action Gibbons-Hawking-York . . . . .	51
5.1.3	Action GHY pour le trou noir de Schwarzschild dans une cavité en présence du GUP . . . . .	52
5.2	Énergie interne . . . . .	55
5.3	Entropie . . . . .	57
5.4	Chaleur spécifique . . . . .	59
5.5	Énergie libre de Gibbs et transition de phase de Hawking-Page . . . . .	60
5.6	Stabilité dynamique locale . . . . .	65
<b>6</b>	<b>Solution de Schwarzschild inspirée de la Géométrie non commutative</b>	<b>67</b>
6.1	Distribution de matière inspirée de la géométrie non commutative . . . . .	67
6.2	Élément de longueur . . . . .	68
6.3	Singularités et horizons . . . . .	71
6.4	Thermodynamique . . . . .	73
<b>7</b>	<b>Thermodynamique du trou noir de Schwarzschild inspiré de la géométrie non commutative dans une cavité isothermique</b>	<b>76</b>
7.1	Action euclidienne GHY du trou noir en présence du GUP . . . . .	76

7.2	Paramètres thermodynamiques . . . . .	80
7.2.1	Énergie interne . . . . .	80
7.2.2	Entropie . . . . .	81
7.2.3	Stabilité thermodynamique . . . . .	82
7.3	Énergie libre et transitions de phases . . . . .	83
7.3.1	Régime de Schwarzschild . . . . .	86

# Chapitre 1

## Introduction

Au cinquième siècle avant J.C, Démocrite a postulé que la matière est construite à partir de petits objets de *taille finie*. Environ 2500 ans plus tard, la combinaison de la mécanique quantique avec la relativité restreinte donnait la théorie quantique des champs qui stipule que les atomes sont constitués par des électrons et un noyau atomique lui-même constitué par des neutrons et des protons. Ces deux particules ont eux même une sous-structure formée de quarks et de gluons. En résumé, la matière est construite à partir de petits objets de *taille finie* et on ne sait pas si nous continuerons à voir de nouveaux constituants fondamentaux de la structure de la matière. L'apparition de la relativité générale a fourni une compréhension plus profonde de l'espace-temps à l'échelle macroscopique. D'autre part, si on sonde les plus petites distances avec des énergies suffisamment grandes, notamment autour de l'échelle de Planck, les effets de la gravité deviennent importants et perturbent la structure spatio-temporelle. Pour cela, l'unification de la relativité générale et la mécanique quantique est une nécessité absolue, mais difficilement réalisable. Jusqu'à présent il n'existe pas une théorie de la gravité quantique bien viable mathématiquement ou phénoménologiquement, mais il existe plusieurs tentatives prometteuses pour approcher ce Graal notamment la théorie des cordes, la gravité quantique à boucles, la relativité restreinte déformée et la physique des trous noirs ([130]-[6]). La remarque la plus importante est que toutes ces tentatives conduisent inéluctablement vers l'existence d'une distance minimale de l'ordre de la longueur de Planck. En effet dans le contexte de la théorie des cordes [7]-[11], de la gravité quantique à boucles [12], de la relativité restreinte déformée [13]-[19], et de la physique des trous noirs [2] et [137]-[22], les physiciens ont proposé plusieurs approches pour introduire les distances minimales de façon naturelle dans la théorie. Ces approches se résument essentiellement à la

mécanique quantique basée sur un principe d'incertitudes généralisé (GUP) ou des relations de dispersion modifiées (MDR), à la relativité restreinte déformée, et les théories construites sur un espace non commutatif. Dans ce travail, on s'intéressera au GUP et à la géométrie non commutative.

La forme la plus célèbre du principe d'incertitude généralisée (GUP) est celle proposée par G. Veneziano et al. [7]-[11] lors de leurs travaux sur la diffusion des cordes à hautes énergies, et elle s'exprime par la relation  $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \left( 1 + \beta (\Delta p)^2 \right)$ . La même relation a été obtenue par M. Maggiore [2, 23] dans son analyse de l'expérience de pensée (Gedanken experiment) pour mesurer la surface de l'horizon apparent d'un trou noir en gravité quantique, ainsi que dans des expériences de pensées traitant des micros trous noirs [24, 25]. La notion de GUP qui a ensuite mûri a été étudiée par plusieurs auteurs en l'associant à l'algèbre de Poincaré déformée. La structure mathématique qui décrit le GUP de manière naturelle est celle de l'algèbre de Heisenberg déformée suivante :  $\langle [X_i, P_j] \rangle \geq \frac{\hbar}{2} \delta_{ij} \left( 1 + \beta \frac{p^2 + m^2}{4\kappa^2} \right)^{\frac{1}{2}}$  correspondant au GUP  $\Delta x_i \cdot \Delta p_j \geq \frac{\hbar}{2} \delta_{ij} \left( 1 + \frac{(\Delta p)^2}{8\kappa^2} + \frac{p^2 + m^2}{8\kappa^2} \right)$ .

La mécanique quantique basée sur ce type de GUP a été reformulée par Kempf and al. [26, 27, 28, 29, 30]. Dans le but de voir l'incidence du GUP sur les problèmes de la mécanique quantique, plusieurs travaux ont été effectués durant les dernières années notamment, l'oscillateur harmonique [26, 27, 31], le potentiel de Coulomb [32]-[34], l'effet Casimir [35, 36, 37]. Le résultat le plus important que l'on a pu déduire de ces travaux est que le principe d'incertitude généralisée (GUP) conduit à des incertitudes finies sur la position et l'impulsion.

Dans leurs recherches sur la théorie des cordes, N. Seiberg et E. Witten ont montré qu'à basses énergies la théorie des cordes devient une théorie effective des champs quantiques sur un espace-temps non commutatif [38]. Ce travail n'est pas le premier qui introduit la notion de géométrie non commutative dans la physique mais il est considéré comme la renaissance officielle de cette approche. Le fondateur de cette théorie est H. S. Snyder qui utilisa une structure non commutative des coordonnées spatio-temporelles dans la théorie des champs à des échelles très petites pour introduire un cut-off ultraviolet effectif [39]. Cette idée a été étendue plus tard par Yang [40] qui a remplacé l'algèbre des opérateurs linéaires par l'algèbre des fonctions pour décrire une structure géométrique générale. En mathématique, beaucoup de travaux ont été développés dans les années 80 du siècle passé [41, 42], mais en physique, cette idée a été largement ignorée jusqu'à sa ré-découverte par N. Seiberg et E. Witten en 1999 et la publication de plusieurs travaux

[43]-[45].

Nous disposons de 4 approches pour formuler la physique sur un espace non commutatif. La première approche [46] consiste à remplacer le produit habituel par le produit de Weyl-Moyal défini par

$$A(x) * B(x) = e^{i\partial_\mu^\eta \theta^{\mu\nu} \partial_\nu^\rho} A(x + \eta) B(x + \rho).$$

Cette déformation conduit à une algèbre non commutative des opérateurs de position. Dans cette approche, les propagateurs de Feynman restent inchangés mais les facteurs de vertex acquièrent une correction supplémentaire. Cette approche souffre de deux problèmes majeurs, le mixage entre les divergences UV et les divergences IR [47]-[53] et surtout la non unitarité [54]-[57]. Cependant, l'unitarité peut être restaurée en considérant le formalisme Hamiltonien au lieu du formalisme Lagrangien et en calculant les diagrammes de Feynman en utilisant la formule de Gell-Mann-Low [58, 59]. Cette méthode est considérée comme étant la deuxième approche. Le propagateur libre de Feynman reste lui aussi inchangé dans cette approche. Dans la troisième approche, la non localité induite par le produit de Weyl-Moyal affecte seulement l'Hamiltonien d'interaction. Cela se fait en remplaçant les opérateurs des champ locaux par des champs non-locaux [60] dans le terme d'interaction de la densité Lagrangienne. Par conséquent, les propagateurs libres ne seront pas modifiés. Cette démarche est motivée par le fait que le produit de Moyal n'affecte pas la partie libre de la densité Lagrangienne. Cependant, les lignes internes seront modifiées par un facteur d'amortissement exponentiel semblable à celui rencontré dans la troisième approche, dans laquelle les lignes externes sont aussi déformées. La quatrième approche pour une théorie quantique des champs non commutatifs utilise la base des états cohérents de l'oscillateur harmonique sur un espace-temps non-commutatif [61]. Dans ce cas, le propagateur libre est modifié par un facteur d'amortissement exponentiel. C'est important de noter que la non commutativité conduit à des propagateurs exponentiellement amortis. La présence du facteur exponentiel conduit à une distribution parfaitement régularisée à l'inverse de la distribution de Dirac habituelle.

La quatrième approche représente la méthode la plus simple pour obtenir les solutions des équations d'Einstein de la relativité générale dans le contexte non commutatif. Heureusement, ce problème non trivial peut être contourné en introduisant la non commutativité seulement à travers le terme qui source la matière, et en laissant le tenseur d'Einstein inchangé, c'est à dire que la métrique de l'espace-temps reste inchangée. Cette

procédure peut être motivée par le fait que la non commutativité est une propriété intrinsèque de la variété et affecte la distribution de matière-énergie, en induisant des objets ponctuels, également en l'absence de courbure. D'autre part, la métrique est un dispositif géométrique définie sur la variété, tandis que la courbure mesure l'intensité de la métrique, en réponse à la présence d'une distribution de masse et d'énergie. Comme c'est le tenseur impulsion-énergie qui donne les informations sur la distribution de masse et d'énergie, nous concluons que dans la relativité générale la non commutativité peut être prise en compte en gardant la forme standard du tenseur d'Einstein dans les équations du champ et en introduisant un tenseur impulsion-énergie déformé. Cette procédure a été suivie en Relativité Générale à  $(1 + 1)$  dimensions [62] et  $(3 + 1)$  dimensions [63]. Cette classe des solutions des équations d'Einstein est appelée trous noirs inspirés de la géométrie non commutative. La solution de trou noir de Schwarzschild inspiré de la géométrie non commutative a été obtenu par Nicolini et al. [64]. La propriété importante de cette solution est que ce trou noir est régulier. A la suite de ce travail, beaucoup d'autres solutions de ce type ont été obtenues et elle sont toutes régulières [65]-[73].

Comme nous le savons, la température de Hawking du trou noir est proportionnelle à la surface de la gravité. Elle est définie en utilisant deux manières différentes. La première est de type quantique (appelée approche heuristique) et selon laquelle la température est proportionnelle à l'incertitude sur l'impulsion [74, 75]. La deuxième approche est de type géométrique et dans ce cas la température est proportionnelle à la dérivée première par rapport à  $r$  de l'élément de métrique  $g_{tt}$  [76]. La correction de l'incertitude sur l'impulsion dans le cas de GUP et de l'élément de métrique  $g_{tt}$  de trou noir inspiré de la géométrie non commutative conduit à une correction de la température de Hawking, et donc à une thermodynamique des trous noirs modifiée. Cette modification de thermodynamique des trous noirs a donné un grand espoir aux physiciens pour approcher la solution d'un grand problème de la physique des trous noirs qui est la disparition de l'information sur l'état quantique initial du trou noir derrière l'horizon après son évaporation sous forme de rayonnement thermique [77].

La thermodynamique et la stabilité du trou noir de Schwarzschild en présence de GUP au premier ordre et à tous les ordres de la longueur de Planck ont été abondamment étudiés [78]-[88]. Notamment, il a été démontré que le GUP empêche les trous noirs de s'évaporer complètement, exactement comme le principe de Heisenberg standard empêche l'atome d'hydrogène de l'effondrement total [75]. Il a été aussi obtenu que durant la phase finale du processus de rayonnement de Hawking d'un trou noir, un trou

noir rémanent (BHR) inerte apparaît avec une entropie et une capacité spécifique nulles et une température finie non nulle. Le caractère inerte du BHR et les interactions gravitationnelles le rendent un sérieux candidat pour expliquer la nature de la matière noire [89, 90]. Enfin, le GUP apporte une correction logarithmique à l'entropie et ainsi s'éloigne de la fameuse loi des aires de Bekenstein-Hawking [91]-[103].

Aussi la thermodynamique de trou noir inspiré de la géométrie non commutative a été largement étudiée. Le processus d'évaporation s'arrête lorsque le trou noir se rapproche d'un rémanent de trou noir à l'échelle de Planck avec la température zéro [104, 105]. Mehdipour a analysé l'effet tunnel des particules massives à travers l'horizon quantique du trou noir de Schwarzschild inspiré de la géométrie non commutative et a obtenu aussi le rayonnement de Hawking modifiée, les quantités thermodynamiques et le taux d'évaporation [106]. Nozari et Mehdipour ont étudié les effets de la non commutativité sur la perte d'information et ont montré que l'information reste sauvegardées dans le rémanent de trou noir à la fin du processus d'évaporation [107].

Dans l'approche de Hawking se basant sur la théorie des champs quantiques, un trou noir de masse  $M$  a un rayonnement thermique de température  $T_H = (8\pi M)^{-1}$ . Ce résultat peut être démontré en utilisant l'approche de quantification de la gravitation par les intégrales de chemin [108]-[112]. D'autre part, Gross a trouvé une transition de phase menant des radiations thermiques vers un trou noir [113]. Dans le cas où la température est supérieure à la température critique, le petit trou noir créé par la transition de phase est instable et peut se désintégrer en un espace plat chaud ou grandir sans limites vers un grand trou noir [113]-[115]. La problème d'accroissement incontrôlé du petit trou noir vers un grand trou noir a été résolu en mettant le trou noir dans une cavité isothermique [117]-[121]. En utilisant l'approche basée sur l'action euclidienne, les propriétés thermodynamiques locales d'un trou noir confiné dans une cavité isothermique de rayon finie ont été étudiée [117]-[119],[122]. Mais le problème de la transition de la phase trou noir vers les radiations thermiques reste toujours posé dans cette approche.

Nous avons signalé plus haut que le résultat final du processus d'évaporation d'un trou noir dans le cadre du GUP est un BHR de température finie. De ce résultat, on peut prédire que la transition vers un espace plat et chaud ne sera pas possible. Kim et al. ont confirmé cette prédiction en étudiant la thermodynamique, les transitions de phase et la stabilité des trous noirs confinés dans une cavité isothermique en présence de GUP au premier ordre de la longueur de Planck [123]. Mais la question qui se pose : qu'est ce qui se passe dans le cas où on considère les corrections apportées par le GUP à tous les

ordres de la longueur de Planck, et aussi dans le cadre de la géométrie non commutative. La réponse à cette question est le sujet central de cette thèse de doctorat.

Après avoir donné un rappel sur la relativité générale et sur les lois régissant la thermodynamique des trous noirs dans le chapitre 2, nous allons traiter dans une première partie du troisième chapitre de la mécanique quantique en présence d'un GUP à tous les ordres dans la longueur de Planck, et dans une deuxième partie de l'approche par les états cohérents de la géométrie non commutative.

Dans le quatrième chapitre nous allons étudier la thermodynamique du trou noir de Schwarzschild en présence du GUP à tous les ordres dans la longueur de Planck. La stabilité du trou noir est approchée à travers le calcul de l'énergie libre et de la capacité spécifique. On terminera ce chapitre par l'étude du processus d'évaporation du trou noir de Schwarzschild en présence du GUP à tous les ordres dans la longueur de Planck.

Dans le chapitre 5 nous étudierons les transitions de phase du trou noir de Schwarzschild confiné dans une cavité en présence de GUP à tous les ordres dans la longueur de Planck. Pour détecter l'existence de transitions de phases possibles et leurs nature, nous calculerons l'énergie libre on-shell et nous l'analyserons en fonction de la température locale. Aussi l'étude de l'énergie libre off-shell, nous permettra de connaître l'existence ou pas des transitions de phases. La classification des possibles transitions de phases se fera en étudiant les expressions de l'entropie et de la capacité spécifique en fonction de la température locale.

Dans le sixième chapitre, nous allons chercher la solution du trou noir de Schwarzschild inspiré de la géométrie non commutative. En effet nous allons chercher les solutions des équations d'Einstein en présence du tenseur impulsion-énergie sourcé par une distribution gaussienne de matière. Enfin nous étudierons la régularité de la solution obtenue en calculant les scalaires de courbure.

Dans le septième chapitre nous étudierons la thermodynamique de trou noir de Schwarzschild inspiré de la géométrie non commutative et placé dans une cavité isothermique finie. Dans ce cas, le calcul de la température se fera en utilisant la méthode géométrique basée sur la surface de la gravité. Nous étudierons l'existence de transitions de phase et leurs nature

Nous finirons cette thèse par une conclusion générale, où nous discuterons des résultats obtenus et des perspectives d'études futures.

# Chapitre 2

## Introduction à la Relativité Générale

### 2.1 Principes de la Relativité Générale

Cette section a pour objectif de dresser les principes qui ont mené à la construction de la Relativité Générale formulée par Albert Einstein en 1915. Commençons par rappeler que la deuxième loi de Newton s'applique dans un référentiel galiléen ou inertiel. Cependant l'introduction des forces inertielles dans cette loi permet de traiter le cas des référentiels non galiléens. Une question fondamentale se pose alors : comment distinguer un référentiel galiléen ? Afin de résoudre cette difficulté, Isaac Newton introduisit l'existence d'un espace absolu comme référentiel galiléen, qui ne serait pas influencé par la matière présente dans l'univers. A l'inverse, Ernest Mach rejette l'idée que la notion de mouvement soit indépendante du contenu matériel de l'univers. Selon lui, seul le mouvement relatif par rapport à la distribution des masses présentes dans l'univers a un sens. A. Einstein fut un fervent partisan de cette idée et l'érigea comme un principe afin de construire sa théorie de la gravitation.

#### 2.1.1 Principe de Mach

*;;La distribution de matière dans l'univers détermine le mouvement des particules;;*

Ce principe cherche à dépasser le concept habituel de l'espace-temps absolu newtonien. En effet, un mouvement est dit inertiel lorsqu'il est uniformément accéléré comparé à un référentiel absolu, postulé a priori en dehors de toute distribution de matière. Suivant les idées de Mach, Einstein refusait par principe un tel postulat, et tenta de construire une théorie où géométrie et matière seraient intimement liées : la matière déterminerait

la géométrie, et vice-versa. Ce principe est clairement incarné par la forme des équations de mouvement qui seront plus tard découvertes par Einstein (voir (2.4.35) dans le texte).

### 2.1.2 Principe d'équivalence

Le principe d'équivalence postule l'égalité entre la masse inertielle  $m_i$ , qui intervient dans le principe fondamental de la dynamique de Newton  $m_i \vec{a} = \vec{F}_{ext}$ , et la masse grave passive  $m_p$ , qui intervient dans l'expression de la force gravitationnelle ressentie par une particule ponctuelle massive dans un potentiel gravitationnel  $\vec{F} = m_p \vec{\nabla} \Phi$ , et enfin la masse grave active  $m_a$ , qui intervient dans le potentiel gravitationnel créée par une masse ponctuelle  $\Phi = \frac{GNm_a}{r}$ . Cette égalité, fortuite et non-nécessaire dans la théorie newtonienne, devient essentielle à la théorie einsteinienne, sans laquelle ni référentiels localement inertiels ni la description cohérente de l'interaction géométrie-matière ne peuvent exister.

### 2.1.3 Le principe de la covariance

*;;Les équations de la physique doivent prendre une forme tensorielle;;*

Le principe de la covariance générale postule que les lois de la physique sont invariantes sous un changement de coordonnées. Tout observateur doit pouvoir localement observer les mêmes lois de la physique.

## 2.2 Variétés riemanniennes

Pour passer de la relativité restreinte à la relativité générale, il suffit de remplacer la géométrie Minkowskienne par celle de Riemann. Dans une variété riemannienne nous définissons un tenseur métrique  $g_{\mu\nu}$  qui détermine comment trouver les longueurs et les angles dans un espace-temps donné. La longueur d'un intervalle de l'espace-temps est définie par :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.2.1)$$

et elle doit être invariante. En fonction de cette métrique, le produit de deux vecteurs  $U$  et  $V$  est également défini par :

$$U.V = g_{\mu\nu} U^\mu V^\nu. \quad (2.2.2)$$

Maintenant nous prenons la dérivée d'un vecteur  $V$  et nous la transformons en des coordonnées différentes, nous obtenons

$$V^{\mu'}_{,\nu'} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} V^{\mu}_{,\nu} + \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} V^\mu \frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \quad (2.2.3)$$

La présence du deuxième terme indique que le vecteur  $V$  ne se transforme pas comme un tenseur. Cela veut dire que la dérivée d'un vecteur ordinaire n'est pas invariante par un changement de coordonnées. Pour cela, on introduit la dérivée covariante

$$\nabla_\nu V^\mu = V^{\mu}_{;\nu} = V^{\mu}_{,\nu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\nu} V^\alpha \quad (2.2.4)$$

où  $\nabla_\nu V^\mu \equiv V^{\mu}_{;\nu}$  et  $\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu}$  représentent respectivement la dérivée covariante du vecteur  $V^\mu$  et les symboles de Christoffel définis par :

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (\partial_\gamma g_{\sigma\beta} + \partial_\beta g_{\sigma\gamma} + \partial_\sigma g_{\beta\gamma}). \quad (2.2.5)$$

La dérivée covariante est, contrairement à la dérivée ordinaire, invariante sous les transformations de coordonnées.

Un espace-temps, en général, est courbé et sa courbure est quantifiée par le tenseur de courbure de Riemann. Ce tenseur qui est défini par

$$R^{\rho}_{\mu\sigma\nu} = \partial_\sigma \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} - \partial_\nu \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho} + \Gamma^{\rho}_{\sigma\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\sigma\mu} \quad (2.2.6)$$

qui est une quantité qui détermine la déviation par rapport à la métrique de Minkowski plate. Les contractions du tenseur de Riemann sont souvent utilisés dans la relativité générale. L'un d'eux est le tenseur de Ricci symétrique donnée par

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu\rho\nu} = \partial_\rho \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} - \partial_\nu \Gamma^{\mu}_{\rho\rho} + \Gamma^{\rho}_{\rho\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\rho\mu}. \quad (2.2.7)$$

En contractant ce tenseur, nous obtenons le scalaire Ricci

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (2.2.8)$$

qui fait partie des scalaires de courbures,  $R$ ,  $R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$ ,  $R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta}$  utilisés pour appréhender les singularités de l'espace temps.

## 2.3 Équations d'Einstein

Les équations d'Einstein sont celles qui permettent de déterminer la métrique,  $g_{\mu\nu}$ , dans le vide ou en présence de matière. Pour obtenir ces équations, la théorie de Newton a servi de guide heuristique. On a d'abord l'équation de Poisson

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho. \quad (2.3.1)$$

En relativité générale,  $\Phi \rightarrow G_{\mu\nu}$  qui est le tenseur d'Einstein et  $\rho$  est proportionnelle à la densité de masse et la masse inertielle est proportionnelle à l'énergie, ainsi l'énergie, les impulsions et les tensions sont réunies en un seul tenseur nommé le tenseur énergie-impulsion  $T_{\alpha\beta}$ .

L'équation de Poisson fait intervenir les dérivées d'ordre deux en  $\Phi$ . Il faut donc chercher une équation qui fasse intervenir les dérivées d'ordre 2 en  $g_{\mu\nu}$ . Il se trouve que le tenseur de courbure de Riemann est de ce type.

Si d'autre part on cherche dans l'équation de Newton l'évolution de la déviation infinitésimale  $\delta x$  de la trajectoire d'une particule soumise à un potentiel gravifique  $\Phi$  on aboutit à l'équation

$$\delta\ddot{x}^i = - \left( \partial_{ij}^2 \Phi \right) \delta x^j. \quad (2.3.2)$$

On a aussi l'équation qui régit la séparation  $\delta x$  entre deux géodésiques voisines

$$\nabla_{\dot{x}}^2 \delta x^\alpha = -R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma \delta x^\delta. \quad (2.3.3)$$

L'analogie entre les deux équations est parlante. Ceci suggère que  $\Delta\Phi$  devrait correspondre à un tenseur de rang 2 symétrique et proportionnel à la courbure de Riemann, puisque nous faisons correspondre à  $\rho$  le tenseur d'énergie-impulsion symétrique  $T_{\alpha\beta}$ .

Il n'y a dès lors que le choix suivant pour l'équation recherchée :

$$R_{\alpha\beta} + bRg_{\alpha\beta} + \lambda g_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta}, \quad (2.3.4)$$

où  $R_{\alpha\beta}$  est le tenseur de Ricci,  $R$  la courbure scalaire, et  $b, \lambda, \kappa$  sont des constantes. Si on exige que l'équation satisfasse à la condition de conservation du tenseur impulsion-énergie :

$$\nabla^\alpha T_{\alpha\beta} = 0, \quad (2.3.5)$$

et en utilisant l'identité de Bianchi :

$$\nabla_{\alpha}R_{\beta\gamma\delta\mu} + \nabla_{\mu}R_{\beta\gamma\alpha\delta} + \nabla_{\delta}R_{\beta\gamma\mu\alpha} = 0, \quad (2.3.6)$$

on obtient  $b = -\frac{1}{2}$ . On obtient donc, si on introduit le tenseur symétrique d'Einstein  $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}$ ,

$$G_{\alpha\beta} + \lambda g_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta}. \quad (2.3.7)$$

Pour la grande histoire de la physique, le choix  $\lambda = 0$  fut le premier choix d'Einstein. Le second choix  $\lambda \neq 0$  fût aussi rejeté par la suite à cause de la loi de Hubble. La constante  $\lambda$  s'appelle la constante cosmologique. Aujourd'hui, certaines théories cosmologiques en tiennent compte. Pour nous, l'équation d'Einstein sera la suivante :

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = \kappa T_{\alpha\beta} \quad (2.3.8)$$

où  $\kappa$  est une constante universelle. On peut encore écrire l'équation sous la forme suivante :

$$R_{\alpha\beta} = \kappa \left( T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Tg_{\alpha\beta} \right). \quad (2.3.9)$$

Initialement, Einstein avait écrit cette équation sans le terme en  $T$ , n'obtenant pas ainsi la loi de conservation  $\nabla^{\alpha}T_{\alpha\beta} = 0$ .

La contraction de l'équation (2.3.9) nous donne l'expression du scalaire de Ricci en fonction du tenseur de matière :

$$R = -\kappa T. \quad (2.3.10)$$

En l'absence de la matière ( $T_{\alpha\beta} = 0$ ), l'équation (2.3.8) devient :

$$R_{\alpha\beta} = 0. \quad (2.3.11)$$

### 2.3.1 Formalisme Lagrangien en relativité générale

En présence de la matière l'action en relativité générale est donnée par :

$$S = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R + S_m \quad (2.3.12)$$

où  $G$  est la constante de Newton et  $S_m$  représente l'action de la matière. La définition de l'action de matière en fonction de la densité lagrangienne de matière, nous permet

d'écrire (2.3.12) comme suit :

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( -\frac{1}{16\pi G} R + \mathcal{L}_m \right). \quad (2.3.13)$$

En utilisant le principe variationnel qui stipule que  $\delta S = 0$ , on obtient :

$$\delta S = \int d^4x \left[ -\frac{1}{16\pi G} \delta(\sqrt{-g} R) + \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m) \right] = 0. \quad (2.3.14)$$

En faisant la variation par rapport à  $g^{\mu\nu}$  on arrive à :

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{16\pi G} \left( \frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{R}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} = 0. \quad (2.3.15)$$

Nous allons varier les trois termes séparément, en commençant par le premier. En variant (2.2.6), on obtient

$$\delta R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \delta \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \cdot \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \cdot \delta \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \delta \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \cdot \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \cdot \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \quad (2.3.16)$$

Le symbole de Christoffel est une connexion, est aussi sa variation. On ne peut pas simplement prendre une dérivée covariante d'une connexion car il ne se transforme pas comme un tenseur. Mais la différence de deux connexions se transforme comme un tenseur. Cela signifie que nous pouvons prendre la dérivée covariante de la variation d'une connexion. En effet :

$$\nabla_\lambda \delta \Gamma_{\nu\mu}^\rho = \partial_\lambda \delta \Gamma_{\nu\mu}^\rho + \Gamma_{\sigma\lambda}^\rho \delta \Gamma_{\nu\mu}^\sigma - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \delta \Gamma_{\sigma\mu}^\rho - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \delta \Gamma_{\nu\sigma}^\rho. \quad (2.3.17)$$

En introduisant (2.3.17) dans (2.3.16), on obtient :

$$\delta R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \nabla_\mu \delta \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\rho. \quad (2.3.18)$$

En contractant sur  $\rho$  et  $\mu$ , on obtient la variation du tenseur de Ricci

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\rho \delta \Gamma_{\nu\mu}^\rho - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\rho\mu}^\rho. \quad (2.3.19)$$

En contractant le tenseur de Ricci on obtient la variation du scalaire de Ricci

$$\delta R = g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (2.3.20)$$

à la quelle bien sur il faut ajouter la condition de compatibilité métrique

$$\nabla_{\rho} g^{\mu\nu} = 0. \quad (2.3.21)$$

En introduisant (2.3.19) dans (2.3.20) on obtient :

$$\delta R = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} (\nabla_{\rho} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\rho} - \nabla_{\nu} \delta \Gamma_{\rho\mu}^{\rho}). \quad (2.3.22)$$

En remplaçant ce résultat dans le premier terme de (2.3.15) on obtient :

$$-\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \delta (\sqrt{-g} R) = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ R_{\mu\nu} + \frac{1}{\delta g^{\mu\nu}} \nabla_{\rho} (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\rho} - g^{\mu\rho} \delta \Gamma_{\rho\mu}^{\rho}) \right] \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.3.23)$$

L'utilisation du théorème de Stokes, nous permet d'éliminer la divergence dans le deuxième terme. Cela se fait en intégrant sur l'hypersurface à l'infini de l'espace-temps. Comme  $\delta \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}$  est égal à zéro sur l'hypersurface à l'infini, le dernier terme ne contribue pas à l'intégrale. Ainsi on obtient :

$$-\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \delta (\sqrt{-g} R) = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.3.24)$$

Pour calculer le deuxième terme, il faut trouver d'abord  $\delta \sqrt{-g}$ . On sait que pour une matrice arbitraire  $A$  on a :

$$\det \exp (A) = \exp (\text{Tr} A), \quad (2.3.25)$$

donc la variation de  $g$  est égale à :

$$\begin{aligned} \delta g &= \delta (\det g_{\mu\nu}) = \delta \left( e^{\text{Tr}(\ln g_{\mu\nu})} \right) \\ &= e^{\text{Tr}(\ln g_{\mu\nu})} \delta (\text{Tr} (\ln g_{\mu\nu})). \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

En utilisant les formules suivantes :

$$\delta (\text{Tr} (\ln A)) = \text{Tr} (\delta A) . A^{-1}, \quad g_{\mu\nu}^{-1} = g^{\mu\nu}, \quad (2.3.27)$$

on obtient :

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad (2.3.28)$$

Maintenant on peut calculer  $\delta\sqrt{-g}$  :

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{\delta g}{2\sqrt{-g}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g. \quad (2.3.29)$$

En remplaçant (2.3.29) dans le deuxième terme de (2.3.15) on obtient :

$$-\frac{1}{16\pi G} \int d^4x R \delta(\sqrt{-g}) = \frac{1}{32\pi G} \int d^4x R \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.3.30)$$

On termine avec le calcul du troisième terme. On définit d'abord le tenseur impulsion-énergie de la matière par l'expression suivante :

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.3.31)$$

En remplaçant (2.3.24), (2.3.30) et (2.3.31) dans (2.3.15) on obtient l'équation

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{16\pi G} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) - \frac{1}{2}T_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} = 0. \quad (2.3.32)$$

Étant donné que les variations  $\delta g^{\mu\nu}$  sont arbitraires on obtient les équations de mouvement d'Einstein :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (2.3.33)$$

Grâce à (2.3.21), on peut ajouter le terme  $\Lambda g_{\mu\nu}$  et on obtient :

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.3.34)$$

avec  $\Lambda$  la constante cosmologique et  $G_{\mu\nu}$  le tenseur d'Einstein :

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (2.3.35)$$

## 2.3.2 Tenseur énergie-moment

### 2.3.2.1 Espace plat

Nous pouvons définir une densité d'énergie  $\mathcal{H}$  par la division d'une unité d'énergie par une unité de volume spatial et le vecteur du flux d'énergie  $s_i$  par la division d'une unité d'énergie par unité de surface et par unité de temps. Dans ce cas, la conservation de

l'énergie est donnée par :

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \partial_i s_i = 0. \quad (2.3.36)$$

On peut également définir une densité d'impulsion  $\pi_i$  de telle sorte que l'impulsion est donnée par :

$$p_i = \int_D \pi_i d^3x \quad (2.3.37)$$

avec  $D$  est un domaine indépendant du temps. Maintenant, nous postulons que les seules forces agissantes à travers les frontières  $\partial D$  du domaine  $D$  sont données par :

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = \int_D \frac{\partial \pi_i}{\partial t} d^3x = \int_{\partial D} T_{ij} d\sigma_j, \quad (2.3.38)$$

où la force  $F_i$  exercée par les matériaux à l'intérieur du domaine sur un élément de surface  $d\sigma_j$  est donnée par

$$F_i = T_{ij} d\sigma_j. \quad (2.3.39)$$

Si cette équation est correcte pour tous les domaines on doit avoir :

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial t} + \partial_j T_{ij} = 0. \quad (2.3.40)$$

avec  $T_{ij}$  un tenseur symétrique.

