

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE JIJEL



FACULTE DES SCIENCES EXACTES

ET SCIENCE DE LA NATURE ET DE LA VIE

THESE

Présenté pour obtenir

LE DIPLOME DE DOCTORAT (LMD) EN PHYSIQUE

Spécialité : Physique théorique

Intitulé

## **CREATION DES PARTICULES EN COSMOLOGIE**

Par

CHEKIREB RABIHA

Devant la commission d'examen

Président	A. Bouda	Prof.	Univ. A. Mira, Béjaia
Rapporteur	S. Haouat	MCA	Univ. MSBY, Jijel
Examineurs	N. Belaloui	Prof.	Univ. Mentouri, Constantine
	T. Boudjedaa	Prof.	Univ. MSBY, Jijel
	A. Tilbi	MCA	Univ. MSBY, Jijel

## Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier le bon dieu tout-puissant de m'avoir aidé à surmonter toutes les difficultés lors de cette recherche.

Je remercie tout particulièrement Mr. S. Haouat, Maitre de conférence au département de physique à l'université de Jijel, qui a encadré ce travail pendant ces quatre années et qui a guidé mes premiers pas dans le monde de la recherche en physique théorique. Merci de m'avoir fait confiance pour ce sujet et merci pour ton énorme disponibilité et ton soutien constant.

Je tiens à remercier le président de jury, Mr. A. Bouda professeur à l'université de Bejaïa pour l'honneur qu'il m'a fait en présidant le jury.

Nos remerciements vont également aux examinateurs, Mr. T. Boudjedaa professeur à l'université de Jijel, Mr. A. Tilbi maitre de conférence A à l'université de Jijel et Mr. N. Belaloui professeur à l'université de Constantine pour avoir accepté de juger ce travail.

C'est l'occasion pour moi de témoigner ma sincère gratitude à tous les professeurs de Laboratoire de recherche de la physique théorique. Merci aussi à tous les enseignants du département de Physique de l'université de Jijel.

Merci pour tout ce qui a contribué de près ou de loin à la réalisation de cette thèse.

R. Chekireb

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Création de particules et expansion de l'univers</b>	<b>9</b>
2.1	Introduction . . . . .	10
2.2	Un univers en expansion . . . . .	10
2.3	Quelques propriétés thermodynamiques de l'univers . . . . .	12
2.4	Pression des particules créées . . . . .	14
2.5	Conclusion . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Théorie quantique des champs dans un univers en expansion</b>	<b>15</b>
3.1	Introduction . . . . .	16
3.2	La quantification du champ scalaire libre . . . . .	16
3.3	Champs scalaire complexe dans un espace courbe . . . . .	18
3.4	Transformation de Bogoliubov et création des particules . . . . .	23
3.5	Action effective de Schwinger . . . . .	24
3.6	Conclusion . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Création des particules scalaires dans un univers dominé par radiation</b>	<b>27</b>
4.1	Introduction . . . . .	28
4.2	Solution de l'équation de Klein Gordon . . . . .	28
4.3	Création des paires . . . . .	30
4.4	Univers dominé par radiation . . . . .	32
4.5	Conclusion . . . . .	34
<b>5</b>	<b>Création de particules de Dirac dans un univers en expansion</b>	<b>35</b>
5.1	Introduction . . . . .	36

5.2	Equation de Dirac dans un espace-temps courbe . . . . .	36
5.3	Solutions exactes pour l'univers de de-Sitter . . . . .	37
5.4	Equation de Hamilton-Jacobi et choix des états "in" et "out" . . . . .	40
5.5	Création de particules . . . . .	42
5.6	Conclusion . . . . .	43
<b>6</b>	<b>Effet des champs électromagnétiques sur la création des particules</b>	<b>44</b>
6.1	Introduction . . . . .	45
6.2	Création de particules en électrodynamique . . . . .	45
6.3	Effet du champ électrique sur la création de particules . . . . .	46
6.3.1	Equation de Klein Gordon . . . . .	46
6.3.2	Modèle soluble . . . . .	47
6.3.3	Cas particuliers . . . . .	48
6.3.4	Univers dominé par le rayonnement . . . . .	49
6.4	Effet du champ magnétique . . . . .	52
6.5	Conclusion . . . . .	56
<b>7</b>	<b>Effet du champ électrique sur la création des particules de Dirac</b>	<b>57</b>
7.1	Introduction . . . . .	58
7.2	Equation de Dirac en présence d'un champ électrique . . . . .	58
7.3	Création de particules dans un univers de de-Sitter . . . . .	60
7.4	Nombre de particules créées . . . . .	63
7.5	Action effective de Schwinger . . . . .	65
7.6	Conclusion . . . . .	67
<b>8</b>	<b>La création des paires de spin 1/2 dans un univers avec une dimension supplémentaire</b>	<b>68</b>
8.1	Introduction . . . . .	69
8.2	Motivation . . . . .	69
8.3	Equation de Dirac dans un univers à 5D . . . . .	70
8.4	Séparation des variables . . . . .	72
8.5	Production des particules . . . . .	75
8.6	Conclusion . . . . .	78

<b>9 Conclusion générale</b>	<b>79</b>
<b>A Equations de Friedmann</b>	<b>82</b>
<b>B Equation relativiste de hamilton-Jacobi <math>dS_{1+1}</math></b>	<b>85</b>
<b>C Equation relativiste dans un super-univers à 5D</b>	<b>87</b>

# Chapitre 1

## Introduction générale

La création des paires particule-antiparticule par un champ électromagnétique à partir du vide, a été prédite dans le cadre de l'électrodynamique quantique, il y a plusieurs décennies [1]. Ce phénomène, nommé l'effet de Schwinger, a une interprétation simple dans le cadre de la fameuse théorie de trous de Dirac qui a prédit l'existence d'antiparticules associées aux particules [2]. Selon cette théorie, le vide n'est pas vraiment "vide" mais une "mer de Dirac" qui contient des particules virtuelles ayant une énergie négative. Pour une barrière de potentiel supérieur au double de la masse de la particule, la diffusion de cette dernière peut être accompagnée d'une transition des particules virtuelles de la mer de Dirac en particules réelles par l'effet tunnel. Cette transition produit des paires particule-antiparticule au voisinage de la barrière. Aujourd'hui, il est bien connu que tout champ électrique peut créer des paires de particules chargées à partir du vide.

Comme dans le cas des champs électromagnétiques, les champs gravitationnels peuvent aussi créer de paires particule-antiparticule à partir du vide [3, 4, 5, 6, 7]. Ce phénomène est prédit dans le cadre de la théorie quantique des champs dans un espace courbe [8]. L'étude de ce phénomène nécessite une définition de l'état du vide pour les champs quantiques de la matière. Cependant, il est bien connu que dans un espace courbe, il n'y a pas de définition absolue de l'état du vide et la notion de particules n'est pas complètement claire. Du point de vue physique, c'est à cause du fait qu'en théorie quantique, une particule ne peut être localisée dans une région plus petite que sa longueur d'onde de de-Broglie. Quand cette longueur d'onde devient suffisamment large, la notion de particule perd sa signification. On dit, alors, que la matière se comporte comme des ondes (des champs). Dans un univers en expansion, la création spontanée des particules aura lieu quand le vide devient instable; l'état du vide défini dans le passé se diffère de l'état du vide dans le futur. Dans ce cas, l'amplitude de transition vide-vide porte une phase complexe, dont la partie imaginaire s'interprète comme la probabilité de création des particules.

L'effet de la création de particules a de nombreuses applications en physique moderne de noyaux lourds aux trous noirs [9]. En cosmologie contemporaine, la création de particules a une influence sur l'évolution de notre univers et peut jouer un rôle très important dans l'issue de la phase d'inflation.

Dans la littérature, nous trouvons plusieurs travaux qui traitent la création des particules dans un univers isotrope à 4 dimensions. Le cas d'un univers anisotrope ou un univers avec des dimensions supplémentaires est, par contre, moins discuté. Nous constatons aussi qu'un petit

nombre de papiers qui traitent la création de particules par un champ gravitationnel en présence d'un champ électromagnétique. Les études qui portent sur la création des particules dans ces cas sont donc très limitées. Ceci peut être dû aux difficultés mathématiques et à l'absence d'une motivation physique. Cependant, durant la dernière décennie, plusieurs modèles cosmologiques avec la création des particules ont été proposés. Ces modèles sont encore établis dans un espace-temps à 4 dimensions et avec une géométrie isotrope. La motivation de ces modèles est basée sur la possibilité d'expliquer l'expansion accélérée de l'univers sans avoir besoin à l'énergie sombre (la constante cosmologique). L'énergie des particules créées joue le rôle d'une constante cosmologique.

D'autre part, nous savons que les champs électromagnétiques étaient abondants dans l'univers primordial. Certainement, ces champs ont un effet direct sur l'évolution de l'univers à travers les équations de Friedmann et un effet indirect par leur influence sur la création de particules.

Dans ce travail, nous nous proposons d'étudier la création des particules dans un univers en expansion et de chercher les facteurs qui peuvent amplifier la densité des particules créées. Le taux de création des particules est généralement faible, ce qui rend l'effet de ce phénomène sur l'évolution de l'univers insignifiant. Si la densité des particules créées est amplifiée par d'autres facteurs, elle va jouer un rôle très important en cosmologie.

Comme le phénomène de la création des particules avec un champ extérieur ne peut y avoir lieu sauf si le champ extérieur est intense, le problème a une nature nonperturbative. C'est ainsi qu'il soit nécessaire de suivre une méthode d'analyse exacte. Ici, nous avons à utiliser plusieurs méthodes comme, par exemple, la technique de l'action effective de Schwinger [1, 10, 11], la méthode des intégrales de chemins [12, 13], l'approche adiabatique de Parker [3, 4, 5], la méthode semi-classique WKB [14, 15, 16, 17, 18], la diagonalisation de l'Hamiltonien [19, 20, 21, 22, 23, 24, 25], et la transformation de Bogoliubov reliant les états "in" avec les états "out" [26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34]. Dans ce travail, nous avons utilisé la méthode canonique basée sur la transformation de Bogoliubov. Cette méthode consiste d'abord à chercher les solutions exactes de l'équation d'onde, à les classer en états "in" et "out" et à chercher en suite le lien entre ces états en calculant les coefficients de Bogoliubov. La probabilité de création d'une paire et la densité des particules créées se calculent à partir de ces coefficients.

Cette thèse se compose essentiellement de 9 chapitres

Dans le deuxième chapitre nous nous proposons de montrer que les particules créées ont une



pression négative et peuvent jouer le même rôle que la constante cosmologique en montrant ainsi que le mécanisme de création de particules peut expliquer l'expansion de l'univers.

Le but du troisième chapitre est d'introduire la méthode canonique de Bogoliubov et de décrire ses différents éléments. Nous commençons d'abord par une brève description de la quantification canonique du champ scalaire complexe libre. Ensuite, nous considérons le cas d'un champ scalaire complexe dans un univers en expansion. Comme nous allons le voir, cette théorie n'a pas un état de vide bien déterminé et la notion de particules n'est pas toute à fait claire. Ils existent cependant des instants pour lesquels l'interprétation en particules est possible. Généralement, ces instants sont le passé et le futur lointains. Après avoir exposé la quantification du champ complexe dans un univers en expansion, nous montrons comment exprimer la probabilité de création d'une paire particule-antiparticule à partir du vide et le nombre de particules créées en termes des coefficients de Bogoliubov.

Dans le quatrième chapitre, nous nous proposons de montrer avec un certain détail comment dériver la probabilité de création d'une paire et la densité des particules créées en considérant un espace-temps asymptotiquement Minkowskien. Dans ce cas, les champs de la matière se comportent comme des champs libres et, par conséquent, deux états de vide peuvent être définis. Nous considérons ensuite le cas important d'un univers dominé par le rayonnement.

Dans le cinquième chapitre nous nous proposons d'étudier des particules de spin  $(1/2)$  qui obéissent à la statistique de Fermi-Dirac au lieu de la statistique de Bose-Einstein. Nous considérons aussi l'univers de de-Sitter qui subit une expansion plus rapide que l'univers dominé par le rayonnement.

Pour l'univers de de-Sitter, la métrique n'est pas asymptotiquement Minkowskienne et la définition des états "in" et "out" n'est pas triviale. En admettant que les états d'énergie négative et positive se comportent comme les solutions semi-classiques de l'équation d'Hamilton-Jacobi, nous pouvons définir deux états du vide. C'est ainsi que nous commencerons d'abord par chercher des ensembles différents des solutions pour l'équation de Dirac correspondante. Puis, nous comparons ces solutions avec les solutions semi-classique  $\varphi \sim e^{\pm iS}$ . Cela nous permet de classer nos solutions en états "in" et "out".

Les calculs des deux chapitres précédents montrent que le mécanisme de création des particules par le champ gravitationnel ne peut pas avoir des conséquences importantes sur l'évolution de l'univers à cause de la densité des particules qui est très faible. Ainsi, nous considérons dans le sixième chapitre la création des particules scalaire en présence d'un champ électromagnétique

et nous nous proposons de voir à quel point les champs électromagnétiques peuvent assister le mécanisme afin de pouvoir jouer un rôle dans l'évolution de l'univers.

Le but du septième chapitre est d'étudier l'effet du champ électrique sur la création des particules de Dirac dans l'univers de de Sitter. Nous commençons d'abord par la solution de l'équation de Dirac et la détermination des états "in" et "out". Ensuite, nous calculons la probabilité de création d'une paire et la densité des fermions créés à partir des coefficients de Bogoliubov.

Dans le huitième chapitre nous nous proposons d'étudier l'effet de la création des particules de Dirac dans un univers en expansion avec une dimension supplémentaire. Nous montrons dans ce chapitre que l'existence des dimensions supplémentaires a une influence importante sur la création des particules.

## **Chapitre 2**

# **Création de particules et expansion de l'univers**

## 2.1 Introduction

L'observation de la luminosité des supernovas de type *Ia* suggère montre un décalage vers le rouge qui ne peut être expliqué que par une expansion accélérée de l'univers [37, 38, 39, 40, 41, 42, 43]. L'accélération de l'expansion de l'univers s'interprète par la présence d'une force répulsive, à grande échelle, capable de surmonter la force gravitationnelle qui lie les différents constituants de l'univers. Cette interprétation suggère un champ d'énergie antigravitationnel -i.e. énergie du vide, connue sous le nom d'énergie sombre. La nature de ce champ reste mystérieuse et le fameux candidat à l'énergie sombre est la constante cosmologique d'Einstein [44, 45, 46] qui peut être considérée comme un fluide parfait avec une grande pression négative [47].

Dans ce chapitre nous nous proposons de montrer que les particules créées par l'expansion de l'univers ont une pression négative et peuvent ainsi jouer le même rôle que la constante cosmologique.

## 2.2 Un univers en expansion

Selon le modèle standard de la cosmologie l'univers est isotrope, homogène et en expansion, ce qui est corroboré par le comptage des galaxies et le rayonnement de fond  $\gamma$ .

La projection des hypothèses d'homogénéité et d'isotropie des sections spatiales de l'univers permet d'écrire l'élément de longueur d'espace-temps en fonction des coordonnées sphériques sous la forme de FRW

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \quad (2.1)$$

où  $t$  est le temps cosmique,  $K$  est la courbure spatiale et  $a(t)$  le facteur d'échelle qui indique la taille de l'univers à chaque instant. L'élément  $d\Omega^2$  est donné par

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (2.2)$$

Pour un espace plat,  $K = 0$ , la métrique de FRW prend la forme

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) d\vec{x}^2. \quad (2.3)$$

Rappelons maintenant l'équation d'Einstein liant la courbure de l'univers à la présence de la matière et qui gouverne la dynamique de l'univers

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (2.4)$$

où  $R$  et  $R_{\mu\nu}$  sont respectivement le scalaire et tenseur de Ricci.  $T_{\mu\nu}$  est le tenseur énergie-impulsion du fluide cosmologique. Le tenseur de Ricci est défini par

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu,\lambda}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} \Gamma_{\nu\kappa}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\kappa} \Gamma_{\lambda\kappa}^{\lambda}, \quad (2.5)$$

où  $\Gamma_{\nu\kappa}^{\mu}$  sont les symboles de Christoffel (les connexions affines)

$$\Gamma_{\nu\kappa}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (g_{\lambda\nu,\kappa} + g_{\lambda\kappa,\nu} - g_{\nu\kappa,\lambda}). \quad (2.6)$$

Le tenseur  $T_{\mu\nu}$  s'écrit

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho) u_{\mu} u_{\nu} + p g_{\mu\nu}, \quad (2.7)$$

où  $\rho$  est la densité d'énergie et  $p$  est la pression mesurées dans le référentiel au repos et  $u_{\mu} = (1, 0, 0, 0)$  est la quadri-vitesse du fluide.

A partir de l'équation d'Einstein nous nous pouvons dériver l'équation fondamentale de Friedmann

$$3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi G \rho. \quad (2.8)$$

qui gouverne la dynamique de l'univers non-statique et permet de connaître son évolution à partir de son contenu. Pour des raisons de simplification, on impose encore l'hypothèse que le contenu de l'univers est un fluide parfait obéissant à une équation d'état de type

$$p = \omega \rho \quad (2.9)$$

où  $\omega$  est un paramètre indépendant du temps. En outre, suivant le premier principe de la thermodynamique.

$$dU = \delta W + \delta Q, \quad (2.10)$$

où  $U$  est l'énergie interne,  $W$  est le travail échangé avec le milieu extérieur et  $Q$  est la quantité d'énergie transférée sous forme de chaleur. Ici  $\delta Q = 0$ .

Comme

$$dU = d(\rho V) = \rho dV + V d\rho, \quad (2.11)$$

et

$$\delta W = -p dV \quad (2.12)$$

nous avons

$$d\rho = -(\rho + p) \frac{dV}{V}. \quad (2.13)$$

Compte tenu de l'équation d'état, nous obtenons

$$\rho \sim a^{-3(1+\omega)}. \quad (2.14)$$

En substituant (2.14) dans l'équation de Friedmann (2.8), nous obtenons les solutions habituelles suivantes

$$a(t) \sim \begin{cases} t^{2/3} & \text{pour la matière non relativiste } (\omega = 0) \\ t^{1/2} & \text{pour la matière relativiste } (\omega = \frac{1}{3}) \\ e^{Ht} & \text{Prépondérance du vide } (\omega = -1). \end{cases} \quad (2.15)$$

## 2.3 Quelques propriétés thermodynamiques de l'univers

Considérons maintenant le comportement thermodynamique de l'univers. Grâce à la définition de l'enthalpie  $H$

$$H = E + p_m V \quad (2.16)$$

où  $E$  est l'énergie totale et  $p_m$  est la pression de la matière existante dans l'univers et  $V$  est un volume comobile arbitraire. Pour une transformation isobare  $dP = 0$  nous écrivons

$$d(hV) = d(\rho V) + P_m dV, \quad (2.17)$$

où  $\rho$ ,  $n$  et  $h$  sont la densité d'énergie totale, le nombre de particules par unité de volume et l'enthalpie par unité de volume respectivement,

$$\rho = \frac{E}{V}, \quad n = \frac{N}{V}, \quad h = \frac{H}{V}. \quad (2.18)$$

Il n'est pas difficile de montrer que l'équation (2.17) peut être écrite sous la forme

$$d(\rho V) + P_m dV - \frac{h}{n} d(nV) = 0. \quad (2.19)$$

Supposons maintenant qu'il y a un changement du nombre de particules lié à une variation de la quantité de matière au cours de la transformation du champ gravitationnel au champ de la matière, ce qui nécessite alors l'introduction du concept de potentiel chimique  $\mu$ . Dans ce cas suivant la première loi de thermodynamique

$$dE = \delta Q - p_m dV + \mu dN. \quad (2.20)$$

Grâce à la deuxième loi de la thermodynamique  $\delta Q = TdS$ , où  $S$  est l'entropie, nous obtenons

$$dE = TdS - p_m dV + \mu dN, \quad (2.21)$$

ce qui nous permet d'écrire

$$TdS = d(\rho V) + p_m dV - \mu d(nV). \quad (2.22)$$

En général, le potentiel chimique est une dérivée partielle d'un potentiel thermodynamique ; énergie interne  $U$ , énergie libre  $F$ ... Pour des réactions isobares et adiabatiques,  $\mu$  se définit à travers l'énergie libre de Gibbs

$$G = H - TS. \quad (2.23)$$

Nous avons

$$\mu = \left( \frac{\partial G}{\partial N} \right)_{P,T}, \quad (2.24)$$

Par un calcul simple nous obtenons

$$\mu = \frac{1}{n} \left( \frac{\partial H}{\partial V} - T \frac{\partial S}{\partial V} \right)_{P,T},$$

En introduisant avec l'entropie par unité de volume  $s = S/V$ , nous arrivons à

$$\mu n = h - Ts, \quad (2.25)$$

Compte tenu des équations (2.19) et (2.22) nous obtenons encore

$$TdS = \left( \frac{h}{n} - \mu \right) dN. \quad (2.26)$$

Définissons maintenant l'entropie spécifique  $\sigma$ , avec  $\sigma = \frac{S}{N}$ . A partir des équations (2.25) et (2.26) nous pouvons montrer que  $SdN = NdS$  ce qui implique que  $\sigma$  est une constante et, par conséquent,

$$TdS = T\sigma dN. \quad (2.27)$$

Il est évident donc que  $dS \geq 0$  implique que  $dN \geq 0$ . Ce résultat est très important car il montre que lors d'un changement adiabatique dans l'univers avec  $dS > 0$ , le nombre de particules va augmenter. On dit alors qu'il a une création de particules adiabatique avec une entropie spécifique constante.

Comme  $h = \rho + p_m$ , l'équation (2.19) nous donne

$$d\rho = \frac{h}{n} dn. \quad (2.28)$$

En divisant (2.28) par  $dt$ , nous obtenons

$$\dot{\rho} = h \frac{\dot{n}}{n}. \quad (2.29)$$

## 2.4 Pression des particules créées

En tenant compte de la création des particules, nous pouvons écrire le tenseur énergie-impulsion sous la forme

$$T_{\mu\nu} = (p_m + p_{cm} + \rho) u_\mu u_\nu + (p_m + p_{cm}) g_{\mu\nu}, \quad (2.30)$$

où  $\rho = \rho_m + \rho_{cm}$  est la densité d'énergie totale et  $p_{cm}$  est la pression des particules créées. Suivant la loi de conservation de l'énergie  $T^{0\mu}{}_{;0} = 0$ , nous avons

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p_m + p_{cm}) = 0, \quad (2.31)$$

Insérant (2.29) dans (2.31), nous obtenons

$$p_{cm} = -\frac{1}{3H} \left( h \frac{\dot{n}}{n} + 3H(\rho + p_m) \right). \quad (2.32)$$

Cette dernière équation montre que la pression de la matière créée est négative et, par conséquent, le mécanisme de création des particules peut jouer le même rôle que la constante cosmologique [48].

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré à l'aide des principes de la thermodynamique, que la pression des particules créées est négative. Cette propriété ne dépend pas de la statistique des particules et elle est valable pour les fermions et les bosons. Les particules créées représentent alors un champ de matière répulsive provoque l'expansion accélérée de notre univers. Par conséquent, si la densité des particules créées est suffisamment grande, il est possible d'expliquer l'expansion accélérée de l'univers par le mécanisme de la création des particules sans avoir besoin d'introduire le concept d'énergie sombre.