Les deux équations fondamentales (2.3.36) et (2.3.40) peuvent être combinées en une seule équation

$$\partial_a T^{ab} = 0. \quad (2.3.41)$$

ou nous définissons :

$$T^{00} = \mathcal{H}, \quad T = \frac{s_i}{c}, \quad T^{0i} = c\pi_i, \quad T^{ij} = T_{ij}. \quad (2.3.42)$$

Ou bien sous forme matricielle on a :

$$T^{ab} = \begin{pmatrix} \mathcal{H} & \frac{s_i}{c} \\ c\pi_i & T_{ij} \end{pmatrix}. \quad (2.3.43)$$

Pour rendre la condition de la conservation du tenseur impulsion-énergie invariante sous les transformations de Lorentz, on doit prolonger la propriété de symétrie  $T_{ij} = T_{ij}$  au relativiste

$$T^{ab} = T^{ba}. \quad (2.3.44)$$

Ce qui implique une relation entre le flux d'énergie  $s_i$  et la densité d'impulsion :

$$\pi_i = \frac{s_i}{c^2}. \quad (2.3.45)$$

### 2.3.2.2 Généralisation à l'espace-temps courbé

Nous faisons ce qui est souvent désigné comme l'hypothèse d'un couplage minimal, ce qui se traduit dans la relativité spéciale par le remplacement dans une équation donnée de la virgule par le point-virgule. De cette façon, l'équation sera certainement covariante. Ainsi, nous postulons que :

$$T^{ab}{}_{;b} = \partial_b T^{ab} + \Gamma_{cb}^a T^{ac} + \Gamma_{cd}^a T^{cd} = 0. \quad (2.3.46)$$

En utilisant :

$$\Gamma_{ab}^b = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_a (\sqrt{-g}), \quad (2.3.47)$$

on obtient :

$$T^{ab}{}_{;b} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_b (\sqrt{-g} T^{ab}) + \Gamma_{cd}^a T^{cd} = 0. \quad (2.3.48)$$

### 2.3.2.3 Fluide parfait

Commençons par le cas du fluide parfait. En notant par  $u^\mu$  la 4-vitesse d'une particule du fluide, le tenseur énergie-impulsion est donné par :

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + P (g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu) \quad (2.3.49)$$

où  $\rho$  désigne la masse volumique propre du fluide et  $P$  sa pression. Puis, nous obtenons l'équation du mouvement avec  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ , qui fournit la généralisation de l'équation de continuité et de celle de Navier-Stokes dans la théorie non relativiste.

### 2.3.2.4 Conditions d'énergie pour un fluide parfait

En relativité générale les conditions sur l'énergie sont un ensemble de conditions susceptibles de contribuer à la description de la matière qui peut exister dans l'univers, ou plus généralement dans tout espace-temps. En pratique, ces conditions sont exprimées par des inégalités impliquant l'objet mathématique qui décrit le comportement de la matière, le tenseur impulsion-énergie.

Pour un fluide parfait, les conditions d'énergie sont données par :

1. La condition d'énergie faible (WEC : weak energy condition) stipule que  $\rho \geq 0$ ,  
 $\rho + p \geq 0$ .
2. La condition d'énergie nulle (NEC : Null energy condition) stipule que  $\rho + p \geq 0$ .
3. La condition d'énergie forte (SEC : strong energy condition) stipule que  $\rho + p \geq 0$ ,  
 $\rho + 3p \geq 0$ .
4. La condition d'énergie dominante (DEC : dominant energy condition) stipule que  
 $\rho \geq |p|$ .

## 2.4 Trou noir de Schwarzschild

### 2.4.1 Symétrie sphérique et orthogonalité

La métrique de Schwarzschild est la solution à symétrie sphérique des équations d'Einstein dans le vide (2.3.11), ou bien à l'extérieur d'une distribution d'énergie à symétrie sphérique centrée sur l'origine. Un élément de longueur quelconque est donné par :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.4.1)$$

La symétrie sphérique nous permet de choisir parmi les 4 coordonnées les deux coordonnées angulaires classiques  $\theta$  et  $\varphi$  et d'écrire l'élément de longueur sous la forme :

$$ds^2 = g_{aa} da^2 + 2g_{ab} da db + g_{bb} db^2 + \chi^2(a, b) d\Omega^2 \quad (2.4.2)$$

où  $\chi$  est une fonction des deux coordonnées restantes  $a$  et  $b$  et  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$  est l'élément d'angle solide. Il est alors formellement possible d'inverser  $\chi(a, b)$  pour obtenir  $b(a, \chi)$  et sélectionner comme coordonnées  $(a, \chi, \theta, \varphi)$ . L'élément de longueur devient alors :

$$ds^2 = g_{aa} da^2 + 2g_{a\chi} da d\chi + g_{\chi\chi} d\chi^2 + \chi^2 d\Omega^2. \quad (2.4.3)$$

Il serait alors confortable de trouver un système de coordonnées dans lequel la métrique sera diagonale (c-à-d la matrice représentant les composantes de  $g$  est diagonale). On choisit donc un système de coordonnées  $(t, r, \theta, \varphi)$  dans lequel l'élément de longueur s'écrit :

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 + g_{rr} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.4.4)$$

Remarquons que :

$$dt = \frac{\partial t}{\partial a} da + \frac{\partial t}{\partial \chi} d\chi. \quad (2.4.5)$$

En injectant (2.4.5) dans (2.4.4) et en identifiant avec (2.4.3), on obtient le système de quatre équations à quatre inconnues  $g_{tt}$ ,  $g_{rr}$ ,  $t(ar, \chi)$  et  $r(a, \chi)$ .

Dans les coordonnées  $(t, r, \theta, \varphi)$  de Schwarzschild, les composantes du tenseur métrique s'écrivent

$$g_{aa} = g_{tt} \left( \frac{\partial t}{\partial a} \right)^2, \quad g_{a\chi} = g_{tt} \frac{\partial t}{\partial a} \frac{\partial t}{\partial \chi}, \quad g_{\chi\chi} = g_{rr} + g_{tt} \left( \frac{\partial t}{\partial r} \right)^2, \quad \chi = r. \quad (2.4.6)$$

Ce système est solvable en principe et nous avons la possibilité d'écrire l'élément de longueur sous la forme diagonale (2.4.4). Enfin, la métrique étant à signature lorentzienne, il nous reste à choisir lequel des coefficients  $g_{tt}$  et  $g_{rr}$  sera négatif. Par analogie avec le cas de la métrique de Minkowski exprimée en symétrie sphérique, nous choisissons  $g_{tt} < 0$  et ré-écrivons (2.4.4) en introduisant les fonctions  $\alpha(r, t)$  et  $\beta(r, t)$  :

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r,t)} dt^2 + e^{2\beta(r,t)} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.4.7)$$

On peut donc ainsi toute métrique à symétrie sphérique sous cette forme. Le choix des fonctions  $\alpha(r, t)$  et  $\beta(r, t)$ , se fait pour qu'on obtient à la limite newtonienne le résultat suivant :

$$g_{tt} \simeq -(1 + 2\alpha) \quad (2.4.8)$$

avec  $\alpha$  et  $\beta$  des généralisations du potentiel gravitationnel newtonien.

## 2.4.2 Solution des équations d'Einstein dans le vide

Voyons maintenant comment on peut expliciter ces fonctions en résolvant les équations d'Einstein dans le vide (2.3.11). Il nous faut donc calculer les coefficients de la connexion métrique (2.2.5) suivant l'expression (5.36) afin d'en déduire les composantes du tenseur

de Ricci. On obtient :

$$\Gamma_{tt}^t = \alpha_{,t} \quad \Gamma_{tr}^t = \alpha_{,r} \quad \Gamma_{rr}^t = e^{2(\alpha-\beta)} \beta_{,t} \quad (2.4.9)$$

$$\Gamma_{tt}^r = e^{2(\alpha-\beta)} \alpha_{,r}, \quad \Gamma_{tr}^r = \beta_{,t}, \quad \Gamma_{rr}^r = \beta_{,r} \quad (2.4.10)$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -re^{-2\beta}, \quad \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \frac{1}{r} \quad (2.4.11)$$

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^r = -re^{-2\beta} \sin^2 \theta, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \cot \theta. \quad (2.4.12)$$

Les coefficients non indiqués et non reliés par la symétrie des indices sont nuls. On calcule alors les composantes non-nulles du tenseur de Riemann (2.2.6) :

$$R_{rtr}^t = e^{2(\alpha-\beta)} \left( \beta_{,tt} + \beta_{,t}^2 - \beta_{,t}\alpha_{,t} \right) - \left( \alpha_{,rr} + \alpha_{,r}^2 - \beta_{,r}\alpha_{,r} \right) \quad (2.4.13)$$

$$R_{\theta t\theta}^t = -re^{-2\beta} \alpha_{,r} \quad (2.4.14)$$

$$R_{\varphi t\varphi}^t = -re^{-2\beta} \alpha_{,r} \sin^2 \theta \quad (2.4.15)$$

$$R_{\theta r\theta}^r = -re^{-2\alpha} \beta_{,t} \quad (2.4.16)$$

$$R_{\varphi r\varphi}^r = -re^{-2\alpha} \beta_{,t} \sin^2 \theta \quad (2.4.17)$$

$$R_{\theta r\theta}^r = re^{-2\beta} \beta_{,r} \quad (2.4.18)$$

$$R_{\varphi r\varphi}^r = re^{-2\beta} \beta_{,r} \sin^2 \theta \quad (2.4.19)$$

$$R_{\varphi\theta\varphi}^r = \left( 1 - e^{-2\beta} \right) \sin^2 \theta. \quad (2.4.20)$$

La contraction du tenseur de Riemann mène au tenseur de Ricci :

$$R_{tt} = \left( \beta_{,tt} + \beta_{,t}^2 - \beta_{,t}\alpha_{,t} \right) - e^{2(\alpha-\beta)} \left( \alpha_{,rr} + \alpha_{,r}^2 \alpha_{,r} \left( \frac{2}{r} - \beta_{,r} \right) \right) \quad (2.4.21)$$

$$R_{rr} = e^{2(\alpha-\beta)} \left( \beta_{,tt} + \beta_{,t}^2 - \beta_{,t}\alpha_{,t} \right) - \left( \alpha_{,rr} + \alpha_{,r}^2 \alpha_{,r} \left( \frac{2}{r} + \beta_{,r} \right) \right) \quad (2.4.22)$$

$$R_{tr} = \frac{2\beta_{,t}}{r} \quad (2.4.23)$$

$$R_{\theta\theta} = 1 - e^{-2\beta} (1 - r(\beta_{,r} - \alpha_{,r})) \quad (2.4.24)$$

$$R_{\theta\theta} = R_{\theta\theta} \sin^2 \theta, \quad (2.4.25)$$

qui doivent s'annuler d'après (2.3.11). L'équation (2.4.21) indique que  $\beta$  est indépendant de  $t$  :

$$\beta_{,t} = 0 \Rightarrow \beta = \beta(r). \quad (2.4.26)$$

La dérivée temporelle de (2.4.24) et (2.4.26) mènent à

$$\alpha_{,rt} = 0 \Rightarrow \alpha = m(r) + n(t). \quad (2.4.27)$$

La seule composante de la métrique dépendant de la coordonnée temporelle est donc  $g_{tt} = -e^{2m(r)}e^{2n(t)}$ . En faisant le changement de coordonnées  $dt \rightarrow e^{-n(t)}dt$ , on peut supprimer cette dépendance. La métrique recherchée est donc stationnaire ( $g_{\mu\nu,t} = 0$ ) et on a  $\alpha = \alpha(r) = m(r)$  :

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)}dt^2 + e^{2\beta(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (2.4.28)$$

Les expressions (2.4.21) et (2.4.22) permettent d'écrire, en annulant toutes les dérivées temporelles,

$$e^{2(\alpha-\beta)}R_{tt} + R_{rr} = 0 \Rightarrow \beta_{,r} + \alpha_{,r} = 0, \quad (2.4.29)$$

qui implique que  $\beta = -\alpha + A$  avec  $A = \text{const.}$ , et nous pouvons à nouveau faire un changement de coordonnées  $dr \rightarrow e^A dr$  pour que la constante  $A$  n'intervienne pas dans la métrique. On a donc :

$$\beta = -\alpha. \quad (2.4.30)$$

Exploitions enfin la relation (2.4.24), qui devient avec les résultats précédents :

$$e^{2\alpha} (1 + 2r\alpha_{,r}) = 1 \iff \left( re^{2\alpha} \right)_{,r} = 1. \quad (2.4.31)$$

La solution générale de cette équation est donc :

$$e^{2\alpha} = 1 + \frac{B}{r}. \quad (2.4.32)$$

La constante  $B$  étant à déterminer. La métrique exprimée comme un élément de longueur devient alors :

$$ds^2 = - \left( 1 + \frac{B}{r} \right) dt^2 + \left( 1 + \frac{B}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 \left( d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \right). \quad (2.4.33)$$

L'expression de  $B$  s'identifie alors en passant à la limite newtonienne (au premier ordre en  $\frac{B}{r}$ ) :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} g_{tt} = - \left( 1 + \frac{B}{r} \right). \quad (2.4.34)$$

On a à cette limite

$$g_{tt} = (1 + 2\phi).$$

Le potentiel gravitationnel newtonien étant  $\phi = -\frac{M}{r}$ . On en déduit  $B = -2M$  avec  $M$  la masse de l'objet central mesurée par un observateur statique situé à l'infini. On obtient finalement l'expression de la métrique de Schwarzschild :

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2.4.35)$$

avec  $M = \frac{Gm}{c^2}$  qui représente la masse de trou noir.

Pour  $M = 0$ , (2.4.35) devient la métrique de l'espace-temps de Minkowski en coordonnées sphériques

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (2.4.36)$$

La même métrique s'obtient aussi à la limite  $r \rightarrow \infty$  : on traduit ceci en disant que la solution de Schwarzschild est asymptotiquement plate.

### 2.4.2.1 Singularités et Horizons

Comme nous savons, la solution de l'équation  $g_{tt} = 0$  nous donne l'expression des horizons. En utilisant (2.4.35) on obtient :

$$g_{tt} = 1 - \frac{2M}{r_h} = 0 \quad (2.4.37)$$

d'où l'expression de l'horizon de trou noir de Schwarzschild

$$r_h = 2M. \quad (2.4.38)$$

Pour  $M > 0$ , la composante  $g_{tt}$  de la métrique s'annule et la composante  $g_{rr}$  est singulière en  $r = 2M$ . On montrera plus loin que cette singularité des composantes du tenseur métrique n'est due qu'à un mauvais choix des coordonnées. La quantité scalaire nommée le scalaire de Kretshmann

$$R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} = 48\frac{M^2}{r^6} \quad (2.4.39)$$

et les autres scalaires formés avec la courbure et la métrique,  $R$  et  $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ , étant parfaitement réguliers en  $r = 2M$ . Par contre, la quantité (2.4.39) est infinie en  $r = 0$ , et cette singularité existe dans tout système de coordonnées. C'est la géométrie qui est singulière en  $r = 0$ .

### 2.4.2.2 Coordonnées de Kruskal

Le comportement singulier de la métrique en  $r = 2M$  est resté longtemps sans être expliqué de façon satisfaisante, jusqu'à en 1960 où Kruskal a résolu le problème. Il a défini de nouvelles coordonnées  $u$  et  $v$  par :

— pour  $r \geq 2M$  :

$$u = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{r}{4M}\right) \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) \quad (2.4.40)$$

$$v = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{r}{4M}\right) \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) \quad (2.4.41)$$

— pour  $r \leq 2M$  :

$$u = \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{r}{4M}\right) \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) \quad (2.4.42)$$

$$v = \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{r}{4M}\right) \cosh\left(\frac{t}{4M}\right). \quad (2.4.43)$$

La métrique de Schwarzschild écrite en fonction des coordonnées  $u$  et  $v$  devient :

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r} \exp\left(\frac{-r}{2M}\right) [dv^2 - du^2] + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (2.4.44)$$

où  $r$  est considéré comme une fonction de  $u$  et  $v$  définie par :

$$u^2 - v^2 = \left(\frac{r}{2M} - 1\right) \exp\left(\frac{r}{2M}\right) \quad (2.4.45)$$

et les coordonnées  $\theta$  et  $\varphi$  restent inchangées.

La métrique (2.4.44) présente une seule singularité en  $r = 0$ . On a alors compris que  $r = 2M$  est une surface particulière, appelée horizon des événements. Une particule massive ou un photon qui traverse cette surface vers  $r = 0$  ne peut plus en ressortir, et ne peut que se diriger vers la singularité  $r = 0$  où le champ est infini.

## 2.5 Thermodynamique des trous noirs

La découverte par Hawking du rayonnement thermique des trous noirs a été une véritable surprise pour les spécialistes de la physique des trous noirs, même si de nombreuses indications sur une relation entre la thermodynamique et la physique des trous noirs avaient émergé avant cette découverte. J. A. Wheeler semble avoir été le premier à remarquer la contradiction entre l'existence des trous noirs dans la théorie classique de la gravitation et le principe de non décroissance de l'entropie. En effet, imaginons qu'un trou noir absorbe un corps chaud possédant une certaine entropie. Alors, un observateur extérieur constate une diminution de l'entropie totale du monde accessible à ses observations. Cette disparition peut être contournée formellement si l'on attribue au trou noir l'entropie du corps absorbé. En fait cette «solution» n'est manifestement pas satisfaisante puisque toute tentative d'un observateur extérieur de mesurer la quantité d'entropie absorbée par le trou noir est vouée à l'échec : dès l'absorption, le trou noir redevient stationnaire et perd complètement toute information (et donc l'entropie) du corps disparu.

Si l'on veut éviter de renoncer à ce principe fondamental de la thermodynamique, on doit en arriver à la conclusion qu'un trou noir possède par lui même une certaine entropie et qu'un corps chaud tombant dans un trou noir ne lui transfère pas seulement sa masse, sa charge et son moment angulaire mais également sa propre entropie  $S$ , augmentant ainsi celle du trou noir d'au moins d'une telle quantité. D'un autre côté, Bekenstein remarqua que les propriétés de l'une des caractéristiques des trous noirs en l'occurrence son aire  $A$  ressemblent à celles de l'entropie puisque, d'après le théorème de l'aire de Hawking, l'aire  $A$  du trou noir ne diminue jamais dans aucun processus classique.

### 2.5.1 Les principes de la thermodynamique

Bardeen, Carter et Hawking [124] formulèrent les quatre principes de la thermodynamique des trous noirs de façon similaire aux quatre principes de la thermodynamique usuelle.

#### 2.5.1.1 Le Principe Zéro

*La surface de gravité  $d$  d'un trou noir stationnaire est constante sur toute la surface de l'horizon.*

L'analogie de cette loi est que la température d'un corps en équilibre thermique est constante. La relation entre la surface de la gravité  $\kappa$  et la température d'un trou noir  $T_h$  (température de Hawking) est donnée par :

$$T_h = \frac{\hbar\kappa}{2\pi k_B}. \quad (2.5.1)$$

Pour le cas spatial du trou noir de Schwarzschild, où  $\kappa = \frac{1}{4GM}$ , la température de Hawking devient :

$$T_h = \frac{\hbar}{8\pi G k_B M} \approx 6,8 \cdot 10^{-8} \frac{M_\odot}{M} \text{ K} \quad (2.5.2)$$

### 2.5.1.2 La première lois

Lorsqu'un système contenant un trou noir passe d'un état stationnaire à un autre, sa masse change comme suit :

$$dM = \frac{\kappa}{2\pi} dA + \text{termes de travail} \quad (2.5.3)$$

On remarque que cette loi est analogue à la première loi de la thermodynamique, c-à-d :

$$dM = TdS + \text{termes de travail} \quad (2.5.4)$$

Et l'entropie du trou noir est donc représentée par un quart de la superficie de l'aire de l'horizon  $A = 4\pi r_H^2$ , c'est-à-dire

$$S = \frac{A}{4}. \quad (2.5.5)$$

Le facteur  $\frac{1}{4}$  a été obtenu par Hawking [16] basé sur l'application de la théorie des champs quantiques sur les trous noirs qui montre qu'ils absorbent et émettent des particules comme si elles étaient des corps thermiques avec la température Hawking,  $T_h$ . Les termes de travail sont donnés selon le type de trou noir. Pour le trou noir chargé et en rotation (Kerr-Newman) on a :

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega dJ + \phi dQ \quad (2.5.6)$$

avec  $\Omega$  et  $\phi$  sont successivement la vitesse angulaire et le potentiel électrique du trou

noir et sont donnés par :

$$\Omega = \frac{\partial M}{\partial J} \quad (2.5.7)$$

$$\phi = \frac{\partial M}{\partial Q}. \quad (2.5.8)$$

### 2.5.1.3 La deuxième loi

Dans n'importe quel processus classique, l'aire du trou noir  $A$  et par conséquent son entropie  $S_{BH}$  ne diminuent pas :

$$dS_{BH} > 0. \quad (2.5.9)$$

La deuxième loi de mécanique des trous noirs peut être violé si l'effet quantique est pris en compte, c-à-d la surface de l'aire des événements peut être réduite par le rayonnement de Hawking. Le rayonnement d'un trou noir est de nature thermique, ce qui conduit à une augmentation de l'entropie dans la région environnante. L'entropie généralisée,  $S'$  a été introduite par Bekenstein pour rendre compte de ce genre de phénomène et elle est donnée par :

$$S' = S_{BH} + S_m \quad (2.5.10)$$

où  $S_{BH}$  est l'entropie de Hawking- Bekenstein du trou noir et  $S_m$  L'entropie de la matière sur la la surface du trou noir. On en déduit la deuxième loi généralisé de la thermodynamique des trous noirs nommée la GSL (*generalized second law of black hole thermodynamics*) :

$$dS' > 0. \quad (2.5.11)$$

La deuxième loi ordinaire semble violée lorsque la matière est absorbée par le trou noir, parce que selon la relativité générale, la matière va être absorbée par la singularité de l'espace. Dans ce cas, l'entropie totale de l'univers diminue car il n'y a pas de compensation de l'entropie perdue. La vertu de la GSL est qu'elle maintient la loi de l'entropie valable : l'entropie totale de l'univers augmente lorsque de la matière tombe dans le trou noir.

En 1973 Hawking et Bekenstein ont trouvé que l'entropie est donnée en fonction de son aire par :

$$S = \frac{k_B A}{4G\hbar} \quad (2.5.12)$$

pour le trou noir de Schwarzschild on a :

$$S = \frac{\pi k_B r_H}{G \hbar} \quad (2.5.13)$$

Numériquement, l'entropie du soleil est  $S_{\odot} = 1057k_B$ , alors un trou noir de masse solaire a une entropie d'environ  $1077 k_B$ .

#### 2.5.1.4 La troisième loi

la troisième loi stipule qu'il n'existe aucun processus classique qui peut réduire la surface de la gravité à zéro. En effet, le taux d'absorption d'une petite quantité de masse, de moment angulaire ou de charge électrique, diminue exponentiellement quand la surface de la gravité diminue, donc il faudrait un temps infini à pour que ce processus se termine.

### 2.5.2 Thermodynamique du trou noir de Schwarzschild

La température d'un trou noir est définie en fonction de la surface de la gravité par la relation  $\left(\kappa = \frac{c^2}{2} \partial_r g_{00}|_{r=r_H}\right)$  :

$$T_h = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{1}{4\pi} \left. \frac{\partial g_{00}}{\partial r} \right|_{r=r_H}. \quad (2.5.14)$$

En substituant (2.4.35) et (2.4.38) dans (2.5.14), on obtient la température de Hawking :

$$T_h = \frac{1}{8\pi M L_{Pl}^2}. \quad (2.5.15)$$

On remarque que la température de Hawking est inversement proportionnelle à la masse du trou noir.

L'entropie du trou noir s'obtient en utilisant la première loi de la thermodynamique des trous noirs :

$$S = \int T dM. \quad (2.5.16)$$

En substituant (2.5.16) dans (2.5.15) et intégrant sur  $M$ , on obtient :

$$S = 4\pi L_{Pl}^2 M^2. \quad (2.5.17)$$

Pour déterminer la stabilité du trou noir, on calcule la chaleur spécifique définie par :

$$C = \frac{dM}{dT}. \quad (2.5.18)$$

En utilisant l'expression de la température (4.1.2), on obtient :

$$C = -8\pi M^2 L_{pl}^2. \quad (2.5.19)$$

# Chapitre 3

## Mécanique quantique avec GUP et approche des états cohérents dans la géométrie non commutative

Comme on l'a déjà souligné dans l'introduction, il y a plusieurs approches en physique pour introduire le concept de distance minimale. Dans cette thèse nous allons utiliser deux des approches les plus répandues pour étudier la physique des trous noirs. La première approche est la mécanique quantique basée sur un GUP à tous les ordres [85, 86] et la deuxième approche est l'approche des états cohérents dans la géométrie non commutative [61, 125, 126].

### 3.1 Mécanique quantique avec un GUP

Dans les deux versions de la théorie des champs, théorie des champs non commutatifs dans la représentation des états cohérents [61, 125, 126] et la théorie des champs sur un super espace anti non commutative [138],[87], le propagateur de Feynman est modifié par un facteur de la forme  $\exp(-\beta p^2)$ , où le paramètre  $\beta$  dépend de la longueur minimale. Une des conséquences du facteur exponentiel est la régularisation des divergences UV du propagateur de Feynman. En mécanique quantique, la finitude UV du propagateur de Feynman peut également être obtenue en modifiant la relation de dispersion  $p = f(k)$  entre l'impulsion et le vecteur d'onde de la particule. Cette relation doit être inversible et vérifie les conditions suivantes :

1. Pour les basses énergies ( $p \ll M_f$ ), on obtient la relation linéaire habituelle :  $p \approx k$ .

2. La fonction  $f$  doit être impaire (en raison de la parité) et  $k \parallel p$ .

3. Pour les hautes énergies, cette fonction s'approche asymptotiquement d'une valeur proportionnelle à  $(M_{pl})$ .

Dans ce cas, la mesure habituelle  $\int d^D p$  doit être remplacée par  $\int d^D p \prod_i \frac{\partial k_i}{\partial p_i}$ . Posons  $\beta = \frac{\alpha L_{pl}^2}{\hbar^2}$  avec  $L_{pl}$  est la longueur de Planck, on obtient le Jacobien :

$$\left| \frac{\partial k_i}{\partial p_i} \right| = \frac{1}{\hbar} \exp \left( -\frac{\alpha L_{pl}^2}{\hbar^2} p^2 \right) \quad (3.1.1)$$

avec  $p^2 = \sum_{i=1}^D p_i^2$  et  $\alpha$  est une constante sans dimensions, et où  $D$  représente la dimension de l'espace.

Supposant que le commutateur entre  $\hat{x}$  et  $\hat{k}$  garde la forme standard donnée par  $[\hat{x}, \hat{k}] = i\hbar$  et utilisant la relation générale de commutation entre les opérateurs  $\hat{x}$  et une fonction de l'opérateur  $\hat{k}$  donnée par :

$$[\hat{x}_i, \hat{A}_j(\hat{k})] = i \frac{\partial \hat{A}_i}{\partial \hat{k}_j}, \quad (3.1.2)$$

on obtient la relation de commutation définissant l'algèbre de Heisenberg modifiée donnée par :

$$\begin{aligned} [\hat{x}_i, \hat{p}_j] &= i \frac{\partial \hat{p}_i}{\partial \hat{k}_j} \\ &= i\hbar \delta_{ij} e^{-\frac{\alpha L_{pl}^2}{\hbar^2} p^2}. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Comme en mécanique quantique standard, la relation d'incertitude est reliée directement à la relation de commutation à travers la formule suivante :

$$(\delta A) (\delta B) \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|. \quad (3.1.4)$$

Utilisant cette relation et l'expression (3.1.3), on obtient :

$$\begin{aligned} (\delta x_i) (\delta p_j) &\geq \frac{i}{2} \left| \left\langle \frac{\partial \hat{p}_j}{\partial \hat{k}_i} \right\rangle \right| \\ &\geq \frac{\hbar}{2} \delta_{ij} \left\langle \exp \left( -\frac{\alpha L_{pl}^2}{\hbar^2} p^2 \right) \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Développant la fonction exponentielle en série, on obtient :

$$\begin{aligned}
(\delta x)_i (\delta p)_j &\geq \frac{\hbar}{2} \delta_{ij} \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left( \frac{\alpha L_{Pl}^2}{\hbar^2} p^2 \right)^n}{n!} \right\rangle \\
&\geq \frac{\hbar}{2} \delta_{ij} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left( \frac{\alpha L_{Pl}^2}{\hbar^2} \right)^n}{n!} \langle p^{2n} \rangle.
\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

En utilisant la propriété  $\langle p^{2n} \rangle \geq \langle p^2 \rangle^n$ , l'équation (3.1.6) devient :

$$(\delta x)_i (\delta p)_j \geq \frac{\hbar}{2} \delta_{ij} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left( \frac{\alpha L_{Pl}^2}{\hbar^2} \right)^n}{n!} \langle p^2 \rangle^n. \tag{3.1.7}$$

Introduisant maintenant la définition de l'écart quadratique donnée par  $(\delta P)^2 = \langle P^2 \rangle - \langle P \rangle^2$  et supposant que l'incertitude est isotrope  $(\delta p)_j = (\delta p)$ ,  $j = 1..D$ , on obtient :

$$(\delta x_i) (\delta p_j) \geq \frac{\hbar}{2} \delta_{ij} e^{\frac{\alpha L_{Pl}^2}{\hbar^2} (D(\delta p_i)^2 + \sum_{k=i}^D \langle p_k \rangle^2)}. \tag{3.1.8}$$

Pour étudier les implications quantiques de cette algèbre, on considère le GUP saturé définie par :

$$(\delta x_i) (\delta p_j) = \frac{\hbar}{2} \delta_{ij} e^{\frac{\alpha L_{Pl}^2}{\hbar^2} (D(\delta p_i)^2 + \sum_{k=i}^D \langle p_k \rangle^2)}, \tag{3.1.9}$$

ou bien :

$$(\delta x_i) (\delta p_i) = \frac{\hbar}{2} e^{\frac{\alpha L_{Pl}^2}{\hbar^2} (D(\delta p_i)^2 + \sum_{k=i}^D \langle p_k \rangle^2)}. \tag{3.1.10}$$

Pour trouver l'expression de l'incertitude sur l'impulsion en fonction de l'incertitude sur la position, on écrit l'équation (3.1.10) sous la forme suivante :

$$-2 \frac{\alpha D L_{Pl}^2}{\hbar^2} (\delta p_i)^2 e^{-\frac{2\alpha D L_{Pl}^2}{\hbar^2} (\delta p_i)^2} = -\frac{\alpha D L_{Pl}^2}{2 (\delta x_i)^2} e^{\frac{2\alpha L_{Pl}^2}{\hbar^2} \sum_{k=i}^D \langle p_k \rangle^2}. \tag{3.1.11}$$

En utilisant la définition de la fonction de Lambert :

$$W(u) e^{W(u)} = u \tag{3.1.12}$$

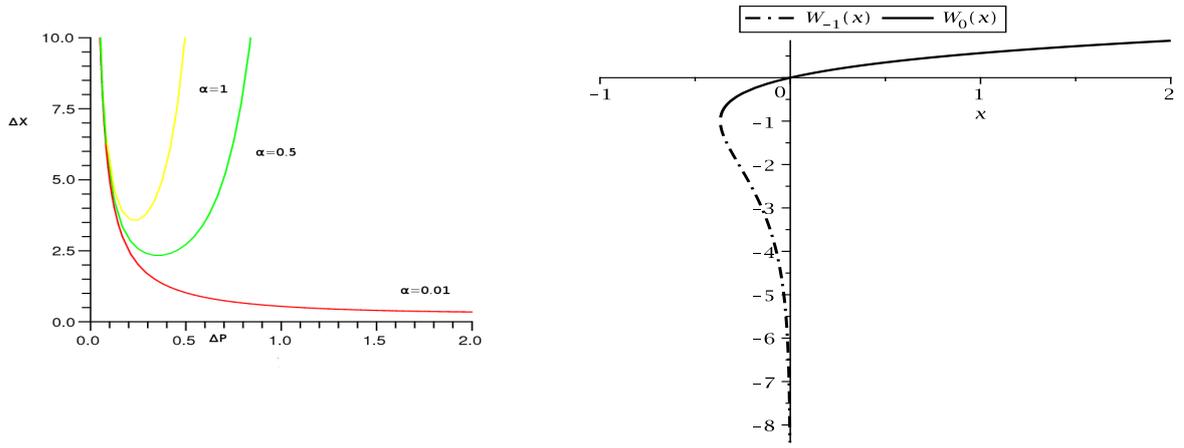


FIGURE 3.1 – Le GUP pour différentes valeurs de  $\alpha$  (à gauche). Les différentes branches de la fonction de Lambert  $W(x)$  (à droite).

avec (3.1.11), on obtient :

$$W(u) = -\frac{2\alpha DL_{Pl}^2}{\hbar^2} (\delta p_i)^2, \quad u = -\frac{\alpha DL_{Pl}^2}{2(\delta x_i)^2} e^{\frac{\alpha L_{Pl}^2}{\hbar^2} \sum_{k=i}^D \langle p_k \rangle^2}. \quad (3.1.13)$$

On en déduit que :

$$(\delta p_i) = \frac{\hbar}{\sqrt{2\alpha DL_{Pl}}} \left( -\frac{1}{2} W \left( -\frac{\alpha DL_{Pl}^2}{2(\delta x_i)^2} e^{\frac{\alpha L_{Pl}^2}{\hbar^2} \sum_{k=i}^D \langle p_k \rangle^2} \right) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.1.14)$$

La fonction de Lambert  $W$  est une fonction à valeurs multiples. Ses différentes branches sont identifiées par l'entier  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Pour  $u$  un nombre réel, l'équation (3.1.12) a deux solutions réelles  $W_0(u)$  et  $W_{-1}(u)$  pour  $0 > u > -\frac{1}{e}$ , ou n'a qu'une seule solution réelle  $W_0(u)$  pour  $u \geq 0$ . Pour  $-\infty < u < -\frac{1}{e}$ , l'équation (3.1.12) n'a pas de solutions réelles (3.1).

Donc  $W(x)$  possède des solutions réelles uniquement pour  $x \geq -\frac{1}{e}$ . Cela veut dire que :

$$\frac{\alpha DL_{Pl}^2}{2(\delta x_i)^2} e^{\frac{\alpha L_{Pl}^2}{\hbar^2} \sum_{k=i}^D \langle p_k \rangle^2} \leq \frac{1}{e}. \quad (3.1.15)$$

On peut ainsi déduire l'expression de l'incertitude sur la position :

$$(\delta x_i)_0 = \sqrt{\frac{\alpha D e}{2}} L_{Pl} e^{\frac{\alpha^2 L_{Pl}^2}{\hbar^2} \sum_{k=i}^D \langle p_k \rangle^2}. \quad (3.1.16)$$

Comme nous savons, la plus petite valeur de l'incertitude sur la position correspond à

$\langle p_k \rangle = 0$ . On obtient alors (voir fig.3.1) :

$$r_0 = (\delta x_i)_0 = \sqrt{\frac{\alpha D e}{2}} L_{Pl} \quad (3.1.17)$$

qui conduit à une borne supérieure sur l'incertitude sur l'impulsion :

$$(\delta p_i)_0 = \frac{\hbar}{\sqrt{2\alpha D} L_{Pl}}. \quad (3.1.18)$$

En substituant (3.1.17) dans (3.1.14), on obtient l'incertitude sur l'impulsion en fonction de l'incertitude minimale sur la position :

$$(\delta p_i) = \frac{\hbar \sqrt{e}}{2(\delta x_i)_0} \left( -\frac{1}{2} W \left( -\frac{(\delta x_i)_0^2}{e(\delta x_i)^2} \right) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.1.19)$$

Puisque le paramètre  $\frac{(\delta x_i)_0}{(\delta x_i)}$  est très petit, on peut développer cette dernière expression en fonction de la longueur de Planck à tous les ordres. En utilisant le développement en séries de la fonction de Lambert :

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} x^n, \quad (3.1.20)$$

on obtient :

$$(\delta p_i) = \frac{\hbar}{2(\delta x_i)} \left( 1 + \frac{1}{2e} \left( \frac{(\delta x_i)_0}{e(\delta x_i)} \right)^2 + \frac{5}{8e^2} \left( \frac{(\delta x_i)_0}{e(\delta x_i)} \right)^4 + \frac{49}{48e^3} \left( \frac{(\delta x_i)_0}{e(\delta x_i)} \right)^6 + \dots \right). \quad (3.1.21)$$

On remarque que  $(\delta p_i)$  ne contient que des puissances impaires de  $(\delta x_i)$ , ce qui est compatible avec les résultats obtenus dans le cadre de la théorie des cordes et la théorie de la gravitation quantique à boucles, considérées comme les candidats les plus sérieux pour une théorie de la gravité quantique, et qui imposent des conditions sévères sur les formes possibles des GUPs et MDRs.

En inversant l'équation (3.1.19), on obtient l'expression de l'incertitude sur la position en fonction de celle sur l'impulsion :

$$(\delta x_i) = \frac{\hbar}{2(\delta p_i)} \exp \left( \frac{(\delta p_i)^2}{(\delta p_i)_0^2} \right). \quad (3.1.22)$$

Comme résultat de l'algèbre (3.1.3) qui correspond à la relation d'incertitude généralisée

(3.1.19), les opérateurs  $\hat{x}$  et  $\hat{p}$  vérifiant cette relation d'incertitude sont donnés dans l'espace des impulsions par :

$$\hat{x}_i = i\hbar e^{-\frac{\alpha L_{pl}^2}{\hbar^2} p^2} \frac{\partial}{\partial p_i} \quad (3.1.23)$$

$$\hat{p}_i = p_i. \quad (3.1.24)$$

Ce changement dans l'expression de l'opérateur position nous conduit à un produit scalaire modifié. Comme nous le savons, les opérateurs  $\hat{x}$  et  $\hat{p}$  doivent être symétriques, pour que leurs valeurs propres soient réelles. Comme  $\hat{p}$  n'a pas changé, alors sa symétrie est évidente, par contre  $\hat{x}$  est modifié ce qui nous oblige à trouver une condition pour qu'il devient symétrique. En effet, la condition de symétrie s'écrit :

$$(\langle \Psi | \hat{x}_i | \varphi \rangle) = \langle \Psi | (\hat{x}_i | \varphi \rangle). \quad (3.1.25)$$

Il est facile de voir que cette condition n'est pas satisfaite en utilisant la mesure habituel  $dp_i$ . La mesure qui vérifie l'expression (3.1.25) est donné par :

$$dpe^{-\frac{\alpha L_{pl}^2}{\hbar^2} p^2}, \quad (3.1.26)$$

ce qui conduit à une relation de fermeture modifiée donnée par :

$$\int d^D p e^{-\frac{\alpha L_{pl}^2}{\hbar^2} p^2} |p\rangle \langle p| = 1. \quad (3.1.27)$$

En introduisant cette dernière expression dans (3.1.25) : on obtient

$$\begin{aligned} (\langle \Psi | \hat{x}_i | \varphi \rangle) &= \int dpe^{-\frac{\alpha L_{pl}^2}{\hbar^2} p^2} \Psi^*(p) \left( i\hbar e^{-\frac{\alpha L_{pl}^2}{\hbar^2} p^2} \frac{\partial}{\partial p} \varphi(p) \right) \\ &= \int d^D p \Psi^*(p_i) \frac{\partial}{\partial p_i} \varphi(p_i). \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

En intégrant par parties et en tenant compte que  $\Psi^*(p_i)$  et  $\varphi(p_i)$  sont nulles à l'infinie, on obtient :

$$(\langle \Psi | \hat{x}_i | \varphi \rangle) = \int d^D p \frac{\partial}{\partial p_i} \Psi^*(p_i) \varphi(p_i), \quad (3.1.29)$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \hat{x}_i | \varphi \rangle &= \int dp_i e^{-\frac{\alpha L_{pl}^2}{\hbar^2} p^2} \left( i \hbar e^{\frac{\alpha L_{pl}^2}{\hbar^2} p^2} \frac{\partial}{\partial p_i} \Psi^* (p_i) \right) \varphi (p_i) \\ &= \langle \Psi | (\hat{x}_i | \varphi \rangle). \end{aligned} \quad (3.1.30)$$

On en déduit que la nouvelle mesure (3.1.26) vérifie la condition de symétrie des opérateurs  $\hat{x}_i$  et  $\hat{p}_i$ . Comme résultat de cette mesure modifiée, le produit scalaire est aussi modifié :

$$\langle \Psi | \varphi \rangle = \int dp_i e^{-\frac{\alpha L_{pl}^2}{\hbar^2} p^2} \Psi^* (p_i) \varphi (p_i). \quad (3.1.31)$$

Aussi le produit scalaire de deux vecteurs propres de l'opérateur impulsion devient :

$$\langle p | p' \rangle = \int dp_i e^{-\frac{\alpha L_{pl}^2}{\hbar^2} p^2} \langle p'' | p \rangle \langle p | p' \rangle \quad (3.1.32)$$

et en déduit la nouvelle relation d'orthogonalité :

$$\langle p | p' \rangle = e^{-\frac{\alpha L_{pl}^2}{\hbar^2} p^2} \delta (p - p') \quad (3.1.33)$$

## 3.2 Approche des états cohérents de la géométrie non commutative

Considérons, pour simplifier, un espace-temps de dimension égale à  $D = 1+2$  [[61]. Le temps commute avec les coordonnées spatiales qui satisfont la relation

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i \varepsilon_{ij} \theta, \quad i, j = 1, 2 \quad (3.2.1)$$

où  $\theta$  est une constante positive. Les autres relations de commutation habituelles restent inchangées

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i \delta_{ij}, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0. \quad (3.2.2)$$

L'utilisation de la base des états cohérents passe par la définition de nouvelles coordonnées  $\hat{z}$  et  $\hat{z}^+$  données par [127] :

$$\hat{z} = \frac{1}{2} (\hat{x}^1 + i \hat{x}^2), \quad \hat{z}^+ = \frac{1}{2} (\hat{x}^1 - i \hat{x}^2) \quad (3.2.3)$$

telles que :

$$[\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{z}}^+] = \theta. \quad (3.2.4)$$

Ainsi les opérateurs  $\hat{\mathbf{z}}$  et  $\hat{\mathbf{z}}^+$  peuvent être considérés comme des opérateurs d'annihilation et de création d'un oscillateur harmonique et par suite nous pouvons construire la base des états cohérents de l'oscillateur harmonique en suivant la démarche habituelle. En effet on a les actions suivantes :

$$\hat{\mathbf{z}} |z\rangle = z |z\rangle \text{ et } \langle z| \hat{\mathbf{z}}^+ = \langle z| \bar{z} \quad (3.2.5)$$

où, les vecteurs  $\{|z\rangle\}$  définissant l'espace de Fock, sont donnés par :

$$|z\rangle = \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{2\theta} - \frac{z}{\theta}\hat{\mathbf{z}}^+\right) |0\rangle. \quad (3.2.6)$$

Il est facile de montrer que les vecteurs  $\{|z\rangle\}$  satisfont la relation de fermeture :

$$\frac{1}{\pi\theta} \int dzd\bar{z} |z\rangle \langle z| = 1. \quad (3.2.7)$$

Cependant ils ne sont pas orthogonaux :

$$\langle z|w\rangle = \exp\left(-\frac{|z|^2 + |w|^2}{2\theta} - \frac{z\bar{w}}{\theta}\right). \quad (3.2.8)$$

La projection d'un opérateur  $F(\hat{\mathbf{x}}^1, \hat{\mathbf{x}}^2)$  dans l'espace des  $|z\rangle$  est définie par :

$$F(\mathbf{z}) := \langle z| F(\hat{\mathbf{x}}^1, \hat{\mathbf{x}}^2) |z\rangle \quad (3.2.9)$$

De cette relation émerge la structure algébrique non commutative (3.2.1) de l'espace des vecteurs  $\{|z\rangle\}$  donné par :

$$\langle z| [\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2] |z\rangle = i\theta. \quad (3.2.10)$$

Appliquons maintenant la relation (3.2.9) au champ scalaire réel :

$$\Phi(t, z) = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \left[ b_p e^{-iEt} \langle z| e^{ip_j x^j} |z\rangle + b_p^+ e^{iEt} \langle z| e^{-ip_j x^j} |z\rangle \right], \quad (3.2.11)$$

qui vérifie l'équation de mouvement de Klein-Gordon :

$$\left(\square + m^2\right) \Phi(t, z) = 0. \quad (3.2.12)$$

Il est facile de montrer que le propagateur est donné par :

$$\begin{aligned}
G(t_1 - t_2, z_1 - z_2) &= \langle 0 | \Phi(t_1, z_1) \Phi(t_2, z_2) | 0 \rangle \\
&= \int \frac{dE d^2 \mathbf{p}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{e^{-\frac{\theta}{2} \mathbf{p}^2}}{E^2 - \mathbf{p}^2 - m^2} e^{-iE(t_1 - t_2)} e^{\frac{i}{\sqrt{2}} ([p_1(z_1 - z_2 + \bar{z}_1 - \bar{z}_2) + p_2(z_1 - z_2 - \bar{z}_1 + \bar{z}_2)])}.
\end{aligned} \tag{3.2.13}$$

Ce propagateur est la fonction du Green de l'équation de Klein-Gordon sur un espace-temps de dimensions  $(2 + 1)$  non commutatif. Dans ce cas, le propagateur libre est modifié par un facteur d'amortissement exponentiel. C'est important de noter que la non commutativité conduit à des propagateurs exponentiellement amortis. Ce résultat est au cœur du modèle que nous allons étudier par la suite. La présence du facteur  $e^{-\frac{\theta}{2} \mathbf{p}^2}$  conduit à une distribution parfaitement régularisée à l'inverse de distribution de Dirac habituelle. En effet l'application de l'opérateur  $(\square + m^2)$  à la fonction de Green précédente donne :

$$\begin{aligned}
(\square + m^2) G(t_1 - t_2, z_1 - z_2) &= \frac{2\pi\delta(t_1 - t_2)}{\theta} e^{\frac{-1}{4\theta} ((z_1 - z_2 + \bar{z}_1 - \bar{z}_2)^2 + (z_1 - z_2 - \bar{z}_1 + \bar{z}_2)^2)} \\
&= \frac{2\pi\delta(t_1 - t_2)}{\theta} e^{\frac{-1}{4\theta} ((z_1 - z_2)^2 + (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^2)} \\
&= \frac{2\pi\delta(t_1 - t_2)}{\theta} e^{\frac{-|z_1 - z_2|^2}{4\theta}} \\
&= \frac{2\pi\delta(t_1 - t_2)}{\theta} e^{\frac{-r^2}{4\theta}}.
\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

Si on compare cette équation avec celle de poisson, on remarque que la distribution de Dirac a été remplacé par  $\frac{2\pi}{\theta} e^{\frac{-r^2}{4\theta}}$ . On déduit que l'approche des états cohérents de la géométrie non commutative a donné une représentation à la distribution de Dirac

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi\theta} e^{\frac{-r^2}{4\theta}} = \delta(r). \tag{3.2.15}$$

La généralisation au cas 3-d est immédiate :

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi\theta)^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{-r^2}{4\theta}} = \delta(r). \tag{3.2.16}$$

# Chapitre 4

## Thermodynamique du trou noir de Schwarzschild en présence du GUP

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de la thermodynamique de trou noir de Schwarzschild de masse  $M$  défini par la métrique (2.4.35) dans le cadre du principe d'incertitude généralisée à tous les ordres dans la longueur de Planck. On considère que  $\hbar = c = \kappa_\beta = 1$  de sorte que la longueur de Planck est  $L_{Pl} = M_{Pl}^{-1} = T_{Pl}^{-1} = \sqrt{G} = 1$ .

La géométrie au voisinage de l'horizon, nous permet de considérer que  $\delta x = r_H$ . On obtient alors :

$$\delta x = r_H = 2M \quad (4.0.1)$$

En utilisant (4.0.1) et (3.1.17), il est facile de déduire l'existence d'un trou noir minimal dont l'horizon et la masse sont données par :

$$r_0 = (\delta x)_0 = \sqrt{\frac{3\alpha e}{2}}, \quad M_0 = \frac{r_0}{2} = \sqrt{\frac{3\alpha e}{8}}. \quad (4.0.2)$$

Le GUP implique donc qu'il n'existe pas de trou noir de masse inférieure à  $M_0$ .

Dans la suite on va adopter la nomenclature suivante :

- HUP : principe d'incertitude d'Heisenberg.
- SGUP : principe d'incertitude généralisé au premier ordre dans la longueur de Planck.
- GUP : principe d'incertitude généralisé à tous les ordres dans la longueur de Planck.

## 4.1 Température du trou noir

Nous avons vu au deuxième chapitre que la température et l'entropie de trou noir de Schwarzschild dans le cas standard sont donnés par les expressions (2.5.15) et (2.5.17). Dans cette partie, nous allons voir les corrections apportés par le GUP sur l'expression de la température. D'après la relation heuristique d'Adler [5], la température est définie en fonction de l'incertitude sur l'impulsion par :

$$T_{GUP} \approx \frac{\delta p}{2\pi}. \quad (4.1.1)$$

En substituant (3.1.19), (2.4.38) et (4.0.2) dans (4.1.1), on obtient la température de Hawking corrigée par les effets quantiques du GUP :

$$T_{GUP} = \frac{1}{8\pi M} \exp\left(-\frac{1}{2}W\left(-\frac{1}{e}\left(\frac{M_0}{M}\right)^2\right)\right). \quad (4.1.2)$$

On rappelle que la température dans le cadre du SGUP est donné par [85] :

$$T_{SGUP} = \frac{M}{\pi\alpha^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4M^2}}\right). \quad (4.1.3)$$

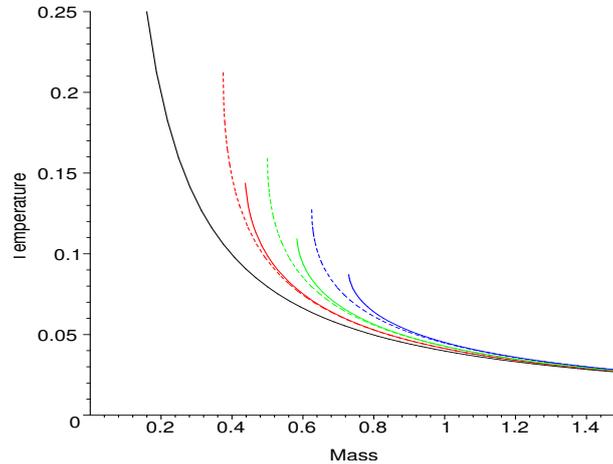


FIGURE 4.1 – La température en fonction de la masse du trou noir. De gauche à droite le HUP (solide), le SGUP (points) et le GUP (solide) pour  $\alpha = 0.75, 1, 1.25$ .

Le développement de Taylor en terme de  $\frac{1}{e}\left(\frac{M_0}{M}\right)^2$  donne :

$$T_{GUP} = \frac{1}{8\pi M} \left(1 + \frac{1}{2e}\left(\frac{M_0}{M}\right)^2 + \frac{5}{8e^2}\left(\frac{M_0}{M}\right)^4 + \dots\right). \quad (4.1.4)$$

Ce résultat s'obtient aussi en substituant (3.1.20) dans (4.1.1). En posant  $M = M_0$  dans (4.1.2), on obtient la température maximale de trou noir donnée par :

$$T_{GUP}^{\max} = \frac{1}{8\pi M_0} \exp\left(-\frac{1}{2}W\left(-\frac{1}{e}\left(\frac{M_0}{M_0}\right)^2\right)\right) = \frac{\sqrt{e}}{8\pi M_0} = \frac{1}{2\pi\sqrt{6\alpha}}. \quad (4.1.5)$$

On remarque que la température maximale est finie, ça veut dire que le problème de la divergence de la température à la fin du processus d'évaporation du trou noir est maintenant complètement régularisé par les effets quantiques apportés par GUP. En inversant l'expression (4.1.2) et en utilisant la propriété de la fonction de Lambert donnée par  $x = W(x) \cdot e^{W(x)}$ , on obtient l'expression de la masse du trou noir en fonction de sa température :

$$M = \frac{1}{8\pi T_{GUP}} \exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{T_{GUP}}{T_{GUP}^{\max}}\right)^2\right). \quad (4.1.6)$$

Le comportement  $T_{GUP} > T_{GUP}^{\max}$  est éliminé par le fait de la présence du cut-off UV apporté par le GUP.

## 4.2 Entropie microcanonique

D'après Beckenstein, la variation minimale de la surface d'événement d'un trou noir qui absorbe une particule d'énergie  $E$  et de rayon  $R$  est donnée par :

$$(\Delta A)_0 \simeq 4 (\ln 2) ER. \quad (4.2.1)$$

En mécanique quantique, le rayon et l'énergie d'une particule sont donnée reliés par les relations :

$$R \sim 2\delta x_h, \quad E \sim \delta p. \quad (4.2.2)$$

En remplaçant cette dernière expression dans (4.2.1) on obtient :

$$(\Delta A)_0 \simeq 8 (\ln 2) \delta x_h \delta p. \quad (4.2.3)$$

En introduisant l'expression (3.1.19) on arrive au résultat :

$$\begin{aligned} (\Delta A)_0 &\simeq 4 (\ln 2) \exp \left( -\frac{1}{2} W \left( -\frac{1}{e} \left( \frac{(\delta x_0)}{(\delta x_h)} \right)^2 \right) \right) \\ &= 4 (\ln 2) \exp \left( -\frac{1}{2} W \left( -\frac{1}{e} \frac{A_0}{A} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

avec  $A = 4\pi (\delta x_h)^2$  et  $A_0 = 4\pi (\delta x_0)^2$ . Comme l'entropie est une quantité extensive, on utilise le facteur de calibration de Beckenstein  $(\Delta S)_0 = \ln 2$  pour la variation minimale de l'entropie et aboutir à la relation suivante :

$$\frac{dS_{GUP}}{dA} \simeq \frac{(\Delta S)_0}{(\Delta A)_0} = \frac{1}{4} \exp \left( \frac{1}{2} W \left( -\frac{1}{e} \frac{A_0}{A} \right) \right). \quad (4.2.5)$$

On obtient alors :

$$S_{GUP} \simeq \frac{1}{4} \int_{A_0}^A \exp \left( \frac{1}{2} W \left( -\frac{1}{e} \frac{A_0}{A} \right) \right) dA. \quad (4.2.6)$$

En utilisant toujours la propriété de la fonction de Lambert  $e^{\frac{1}{2}W(x)} = \sqrt{\frac{x}{W(x)}}$  et en introduisant le changement de variable  $y = -\frac{1}{e} \frac{A_0}{A}$ , on obtient :

$$S_{GUP} = \frac{A_0}{4e} \int_{-\frac{1}{e}}^{-\frac{1}{e} \frac{A_0}{A}} \frac{dy}{y^{\frac{3}{2}} [W(y)]^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.2.7)$$

En intégrant sur  $y$ , on obtient l'entropie de trou noir de Schwarzschild en présence du GUP :

$$S_{GUP} = \frac{A_0}{8e} \left[ \text{Ei} \left( -\frac{1}{2} W \left( -\frac{1}{e} \frac{A_0}{A} \right) \right) - 2 \left( -\frac{1}{e} \frac{A_0}{A} W \left( -\frac{1}{e} \frac{A_0}{A} \right) \right)^{-\frac{1}{2}} - 2\sqrt{e} - \text{Ei} \left( \frac{1}{2} \right) \right] \quad (4.2.8)$$

avec  $\text{Ei}(x)$  est la fonction exponentielle. Pour voir le comportement des corrections apportées par la GUP sur la loi de Beckenstein, on développe cette dernière expression en terme de  $\left( -\frac{1}{e} \frac{A_0}{A} \right)$ . On obtient :

$$S_{GUP} = \left[ \frac{A}{4L_{Pl}^2} - \frac{A_0}{8eL_{Pl}^2} \ln \left( \frac{A_0}{A} \right) + \frac{3\pi\alpha^2}{16e} \left( \frac{A_0}{A} \right) + \frac{25\pi\alpha^2}{192e^2} \left( \frac{A_0}{A} \right)^2 + \frac{343\pi\alpha^2}{2304e^2} \left( \frac{A_0}{A} \right)^3 + \dots + C \right] \quad (4.2.9)$$

avec

$$C = \frac{A_0}{8eL_{Pl}^2} \left[ \gamma - 1 - 2 \ln(2e) - 2\sqrt{e} - \text{Ei} \left( \frac{1}{2} \right) \right] \simeq -4.60 \frac{\alpha^2}{L_{Pl}^2} \quad (4.2.10)$$

où  $\gamma$  est la constante d'Euler. On remarque que le premier terme représente la loi habituel de Hawking-Beckenstein et les autres termes représentent les corrections apportées par l'effet du GUP. Si on introduit les paramètres  $\rho = -\frac{\pi\alpha}{4}$ ,  $\beta = \frac{3\pi^2\alpha^4}{8}$  dans les expressions de la température et de l'entropie, on obtient

$$T_{GUP} = \frac{M_{Pl}^2}{8\pi M} \left( 1 - \frac{\rho}{4\pi} \left( \frac{M_{Pl}}{M} \right)^2 + \frac{5}{16\pi^2} \left( \frac{M_{Pl}}{M} \right)^4 \right), \quad (4.2.11)$$

$$S_{GUP} = \frac{A}{4L_{Pl}^2} + \rho \ln \left( \frac{A}{L_{Pl}^2} \right) + \frac{\beta L_{Pl}^2}{A}. \quad (4.2.12)$$

On remarque que ces résultats sont les mêmes résultats obtenues par d'autres approches comme la théorie des cordes, la gravité quantique à boucles et les modèles effectifs avec GUP et MDR, et on remarque aussi l'apparence d'une correction logarithmique avec un signe négatif comme obtenu par la théorie des cordes.