## **Chapitre 3**

# **Théorie quantique des champs dans un univers en expansion**

## 3.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'introduire la méthode canonique de Bogoliubov et de décrire ses différents éléments. Nous commençons d'abord par une brève description de la quantification canonique du champ scalaire complexe libre. Ensuite, nous considérons le cas d'un champ scalaire complexe dans un univers en expansion. Dans ce cas, comme nous allons le voir, le système en question n'a pas un vide bien déterminé et la notion de particules n'est pas toute à fait claire. Ils existent cependant des instants pour lesquels l'interprétation en particules est possible. Généralement, ces instants sont le passé et le futur lointains. Il est bien évident que pour un espace-temps asymptotiquement plat, le système du champ complexe se comporte à  $t \rightarrow \pm\infty$  comme libre et donc l'état du vide, à  $\pm\infty$ , est bien déterminé. Cependant l'état du vide à  $-\infty$ , est en général différent de l'état du vide à  $+\infty$ . On dit alors que le vide, à  $t \rightarrow -\infty$ , devient instable à cause du champ gravitationnel [35, 36], ce qui induit la création des paires particule-antiparticule.

Après avoir exposé la quantification du champ complexe dans un univers en expansion, nous montrons comment exprimer la probabilité de création d'une paire particule-antiparticule à partir du vide et le nombre de particules créées en termes des coefficients de Bogoliubov.

## 3.2 La quantification du champ scalaire libre

D'abord nous commençons par la quantification d'un système de champ scalaire libre. La densité lagrangienne d'un champ scalaire complexe libre s'écrit comme

$$\mathcal{L} = \eta_{\mu\nu} \partial_\mu \varphi^* \partial_\nu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi. \quad (3.1)$$

avec  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  est la métrique Minkowskienne.

La dynamique de ce système est régie par l'équation de Klein-Gordon suivante

$$(\square + m^2) \varphi(x, t) = 0, \quad (3.2)$$

où le d'alembertien  $\square$  est donné par

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta. \quad (3.3)$$

Les deux solutions linéairement indépendantes sont  $f_k(\vec{r}, t)$  et  $f_k^*(\vec{r}, t)$  avec

$$f_k(\vec{r}, t) = N e^{i(k_0 t - \vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad (3.4)$$

où  $k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$  et  $N$  est une constante de normalisation qui peut se déterminer à partir de la condition

$$f_k^* \dot{f}_k - \dot{f}_k^* f_k = 2i. \quad (3.5)$$

Cette condition exprime la conservation du courant (la densité de charge). On peut déduire donc que la solution générale de l'équation de Klein-Gordon est la somme de tous les modes  $f_k(\vec{r}, t)$  et  $f_k^*(\vec{r}, t)$

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [A_k f_k(\vec{r}, t) + B_k^* f_k^*(\vec{r}, t)] \quad (3.6)$$

$$\varphi^*(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [B_k f_k(\vec{r}, t) + A_k^* f_k^*(\vec{r}, t)], \quad (3.7)$$

où les amplitudes  $A_k$  et  $B_k$  sont de fonctions du vecteur d'onde  $\vec{k}$ .

Les moments conjugués associés aux champs  $\varphi(\vec{r}, t)$  et  $\varphi^*(\vec{r}, t)$  sont donnés par

$$\pi_\varphi(\vec{r}, t) = i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k_0 [A_k e^{i(k_0 t - \vec{k} \cdot \vec{r})} - B_k^* e^{-i(k_0 t - \vec{k} \cdot \vec{r})}] \quad (3.8)$$

$$\pi_{\varphi^*}(\vec{r}, t) = i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k_0 [B_k f_k e^{i(k_0 t - \vec{k} \cdot \vec{r})} - A_k^* e^{-i(k_0 t - \vec{k} \cdot \vec{r})}]. \quad (3.9)$$

Comme on le sait, la procédure de quantification consiste à considérer le champ  $\varphi(\vec{r}, t)$  comme un opérateur vérifiant les relations de commutation suivantes

$$[\hat{\varphi}(\vec{r}, t), \hat{\pi}(\vec{r}', t)] = i\delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (3.10)$$

et

$$[\hat{\varphi}(\vec{r}, t), \hat{\varphi}(\vec{r}', t)] = [\hat{\pi}(\vec{r}, t), \hat{\pi}(\vec{r}', t)] = 0. \quad (3.11)$$

Dans ce cas, les coefficients (amplitudes)  $A_k$ ,  $B_k$ ,  $A_k^*$  et  $B_k^*$  deviennent des opérateurs et les champs  $\varphi(\vec{r}, t)$  et  $\varphi^+(\vec{r}, t)$  s'écrivent comme

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [\hat{a}(\vec{k}) f_k(\vec{r}, t) + \hat{b}^+(\vec{k}) f_k^*(\vec{r}, t)] \quad (3.12)$$

$$\varphi^+(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [\hat{b}(\vec{k}) f_k(\vec{r}, t) + \hat{a}^+(\vec{k}) f_k^*(\vec{r}, t)], \quad (3.13)$$

En prenant en considération les relations de commutation (3.10) et (3.11), nous obtenons les relations de commutation vérifiées par les opérateurs  $\hat{a}(\vec{k})$ ,  $\hat{a}^+(\vec{k})$ ,  $\hat{b}(\vec{k})$  et  $\hat{b}^+(\vec{k})$

$$[\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^+(\vec{k}')] = [\hat{b}_k, \hat{b}_{k'}^+] = (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (3.14)$$

et

$$\left[ \hat{a}(\vec{k}), \hat{b}_{k'}^+ \right] = \left[ \hat{a}(\vec{k}), \hat{b}_{k'} \right] = 0. \quad (3.15)$$

Calculons maintenant le Hamiltonien du système. Par définition, nous avons

$$H = \int d^3x (\pi_\varphi \dot{\varphi} + \pi_{\varphi^*} \dot{\varphi}^* - \mathcal{L}), \quad (3.16)$$

ce qui nous donne

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k_0 \left[ \hat{a}^+(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}) + \hat{b}(\vec{k}) \hat{b}^+(\vec{k}) \right], \quad (3.17)$$

Pour l'opérateur de charge nous avons

$$Q = e \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ \hat{a}^+(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}) - \hat{b}(\vec{k}) \hat{b}^+(\vec{k}) \right]. \quad (3.18)$$

Ici, nous remarquons que  $H$  et  $Q$  sont diagonaux, ce qui nous permet d'interpréter les opérateurs  $\hat{a}^+(\vec{k})$  et  $\hat{a}(\vec{k})$  comme les opérateurs de création et d'annihilation de particules et les opérateurs  $\hat{b}^+(\vec{k})$  et  $\hat{b}(\vec{k})$  comme les opérateurs de création et d'annihilation des antiparticules.

Nous pouvons ainsi définir les opérateurs

$$N_a = \frac{1}{(2\pi)^3} \hat{a}^+(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}), \quad \text{et} \quad N_b = \frac{1}{(2\pi)^3} \hat{b}^+(\vec{k}) \hat{b}(\vec{k}), \quad (3.19)$$

qui représentent respectivement, le nombre de particules et le nombre d'antiparticules. L'état qui vérifie la condition  $N_a |0\rangle = N_b |0\rangle = 0$  est dit l'état du vide.

### 3.3 Champs scalaire complexe dans un espace courbe

Considérons maintenant le cas d'un champ scalaire complexe dans un espace courbe. Il est bien connu que l'action de ce système s'écrit sous la forme

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ g_{\mu\nu} \partial_\mu \phi^* \partial_\nu \phi - (m^2 + \xi R) \phi^* \phi \right], \quad (3.20)$$

où  $\xi$  est un paramètre numérique qui assure l'invariance par une transformation conforme. Pour un espace-temps de dimension  $d$ , le paramètre  $\xi$  est donné par

$$\xi = \frac{1}{4} \frac{d-2}{d-1}. \quad (3.21)$$

Compte tenu du principe de moindre action ( $\delta S = 0$ ), l'équation de mouvement pour le champ  $\phi$  se dérive à partir de (3.20). Nous obtenons l'équation de Klein Gordon dans un espace courbe

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \partial_\nu \phi) + \left( m^2 + \frac{1}{6} R \right) \phi = 0. \quad (3.22)$$

Comme nous avons vu, un univers en expansion avec une géométrie spatiale plate peut être décrit par la métrique de FRW

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (3.23)$$

Si nous introduisons le temps conforme  $\eta$  avec  $\eta = \int \frac{dt}{a(t)}$ , nous pouvons écrire la métrique de FRW sous la forme

$$ds^2 = a^2(\eta) (d\eta^2 - d\vec{x}^2). \quad (3.24)$$

Dans ce cas, en faisant la substitution  $\phi(\eta, x) = a^{-1}(\eta) \psi(\eta, x)$  dans l'équation de Klein Gordon (3.22) nous obtenons l'équation

$$\left[ \frac{d^2}{d\eta^2} - \Delta + a^2(m^2 + \xi R) - \frac{a''}{a} \right] \psi(\eta, \vec{x}) = 0, \quad (3.25)$$

avec  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  et  $a'' = \frac{d^2 a}{d\eta^2}$  (le symbole "  $x'$  " indique la dérivée de  $x$  par rapport au temps conforme  $\eta$ ).

Sachant que, pour la métrique (3.23), le scalaire de Ricci est

$$R = 6 \frac{\ddot{a}}{a^3}, \quad (3.26)$$

l'équation (3.25) se réduit à

$$\left[ \frac{d^2}{d\eta^2} - \Delta + m^2 a^2(\eta) \right] \psi(\eta, \vec{x}) = 0. \quad (3.27)$$

Maintenant, nous faisons la décomposition

$$\psi(\eta, \vec{x}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \chi_k(\vec{x}) u_k(\eta), \quad (3.28)$$

où  $\chi_k(\vec{x})$  est la fonction propre de l'opérateur Laplacien  $\Delta$  avec la valeur propre  $-\lambda_k^2$ ,

$$(\Delta + \lambda_k^2) \chi_k(\vec{x}) = 0. \quad (3.29)$$

Il est évident que pour un espace plat ( $K = 0$ ) les fonctions  $\chi_k(\vec{x})$  sont des ondes planes et  $\lambda_k^2 = \vec{k}^2$ .

La condition de normalisation des fonctions  $\chi_k(\vec{x})$  est donnée par

$$\int d\vec{x} \chi_k(\vec{x}) \chi_{k'}^*(\vec{x}) = \delta_{kk'}. \quad (3.30)$$

La fonction dépendante du temps  $u_k(\eta)$  satisfait alors l'équation différentielle

$$\left( \frac{d^2}{d\eta^2} + \omega^2(\eta) \right) u_k(\eta) = 0. \quad (3.31)$$

avec  $\omega^2(\eta) = \vec{k}^2 + m^2 a^2(\eta)$ .

Notons ici que si  $\varphi_k(\eta)$  est une solution de l'équation (3.31),  $\varphi_k^*(\eta)$  est aussi une solution.

La condition de normalisation

$$\varphi_k^*(\eta) \dot{\varphi}_k(\eta) - \dot{\varphi}_k^*(\eta) \varphi_k(\eta) = 2i \quad (3.32)$$

montre que les deux solutions  $\varphi_k^*(\eta)$  et  $\varphi_k(\eta)$  sont linéairement indépendantes. La solution générale de (3.31) est donc

$$u_k(\eta) = a_k \varphi_k^*(\eta) + b_k^* \varphi_k(\eta), \quad (3.33)$$

Nous insérons l'équation(3.33) dans la décomposition(3.28), le champ peut s'écrire alors

$$\psi(\eta, \vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left( a_k \varphi_k^*(\eta) \chi_k(\vec{x}) + b_k^* \left( \vec{k} \right) \varphi_k(\eta) \chi_k^*(\vec{x}) \right), \quad (3.34)$$

La quantification canonique consiste de remplacer les coefficients  $a_k$ ,  $a_k^*$ ,  $b_k$ , et  $b_k^*$  par les opérateurs  $\hat{a}(\vec{k})$ ,  $\hat{a}^+(\vec{k})$ ,  $\hat{b}(\vec{k})$  et  $\hat{b}^+(\vec{k})$ . Nous obtenons alors pour le champ  $\hat{\psi}(\eta, \vec{x})$  et son moment conjugué  $\hat{\pi}(\eta, \vec{x})$

$$\hat{\psi}(\eta, \vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left( \varphi_k^+(\eta) \chi_k(\vec{x}) \hat{a}(\vec{k}) + \varphi_k^-(\eta) \chi_k^*(\vec{x}) \hat{b}^+(\vec{k}) \right), \quad (3.35)$$

et

$$\hat{\pi}(\eta, \vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left( \dot{\varphi}_k^+(\eta) \chi_k^*(\vec{x}) \hat{a}^+(\vec{k}) + \dot{\varphi}_k^-(\eta) \chi_k(\vec{x}) \hat{b}(\vec{k}) \right), \quad (3.36)$$

où nous avons utilisé  $\varphi_k^+(\eta)$  et  $\varphi_k^-(\eta)$  au lieu de  $\varphi_k(\eta)$  et  $\varphi_k^*(\eta)$  en faisant ainsi référence aux états d'énergie positive et négative. Comme  $\hat{\psi}(\eta, \vec{x})$  et  $\hat{\pi}(\eta, \vec{x})$  vérifient pour une hypersurface à  $\eta = cst$  les relations de commutations (3.10) (3.11), les opérateurs  $\hat{a}(\vec{k})$ ,  $\hat{a}^+(\vec{k})$ ,  $\hat{b}(\vec{k})$  et  $\hat{b}^+(\vec{k})$  vérifient alors les relations de commutation (3.14)et (3.15).

Compte tenu de la condition de normalisation (3.32) nous pouvons écrire l'opérateur Hamiltonien sous la forme

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \frac{1}{2} \int d^3k \left[ E_k(\eta) \left[ \hat{a}^+(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}) + \hat{b}(\vec{k}) \hat{b}^+(\vec{k}) \right] \right. \\ & \left. + F_k^*(\eta) \hat{b}(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}) + F_k(\eta) \hat{b}^+(\vec{k}) \hat{a}^+(\vec{k}) \right], \end{aligned} \quad (3.37)$$

avec

$$E_k(\eta) = |\dot{\varphi}_k(\eta)|^2 + \omega_k^2(\eta) |\varphi_k(\eta)|^2, \quad (3.38)$$

et

$$F_k(\eta) = \dot{\varphi}_k^2(\eta) + \omega_k^2(\eta) \varphi_k^2(\eta).$$

Ici nous remarquons d'abord que ce Hamiltonien dépend explicitement du temps ce qui montre que l'énergie du système n'est pas conservée. Nous remarquons aussi que ce Hamiltonien est quadratique mais n'est pas diagonal, il contient des termes mixtes  $\hat{b}\hat{a}$  et  $\hat{a}^+\hat{b}^+$ . A cause de ces termes mixtes nous ne pouvons pas interpréter les opérateurs  $\hat{a}^+(\vec{k})$  et  $\hat{a}(\vec{k})$  comme des opérateurs de création et d'annihilation de particules et les opérateurs  $\hat{b}^+(\vec{k})$  et  $\hat{b}(\vec{k})$  comme des opérateurs de création et d'annihilation des antiparticules. Cette interprétation est possible seulement si les coefficients des termes mixtes sont nuls ( $F_k(\eta) = F_k^*(\eta) = 0$ ). Dans ce cas le Hamiltonien devient diagonal.

Pour une métrique asymptotiquement Minkowskienne, nous pouvons voir qu'il existe deux couples  $(\varphi_k^+(\eta), \varphi_k^-(\eta))$  qui rendent le Hamiltonien diagonal. Le premier couple se comporte à  $(-\infty)$  comme

$$(\varphi_k^+(\eta), \varphi_k^-(\eta)) = (e^{-i\omega_{in}\eta}, e^{i\omega_{in}\eta}), \quad (3.39)$$

avec

$$\omega_{in} = \sqrt{k^2 + m^2 a_1^2}, \quad (3.40)$$

où  $a_1 = a(\eta \rightarrow -\infty)$ . Dans ce cas, nous avons

$$E_k(\eta \rightarrow -\infty) = 2\omega_{in} \quad \text{et} \quad F_k(\eta \rightarrow -\infty) = 0 \quad (3.41)$$

et

$$H = \int d^3k \omega_{in} \left( \hat{a}_{in}^+(\vec{k}) \hat{a}_{in}(\vec{k}) + \hat{b}_{in}(\vec{k}) \hat{b}_{in}^+(\vec{k}) \right). \quad (3.42)$$

Le deuxième couple se comporte à  $(\eta \rightarrow +\infty)$  comme

$$(\varphi_k^+(\eta), \varphi_k^-(\eta)) = (e^{-i\omega_{out}\eta}, e^{i\omega_{out}\eta}), \quad (3.43)$$

où

$$\omega_{out} = \sqrt{k^2 + m^2 a_2^2}, \quad (3.44)$$

Ici, nous obtenons

$$E_k(\eta \rightarrow +\infty) = 2\omega_{out} \quad \text{et} \quad F_k(\eta \rightarrow +\infty) = 0 \quad (3.45)$$

et

$$H = \int d^3k \omega_{out} \left( \hat{a}_{out}^+ (\vec{k}) \hat{a}_{out} (\vec{k}) + \hat{b}_{out} (\vec{k}) \hat{b}_{out}^+ (\vec{k}) \right). \quad (3.46)$$

Nous remarquons que le Hamiltonien est diagonal, pour deux états du vide  $|0_{in}\rangle$  et  $|0_{out}\rangle$ , avec  $\hat{a}_{in} |0_{in}\rangle = \hat{b}_{in} |0_{in}\rangle = 0$  et  $\hat{a}_{out} |0_{out}\rangle = \hat{b}_{out} |0_{out}\rangle = 0$ , où l'état  $|0_{in}\rangle$  est un état du vide initial dans le passé lointain et  $|0_{out}\rangle$  est un état du vide final dans le futur lointain.

Pour une métrique qui n'est pas asymptotiquement Minkowskienne, la diagonalisation de  $H$  est possible si  $\omega_k(\eta)$  varie d'une manière adiabatique au voisinage d'un instant  $\eta_0$ . Sachant que la condition d'adiabaticité est donnée par

$$\lim_{\eta \rightarrow \eta_0} \left| \frac{\dot{\omega}_k(\eta)}{\omega_k^2(\eta)} \right| \ll 1$$

nous pouvons montrer que les fonctions

$$\varphi_k^\pm(\eta) \simeq \frac{1}{\sqrt{\omega_k(\eta)}} e^{\mp i \int \omega_k(\eta) d\eta} \quad (3.47)$$

sont des solution à l'équation (3.31) pour lesquelles

$$E_k(\eta) \simeq 2\omega_k(\eta_0), \quad (3.48)$$

$$F_k^*(\eta) \simeq F_k(\eta) \simeq 0, \quad (3.49)$$

et

$$\hat{H} = \int d^3k \omega_k(\eta_0) \left[ \hat{a}^+ (\vec{k}) \hat{a} (\vec{k}) + \hat{b}^+ (\vec{k}) \hat{b} (\vec{k}) \right]. \quad (3.50)$$

À l'instant  $\eta_0$ , le Hamiltonien est diagonal et l'état du vide  $\hat{a} (\vec{k}) |0_{\eta_0}\rangle = 0$  est bien déterminé. C'est un état physique dit vide adiabatique.

Rappelons à la fin de ce paragraphe, que nous pouvons considéré les champs de la matière dans un volume  $V$  fini de sorte que  $\vec{k}$  soit quantifié ( discret). Dans ce cas l'integration sur  $d^3k$  peut être remplacée par une somme. Nous avons

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \rightarrow \int \frac{V d^3k}{(2\pi)^3} = \int \frac{d^3x d^3k}{(2\pi)^3} \rightarrow \sum_k \quad (3.51)$$



et par conséquent,

$$\int d^3k \rightarrow \frac{(2\pi)^3}{V} \sum_k.$$

La distribution de Dirac  $\delta(\vec{k} - \vec{k}')$  est remplacée par  $\delta_{\vec{k}, \vec{k}'}$  avec

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{V}{(2\pi)^3} \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} = \delta(\vec{k} - \vec{k}').$$

Les opérateurs  $\hat{a}(\vec{k})$  deviennent

$$\hat{a}(\vec{k}) \rightarrow \sqrt{\frac{V}{(2\pi)^3}} \hat{a}_{\vec{k}}$$

avec

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^+] = [\hat{b}_k, \hat{b}_{k'}^+] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}. \quad (3.52)$$

Le Hamiltonien diagonal s'écrit

$$H = \sum_k \omega_{\vec{k}} \left( \hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{\vec{k}} + \hat{b}_{\vec{k}}^+ \hat{b}_{\vec{k}} \right). \quad (3.53)$$

Dans la suite de cette thèse, nous considérons des vecteurs  $\vec{k}$  quantifiés afin d'utiliser les relations simples (3.52).

## 3.4 Transformation de Bogoliubov et création des particules

Comme l'ensemble  $\{\varphi_{k,out}^+(\eta), \varphi_{k,out}^-(\eta)\}$  forme une base pour l'espace des solutions de l'équation (3.31), nous pouvons écrire les éléments du deuxième ensemble  $\{\varphi_{k,in}^+(\eta), \varphi_{k,n}^-(\eta)\}$  comme combinaisons linéaires des fonctions  $\varphi_{k,out}^+(\eta)$  et  $\varphi_{k,out}^-(\eta)$

$$\varphi_{in}^+(\eta) = \alpha_k \varphi_{out}^+(\eta) + \beta_k \varphi_{out}^-(\eta) \quad (3.54)$$

$$\varphi_{in}^-(\eta) = \beta_k^* \varphi_{out}^+(\eta) + \alpha_k^* \varphi_{out}^-(\eta), \quad (3.55)$$

Cette écriture est dite transformation de Bogoliubov où les coefficients (de Bogoliubov)  $\alpha$  et  $\beta$  vérifient la condition

$$|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2 = 1. \quad (3.56)$$

Cette transformation nous permet d'écrire

$$a_{k,out} = \alpha_k a_{k,in} + \beta_k b_{k,in}^+ \quad (3.57)$$

$$b_{k,out}^+ = \beta_k^* a_{k,in} + \alpha_k^* b_{k,in}^+. \quad (3.58)$$

En utilisant ces deux dernières relations nous arrivons au résultat suivant

$$\langle 0_{in} | \hat{a}_{k,out}^+ \hat{a}_{k,out} | 0_{in} \rangle = \langle 0_{in} | b_{k,out}^+ b_{k,out} | 0_{in} \rangle = |\beta_k|^2, \quad (3.59)$$

ce qui montre que le vide  $|0_{in}\rangle$  contient des particules "out".

Selon les principes généraux de la théorie quantique des champs, l'amplitude de transition de l'état  $|0_{in}\rangle$  à l'état  $a_{out}^+ b_{out}^+ |0_{out}\rangle$  est donnée par

$$A = \langle 0_{out} | \hat{b}_{k,out} \hat{a}_{k,out} | 0_{in} \rangle. \quad (3.60)$$

Compte tenu des relations de commutation (3.52),  $b_{out}$  peut s'écrire en fonction de  $b_{in}$  et  $a_{out}^+$

$$b_{out} = \frac{1}{\alpha_k^*} b_{k,in} + \frac{\beta_k^*}{\alpha_k^*} a_{k,out}^+ \quad (3.61)$$

et l'amplitude  $A$  se réduit à

$$A = \left| \frac{\beta_k^*}{\alpha_k^*} \right|^2 \langle 0_{out} | 0_{in} \rangle. \quad (3.62)$$

La probabilité de création d'une paire dans l'état  $\vec{k}$  est alors donné par

$$P_{\vec{k}} = \left| \frac{\beta_k}{\alpha_k} \right|^2. \quad (3.63)$$

## 3.5 Action effective de Schwinger

Au début des années 50, Schwinger a montré dans le cadre de la théorie quantique des champs que l'amplitude de transition vide-vide pour un champ spinoriel peut être exprimée par l'intermédiaire d'une action effective

$$\mathcal{A}(vac - vac) = \exp(iS_{eff}) = \exp\left(i \int d^4x L_{eff}\right), \quad (3.64)$$

où  $L_{eff}$  est dit le lagrangien effectif de Schwinger.

La probabilité de transition vide-vide est alors

$$\mathcal{P}_{vac-vac} = \exp(-2 \text{Im} S_{eff}) = \exp\left(- \int d^4x 2 \text{Im} L_{eff}\right). \quad (3.65)$$

Dans ce cas, la probabilité de création des particules peut être donc extraite de la partie imaginaire de  $S_{eff}$

$$\mathcal{P}_{Creat.} = 1 - |\mathcal{A}(vac - vac)|^2 \simeq \int d^4x \, 2 \operatorname{Im} L_{eff}. \quad (3.66)$$

Ici,  $2 \operatorname{Im} L_{eff}$  est la probabilité par unité de temps par unité de volume de créer des particules à partir du vide.

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de montrer le lien entre l'action effective de Schwinger et les coefficients de Bogoliubov.

Soit  $C_{\vec{k}}$  la probabilité pour qu'il n'y ait pas de création de paires dans l'état  $\vec{k}$ . La quantité  $C_{\vec{k}} (P_{\vec{k}})^n$  est donc la probabilité d'avoir seulement  $n$  paires créés dans l'état  $\vec{k}$ . Il s'en suit que

$$\sum_n C_{\vec{k}} (P_{\vec{k}})^n = 1, \quad (3.67)$$

ce qui nous donne

$$C_{\vec{k}} = 1 - P_{\vec{k}} = 1 - \left| \frac{\beta_k}{\alpha_k} \right|^2 = \frac{1}{|\alpha_k|^2} = \frac{1}{1 + |\beta_k|^2} \quad (3.68)$$

D'autre part, la probabilité de transition vide-vide peut être écrite sous la forme

$$\begin{aligned} \exp \left( - \int d^4x \, 2 \operatorname{Im} L_{eff} \right) &= \prod_k C_{\vec{k}} \\ &= \prod_k \exp \left[ - \ln (1 + |\beta_k|^2) \right] \\ &= \exp \left[ - \sum_k \ln (1 + |\beta_k|^2) \right]. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Par conséquent la partie imaginaire de l'action effective de Schwinger est

$$\int d^4x \, 2 \operatorname{Im} L_{eff} = \sum_k \ln (1 + |\beta_k|^2). \quad (3.70)$$

Utilisons le développement de Taylor

$$\ln (1 + |\beta_k|^2) = \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} |\beta_k|^{2n}$$

pour obtenir l'équivalent à la fameuse série de Schwinger

$$\int d^4x \, 2 \operatorname{Im} L_{eff} = \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_k |\beta_k|^{2n}. \quad (3.71)$$

Il est à noter que la sommation sur  $k$  peut être remplacée par l'intégrale  $\int \frac{V d^3k}{(2\pi)^3}$  où la mesure  $\frac{V d^3k}{(2\pi)^3}$  représente le nombre d'états dans l'intervalle  $[\vec{k}, \vec{k} + d\vec{k}]$  dans le volume  $V$ .

## 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposé la théorie quantique des champs dans l'univers de FRW où nous avons prouvé que l'Hamiltonien d'un champ scalaires complexe en présence d'un champ extérieur n'est pas toujours diagonal. Nous avons montré aussi qu'ils existent des modes pour lesquels l'Hamiltonien est diagonal. Ces modes sont appelés les modes "in" et "out". A partir de la relation entre ces modes (transformation de Bogoliubov) nous avons pu exprimer la probabilité de création d'une paire de particules et la densité des particules créées en termes des coefficients de Bogoliubov.

## Chapitre 4

# Création des particules scalaires dans un univers dominé par radiation

## 4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous nous proposons de montrer avec un certain détail comment dériver la probabilité de création d'une paire et la densité des particules créées en considérant un espace-temps asymptotiquement Minkowskien où le facteur d'échelle est donnée par

$$a^2(\eta) = a^2(t(\eta)) = a + b \tanh(\lambda\eta) + c \tanh^2(\lambda\eta), \quad (4.1)$$

où  $a, b$  et  $c$  sont des paramètres positifs. Comme  $a^2(\eta)$  est constant à l'infini les champs de la matière se comportent comme des champs libres et, par conséquent, l'état du vide est bien déterminé à  $(\pm\infty)$ . De plus, comme nous allons le voir, le cas important d'un univers dominé par le rayonnement peut être un cas limite de l'équation (4.1).

Pour calculer la probabilité de création d'une paire de particules et la densité des particules créées nous devons en premier lieu résoudre l'équation de Klein Gordon et obtenir deux ensembles de solutions. Les deux solutions du premier ensemble s'interprètent comme les états d'énergie positive et d'énergie négative à  $-\infty$  (états "in"). Les solutions du deuxième ensemble sont les états d'énergie positive et d'énergie négative à  $+\infty$  (états "out").

## 4.2 Solution de l'équation de Klein Gordon

Pour le facteur d'échelle (4.1), l'équation de Klein-Gordon (3.31) s'écrit

$$\left[ \frac{d^2}{d\eta^2} + k^2 + m^2 a + m^2 b \tanh(\lambda\eta) + m^2 c \tanh^2(\lambda\eta) \right] \varphi(\eta) = 0, \quad (4.2)$$

Pour résoudre cette équation nous faisons le changement de variable  $\eta \rightarrow \xi$  avec

$$\xi = \frac{1 + \tanh(\lambda\eta)}{2}. \quad (4.3)$$

Nous obtenons l'équation différentielle du second ordre

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \left( \frac{1}{\xi} - \frac{1}{1-\xi} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} + \left( \frac{\omega_{in}^2}{4\lambda^2 \xi} - \frac{m^2 c}{\lambda^2} + \frac{\omega_{out}^2}{4\lambda^2 (1-\xi)} \right) \frac{1}{\xi(1-\xi)} \right] \tilde{\varphi}(\xi) = 0 \quad (4.4)$$

avec

$$\begin{aligned} \omega_{in} &= \lim_{\eta \rightarrow -\infty} \omega(\eta) = \sqrt{k^2 + m^2(a + c - b)} \\ \omega_{out} &= \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \omega(\eta) = \sqrt{k^2 + m^2(a + c + b)} \end{aligned} \quad (4.5)$$

L'équation (4.4) est une équation différentielle de type Riemann [49]

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \left( \frac{1 - \alpha_1 - \alpha'_1}{\xi} - \frac{1 - \alpha_3 - \alpha'_3}{1 - \xi} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} + \left( \frac{\alpha_1 \alpha'_1}{\xi} - \alpha_2 \alpha'_2 + \frac{\alpha_3 \alpha'_3}{1 - \xi} \right) \frac{1}{\xi(1 - \xi)} \right] \tilde{\varphi}(\xi) = 0, \quad (4.6)$$

où

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\alpha'_1 = i \frac{\omega_{in}}{2\lambda}, \\ \alpha_3 &= -\alpha'_3 = i \frac{\omega_{out}}{2\lambda}, \\ \alpha_2 &= 1 - \alpha'_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{m^2 c}{\lambda^2} - \frac{1}{4}}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

avec la condition  $\alpha_1 + \alpha'_1 + \alpha_2 + \alpha'_2 + \alpha_3 + \alpha'_3 = 1$ .

Suivant [49] un ensemble de solutions linéairement indépendantes à cette équation peut être écrit en termes des fonctions hypergéométriques

$$\tilde{\varphi}_1(\xi) = \xi^{-i \frac{\omega_{in}}{2\lambda}} (1 - \xi)^{i \frac{\omega_{out}}{2\lambda}} F \left( \frac{1}{2} + i \frac{\omega_-}{\lambda} + i\delta, \frac{1}{2} + i \frac{\omega_-}{\lambda} - i\delta; 1 - i \frac{\omega_{in}}{\lambda}; \xi \right) \quad (4.8)$$

$$\tilde{\varphi}_2(\xi) = \xi^{i \frac{\omega_{in}}{2\lambda}} (1 - \xi)^{-i \frac{\omega_{out}}{2\lambda}} F \left( \frac{1}{2} - i \frac{\omega_-}{\lambda} + i\delta, \frac{1}{2} - i \frac{\omega_-}{\lambda} - i\delta; 1 + i \frac{\omega_{in}}{\lambda}; \xi \right) \quad (4.9)$$

avec

$$\omega_{\pm} = \frac{\omega_{out} \pm \omega_{in}}{2}, \quad (4.10)$$

et

$$\delta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4m^2 c}{\lambda^2} - 1}. \quad (4.11)$$

Nous pouvons voir que l'équation (4.4) est invariante sous le changement  $\omega_{in} \rightarrow \omega_{out}$  et  $\xi \rightarrow 1 - \xi$ , ce qui nous permet d'écrire un autre ensemble des solutions [49]

$$\tilde{\varphi}_3(\xi) = \xi^{i \frac{\omega_{in}}{2\lambda}} (1 - \xi)^{-i \frac{\omega_{out}}{2\lambda}} F \left( \frac{1}{2} - i \frac{\omega_-}{\lambda} + i\delta, \frac{1}{2} - i \frac{\omega_-}{\lambda} - i\delta; 1 - i \frac{\omega_{out}}{\lambda}; 1 - \xi \right) \quad (4.12)$$

$$\tilde{\varphi}_4(\xi) = \xi^{-i \frac{\omega_{in}}{2\lambda}} (1 - \xi)^{i \frac{\omega_{out}}{2\lambda}} F \left( \frac{1}{2} + i \frac{\omega_-}{\lambda} + i\delta, \frac{1}{2} + i \frac{\omega_-}{\lambda} - i\delta; 1 + i \frac{\omega_{out}}{\lambda}; 1 - \xi \right). \quad (4.13)$$

Comme la métrique est Minkowskienne dans les limites  $\eta \rightarrow \pm\infty$ , les solutions "in" et "out" doivent se comporter comme des exponentielles

$$\varphi(\eta)_{in}^{\epsilon} = \lim_{\eta \rightarrow -\infty} \varphi(\eta) = \exp(-i\epsilon\omega_{in}\eta) \quad (4.14)$$

$$\varphi(\eta)_{out}^{\epsilon} = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \varphi(\eta) = \exp(-i\epsilon\omega_{out}\eta), \quad (4.15)$$

où  $\epsilon = \pm$  indique les modes d'énergie positive ou négative,  $\varphi(\eta)_{in}^\epsilon$  et  $\varphi(\eta)_{out}^\epsilon$  sont les solutions d'énergie positive et négative dans les régions "in" et "out" respectivement.

L'étude du comportement asymptotique des solutions  $\tilde{\varphi}_1(\xi)$ ,  $\tilde{\varphi}_2(\xi)$ ,  $\tilde{\varphi}_3(\xi)$  et  $\tilde{\varphi}_3(\xi)$  nous permet de les classer en états "in" et "out". Nous avons

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(\xi)_{in}^+ &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_{in}}} \xi^{-i\frac{\omega_{in}}{2\lambda}} (1-\xi)^{i\frac{\omega_{out}}{2\lambda}} \\ &\quad F\left(\frac{1}{2} + i\frac{\omega_-}{\lambda} + i\delta, \frac{1}{2} + i\frac{\omega_-}{\lambda} - i\delta; 1 - i\frac{\omega_{in}}{\lambda}; \xi\right), \\ \tilde{\varphi}(\xi)_{in}^- &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_{in}}} \xi^{i\frac{\omega_{in}}{2\lambda}} (1-\xi)^{-i\frac{\omega_{out}}{2\lambda}} \\ &\quad F\left(\frac{1}{2} - i\frac{\omega_-}{\lambda} + i\delta, \frac{1}{2} - i\frac{\omega_-}{\lambda} - i\delta; 1 + i\frac{\omega_{in}}{\lambda}; \xi\right),\end{aligned}\tag{4.16}$$

et

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(\xi)_{out}^+ &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_{out}}} \xi^{-i\frac{\omega_{in}}{2\lambda}} (1-\xi)^{i\frac{\omega_{out}}{2\lambda}} \\ &\quad F\left(\frac{1}{2} + i\frac{\omega_-}{\lambda} + i\delta, \frac{1}{2} + i\frac{\omega_-}{\lambda} - i\delta; 1 + i\frac{\omega_{out}}{\lambda}; 1-\xi\right), \\ \tilde{\varphi}(\xi)_{out}^- &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_{out}}} \xi^{i\frac{\omega_{in}}{2\lambda}} (1-\xi)^{-i\frac{\omega_{out}}{2\lambda}} \\ &\quad F\left(\frac{1}{2} - i\frac{\omega_-}{\lambda} + i\delta, \frac{1}{2} - i\frac{\omega_-}{\lambda} - i\delta; 1 - i\frac{\omega_{out}}{\lambda}; 1-\xi\right),\end{aligned}\tag{4.17}$$

Notons que les facteurs  $\frac{1}{\sqrt{2\omega_{out}}}$  et  $\frac{1}{\sqrt{2\omega_{in}}}$  sont des constantes de normalisation qui se déterminent à partir de la condition (3.5).

### 4.3 Création des paires

A l'aide des relations [49] :

$$\begin{aligned}F(\mu, \nu; \omega; \xi) &= \frac{\Gamma(\omega) \Gamma(\omega - \mu - \nu)}{\Gamma(\omega - \mu) \Gamma(\omega - \nu)} F(\mu, \nu; \mu + \nu - \omega + 1; 1 - \xi) \\ &\quad + (1 - \xi)^{\omega - \mu - \nu} \frac{\Gamma(\omega) \Gamma(\mu + \nu - \omega)}{\Gamma(\mu) \Gamma(\nu)} F(\omega - \mu, \omega - \nu; \omega - \mu - \nu + 1; 1 - \xi)\end{aligned}\tag{4.18}$$

et

$$F(\mu, \nu; \omega; \xi) = (1 - \xi)^{\omega - \mu - \nu} F(\omega - \mu, \omega - \nu; \omega; \xi).\tag{4.19}$$

nous pouvons établir la transformation de Bogoliubov reliant les états "in" et "out".



Les coefficients de Bogoliubov  $\alpha$  et  $\beta$  sont donnés par

$$\begin{aligned}\alpha &= \sqrt{\frac{\omega_{out}}{\omega_{in}}} \frac{\Gamma(1 - i\frac{\omega_{in}}{\lambda}) \Gamma(-i\frac{\omega_{out}}{\lambda})}{\Gamma(\frac{1}{2} - i\frac{\omega_{+}}{\lambda} - i\delta) \Gamma(\frac{1}{2} - i\frac{\omega_{+}}{\lambda} + i\delta)} \\ \beta &= \sqrt{\frac{\omega_{out}}{\omega_{in}}} \frac{\Gamma(1 - i\frac{\omega_{in}}{\lambda}) \Gamma(i\frac{\omega_{out}}{\lambda})}{\Gamma(\frac{1}{2} + i\frac{\omega_{-}}{\lambda} - i\delta) \Gamma(\frac{1}{2} + i\frac{\omega_{-}}{\lambda} + i\delta)}\end{aligned}\quad (4.20)$$

La probabilité de création d'une paire particule-antiparticule à partir du vide est donc

$$P_k = \left| \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - i\frac{\omega_{+}}{\lambda} - i\delta) \Gamma(\frac{1}{2} - i\frac{\omega_{+}}{\lambda} + i\delta)}{\Gamma(\frac{1}{2} + i\frac{\omega_{-}}{\lambda} - i\delta) \Gamma(\frac{1}{2} + i\frac{\omega_{-}}{\lambda} + i\delta)} \right|^2. \quad (4.21)$$

Compte tenu des propriétés des fonctions gamma

$$\left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + ix\right) \right|^2 = \frac{\pi}{\cosh \pi x}, \quad (4.22)$$

$$|\Gamma(ix)|^2 = \frac{\pi}{x \sinh \pi x} \quad (4.23)$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (4.24)$$

nous obtenons la probabilité de créer une paire de particules scalaires

$$P_k = \frac{\cosh(2\pi\frac{\omega_{-}}{\lambda}) + \cosh(2\pi\delta)}{\cosh(2\pi\frac{\omega_{+}}{\lambda}) + \cosh(2\pi\delta)}. \quad (4.25)$$

Remarquons que pour  $m = 0$ , la probabilité  $P_k = 0$ , ce qui montre qu'il est impossible de créer une paire de particules scalaires sans masse à partir du vide.

Pour la densité des particules créées, nous avons

$$n(k) = |\beta|^2 = \frac{1}{\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|^2 - 1} = \frac{\cosh(2\pi\frac{\omega_{-}}{\lambda}) + \cosh(2\pi\delta)}{\cosh(2\pi\frac{\omega_{+}}{\lambda}) - \cosh(2\pi\frac{\omega_{-}}{\lambda})}. \quad (4.26)$$

Ici, nous pouvons voir que pour des hautes fréquences, la densité  $n(k)$  se réduit à la distribution thermique de Bose-Einstein

$$n(k) = \frac{1}{\exp\left(\frac{2\pi}{\lambda}\omega_{in}\right) - 1}. \quad (4.27)$$

La probabilité de ne pas avoir des paires dans l'état  $k$  est

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_k &= \frac{1}{|\alpha|^2} \\ &= \frac{\cosh(2\pi\frac{\omega_{+}}{\lambda}) - \cosh(2\pi\frac{\omega_{-}}{\lambda})}{\cosh(2\pi\frac{\omega_{+}}{\lambda}) + \cosh(2\pi\delta)}.\end{aligned}\quad (4.28)$$

## 4.4 Univers dominé par radiation

Considérons maintenant le cas où  $a = b = 0$  et

$$c = \frac{a_0^4}{4\lambda^2}, \quad (4.29)$$

et prenons la limite  $\lambda \rightarrow 0$ . Comme  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tanh x}{x} = 1$ , le facteur d'échelle (4.1) se réduit dans ce cas à

$$a^2(\eta) = \frac{a_0^4}{4}\eta^2. \quad (4.30)$$

En fonction du temps cosmique  $t$  nous pouvons voir que  $a(t) = a_0\sqrt{t}$ . Ce facteur décrit notre univers dans sa phase dominée par le rayonnement. Ce rayonnement est constitué de rayonnement électromagnétique, des photons, neutrinos et des ondes gravitationnelles. Dans cette phase, la densité d'énergie  $\rho$  décroît plus vite et l'expansion décélère plus rapidement que dans le cas d'un univers dominé par la matière. La création des particules peut alors induire une accélération de l'expansion de l'univers.

Pour  $a = b = 0$ ,  $c = \frac{a_0^4}{4\lambda^2}$ , nous avons

$$P_k = \frac{1 + \cosh \pi \left( \sqrt{\frac{a_0^4 m^2}{\lambda^4} - 1} \right)}{\cosh \frac{2\pi}{\lambda} \left( \sqrt{k^2 + \frac{m^2 a_0^4}{4\lambda^2}} \right) + \cosh \pi \left( \sqrt{\frac{a_0^4 m^2}{\lambda^4} - 1} \right)} \quad (4.31)$$

Quand  $\lambda \rightarrow 0$ , la probabilité  $P_k$  devient

$$P_k = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\exp \left( \pi \sqrt{\frac{a_0^4 m^2}{\lambda^4} - 1} - \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{k^2 + \frac{m^2 a_0^4}{4\lambda^2}} \right)}{1 + \exp \left( \pi \sqrt{\frac{a_0^4 m^2}{\lambda^4} - 1} - \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{k^2 + \frac{m^2 a_0^4}{4\lambda^2}} \right)}. \quad (4.32)$$

En utilisant les developpement

$$(1 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} \simeq 1 + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{8}\varepsilon^2 \quad (4.33)$$

$$(1 - \varepsilon)^{\frac{1}{2}} \simeq 1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{8}\varepsilon^2 \quad (4.34)$$

nous obtenons

$$\sqrt{\frac{a_0^4 m^2}{\lambda^4} - 1} - \frac{2}{\lambda} \sqrt{k^2 + \frac{m^2 a_0^4}{4\lambda^2}} = \frac{a_0^2 m}{\lambda^2} \sqrt{1 - \frac{\lambda^4}{a_0^4 m^2}} - \frac{m a_0^2}{\lambda^2} \sqrt{1 + k^2 \frac{4\lambda^2}{m^2 a_0^4}} \approx -2 \frac{k^2}{m a_0^2}. \quad (4.35)$$

et, par conséquent,

$$P_k = \frac{\exp\left(-\pi \frac{2k^2}{ma_0^2}\right)}{1 + \exp\left(-\pi \frac{2k^2}{ma_0^2}\right)}. \quad (4.36)$$

Pour la densité des particules créées nous obtenons

$$n(k) = \exp\left(-\pi \frac{2k^2}{ma_0^2}\right). \quad (4.37)$$

Ces résultats coïncident exactement avec celles obtenus dans [12].

Nous pouvons aussi écrire la probabilité  $\mathcal{C}_k$  sous la forme

$$\mathcal{C}_k = \frac{1}{1 + \sigma} \quad (4.38)$$

où

$$\sigma = \exp\left(-\pi \frac{2k^2}{ma_0^2}\right). \quad (4.39)$$

Dans ce cas la probabilité de transition vide-vide s'écrit

$$\mathcal{P}_{vac-vac} = \prod_k \mathcal{C}_k = \exp\left[-\sum_k \ln(1 + \sigma)\right]$$

Par conséquent, la partie imaginaire de l'action effective  $S_{eff}$  est

$$2 \operatorname{Im} S_{eff} = \sum_k \ln(1 + \sigma), \quad (4.40)$$

En faisant le développement de la quantité  $\ln(1 + \sigma)$  et passant de la forme discrete ( $\sum_k$ ) à la forme continue  $\left(\int \frac{V d^3k}{(2\pi)^3}\right)$  nous obtenons

$$2 \operatorname{Im} S_{eff} = \int \frac{V d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \exp\left(-2\pi n \frac{k^2}{ma_0^2}\right). \quad (4.41)$$

Effectuant l'intégrale sur  $k$  nous obtenons la série st dans ce cas nécessaire d'utiliser l'intégration gaussienne pour avoir

$$\frac{2 \operatorname{Im} S_{eff}}{V} = \left(\frac{ma_0^2}{8\pi^2}\right)^{\frac{3}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\frac{5}{2}}}. \quad (4.42)$$

Ce résultat peut être écrit en terme de la fonction zeta de riemann

$$\zeta(z) = \frac{1}{1 - 2^{1-z}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^z}. \quad (4.43)$$

nous avons

$$\frac{2 \operatorname{Im} S_{eff}}{V} = \left( \frac{ma_0^2}{8\pi^2} \right)^{\frac{3}{2}} \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) \zeta \left( \frac{5}{2} \right). \quad (4.44)$$

Nous pouvons écrire aussi  $\frac{2 \operatorname{Im} S_{eff}}{V}$  sous la forme

$$\frac{2 \operatorname{Im} S_{eff}}{V} = 0.867 \left( \frac{a_0}{a_{cr}} \right)^3, \quad (4.45)$$

avec la valeur critique

$$a_{cr}^2 = \frac{8\pi^2}{m}. \quad (4.46)$$

Il est claire que cet effet est plus important quand le facteur  $a_0$  approche la valeur critique  $a_{cr}$  et le taux de la production des des paires est de l'ordre de  $(a_0/a_{cr})^3$  [30].

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté un calcul détaillé de la probabilité de création d'une paire et la densité des particules créées en considérant un espace-temps asymptotiquement Minkowskien pour lequel l'équation de Klein Gordon est exactement soluble.