Rappelons que l'entropie dans le cadre du SGUP est donné par [85] :

$$S_{SGUP} = 2\pi M^2 \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4M^2}} \right) - \frac{\pi\alpha^2}{8} \ln \left[ \frac{8M^2}{\alpha^2} 1 + \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4M^2}} - 1 \right] - \frac{\pi\alpha^2}{8}. \quad (4.2.13)$$

A partir de la figure (4.2), on remarque que l'entropie dans cas de GUP est petite par rapport à l'entropie dans le cas standard et dans le cas avec SGUP, ce qui signifie que le trou noir avec GUP possède moins de degrés de liberté que le trou noir avec SGUP ou HUP.

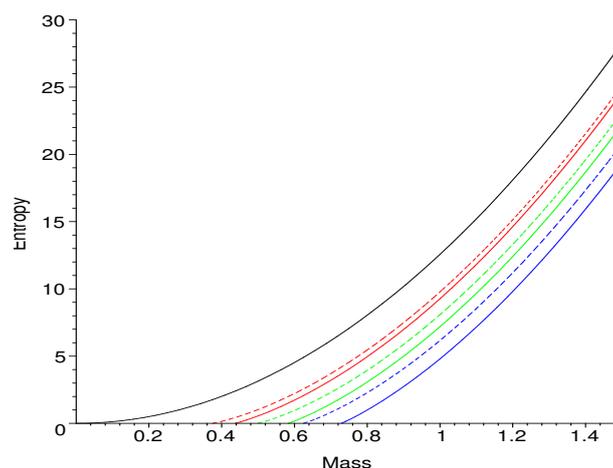


FIGURE 4.2 – L'entropie micro canonique en fonction de la masse du trou noir. De gauche à droite le HUP (solide), le SGUP (points) et le GUP (solide) pour  $\alpha = 0.75, 1, 1.25$ .

### 4.3 Évaporation du trou noir

Comme nous avons vu dans le deuxième chapitre, la mesure des intégrales sur le moment est corrigée par un facteur exponentiel dans le cas du GUP. Dans ce cas la densité d'énergie d'un corps noir à la température  $T_{GUP}$  sera définie par :

$$\varepsilon_{GUP} = 2 \int d^3 p \frac{p \cdot e^{-\alpha p^2}}{e^{\frac{p}{T_{GUP}}} - 1}. \quad (4.3.1)$$

En introduisant le changement de variable  $y = \beta p$  où  $\beta = \frac{1}{T}$  et en développant la fonction exponentielle en série, on obtient :

$$\varepsilon_{GUP} = 8\pi T^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (\alpha T_{GUP})^{2n} \int_0^{\infty} dy \frac{y^{2n+3}}{e^y - 1}. \quad (4.3.2)$$

En utilisant la définition de la fonction Zeta de Riemann

$$\int_0^{\infty} dy \frac{y^{2s+1}}{e^y - 1} = \Gamma(s) \cdot \zeta(s) \quad (4.3.3)$$

on obtient l'expression suivante de la densité de l'énergie :

$$\varepsilon_{GUP} = 8\pi T_{GUP}^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (\alpha T_{GUP})^{2n} \Gamma(2n+4) \cdot \zeta(2n+4). \quad (4.3.4)$$

Cette série est convergente si et seulement si on la condition

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n!} (\alpha T_{GUP})^{2n} \Gamma(2n+4) \cdot \zeta(2n+4) = 0, \quad (4.3.5)$$

à partir de laquelle on déduit :

$$\alpha T_{GUP} < 1 \iff T_{GUP} < \frac{1}{\alpha}. \quad (4.3.6)$$

On remarque que la densité d'énergie est définie seulement si la température est inférieure à  $\alpha^{-1}$ . D'autre part, on trouve que la température maximale de trou est donnée par (4.1.5).

Par conséquent on a :  $\frac{1}{6\sqrt{2}\pi\alpha} < \frac{1}{\alpha}$ . Alors :

$$T_{GUP} \leq \frac{1}{6\sqrt{2}\pi}.$$

On en déduit que l'expression de la densité d'énergie est convergente, ce que nous permet de couper la série à  $n = 1$  (les autres termes de la série pour  $n > 1$  sont négligeables). En utilisant  $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$  et  $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$  et l'équation (4.1.5) on obtient :

$$\varepsilon_{GUP} = \frac{8\pi}{15} T_{GUP}^4 \left( 1 - \frac{15}{63} \left( \frac{T_{GUP}}{T_{GUP}^{\max}} \right)^2 \right) \quad (4.3.7)$$

où le premier terme représente la loi standard de Stephan-Boltzmann et le deuxième représente la correction apportée par le GUP. On peut réécrire cette équation sous la forme de loi de Stefan-Boltzmann mais en définissant une constante de Stefan  $\sigma(T)$  dépendant de la température, c'est à dire dépendante de l'énergie. Cette idée peut avoir d'énorme conséquence sur la physique à l'échelle de Planck.

Maintenant nous sommes bien armé pour étudier le processus d'évaporation de Hawking. L'intensité émise par un trou noir de masse  $M$  est définie par :

$$I = A\varepsilon_{GUP} \quad (4.3.8)$$

où  $A$  est l'aire de l'horizon du BH. Invoquant la loi de la conservation de l'énergie, le taux d'évaporation du trou noir est :

$$\frac{dM}{dt} = -A\varepsilon_{GUP}. \quad (4.3.9)$$

En substituant l'aire de l'horizon et (4.3.7) dans (4.3.8) on obtient :

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{128\pi^2}{15} M^2 T_{GUP}^4 \left( 1 - \frac{15}{63} \left( \frac{T_{GUP}}{T_{GUP}^{\max}} \right)^2 \right). \quad (4.3.10)$$

En utilisant l'expression (4.1.2) on arrive à l'expression suivante :

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{1}{480\pi^2 M^2} \exp \left( -2W \left( -\frac{1}{e} \left( \frac{M_0}{M} \right)^2 \right) \right) \left( 1 - \frac{15}{63e} \left( \frac{M_0}{M} \right)^2 \exp \left( -W \left( -\frac{1}{e} \left( \frac{M_0}{M} \right)^2 \right) \right) \right). \quad (4.3.11)$$

En introduisant le développement en série de la fonction exponentielle et (3.1.20) on obtient :

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{1}{480\pi^2 M^2} \left( 1 - \frac{2}{e} \left( \frac{M_0}{M} \right)^2 + \frac{4}{e^2} \left( 1 - \frac{7}{18e} \right) \left( \frac{M_0}{M} \right)^2 + \dots \right) \quad (4.3.12)$$

où le premier terme représente le résultat standard et les autres termes représentent les corrections apportées par le GUP. Pour discuter le processus d'évaporation du trou noir, on a tracé sa courbe en fonction de la masse du trou noir sur la figure (??). On remarque que la divergence obtenue dans le cas standard quand  $M \rightarrow 0$ , est maintenant régularisée par le GUP. Cette régularisation est une résultante de la condition (4.3.6) qui stoppe le processus d'évaporation à la température maximale. Ce phénomène est similaire à la prévention de l'effondrement total de l'atome d'hydrogène par le principe d'incertitude standard. Dans notre cas, la régularisation peut être considérée comme un effet dynamique et non pas comme conséquence d'une symétrie quantique de la théorie. D'autre part, nous observons que le processus d'évaporation cesse lorsque la masse devient égale à  $M_0$  avec un taux minimal donné par :

$$\left. \frac{dM}{dt} \right|_0 = -\frac{e^2}{480\pi^2 M^2} \left( 1 - \frac{5\alpha}{63} \right). \quad (4.3.13)$$

En résumé, le processus d'évaporation d'un trou noir de masse initiale  $\dot{M} > M_0$  continue jusqu'à où le trou noir devient un trou noir minimal de rayon ( $\delta x_0$ ) et de masse  $M_0$ . Ce trou noir minimal est souvent désigné dans la littérature comme un rémanent de trou noir (BHR).

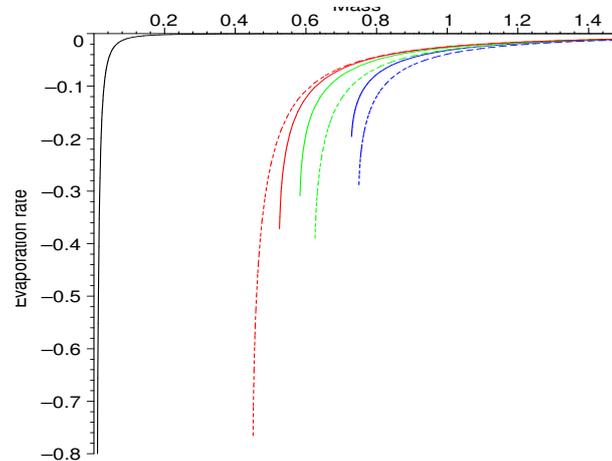


FIGURE 4.3 – Taux d'évaporation en fonction de la masse : HUP (courbe noire), cas de GUP pour  $\alpha = 0.4$  (courbe rouge),  $\alpha = 0.3$  (courbe verte) et  $\alpha = 0.15$  (courbe bleu)

Pour connaître la stabilité du trou noir minimal BHR, on calcule la chaleur spécifique du trou noir

$$C = \frac{dM}{dT}. \quad (4.3.14)$$

En utilisant l'expression de la température (4.1.2) : on obtient

$$C = -8\pi M^2 \left( 1 + W \left( -\frac{1}{e} \left( \frac{M_0}{M} \right)^2 \right) \right) \exp \left( \frac{1}{2} W \left( -\frac{1}{e} \left( \frac{M_0}{M} \right)^2 \right) \right). \quad (4.3.15)$$

On remarque que cette expression devient nulle quand  $M = M_0$ , puisque  $W \left( -\frac{1}{e} \frac{M_0}{M} \right) = -1$ . Nous déduisons que la chaleur spécifique s'annule à la fin du processus d'évaporation, ou le trou noir devient un BHR de masse  $M_0$ . En plus de l'interaction gravitationnelle avec le voisinage, l'annulation de la chaleur spécifique montre le caractère inerte du BHR, ce qui le rend un candidat sérieux pour expliquer l'origine de la matière noire. Enfin, notons que les BHRs sont une conséquence du GUP.

Le développement de Taylor de la chaleur spécifique donne :

$$C = -8\pi M^2 L_{Pl}^2 \left( 1 + W \left( -\frac{1}{e} \left( \frac{M_0}{M} \right)^2 \right) \right) \exp \left( \frac{1}{2} W \left( -\frac{1}{e} \left( \frac{M_0}{M} \right)^2 \right) \right). \quad (4.3.16)$$

On remarque que si  $M \gg M_0$ , l'expression devient :

$$C = -8\pi M^2 L_{Pl}^2. \quad (4.3.17)$$

Ça veut dire que pour les trous noirs de grande masse, la chaleur spécifique devient égale à celle de la théorie standard. Les termes de correction apportées par le GUP sont tous positives ce qui indique que le processus d'évaporation est accélérée et donc le temps d'évaporation du trou noir dans le cadre du GUP corrigé devient plus petit que celui de cas standard.

Enfin donnons l'expression de la chaleur spécifique et du taux d'évaporation dans le cadre du SGUP [85] :

$$C_{SGUP} = \pi \alpha^2 \frac{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4M^2}}}{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4M^2} - 1}}. \quad (4.3.18)$$

$$\left( \frac{dM}{dt} \right)_{SGUP} = -\frac{128\pi^2 M^6}{15\alpha^8} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4M^2}} \right)^4 + \frac{1024\pi^2 M^8}{63\alpha^{10}} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4M^2}} \right)^6. \quad (4.3.19)$$

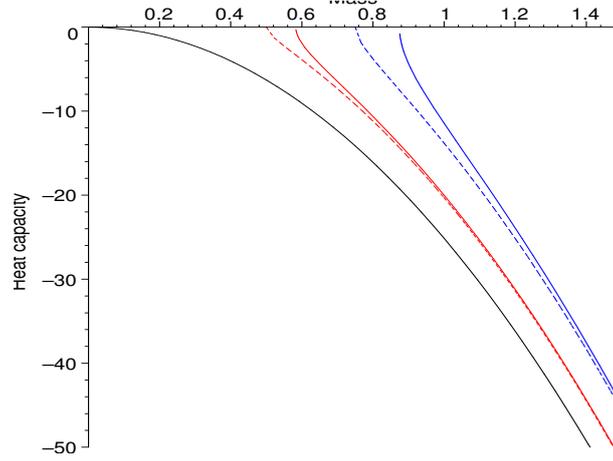


FIGURE 4.4 – Température en fonction de  $M$  : cas standard (courbe noire), cas de GUP pour  $\alpha = 0.4$  (courbe blue),  $\alpha = 0.3$  (courbe verte) et  $\alpha = 0.2$  (courbe rouge)

## 4.4 Temps de vie du trou noir

Considérons un trou noir qui commence le processus d'évaporation avec une masse  $M$  et le termine avec la masse minimale  $M_0$ . Introduisons le changement de variable  $y = \frac{-1}{e} \left( \frac{M_0}{M} \right)^2$  dans (4.3.11) :

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{240\pi^2 M_0^3}{e^{\frac{3}{2}}} y^{\frac{5}{2}} \exp(-2W(y)) \left( 1 + \frac{5}{63} y \exp(-W(y)) \right), \quad (4.4.1)$$

d'où on peut tirer l'expression du temps d'évaporation du trou noir :

$$t = -\frac{240\pi^2 M_0^3}{e^{\frac{3}{2}}} \int dy \frac{y^{-\frac{5}{2}} \cdot \exp(2W(y))}{1 + \frac{5}{63} y \cdot \exp(-W(y))}. \quad (4.4.2)$$

Puisque  $y$  est petit, on peut utiliser le développement de Taylor au premier ordre. En intégrant sur  $y$  on obtient :

$$t = -\frac{240\pi^2 M_0^3}{e^{\frac{3}{2}}} \int dy y^{-\frac{5}{2}} \cdot \exp(2W(y)) \left( 1 - \frac{5}{63} y \cdot \exp(-W(y)) \right). \quad (4.4.3)$$

La propriété  $y = w(y) \cdot e^{w(y)}$  nous permet d'écrire (4.4.3) sous la forme :

$$t = -\frac{240\pi^2 M_0^3}{e^{\frac{3}{2}}} \int dy \cdot \left( W(y)^{-\frac{5}{2}} - \frac{5}{63} W(y)^{-\frac{3}{2}} \right) \exp\left(\frac{-W(y)}{2}\right). \quad (4.4.4)$$

L'intégration sur  $y$  conduit à :

$$t = -\frac{240\pi^2 M_0^3}{e^{\frac{3}{2}}} \quad (4.4.5)$$

$$\left[ i \left( \frac{2}{3} \frac{[1 + \frac{23}{7} W(y)]}{\frac{3}{2} W(y)} \exp\left(\frac{W(y)}{2}\right) - \frac{6}{7} \sqrt{2\pi} \operatorname{erfi}\left(\sqrt{\frac{W(y)}{2}}\right) - \frac{32}{21} \sqrt{e} - \frac{6}{7} \sqrt{2\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right) \right]. \quad (4.4.6)$$

avec  $\operatorname{erfi}(x)$  la fonction erreur imaginaire définie en fonction de la fonction erreur habituelle par

$$\operatorname{erfi}(z) = \frac{\operatorname{erf}(z)}{i} \quad (4.4.7)$$

De l'équation 4.4.6, il s'ensuit que les trous noirs en présence du GUP sont plus chauds et s'évaporent plus rapide que dans le cas standard.

# Chapitre 5

## Thermodynamique du trou noir de Schwarzschild dans une cavité isotherme en présence du GUP

Dans ce chapitre, nous allons utiliser le formalisme de l'action euclidienne pour calculer les quantités thermodynamiques d'un trou noir confiné dans une cavité isotherme dans le cas de l'ensemble grand canonique [116].

### 5.1 Action euclidienne

D'après [108, 111, 112], l'action euclidienne pour un variété  $M$  de dimensions  $(n + 1)$  avec une hypersurface  $\partial M$  de dimension  $n$  est donnée par la somme des contributions suivantes :

$$I_E = I_{EH} + I_{GHY} - I_s \quad (5.1.1)$$

où  $I_{EH}$  et  $I_{GHY}$  sont respectivement le terme de volume et celui de Gibbons-Hawking-York

$$I_B = -\frac{1}{16\pi} \int d^{n+1}x \sqrt{g} R, \quad I_{GHY} = \frac{1}{8\pi} \int d^n x \sqrt{h} K. \quad (5.1.2)$$

avec  $g_{\mu\nu}$  est la métrique de la variété  $M$ ,  $h_{\mu\nu}$  la métrique induite sur l'hypersurface  $\partial M$  et  $K$  la trace du tenseur de courbure extrinsèque  $K_{\mu\nu}$ . L'action euclidienne soustraite  $I_s$ , qui est un contre terme de régularisation, est évaluée sur la même région compacte donnée par  $M$  et l'hypersurface  $\partial M$ . Cette dernière est nécessaire pour détecter les transitions de phases possibles au cours du développement du trou noir. L'action  $I_{EH}$ , qui est l'ac-

tion d'Einstein-Hilbert, a été définie dans le deuxième chapitre, mais pas  $I_{GHY}$ . Pour cela, avant de commencer notre étude, nous allons donner un petit rappel sur l'action de Gibbons-Hawking-York.

### 5.1.1 Action de Gibbons-Hawking-York (GHY)

L'action de Gibbons-Hawking-York est un terme qui doit être ajouté à l'action d'Einstein-Hilbert dans le cas où l'espace-temps  $\mathcal{M}$  est borné par l'hypersurface  $\partial\mathcal{M}$  dans le but d'obtenir les mêmes équations du champ que celles obtenues pour un espace-temps non borné comme il est souvent le cas. Mais avant cela, faut d'abord définir les notions de la géométrie extrinsèque.

#### 5.1.1.1 La notion d'hypersurface

Dans un espace-temps à quatre dimensions, une hypersurface est une sous-variété de trois dimensions qui peut être soit de type temps, type espace ou nulle. Elle peut être définie en imposant une contrainte sur les coordonnées  $f(x^\alpha) = 0$ , ou par une équation paramétrique  $x^\alpha = x^\alpha(y^a)$  avec  $(y^1, y^2, y^3)$  représentent les coordonnées intrinsèques de l'hypersurface.

— Hypersurface des champs de vecteurs orthogonaux :

On commence avec la famille des hypersurfaces définies par :

$$f(x^\alpha) = C. \quad (5.1.3)$$

On considère deux points  $P$  et  $Q$  proches situées respectivement en  $x^\alpha$  et  $x^\alpha + dx^\alpha$ . Dans ce cas

$$C = f(x^\alpha + dx^\alpha) = f(x^\alpha) + \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} dx^\alpha. \quad (5.1.4)$$

En éliminant  $C$  de cette équation, on obtient en  $P$

$$\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} dx^\alpha = 0. \quad (5.1.5)$$

Ceci implique que  $f_{,\alpha}$  est perpendiculaire à l'hypersurface. Un vecteur unité  $n_\alpha$  peut être introduit dans le cas où l'hypersurface est non nulle. Il est défini par

$$n^\alpha n_\alpha = \epsilon = \begin{cases} -1, & \text{pour } \partial\mathcal{M} \text{ de genre espace} \\ 1, & \text{pour } \partial\mathcal{M} \text{ de genre temps} \end{cases}$$

et nous avons besoin de  $n^\alpha$  qui croit dans la même direction que  $f$ . Il peut alors être facilement vérifié que  $n^\alpha$  est donnée par :

$$n_\alpha = \frac{\epsilon f_{,\alpha}}{\sqrt{|g^{\alpha\beta} f_{,\alpha} f_{,\beta}|}}. \quad (5.1.6)$$

— Métrique induite et métrique transverse :

La métrique induite  $h_{ab}$  de l'hypersurface est définie par :

$$h_{ab} = g_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta \quad (5.1.7)$$

avec

$$e_a^\alpha = \left( \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} \right)_{\partial\mathcal{M}} \quad (5.1.8)$$

qui sont des vecteurs tangentiels de  $\partial\mathcal{M}$ . Pour passer des coordonnées  $x^\alpha$  au coordonnées  $y^a$ , on écrit :

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \\ &= g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} dy^a \frac{\partial x^\beta}{\partial y^b} dy^b \\ &= g_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta dy^a dy^b \\ &= h_{ab} dy^a dy^b. \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

Puisque les vecteurs  $e_1^\alpha, e_2^\alpha, e_3^\alpha$  sont tangentiels sur l'hypersurface on a :

$$n_\alpha e_a^\alpha = 0 \quad (5.1.10)$$

avec  $n_\alpha n^\alpha = -1$ .

Maintenant nous introduisant la métrique transverse définie par :

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \epsilon n_\alpha n_\beta. \quad (5.1.11)$$

En projetant le 4-tenseur

$$h_{\beta}^{\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha} - \epsilon n^{\alpha} n_{\beta} \quad (5.1.12)$$

sur  $n^{\beta}$  on obtient :

$$h_{\beta}^{\alpha} n^{\beta} = \left( g_{\beta}^{\alpha} - \epsilon n^{\alpha} n_{\beta} \right) n^{\beta} = \left( n^{\alpha} - \epsilon^2 n^{\alpha} \right) = 0. \quad (5.1.13)$$

Comme  $w^{\alpha} n_{\alpha} = 0$  alors  $w^{\alpha} = h_{\beta}^{\alpha} w^{\beta}$ . On définit la 3-métrie :

$$h_{ab} = h_{\alpha\beta} e_a^{\alpha} e_b^{\beta} \quad (5.1.14)$$

et

$$h^{\alpha\beta} = h^{ab} e_a^{\alpha} e_b^{\beta}. \quad (5.1.15)$$

La condition

$$\delta g_{\alpha\beta} |_{\partial M} = 0, \quad (5.1.16)$$

implique que  $h_{ab} = h_{\alpha\beta} e_a^{\alpha} e_b^{\beta}$  est fixé sur  $\partial M$ .

## 5.1.2 Origine de l'action Gibbons-Hawking-York

En variant l'action (5.1.1) on obtient

$$\delta I = \delta I_{EH} + \delta I_{GHY}. \quad (5.1.17)$$

avec  $\delta I_{EH}$  donnée par (2.3.23). En utilisant l'identité de Palatini

$$g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} = \delta V_{;\mu}^{\mu} \text{ et } \delta V^{\mu} = g^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} - g^{\alpha\mu} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}, \quad (5.1.18)$$

et le théorème de Stokes qui stipule que :

$$\begin{aligned} \int_M A_{;\mu}^{\mu} \sqrt{-g} d^4 x &= \int_M (\sqrt{-g} A^{\mu})_{;\mu} d^4 x \\ &= \oint_{\partial M} \epsilon A^{\mu} n_{\mu} \sqrt{h} d^3 y \end{aligned} \quad (5.1.19)$$

et aussi la propriété (5.1.16) on obtient :

$$\delta I = \frac{1}{16\pi} \int_M G_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} d^4 x - \frac{1}{16\pi} \oint_{\partial M} \epsilon h^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta, \mu} n^{\mu} \sqrt{h} d^3 y + \frac{1}{8\pi} \delta \oint d^3 x \sqrt{h} K. \quad (5.1.20)$$

Maintenant, on passe à la variation de l'action de GHY. Puisque la métrique induite est fixée sur l'hypersurface on obtient :

$$\frac{1}{8\pi}\delta\oint d^3x\sqrt{h}K = \frac{1}{8\pi}\delta\oint d^3x\sqrt{h}\delta K. \quad (5.1.21)$$

La trace du tenseur de courbure extrinsèque est définie par :

$$\begin{aligned} K &= n^\alpha_{,\alpha} \\ &= g^{\alpha\beta}n_{\alpha,\alpha}. \end{aligned} \quad (5.1.22)$$

En utilisant l'expression de  $g^{\alpha\beta}$  en fonction de la métrique induite et l'expression des connexions en fonction de la métrique, on obtient :

$$\delta K = \frac{1}{2}h^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta,\mu}n^\mu. \quad (5.1.23)$$

En substituant (5.1.21) et (5.1.23) dans (5.1.20) on obtient :

$$\delta I = \frac{1}{16\pi} \int_M G_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} d^4x. \quad (5.1.24)$$

A partir du principe de moindre action,  $\delta I = 0$ , on déduit les équations d'Einstein pour le champ gravitationnel d'un espace temps borné

$$G_{\alpha\beta} = 0. \quad (5.1.25)$$

Ce résultat montre que l'expression du terme de GHY est correct.

### 5.1.3 Action GHY pour le trou noir de Schwarzschild dans une cavité en présence du GUP

Dans ce qui suit, nous considérons le cas du trou noir de Schwarzschild confiné dans une cavité de frontière  $\partial M \equiv S^1 \times S^2$  localisée en  $r = R = \text{const}$ . En utilisant le temps euclidien  $\tau$  dans (2.4.35), l'élément de longueur du trou noir de Schwarzschild devient :

$$ds_E^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\tau^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (5.1.26)$$

La longueur propre de  $S^1$  à la frontière de la cavité est :

$$\beta = T^{-1} = \int^{\beta_{GUP}} d\tau \sqrt{g_{\tau\tau}} = \beta_{GUP} \sqrt{1 - \frac{2M}{R}} \quad (5.1.27)$$

où  $\beta_{GUP} = T_{GUP}^{-1}$  est la période du temps euclidien. En remplaçant (4.1.2) dans (6.2.1), on obtient la formule de la température locale de Tolman en fonction de la masse de trou noir

$$T = \frac{1}{8\pi M \sqrt{1 - \frac{2M}{R}}} \exp \left( -\frac{1}{2} W \left( -\frac{1}{e} \left( \frac{M_0}{M} \right)^2 \right) \right). \quad (5.1.28)$$

Sur l'hypersurface, la racine de la trace de la métrique induite est donnée par :

$$\sqrt{h} = \sqrt{g_{00}g_{22}g_{33}} = R^2 \sin \theta \sqrt{1 - \frac{2M}{R}} \quad (5.1.29)$$

et la trace du tenseur de courbure par :

$$K = \frac{1}{r^2 \sqrt{g_{00}g_{11}}} \frac{d}{dr} \left( r^2 \sqrt{g_{00}} \right) \Big|_{r=R} = -\frac{2}{R} \sqrt{1 - \frac{2M}{R}} - \frac{M}{R^2 \sqrt{1 - \frac{2M}{R}}}. \quad (5.1.30)$$

Comme nous savons que le scalaire de Ricci de la métrique (5.1.26) est nulle ( $R = 0$ ), l'action d'Einstein-Hilbert devient :

$$I_{EH} = 0. \quad (5.1.31)$$

En remplaçant (5.1.29, 5.1.30, 5.1.31) dans (5.1.2), on obtient :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{8\pi} \int_0^{\beta_{GUP}} d\tau \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \theta (3M - 2R) - I_s \\ &= \beta_{GUP} \left( \frac{3}{2}M - R \right) - I_s. \end{aligned} \quad (5.1.32)$$

Pour que l'expression de la température locale (5.1.28) reste tout le temps bien définie, il faut imposer la condition

$$1 - \frac{2M}{R} > 0 \iff \frac{R}{2} > M. \quad (5.1.33)$$

D'autre part  $M_0$  est la masse minimale, on en déduit alors :

$$M_0 \leq M < \frac{R}{2}. \quad (5.1.34)$$

Cela veut dire que la cavité nous permet de contrôler le grossissement du trou noir, et que le GUP stoppe le processus d'évaporation quand la masse du trou noir atteint une masse minimale  $M_0$ .

Pour discuter les solutions possibles, nous traçons la courbe de la température locale en fonction de la masse (??). On remarque sur cette figure l'existence de trois branches de solutions possibles :

1.  $T > T_0$  : nous avons un grand trou noir.
2.  $T_c < T < T_0$  : nous avons un petit et un grand trous noirs.
3.  $T_c > T$  : pas de trous noirs.

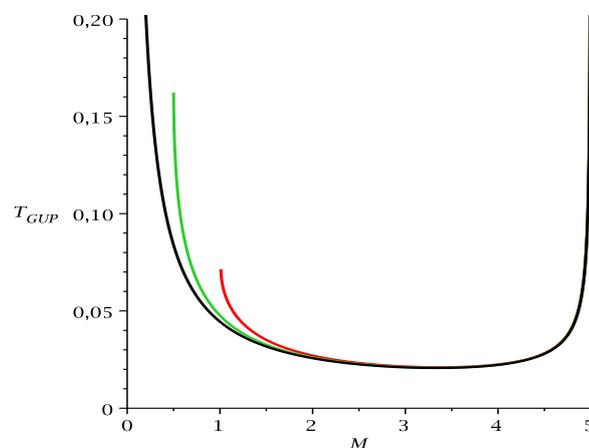


FIGURE 5.1 – Température locale en fonction de la masse : de gauche à droite on a les courbes dans le cas du HUP, SGUP et GUP.(courbe bleu), cas standard (courbe noire)

Il est facile de voir à partir de la fig.5.1 que le trou noir possède une masse critique  $M_c$  pour laquelle on a :

$$\frac{\partial T}{\partial M} = 0. \quad (5.1.35)$$

En utilisant (5.1.28) on obtient:

$$M_c \left[ 3 + W \left( -\frac{1}{e} \left( \frac{M_0}{M_c} \right)^2 \right) \right] - R = 0. \quad (5.1.36)$$

Cette équation possède de solutions réelles uniquement pour  $R \geq \delta x_0$ . En effectuant le développement en série de la fonction de Lambert (3.1.20), nous obtenons :

$$M_c = \frac{R}{6} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{12}{e} \left( \frac{M_0}{R} \right)^2} \right). \quad (5.1.37)$$

Dans le cas de cavités larges ( $R \rightarrow \infty$ ), on obtient le résultat standard :

$$M_c = \frac{R}{3}. \quad (5.1.38)$$

Dans l'analyse classique avec une cavité, le comportement de la température d'un petit trou noir ressemble à celui du grand trou noir, puisque le petit trou noir contient occupe un petit rayon de l'horizon par rapport à la taille de la cavité de telle sorte que sa température devient grande, tandis que le grand trou noir, qui est comparable à la taille de la cavité, possède une grande température à cause du facteur de décalage vers le rouge, puisque l'observateur local est pratiquement proche de l'horizon. Cependant, dans les calculs basés sur le GUP, le trou noir ne s'évapore pas complètement, en d'autres termes, la température maximale du petit trou noir est finie en raison du cut off.

Maintenant, nous sommes prêts pour analyser les paramètres thermodynamiques du trou noir de Schwarzschild dans une cavité isothermique avec le GUP à tous les ordres de la longueur de Planck. Nous considérons le cas  $\alpha = 1$ .

## 5.2 Énergie interne

L'énergie interne totale dans une région de rayon  $R$  est définie par :

$$E = \left. \frac{\partial I_E}{\partial \beta} \right|_A. \quad (5.2.1)$$

où  $A = 4\pi R^2$ . En remplaçant (5.1.27) dans (5.1.32), on obtient l'expression de l'action euclidienne en fonction de  $\beta$

$$I_E = \beta \frac{\frac{3}{2}M - R}{\sqrt{1 - \frac{2M}{R}}} - I_s \quad (5.2.2)$$

Dans le cas standard, l'action euclidienne soustraite est introduite pour normaliser l'énergie interne de l'espace plat chaud vide (géométrie de Schwarzschild avec  $M = 0$ ), alors que dans le cas du GUP, elle est introduite pour normaliser l'énergie interne du BHR à zéro.

pour cela, l'action s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}
I_E = \beta N &= \beta \left( \frac{\frac{3}{2}M - R}{\sqrt{1 - \frac{2M}{R}}} - \frac{\frac{3}{2}M_0 - R}{\sqrt{1 - \frac{2M_0}{R}}} \right) \\
&= \beta \left( \frac{\frac{3}{4}r_+ - R}{\sqrt{1 - \frac{r_+}{R}}} - \frac{\frac{3}{4}r_0 - R}{\sqrt{1 - \frac{r_0}{R}}} \right).
\end{aligned} \tag{5.2.3}$$

En remplaçant (5.2.3) dans (5.2.1), on obtient :

$$E = N + \beta \left. \frac{\partial N}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial \beta} \right|_A \tag{5.2.4}$$

avec

$$\frac{\partial N}{\partial M} = \frac{\partial}{\partial M} \left( \frac{\frac{3}{2}M - R}{\sqrt{1 - \frac{2M}{R}}} - \frac{\frac{3}{2}M_0 - R}{\sqrt{1 - \frac{2M_0}{R}}} \right) = -\frac{1 - 3\frac{M}{R}}{2\sqrt{1 - \frac{2M}{R}}} \tag{5.2.5}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \beta}{\partial M} &= \frac{\partial}{\partial M} \left( 8\pi L_{lp}^2 M \sqrt{1 - \frac{2M}{R}} \exp \left( -\frac{1}{2} W \left( -\frac{1}{e} \left( \frac{M_0}{M} \right)^2 \right) \right) \right) \\
&= \beta \frac{R(1 + 2W(y)) - MW(y)}{M(R - 2M)}.
\end{aligned} \tag{5.2.6}$$

En remplaçant dans (5.2.1), on obtient l'expression de l'énergie interne donnée par :

$$\begin{aligned}
E &= \frac{R}{2[R - M(3 - W(-y))]} \\
&\times \left[ (-2R + 3M[2 + W(-y)]) \sqrt{1 - \frac{2M}{R}} + \frac{(2R - M[6 + W(-y)]) \left(1 - \frac{3M_0}{2R}\right)}{\sqrt{1 - \frac{2M_0}{R}}} \right]
\end{aligned} \tag{5.2.7}$$

où  $y = \frac{\left(\frac{M_0}{M}\right)^2}{e}$  est une quantité très petite. On remarque que l'énergie interne s'annule au point  $M = M_0$  et a une singularité au point critique  $M = M_c$ .

La solution de l'équation (5.2.7) en fonction de la masse  $M$  est donnée par :

$$M = E - \frac{E^2}{2R} - \frac{M_0}{2} \left(1 - \frac{E}{R}\right) \tag{5.2.8}$$

Cette relation montre que la masse ADM (Arnowitt-Deser-Misner) est la somme de l'énergie

thermique, l'énergie gravitationnelle due à la cavité et l'énergie gravitationnelle du BHR. Pour  $R$  tendant vers l'infinie, la masse ADM devient  $M = E - \frac{M_0}{2}$ . Il est facile de voir que le GUP implique que  $E \neq M$ , et par conséquent nous devons utiliser la forme de la première loi de la thermodynamique donnée par  $dE = TdS$  au lieu de la forme  $dM = TdS$ , où  $S$  est l'entropie du trou noir.

### 5.3 Entropie

Maintenant, on va calculer l'entropie du trou noir en utilisant la formule :

$$S = \beta \left( \frac{\partial I_E}{\partial \beta} \right)_A - I_E. \quad (5.3.1)$$

En utilisant (5.2.3), on obtient :

$$\begin{aligned} S &= \beta \left( N + \beta \frac{\partial N}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial \beta} \Big|_A \right) - I_E \\ &= \beta^2 \frac{\partial N}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial \beta} \Big|_A \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

En remplaçant 5.2.5 et 5.2.6 dans (5.3.2) on obtient :

$$S = 4\pi M^2 \frac{(1 - 3\frac{M}{R})(1 + W(-y))}{1 - \frac{M}{R}(3 + W(-y))} e^{-\frac{W(-y)}{2}}. \quad (5.3.3)$$

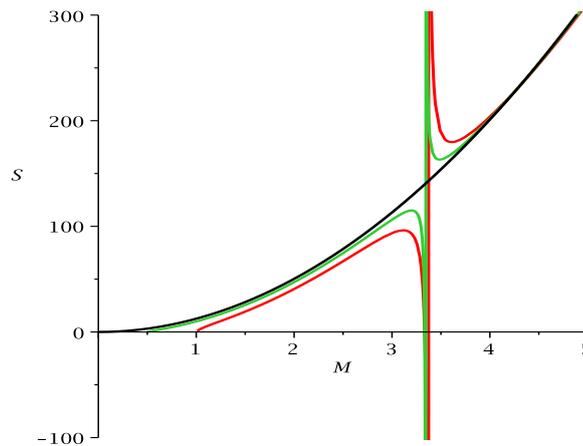


FIGURE 5.2 – Entropie en fonction de la masse d'un trou noir confiné dans une cavité : de gauche à droite le cas standard du HUP, Le SGUP et le GUP.

On remarque sur l'expression (5.3.3) et aussi sur la figure (5.2) que l'entropie est singulière au point critique  $M = M_c$  puisque  $S(M_c) = \infty$ , et l'entropie du BHR est nulle,

$S(M_0) = 0$ , à cause du facteur  $1 + W(-y)$  qui tend vers zéro pour  $y = \frac{1}{e}$ . Cela signifie que le BHR, caractérisé par une température maximale et une entropie nulle, peut être considéré comme l'état fondamental du trou noir. Cette interprétation est motivée par le fait que l'état fondamental est indépendant de la température. Nous observons également que l'entropie est une fonction du rayon de la cavité et de la longueur minimale ou ainsi donc elle est reliée au comportement asymptotique du champ gravitationnel, ce qui est le contraire du cas du HUP. On réécrit l'équation (5.3.3) de l'entropie en unités naturelles et sous la forme de la loi de Bekenstein-Hawking :

$$S = \frac{\pi r_H^2}{4G_{eff}(r_H, R)}. \quad (5.3.4)$$

On remarque que la constante de newton est remplacée par une constante de newton effective définie par :

$$G_N \rightarrow G_{eff}(r_H, R) = G_N \frac{1 - \frac{r_H}{2R} (3 + W(-y))}{\left(1 - \frac{3r_H}{2R}\right) (1 + W(-y))} e^{\frac{1}{2}W(-y)}. \quad (5.3.5)$$

Il est facile de voir que pour  $y \rightarrow 0$ ,  $G_{eff} \rightarrow G_N$ . Pour le cas d'une cavité large,  $R$  grand ou bien  $\frac{r_H}{R} \rightarrow 0$ , la constante de newton effective devient :

$$G_{eff}(r_H, R) = G_N \frac{e^{\frac{1}{2}W(-y)}}{(1 + W(-y))} \quad (5.3.6)$$

ce qui n'est pas un comportement asymptotiquement libre.

En développant l'expression (5.3.3) au premier ordre de  $y$ , on obtient :

$$S = 4\pi L_{Lp}^2 M^2 \left( 1 - \frac{3}{2e} \left( \frac{M_0}{M} \right)^2 \frac{1 - \frac{7M}{3R}}{1 - \frac{3M}{R}} \right). \quad (5.3.7)$$

Quand  $M_0 \rightarrow 0$ , on obtient la loi de Bekenstein-Hawking :

$$S = 4\pi L_{Lp}^2 M^2. \quad (5.3.8)$$

On en déduit que la loi de Bekenstein-Hawking n'est plus valable dans le cas GUP, par contre la première loi thermodynamique dans sa version,  $dE = TdS$ , est toujours satisfaite. Sur la figure (5.2), nous avons tracé l'entropie en fonction de la masse du trou noir. On remarque qu'il existe un intervalle de masse autour de la masse critique

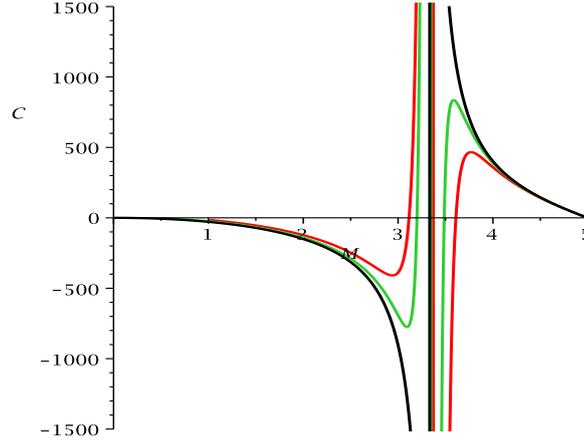


FIGURE 5.3 – La chaleur spécifique en fonction de la masse d’un trou noir confiné dans une cavité. De bas en haut le cas standard, le SGUP et le GUP.

$[M_1 = 3,1156, \quad M_2 = 3,6096]$  où la deuxième loi de la thermodynamique n’est plus valable. Nous allons vérifier ci-dessous que la chaleur spécifique du trou noir s’annule pour  $M_1$  et  $M_2$ .

## 5.4 Chaleur spécifique

Pour étudier la stabilité thermodynamique de trou noir, on va calculer la chaleur spécifique en tenant compte que la surface des événements est constante. En effet :

$$C = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_A = -\beta \left( \frac{\partial S}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial \beta} \right)_A. \quad (5.4.1)$$

En utilisant (5.1.27), (5.2.6), on obtient :

$$C = -4\pi L_{lp}^2 M^2 \frac{\alpha_1 W^3(-y) + \alpha_2 W^2(-y) + \alpha_3 W(-y) + \alpha_4}{(R - M(3 + W(-y)))^3} (R - 2M) e^{W(-y)} \quad (5.4.2)$$

avec  $\alpha_1 = 3M^2$ ,  $\alpha_2 = 18M^2 + R^2 - 7MR$ ,  $\alpha_3 = 21M^2 + R^2 - 9MR$ ,  $\alpha_4 = 2(3M - R)^2$ .

On remarque sur la figure (5.3) que pour :

1.  $M_0 < M < M_1$  :  $C < 0$  et le petit trou noir est localement instable.
2.  $M_1 < M < M_2$  : on a 2 cas. Dans le premier,  $M_1 < M < M_c$  ( $C > 0$ ), et dans le deuxième,  $M_c < M < M_2$  ( $C < 0$ ). On a aussi,  $C|_{M_1, M_2} = 0$ .
3.  $M_2 < M$  :  $C > 0$  et le grand trou noir est localement stable.

En remplaçant  $M$  par  $M_0$ , ou bien  $y = \frac{1}{e}$ , dans (5.4.2), on obtient l’expression de la chaleur

spécifique du BHR :

$$C|_{M_0} = -8\pi \frac{M_0^2}{\sqrt{e}R^2} \frac{1 - \frac{3M_0}{R}}{1 - \frac{2M_0}{R}}. \quad (5.4.3)$$

Sachant que  $W\left(\frac{-1}{e}\right) = 0$ . Pour les grandes cavités,  $\frac{M_0}{R} \ll 1$ , on a :

$$C|_{M_0} = -\frac{3}{\sqrt{e}}. \quad (5.4.4)$$

A partir de la formule (5.4.3), on remarque que  $C|_{M_0} < 0$  pour  $M_0 < \frac{R}{3}$  et  $C|_{M_0} > 0$  pour  $\frac{R}{3} < M_0 < \frac{R}{2}$ . Cela veut dire que le BHR est instable et il peut se transformé en un grand trou noir stable à travers une transition de phase. Dans notre cas la transition de phase de Gross-Perry-Yaffe [113] de l'espace plat chaud à un BHR est impossible puisque la région  $M < M_0$  est supprimée par le GUP. Ici, nous notons que l'utilisation de la masse ADM à la place de l'énergie dans la définition de la chaleur spécifique conduit à obtenir un BHR de chaleur spécifique nulle.

En utilisant le développement en série (3.1.20) dans l'expression (5.4.2) on obtient :

$$C = -8\pi L_{Lp}^2 M^2 \left( \frac{1 - \frac{3M_0}{R}}{1 - \frac{2M_0}{R}} \right) \left[ 1 - \frac{1}{2e} \left( \frac{M_0}{M} \right)^2 \frac{\left( 2 - 9\frac{M}{R} + 12 \left( \frac{M}{R} \right)^2 \right)}{\left( 1 - \frac{3M_0}{R} \right)^2} \right]. \quad (5.4.5)$$

Pour  $M_0 = 0$ , on obtient la relation habituelle de la chaleur spécifique donnée par :

$$C|_{BHR} = -8\pi L_{Lp}^2 M^2 \left( \frac{1 - \frac{3M}{R}}{1 - \frac{2M}{R}} \right). \quad (5.4.6)$$

Si la cavité est très grande ( $R \rightarrow \infty$ ), la chaleur spécifique devient :

$$C = -4\pi L_{Lp}^2 M^2 \left( 1 + \frac{W(-y) [1 + W(-y)]}{2} \right) e^{\frac{-W(-y)}{2}}. \quad (5.4.7)$$

## 5.5 Énergie libre de Gibbs et transition de phase de Hawking-Page

L'énergie libre on-shell est définie par  $F = \frac{I_E}{\beta}$ . En utilisant (5.2.3) on obtient :

$$F = \frac{\frac{3}{2}M - R}{\sqrt{1 - \frac{2M}{R}}} - \frac{\frac{3}{2}M_0 - R}{\sqrt{1 - \frac{2M_0}{R}}} \quad (5.5.1)$$

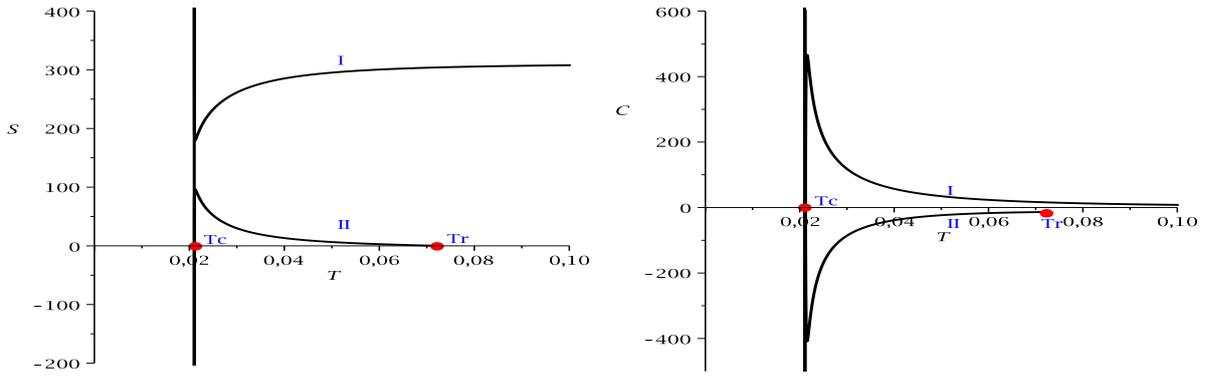


FIGURE 5.4 – Entropie et chaleur spécifique vs la température locale en présence d'un GUP pour  $R=10$ , et chaleur spécifique vs Température locale en présence du GUP pour  $R = 10$ .

Pour étudier la structure des trous noirs de masse minimale  $M_0 < \frac{R}{3}$ , nous allons étudier la variations des paramètres thermodynamiques en fonction de la température. Sur la figure (5.4), on montre les courbes de l'entropie et celle de la chaleur spécifique en fonction de la température locale sont tracées. Nous observons que la chaleur spécifique et l'entropie sont discontinues à la température critique  $T_c$ . Quand la température augmente au-delà de  $T_c$ , on remarque l'apparition de deux branches. La branche I ( $T > T_c$ ), correspond à un grand trou noir stable ( $LBH_+$ ) avec  $C > 0$ , et la branche II ( $T_c < T < T_0$ ) correspond à un petite trou noir instable ( $SBH_-$ ) avec  $C < 0$ . A la température du BHR  $T_0$ , la branche II disparaît et nous avons  $S|_{T_0} = 0$  et  $C|_{T_0} = -13.5731$ . La variation de l'énergie libre on-shell en fonction de la température est représentée dans la figure (5.5) où nous voyons que l'énergie libre présente un coude (kink) et est positive à la température critique  $T_c$ . Lorsque la température augmente au-delà de  $T_c$ , deux branches apparaissent. La branche I décroît rapidement et devient négative à la température de transition  $T_{tr}$ , où  $F(T_{tr}) = 0$ . D'autre part, la branche II reste positive et disparaît à la température de BHR  $T_0$ . De la figure (5.4), nous avons constaté que la chaleur spécifique est positive dans la branche I et négative dans la branche II. Donc, les branches I et II correspondent respectivement à la phase stable et la phase instable du trou noir. Et comme il existe une discontinuité de  $\frac{dF}{dT}$  au point  $T = T_c$  où également l'entropie est discontinue, à cette température, on en déduit qu'on a une transition de phase du premier ordre à cette température. Cela correspond à la transition de phase de type Hawking-Page, que nous décrivons dans ce qui suit par l'étude de la croissance off-shell du trou noir.

Pour ce faire, nous introduisons l'énergie libre off-shell qui joue le rôle d'un potentiel

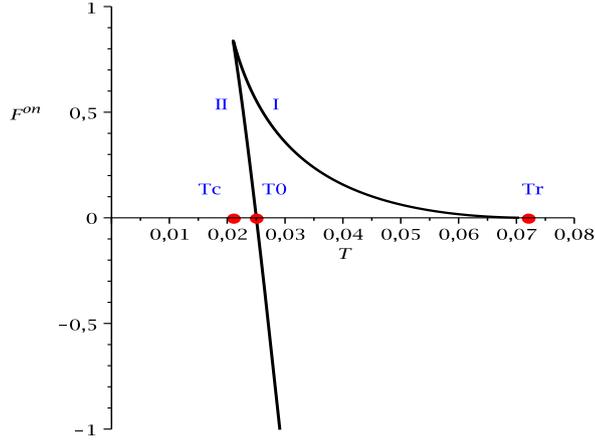


FIGURE 5.5 – Énergie libre vs température locale pour  $R=10$

effective dans l'ensemble canonique comme suit :

$$F^{off} = E - T^{off}S \quad (5.5.2)$$

ou  $T^{off}$  est un paramètre libre. De la figure (5.6), on remarque que l'énergie libre on-shell prend son maximum à  $M_c$  et est nulle à  $M_0$ . Le comportement de l'énergie libre off-shell contient un point d'inflexion à la température critique  $T_c$ , ce qui suggère la coexistence des deux phases,  $SBH_-$  et  $LBH_+$ . Cela suggère que la nucléation d'un trou noir stable se déroule à cette température. En effet, pour  $T_0 > T > T_c$ , on remarque l'apparence de deux extremums qui correspondent respectivement à  $SBH_-$  et  $LBH_+$ . Puisque nous avons  $F^{off}(M_+) < F^{off}(M_0) = 0 < F^{off}(M_-)$ , un nouveau type de transition de phase de Hawking-Page se déroule entre le  $BHR$  et la  $LBH_+$  à travers le  $SBH_-$ . Un exemple de ce type de transition se déroule à la température  $T = 0,004$  (5.6). Il est important de noter que le petit trou noir reste instable et joue le rôle de médiateur de la transition Hawking-Page. Pour  $T < T_c$ , il n'existe pas de trous noirs, alors que pour  $T \gtrsim T_{tr}$ , le  $SBH_-$  disparaît mais la  $LBH_+$  est toujours présente, ce qui implique que la transition du  $BHR$  à un  $LBH_+$  n'est pas possible en utilisant le processus off-shell. D'autre part, nous constatons que dans la région située entre  $M_1$  et  $M_2$  (5.2), où la deuxième loi de la thermodynamique n'est pas valable, il n'y a pas de transition de phase à partir d'un petit trou noir instable à un grand trou noir stable.

Enfin, nous discutons, en terme de masse de  $BHR$ , les conditions dans lesquelles la transition Hawking-Page se déroule. Pour cela, nous introduisons les quantités sans di-

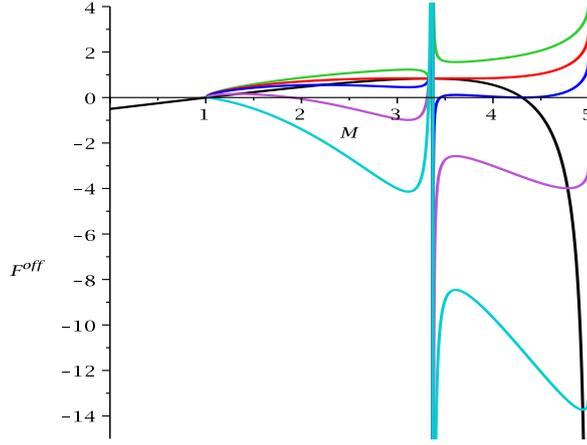


FIGURE 5.6 – Énergie off-shell vs Horizon en présence d'un GUP pour  $R=10$  pour différentes températures.

mensions suivants

$$x = \frac{M}{R}, \quad x_0 = \frac{M_0}{R} \quad (5.5.3)$$

dans (5.1.28) et (5.5.1), on obtient les expressions de la température et de l'énergie libre sans dimensions données par

$$t = RT = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}W\left(-\frac{1}{e}\left(\frac{x_r}{x}\right)^2\right)\right)}{8\pi L_{Pl}^2 x \sqrt{1-2x}} \quad \text{et} \quad f = \frac{F^{on}}{R} = \frac{\frac{3}{2}x - 1}{\sqrt{1-2x}} - \frac{\frac{3}{2}x_r - 1}{\sqrt{1-2x_r}} \quad (5.5.4)$$

comme nous savons la point de la transition de phase  $x_{tr}$  est la solution de l'équation  $f = 0$ , ou bien

$$\frac{\frac{3}{2}x_{tr} - 1}{\sqrt{1-2x_{tr}}} - \frac{\frac{3}{2}x_0 - 1}{\sqrt{1-2x_0}} = 0 \quad (5.5.5)$$

d'où

$$x_{tr} = \frac{x_0 - \frac{9}{4}}{2x_0 - 1}. \quad (5.5.6)$$

En remplaçant cette dernière dans (5.5.4), on obtient la température de transition donnée par

$$t_{tr} = \frac{(2x_0 - 1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{78}\pi L_{Pl}^2 (x_0 - \frac{9}{4})} \exp\left(-\frac{1}{2}W\left(-\frac{4x_0^2}{e}\left(\frac{x_0 - \frac{1}{2}}{x_0 - \frac{9}{4}}\right)^2\right)\right). \quad (5.5.7)$$

En utilisant les propriété de la fonction de Lambert, on obtient la condition

$$4x_0^2 \left(\frac{x_0 - \frac{1}{2}}{x_0 - \frac{9}{4}}\right)^{\frac{3}{2}} \leq 1 \quad (5.5.8)$$

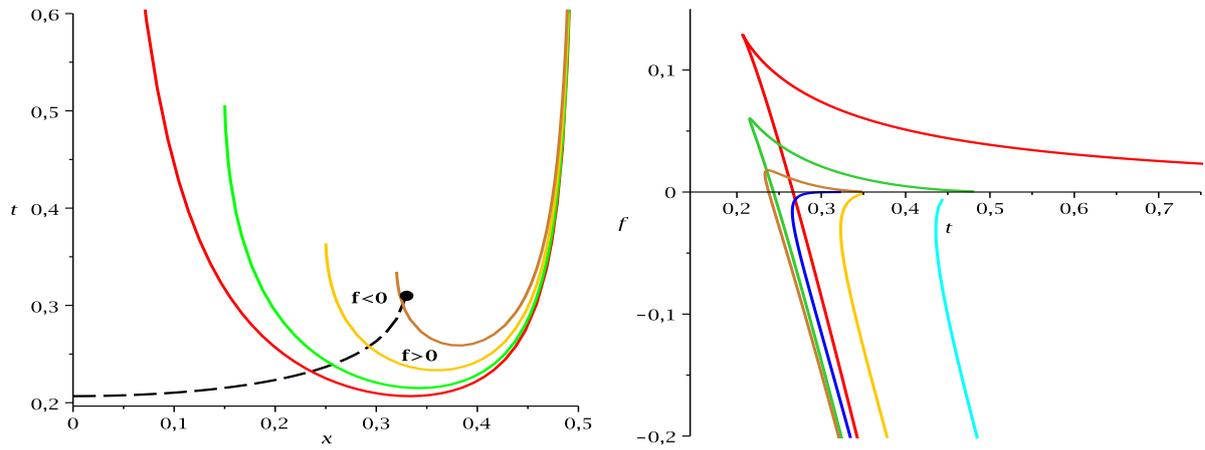


FIGURE 5.7 – (Gauche) La température en fonction de la masse du trou noir pour  $x_0 = 0.01, 0.15, 0.25, 0.32$  de gauche à droite. La courbe en pointillés marque les positions où l'énergie libre change de signe, et elle s'arrête au dessus de la ligne  $x_0 = 0.32$ . (Droite) L'énergie on-shell comme fonction de la température pour  $x_0 = 0.01, 0.15, 0.25, 1/3, 0.4, 0.45$ , de gauche à droite.

Cette inégalité montre que la transition de phase est possible seulement lorsque la masse BHR prend des valeur dans l'intervalle  $0 < x_0 < \frac{1}{3}$ . Une autre propriété est que la température de transition prend une valeur minimale  $t_{tr} \approx 0,2371$  pour  $x_0 \approx 0,23098$ . Sur la figure 5, on a tracé la courbe de la température réduite en fonction de la masse réduite pour différentes valeurs de  $x_r$ . La température présente un minimum ( $t_c = RT_C$ ) selon  $x_0$  et pour lequel on a  $f(t_c) > 0$ . Pour des valeurs de température supérieures à  $t_c$ , il existe deux branches possibles, une correspond à des valeurs approchant la masse  $x_0$  est à dire de petits trous noirs et l autre approche a  $x = \frac{1}{2}$ , c'est à dire de grands trous noirs. La branche représentant le petit trou noir donne toujours une énergie libre négative, alors que la branche représentant le grand trou noir correspond à une énergie libre positif. Il est également intéressant de noter que la branche sur laquelle l'énergie libre change de signe et se termine avant de traverser la branche de la température pour le cas  $x_0 < \frac{1}{3}$ . Par conséquent, on déduit qu'il y a une transition de phase du premier ordre d'un petit trou noir à un grand trou noir pour  $x_0 < \frac{1}{3}$ . La courbe de l'énergie libre redimensionnée en fonction de la température redimensionnée pour différentes valeurs de  $x_0$  est tracer a droite de la figure 5. Nous remarquons que lorsque nous augmentons la valeur de  $x_0$ , le pli de l'énergie libre se rapproche de l'axe  $T$ , et précisément pour  $x_0 = \frac{1}{3}$ , il se trouve sur le dessus de celui-ci. Si l'on augmente encore la valeur de  $x_0$ , le pli disparaît et l'énergie libre devient négatif pour toute valeur de la température et, par conséquent, il n'y a pas de transition de phase.