A partir de ce modèle nous avons étudié le cas important d'un univers dominé par le rayonnement où nous avons poussé les calculs jusqu'à l'action effective de Schwinger. Les expressions obtenues pour la probabilité et la densité des particules montrent que le processus de création des particules est, dans ce cas là, négligeable car le taux du production des paires est de l'ordre de  $(ma_0^2)^{\frac{3}{2}}$  qui est très faible pour la masse de l'électron par exemple.

## **Chapitre 5**

# **Création de particules de Dirac dans un univers en expansion**

## 5.1 Introduction

Dans le chapitre précédent nous avons considéré des particules scalaires dans un univers dominé par le rayonnement où nous avons vu que le processus de création des particules est négligeable. Dans ce chapitre nous nous proposons d'étudier des particules de spin  $\frac{1}{2}$  qui obéissent à la statistique de Fermi-Dirac au lieu de la statistique de Bose-Einstein. Nous considérons aussi l'univers de de-Sitter qui subit une expansion plus rapide que l'univers dominé par le rayonnement.

Pour l'univers de de-Sitter, la métrique n'est pas Minkowskienne à  $\eta \rightarrow 0$  et à  $\eta \rightarrow -\infty$  et la définition des états "in" et "out" n'est pas triviale. Ces états, cependant, peuvent être définis à l'aide de la solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi, en admettant que les états d'énergie négative et positive se comportent à  $\eta \rightarrow 0$  et à  $\eta \rightarrow -\infty$  comme les solutions semi-classiques.

Ainsi, nous commençons d'abord par résoudre l'équation de Dirac correspondante et obtenir des ensembles différents des solutions. Puis, nous comparons ces solutions avec les solutions semi-classique  $\varphi(\eta) \sim e^{\pm iS}$ . Cela nous permet de classer nos solutions en états "in" et "out".

Ensuite nous utilisons la transformation de Bogoliubov pour calculer la probabilité de création d'une paire de particules et la densité des particules créées.

## 5.2 Equation de Dirac dans un espace-temps courbe

Dans un espace-temps courbe l'équation de Dirac généralisée s'écrit sous la forme covariante suivante

$$[i\tilde{\gamma}^\mu (\partial_\mu - \Gamma_\mu) - m] \Psi(\eta, \vec{x}) = 0. \quad (5.1)$$

où  $\tilde{\gamma}^\mu$  sont les matrices de Dirac dépendantes de la courbure de l'espace. Ces matrices qui vérifient la relation d'anti-commutation  $\{\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$  sont reliées aux matrices habituelles de Dirac  $\gamma^a$  par la relation

$$\tilde{\gamma}^\mu = e_a^\mu \gamma^a, \quad (5.2)$$

où  $e_a^\mu$  sont les tétrades permettant de passer d'un système de coordonnées Minkowskien (noté par les indices latins a,b,...) à un système de coordonnées quelconque, (noté par les indices grecs  $\mu, \nu, \dots$ ). Nous avons alors

$$g^{\mu\nu} = e_a^\mu e_b^\nu \varepsilon^{ab}. \quad (5.3)$$

avec  $\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\varepsilon^{ab}$  où  $\varepsilon^{ab}$  est la métrique de Minkowski.

Pour une métrique du genre (3.24), les matrices de Dirac dépendantes de la courbure de l'espace-temps s'écrivent

$$\tilde{\gamma}^0 = \frac{1}{a(\eta)}\gamma^0 \quad , \quad \tilde{\gamma}^i = \frac{1}{a(\eta)}\gamma^i \quad (5.4)$$

où  $i = 1$  pour un espace de dimension (1+1) et  $i = \overline{1,3}$  pour un espace de dimension (3+1).

Les connexions de spin  $\Gamma_\mu$  sont définies à l'aide des symboles de Christoffel  $\Gamma_{\nu\alpha}^\lambda$  (2.6)

$$\Gamma_\alpha = -\frac{1}{8}g_{\mu\lambda}\Gamma_{\nu\alpha}^\lambda [\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu], \quad (5.5)$$

Dans le présent modèle, les seuls symboles de Christoffel non-nuls sont

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{\dot{a}(\eta)}{a(\eta)}, \quad (5.6)$$

$$\Gamma_{ij}^0 = \Gamma_{0j}^i = \frac{\dot{a}(\eta)}{a(\eta)}\delta_{ij} \quad (5.7)$$

Par un calcul simple nous obtenons

$$\Gamma_0 = 0 \quad (5.8)$$

$$\Gamma_i = \frac{1}{2}\frac{\dot{a}(\eta)}{a(\eta)}\gamma_0\gamma_i = -\frac{1}{2}\frac{\dot{a}(\eta)}{a(\eta)}\gamma^0\gamma^i. \quad (5.9)$$

Pour un espace de dimension  $(d+1)$  l'équation de Dirac se réduit alors à

$$\left[ i\frac{1}{a(\eta)}\gamma^\mu\partial_\mu + i\frac{d}{2}\frac{\dot{a}(\eta)}{a^2(\eta)}\gamma^0 - m \right] \Psi(\eta, \vec{x}) = 0. \quad (5.10)$$

Pour éliminer le terme supplémentaire  $i\frac{d}{2}\frac{\dot{a}(\eta)}{a^2(\eta)}\gamma^0$  nous posons

$$\Psi(\eta, x) = a(\eta)^{-\frac{d}{2}}\phi(\eta, \vec{x}). \quad (5.11)$$

L'équation résultante qui a une forme simple se ressemble à l'équation de Dirac habituelle (dans un espace plat) mais avec une masse dependante du temps

$$[i\gamma^\mu\partial_\mu - ma(\eta)]\phi(\eta, \vec{x}) = 0. \quad (5.12)$$

## 5.3 Solutions exactes pour l'univers de de-Sitter

Considérons maintenant l'espace de de-Sitter (dS). Ce choix est tout à fait naturel car l'espace dS joue un rôle très important en cosmologie, il peut décrire la phase d'inflation et

les premières ères de l'univers ainsi que l'expansion actuelle. L'importance de ce modèle vient aussi du fait que l'espace de dS est un espace à symétrie maximale qui possède les mêmes degrés de symétrie que l'espace de Minkowski. Il permet alors d'exhiber un nombre suffisant des constantes du mouvement en relativité générale.

La métrique qui décrit l'espace de dS à deux dimensions est

$$ds^2 = dt^2 - e^{2Ht} dx^2, \quad (5.13)$$

où  $H$  est la constante de Hubble.

En introduisant le temps conforme  $\eta = \int dt/a(t) = -\frac{1}{H}e^{-Ht}$ , nous obtenons

$$ds^2 = \frac{1}{H^2\eta^2} [d\eta^2 - dx^2], \quad (5.14)$$

avec le facteur d'échelle  $a(\eta) \equiv a[t(\eta)] = \frac{-1}{H\eta}$ .

Pour résoudre l'équation (5.12) nous posons

$$\phi(\eta, \vec{x}) = e^{ikx} \varphi(\eta). \quad (5.15)$$

Nous obtenons alors l'équation

$$\left[ i\gamma^0 \partial_0 - k\gamma^1 + \frac{m}{H\eta} \right] \varphi(\eta) = 0 \quad (5.16)$$

Les matrices  $\gamma^a$  peuvent s'écrire dans un espace-temps (1+1) de Minkowski en fonctions des matrices  $(2 \times 2)$  de Pauli

$$\gamma^0 = \sigma_z \quad , \quad \gamma^1 = i\sigma_y. \quad (5.17)$$

avec

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} ; \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

Si nous écrivons le champ de la matière sous forme  $\varphi(\eta) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\eta) \\ \varphi_2(\eta) \end{pmatrix}$ , nous obtenons alors un système de deux équations différentielles de premier ordre couplées

$$\begin{cases} \left( i\partial_0 + \frac{m}{H\eta} \right) \varphi_1(\eta) = k\varphi_2(\eta) \\ \left( i\partial_0 - \frac{m}{H\eta} \right) \varphi_2(\eta) = k\varphi_1(\eta) \end{cases}. \quad (5.19)$$

Par itération nous obtenons deux équations différentielles du second ordre decouplées

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \left( \left( \frac{m}{H} \right)^2 \pm i \frac{m}{H} \right) \frac{1}{\eta^2} + k^2 \right] \varphi_{1,2}(\eta) = 0, \quad (5.20)$$



Comme ces deux équations sont de la forme

$$\ddot{\varphi}_s(\eta) + \omega_s^2(\eta) \varphi_s(\eta), \quad (5.21)$$

avec

$$\omega_s^2(\eta) = \left( \left( \frac{m}{H} \right)^2 \pm i \frac{m}{H} \right) \frac{1}{\eta^2} + k^2 \quad (5.22)$$

nous pouvons voir que la condition adiabatique implique que

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \left| \frac{\dot{\omega}_s(\eta)}{\omega_s^2(\eta)} \right| \approx \frac{H}{m} \ll 1. \quad (5.23)$$

Par conséquent, la création des particules est possible seulement quand  $H \ll m$ . De plus, pour  $m \rightarrow 0$  le terme de mixage des fonctions  $\varphi_1(\eta)$  et  $\varphi_2(\eta)$  dans le système(5.19) s'annule, ce qui implique qu'il est impossible d'avoir une interférence entre les solutions d'énergie positive et négative. Cela signifie qu'il n'y a pas de production des fermions sans masse.

Maintenant, , nous faisons le changement de variable

$$\rho = 2ik\eta \quad (5.24)$$

dans l'équation (5.20) pour obtenir l'équation

$$\left( \frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{1}{4} + \left( \frac{m^2}{H^2} \pm i \frac{m}{H} \right) \frac{1}{\rho^2} \right) \tilde{\varphi}_s(\rho) = 0 \quad (5.25)$$

qui se ressemble à celle de Whittaker [49]

$$\left[ \frac{d^2}{d\rho^2} + \left( -\frac{1}{4} + \frac{\lambda}{\rho} + \frac{\frac{1}{4} - \mu_{1,2}^2}{\rho^2} \right) \right] \tilde{\varphi}_s(\rho) = 0 \quad (5.26)$$

avec

$$\mu_1 = \mu = \frac{1}{2} - i \frac{m}{H} \quad (5.27)$$

$$\mu_2 = \mu^* = \frac{1}{2} + i \frac{m}{H} \quad (5.28)$$

$$\lambda = 0. \quad (5.29)$$

Il est bien connu que l'équation de Whittaker admet comme solutions linéairement indépendantes les fonctions de Whittaker suivantes [49] :

$$M_{\lambda,\mu}(\rho) = \rho^{\mu+1/2} e^{-\frac{\rho}{2}} M \left( \mu - \lambda + \frac{1}{2}, 2\mu + 1; \rho \right) \quad (5.30)$$

$$W_{\lambda,\mu}(\rho) = \rho^{\mu+1/2} e^{-\frac{\rho}{2}} U \left( \mu - \lambda + \frac{1}{2}, 2\mu + 1; \rho \right) \quad (5.31)$$

où  $M(a, b, \rho)$  et  $U(a, b, \rho)$  sont les fonctions de Kummar.

## 5.4 Equation de Hamilton-Jacobi et choix des états "in" et "out"

En relativité générale, la notion d'états d'énergie positive et négative est associée à l'existence des vecteurs de Killing du genre temps. Cependant, pour un univers en expansion, le vecteur de Killing est inexistant parce qu'il perd sa propriété fondamentale. Dans ce cas la méthode raisonnable pour définir les modes d'énergie positive et négative est la méthode adiabatique basée sur les solutions d'équation relativiste de Hamilton-Jacobi.

Dans un espace courbe, l'équation de Hamilton-Jacobi s'écrit

$$g^{\alpha\beta} \partial_\alpha S \partial_\beta S - m^2 = 0, \quad (5.32)$$

où  $S$  est l'action du système. Si nous écrivons  $S$  sous la forme

$$S = G(\eta) + kx, \quad (5.33)$$

nous obtenons

$$\partial_\eta G = \sqrt{k^2 + \frac{m^2}{H^2 \eta^2}}. \quad (5.34)$$

En utilisant l'intégrale connue

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}}{x} dx &= \sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2} - \sqrt{\alpha} \operatorname{arcsinh} \left( \frac{2\alpha + \beta x}{x \sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}} \right) \\ &+ \frac{\beta}{2} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \operatorname{arcsinh} \left( \frac{2\gamma x + \beta}{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}} \right), \end{aligned} \quad (5.35)$$

où  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont des nombres réels,  $\gamma > 0$  et  $4\alpha\gamma - \beta^2 > 0$ , nous obtenons

$$G(\eta) = \pm \left[ \sqrt{k^2 \eta^2 + \frac{m^2}{H^2}} + \ln \left( \frac{m}{Hk\eta} \right)^{-\frac{m}{H}} \right]. \quad (5.36)$$

Les solutions  $\varphi_{in}^\pm(\eta)$  et  $\varphi_{out}^\pm(\eta)$  doivent se comporter donc comme suit

$$\varphi_{in}^\pm(\eta) \equiv \lim_{\eta \rightarrow -\infty} e^{\pm iG(\eta)} \sim e^{\pm k\eta} \quad (5.37)$$

$$\varphi_{out}^\pm(\eta) \equiv \lim_{\eta \rightarrow 0} e^{\pm iG(\eta)} \sim (k\eta)^{\pm \frac{m}{H}}. \quad (5.38)$$

Compte tenu du comportement asymptotique des fonctions de Whittaker, quand  $|\rho| \rightarrow +\infty$ ,

$$W_{\lambda,\mu}(\rho) \sim e^{-\frac{\rho}{2}} (-\rho)^\lambda \quad (5.39)$$

$$W_{-\lambda,\mu}(-\rho) \sim e^{\frac{\rho}{2}} (\rho)^{-\lambda} \quad (5.40)$$

nous déduisons que les modes "in" sont donnée par

$$\tilde{\varphi}_{1,in}^+(\rho) = N_{in} W_{0,\mu}(-\rho) \quad (5.41)$$

$$\tilde{\varphi}_{1,in}^-(\rho) = N_{in}^* W_{0,\mu}(\rho). \quad (5.42)$$

En utilisant la relation

$$\left[ (2\mu - 1) \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{(2\mu - 1)^2}{2\rho} - \lambda \right] W_{\lambda,\mu}(\rho) = - \left( \mu + \lambda - \frac{1}{2} \right) W_{\lambda,\mu-1}(\rho) \quad (5.43)$$

nous obtenons pour chaque état "in" la seconde composante du spineur de Dirac

$$\tilde{\varphi}_{2,in}^+(\rho) = -N_{in} W_{0,1-\mu}(-\rho) \quad (5.44)$$

$$\tilde{\varphi}_{2,in}^-(\rho) = N_{in}^* W_{0,1-\mu}(\rho). \quad (5.45)$$

où  $N_{in}$  est une constante de normalisation.

Pour les états "out", nous considérons le comportement asymptotique de  $M_{\lambda,-\mu}(\xi)$  à  $\rho \rightarrow 0$

$$M_{\lambda,-\mu}(\rho) \sim e^{-\frac{\rho}{2}} \rho^{-\mu+\frac{1}{2}}. \quad (5.46)$$

L'état "out" d'énergie positive est alors donné par

$$\tilde{\varphi}_{1,out}^+(\rho) = N_{out} M_{0,-\mu}(\rho). \quad (5.47)$$

où  $N_{out}$  est une constante de normalisation.

Grâce à la relation fonctionnelle

$$\left[ (2\mu + 1) \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{(2\mu + 1)^2}{2\rho} + \lambda \right] M_{\lambda,\mu}(\rho) = \frac{(\mu + \frac{1}{2})^2 - \lambda^2}{2(\mu + 1)(2\mu + 1)} M_{\lambda,\mu+1}(\rho) \quad (5.48)$$

nous déterminons la deuxième composante de spineur "out"

$$\varphi_{2,out}^+ = \frac{-N_{out}}{4 \left( \frac{1}{2} + i \frac{m}{H} \right)} M_{0,-\mu+1}(\rho). \quad (5.49)$$

avec  $N_{in}$  et  $N_{out}$  sont des constantes de normalisation. Classifions donc les spineurs de Dirac dans un univers de de-Sitter bidimensionnel comme

$$\tilde{\varphi}_{in}^+(\eta) = N_{in} \begin{pmatrix} W_{0,\mu}(-\rho) \\ -W_{0,1-\mu}(-\rho) \end{pmatrix}, \quad (5.50)$$

$$\tilde{\varphi}_{in}^-(\eta) = N_{in}^* \begin{pmatrix} W_{0,\mu}(\rho) \\ W_{0,1-\mu}(\rho) \end{pmatrix}$$

$$\varphi_{out}^+(\eta) = N_{out} \begin{pmatrix} M_{0,-\mu}(\rho) \\ \frac{-1}{4 \left( \frac{1}{2} + i \frac{m}{H} \right)} M_{0,1-\mu}(\rho) \end{pmatrix} \quad (5.51)$$

## 5.5 Création de particules

Compte tenu des solutions obtenues, l'opérateur de champ de Dirac peut s'écrire sous l'une des deux formes suivantes

$$\hat{\phi}(\eta, x) = \sum_k \left[ a_{k,in} \varphi_{in}^+(\eta) e^{ikx} + b_{k,in}^+ \varphi_{in}^-(\eta) e^{-ikx} \right] \quad (5.52)$$

et

$$\hat{\phi}(\eta, x) = \sum_k \left[ a_{k,out} \varphi_{out}^+(\eta) e^{ikx} + b_{k,out}^+ \varphi_{out}^-(\eta) e^{-ikx} \right] \quad (5.53)$$

avec les relation d'anti-commutation habituelles

$$\{\hat{a}_{k,in}, \hat{a}_{k',in}^+\} = \{\hat{b}_{k,in}, \hat{b}_{k',in}^+\} = \delta_{k,k'}. \quad (5.54)$$

et

$$\{\hat{a}_{k,out}, \hat{a}_{k',out}^+\} = \{\hat{b}_{k,out}, \hat{b}_{k',out}^+\} = \delta_{k,k'}. \quad (5.55)$$

Les opérateurs  $a_{k,in}$  et  $b_{k,in}^+$  ne peuvent avoir une interprétation physique que pour  $\eta \rightarrow -\infty$  où les fonctions  $\varphi_{in}^+(\eta)$  et  $\varphi_{in}^-(\eta)$  sont associées aux états d'énergie positive et d'énergie négative respectivement. Idem pour les opérateurs  $a_{k,out}$  et  $b_{k,out}^+$ .

Pour calculer la probabilité de création d'une paire et la densité des fermions créés nous utilisons la relation fonctionnelle

$$\begin{aligned} M_{\lambda,\mu}(\rho) &= \frac{\Gamma(2\mu+1) e^{-i\pi\lambda}}{\Gamma(\mu-\lambda+\frac{1}{2})} W_{-\lambda,\mu}(-\rho) \\ &+ \frac{\Gamma(2\mu+1) e^{i\pi(\mu-\lambda+\frac{1}{2})}}{\Gamma(\mu+\lambda+\frac{1}{2})} W_{\lambda,\mu}(\rho) \end{aligned} \quad (5.56)$$

avec  $-\frac{\pi}{2} < \arg \rho < \frac{3\pi}{2}$  et  $2\mu \neq -1, -2, \dots$

Nous pouvons établir ainsi la transformation de Bogoliubov reliant les états "in" avec les états "out"

$$\varphi_{k,out}^+(t) = \alpha_k \varphi_{k,in}^+(t) + \beta_k \varphi_{k,in}^-(t), \quad (5.57)$$

où les coefficients de Bogoliubov  $\alpha_k$  et  $\beta_k$  sont donné par

$$\frac{\beta_k}{\alpha_k} = \frac{N_{in} \Gamma(-\mu-\lambda+\frac{1}{2})}{N_{in}^* \Gamma(-\mu+\lambda+\frac{1}{2})} \exp i\pi \left( -\mu + \frac{1}{2} \right) \quad (5.58)$$

et la condition (pour les fermions)

$$|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2 = 1. \quad (5.59)$$

La probabilité de création d'une paire de particules dans l'état  $k$ , est donnée par

$$P_k = \left| \frac{\beta_k^*}{\alpha_k^*} \right|^2 = \exp\left(-2\pi \frac{m}{H}\right) \quad (5.60)$$

La densité des fermions créés peut se calculer à partir de la manière suivante

$$n(k) = |\beta_k|^2 = \left( \left| \frac{\alpha_k^*}{\beta_k^*} \right|^2 + 1 \right)^{-1}. \quad (5.61)$$

Nous obtenons alors

$$n(k) = \frac{1}{1 + e^{2\pi \frac{m}{H}}}, \quad (5.62)$$

qui se ressemble à la distribution statistique de Fermi-Dirac. Cela explique la nature thermique de cet effet avec une température  $T = \frac{H}{2\pi}$ . Ces résultats sont encore en accord avec ceux de [29] et [62].

## 5.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons trouvé des solutions exactes pour l'équation covariante de Dirac dans un univers en expansion. L'application de la méthode algébrique de séparation de variables a permis d'obtenir une simple équation différentielle de second ordre. Compte tenu de la conjugaison de charge entre les états d'énergie positive et négative, nous avons pu trouver des expressions analytiques et exactes pour les coefficients de Bogoliubov. Puis, à partir de ces coefficients de Bogoliubov nous avons calculé la probabilité de création et la densité des particules créées. Nous avons pu déterminer les états "in" et "out" à l'aide des solutions semi-classiques de l'équation de Hamilton-Jacobi.

Nous avons remarqué que la densité des particules créées se ressemble à la distribution de Fermi-Dirac.

Le résultat essentiel est que le processus de création des particules ne peut y avoir lieu sauf si  $\frac{m}{H} \gg 1$  (la condition adiabatique). Cela montre encore une fois que le processus de création de particules est négligeable dans ces conditions.

## Chapitre 6

# Effet des champs électromagnétiques sur la création des particules

## 6.1 Introduction

Dans les deux cas traités nous avons vu que le mécanisme de création des particules par le champ gravitationnel ne peut pas avoir des conséquences importantes sur l'évolution de l'univers à cause de la densité des particules qui est très faible.

Dans ce chapitre nous nous proposons de voir à quel point les champs électromagnétiques peuvent assister le mécanisme afin de pouvoir jouer un rôle dans l'évolution de l'univers. Par simplicité nous considérons le modèle d'un espace-temps asymptotiquement Minkowskien.

## 6.2 Création de particules en électrodynamique

L'effet de la création des particules en électrodynamique a été étudié pour la première fois par Schwinger en utilisant la méthode du lagrangien effectif de Schwinger [1].

Pour un champ électrique constant  $L_{eff}$  a été exactement calculé [1, 63]. Le résultat est que la probabilité de création des paires des particules par un champ électrique constant d'intensité  $E$  est donnée par

$$\mathcal{P}_{Creat.} = \frac{e^2 E^2}{4\pi^3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \exp\left(-n\pi \frac{m^2}{eE}\right). \quad (6.1)$$

En présence d'un champ magnétique  $\vec{H}$  parallèle à  $\vec{E}$ , la probabilité (6.1) devient [64]

$$\mathcal{P}_{Creat.} = \frac{e^2 EH}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \coth\left(n\pi \frac{H}{E}\right) \exp\left(-n\pi \frac{m^2}{eE}\right). \quad (6.2)$$

A partir de (6.2) nous pouvons voir que  $\mathcal{P}_{Creat.} = 0$  quand  $E = 0$  même si  $H \neq 0$ , ce qui montre qu'un champ magnétique pure ne crée pas des particules.