## 5.6 Stabilité dynamique locale

Dans cette section, nous allons étudier la stabilité thermodynamique de trou noir de Schwarzschild en fonction du rayon de la cavité et voir l'effet du GUP sur la stabilité en comparant nos résultats avec ceux de [?]. En mettant  $\alpha = 1$  dans (5.1.28), on obtient l'expression de la température locale en fonction de l'horizon de trou noir  $r_+ = 2M$  pour une cavité de rayon donnée  $R = r_B$  donnée par :

$$T_B = \frac{1}{4\pi r_+} \left(1 - \frac{r_+}{r_B}\right)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}W(-3/2r_+^2)}. \quad (5.6.1)$$

Cette équation peut être solutionner pour  $r_+$  en fonction des constantes  $r_B$  et  $T_B$ . On peut montrer que cette équation admet deux solutions réelles et positives, mais la relation précise entre  $r_B$  et  $T_B$  laisse l'existence de ces solutions inconnue. D'autre part, nous avons deux solutions dégénérées, le long de la trajectoire  $r_+ = \mathcal{C}(r_B)$ , définie implicitement par les racines réelles de

$$2r_B - r_+ \left(3 + W\left(-3/2r_+^2\right)\right) = 0. \quad (5.6.2)$$

Ensuite, pour un rayon de la cavité donné, la température qui à partir de laquelle se produisent des solutions est donnée par

$$T_B = \frac{r_B}{8\pi^2 \mathcal{C}^3(r_B)} \frac{e^{-\frac{1}{2}W(-3/2\mathcal{C}^2(r_B))}}{[1 + W(-3/2\mathcal{C}^2(r_B))]} \quad (5.6.3)$$

Dans la figure 6, nous traçons ce comportement comme des tranches constantes de la température locale à travers la surface  $(r_+, r_B)$ . Nous observons que pour une taille donnée de la cavité la solution décale vers la gauche pour les hautes températures locales, alors qu'il décale vers la droite pour les basses températures. Les points d'inflexion de la courbe où la température est donnée par l'équation (5.6.3), restent sur la trajectoire  $\mathcal{C}(R)$ . Il est clair que nous avons deux branches distinctes vers la droite du point d'inflexion représentant deux trous noirs distincts qui sont les branches I et II discuté ci-dessus. Dans la limite des grandes cavités, la trajectoire tend asymptotiquement vers la ligne  $2R/3$  exactement comme dans le cas de HUP. La différence la plus importante avec l'analyse de HUP, est que la trajectoire est définie seulement pour  $R > (\delta x_0) \approx 2.019$ .

En utilisant (5.4.2), on obtient :

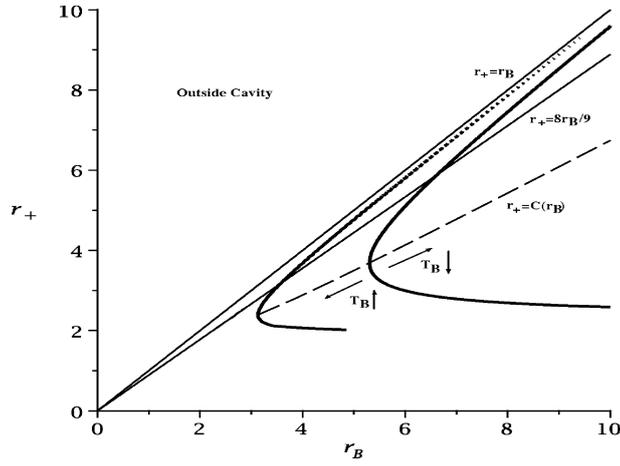


FIGURE 5.8 – Les lignes de températures constantes sur la surface  $(T_B, r_B, r_+)$  pour  $\alpha = 1$ . On montre le locus  $r_+ = C(r_B)$  dans les cas du HUP et GUP respectivement.

$$C > 0 \quad \text{pour } r_+ < R < \frac{r_+}{2} \left( 3 + W \left( -3/2r_+^2 \right) \right). \quad (5.6.4)$$

D'autre part l'énergie libre est  $F = 0$  pour  $R = 9r_+/8$  et  $F < 0$  pour  $r_+ < R < 9r_+/8$ , exactement comme dans le cas du HUP.

Pour étudier la stabilité locale de la solution classique, on calcule la dérivée deuxième de l'action euclidienne par rapport à l'horizon. En effet, on obtient :

$$\frac{\partial^2 I_E}{\partial r_+^2} = Q(r_+, R) T^2 C, \quad (5.6.5)$$

avec  $Q(r_+, R)$  donnée par :

$$Q(r_+, R) = -\frac{6\pi^2}{R(R-r_+)W(-3/2r_+^2)} \left[ \frac{W(-3/2r_+^2) + 3(1-2R/3r_+)}{1+W(-3/2r_+^2)} \right]^2. \quad (5.6.6)$$

qui toujours positive à cause  $W(-3/2r_+^2) < 0$ . En effet, l'équation (5.6.5) montre qu'il y a une équivalence entre la stabilité dynamique locale de la solution classique et la stabilité thermodynamique locale de la configuration d'équilibre, c-à-d,  $\frac{\partial^2 I_E}{\partial r_+^2} > 0 \Leftrightarrow C > 0$ .

# Chapitre 6

## Solution de Schwarzschild inspirée de la Géométrie non commutative

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la solution de Schwarzschild inspirée de la géométrie non commutative trouvée par Nicolini et al. Comme nous l'avons déjà mentionné dans l'introduction, ce genre de solutions des équations d'Einstein s'obtient en gardant la forme standard du tenseur d'Einstein dans les équations et en introduisant un tenseur impulsion-énergie corrigé par les effets induits par la non commutativité des coordonnées de l'espace-temps. Concrètement cela veut dire que nous allons chercher la solution des équations D'Einstein (2.3.33) avec la source du tenseur impulsion-énergie exprimée par la distribution de matière définie par (3.2.16).

### 6.1 Distribution de matière inspirée de la géométrie non commutative

Nous avons vu dans le formalisme de la géométrie non commutativité, que la structure ponctuelle usuelle a été remplacée par des objets étendus dans l'espace plat. Mathématiquement cela se traduit en substituant à la distribution usuelle de Dirac une distribution étendue gaussienne. En utilisant (3.2.16), on peut écrire la distribution de matière d'une source gravitationnelle statique sous la forme :

$$\rho(r) = \frac{M}{(4\theta\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{r^2}{4\theta}}. \quad (6.1.1)$$

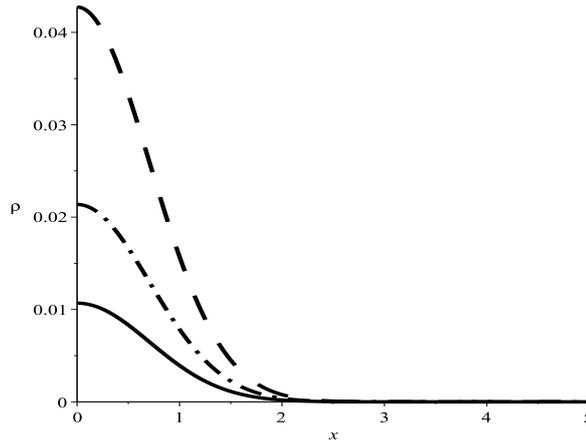


FIGURE 6.1 – Distribution de matière inspirée de la géométrie non commutative.

Cette relation signifie que les particules de masse  $M$  ne sont plus localisées parfaitement en un point, mais elles diffusent à travers une région de largeur  $\sqrt{\theta}$ . C'est une conséquence de l'incertitude intrinsèque induite par la non commutativité des coordonnées. Cette densité de matière est caractérisée par les propriétés suivantes :

— au voisinage de l'origine,  $\frac{r}{\sqrt{4\theta}} \ll 1$ , on peut écrire :

$$\rho(r) = \rho(0) + r \left. \frac{d}{dr} \rho(r) \right|_{r=0} + \dots = \rho(0) \quad (6.1.2)$$

— asymptotiquement très loin de l'origine,  $r \gg 2M$  on obtient  $\rho(r) = 0$ .

De ces deux propriétés, on peut prédire que la solution que nous cherchons va tendre vers un espace de De Sitter pour les petites échelles et vers un espace de type Schwarzschild aux grandes échelles(6.1) .

## 6.2 Élément de longueur

L'élément de longueur correspondant à un espace-temps statique, et symétrie sphérique et donné par :

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (6.2.1)$$

Puisque cette métrique (6.2.1) a la même forme que (2.4.7), cela signifie que les connexions et le tenseur de Riemann de cette métrique sont les mêmes que ceux de la métrique (2.4.7) données respectivement par (2.4.12) et (2.4.17 – 2.4.24) . En utilisant (2.3.49), (6.2.1) et (2.4.21 – 2.4.24) dans (2.3.33) , on obtient les équations d'Einstein :

$$e^{-2\beta} \left( \frac{2\beta'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 8\pi\rho_m \quad (6.2.2)$$

$$e^{-2\beta} \left( \frac{2\alpha'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 8\pi p \quad (6.2.3)$$

$$\frac{e^{-2\beta}}{2} \left( 2\alpha'' + \frac{(2\alpha')^2}{2} - \frac{(2\beta)'}{2} (2\alpha)' + 2\frac{\alpha' - \beta'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = 8\pi p_t. \quad (6.2.4)$$

La dernière équation (6.2.4) est équivalente à l'équation de Tolmann-Oppenheimer-Volkoff qui s'obtient en appliquant la condition de conservation covariante de tenseur impulsion-énergie :

$$T_{;v}^{\mu\nu} = \partial_\nu T^{\mu\nu} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu T^{\lambda\nu} + \Gamma_{\nu\lambda}^\nu T^{\mu\lambda} = 0. \quad (6.2.5)$$

En utilisant (2.4.12) il est facile d'obtenir

$$\partial_r T_r^r = -\frac{1}{2} g^{00} \partial_r g_{00} (T_r^r - T_0^0) - \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \partial_r g_{\theta\theta} (T_r^r - T_\theta^\theta) - \frac{1}{2} g^{\varphi\varphi} \partial_r g_{\varphi\varphi} (T_r^r - T_\varphi^\varphi). \quad (6.2.6)$$

En substituant (2.4.1) et (6.2.1) dans (6.2.6), on obtient l'expression de la pression tangentielle

$$p_t = p - \frac{r}{2} p' + \alpha' r (\rho + p). \quad (6.2.7)$$

On remarque que le système d'équations (6.2.2 – 6.2.4) est sous déterminé, car il est constitué de trois équations indépendantes et de quatre fonctions inconnues  $\{\alpha, \beta, p, p_t\}$ . Pour compléter le système, il faut ajouter une hypothèse physique ou mathématique. Dans ce travail, on vas postuler que l'équation d'état de la matière est de la forme

$$p + \rho = 0 \iff p = -\rho = \frac{M}{(4\theta\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{r^2}{4\theta}}. \quad (6.2.8)$$

Cette équation d'état fût introduite d'abord par Sakharov [140] en 1965 afin de lifter la singularité de Schwarzschild en l'a remplaçant par le vide de De Sitter. Une pression radiale non nulle est nécessaire pour équilibrer la force gravitationnelle vers l'intérieur, et éviter l'effondrement vers le centre de la matière. Cet effet est une résultante de la non commutativité de l'espace-temps. Dans ce cas le système d'équation (6.2.2, 6.2.3, 6.2.7)

devient :

$$e^{-2\beta} \left( \frac{2\beta'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 8\pi\rho \quad (6.2.9)$$

$$e^{-2\beta} \left( \frac{2\alpha'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = -8\pi\rho \quad (6.2.10)$$

$$-\rho - \frac{r}{2}\rho' = p_t. \quad (6.2.11)$$

En remplaçant (6.2.8) dans (6.2.11), on obtient l'expression exacte de la pression tangentielle

$$p_t = -\rho - \frac{r}{2}\partial_r\rho = -\frac{M}{(4\theta\pi)^{\frac{3}{2}}} \left( 1 - \frac{r^2}{4\theta} \right) e^{-\frac{r^2}{4\theta}}. \quad (6.2.12)$$

La somme des deux équations (6.2.9) et (6.2.10) nous donne

$$\beta' + \alpha' = 0 \Leftrightarrow \beta = -\alpha \quad (6.2.13)$$

à une constante près qu'on peut choisir égale à zéro. En remplaçant (6.2.13) (6.2.9) et intégrant par rapport à  $r$ , on obtient

$$e^{-2\beta} = e^{2\alpha} = 1 - \frac{2M(r)}{r} \quad (6.2.14)$$

avec

$$M(r) = 4\pi \int^r dx x^2 \rho(x) = \frac{2M\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right)}{\sqrt{\pi}}. \quad (6.2.15)$$

où  $\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right)$  est la fonction gamma incomplète définie par

$$\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right) = \int_0^{\frac{r^2}{4\theta}} dt t^{\frac{1}{2}} e^{-t}. \quad (6.2.16)$$

En remplaçant (6.2.14) dans (6.2.1), on obtient la solution de solution de Schwarzschild inspirée de la géométrie non commutative donnée par

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{4M\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right)}{\sqrt{\pi}r} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{4M\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right)}{\sqrt{\pi}r} \right) dr^2 + r^2 \left( d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \right). \quad (6.2.17)$$

Comme on l'a déjà prédit dans l'analyse sur la distribution de matière, cette métrique devient une métrique de De Sitter aux petites distances, et une métrique de Schwarzschild

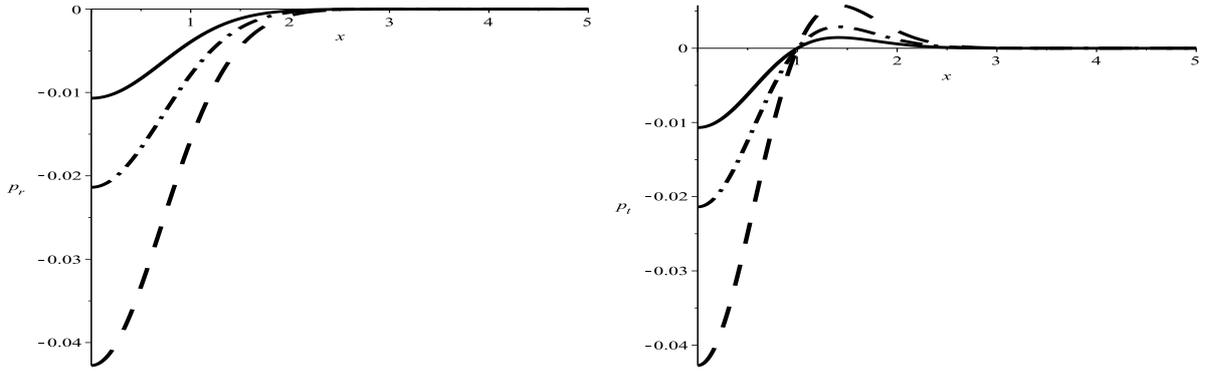


FIGURE 6.2 – Le pression radiale et la pression tangentielle.

aux grandes distances. En effet, le développement de Taylor de la fonction gamma pour  $r \ll 2\sqrt{\theta}$  à l'ordre  $O(r^4)$ , nous donne la métrique d'un espace de De Sitter

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{\Lambda_{eff}}{3} r^2\right) dt^2 + \left(1 - \frac{\Lambda_{eff}}{3} r^2\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (6.2.18)$$

avec une constante cosmologique effective donnée par  $\Lambda_{eff} = \frac{M}{\sqrt{\pi}\theta^{\frac{3}{2}}}$ . On en déduit que la région singulière dans le cas commutative est remplacée par un noyau régulier de De Sitter dans le cas non commutative. D'autre part pour  $r \gg 2\sqrt{\theta}$ , correspondant à grandes distances, on a la relation  $\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right) \rightarrow \gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ , d'où la métrique (6.2.17) qui prend la forme de celle de Schwarzschild (2.4.35).

### 6.3 Singularités et horizons

Comme nous savons, les horizons des événements s'obtiennent en résolvant l'équation suivante :

$$g_{00}(r_h) = 0. \quad (6.3.1)$$

En substituant (6.2.17) dans (6.3.1), on obtient

$$r_h = \frac{4M}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_h^2}{4\theta}\right). \quad (6.3.2)$$

Cette équation ne possède pas de solutions analytiques, alors on détermine numériquement l'existence des horizons en traçant la courbe de  $g_{00}$  en fonction de  $r_h$  (voir Fig. 6.3). Il est facile de voir que la non commutativité de l'espace-temps introduit un nouveau comportement par rapport au trou noir de Schwarzschild standard. Au lieu d'un seul horizon d'événement, il existe différentes possibilités :

1. Un horizon dégénéré  $r_0 = 1.5112\sqrt{4\theta}$ , correspondant au trou noir minimal avec une masse  $M = M_0 \simeq 0.9520\sqrt{4\theta}$ .
2. Deux horizons pour  $M > M_0$  : un horizon de Cauchy et un horizon d'événement.
3. Pas d'horizon pour  $M < M_0$ .

Compte tenu de ces résultats, il peut y avoir aucun trou noir si la masse  $M$  est inférieure à une minimale donnée par  $M_0$ . En outre, contrairement au cas commutative, il peut y avoir deux horizons pour les grandes masses.

Maintenant nous allons étudier l'existence des singularités en calculant le scalaire de Ricci. En effet en prenant la trace des équations d'Einstein on montre que le scalaire de Ricci est donné par :

$$\begin{aligned}
 R &= 8\pi g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = 16\pi\rho_m(r) \left(2 - \frac{r^2}{4\theta}\right) \\
 &= \frac{16M}{\pi^{\frac{1}{2}}(4\theta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{r^2}{4\theta}} \left(2 - \frac{r^2}{4\theta}\right).
 \end{aligned} \tag{6.3.3}$$

En substituant  $r = 0$  dans cette expression on obtient :

$$R(0) = \frac{4M}{\pi^{\frac{1}{2}}\theta^{\frac{3}{2}}} \tag{6.3.4}$$

qui est une quantité finie. On en déduit que métrique corrigée par les effets non commutatifs est régulière au point  $r = 0$ .

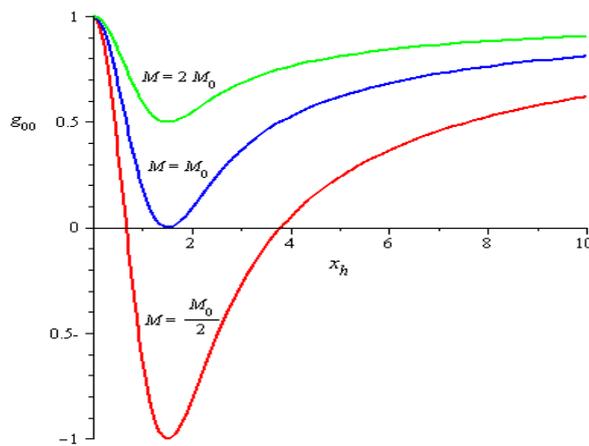


FIGURE 6.3 – Evolution de la métrique  $g_{00}$  en fonction de l'horizon pour plusieurs valeurs de la masse.

## 6.4 Thermodynamique

Pour garder notre traitement des lois qui régissent la thermodynamique d'un trou noir inspiré de la géométrie non commutative indépendant du paramètre de non commutativité, nous introduisons le changement de variables suivant :

$$r \rightarrow 2\sqrt{\theta}x, \quad M \rightarrow 2\sqrt{\theta}m, \quad t \rightarrow 2\sqrt{\theta}y. \quad (6.4.1)$$

Dans ce cas l'élément de longueur (6.2.17) devient :

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{4M\gamma_x}{x\sqrt{\pi}}\right) dy^2 + \left(1 - \frac{4M\gamma_x}{x\sqrt{\pi}}\right)^{-1} dx^2 + x^2 \left(d\theta^2 + x^2 \sin(\theta) d\phi^2\right) \quad (6.4.2)$$

où  $\gamma_x \equiv \gamma\left(\frac{3}{2}, x^2\right)$ . Dans ce qui suit, nous posant aussi  $\eta_x \equiv \gamma\left(\frac{5}{2}, x^2\right)$ . L'horizon du trou noir, l'horizon et la masse de trou noire minimale deviennent respectivement

$$x_h = \frac{4M}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{3}{2}, x_h^2\right), \quad x_0 = 1.5112, \quad m_0 \simeq 0.9520. \quad (6.4.3)$$

Il est facile de montrer que ce changement de variables conduit à une ré-définition des géométriques du problème :

$$\left\{g_{\mu\nu}, ds^2, G_{\mu\nu}, R\right\}(r, M) \rightarrow \left\{g_{\mu\nu}, 4\theta ds^2, 4\theta G_{\mu\nu}, 4\theta R\right\}(x, m) \quad (6.4.4)$$

et aussi à une ré-définition des quantités thermodynamiques :

$$\{I_E, E, F, C, S\}(r, M) \rightarrow \left\{(4\theta)^2 I_E, (4\theta)^{\frac{3}{2}} E, (4\theta)^{\frac{3}{2}} F, (4\theta)^2 C, (4\theta)^2 S\right\}(x, m). \quad (6.4.5)$$

Ces lois d'échelle peuvent jouer un rôle essentiel dans les transitions de phases. Comme nous le savons, la température de Hawking d'un espace-temps statique et sphérique est reliée à la surface de la gravité de trou noir par la relation

$$T_h = \frac{\kappa}{2\pi'}, \quad (6.4.6)$$

où la surface de la gravité est définie géométriquement par

$$\kappa = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial g_{yy}}{\partial x} \right)_{x_h}. \quad (6.4.7)$$

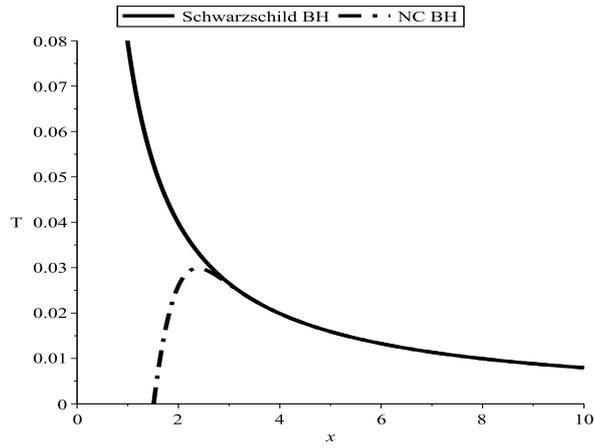


FIGURE 6.4 – Le température vs Cas standard (courbe rouge) et cas non commutative (courbe bleu)

En substituant (6.4.2) et (6.4.7) dans (6.4.6), on obtient la température sans dimension de trou noir de Schwarzschild inspiré de la géométrie non commutative :

$$T_h = \frac{1}{4\pi x_h} \left( 1 - 2x_h^3 \frac{e^{-x_h^2}}{\gamma_{x_h}} \right). \quad (6.4.8)$$

Pour étudier le comportement de la température, on a tracé la courbe dans la figure (6.4). On remarque que la température dans le cas non commutatif et la température dans le cas standard du trou noir de Schwarzschild ont le même comportement aux grandes échelles de distance, mais à basses échelles, la température dans le cas non commutatif atteint un maximum situé en  $x_1 \simeq 2.437$ , puis chute rapidement et atteint zéro pour  $x_0 \simeq 1.5112$  correspondant au trou noir minimal. Par contre la température dans le cas standard diverge vers l'infini.

Passons maintenant au calcul de l'entropie de Bekenstein-Hawking en utilisant la première loi de la thermodynamique :

$$dS = \frac{dm}{T_h}. \quad (6.4.9)$$

En substituant (6.4.3) et (6.4.8) dans (6.4.9), on obtient

$$S = \pi^{\frac{3}{2}} \int \frac{x_h dx_h}{\gamma_{x_h}}, \quad (6.4.10)$$

et en intégrant par parties on a :

$$S = \frac{\pi x_h^2}{G(x_h)} - \frac{\pi x_e^2}{G(x_e)} - 2\pi^{\frac{3}{2}} \int_{x_e}^{x_h} \frac{x_h^4 e^{-x_h^2}}{\gamma_{x_h}^2} dx_h. \quad (6.4.11)$$

Contrairement à certains travaux sur la thermodynamique des trous noirs sur un espace-temps non commutatif qui postulent la validité de la loi des aires de Bekenstein-Hawking pour l'entropie,  $S \sim \pi x_h^2$  et par conséquent les résultats thermodynamiques et l'étude des transition des phase incorrectes, on a trouvé une entropie corrigée par le fait de la non commutativité et qui dévie de cette fameuse loi de Bekenstein-Hawking. En réalité ce résultat n'est pas surprenant, car la géométrie non commutative est une version de la théorie des cordes où on a déjà trouvé des corrections à la loi de Beckenstein-Hawking.

Maintenant on passe au calcul de la chaleur spécifique définie par :

$$C = \frac{dm}{dT_h} = \frac{dx_h}{dT_h} \frac{dm}{dx_h}. \quad (6.4.12)$$

En utilisant (6.4.3) et (6.4.10), on obtient

$$C = \frac{dm}{dT_h} = \frac{dx_h}{dT_h} \frac{\sqrt{\pi} \left( 1 - 2x_h^3 \frac{e^{-x_h^2}}{\gamma_{x_h}} \right)}{4\gamma_{x_h}}. \quad (6.4.13)$$

# Chapitre 7

## Thermodynamique du trou noir de Schwarzschild inspiré de la géométrie non commutative dans une cavité isothermique

Dans ce chapitre nous allons étudier la thermodynamique du trou noir de Schwarzschild inspiré de la géométrie non commutative en utilisant le formalisme de l'action euclidienne développé au chapitre 4.

### 7.1 Action euclidienne GHY du trou noir en présence du GUP

Commençant d'abord par appliquer la rotation de Wick à notre métrique (6.4.2) :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{4m\gamma_x}{x\sqrt{\pi}}\right) dy^2 + \left(1 - \frac{4m\gamma_x}{x\sqrt{\pi}}\right)^{-1} dx^2 + x^2 \left(d\vartheta^2 + x^2 \sin(\vartheta) d\phi^2\right) \quad (7.1.1)$$

L'action euclidienne appliquée au trou noir de Schwarzschild inspiré de la géométrie non commutative confiné d'une cavité isotherme de rayon  $X$  fini est donnée par :

$$\begin{aligned} I_E &= I_1 - I_{sb} = I_{EH} + I_m + I_{GHY} - I_{sb} \\ &= -\frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{g} (R - 8\pi T_\mu^\mu) + \frac{1}{8\pi} \int d^4x \sqrt{\gamma} K - I_{sb} \end{aligned} \quad (7.1.2)$$

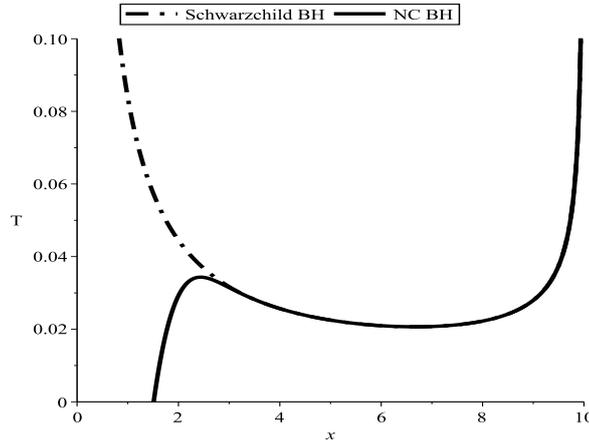


FIGURE 7.1 – Température locale vs Horizon pour  $X = 10$  : cas standard (traits) et cas non commutative (ligne solide).

où  $K$  est la trace du tenseur de courbure intrinsèque  $K_{ij}$  défini sur la frontière  $S^1 \times S^2$  ( $x = \text{const}$ ) et  $\gamma$  est le déterminant de la 3-métrie induite  $\gamma_{ij}$ . Le terme soustrait est tout simplement l'action de trou noir minimal. La longueur propre de la frontière  $S^1$  est donnée par :

$$\beta = \int_0^{\beta_H} dy \sqrt{g_{yy}(X)} = \frac{4\pi x_H}{1 - 2x_H^3 \frac{e^{-x_H^2}}{\gamma_{x_H}}} \sqrt{1 - \frac{4m\gamma_X}{\sqrt{\pi X}}}. \quad (7.1.3)$$

En inversant cette relation, on obtient la température locale

$$T = \frac{T_h}{\sqrt{1 - \frac{4m\gamma_X}{\sqrt{\pi X}}}} = \frac{1 - 2x_H^3 \frac{e^{-x_H^2}}{\gamma_{x_H}}}{4\pi x_H \sqrt{1 - \frac{4mM\gamma_X}{\sqrt{\pi X}}}} \quad (7.1.4)$$

La courbe de la température locale en fonction de l'horizon est tracée dans la figure (??) pour  $X = 10$ . Nous observons qu'on peut distinguer trois régions distinctes :

1.  $0 < T < T_2$  : on a une seule solution représentant un petit trou noir.
2.  $T_2 < T < T_1$  : on a deux solutions distinctes l'une représente un petit trous noir et l'autre représente un grand trou noir.
3.  $T > T_1$  : on a seulement la solution représentant le grand trou noir.

On remarque que la température dans le cas non commutatif présente deux extremums : un maximum local  $T_1 \approx 0.034$  au point  $x_1 \approx 2.4370$  et un minimum local  $T_2 \approx 0.021$  au point  $x_2 \approx 6.6666$ . Par contre la température locale du cas standard ne présente qu'un minimum local  $T_2$  au point  $x_2 \approx 6.6666$ . En plus, la différence entre le comportement de la température du trou noir confiné dans une cavité dans le cas non commutatif avec

le comportement dans le cas commutatif montre que la dernière étape du processus d'évaporation dans le cas non commutatif est un trou noir de masse minimale  $m_0$  et de température zéro. Ce comportement de la température montre que la transition de phase habituelle de Hawking-Page entre l'espace plat chaud (HFS) et le grand trou noir stable est remplacé par la transition entre un petit trou noir et un grand trou noir stable.

En contractant (2.4.35) et en substituant dans (7.1.2), on obtient

$$I_E = I_1 - I_{sb} = \int d^4x \sqrt{g} T_\mu^\mu + \frac{1}{8\pi} \int d^4x \sqrt{\gamma} K - I_{sb}. \quad (7.1.5)$$

En utilisant (6.2.8) et (6.2.12) on obtient

$$\begin{aligned} I_{EH} + I_m &= \int d^4x \sqrt{g} T_\mu^\mu \\ &= -\frac{2m}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int dy dx d\theta d\phi x^2 \sin \theta e^{-x^2} (2 - x^2) \\ &= -\frac{8m\beta_H}{\pi^{\frac{1}{2}}} \int dx x^2 \sin \theta e^{-x^2} (2 - x^2). \end{aligned} \quad (7.1.6)$$

Avec le changement de variable  $t = x^2$ , on obtient

$$\begin{aligned} I_{EH} + I_m &= -\frac{4m\beta_H}{\pi^{\frac{1}{2}}} \int_{x_H}^X dt t^{\frac{1}{2}} e^{-t} (2 - t) \\ &= \frac{4m\beta_H}{\sqrt{\pi}} (\eta_X - 2\gamma_X - \eta_{x_H} + 2\gamma_{x_H}). \end{aligned} \quad (7.1.7)$$

Au bord de la cavité la métrique se réduit à la 3-métrique induite suivante :

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{4m\gamma_X}{X\sqrt{\pi}} \right) dy^2 + X^2 \left( d\theta^2 + X^2 \sin(\theta) d\phi^2 \right). \quad (7.1.8)$$

La racine du déterminant de cette métrique induite est donnée par :

$$\sqrt{\gamma} = X^2 \sin \theta \sqrt{1 - \frac{4m\gamma_X}{X\sqrt{\pi}}}. \quad (7.1.9)$$

En utilisant la définition de la trace du tenseur de courbure intrinsèque

$$K = - \frac{1}{x^2 \sqrt{g_{00} g_{xx}}} \frac{d}{dx} \left( x^2 \sqrt{g_{00}} \right) \Big|_{x=X} \quad (7.1.10)$$

on obtient

$$K = -\frac{2}{X} \sqrt{1 - \frac{4m\gamma_X}{X\sqrt{\pi}}} - \frac{\frac{2M}{\sqrt{\pi}} (\gamma_X - 2X^3 e^{-X^2})}{X^2 \sqrt{1 - \frac{4m\gamma_X}{X\sqrt{\pi}}}}. \quad (7.1.11)$$

En substituant (7.1.9) et (7.1.11) dans l'expression de l'action de volume, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi} \oint d^3x \sqrt{\gamma} K &= \frac{-1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{\beta_H} dy d\theta d\varphi \sin \theta \left( 2X - \frac{8m\eta_X}{\sqrt{\pi}} + \frac{2m}{\sqrt{\pi}} (\gamma_X - 2X^3 e^{-X^2}) \right) \\ &= -\beta_H \left( X - \frac{3m\gamma_X}{\sqrt{\pi}} - \frac{2m}{\sqrt{\pi}} X^3 e^{-X^2} \right). \end{aligned} \quad (7.1.12)$$

En utilisant les propriétés de la fonction gamma incomplète, on obtient

$$\frac{1}{8\pi} \oint d^3x \sqrt{\gamma} K = -\beta_H \left( X - \frac{2m}{\sqrt{\pi}} (3\gamma_X - \eta_X) \right). \quad (7.1.13)$$

En substituant (7.1.7, 7.1.13) dans l'expression de l'action  $I_1$ , on obtient

$$I_1 = \frac{-\beta X}{\sqrt{g_{00}(X)}}. \quad (7.1.14)$$

L'action euclidienne soustraite  $I_{sb}$  est évaluée sur la même métrique avec  $S^1 \times S^2$  et est obtenue tout simplement à partir de l'expression de  $\frac{I_1}{\beta}$  :

$$I_{sb} = \frac{-\beta X}{\sqrt{g_{00}(X)}} \Big|_{M \rightarrow M_0, x_H \rightarrow x_0} \quad (7.1.15)$$

en substituant (7.1.14) et (7.1.15) dans (7.1.5), on obtient l'expression de l'action euclidienne du trou noir de Schwarzschild inspiré de la géométrie non commutative :

$$I_E = \beta X \left[ \frac{1 - \frac{2m_0}{X\sqrt{\pi}} (\eta_X - \gamma_X - 2\eta_{x_0} + 4\gamma_{x_0})}{\sqrt{1 - \frac{4m_0\gamma_X}{\sqrt{\pi}X}}} - \frac{1 - \frac{2m}{X\sqrt{\pi}} (\eta_X - \gamma_X - 2\eta_{x_H} + 4\gamma_{x_H})}{\sqrt{1 - \frac{4m\gamma_X}{\sqrt{\pi}X}}} \right]. \quad (7.1.16)$$

En substituant (6.4.3) dans (7.1.16), on obtient :

$$I_E = \beta X \left[ \frac{1 - \frac{x_0}{2X\gamma_{x_0}} (\eta_X - \gamma_X - 2\eta_{x_0} + 4\gamma_{x_0})}{\sqrt{1 - \frac{x_0\gamma_X}{X\gamma_{x_0}}}} - \frac{1 - \frac{x_H}{2X\gamma_{x_H}} (\eta_X - \gamma_X - 2\eta_{x_H} + 4\gamma_{x_H})}{\sqrt{1 - \frac{x_H\gamma_X}{X\gamma_{x_H}}}} \right]. \quad (7.1.17)$$

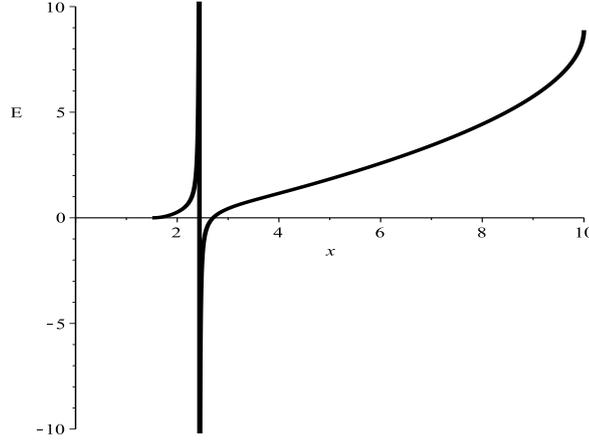


FIGURE 7.2 – Évolution de l'énergie interne du trou noir inspiré de la géométrie non commutative confiné dans une cavité isotherme en fonction de  $x_H$  pour  $X = 10$ .

## 7.2 Paramètres thermodynamiques

### 7.2.1 Énergie interne

En substituant (7.1.17) dans la définition de l'énergie interne (5.2.3), on obtient :

$$E = \frac{I_E}{\beta} + \beta \frac{\partial \left( \frac{I_E}{\beta} \right)}{\partial x_H} \frac{\partial x_H}{\partial \beta}. \quad (7.2.1)$$

Après un long calcul on arrive à l'expression suivante :

$$E = \frac{I_E}{\beta} + \frac{g(x_H, X)}{h(x_H, X)} \quad (7.2.2)$$

où  $\beta$  est donné par (5.1.26) et

$$g(x_H, X) = -2\gamma_X + 2 \left( 1 - \frac{2m\gamma_X}{\sqrt{\pi X}} \right) (\eta_X - \gamma_X + 4\gamma_{x_H} - 2\eta_{x_H}) + 8 \left( 1 - \frac{4m\gamma_X}{\sqrt{\pi X}} \right) \frac{x_H^3 (2 - x_H^2) e^{-x_H^2}}{1 - 2x_H^3 \frac{e^{-x_H^2}}{\gamma_{x_H}}}, \quad (7.2.3)$$

$$h(x_H, X) = -2 \frac{\gamma_X}{X} + \frac{4\gamma_{x_H}}{x_H} \left( 1 - \frac{4m\gamma_X}{\sqrt{\pi X}} \right) \frac{1 + 4x_H^3 \left( 1 - x_H - \frac{x_H^2 e^{-x_H^2}}{\gamma_{x_H}} \right) \frac{e^{-x_H^2}}{\gamma_{x_H}}}{\left( 1 - 2x_H^3 \frac{e^{-x_H^2}}{\gamma_{x_H}} \right)^2}. \quad (7.2.4)$$

On remarque sur la Fig.(7.2) que l'énergie interne est négative pour le rémanent, et

qu'elle est singulière au point  $m = m_1 = m(x_1)$  et qu'elle s'annule pour une masse qui sera discuté en relation avec l'énergie libre off-shell. Il est facile de voir, en prenant le comportement asymptotique pour  $x$  grand que l'énergie interne est la somme de la masse ADM et de l'énergie propre gravitationnelle induite par les effets non commutatifs.

## 7.2.2 Entropie

En utilisant (7.2.2) et (5.3.1) dans la définition de l'entropie donnée dans le chapitre 6, on obtient l'expression de l'entropie :

$$S = \beta \frac{g(x_H, X)}{h(x_H, X) \sqrt{1 - \frac{4M\gamma_X}{\sqrt{\pi}X}}}. \quad (7.2.5)$$

De la figure(7.3), on remarque que l'entropie de trou noir minimale est nulle. Cela nous permet de considérer le trou noir minimale comme un état fondamental du trou noir. On remarque aussi que l'entropie est dépendante de la taille de la cavité et aussi du champ de matière. En restituant les unités naturelles, on peut écrire

$$S = \frac{\pi x_H^2}{G_{eff}(x_H, X)} \quad (7.2.6)$$

avec  $G_{eff}(x_H, X)$  représentant une constante de Newton effective donnée par :

$$G_{eff}(x_H, X) = 4G_N \frac{x_H h(x_H, X) \left(1 - 2x_H^3 \frac{e^{-x_H^2}}{\gamma_{x_H}}\right)}{g(x_H, X)}. \quad (7.2.7)$$

Dans le cas d'une cavité de grandes dimensions  $X \rightarrow \infty$ , on a  $\gamma_X = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  et  $\eta_X = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$  :

$$G_{eff}(x_H, X) = 4G_N \frac{2 \left( \gamma_{x_H} + 4x_H^3 \left(1 - x_H - \frac{x_H^2 e^{-x_H^2}}{\gamma_{x_H}}\right) e^{-x_H^2} \right)}{\left(-\frac{\sqrt{\pi}}{4} + 4\gamma_{x_H} - 2\eta_{x_H}\right) \left(1 - 2x_H^3 \frac{e^{-x_H^2}}{\gamma_{x_H}}\right) + 4x_H^3 (2 - x_H^2) e^{-x_H^2}}. \quad (7.2.8)$$

Pour les grandes distances on a  $\gamma_{x_H} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \eta_{x_H} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$ , d'où :

$$G_{eff}(x_H, X) = G_N \quad (7.2.9)$$

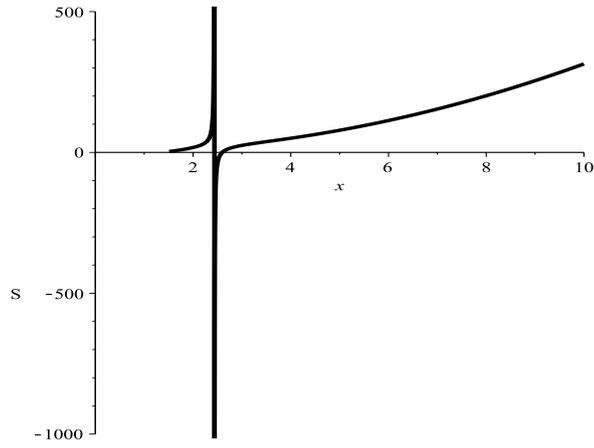


FIGURE 7.3 – Entropie en fonction de la température locale pour  $X = 10$

ce qui donne la loi de Schleswig-Holstein pour l'entropie du trou noir

$$S = \frac{\pi x_H^2}{G_N}. \quad (7.2.10)$$

### 7.2.3 Stabilité thermodynamique

Maintenant nous allons examiner la stabilité thermodynamique local du trou noir en étudiant l'expression de la chaleur spécifique définie par la relation :

$$C = \left. \frac{\partial E}{\partial T} \right|_A = - \left. \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial E}{\partial \beta} \right|_A. \quad (7.2.11)$$

En utilisant la formule (7.2.2), on obtient

$$C = -\beta^2 \left( \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta} \right) \frac{g(x_H, X)}{h(x_H, X)} \quad (7.2.12)$$

ou bien

$$C = -\beta^2 \left( \frac{\partial x_H}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial x_H} + \frac{1}{\beta} \right) \left( E - \frac{I_E}{\beta} \right). \quad (7.2.13)$$

Comme on le voit sur la figure (7.4) le grand trou noir défini pour  $x > x_2$  est toujours localement stable puisque la chaleur spécifique est positive, ce qui est la situation dans le cas commutatif. Cependant, le petit trou noir peut être soit stable ou instable selon sa taille, de sorte qu'il est stable pour  $x < x_1$  et instable pour  $x_1 < x < x_2$ . On conclue de ces résultats que le petit trou noir peut être nucléé comme le grand trou noir dans la région  $x < x_1$ .

On peut aussi mieux voir ces conclusion en traçant la chaleur spécifique en fonc-

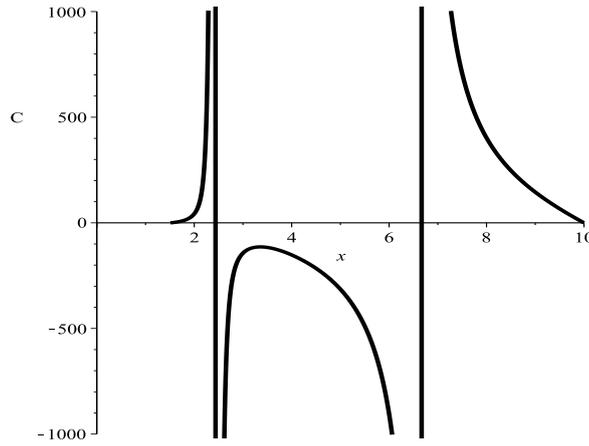


FIGURE 7.4 – La chaleur spécifique vs Horizon (à gauche) et en fonction de la température (à droite) pour  $X = 10$ .

tion de la température (7.6). On remarque que la chaleur spécifique est divergente aux températures critiques  $T_1$  (correspondant  $x_1$ ) et  $T_2$  (correspondant  $x_2$ ).

1.  $0 < T < T_2$  : Le petit trou noire est la seule solution stable.
2.  $T_2 < T < T_1$  : Le petit et le grand trou noirs sont les deux solutions stables.
3.  $T_1 < T$  : Le grand trou noire est la seule solution stable.

### 7.3 Énergie libre et transitions de phases

L'énergie libre on-shell est obtenue en substituant (7.1.17) dans la relation

$$F = \frac{I_E}{\beta}. \quad (7.3.1)$$

ce qui conduit à :

$$F = X \left[ \frac{1 - \frac{2m_0}{X\sqrt{\pi}} (\eta_X - \gamma_X - 2\eta_{x_0} + 4\gamma_{x_0})}{\sqrt{1 - \frac{4m_0\gamma_X}{\sqrt{\pi}X}}} - \frac{1 - \frac{2m}{X\sqrt{\pi}} (\eta_X - \gamma_X - 2\eta_{x_H} + 4\gamma_{x_H})}{\sqrt{1 - \frac{4m\gamma_X}{\sqrt{\pi}X}}} \right]. \quad (7.3.2)$$

On remarque que l'énergie libre du trou noir minimal est nulle :  $F(m_0) = 0$ .

Pour étudier l'existence des transitions des phases et leurs nature, on ait besoin d'étudier la fonction de l'énergie libre on-shell, de l'entropie et de la chaleur spécifique en fonction de la température. Puisque il est impossible d'avoir des expressions analytiques de ces fonctions, on a tracé numériquement les courbes les représentant. De la figure (7.5), on

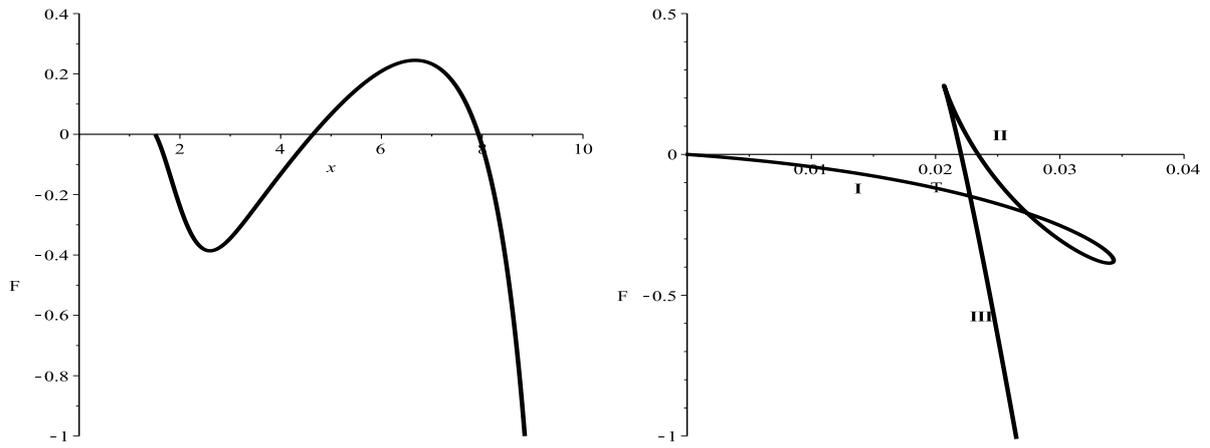


FIGURE 7.5 – Énergie libre on-shell en fonction de l'horizon et de la température pour  $X = 10$ .

remarque que la température et l'énergie libre de trou noir minimal sont nulles. Quand la température augmente, il apparaît une branche notée *I* qui correspond au petit trou noir. A la température  $T = T_2$ , les deux branches notées *II* et *III* qui désignent le trou noir instable et le grand trou noir apparaissent et se séparent l'une de l'autre à hautes températures. A la température  $T = T_1$ , les deux branches *I* et *II* coalescent et disparaissent, tandis que la branche *III* persiste pour à hautes températures. La transition de phase entre le petit trou noir et le grand trou noir se déroule à la température  $T = T_{tr}$  qui représente le point d'intersection des deux branches *I* et *III*.

Grâce aux informations ci-dessus, on peut écrire le scénario suivant :

- $0 < T < T_2$  : le petit trou noir domine la thermodynamique et il est la seule solution stable.
- $T_2 < T < T_{tr}$  : le petit trou noir domine toujours la thermodynamique et le grand trou noir est métastable.
- $T = T_{tr}$  : transition de phase entre le petit trou noir et le grand trou noir.
- $T_{tr} < T < T_1$  : le grand trou noir domine la thermodynamique et le petit trou noir est devenu métastable.
- $T_1 < T$  : Le grand trou noir domine la thermodynamique et il est la seule solution stable.

On remarque que le trou noir minimal et le trou noir intermédiaire instable ne dominent jamais la thermodynamique.

De la figure (7.6), on remarque que l'entropie en fonction de la température est continue au point  $T = T_2$  et est discontinue au point  $T = T_1$ , ce que veut dire qu'on peut avoir une transition de phase de premier ordre à la température critique  $T_1$  est pas au point  $T_2$ .

On remarque aussi que la chaleur spécifique est discontinue au point  $T_2$ , ce qui montre la possibilité d'existence d'une transition de phase de deuxième ordre à cette température. On peut confirmer ces résultats sur la figure (7.5) où on remarque que  $\frac{dF}{dT}$  est discontinue à la température  $T_1$  et que  $\frac{d^2F}{dT^2}$  est discontinue à la température  $T_2$ . On déduit alors qu'on a une transition de phase de premier ordre au point  $T_1$  et une transition de phase de deuxième ordre au point  $T_2$ .

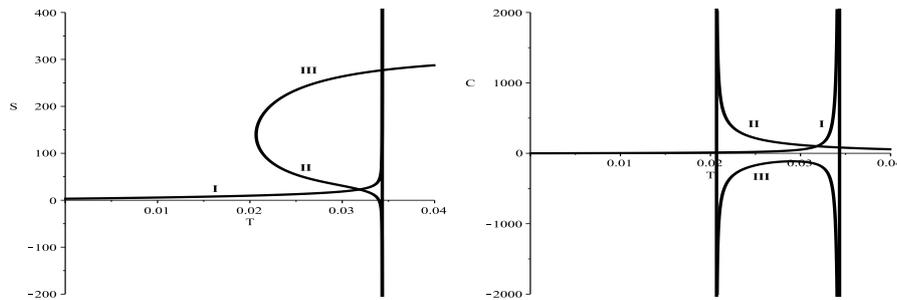


FIGURE 7.6 – Entropie et chaleur spécifique en fonction de la température pour  $X = 10$ .

Sur la fig. 7.7 on montre les variations de l'énergie libre off-shell définie par

$$F_{off-shell} = E - tS \quad (7.3.3)$$

où  $t$  est un paramètre libre, qui peut être égal à la température du trou noir. Rappelons qu'une transition prend place quand  $F_{on-shell} = F_{off-shell}$ . De la fig. 7.7 On remarque que pour  $t < T_2$  on a seulement la phase représentant le petit trou noir stable ( $SBH_+$ ), pour  $T_2 < t < T_1$  on a une transition de phase du petit noir stable vers le grand trou noir stable à travers le trou noir intermédiaire instable ( $SBH_+ \rightarrow IBH_- \rightarrow LBH_+$ ), et pour  $t > T_1$  on a seulement la phase représentant le grand trou noir stable ( $LBH_+$ ). Notons que la nucléation du  $IBH_-$  se fait à la température  $T_1$  et que la nucléation du  $LBH_+$  se fait à la température  $T_2$ .

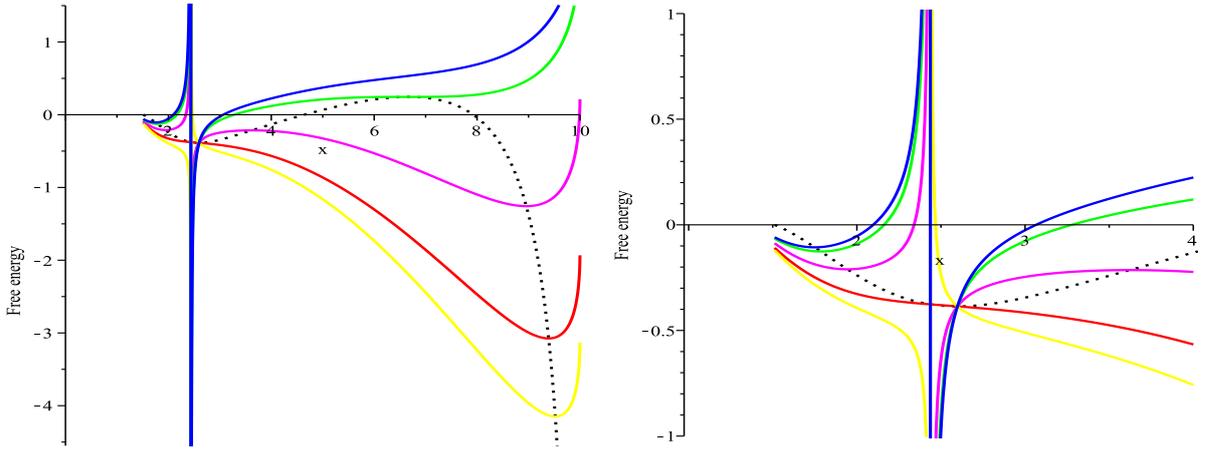


FIGURE 7.7 – Énergie libre off-shell en fonction de l’horizon pour  $t = \frac{9}{10}T_2$ ,  $t = T_2$ ,  $t = \frac{T_1+T_2}{2}$ ,  $t = T_1$  et  $t = \frac{10}{9}T_1$  de haut en bas. La courbe en pointillés est l’énergie on-shell. À droite un zoom sur la région dans l’intervalle  $0 \leq x \leq 4$ .

On étudie maintenant les variations de l’énergie libre on shell en fonction de la température en faisant varier le paramètre de non commutativité  $\theta$ . Pour cela on doit restaurer les anciennes variables. On observe sur la fig. 7.8 la présence des trois branches qui représentent respectivement le  $SBH_{-+}$  (branche I), le  $IBH_{-}$  (branche II) et le  $LBH_{+}$  (branche III) pour les petites valeurs de  $\theta$ . À mesure que  $\theta$  croît, c’est à dire qu’on s’approche le régime des petites échelles, la branche III tend à disparaître et les deux branches I et II tendent à fusionner pour ne former qu’une seule branche qui représente un noyau de De Sitter. Si par contre on passe aux petites valeurs de  $\theta$ , la branche I disparaît et on obtient le diagramme de phase du trou noir de Schwarzschild obtenu par York [108]. Ce fait va être confirmé ci-dessous en étudiant le régime de Schwarzschild.

### 7.3.1 Régime de Schwarzschild

Nous allons étudier la thermodynamique dans le régime de Schwarzschild, c-à-d pour  $x \gg 1$ . En utilisant le développement de la fonction gamma incomplète pour les grandes distances :

$$\gamma\left(\frac{3}{2}, z^2\right) \simeq \frac{\sqrt{\pi}}{2} + ze^{-z^2}, \quad (7.3.4)$$

on obtient l’expression de l’horizon suivante

$$x_H \simeq 2m \left(1 - \frac{4m}{\sqrt{\pi}} e^{-4m^2}\right). \quad (7.3.5)$$

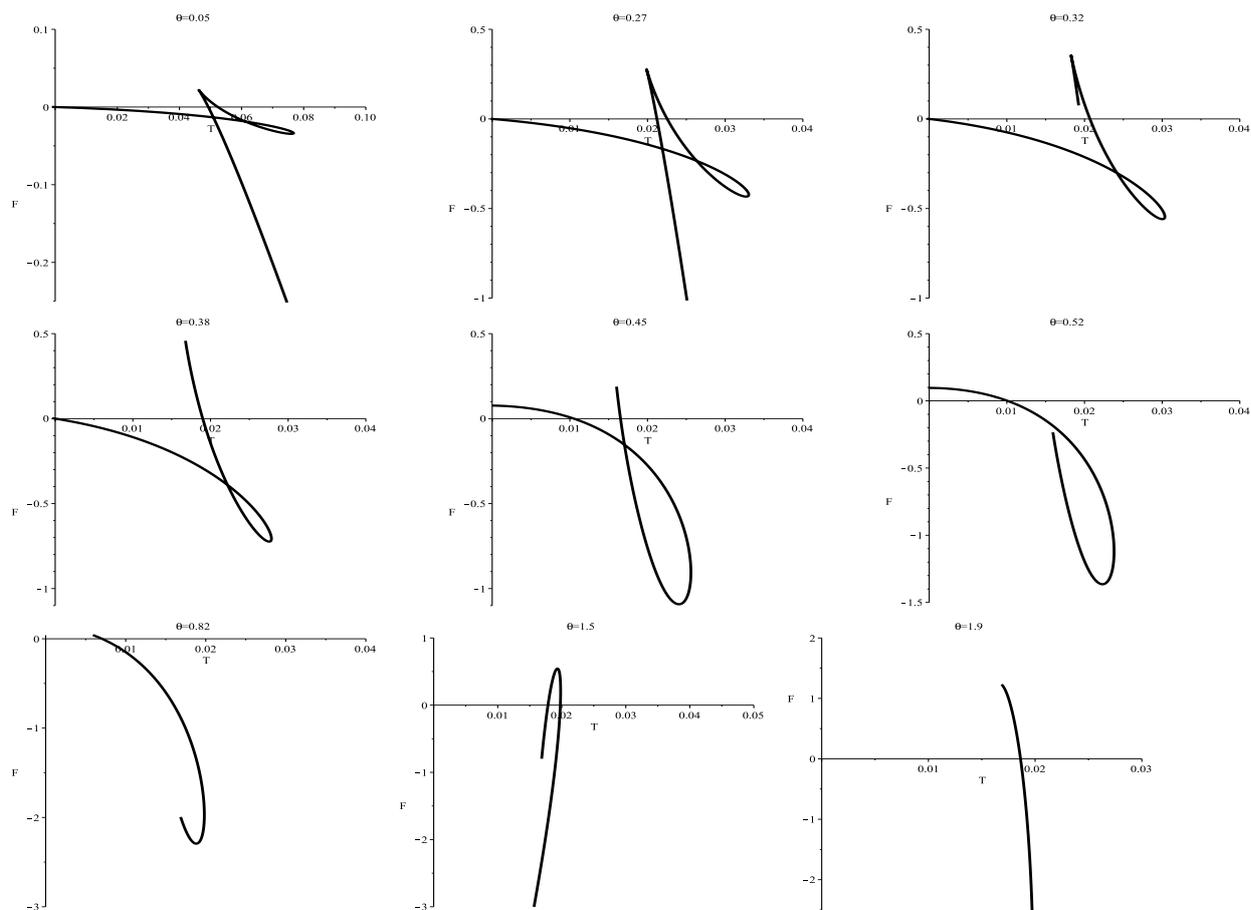


FIGURE 7.8 – Énergie libre on shell en fonction de la température pour différentes valeurs du paramètre de non commutativité.

En fonction des anciennes variables, cette expression devient :

$$r_H \simeq 2M \left( 1 - \frac{2M}{\sqrt{\pi}\theta} e^{-\frac{M^2}{\theta}} \right). \quad (7.3.6)$$

En remplaçant dans l'expression de la température de Hawking et en prenant la limite des grandes distances, on obtient :

$$T_H \simeq \frac{1}{8\pi M} \left( 1 - \frac{4M^3}{\theta^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}} e^{-\frac{M^2}{\theta}} \right). \quad (7.3.7)$$

En utilisant la même approximation, l'action euclidienne (7.1.17) peut s'écrire comme suit :

$$I_E \simeq I_0 \left( 1 + \frac{4M^3}{\theta^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}} e^{-\frac{M^2}{\theta}} \right) \quad (7.3.8)$$

où  $I_0$  est l'action euclidienne de trou noir de Schwarzschild standard donnée par :

$$I_0 = \beta_0 R \left( 1 + \frac{\frac{3M}{2R} - 1}{\sqrt{1 - \frac{2M}{R}}} \right), \quad (7.3.9)$$

et  $\beta_0$  est l'inverse de la température locale standard donnée par :

$$\beta_0 = 8\pi M \sqrt{1 - \frac{2M}{R}}. \quad (7.3.10)$$

On remarque que l'équation (7.3.7) peut être solutionner par itération en fonction de  $M$ , où on aboutit approximativement, à la masse du trou noir intermédiaire et la masse du grand trou noir :

$$M_I \simeq \frac{1}{8\pi T} \left( 1 + \frac{1}{8\pi RT} \left( 1 + \frac{e^{-\frac{1}{64\pi^2\theta T^2}}}{128\pi^{\frac{5}{2}}\theta^{\frac{3}{2}}T^3} \right) \right) \quad (7.3.11)$$

$$M_L \simeq \frac{R}{2} \left( 1 - \frac{1}{(4\pi RT)^2} \left( 1 + \frac{R^3}{2\pi^{\frac{1}{2}}\theta^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{R^2}{4\theta}} \right) \right). \quad (7.3.12)$$

On remarque que la solution représentant le petit trou noir a disparu dans le régime de Schwarzschild.