Par ailleurs les résultats (6.1) et (6.2) sont réobtenus suivant plusieurs approches et pour d'autres cas comme par exemple le champ électrique variable [63, 65, 66], la création de particules de spin quelconque [67, 68] et la création des particules dans un espace à dimension quelconque [69]. Notons que la généralisation au cas de spin quelconque montre la manifestation des effets statistiques. Si nous considérons par exemple les particules de spin 0, où la probabilité  $\mathcal{P}_{Creat.}$  est donnée par [70]

$$\mathcal{P}_{Creat.} = \frac{e^2 E^2}{8\pi^3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \exp\left(-n\pi \frac{m^2}{eE}\right) \quad (6.3)$$

et

$$\mathcal{P}_{Creat.} = \frac{e^2 EH}{8\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{csc} \left( n\pi \frac{H}{E} \right) \exp \left( -n\pi \frac{m^2}{eE} \right), \quad (6.4)$$

nous pouvons voir qu'un facteur  $(-1)^{n+1}$  est survenu à cause de la statistique de Bose-Einstein et un facteur  $\frac{1}{2}$  due à la minimisation des degrés de liberté par rapport aux particules spinorielles.

Dans ce chapitre, nous nous proposons de dériver les équation (6.3) et (6.4) dans un espace courbe.

## 6.3 Effet du champ électrique sur la création de particules

### 6.3.1 Equation de Klein Gordon

Pour commencer, nous considérons un champ de matière scalaire de masse  $m$  et de charge  $e$  soumis à un champ gravitationnel décrit par le tenseur métrique  $g_{\mu\nu}$  et à un champ électromagnétique externe représenté par le quadri-potentiel  $A_\mu$ . La prescription de couplage minimal nous conduit à l'équation de Klein-Gordon suivante

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} (i\partial_\mu - eA_\mu) [g^{\mu\nu} \sqrt{-g} (i\partial_\nu - eA_\nu) \phi] - \left( m^2 + \frac{1}{6}R \right) \phi = 0. \quad (6.5)$$

Considérons la jauge  $A_\mu = (0, 0, 0, A_z(\eta))$  et faisons la decomposition

$$\phi(x) = a^{-1}(\eta) \chi(\vec{x}) \varphi(\eta). \quad (6.6)$$

avec  $\chi(\vec{x}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ .

L'équation (6.5) se réduit alors à l'équation

$$\left[ \frac{d^2}{d\eta^2} + \omega^2(\eta) \right] \varphi(\eta) = 0, \quad (6.7)$$

avec

$$\omega^2(\eta) = [k_z - eA_z(\eta)]^2 + k_\perp^2 + m^2 a^2(\eta), \quad (6.8)$$

où  $k_\perp^2 = k_x^2 + k_y^2$ .

Supposons que le champ électrique s'annule quand  $\eta \rightarrow \pm\infty$  et l'espace-temps est asymptotiquement Minkowskien. Dans ces conditions nous pouvons voir que  $\omega(\eta)$  satisfait la condition



super-adiabatique suivante

$$\lim_{\eta \rightarrow \pm\infty} \frac{\dot{\omega}}{\omega^2} = 0 \quad (6.9)$$

Alors, il y a deux états de vide et, par conséquent, la production des particules est bien définie.

### 6.3.2 Modèle soluble

Dans la littérature nous trouvons un grand nombre de papiers dans lesquels la création des particules dans l'espace-temps de FRW a été discutée. La probabilité de création de particules et la densité des particules créées ont été dérivées pour des plusieurs formes de facteur d'échelle décrivant les différentes phases de l'évolution de notre univers. Dans ce chapitre, nous considérons la métrique (4.1) et un champ électrique de Sauter [73]. Dans l'espace temps de FRW, le champ électrique de Sauter donné par

$$\vec{E} = \frac{1}{a^2(\eta)} \frac{E_0}{\cosh^2(\lambda\eta)} \vec{u}_z \quad (6.10)$$

peut être dérivé de la jauge

$$A_\mu = \frac{E_0}{\lambda} \tanh(\lambda\eta) \delta_{\mu 3}, \quad (6.11)$$

Dans ce modèle, l'équation de Klein-Gordon peut s'écrire sous la forme

$$\left[ \frac{d^2}{d\eta^2} + k^2 + m^2 (a + \bar{b} \tanh(\lambda\eta) + \bar{c} \tanh^2(\lambda\eta)) \right] \varphi(\eta) = 0, \quad (6.12)$$

avec

$$\bar{b} = b - 2k_z \frac{eE_0}{\lambda m^2}, \quad (6.13)$$

$$\bar{c} = c + \left( \frac{eE_0}{\lambda m} \right)^2. \quad (6.14)$$

Cette dernière équation se ressemble à l'équation (4.2) avec les changements  $b \rightarrow \bar{b}$  et  $c \rightarrow \bar{c}$ .

Les solutions sont donc

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\xi)_{out}^+ &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_{out}}} \xi^{-i\frac{\omega_{in}}{2\lambda}} (1-\xi)^{i\frac{\omega_{out}}{2\lambda}} \\ &F\left(\frac{1}{2} + i\frac{\omega_-}{\lambda} + i\delta, \frac{1}{2} + i\frac{\omega_-}{\lambda} - i\delta; 1 + i\frac{\omega_{out}}{\lambda}; 1-\xi\right), \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\xi)_{out}^- &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_{out}}} \xi^{i\frac{\omega_{in}}{2\lambda}} (1-\xi)^{-i\frac{\omega_{out}}{2\lambda}} \\ &F\left(\frac{1}{2} - i\frac{\omega_-}{\lambda} + i\delta, \frac{1}{2} - i\frac{\omega_-}{\lambda} - i\delta; 1 - i\frac{\omega_{out}}{\lambda}; 1-\xi\right). \end{aligned} \quad (6.16)$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\xi)_{in}^+ &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_{in}}} \xi^{-i\frac{\omega_{in}}{2\lambda}} (1-\xi)^{i\frac{\omega_{out}}{2\lambda}} \\ &F\left(\frac{1}{2} + i\frac{\omega_-}{\lambda} + i\delta, \frac{1}{2} + i\frac{\omega_-}{\lambda} - i\delta; 1 - i\frac{\omega_{in}}{\lambda}; \xi\right), \end{aligned} \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\xi)_{in}^- &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_{in}}} \xi^{i\frac{\omega_{in}}{2\lambda}} (1-\xi)^{-i\frac{\omega_{out}}{2\lambda}} \\ &F\left(\frac{1}{2} - i\frac{\omega_-}{\lambda} + i\delta, \frac{1}{2} - i\frac{\omega_-}{\lambda} - i\delta; 1 + i\frac{\omega_{in}}{\lambda}; \xi\right), \end{aligned} \quad (6.18)$$

où les constantes  $\omega_{in}$ ,  $\omega_{out}$  et  $\delta$  sont cette fois-ci données par

$$\begin{aligned} \omega_{in} &= \sqrt{k^2 + m^2 (a + \bar{c} - \bar{b})} \\ \omega_{out} &= \sqrt{k^2 + m^2 (a + \bar{c} + \bar{b})} \end{aligned} \quad (6.19)$$

et

$$\delta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4m^2\bar{c}}{\lambda^2} - 1}. \quad (6.20)$$

Nous obtenons alors les résultats suivants

$$P_k = \frac{\cosh\left(2\pi\frac{\omega_-}{\lambda}\right) + \cosh(2\pi\delta)}{\cosh\left(2\pi\frac{\omega_{\pm}}{\lambda}\right) + \cosh(2\pi\delta)}, \quad (6.21)$$

et

$$n(k) = \frac{\cosh\left(2\pi\frac{\omega_-}{\lambda}\right) + \cosh(2\pi\delta)}{\cosh\left(2\pi\frac{\omega_{\pm}}{\lambda}\right) - \cosh\left(2\pi\frac{\omega_-}{\lambda}\right)}. \quad (6.22)$$

Pour la probabilité pour qu'il n'y ait pas de création de paires dans l'état  $\vec{k}$ , nous avons

$$\mathcal{C}_k = \frac{\cosh\left(2\pi\frac{\omega_{\pm}}{\lambda}\right) - \cosh\left(2\pi\frac{\omega_-}{\lambda}\right)}{\cosh\left(2\pi\frac{\omega_{\pm}}{\lambda}\right) + \cosh(2\pi\delta)}. \quad (6.23)$$

### 6.3.3 Cas particuliers

Pour illustrer les résultats obtenus, considérons les cas particuliers suivant

#### L'espace de Minkowski

Dans le cas d'un espace Minkowskien (i.e.  $a = 1$  et  $\lambda \rightarrow 0$ ), la probabilité de création d'une paire et la densité des particules créées en présence d'un champ électrique se réduisent à

$$P_k = \frac{\exp\left(-\pi\frac{k_{\perp}^2 + m^2}{eE_0}\right)}{1 + \exp\left(-\pi\frac{k_{\perp}^2 + m^2}{eE_0}\right)} \quad (6.24)$$

et

$$n(k) = \exp\left(-\pi \frac{k_{\perp}^2 + m^2}{eE_0}\right), \quad (6.25)$$

où  $k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2$ .

Nous avons donc

$$\int d^4x \, 2 \operatorname{Im} L_{eff} = \int \frac{V d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \exp\left(-n\pi \frac{k_{\perp}^2 + m^2}{eE_0}\right). \quad (6.26)$$

Dans (6.26), étant donné que  $L_{eff}$  ne dépend pas de  $x$ , le facteur  $V$  compense l'intégrale  $\int d^3x$ . En effectuant l'intégration sur  $k_x$  et  $k_y$  nous obtenons

$$\int dt \, 2 \operatorname{Im} L_{eff} = \int dk_z \frac{eE}{(2\pi)^3} \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \exp\left(-n\pi \frac{m^2}{eE}\right). \quad (6.27)$$

Ici, nous remarquons dans (6.27) que le terme à gauche ne dépend pas de  $t$  et le terme à droite ne dépend pas de  $k_z$  et, par conséquent, les deux intégrations dans (6.27) divergent. Pour contourner ce problème nous utilisons la propriété [74]

$$dk_z = eE dt \quad (6.28)$$

qui signifie que les particules ayant le vecteur d'onde  $k_z$  sont au moyenne créées à l'instant  $t = \frac{k_z}{eE}$  [75]. En substituant l'équation (6.28) dans (6.27), nous obtenons l'équation (6.3).

### 6.3.4 Univers dominé par le rayonnement

Considérons maintenant le cas où  $b = 0$  et  $c = \frac{a_0^4}{4\lambda^2}$  et prenons la limite  $\lambda \rightarrow 0$ . Dans ce cas le facteur d'échelle  $a(\eta)$  devient

$$a^2(\eta) = a + \frac{a_0^4}{4}\eta^2. \quad (6.29)$$

En faisant la limite  $\lambda \rightarrow 0$  dans (6.21), nous obtenons

$$P_k = \frac{\sigma}{1 + \sigma}, \quad (6.30)$$

avec

$$\sigma = \exp\left[-2\pi \left(\frac{k_{\perp}^2 + am^2}{(m^2 a_0^4 + 4e^2 E_0^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{m^2 a_0^4 k_z^2}{(m^2 a_0^4 + 4e^2 E_0^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\right]. \quad (6.31)$$

Pour la probabilité  $C_k$  nous obtenons

$$C_k = (1 + \sigma)^{-1}. \quad (6.32)$$

La partie imaginaire de l'action effective de Schwinger est donc

$$2 \operatorname{Im} S_{eff} = \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \exp \left[ -2\pi n \left( \frac{k_{\perp}^2 + am^2}{(m^2 a_0^4 + 4e^2 E_0^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{m^2 a_0^4 k_z^2}{(m^2 a_0^4 + 4e^2 E_0^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \right]. \quad (6.33)$$

En effectuant l'intégration sur  $k_x$  et  $k_y$ , nous pouvons montrer que  $2 \operatorname{Im} S_{eff}$  peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{2 \operatorname{Im} S_{eff}}{V} &= \frac{(m^2 a_0^4 + 4e^2 E_0^2)^{\frac{1}{2}}}{2(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \times \exp \left( -\pi n \frac{am^2}{e\mathcal{E}} \right) \\ &\times \int dk_z \exp \left( -\pi n \frac{m^2 a_0^4}{4(e\mathcal{E})^3} k_z^2 \right). \end{aligned} \quad (6.34)$$

avec

$$4e^2 \mathcal{E}^2 = m^2 a_0^4 + 4e^2 E_0^2. \quad (6.35)$$

Pour l'intégration sur  $k_z$  nous utilisons la substitution

$$dk_z = \frac{m^2 a_0^4 + 4e^2 E_0^2}{4eE_0} d\eta. \quad (6.36)$$

Nous pouvons écrire donc

$$\frac{2 \operatorname{Im} S_{eff}}{V} = \int d\eta \, 2 \operatorname{Im} L_{eff}(\eta), \quad (6.37)$$

où

$$\begin{aligned} L_{eff}(\eta) &= \frac{(2e\mathcal{E})^3}{8(2\pi)^3 eE_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \exp \left[ -n\pi \left( \frac{am^2}{e\mathcal{E}} \right) \right] \\ &\times \exp \left[ -2n\pi \left( \frac{m^2 a_0^2}{8e^2 E_0^2} e\mathcal{E} \right) \eta^2 \right]. \end{aligned} \quad (6.38)$$

est la probabilité de création des particules par unité de volume par unité de temps.

Par intégration sur  $\eta$ , nous obtenons

$$\frac{2 \operatorname{Im} S_{eff}}{V} = \frac{1}{4\pi^3} \frac{(e\mathcal{E})^{\frac{5}{2}}}{2ma_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\frac{5}{2}}} \exp \left[ -\pi n \left( \frac{am^2}{e\mathcal{E}} \right) \right]. \quad (6.39)$$

Considérons maintenant un univers purement dominé par radiation ( $a = 0$ ) et calculons la quantité  $\gamma$  définie par

$$\gamma = \frac{2 \operatorname{Im} S_{eff}}{2 \operatorname{Im} S_{eff}(E_0 = 0)}. \quad (6.40)$$

Sans difficulté nous obtenons

$$\gamma = \left(1 + 4 \frac{e^2 E_0^2}{m^2 a_0^4}\right)^{\frac{5}{4}} > 1 \quad (6.41)$$

Il est bien claire que  $\gamma$  est de l'ordre  $\left(\frac{eE_0}{ma_0^2}\right)^{\frac{5}{2}}$  pour des champs intenses. Alors, les champs électriques forts amplifient la création de particules.

D'autre part, la densité des particules scalaires créées dans l'état  $k$  et donnée par

$$n(k) = \exp \left[ -2\pi \left( \frac{k_{\perp}^2}{(m^2 a_0^4 + 4e^2 E_0^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{m^2 a_0^4 k_z^2}{(m^2 a_0^4 + 4e^2 E_0^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \right]. \quad (6.42)$$

Alors le nombre total des particules créées dans une unité de volume

$$N_T = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} n(k) \quad (6.43)$$

se calcule en utilisant l'équation (6.36). Le résultat est

$$N_T = \frac{(m^2 a_0^4 + 4e^2 E_0^2)^{\frac{3}{2}}}{8 (2\pi)^3 e E_0} \int d\eta \exp \left[ -2\pi \frac{m^2 a_0^4}{(4eE_0)^2} (m^2 a_0^4 + 4e^2 E_0^2)^{\frac{1}{2}} \eta^2 \right]. \quad (6.44)$$

Ici, la quantité

$$n(\eta) = \frac{dN_T}{d\eta} = \frac{(m^2 a_0^4 + 4e^2 E_0^2)^{\frac{3}{2}}}{8 (2\pi)^3 e E_0} \exp \left[ -\pi \frac{m^2 a_0^4}{8e^2 E_0^2} (m^2 a_0^4 + 4e^2 E_0^2)^{\frac{1}{2}} \eta^2 \right], \quad (6.45)$$

est le nombre des particules créées par unité de temps.

En effectuant l'intégration sur  $\eta$  nous obtenons pour le nombre total des particules créées

$$N_T = \frac{(m^2 a_0^4 + 4e^2 E_0^2)^{\frac{5}{4}}}{\sqrt{8} (2\pi)^3 m a_0^2}. \quad (6.46)$$

Remarquons que le facteur  $\gamma$  (6.41) peut l'obtenir aussi à partir de la forme de  $N_T$ , tel que :

$$\frac{N_T}{N_T(E_0 = 0)} = \gamma. \quad (6.47)$$

Comme  $\gamma$  est de l'ordre  $\left(\frac{eE_0}{ma_0^2}\right)^{\frac{5}{2}}$ , cet effet semble d'être plus important pour les particules légères. Cependant, ce n'est pas vrai. D'après (6.45),  $n(\eta)$  est une fonction gaussienne en  $\eta$  et par conséquent, la création des paires est considérable dans l'intervalle  $\Delta\eta$

$$\Delta\eta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{4eE_0}{m a_0^2} (m^2 a_0^4 + 4e^2 E_0^2)^{-\frac{1}{4}}. \quad (6.48)$$

Pour minimiser l'effet inverse des particules créées sur le champ électrique nous supposons que  $\Delta\eta \ll 1$ , ce que implique que

$$ma_0^2 \gg \sqrt{eE_0}. \quad (6.49)$$

Alors l'effet du champ électrique est plus important quand les masses des particules créées vérifient la condition :

$$eE_0 \gg ma_0^2 \gg \sqrt{eE_0}. \quad (6.50)$$

Ainsi, le champ électrique intense produit principalement des paires particule-antiparticule lourdes. En outre, il est possible de créer des particules super-lourdes avec des masses de l'échelle de grande unification par un champ électrique fort dans l'univers primordial. Cela peut avoir des nombreuses conséquences cosmologiques. Pour les particules scalaires légères, l'effet de champ électrique sur ses productions est négligeable malgré que le facteur  $\gamma$  devient grand lorsque la masse est petite. En réalité, cela s'explique du fait que, quand la masse de particule  $m$  diminue la quantité  $N_T(E_0 = 0)$  diminue de sorte que le nombre total des particules créées  $N_T = \gamma N_T(E_0 = 0)$  reste non significatif.

## 6.4 Effet du champ magnétique

Considérons maintenant la superposition d'un champ électrique et un champ magnétique. Nous choisissons la jauge

$$A_\mu = \frac{E_0}{\lambda} \tanh(\lambda\eta) \delta_{\mu 3} - Hx\delta_{\mu 2}. \quad (6.51)$$

Dans ce cas, l'équation de Klein-Gordon s'écrit

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left( i\frac{\partial}{\partial y} + eHx \right)^2 + \left( i\frac{\partial}{\partial z} - \frac{eE_0}{\lambda} \tanh(\lambda\eta) \right)^2 + m^2 a^2(\eta) \right] \psi(\eta, \vec{x}) = 0. \quad (6.52)$$

Pour résoudre cette équation nous faisons la séparation des variables

$$\psi(\eta, \vec{x}) = g(x) \varphi(\eta) \exp(-ik_y y - ik_z z), \quad (6.53)$$

où les deux fonctions  $\varphi(\eta)$  et  $g(x)$  obéissent respectivement aux équations suivantes

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \left( k_z - \frac{eE_0}{\lambda} \tanh(\lambda\eta) \right)^2 + m^2 a^2(\eta) + \kappa \right] \varphi(\eta) = 0 \quad (6.54)$$

et

$$\left[ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (k_y^2 + eHx)^2 \right] g(x) = \kappa g(x) \quad (6.55)$$

avec  $\kappa$  est une constante de séparation de variables.

En faisant le changement  $x \rightarrow x - \frac{k_y}{eH}$  dans l'équation (6.55), nous obtenons une équation qui se ressemble celle de l'oscillateur harmonique donc la solution est donnée par

$$g(x) = \left( \frac{1}{2^l l! \sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{eH}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{eH}{2} \left( x + \frac{k_y}{eH} \right)^2 \right] \times \mathcal{H}_l \left[ \sqrt{eH} \left( x + \frac{k_y}{eH} \right) \right], \quad (6.56)$$

où  $l$  est un nombre entier et  $\mathcal{H}_l$  est le polynôme d'Hermite. La constante  $\kappa$  est donc donnée par

$$\kappa = eH(2l + 1). \quad (6.57)$$

En incorporant l'équation (6.57) dans l'équation (6.54), nous obtenons l'équation différentielle

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + k_z^2 + m^2 (\bar{a} + \bar{b} \tanh \lambda \eta + \bar{c} \tanh^2 \lambda \eta) \right] \varphi(\eta) = 0, \quad (6.58)$$

avec

$$\bar{a} = a + \frac{eH}{m^2} (2l + 1). \quad (6.59)$$

Cette équation est similaire à (6.12). Elle a donc les solutions

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\xi)_{out}^+ &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_{out}}} \xi^{-i\frac{\omega_{in}}{2\lambda}} (1 - \xi)^{i\frac{\omega_{out}}{2\lambda}} \\ &F \left( \frac{1}{2} + i\frac{\omega_-}{\lambda} + i\delta, \frac{1}{2} + i\frac{\omega_-}{\lambda} - i\delta; 1 + i\frac{\omega_{out}}{\lambda}; 1 - \xi \right), \end{aligned} \quad (6.60)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\xi)_{out}^- &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_{out}}} \xi^{i\frac{\omega_{in}}{2\lambda}} (1 - \xi)^{-i\frac{\omega_{out}}{2\lambda}} \\ &F \left( \frac{1}{2} - i\frac{\omega_-}{\lambda} + i\delta, \frac{1}{2} - i\frac{\omega_-}{\lambda} - i\delta; 1 - i\frac{\omega_{out}}{\lambda}; 1 - \xi \right). \end{aligned} \quad (6.61)$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\xi)_{in}^+ &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_{in}}} \xi^{-i\frac{\omega_{in}}{2\lambda}} (1 - \xi)^{i\frac{\omega_{out}}{2\lambda}} \\ &F \left( \frac{1}{2} + i\frac{\omega_-}{\lambda} + i\delta, \frac{1}{2} + i\frac{\omega_-}{\lambda} - i\delta; 1 - i\frac{\omega_{in}}{\lambda}; \xi \right), \end{aligned} \quad (6.62)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\xi)_{in}^- &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_{in}}} \xi^{i\frac{\omega_{in}}{2\lambda}} (1 - \xi)^{-i\frac{\omega_{out}}{2\lambda}} \\ &F \left( \frac{1}{2} - i\frac{\omega_-}{\lambda} + i\delta, \frac{1}{2} - i\frac{\omega_-}{\lambda} - i\delta; 1 + i\frac{\omega_{in}}{\lambda}; \xi \right), \end{aligned} \quad (6.63)$$

où les constantes  $\omega_{in}$ ,  $\omega_{out}$  et  $\delta$  sont cette fois-ci données par

$$\begin{aligned}\omega_{in} &= \sqrt{k_z^2 + m^2 (\bar{a} + \bar{c} - \bar{b})} \\ \omega_{out} &= \sqrt{k_z^2 + m^2 (\bar{a} + \bar{c} + \bar{b})}\end{aligned}\quad (6.64)$$

et

$$\delta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4m^2\bar{c}}{\lambda^2} - 1}.\quad (6.65)$$

La probabilité de créer une paire dans l'état  $k, l$  est donc

$$\mathcal{P}_{k,l} = \frac{\cosh\left(2\pi\frac{\omega_-}{\lambda}\right) + \cosh(2\pi\delta)}{\cosh\left(2\pi\frac{\omega_+}{\lambda}\right) + \cosh(2\pi\delta)},\quad (6.66)$$

Il est à noter que pour un espace-temps Minkowskien  $\mathcal{P}_{k,l}$  se réduit à l'expression connue [70]

$$P_{k,l} = \frac{\exp\left(-\pi\frac{m^2 + eH(2l+1)}{eE_0}\right)}{1 + \exp\left(-\pi\frac{m^2 + eH(2l+1)}{eE_0}\right)}.\quad (6.67)$$

Pour un univers dominé par radiation nous avons

$$P_{k,l} = \frac{\exp\left[-\pi\left(\frac{eH(2l+1)}{e\mathcal{E}} + \frac{m^2 a_0^4 k_z^2}{4(e\mathcal{E})^2}\right)\right]}{1 + \exp\left[-\pi\left(\frac{eH(2l+1)}{e\mathcal{E}} + \frac{m^2 a_0^4 k_z^2}{4(e\mathcal{E})^2}\right)\right]},\quad (6.68)$$

et

$$n(k) = \exp\left[-\pi\left(\frac{eH(2l+1)}{e\mathcal{E}} + \frac{m^2 a_0^4 k_z^2}{4(e\mathcal{E})^2}\right)\right].\quad (6.69)$$

La partie imaginaire de l'action effective est donc

$$\begin{aligned}2 \operatorname{Im} S_{eff} &= \int \frac{dk_y dk_z}{(2\pi)^2} \sum_l \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \\ &\times \exp\left[-n\pi\left(\frac{eH(2l+1)}{e\mathcal{E}} + \frac{m^2 a_0^4 k_z^2}{4(e\mathcal{E})^2}\right)\right]\end{aligned}\quad (6.70)$$

où l'intégration sur  $k_x$  est remplacée par une somme sur  $l$ . Par intégration sur  $k_y$  et  $k_z$  nous obtenons

$$2 \operatorname{Im} S_{eff} = \int dx d\eta \Gamma(\eta, x),\quad (6.71)$$

où

$$\begin{aligned}\Gamma(\eta, x) &= \frac{eH}{(2\pi)^2} \frac{e^2 \mathcal{E}^2}{eE_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_l \exp\left[-n\pi\frac{H}{\mathcal{E}}(2l+1)\right] \\ &\times \exp\left[-n\pi\left(\frac{m^2 a_0^4 e\mathcal{E}}{4e^2 E_0^2} \eta^2\right)\right].\end{aligned}\quad (6.72)$$



Ici, nous avons utilisé la substitution suivante

$$dk_y = eH dx. \quad (6.73)$$

En utilisant la somme

$$\sum_{l=0}^{\infty} \exp \left[ -n\pi \frac{H}{\mathcal{E}} (2l+1) \right] = \frac{1}{2 \sinh \left( n\pi \frac{H}{\mathcal{E}} \right)}, \quad (6.74)$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \Gamma(\eta, x) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{(e\mathcal{E})^3}{eE_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} F_n(H) \\ &\times \exp \left[ -n\pi \left( \frac{m^2 a_0^4 e\mathcal{E}}{4e^2 E_0^2} \eta^2 \right) \right], \end{aligned} \quad (6.75)$$

où le facteur  $F_n(H)$  est donné par

$$F_n(H) = \frac{n\pi \frac{H}{\mathcal{E}}}{\sinh \left( n\pi \frac{H}{\mathcal{E}} \right)}. \quad (6.76)$$

Nous remarquons que  $0 < F_n(H) \leq 1$ . Cela signifie que le champ magnétique minimise la création des particules scalaires.