L'énergie interne et l'entropie (7.2.2) et (7.2.5) deviennent dans le régime de Schwarz-

schild comme :

$$E = E_0 \left( 1 + \frac{4M^3}{\theta^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi}} e^{-\frac{M^2}{\theta}} \right) - \frac{I_0 M^4}{\pi^{\frac{5}{2}} \theta^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{M^2}{\theta}}, \quad (7.3.13)$$

$$S = S_0 \left( 1 + \frac{4M^3}{\theta^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi}} e^{-\frac{M^2}{\theta}} \right) - \frac{I_0 M^4}{\pi^{\frac{5}{2}} \theta^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{M^2}{\theta}}, \quad (7.3.14)$$

où  $I_0$  est donnée par (7.3.9) et  $E_0$  et  $S_0$  représentent respectivement l'énergie interne et l'entropie dans le cas commutatif

$$E_0 = R - R \sqrt{1 - \frac{2M}{R}}, \quad S_0 = 4\pi M^2 \quad (7.3.15)$$

# Conclusion

L'objectif de cette thèse est l'étude de la physique des trous noirs en présence des distances minimales. Comme nous le savons, l'existence des distances minimales en physique peut être formulées en plusieurs versions. Dans cette thèse on s'est intéressé seulement à deux versions qui sont la mécanique quantique basée sur un GUP à tous les ordres et la géométrie non commutative dans la représentation des états cohérents.

Le premier chapitre est une introduction où nous avons introduit les distances minimales et leurs applications en physique. Surtout on a parlé des théories et des expériences de la physique qui impliquent l'introduction des distances minimales en physique. Aussi on a parlé sur les effets apportés par les distances minimales sur la physique notamment sur la thermodynamique des trous noirs.

Le deuxième chapitre représente une introduction à la relativité générale où nous avons rappelé les principes de cette théorie, un rappel mathématique sur l'espace-temps courbé puis nous avons dérivé les équations d'Einstein et la solution de Schwarzschild et nous avons terminé le chapitre par un rappel sur la thermodynamique de trou noir de Schwarzschild.

Dans le troisième chapitre, nous avons reformulé le GUP à tous les ordres et la théorie de géométrie non commutative dans la représentation des états cohérents. Le résultat le plus important apporté par le GUP est que l'incertitude minimale de la position n'est pas nulle et aussi l'incertitude de l'impulsion est corrigée par un facteur exponentiel. Ce dernier nous permet de prédire une correction dans l'expression de la température de trou noir à cause de la relation heuristique d'Adler. Dans le cas de la représentation des états cohérents de la géométrie non commutative, on a trouvé que le propagateur de Feynman est corrigé par un facteur exponentiel et donc la distribution de Dirac sera corrigée. Cela nous permet de prédire que la solution de Schwarzschild sera changée à cause de la relation de l'équation de Poisson à cause de la déformation de la distribution de Dirac.

Dans le quatrième chapitre, nous avons étudié la thermodynamique de trou noir de Schwarzschild en présence d'un GUP à tous les ordres de la longueur de Planck en calculant la température Hawking, l'entropie et la chaleur spécifique et aussi on a étudié le processus d'évaporation. L'analyse de l'expression de la température nous permet de déduire la non existence des trous noirs de masse inférieure à la masse minimale. La loi de Stefan-Boltzmann est aussi corrigée par le GUP et elle est plus petite que dans le cas

standard. Le développement de Taylor de l'entropie nous permet de voir une correction logarithmique similaire à celle obtenu par la théorie des cordes et la gravité quantique à une boucle. Dans notre étude de processus de rayonnement de Hawking du trou noir de Schwarzschild, on a trouvé qu'à la fin de la phase d'évaporation un trou noir minimale d'entropie nulle, de chaleur spécifique nulle et une température finie non nulle continue à exister. Nous avons également calculé le taux d'évaporation avec GUP. En calculant le temps de vis de trou noir, nous avons montré que les trous noirs dans le cadre de GUP ont une durée de vie plus courte que celle de cas classique. Et cela est très normale, puisque on trouvé, en traçant la courbe de la température, que les trous noirs en cas de présence de GUP sont plus chauds que ceux de cas standard.

Dans le cinquième chapitre nous avons étudié la thermodynamique et discuté les transitions de phase et la stabilité du trou noir de Schwarzschild confiné dans une cavité isothermique dans le cadre de GUP à tous les ordres de la longueur de Planck. En utilisant le formalisme de l'action euclidienne, les formules de la capacité thermique, l'énergie interne et de l'entropie ont été dérivées et aussi la température locale. De l'expression de la température locale, on trouvé qu'il n'existe pas de trou plus petit que le trou noire minimale trouvé dans le chapitre précédant et en plus le problème de grandissement incontrôlable de trou noire a été solutionné en mettant le dans une cavité. En particulier, nous avons montré que la loi de Beckenstein-Hawking habituelle n'est plus valable, et que la masse ADM ne s'identifie pas avec l'énergie thermique totale. La transition de phase de type Hawking-Page est exclue dans notre cas en raison de l'existence de la région interdite  $0 < M < M_0$ . D'autre part, nous avons trouvé une nouveau type de transition de phase à travers le processus  $BHR_- \rightarrow SBH_- \rightarrow LBH_+$ . Ce processus est similaire à la transition de phase de trou noir de BTZ non-tournant,  $EBH_- \rightarrow NBTZ_+$ , et la transition de phase pour le trou noir critique de Born-Infeld-anti-de Sitter,  $EBH_- \rightarrow SBH_{+-} \rightarrow IBH_- \rightarrow LBH_+$ , où  $EBH$  et  $IBH$  sont les trous noirs extrémal et intermédiaire. Dans notre cas, la transition de phase de type Hawking-Page  $BHR_- \rightarrow SBH_- \rightarrow LBH_+$  est possible seulement pour la masse de trou noir minimale appartient à l'intervalle  $0 < M_0 < \frac{R}{3}$  où  $R$  est le rayon de la cavité. Nous avons également obtenu la possibilité d'existence d'une transition de phase de type Hawking-Page en utilisant l'analyse de l'énergie libre off-shell.

Dans le sixième chapitre nous avons étudié la solution de Schwarzschild inspirée de la géométrie non commutative et sa thermodynamique. On a étudié d'abord la distribution de matière qui s'obtient en remplaçant la distribution de Dirac par une distribution

gaussienne. Pour obtenir les solutions, on a utilisé une technique très simple introduit par Nicolini ou on a gardé la forme standard le tenseur d'Einstein et utilisé un tenseur de matière déformé par le fait de la géométrie. Au grandes distances, cette solution tend vers la solution de Schwarzschild habituelle et petits distances, elle tend vers la solution de anti-De Sitter avec une constante cosmologique effectif. En calculant le scalaire de Ricci, on a trouvé que la singularité habituelle de l'origine est régularisée par le fait de la non commutativité. De la courbe de la température, on a remarqué que la température de cas non commutative a le même comportement que celui de cas commutative dans les grandes distances et a un maximum et chute rapidement vers zéro pour le cas des petites distances. On a calculé aussi l'entropie non commutative et on a trouvé un terme de plus. Cela montre l'invalidité de la deuxième loi de la thermodynamique en présence de la matière.

Dans le septième chapitre, nous avons étudié la thermodynamique de trou noir inspiré de la géométrie non commutative confiné dans une cavité en utilisant la même démarche utilisée dans le cinquième chapitre. On a trouvé que l'expression de l'énergie interne est affectée par le fait de la non commutativité par la présence d'un terme d'énergie auto-gravitationnelle de l'espace-temps. La forme de la loi de Beckenstein-Boltzman a été obtenue dans le ce cas mais avec une constante de Newton effective dépendante de l'horizon de trou noir et aussi de le rayon de la cavité. On a trouvé que la température de cas non commutative pour les petites distances, contrairement au cas commutative ou elle tend vers l'infinie, elle atteint un maximum puis chute vers zéro pour le trou noir minimale. Ce qui montre que la transition de phase de Hawking-Page entre l'espace plat chaud et le grand trou noire est impossible. En étudiant la structure des phase et la stabilité thermodynamique des trous noirs on a trouvé trois phase : petit trou noir stable, trou noir intermédiaire instable et grand trou noire stable. La transition de phase entre le petit trou noir et le trou noir intermédiaire est de deuxième ordre et entre le trou noir intermédiaire et le grand trou noir est de premier ordre. Pour comparer notre étude avec celle de cas commutative, on a fait la limite de notre étude dans le régime de Schwarzschild.

# Bibliographie

- [1] D. Amati, M. Ciafaloni, G. Veneziano, Phys. Lett. B 197, 81 (1987).  
D.J. Gross, P.F. Mende, Phys. Lett. B 197, 129 (1987).  
D. Amati, M. Ciafaloni, G. Veneziano, Phys. Lett. B 216, 41 (1989).  
K. Konishi, G. Paffuti, P. Provero, Phys. Lett. B 234, 276 (1990).  
G. Veneziano, Proceedings of PASCOS 90, Quantum Gravity near the Planck scale, Boston 1990, p.486 (unpublished).
- [2] M. Maggiore, Phys. Lett. B 304, 65 (1993).
- [3] A. Kempf, G. Mangano, R.B. Mann, Phys. Rev. D 52, 1108 (1995).  
M. Bojowald, A. Kempf, Phys. Rev. D 86, 085017 (2012) [arXiv :1112.0994].
- [4] F. Scardigli, Phys. Lett. B 452, 39 (1999).
- [5] R.J. Adler, D.I. Santiago, Mod. Phys. Lett. A 14, 1371 (1999).
- [6] F. Scardigli and R. Casadio, Class. Quantum Grav. 20, 3915 (2003).
- [7] G. Veneziano, A stringy nature needs just two constants, Europhys. Lett. 2, 199 (1986).
- [8] D. J. Gross and P. F. Mende, String theory beyond the Planck scale, Nuc. Phys. B 303, 407-454 (1988).
- [9] T. Yoneya, On the interpretation of minimal length in string theories, Mod. Phys. Lett. A 4, 1587-1595 (1989).
- [10] D. Amati, M. Ciafaloni and G. Veneziano, Can spacetime be probed below the string size? Phys. Lett. B 216, 41-47 (1989).
- [11] R. Guida, K. Konishi and P. Provero, On the short distance behavior of string theories, Mod. Phys. Lett. A 6, 1487-1503 (1991).
- [12] M. Reuter, Nonperturbative evolution equation for quantum gravity, Phys. Rev. D 57, 971 (1998).

- [13] J. Magueijo and L. Smolin, Lorentz invariance with an invariant energy scale, *Phys. Rev. Lett.* 88, 190403 (2002).
- [14] J. Magueijo and L. Smolin, String theories with deformed energy-momentum relations and a possible nontachyonic bosonic string, *Phys. Rev. D* 71, 026010 (2005).
- [15] F. Girelli, E. R. Livine and D. Oriti, Deformed special relativity as an effective limit of quantum gravity, *Nuc. Phys. B* 708, 411-433 (2005).
- [16] J. L. Cortes and J. Gamboa, Quantum uncertainty in doubly special relativity, *Phys. Rev. D* 71, 065015 (2005).
- [17] S. Ghosh, Lagrangian for doubly special relativity particle and the role of noncommutativity, *Phys. Rev. D* 74, 084019 (2006).
- [18] A. F. Ali, S. Das and E. C. Vagenas, Discreteness of space from the generalized uncertainty principle, *Phys. Lett. B* 678, 497-499 (2009).
- [19] K. Nozari and A. Etemadi, Minimal length, maximal momentum, and Hilbert space representation of quantum mechanics, *Phys. Rev. D* 85, 104029 (2012).
- [20] F. Scardigli, Generalized uncertainty principle in quantum gravity from micro-black hole gedanken experiment, *Phys. Lett. B* 452, 39-44 (1999).
- [21] Y. J. Ng and H. Van Dam, Spacetime Foam, Holographic Principle and Black Hole Quantum Computers, *Int. J. Mod. Phys. A* 20, 1328-1335 (2005).
- [22] C. A. Mead, Possible connection between gravitation and fundamental length, *Phys. Rev.* 135, B 849 (1964).
- [23] M. Maggiore, *Phys. Rev. D* 49, 5182 (1994).
- [24] C. Rovelli, *Phys. Rev. Lett.* 77, 3288 (1996).
- [25] F. Scardigli, *Class. Quantum Grav.* 14, 1781 (1997).
- [26] A. Kempf, *J. Math. Phys.* 35, 4483 (1994)
- [27] A. Kempf, G. Mangano and R. B. Mann, *Phys. Rev. D* 52, 1108 (1995)
- [28] A. Kempf, *J. Phys. A* 30, 2093 (1997)
- [29] A. Kempf and G. Mangano, *Phys. Rev. D* 55, 7909 (1997)
- [30] H. Hinrichsen and A. Kempf, *J. Math. Phys.* 37, 2121 (1996).
- [31] L. N. Chang, D. Minic, N. Okamura and T. Takeuchi, *Phys. Rev. D* 65, 125027 (2002).
- [32] T. V. Fityo, I. O. Vakarchuk and V. M. Tkachuk, *J. Phys. A :Math. Gen.* 39, 2143 (2006)

- [33] F. Brau, *J. Phys. A* 32, 7691 (1999)
- [34] R. Akhoury and Y. -P. Yao, *Phys. Lett. B* 572, 37 (2003).
- [35] K. Nouicer, *J. Phys. A* 38, 10027 (2005)
- [36] K. Nouicer, *J. Math. Phys.* 47, 122102 (2006)
- [37] K. Nouicer, *J. Phys. A : Math. Theor.* 40, 2125 (2007).
- [38] N. Seiberg and E. Witten, *String theory and noncommutative geometry*, *JHEP* 1999,032 (1999).
- [39] H. S. Snyder, *Quantized space-time*, *Phys. Rev.* 71, 38-41 (1947).
- [40] C. N. Yang, *On quantized space-time*, *Phys. Rev.* 72, 874 (1947).
- [41] A. Connes, *Non-commutative differential geometry*, *Pub. Math. de l'IHES* 62, 41-144 (1985).141.
- [42] S. L. Woronowicz, *Compact matrix pseudogroups*, *Comm. Math. Phys.* 111, 613-665 (1987).
- [43] J. Madore, *An introduction to noncommutative differential geometry and its physical applications*, Cambridge University Press (1999).
- [44] M. R. Douglas and N. A. Nekrasov, *Noncommutative eld theory*, *Rev. Mod. Phys.* 73, 977 (2001).
- [45] R. J. Szabo, *Quantum field theory on noncommutative spaces*, *Phys. Rep.* 378, 207-299 (2003).
- [46] Th. Filk, *Divergencies in a field theory on quantum space*, *Phys. Lett.B* 376 (1996) 53.
- [47] S. Minwalla, M. van Raamsdonk and N. Seiberg, *Noncommutative perturbative dynamics*, *JHEP* 0002, 020 (2000) [hep-th/9912072]. A. Matusis, L. Susskind and N. Toumbas, *The IR/UV Connection in the Non-Commutative Gauge Theories*, *JHEP* 0012, 002 (2000) [hep-th/0002075].
- [48] G. Mandanici, *Wave Propagation and IR/UV Mixing in non commutative Space-times*, Ph.D.Thesis [hep - th/0312328].
- [49] P. Fischer and V. Putz, *No UV/IR mixing in unitarity space-time noncommutative field theory*, *Eur. Phys. J. C*32, 269 (2004) [hep-th/0306099].
- [50] M. Van Raamsdonk, *The meaning of infrared singularities in noncommutative gauge theories*, *JHEP* 11, 006 (2001) [hep-th/0110093].

- [51] M. Hayakawa, Perturbative analysis on infrared aspects of noncommutative QED on  $R^4$ , Phys. Lett. B478 (2000) 394-400 [hep-th/9912094].
- [52] A. A. Bichl, M. Ertl, A. Gerhold, J. Grimstrup, H. Grosse, L. Popp, V. Putz, M. Schweda and R. Wulkenhaar, Non-commutative U(1) super-Yang-Mills theory :Perturbative self-energy corrections, [hep-th/0203141].
- [53] A.A. Bichl, J. Grimstrup, H. Grosse, L. Popp, M. Schweda,R.Wulkenhaar, Renormalization of Noncommutative Photon Selfenergy to all Orders via Seiberg-Witten Map, J. High Energy Phys. 0106 (2001) 013, [hep-th/0104097]
- [54] J. Gomis and Th. Mehen, Space-time noncommutative field theories and unitarity, Nucl. Phys. B591, 265 (2000) [hep-th/0005129].
- [55] Y. Liao and K. Sibold, Time-ordered perturbation theory on noncommutative space-time. II. unitarity, Eur. Phys. J. C25, 479—486 (2002)[hep-th/0206011].
- [56] C.-h. Rim and J. H. Yee, Unitarity in space-time noncommutative field theories, [hep-th/0205193].
- [57] D. Bahns, S. Doplicher, K. Fredenhagen and G. Piacitelli, Ultraviolet Finite Quantum Field Theory on Quantum Spacetime, Comm. Math.Phys. 237 (2003) 221 [hep-th/0301100].
- [58] D. Bahns, S. Doplicher, K. Fredenhagen and G. Piacitelli, On the unitarity problem in space/time noncommutative theories, Phys. Lett. B533 178, (2002) [hep-th/0201222].
- [59] S. Denk and M. Schweda, Time ordered perturbation theory for non-local interactions ; applications to NCQFT, JHEP 0309, 032 (2003)[hep-th/0306101].
- [60] Stefan Denk, Volkmar Putz, Manfred Schweda and Michael Wohlgenannt, Towards UV Finite Quantum Field Theories from Non-Local Field Operators, Eur. Phys. J. C25, 479-486 (2002) [hep-th/0401237].
- [61] A. Smailagic and E. Spallucci, UV divergence-free QFT on non commutative plane, J. Phys. A 36, L 517 (2003) [hep-th/0308193].
- [62] P. Nicolini : Vacuum energy momentum tensor in (2+1) NC scalar field theory, e-print hep-th/0401204 (2004) ; A. Gruppuso, Newton's law in an effective non-commutative space-time, J. Phys. A 38, 2039-2042 (2005) .
- [63] P. Nicolini, A. Smailagic and E. Spallucci : The fate of radiating black holes in non-commutative geometry, to appear in : A.M. Cruise, Proceedings of 13th General

- Conference of the European Physical Society : Beyond d'Einstein Physics for the 21st Century (EPS-13), Bern, Switzerland, 11-15 Jul 2005,[hep-th/0507226].
- [64] P. Nicolini, A. Smailagic and E. Spallucci, Noncommutative geometry inspired Schwarzschild black hole, *Phys. Lett. B* 632, 547-551 (2006) [gr-qc/0510112].
- [65] S. Ansoldi, P. Nicolini, A. Smailagic and E. Spallucci, Noncommutative geometry inspired charged black holes, *Phys. Lett. B* 645, 261-266 (2007) [gr-qc/0612035].
- [66] P. Nicolini and E. Spallucci, Noncommutative geometry inspired wormholes and dirty black holes, *Class. Quant. Grav.* 27, 015010 (2010) [0902.4654].
- [67] P. Nicolini, A. Orlandi and E. Spallucci, The final stage of gravitationally collapsed thick matter layers, *Adv. High Energy Phys.* 2013, 812084 (2013) [1110.5332].
- [68] E. Spallucci, A. Smailagic and P. Nicolini, Pair creation by higher dimensional, regular, charged, micro black holes, *Phys. Lett. B* 670, 449-454 (2009) [0801.3519].
- [69] A. Smailagic and E. Spallucci, 'Kerrr' black hole : the Lord of the String, *Phys. Lett. B* 688, 82-87 (2010) [1003.3918].
- [70] L. Modesto and P. Nicolini, Charged rotating noncommutative black holes, *Phys. Rev. D* 82, 104035 (2010) [1005.5605].
- [71] P. Nicolini, Noncommutative Black Holes, The Final Appeal To Quantum Gravity : A Review, *Int. J. Mod. Phys. A* 24, 1229-1308 (2009) [aeXiv :0807.1939].
- [72] J. R. Mureika and P. Nicolini, Aspects of noncommutative (1+1)-dimensional black holes, *Phys. Rev. D* 84, 044020 (2011) [1104.4120].
- [73] A. Larranaga, A. Cardenas-Avendano and D. A. Torres, On a general class of regular rotating black holes based on a smeared mass distribution, *Phys. Lett. B* 743, 492-502 (2015) [1410.0049]. [Erratum : *Phys. Lett. B* 747, 564 (2015)].
- [74] An alternative heuristic derivation of the Hawking radiation is contained in H. Ohanian and R. Ruffini, *Gravitation and Spacetime*, 2nd ed., p. 481 (1974) (W. W. Norton).
- [75] R. J. Adler, P. Chen, D. I. Santiago, *Gen. Rel. Grav.* 33, 2101 (2001); P. S. Custodio and J. E Horvath, *Class. Quant. Grav.* 20, L197 (2003) [arXiv :gr-qc/0305022].
- [76] L. Ryder, *Introduction to General Relativity*, Cambridge University Press, Cambridge, UK (2009).
- [77] S. W. Hawking, *Phys. Rev. D* 14 2460 (1976).

- [78] B. Bolen and M. Cavaglia, *Gen. Rel. Grav.* 37, 1255 (2005) [gr-qc/0411086].
- [79] A. J. M. Medved and E. C. Vagenas, *Phys. Rev. D* 70, 1240 (2004).
- [80] A. J. M. Medved, *Class. Quant. Grav.* 22, 133 (2005).
- [81] G. Gour and A. J. M. Medved, *Class. Quant. Grav.* 20, 3307 (2003).
- [82] K. Nozari and T. Azizi, *Int. J. Quant. Inf.* 3, 623 (2005) [gr-qc/0504090].
- [83] G. A. Amelino-Camelia, M. Arzano, Y. Ling and G. Mandanici, *Class. Quant. Grav.* 23, 2585 (2006) [gr-qc/0506110].
- [84] Y. S. Myung, Y-W. Kim and Y-J. Park, *Phys. Lett. B* 645, 393 (2007) [arXiv :gr-qc/0609031].
- [85] K. Nouicer, *Phys. Lett. B* 646 63 (2007) [arXiv :0704.1261].
- [86] K. Nouicer, *Class. Quantum Grav.* 24 5917 (2007).
- [87] K. Nouicer, *Class. Quantum Grav.* 24 6435 (2007) [arXiv :0706.2749].
- [88] Kim W, Son E J and Yoon M J. *High Energy Phys. JHEP* 01, 035 (2008) [arXiv :0711.0786].
- [89] P. Chen, *New Astron. Rev.* 49. 233 (2005).
- [90] P. Chen and R. J. Adler, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* 124, 103 (2003)[arXiv :gr-qc/0205106].
- [91] K. Nozari and A. S. Sefiedgar, *Phys. Lett. B* 635, 156 (2006) [gr-qc/0601116].
- [92] A. J. M. Medved and E. C. Vagenas, *Phys. Rev. D* 70, 124021 (2004).
- [93] A. Chatterjee and P. Majumdar, *Phys. Rev. Lett.* 92, 141301(2004).
- [94] R. K. Kaul and P. Majumdar, *Phys. Rev. Lett.* 84, 5255 (2000).
- [95] G. A. Camellia, M. Arzano and A. Procaccini, *Phys. Rev. D* 70,107501 (2004).
- [96] A. Chatterjee and P. Majumdar, *Phys. Rev.D* 71, 024003 (2005).
- [97] Y. S. Myung, *Phys. Lett. B* 579, 205 (2004).  
M. M. Akbar and S. Das, *Class. Quant. Grav.* 21, 1383 (2004).  
S. Das, *Class. Quant. Grav.* 19, 2355 (2002).
- [98] S. Hod, *Class. Quant. Grav.* 21, L97 (2004) .
- [99] A. J. M. Medved, *Class. Quant. Grav.* 22, 133 (2005).
- [100] A. J. M. Medved, *Class. Quant. Grav.* 22, 5195 (2005).

- [101] A. J. M. Medved and E. C. Vagenas, *Mod. Phys. Lett. A* 20, 1723 (2005).
- [102] G. Gour and A. J. M. Medved, *Class. Quant. Grav.* 20, 3307 (2003).
- [103] L. Alejandro Correa-Borbonet, *Braz. J. Phys.* 35, 1145 (2005).
- [104] Nozari, K. and Fazlpour, B. : *Mod. Phys. Lett. A* 22, 2917 (2007) ; *ibid. Acta Physica Polonica* 39, 1363 (2008).
- [105] J. Preskill, *Proceedings of the International Symposium on Black Holes, Membranes, Wormholes, and Superstrings, The Woodlands, Texas, 16-18 January (1992)* [arXiv :9209058] ; D. N. Page, *Phys. Rev. Lett.* 71, 3743 (1993) ; C. R. Stephens, G. 'tHooft and B. F. Whiting, *Class. Quant. Grav.* 11, 621 (1994) ; A. Strominger, *Lectures presented at Les Houches Summer School "Fluctuating Geometries in Statistical Mechanics and Field Theory."* (1994) [arXiv :9501071] ; T. Banks, *Nucl. Phys. (Proc. Suppl.)* 41, 21 (1995) ; J. G. Russo, *The Information Problem in Black Hole Evaporation : Old and Recent Results* [arXiv :0501132].
- [106] S. H. Mehdipour, *Commun. Theor. Phys.* 52,865 (2009).
- [107] K. Nozari and S. H. Mehdipour, *Class. Quantum Grav.* 25, 175015 (2008).
- [108] J. W. York, *Phys. Rev. Lett.* 28, 1082 (1972)
- [109] T. Regge and C. Teitelboim, *Ann. Phys.* 88, 286 (1974).
- [110] T. Regge and C. Teitelboim, *Phys. Lett. B* 53, 101 (1974).
- [111] G. WHawking and S. W. Gibbons, *Phys. Rev. D* 15, 2752 (1977).
- [112] S. W. Hawking and W. Israel, *General Relativity*, Cambridge University Press, Cambridge (1979).
- [113] D. J. Gross, M. J. Perry and L. G. Yaffe, *Phys. Rev. D* 25, 330 (1982).
- [114] S. W. Hawking and D. N. Page, *Math. Phys.* 87, 577 (1983).
- [115] G. J. Stephens and B. L. Hu, *Int. J. Theor. Phys.* 40, 2183 (2001) [arXiv :gr-qc/0102052].
- [116] Y. Sabri and K. Nouice, *Class. Quantum. Gravity.* 29, 215015 (2012) .
- [117] J. W. York, *Black-hole*, *Phys. Rev. D* 33, 2092 (1986)
- [118] B. F. Whiting and J. W. York, *Phys. Rev. Lett.* 61, 1336 (1988).
- [119] D. Brown, *Black hole thermodynamics in a box* [arXiv :gr-qc/9404006].
- [120] Akbar M M and Das S 2004 *Class. Quantum Grav.* 21 1383

- [121] T. Prestidge, *Phys. Rev. D* 61, 084002 (2000) [arXiv :hep-th/9907163].
- [122] B. Allen, Euclidean Schwarzschild negative mode, *Phys. Rev. D* 30, 1153 (1984).
- [123] Y. S. Myung, Y-W. Kim and Y-J. Park, *Phys. Lett. B* 645, 393 (2007) [arXiv :gr-qc/0609031].
- [124] J. M. Bardeen, B. Carter and S. W. Hawking, *Communications in Mathematical Physics* 31 (2), 161–170 (1973).
- [125] A. Smailagic and E. Spallucci *J. Phys. A : Math. Gen.* 36 L517 (2003).
- [126] A. Smailagic and E. Spallucci, *J. Phys. A : Math. Gen.* 37, 7169 (2004).
- [127] R. J. Glauber, Coherent and Incoherent States of the Radiation Field, *Phys. Rev.* 131 (1963) 2766.
- [128] G. Veneziano, *Europhys. Lett.* 2, 199 (1986)
- [129] E. Witten, *Phys. Today*, Apr. 24 (1996).
- [130] D. Amati, M. Ciafaloni and G. Veneziano, *Phys. Lett. B* 216, 41 (1989); *Nucl. Phys. B* 347, 550 (1990); *Nucl. Phys. B* 403, 707 (1993).
- [131] K. Konishi, G. Paffuti and P. Provero, *Phys. Lett. B* 234, 276 (1990).
- [132] L. J. Garay, *Int. J. Mod. Phys. A* 10, 145 (1995).
- [133] M. Maggiore, *Phys. Rev. D* 49, 5182 (1994) [hep-th/9305163]; *Phys. Lett. B* 319, 83(1993) [hep-th/9309034].
- [134] A. Kempf, G. Mangano and R. B. Mann, *Phys. Rev. D* 52, 1108 (1995) [hep-th/9412167].
- [135] A. Kempf and G. Mangano, *Phys. Rev. D* 55, 7909 (1997).
- [136] M. Maggiore, *Phys. Lett. B* 304, 65 (1993) [hep-th/9301067].
- [137] F. Scardigli, *Phys. Lett. B* 452, 39 (1999) [hep-th/9904025].
- [138] J. Moffat, *Phys. Lett. B* 506, 193 (2001)(arXiv :hep-th/0011035)
- [139] K. Nouicer and M. Debbabi, *Phys. Lett. A* 361, 305 (2007).
- [140] A. D. Sakharov, *Sov. Phys. JETP* 22, 241 (1966).