Pour le nombre des particules créées nous avons

$$N_T(H, E_0) = \left( 1 + \frac{4e^2 E_0^2}{m^2 a_0^4} \right)^{\frac{5}{4}} \frac{\pi \frac{H}{\mathcal{E}}}{\sinh \left( \pi \frac{H}{\mathcal{E}} \right)} \frac{(ma_0^2)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2} (2\pi)^3}. \quad (6.77)$$

ce qui réduit dans le cas d'un champ magnétique pur à

$$N_T(H, E_0 = 0) = \frac{\sqrt{ma_0^2}}{8\sqrt{2}\pi^2} \frac{eH}{\sinh \left( 2\pi \frac{eH}{ma_0^2} \right)}. \quad (6.78)$$

Donc le champ magnétique minimise la création gravitationnelle des particules par le facteur

$$\gamma' = \frac{N_T(H, E_0 = 0)}{N_T(H = 0, E_0 = 0)} = \frac{2\pi \frac{eH}{ma_0^2}}{\sinh \left( 2\pi \frac{eH}{ma_0^2} \right)} < 1. \quad (6.79)$$

Cet effet peut être expliqué par le fait que les particules préfèrent d'être créées dans l'état d'énergie la plus faible [71]. Comme l'inclusion du champ magnétique peut être effectuée par le changement  $k_{\perp}^2 \rightarrow (2n+1)eH$  et le minimum de  $k_{\perp}^2$ , qui est 0, est inférieur au minimum de  $(2n+1)eH$ , qui est  $eH$ , on en déduit que la création des particules est plus importante au voisinage de  $k_{\perp}^2 = 0$  (champ électrique pur).

En présence de deux champs, magnétique et électrique, le facteur d'amplification sera donné par

$$\begin{aligned}\gamma'' &= \frac{N_T(H, E_0)}{N_T(H=0, E_0=0)} \\ &= \frac{\pi Y (1 + X^2)^{\frac{3}{4}}}{\sinh\left(\pi \frac{Y}{\sqrt{1+X^2}}\right)}\end{aligned}\quad (6.80)$$

avec

$$X = \frac{2eE_0}{ma_0^2}, \quad (6.81)$$

et

$$Y = \frac{2eH}{ma_0^2}. \quad (6.82)$$

Quand  $H \sim E_0 \gg ma_0^2$ , nous pouvons voir que  $\gamma'' \gg 1$ . Dans ce cas la combinaison des champs électromagnétiques amplifie la création des particules scalaires.

## 6.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'effet des champs électromagnétiques sur la création des particules scalaires dans un espace-temps de FRW en utilisant la méthode de la transformation de Bogoliubov. En premier lieu nous avons considéré un champ électrique de Sauter dans l'espace-temps asymptotiquement Minkowskien. Comme ce modèle admet des solutions exactes nous avons pu trouver des expressions analytiques pour la probabilité de création d'une paire et la densité des particules créées. En faisant la somme sur tous les états nous avons calculé le nombre des particules créées par unité de volume et par unité de temps ainsi que la partie imaginaire du Lagrangien effective de Schwinger. Le résultat essentiel de cette partie est que le champ électrique amplifie le taux de création des particules scalaires par les champs gravitationnels. Cette conclusion est en accord avec le résultat de dans la référence [72].

En deuxième étape, nous avons considéré une superposition d'un champ électrique et un champ magnétique. Nous avons démontré également que l'existence d'un champ magnétique dans un espace-temps minimise la création des paires particule-antiparticule scalaires. C'est le même effet qu'en électrodynamique dans l'espace de Minkowski.

## Chapitre 7

# Effet du champ électrique sur la création des particules de Dirac

## 7.1 Introduction

Dans ce chapitre nous nous proposons d'étudier l'effet du champ électrique sur la création des particules de Dirac dans l'univers de de Sitter. Pour avoir des calculs simples, nous considérons un espace-temps à (1+1) dimensions.

Nous commençons d'abord par la solution de l'équation de Dirac et la détermination des états "in" et "out". Ensuite, nous calculons la probabilité de création d'une paire et la densité des fermions créés à partir des coefficients de Bogoliubov.

## 7.2 Equation de Dirac en présence d'un champ électrique

Considérons une particule de spin 1/2, de masse  $m$  et de charge  $(-e)$  qui se propage en présence d'un champ électrique dans un espace-temps bidimensionnel en expansion décrit par la métrique :

$$ds^2 = a^2(\eta) [d\eta^2 - dx^2], \quad (7.1)$$

où  $a(\eta) = a_0 f(\eta)$  et  $f(\eta)$  est une fonction arbitraire. Nous choisissons la jauge

$$A^\mu = (0, A_x(\eta)),$$

où

$$A_1 = E_0 f(\eta), \quad (7.2)$$

Suivant le principe du couplage minimal, l'équation de Dirac covariante s'écrit

$$[i\tilde{\gamma}^\mu(\eta) (\partial_\mu - ieA_\mu(\eta) - \Gamma_\mu(\eta)) - m] \psi(\eta, x) = 0 \quad (7.3)$$

En faisant la substitution

$$\chi(\eta, x) = a^{\frac{1}{2}}(\eta) \psi(\eta, x).$$

nous obtenons l'équation

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu + eA_\mu(\eta)) - ma(\eta)] \chi(\eta, x) = 0, \quad (7.4)$$

Dans le but de résoudre cette équation, nous écrivons la fonction d'onde sous la forme

$$\chi(\eta, x) = \exp(ikx) \begin{pmatrix} \xi_1(\eta) \\ \xi_2(\eta) \end{pmatrix}, \quad (7.5)$$

où les composantes  $\xi_1(\eta)$  et  $\xi_2(\eta)$  vérifient les deux équations suivantes

$$\left( i \frac{\partial}{\partial \eta} - ma_0 f(\eta) \right) \xi_1(\eta) = (k - eE_0 f(\eta)) \xi_2(\eta) \quad (7.6)$$

$$\left( i \frac{\partial}{\partial \eta} + ma_0 f(\eta) \right) \xi_2(\eta) = (k - eE_0 f(\eta)) \xi_1(\eta). \quad (7.7)$$

En introduisant la transformation unitaire

$$\begin{pmatrix} \xi_1(\eta) \\ \xi_2(\eta) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\tau^2 + 1}} \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ -\tau & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1(\eta) \\ \varphi_2(\eta) \end{pmatrix}, \quad (7.8)$$

avec

$$\tau = \frac{a_0}{eE_0} (\mathcal{M} - m) \quad (7.9)$$

et

$$\mathcal{M} = \sqrt{m^2 + \frac{e^2 E_0^2}{a_0^2}}, \quad (7.10)$$

nous obtenons pour les nouvelles composantes  $\varphi_1(\eta)$  et  $\varphi_2(\eta)$  le système d'équations

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial \eta} - \mathcal{M} a_0 f(\eta) + \frac{eE_0}{\mathcal{M} a_0} k \right] \varphi_1 = k \frac{m}{\mathcal{M}} \varphi_2 \quad (7.11)$$

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial \eta} + \mathcal{M} a_0 f(\eta) - \frac{eE_0}{\mathcal{M} a_0} k \right] \varphi_2 = k \frac{m}{\mathcal{M}} \varphi_1. \quad (7.12)$$

Par itération, nous obtenons pour chaque composante une équation différentielle du second ordre

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \mathcal{M}^2 a_0^2 f^2(\eta) \pm i \mathcal{M} a_0 f'(\eta) - 2keE_0 f(\eta) + k^2 \right] \varphi_s = 0, \quad (7.13)$$

où  $s = \overline{1, 2}$ . Cette équation admet des solutions pour différents modèles : univers de de Sitter  $f(\eta) = \frac{-1}{H^2 \eta}$ , univers dominé par radiation  $f(\eta) = \eta$  et un univers de Milne  $f(\eta) = e^{\rho \eta}, \dots$  etc.

Il est évident que cette équation peut s'écrire sous la forme (5.21) où

$$\omega_s^2(\eta) = \mathcal{M}^2 a_0^2 f^2(\eta) \pm i \mathcal{M} a_0 f'(\eta) - 2keE_0 f(\eta) + k^2 \quad (7.14)$$

alors la création de paires est bien définie seulement si

$$\lim_{\eta \rightarrow \eta_0} \left| \frac{\dot{\omega}_s(\eta)}{\omega_s^2(\eta)} \right| \ll 1. \quad (7.15)$$

Il est à noter que dans (7.6) le champ gravitationnel se couple à la masse des particules, tandis que le champ électrique se couple à la charge  $e$ . Dans le nouveau système (7.11), nous pouvons voir qu'un champ effectif est couplé à la quantité  $\mathcal{M}$ .

De plus, l'équation (7.13) peut s'écrire sous la forme

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \left( \tilde{k} - e\mathcal{E}f(\eta) \right)^2 + \tilde{M}^2 \pm ie\mathcal{E}f'(\eta) \right] \varphi_s = 0 \quad (7.16)$$

avec

$$e\mathcal{E} = \mathcal{M}a_0, \quad (7.17)$$

$$\tilde{M}^2 = k^2 - \tilde{k}^2 = \left( k \frac{m}{\mathcal{M}} \right)^2 \quad (7.18)$$

et

$$\tilde{k} = k \frac{eE_0}{\mathcal{M}a_0}. \quad (7.19)$$

L'équation (7.16) est similaire à celle de Dirac pour une particule de masse  $\tilde{M}$ , charge  $(-e)$  et de vecteur d'onde  $\tilde{k}$  interagit avec un champ  $A_1 = \mathcal{E}f(\eta)$  dans un espace de Minkowski. Alors, la densité des particules de masse  $m$ , charge  $(-e)$  et de vecteur d'onde  $k$  créées par un champ électrique  $A_1 = E_0f(\eta)$  dans un espace-temps en expansion où  $a(\eta) = a_0f(\eta)$  est la même que la densité des particules de masse  $\tilde{M}$ , charge  $(-e)$  et de vecteur d'onde  $\tilde{k}$  créées par le champ électrique  $A_1 = \mathcal{E}f(\eta)$  dans un espace de Minkowski.

### 7.3 Création de particules dans un univers de de-Sitter

Considérons maintenant, le cas d'un espace-temps de de-Sitter bidimensionnel et un potentiel vecteur

$$A_1 = -\frac{E_0}{H^2\eta}. \quad (7.20)$$

Dans ce cas nous avons  $f(\eta) = -\frac{1}{H^2\eta}$ ,  $a_0 = H$  et

$$\mathcal{M} = \sqrt{m^2 + \left( \frac{eE_0}{H} \right)^2} \quad (7.21)$$

En faisant le changement de variable  $\rho = -2ik\eta$ , nous obtenons une équation de type Whittaker

$$\left[ \frac{d^2}{d\rho^2} + \left( -\frac{1}{4} + \frac{\lambda}{\rho} + \frac{\frac{1}{4} - \mu_{1,2}^2}{\rho^2} \right) \right] \tilde{\varphi}_s(\rho) = 0 \quad (7.22)$$

avec

$$\mu_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\mathcal{M}}{H} = \mu \quad (7.23)$$

$$\mu_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\mathcal{M}}{H} = \mu^* = 1 - \mu. \quad (7.24)$$

et

$$\lambda = i\frac{eE_0}{H^2} \quad (7.25)$$

Les solutions de cette équation sont données par(5.30).

Nous obtenons alors pour les spineurs de Dirac

$$\xi_{in}^+ = \mathcal{N}_{in} \begin{pmatrix} \sqrt{\mathcal{M} - \frac{eE_0}{H}} W_{-\lambda, \mu}(-\rho) + \tau \sqrt{\mathcal{M} + \frac{eE_0}{H}} W_{-\lambda, 1-\mu}(-\rho) \\ -\tau \sqrt{\mathcal{M} - \frac{eE_0}{H}} W_{-\lambda, \mu}(-\rho) + \sqrt{\mathcal{M} + \frac{eE_0}{H}} W_{-\lambda, 1-\mu}(-\rho) \end{pmatrix} \quad (7.26)$$

$$\xi_{in}^- = \mathcal{N}_{in}^* \begin{pmatrix} \sqrt{\mathcal{M} + \frac{eE_0}{H}} W_{\lambda, \mu}(\rho) - \tau \sqrt{\mathcal{M} - \frac{eE_0}{H}} W_{\lambda, 1-\mu}(\rho) \\ \tau \sqrt{\mathcal{M} + \frac{eE_0}{H}} W_{\lambda, \mu}(\rho) + \sqrt{\mathcal{M} - \frac{eE_0}{H}} W_{\lambda, 1-\mu}(\rho) \end{pmatrix}. \quad (7.27)$$

$$\xi_{out}^+ = \mathcal{N}_{out} \begin{pmatrix} M_{\lambda, -\mu}(\rho) + \tau \frac{\frac{m}{\mathcal{M}}}{4(\frac{1}{2} + i\frac{\mathcal{M}}{H})} M_{\lambda, -\mu+1}(\rho) \\ -\tau M_{\lambda, -\mu}(\rho) + \frac{\frac{m}{\mathcal{M}}}{4(\frac{1}{2} + i\frac{\mathcal{M}}{H})} M_{\lambda, -\mu+1}(\rho) \end{pmatrix} \quad (7.28)$$

et

$$\xi_{out}^- = \mathcal{N}_{out}^* \begin{pmatrix} -\tau M_{-\lambda, \mu-1}(-\rho) + \frac{\frac{m}{\mathcal{M}}}{4(\frac{1}{2} - i\frac{\mathcal{M}}{H})} M_{-\lambda, \mu}(-\rho) \\ M_{-\lambda, \mu-1}(-\rho) + \tau \frac{\frac{m}{\mathcal{M}}}{4(\frac{1}{2} - i\frac{\mathcal{M}}{H})} M_{-\lambda, \mu}(-\rho) \end{pmatrix} \quad (7.29)$$

où  $\mathcal{N}_{in}$  et  $\mathcal{N}_{out}$  sont des constantes de normalisation.

Notons ici que les états d'énergie positive et d'énergie négative sont connectés l'un à l'autre par la conjugaison de charge

$$\xi \rightarrow \xi^c = \sigma_1 \xi^*. \quad (7.30)$$

En plus, ces états sont orthogonaux

$$\bar{\xi}^+ \xi^- = \bar{\xi}^- \xi^+ = 0. \quad (7.31)$$

En utilisant la relation entre les fonctions de Whitaker (5.56), nous pouvons établir une transformation de Bogoliubov dont les coefficients sont donnés par

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - \mu - \lambda) \sqrt{\mathcal{M} - \frac{eE_0}{H}}}{\Gamma(\frac{1}{2} - \mu + \lambda) \sqrt{\mathcal{M} + \frac{eE_0}{H}}} e^{-i\pi(\mu - \frac{1}{2})}. \quad (7.32)$$

La probabilité de création d'une paire des fermions de spin 1/2 en présence d'un champ électrique est alors

$$P_k = \frac{\sinh \pi \left( \frac{\mathcal{M}}{H} + \frac{eE_0}{H^2} \right)}{\sinh \pi \left( \frac{\mathcal{M}}{H} - \frac{eE_0}{H^2} \right)} e^{-2\pi \frac{\mathcal{M}}{H}}. \quad (7.33)$$

et le nombre des fermions créés est

$$n(k) = |\beta|^2 = \frac{\sinh \pi \left( \frac{\mathcal{M}}{H} + \frac{eE_0}{H^2} \right) e^{-2\pi \frac{\mathcal{M}}{H}}}{\sinh \pi \left( \frac{\mathcal{M}}{H} - \frac{eE_0}{H^2} \right) + \sinh \pi \left( \frac{\mathcal{M}}{H} + \frac{eE_0}{H^2} \right) e^{-2\pi \frac{\mathcal{M}}{H}}} \quad (7.34)$$

Notons ici que ce résultat est obtenu pour un vecteur d'onde positif  $k > 0$  et  $-\frac{3\pi}{2} < \arg(2ik\eta) < \frac{\pi}{2}$ . Pour avoir le cas  $k < 0$  il suffit de changer la charge ( $-e$ ) par ( $+e$ ). Nous obtenons alors

$$n(k) = |\beta|^2 = \frac{\sinh \pi \left( \frac{\mathcal{M}}{H} + \text{sign}(k) \frac{eE_0}{H^2} \right) e^{-2\pi \frac{\mathcal{M}}{H}}}{\sinh \pi \left( \frac{\mathcal{M}}{H} - \text{sign}(k) \frac{eE_0}{H^2} \right) + \sinh \pi \left( \frac{\mathcal{M}}{H} + \text{sign}(k) \frac{eE_0}{H^2} \right) e^{-2\pi \frac{\mathcal{M}}{H}}}. \quad (7.35)$$

Nous constatons que ce nombre devient plus significatif lorsque  $k > 0$ . Par conséquent, le champ électrique crée principalement les particules avec un vecteur d'onde positif  $k > 0$ . En d'autres termes, en présence d'un champ électrique constant, les particules préfèrent d'être créées avec un signe spécifique de l'impulsion canonique  $k$ . Cela dépend de l'orientation du champ électrique et de la charge de la particule. Les antiparticules seront alors créées dans la direction opposée avec la même densité.

A cause de la condition adiabatique  $\mathcal{M} \gg H$ , la densité des fermions créés se comporte alors comme

$$n(k) = \exp \left[ -\frac{2\pi}{H} \left( \mathcal{M} - \text{sign}(k) \frac{eE_0}{H} \right) \right] \quad (7.36)$$

qui est une distribution de Boltzmann.

Il est à noter que le choix des états "out" est basé sur l'étude de comportement asymptotique quand  $\rho \rightarrow 0$  où bien  $t \rightarrow \infty$ . Cependant, l'espace-temps de de-Sitter décrit l'univers dans sa période d'inflation avec une expansion exponentielle et cette phase est limitée  $t \ll \infty$ . Dans ce cas, l'idée de considérer  $\rho \rightarrow 0$  est physiquement inconvenable.

Ainsi, au lieu de considérer  $\rho \rightarrow 0$  où  $M(a, b; \rho) \approx 1$ , nous cherchons une condition pour laquelle  $M(a, b; \rho) \approx 1$  mais  $\rho$  est fini. Compte tenu de la définition du fonction de Kummer :

$$M(a, b; \rho) = 1 + \frac{a\rho}{1b} + \frac{a(a+1)}{1 \times 2} \frac{\rho^2}{b(b+1)} + \frac{a(a+1)(a+2)}{1 \times 2 \times 3} \frac{\rho^3}{b(b+1)(b+2)} + \dots \quad (7.37)$$

nous pouvons voir que, pour une valeur finie de  $\rho$ ,  $M(a, b; \rho) \approx 1$  seulement si  $\frac{|\rho|}{|b|} \ll 1$ .

Nous avons alors

$$|\rho| \ll |2\mu + 1|. \quad (7.38)$$



## 7.4 Nombre de particules créées

Considérons maintenant le nombre de particules défini par

$$N = \int \frac{dxdk}{2\pi a(t)} n(k) \quad (7.39)$$

$\frac{dxdk}{2\pi a(t)}$  est le nombre des états dans l'élément de l'espace des phase  $dxdk$ . Le facteur  $a(t)$  au dénominateur exprime la dilution des particules par l'expansion de l'univers. Grâce à (7.36), nous écrivons

$$N = \frac{1}{\pi a(t)} \int dx \int_{k \geq 0} dk \exp\left(-\frac{2\pi}{H} \mathcal{M}\right) \cosh\left(2\pi \frac{eE_0}{H^2}\right). \quad (7.40)$$

Comme  $n(k)$  ne dépend que de  $\text{sign}(k)$ , l'intégration sur  $k$  se diverge. L'origine de cette divergence est que le nombre des particules créées dans un temps infini est aussi infini. Par contre, le nombre de particules par unité de temps et par unité de longueur  $\frac{dN}{dt dx}$  doit être fini. Généralement, c'est la quantité qui est en lien avec les mesures expérimentales. Ainsi, nous pouvons écrire

$$N = \int dN = \int \frac{dN}{dt dx} dt dx. \quad (7.41)$$

La divergence de l'intégrale  $\int dxdk(\cdot)$  doit être la même que celle de  $\int dx dt(\cdot)$ . Dans un espace-temps plat de Minkowski le passage d'une intégrale à une autre peut être effectué par le changement de variable  $\int dk \rightarrow eE_0 \int dt = eE_0 T$ . Dans un univers de de-Sitter la situation est un peu différente. Grâce à la condition (7.38), nous pouvons voir que la notion de particules ne peut avoir un sens que si

$$|k| < \mathcal{M} e^{Ht}. \quad (7.42)$$

Alors, pour un instant donné  $t$ , nous devons introduire un cutt-off  $\Lambda = \mathcal{M} e^{Ht}$ . Pour une légère variation de cutt-off, nous écrivons

$$\frac{dN}{d\Lambda} = \frac{1}{\pi a(t)} \int dx \exp\left(-\frac{2\pi}{H} \mathcal{M}\right) \cosh\left(2\pi \frac{eE_0}{H^2}\right), \quad (7.43)$$

avec

$$d\Lambda = \mathcal{M} H e^{Ht} dt. \quad (7.44)$$

Nous obtenons donc

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\mathcal{M} H}{\pi} \int dx \exp\left(-\frac{2\pi}{H} \mathcal{M}\right) \cosh\left(2\pi \frac{eE_0}{H^2}\right) \quad (7.45)$$

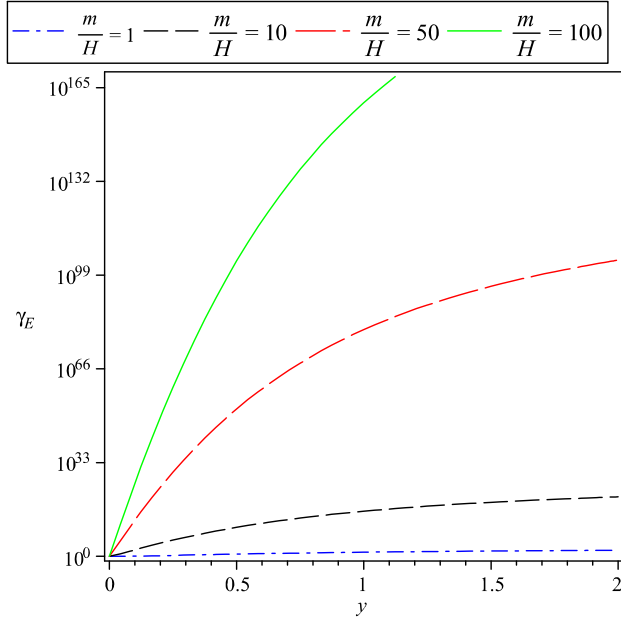


FIG. 7.1 – Variation de  $\gamma_E$  en fonction de la variable  $y = \frac{eE_0}{mH}$  pour certaines valeurs de  $\frac{m}{H}$ .

et, par conséquent, le nombre des particules créées par unité du temps et par unité de longueur est donné par

$$\frac{dN}{dt dx} = \frac{\mathcal{M}H}{\pi} \cosh\left(2\pi \frac{eE_0}{H^2}\right) \exp\left(-\frac{2\pi}{H}\mathcal{M}\right). \quad (7.46)$$

Pour un champ gravitationnel pur ( $E_0 = 0$ ), nous avons

$$\frac{dN}{dt dx} = \frac{mH}{\pi} \exp\left(-\frac{2\pi}{H}m\right). \quad (7.47)$$

Le nombre des particules créées par unité du temps et par unité de longueur, peut s'écrire donc sous la forme

$$\frac{dN}{dt dx} = \gamma_E \frac{mH}{\pi} \exp\left(-\frac{2\pi}{H}m\right), \quad (7.48)$$

où le facteur d'amplification  $\gamma_E$  est donné par

$$\gamma_E = \sqrt{1+y^2} \cosh\left(2\pi \frac{m}{H}y\right) \exp\left[\frac{2\pi}{H}m\left(1-\sqrt{1+y^2}\right)\right], \quad (7.49)$$

avec

$$y = \frac{eE_0}{mH}. \quad (7.50)$$

Il est facile de voir que  $\gamma_E$  est toujours supérieur à 1 et donc le champ électrique amplifie la création des particules dans l'espace-temps de de-Sitter.

La figure 7.1 montre la variation de  $\gamma_E$  en fonction de  $y$ . Comme nous pouvons le voir, le champ électrique amplifie considérablement la création des particules dans l'espace-temps de de-Sitter.

## 7.5 Action effective de Schwinger

Plus récemment, les auteurs [77] ont calculé le Lagrangien effectif des particules scalaires à une boucle dans un espace-temps de de-Sitter à partir de la définition

$$\mathcal{L}_{dS}^{(1)} = iH \int \frac{dk}{2\pi} \ln(\alpha_k^*), \quad (7.51)$$

où  $\alpha_k^*$  est le coefficient de Bogoliubov. Ils ont constaté que la partie imaginaire de Lagrangien effectif est donnée par

$$2 \operatorname{Im} \mathcal{L}_{dS}^{(1)} = \frac{eE}{2\pi} \ln(1 + N_{dS}), \quad (7.52)$$

où  $N_{dS}$  est la densité des particules créées  $N_{dS} = n(k)$ . Malheureusement, ce résultat est complètement faux. Premièrement, les auteurs de [77] n'ont pas tenu compte du fait que  $N_{dS}$  dépend du signe de  $k$ . Deuxièmement, ils ont utilisé la même procédure que dans l'espace de Minkowski,  $dk \rightarrow eEdt$  qui n'est pas valable pour l'espace de de-Sitter.

Dans cette section, nous nous proposons de dériver l'expression exacte de la partie imaginaire du Lagrangien effectif. Nous écrivons d'abord  $P_k$  sous la forme

$$P_k = \frac{\sigma}{1 - \sigma}, \quad (7.53)$$

avec

$$\sigma = \exp \left[ -\frac{2\pi}{H} \left( \mathcal{M} - \epsilon \frac{eE_0}{H} \right) \right] \quad (7.54)$$

où  $\epsilon = \operatorname{sign}(k)$ . Le principe de Pauli impose que

$$C_k + C_k P_k = 1$$

ce qui implique que

$$C_k = \frac{1}{1 + P_k} = 1 - \sigma \quad (7.55)$$

La partie imaginaire de l'action effective de Schwinger s'écrit alors comme suit

$$2 \operatorname{Im} S_{eff} = - \int \frac{dx dk}{2\pi a(t)} \ln \left( 1 - e^{-2\pi \left( \frac{\mathcal{M}}{H} - \epsilon \frac{eE_0}{H^2} \right)} \right). \quad (7.56)$$

Grâce au développement de la fonction logarithme, nous écrivons

$$2 \operatorname{Im} S_{eff} = 2 \int_{k \geq 0} \frac{dx dk}{2\pi a(t)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cosh \left( 2n\pi \frac{eE_0}{H^2} \right) \exp \left( -\frac{2n\pi}{H} \mathcal{M} \right). \quad (7.57)$$

Pour éliminer la divergence UV, nous définissons le lagrangien effectif avec

$$2 \operatorname{Im} S_{eff} = \int dx dt \, 2 \operatorname{Im} L_{eff} \quad (7.58)$$

La quantité  $2 \operatorname{Im} L_{eff}$  peut s'interpréter comme la probabilité de création par unité du temps et par unité de longueur. elle sera alors donnée par

$$2 \operatorname{Im} L_{eff} = \frac{\mathcal{M}H}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cosh \left( 2n\pi \frac{eE_0}{H^2} \right) \exp \left( -\frac{2n\pi}{H} \mathcal{M} \right). \quad (7.59)$$

L'utilisation d'intégrale suivante

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{s} \exp \left( i \frac{\delta}{2} s \right) \left( \coth \frac{s}{2} - \frac{2}{s} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp(-\pi n \delta) \quad (7.60)$$

nous permettons d'obtenir

$$2 \operatorname{Im} L_{eff} = \frac{\mathcal{M}H}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{s} \exp \left( i \frac{\mathcal{M}}{H} s \right) \cos \left( \frac{eE_0}{H^2} s \right) \left( \coth \frac{s}{2} - \frac{2}{s} \right) \quad (7.61)$$

Alors le Lagrangien effectif de Schwinger s'écrit sous la forme

$$L_{eff} = i \frac{\mathcal{M}H}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s} \exp \left( i \frac{\mathcal{M}}{H} s \right) \cos \left( \frac{eE_0}{H^2} s \right) \left( \coth \frac{s}{2} - \frac{2}{s} \right) + L_0, \quad (7.62)$$

avec  $L_0$  est une quantité réelle.

Notons que dans la limite  $E_0 \rightarrow 0$ , nous obtenons

$$2 \operatorname{Im} L_{eff} = \frac{mH}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp \left( -\frac{2n\pi}{H} m \right) = -\frac{mH}{\pi} \ln \left[ 1 - \exp \left( -\frac{2\pi}{H} m \right) \right]. \quad (7.63)$$

Compte tenu de la condition adiabatique  $\frac{m}{H} \gg 1$ , nous pouvons montrer que notre résultat s'écrit aussi sous la forme

$$2 \operatorname{Im} L_{eff} \propto \int_{m^2}^{+\infty} d\tilde{m}^2 \frac{\exp \left( -\pi \frac{\tilde{m}}{H} \right)}{\sinh \left( \pi \frac{\tilde{m}}{H} \right)}. \quad (7.64)$$

qui coïncide avec le résultat de [10] obtenu par la méthode des intégrales de chemins.

## 7.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons voulu voir l'influence du champ électrique sur la production des paires de spin 1/2 dans un univers en expansion bidimensionnel de de Sitter. Le calcul de la probabilité de création d'une paire et la densité des fermions créés était simple et Direct. Nous avons vu que le champ électrique crée principalement les particules avec un signe spécifique de l'impulsion canonique  $k$ . Cela dépend de l'orientation du champ électrique et de la charge de la particule. En d'autres termes, le champ électrique amplifie la création des particules dans une direction et la minimise dans l'autre direction. C'est ainsi que nous avons considéré ensuite le nombre total des particules créées en faisant la somme sur tous les modes. Comme résultat nous avons vu que le champ électrique amplifie considérablement le nombre total des particules créées.

De point de vue physique ce résultat est très important car il montre la possibilité de créer des particules lourdes qui ont des implications significatives sur l'évolution cosmique. En effet, pour un champs gravitationnel pur, la création des particules lourdes est négligeable à cause du comportement de la fonction exponentielle  $\exp\left(-\frac{2\pi}{H}m\right)$ . Cependant, si on admet que les champs électrique étaient présent aux les premières ères de l'univers, ils vont améliorer la création des particules lourdes.

## Chapitre 8

La création des paires de spin  $1/2$  dans  
un univers avec une dimension  
supplémentaire

## 8.1 Introduction

En 1921 Kaluza a tenté d'unifier la gravitation d'Einstein et l'électromagnétisme de Maxwell dans une théorie à cinq dimensions [78]. Kaluza proposa l'hypothèse que notre univers usuel est une hypersurface à 4 dimensions (une brane) plongée dans un espace à  $5D$ . En suite, Klein a suggéré que l'une des quatre dimensions spatiales, la dimension supplémentaire, est compactifié, c'est-à-dire enroulée sur elle-même pour former un cercle [79].

En 1998, le modèle ADD (model with large extra dimensions) [80] a été proposé pour le but d'expliquer la faiblesse de la gravité. Il postule que les particules élémentaires restent confinées dans une brane à l'exception du graviton qu'il peut se déplacer d'une brane à une autre. La propagation du graviton dans toutes les dimensions donne lieu à une fuite de la gravitation dans tout le super-univers expliquant ainsi la faiblesse apparente et le caractère si spécial de cette force dans notre espace-temps quadri-dimensionnel. En 1999, Randall et Sundrum ont proposé un autre modèle fondé sur l'existence des dimensions supplémentaires, afin de résoudre le problème de hiérarchie de modèle standard [81, 82].

En général, nous distinguons deux types des modèles extra-dimensionnels, le premier est le modèle de Kaluza-Klein où la dimension supplémentaire est accessible pour tous les champs [83] et le deuxième est le modèle de brane-world où les champs de la matière du modèle standard sont localisés sur une hypersurface.

Notons que plusieurs effets quantiques dans un espace-temps avec des dimensions supplémentaires sont déjà traités. Nous citons par exemple comme la création des particules scalaires [84, 85, 86, 87, 88, 89] et l'effet de Casimir [90, 91, 92].

Dans ce chapitre nous nous proposons d'étudier l'effet de la création des particules de Dirac dans un univers en expansion avec une dimension supplémentaire en considérant la méthode de Bogoliubov.

## 8.2 Motivation

Dans les modèles avec une dimension supplémentaire, l'équation de Friedmann se modifie pour être

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_M \left(1 + \frac{\rho_M}{2\tau}\right) + \frac{\Lambda_4}{3}, \quad (8.1)$$

où  $\tau$  est la tension de la brane et  $\Lambda_4$  est la constante cosmologique à quatre dimensions. Alors, dans le régime haute énergie (i.e. le régime braneworld,  $H \propto \sqrt{\frac{4\pi G}{3\sigma}\rho_M}$ ), l'univers pourrait subir une expansion plus rapide. Cela permet une énorme création de particules par rapport à la cosmologie standard et, par conséquent, les effets des particules produites sur l'évolution cosmique deviennent plus importants que le cas ordinaire. En outre, puisque, dans les modèles avec une dimension supplémentaire, la conservation de l'énergie est donnée comme dans la cosmologie ordinaire 4-dimensionnelle par

$$\dot{\rho}_M + 3H(\rho_M + p_M) = 0, \quad (8.2)$$

la pression effective négative induite par la création de particules pourrait jouer un rôle dans la sortie du régime braneworld  $H \propto \rho_M$  au régime standard  $H \propto \sqrt{\rho_M + \frac{\Lambda_4}{8\pi G}}$ .

Un autre effet possible de la création de particules dans la cosmologie à 4 dimensions est l'isotropisation de l'univers anisotrope. En conséquence, si la contraction de la cinquième dimension commence au temps de Planck, les particules créées vont produire une isotropisation très rapide de l'espace à cinq dimensions [84]. Si c'est le cas, la taille de la dimension supplémentaire devient suffisamment importante pour être détectée par des expériences. Cependant, il y a des effets physiques qui entraînent la contraction de la cinquième dimension. Parmi ces effets, nous citons l'effet Casimir des champs de matière externes ou des gravitons. La contraction de la cinquième dimension peut être induite aussi par un champ de tenseur antisymétrique comme dans le cas de la supergravité à onze dimensions [84]. De plus, même si l'effet de la création de particules est plus important que les effets conduisant à la contraction de la dimension supplémentaire, l'expansion de cette dernière finit par l'isotropisation de l'espace à 5D, et alors le processus de création de particules cesse et l'espace supplémentaire se contracte à nouveau par les autres effets.

### 8.3 Equation de Dirac dans un univers à 5D

Considérons un fermion de spin 1/2 sans charge et de masse  $m$  se propage dans un univers penta-dimensionnel ayant une dimension supplémentaire  $\sigma$ . Cet univers est décrit par une métrique de la forme

$$dS^2 = a^2(\eta) e^{2f(\sigma)} [-d\eta^2 + d\vec{x}^2] + \phi^2(\eta) d\sigma^2, \quad (8.3)$$

où l'hypersurface à 4D, quand  $d\sigma = 0$ , correspond à l'univers plat de FRW. A noter que



Les propriétés physiques de ces modèles cosmologiques et ses implications sont bien connues [93][94][95][96][97]. Nous notons également que certaines généralisations de cette classe de solutions pour le cas des espace ouverts et fermés [98][99] et les théories modifiée de la gravitation ont été faites [100][101].

Remarquons que le facteur d'échelle de l'espace-temps à 4D (l'hypersurface à 4D) dépend de  $\eta$  et  $\sigma$ , ce qui rend cette métrique n'est pas factorisable.

La dynamique de cette particule est gouvernée par l'équation de Dirac

$$[\tilde{\gamma}^\mu(\eta)(\partial_\mu - \Gamma_\mu(\eta)) + m]\zeta(\eta, \vec{x}, \sigma) = 0 \quad (8.4)$$

où les matrices  $\tilde{\gamma}^\mu(\eta)$  sont données par

$$\gamma^0(x) = a^{-1}(\eta) e^{-f(\sigma)} \gamma^0 \quad (8.5)$$

$$\gamma^i(x) = a^{-1}(\eta) e^{-f(\sigma)} \gamma^i \quad (8.6)$$

$$\gamma^4(x) = \phi^{-1}(\eta) \gamma^4, \quad (8.7)$$

avec la définition habituelle des matrices de Dirac

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^i \\ -i\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^4 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (8.8)$$

Par un calcul simple nous obtenons pour les symboles de Christoffel

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^i &= \Gamma_{0i}^0 = \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{04}^i = \Gamma_{4i}^0 = \Gamma_{44}^i = \Gamma_{44}^4 = 0 \\ \Gamma_{00}^0 &= \frac{\dot{a}}{a}; \quad \Gamma_{ij}^0 = \Gamma_{0i}^j = \frac{\dot{a}}{a} \delta_{ij} \\ \Gamma_{04}^4 &= \frac{\dot{\phi}(\eta)}{\phi(\eta)}; \quad \Gamma_{44}^0 = \dot{\phi}(\eta) \phi(\eta) a^{-2}(\eta) e^{-2f(\sigma)} \\ \Gamma_{4i}^j &= f'(\sigma) \delta_{ij}; \quad \Gamma_{40}^0 = f'(\sigma) \\ \Gamma_{00}^4 &= \left( \frac{a(\eta) e^{f(\sigma)}}{\phi(\eta)} \right)^2 f'(\sigma) \\ \Gamma_{ij}^4 &= - \left( \frac{a(\eta) e^{f(\sigma)}}{\phi(\eta)} \right)^2 f'(\sigma) \delta_{ij} \end{aligned}$$

Dans ce cas, les connexions de spin  $\Gamma_\mu(x)$  sont

$$\Gamma_0 = \frac{1}{2} a(\eta) e^{f(\sigma)} f'(\sigma) \phi^{-1}(\eta) \gamma^0 \gamma^4 \quad (8.9)$$

$$\Gamma_i = \frac{1}{2} \left[ \frac{\dot{a}(\eta)}{a(\eta)} \gamma^0 + \frac{a(\eta)}{\phi(\eta)} e^{f(\sigma)} f'(\sigma) \gamma^4 \right] \gamma^i \quad (8.10)$$

$$\Gamma_4 = \frac{1}{2} \frac{\dot{\phi}(\eta)}{a(\eta)} e^{-f(\sigma)} \gamma^0 \gamma^4. \quad (8.11)$$

En posant  $\zeta(\eta, \vec{x}, \sigma) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\varphi(\eta, \sigma)$ , nous obtenons pour  $\varphi(\eta, \sigma)$  l'équation suivante

$$\left[ \left( \partial_\eta + \frac{1}{2} \frac{\dot{\phi}(\eta)}{\phi(\eta)} + \frac{3}{2} \frac{\dot{a}(\eta)}{a(\eta)} \right) \gamma^0 + \frac{a(\eta)}{\phi(\eta)} e^{f(\sigma)} \left( \partial_\sigma + 2f'(\sigma) \right) \gamma^4 + i\gamma^i k_i + ma(\eta) e^{f(\sigma)} \right] \varphi(\eta, \sigma) = 0. \quad (8.12)$$

Pour simplifier la dernière équation, nous écrivons  $\varphi(\eta, \sigma)$  sous la forme

$$\varphi(\eta, \sigma) = [a(\eta)]^{-\frac{3}{2}} [\phi(\eta)]^{-\frac{1}{2}} e^{-2f(\sigma)} \vartheta(\eta, \sigma). \quad (8.13)$$

Il est évident alors que  $\vartheta(\eta, \sigma)$  satisfait l'équation suivante

$$\left[ \gamma^0 \partial_\eta + \gamma^4 \frac{a(\eta)}{\phi(\eta)} e^{f(\sigma)} \partial_\sigma + i\gamma^i k_i + ma(\eta) e^{f(\sigma)} \right] \vartheta(\eta, \sigma) = 0. \quad (8.14)$$

Cette équation est difficile à résoudre dans le cas général. C'est ainsi que nous considérons dans la suite des particules sans masse.

## 8.4 Séparation des variables

Pour une particule sans masse, l'équation de Dirac à résoudre peut s'écrire sous la forme

$$\left[ i\gamma^4 \partial_\eta + \gamma^0 \frac{a(\eta)}{\phi(\eta)} D_\sigma - \hat{K} \right] \vartheta(\eta, \sigma) = 0, \quad (8.15)$$

avec

$$D_\sigma = ie^{f(\sigma)} \partial_\sigma, \quad (8.16)$$

et

$$\hat{K} = (\gamma^i k_i) \gamma^4 \gamma^0 = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{k} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{k} \end{pmatrix}. \quad (8.17)$$

Nous avons le commutateur

$$\left[ D_\sigma, i\gamma^4 \partial_\eta + \gamma^0 \frac{a(\eta)}{\phi(\eta)} D_\sigma - \hat{K} \right] = 0, \quad (8.18)$$

ce qui signifie que les solutions de l'équation (8.15) sont forcément des fonctions propres à l'opérateur  $D_\sigma$ . Ainsi, nous pouvons écrire

$$\vartheta(\eta, \sigma) = \xi(\eta) \chi(\sigma) \quad (8.19)$$

où  $\chi(\sigma)$  est une fonction propre à  $D_\sigma$ . Soit  $\Lambda$  la valeur propre correspondante à la fonction  $\chi(\sigma)$ . Nous avons, alors, l'équation

$$ie^{f(\sigma)} \frac{\partial}{\partial \sigma} \chi(\sigma) = \Lambda \chi(\sigma) \quad (8.20)$$

qui à comme solution

$$\chi(\sigma) = \exp\left(-i\Lambda \int e^{-f(\sigma)} d\sigma\right).$$

Par conséquent, nous écrivons

$$\vartheta(\eta, \sigma) = \xi(\eta) \exp\left(-i\Lambda \int e^{-f(\sigma)} d\sigma\right). \quad (8.21)$$

Pour le spineur  $\xi(\eta)$ , nous obtenons l'équation

$$\left[\gamma^4 i \partial_\eta + \gamma^0 \frac{a(\eta)}{\phi(\eta)} \Lambda - \hat{K}\right] \xi(\eta) = 0, \quad (8.22)$$

qui peut se mettre sous la forme

$$\hat{D}\xi(\eta) = \hat{K}\xi(\eta), \quad (8.23)$$

avec

$$\hat{D} = \gamma^4 i \partial_\eta + \gamma^0 \frac{a(\eta)}{\phi(\eta)} \Lambda.$$

Comme  $\hat{K}^2 = [(\gamma^i k_i) \gamma^4 \gamma^0]^2 = k^2$ , les valeurs propres de l'opérateurs  $\hat{K}$  sont, alors,  $sk$  avec  $s = \pm 1$ . Nous pouvons aussi que  $[\hat{D}, \hat{K}] = 0$ , ce qui montre nous pouvons avoir une base propre commune à ces deux opérateurs. En fait, le spineur

$$\xi(s, \eta) = \begin{pmatrix} \xi_1(s, \eta) \Upsilon_s\left(\vec{k}\right) \\ \xi_2(s, \eta) \Upsilon_s\left(\vec{k}\right) \end{pmatrix}, \quad (8.24)$$

où  $\xi_1(s, \eta)$  et  $\xi_2(s, \eta)$  sont des fonctions et  $\Upsilon_s\left(\vec{k}\right)$  est le vecteur propre à  $(\vec{\sigma} \cdot \vec{k})$  correspondant à la valeur propre  $sk$ , est un vecteur propre à  $\hat{K}$  associé à la même valeur propre  $sk$ .

A partir de l'équation

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{k} \Upsilon_s\left(\vec{k}\right) = sk \Upsilon_s\left(\vec{k}\right), \quad (8.25)$$

nous obtenons

$$\Upsilon_s\left(\vec{k}\right) = \sqrt{\frac{(k_x - ik_y)}{2k(k - sk_z)(k_x + ik_y)}} \begin{pmatrix} k - sk_z \\ k_x + ik_y \end{pmatrix} \quad (8.26)$$

Il est facile de montrer que ce vecteur vérifie la propriété suivante

$$\Upsilon_s \left( -\vec{k} \right) = e^{i\varpi} \sigma_y \Upsilon_s^* \left( \vec{k} \right). \quad (8.27)$$

L'équation (8.22) se réduit donc à l'équation

$$\left[ \gamma^4 i \partial_\eta + \gamma^0 \frac{a(\eta)}{\phi(\eta)} \Lambda - sk \right] \xi(s, \eta) = 0. \quad (8.28)$$

En incorporant (8.24) dans (8.28), nous obtenons pour les fonctions  $\xi_1(s, \eta)$  et  $\xi_2(s, \eta)$  le système d'équations suivant

$$i \partial_\eta \xi_1(s, \eta) = - \left( -sk - i \frac{a(\eta)}{\phi(\eta)} \Lambda \right) \xi_2(s, \eta) \quad (8.29)$$

$$i \partial_\eta \xi_2(s, \eta) = - \left( -sk + i \frac{a(\eta)}{\phi(\eta)} \Lambda \right) \xi_1(s, \eta). \quad (8.30)$$

Ce système (8.29) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante

$$i \partial_\eta \begin{pmatrix} \xi_1(s, \eta) \\ \xi_2(s, \eta) \end{pmatrix} = \left( sk \sigma_x - \frac{a(\eta)}{\phi(\eta)} \Lambda \sigma_y \right) \begin{pmatrix} \xi_1(s, \eta) \\ \xi_2(s, \eta) \end{pmatrix}. \quad (8.31)$$

En introduisant la transformation unitaire,  $U^+ U = 1$ ,

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad (8.32)$$

avec

$$\begin{pmatrix} \xi_1(s, \eta) \\ \xi_2(s, \eta) \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \psi_1(s, \eta) \\ \psi_2(s, \eta) \end{pmatrix} \quad (8.33)$$

nous obtenons

$$i \partial_\eta \begin{pmatrix} \psi_1(s, \eta) \\ \psi_2(s, \eta) \end{pmatrix} = \left( sk U^+ \sigma_x U - \frac{a(\eta)}{\phi(\eta)} \Lambda U^+ \sigma_y U \right) \begin{pmatrix} \psi_1(s, \eta) \\ \psi_2(s, \eta) \end{pmatrix}. \quad (8.34)$$

Sachant que  $U^+ \sigma_x U = \sigma_x$  et  $U^+ \sigma_y U = \sigma_z$ , l'équation (8.34) se réduit à l'équation

$$i \partial_\eta \Psi(s, \eta) = \left( sk \sigma_x - \frac{a(\eta)}{\phi(\eta)} \Lambda \sigma_z \right) \Psi(s, \eta) \quad (8.35)$$

qui est équivalente au système suivant

$$\left( i \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{a(\eta)}{\phi(\eta)} \Lambda \right) \psi_1(s, \eta) = sk \psi_2(s, \eta) \quad (8.36)$$

$$\left( i \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{a(\eta)}{\phi(\eta)} \Lambda \right) \psi_2(s, \eta) = sk \psi_1(s, \eta). \quad (8.37)$$

Par itération nous obtenons pour chaque fonction  $\psi_i(s, \eta)$  une équation différentiel du second ordre

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \mp i \dot{b}(\eta) \Lambda + b^2(\eta) \Lambda^2 + k^2 \right) \psi_{1,2}(s, \eta) = 0. \quad (8.38)$$

avec  $b(\eta) = \frac{a(\eta)}{\phi(\eta)}$ .

Notons ici que la solution du problème ne dépend que du rapport  $\frac{a(\eta)}{\phi(\eta)}$ .

Nous notons aussi que pour le cas où  $b(\eta) = \frac{a(\eta)}{\phi(\eta)} = 1$ , les solutions d'énergie positive et négative prennent la forme  $e^{\pm i(\Lambda^2 + k^2)\eta}$  et, donc, elles ne se couplent jamais. Par conséquent, il n'y a pas de production de paires pour  $a(\eta) = \phi(\eta)$ .

## 8.5 Production des particules

En théorie de Kalusa-Klein de la gravitation, nous avoir une solution des équations d'Einstein à  $5D$  avec  $a(\eta) = -\frac{1}{H\eta}$  et  $\phi(\eta) = 1$  [98]. Dans ce cas, l'hypersurface à  $4D$  est de de-Sitter.

Pour  $b(\eta) = \frac{a(\eta)}{\phi(\eta)} = -\frac{1}{H\eta}$ , l'équation (8.38) devient

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \left( \frac{\Lambda^2}{H^2} \mp i \frac{\Lambda}{H} \right) \frac{1}{\eta^2} + k^2 \right) \psi_{1,2}(s, \eta) = 0. \quad (8.39)$$

A partir de cette équation nous pouvons voir que la condition adiabatique nécessaire pour la création des particule prend la forme

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \left| \frac{\dot{\omega}(\eta)}{\omega^2(\eta)} \right| \approx \frac{H}{\Lambda} \ll 1. \quad (8.40)$$

Pour résoudre l'équation (8.40), effectuant les remplacements

$$\psi_{1,2}(s, \eta) = \sqrt{\eta} \chi_{1,2}(s, \eta), \quad (8.41)$$

et

$$\rho = k\eta. \quad (8.42)$$

L'équation résultante est similaire à celle de Bessel

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \left( 1 - \frac{\lambda_{1,2}^2}{\rho^2} \right) \right) \tilde{\chi}_{1,2}(\rho) = 0, \quad (8.43)$$

avec

$$\lambda_1 = \lambda = \frac{1}{2} + i \frac{\Lambda}{H} \quad (8.44)$$

$$\lambda_2 = \lambda^* = \frac{1}{2} - i \frac{\Lambda}{H}. \quad (8.45)$$

Grâce aux comportement des des fonctions de Bessel et Hunkel

$$J_{\lambda_{1,2}}(k\eta) = \frac{(k\eta)^{\lambda_{1,2}}}{2^{\lambda_{1,2}}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(k\eta)^{2n}}{2^{2n} n! \Gamma(\lambda_{1,2} + n + 1)}, \quad |\arg(k\eta)| < \pi \quad (8.46)$$

$$H_{\lambda_{1,2}}^{(1)}(k\eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi k\eta}} e^{i(k\eta - \frac{\pi\eta}{2} - \frac{\pi}{4})} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{k\eta}\right) \right], \quad -\pi < \arg(k\eta) < 2\pi \quad (8.47)$$

$$H_{\lambda_{1,2}}^{(2)}(k\eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi k\eta}} e^{-i(k\eta - \frac{\pi\eta}{2} - \frac{\pi}{4})} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{k\eta}\right) \right], \quad -2\pi < \arg(k\eta) < \pi. \quad (8.48)$$

quand  $\eta \rightarrow -\infty$  and  $\eta \rightarrow 0$  et les solutions d'équation d'Hamilton-Jacobi nous trouvons que les états "in" sont

$$\psi_{1,in}^-(s, \eta) = \sqrt{\eta} H_{\lambda}^{(1)}(k\eta) \quad (8.49)$$

$$\psi_{1,in}^+(s, \eta) = \sqrt{\eta} H_{\lambda}^{(2)}(k\eta), \quad (8.50)$$

et les états "out"

$$\psi_{1,out}^-(s, \eta) = \sqrt{\eta} J_{\lambda}(k\eta) \quad (8.51)$$

$$\psi_{1,out}^+(s, \eta) = \sqrt{\eta} J_{-\lambda}(k\eta). \quad (8.52)$$

A l'aide de la relations fonctionelle

$$\left( \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \pm \lambda \right) Z_{\lambda}(\eta) = \pm \eta Z_{\lambda \mp 1}(\eta), \quad (8.53)$$

où  $Z_{\lambda}(\eta)$  est une fonction de Bessel, nous obtenons

$$\psi_{2,in}^-(s, \eta) = is\sqrt{\eta} H_{\lambda-1}^{(1)}(k\eta) \quad (8.54)$$

$$\psi_{2,in}^+(s, \eta) = is\sqrt{\eta} H_{\lambda-1}^{(2)}(k\eta), \quad (8.55)$$

et

$$\psi_{2,out}^-(s, \eta) = is\sqrt{\eta} J_{\lambda-1}(k\eta) \quad (8.56)$$

$$\psi_{2,out}^+(s, \eta) = -is\sqrt{\eta} J_{1-\lambda}(k\eta). \quad (8.57)$$

Les spineurs de Dirac représentant les modes des énergies positives et négatives sont donc

$$\xi_{out}^- \left( \eta, s, \vec{k} \right) = \mathcal{N} \sqrt{\eta} \begin{pmatrix} (J_{\lambda}(k\eta) - sJ_{\lambda-1}(k\eta)) \Upsilon_s \left( \vec{k} \right) \\ i (J_{\lambda}(k\eta) + sJ_{\lambda-1}(k\eta)) \Upsilon_s \left( \vec{k} \right) \end{pmatrix} \quad (8.58)$$

$$\xi_{out}^+ (\eta, s, \vec{k}) = \mathcal{N}^* \sqrt{\eta} \begin{pmatrix} (J_{-\lambda}(k\eta) + sJ_{1-\lambda}(k\eta)) \Upsilon_s \left( \frac{\vec{k}}{k} \right) \\ i (J_{-\lambda}(k\eta) - sJ_{1-\lambda}(k\eta)) \Upsilon_s \left( \frac{\vec{k}}{k} \right) \end{pmatrix} \quad (8.59)$$

et

$$\xi_{in}^- (\eta, s, \vec{k}) = \mathcal{N}' \sqrt{\eta} \begin{pmatrix} (H_{\lambda}^{(1)}(k\eta) - sH_{\lambda-1}^{(1)}(k\eta)) \Upsilon_s \left( \frac{\vec{k}}{k} \right) \\ i (H_{\lambda}^{(1)}(k\eta) + sH_{\lambda-1}^{(1)}(k\eta)) \Upsilon_s \left( \frac{\vec{k}}{k} \right) \end{pmatrix}, \quad (8.60)$$

$$\xi_{in}^+ (\eta, s, \vec{k}) = \mathcal{N}'^* \sqrt{\eta} \begin{pmatrix} (H_{\lambda}^{(2)}(k\eta) - sH_{\lambda-1}^{(2)}(k\eta)) \Upsilon_s \left( \frac{\vec{k}}{k} \right) \\ i (H_{\lambda}^{(2)}(k\eta) + sH_{\lambda-1}^{(2)}(k\eta)) \Upsilon_s \left( \frac{\vec{k}}{k} \right) \end{pmatrix} \quad (8.61)$$

où  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{N}'$  sont des constantes de normalisation.

Notons que ces spineurs vérifient la relation de conjugaison de charge

$$\xi_{in,out}^{\mp} (\eta, s, \vec{k}) = \gamma^2 \left( \xi_{in,out}^{\pm} (\eta, s, -\vec{k}) \right)^* \quad (8.62)$$

et d'orthogonalité

$$\bar{\xi}_{in}^+ \xi_{in}^- = \bar{\xi}_{in}^- \xi_{in}^+ = \bar{\xi}_{out}^+ \xi_{out}^- = \bar{\xi}_{out}^- \xi_{out}^+ = 0. \quad (8.63)$$

Maintenant, pour déterminer les coefficients de Bogoliubov nous utilisons les relations entre les fonction de Bessel et les fonctions de Hankel

$$H_{\lambda}^{(1)}(k\eta) = \frac{J_{-\lambda}(k\eta) - e^{-i\lambda\pi} J_{\lambda}(k\eta)}{i \sin(\pi\lambda)} \quad (8.64)$$

$$H_{\lambda}^{(2)}(k\eta) = \frac{e^{i\lambda\pi} J_{\lambda}(k\eta) - J_{-\lambda}(k\eta)}{i \sin(\pi\lambda)}. \quad (8.65)$$

Nous obtenons donc

$$\alpha = i \frac{\mathcal{N}'^*}{\mathcal{N}^*} \frac{1}{\sin(\pi\lambda)} \quad (8.66)$$

$$\beta = -i \frac{\mathcal{N}'^*}{\mathcal{N}} \frac{1}{\sin(\pi\lambda)} e^{i\lambda\pi}. \quad (8.67)$$

La probabilité de créer une paire des fermions sans masse est alors

$$P_k = \exp \left( -2\pi \frac{\Lambda}{H} \right). \quad (8.68)$$

et la densité des fermions créés est donnée par

$$n(k) = \frac{1}{1 + \exp \left( 2\pi \frac{\Lambda}{H} \right)}. \quad (8.69)$$

Remarquons bien que cette densité est une distribution statistique de Fermi-Dirac.

Notons que les résultats obtenus sont aussi valable pour le cas où  $a(\eta) = 1$  et  $\phi(\eta) = -H\eta$  avec  $b(\eta) = -\frac{1}{H\eta}$ .

## 8.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la création des fermions de spin  $\frac{1}{2}$  dans un univers en expansion avec une dimension supplémentaire en utilisant la méthode de la transformation de Bogoliubov

En première étape, nous avons obtenu deux ensembles de solutions pour l'équation de Dirac. Ensuite, nous avons calculé la probabilité de création d'une paire et la densité des particules créées à partir des coefficients de Bogoliubov.

Les résultats essentiels de ce chapitre sont les suivants :

1. Le phénomène de la création de particules dépend seulement du rapport  $\frac{a(\eta)}{\phi(\eta)}$  de sorte qu'il n'y a pas de création de particule pour  $a(\eta) = \phi(\eta)$ .
2. Il a été montré aussi que le facteur  $e^{-2f(\sigma)}$  dans la métrique n'a pas de rôle important vis-à-vis le mécanisme de création des particules. Il détermine, cependant, la nature de la valeur propre  $\Lambda$  (discrète ou continue).
3. Le cas étudié,  $\frac{a(\eta)}{\phi(\eta)} = \frac{-1}{H\eta}$ , correspond à plusieurs choix de  $a(\eta)$  et  $\phi(\eta)$ . Par exemple, si  $a(\eta) = \frac{-1}{H\eta}$  et  $\phi(\eta) = 1$ , l'hypersurface à 4D est l'espace-temps statique de Minkowski. La création des particules est donc induite par la contraction de la cinquième dimension. Cet effet se ressemble à l'effet Unruh ou un observateur sur la cinquième dimension (the bulk) voit un rayonnement thermique dans l'hypersurface Minkowskienne.
4. Comme  $\Lambda$  est proportionnel à l'inverse de la taille de la cinquième dimension l'exponentiel  $\exp\left(-2\pi\frac{\Lambda}{H}\right)$  montre que la création des particules est plus importante pour les dimensions supplémentaire large.



## **Chapitre 9**

### **Conclusion générale**

Dans cette thèse nous pouvons voir qu'il a été principalement question de calcul de la probabilité de création d'une paire de particules dans un univers en expansion et la densité des particules créées en utilisant la méthode canonique basée sur la transformation de Bogoliubov reliant les états "in" et "out". Plusieurs modèles cosmologiques ont été considérés.

En premier lieu, nous avons pu trouver une interprétation physique de la création des particules dans un univers en expansion à travers une théorie quantique des champs dans un espace courbe. Nous avons montré que le Hamiltonien du champ scalaire complexe dans un univers en expansion n'est pas toujours diagonal et ainsi l'interprétation du champ en termes de particules n'est pas tout à fait claire. Ici, nous avons utilisé la technique de Bogoliubov pour montrer qu'il y a une création des particules. Nous avons considéré comme application un espace asymptotiquement plat et l'un univers de de-Sitter.

Dans une deuxième étape, nous avons voulu étudier les effets des champs électromagnétiques sur la création des particules. Compte tenu des difficultés rencontrées nous avons d'abord commencé par l'étude de l'effet du champ électrique sur la création des particules scalaires où nous avons trouvé des solutions exactes pour l'équation de Klein Gordon correspondante. Le résultat essentiel de cette étude est que le champ électrique amplifie la densité des particules créées.

Ayant contourné les difficultés rencontrées, nous avons considéré cette fois-ci la combinaison d'un champ électrique et un champ magnétique où nous avons montré que le champ magnétique minimise la densité des particules scalaires.

Ensuite, nous avons étudié la création des particules de Dirac dans l'univers de de-Sitter en présence d'un champ électrique.

Dans la dernière partie nous avons étudié la création des particules dans un univers avec une dimension supplémentaire. Nous avons considéré la production des particules de Dirac dans un univers à 5 dimensions où nous avons pu calculer la probabilité de création d'une paire et la densité des particules créées à partir des solutions de l'équation de Dirac correspondante. Le résultat essentiel de cette étude est que la création des particules sans masse est possible dans un univers avec une dimension supplémentaire.

En conclusion, nous avons voulu voir, dans cette thèse, à quel point peut la création des particules influencer sur l'évolution de l'univers.

Nous avons pu montrer que les particules créées ont une pression négative, ce qui modifie les équations de Friedmann et peut avoir une implication sur l'évolution des l'univers. Cependant, comme nous l'avons vu, la densité des particules créées est très petite et donc l'effet de la

création des particules dans ces circonstances est négligeable.

Nous sommes alors intéressés à chercher les facteurs qui peuvent amplifier la création des particules et c'était le but principal de cette thèse. Parmi ces facteurs nous avons considéré, en premier lieu, les champs électromagnétiques. Comme l'univers à l'heure actuelle ne contient pas des champs électriques forts la création des particules ne peut pas être la cause de l'expansion accélérée de l'univers observée dernièrement. Si l'univers primordial, cependant, contient des champs électromagnétiques forts, la création des particules peut jouer un rôle très important dans l'issue de la phase de l'inflation. Comme le champ magnétique minimise la création des particules scalaires, ce qui montre que seulement les particules de spin  $\frac{1}{2}$  peuvent avoir une influence sur l'évolution de l'univers.

# Annexe A

## Equations de Friedmann

Les équations d'Einstein liant la courbure de l'univers à la présence de la matière s'écrivent

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\lambda\kappa}R_{\lambda\kappa} = -8\pi GT_{\mu\nu} \quad (\text{A.1})$$

où  $R_{\mu\nu}$  est le tenseur de Ricci défini par

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu,\lambda}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa}\Gamma_{\nu\kappa}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\kappa}\Gamma_{\lambda\kappa}^{\lambda}. \quad (\text{A.2})$$

et  $T_{\mu\nu}$  est le tenseur énergie-impulsion du fluide cosmologique.

Les différentes composantes de  $R_{\mu\nu}$  sont

$$R_{00} = 3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_{ij} = -(2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2k)\tilde{g}_{ij} \quad (\text{A.3})$$

Comme

$$R_{0i} = \frac{\dot{a}}{a}K(\delta_{ij}\tilde{g}_{il} - \delta_{li}\tilde{g}_{jl})x^j$$

il vient alors qu'au voisinage de l'origine  $\tilde{g}_{ij} \sim \delta_{ij}$ , on a

$$R_{0i} = 0 \quad (\text{A.4})$$

En prenant la trace des équations d'Einstein nous arrivons à

$$R = 8\pi GT \quad (\text{A.5})$$

Ce qui donne

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right). \quad (\text{A.6})$$

Le fluide cosmique peut être étudié par analogie avec un gaz parfait de pression  $P$  et de densité  $\rho$ . Dans ce cas on a

$$T_{\mu\nu} = pg_{\mu\nu} + (p + \rho) u_\mu u_\nu$$

où  $u_\mu$  est la quadri-vitesse. Les composantes du tenseur d'énergie-impulsion sont alors données par

$$T^{00} = \rho(t) \quad , \quad T^{0i} = 0 \quad , \quad T^{ij} = \tilde{g}^{ij} a^{-2} p(t) \quad (\text{A.7})$$

et

$$T = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = -\rho + 3p \quad (\text{A.8})$$

En remplaçant les équations (A.3), (A.7) et (A.8) dans l'équation d'Einstein (A.6) nous obtenons les équations fondamentales de la cosmologie

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3} G(\rho + 3p) \quad (\text{A.9})$$

et

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{K}{a^2} = 4\pi G(\rho - p). \quad (\text{A.10})$$

En combinant ces deux dernières équations, nous arrivons à

$$8\pi G\rho(t) = 3 \left[ \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{K}{a^2} \right] \quad (\text{A.11})$$

Cette équation est l'équation fondamentale de Friedmann qui gouverne l'expansion de l'univers. Elle permet de déterminer la structure de l'univers selon son contenu.

A partir de la loi de conservation de l'énergie  $\nabla_\mu T^{\mu 0} = 0$ , nous obtenons l'équation différentielle du premier ordre

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(p + \rho) = 0, \quad (\text{A.12})$$

qui peut être facilement résolue pour une équation d'état de la forme

$$p = \omega\rho, \quad (\text{A.13})$$

où  $\omega$  c'est le paramètre d'état indépendant du temps, dans ce cas nous obtenons

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+\omega)} \quad (\text{A.14})$$

où  $\rho_0 = \rho(t_0)$  et  $a_0 = a(t_0)$  sont respectivement la densité du fluide cosmique et le rayon de l'univers observé actuellement (l'indice 0 indique l'instant présent).

Suivant la valeur de  $\omega$  on distingue différentes situations :

**a) Un univers dominé par la matière (matière non-relativiste) pour  $\omega = 0$**

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3} \quad (\text{A.15})$$

En cosmologie, la matière est souvent appelée "poussière" et sa pression peut être considérée comme négligeable. Elle se compose de la matière baryonique et probablement de la matière non baryonique de nature encore inconnue.

Dans un univers plat et d'après l'équation de Friedmann

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G \rho_0 a_0^3}{3 a^3} \quad (\text{A.16})$$

le facteur d'expansion devient

$$a(t) \sim t^{\frac{2}{3}}. \quad (\text{A.17})$$

**b) Un univers dominé par le rayonnement (matière relativiste) pour  $\omega = \frac{1}{3}$**

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-4} \quad (\text{A.18})$$

Le rayonnement est constitué de rayonnement électromagnétique (photons), neutrinos (si  $k_B T \geq mc^2$ ) et ondes gravitationnelles. Pour  $K = 0$ , nous avons

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G \rho_0 a_0^4}{3 a^4} \quad (\text{A.19})$$

ce qui nous donne

$$a(t) \sim \sqrt{t}. \quad (\text{A.20})$$

**c) Un univers dominé par l'énergie du vide (modèle de de Sitter)  $\omega = -1$**

$$\rho = \Lambda = cste \quad (\text{A.21})$$

$\Lambda$  est la constante cosmologique. Dans un univers plat, l'équation de Friedmann étant

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G \Lambda}{3} \quad (\text{A.22})$$

le facteur d'échelle devient alors  $a(t) = e^{Ht}$  avec  $H = \sqrt{\frac{8\pi G \Lambda}{3}}$ .

## Annexe B

# Equation relativiste de hamilton-Jacobi $dS_{1+1}$

Comme il a été mentionné auparavant, pour avoir le bon choix des états "in" et "out", nous considérons les états semi-classiques solutions de l'équation de Hamilton-Jacobi donné par :

$$g^{\alpha\beta} (\partial_\alpha S + ieA_\alpha) (\partial_\beta S + ieA_\beta) - m^2 = 0 \quad (\text{B.1})$$

En écrivant  $S$  sous la forme

$$S = G(\eta) + kx \quad (\text{B.2})$$

nous obtenons

$$\partial_\eta G = \sqrt{\left(k + \frac{eE_0}{H^2\eta}\right)^2 + \frac{m^2}{H^2\eta^2}} \quad (\text{B.3})$$

A l'aide de l'intégrale suivante

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}}{x} dx = \\ \sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2} - \sqrt{\alpha} \operatorname{arcsinh} \left( \frac{2\alpha + \beta x}{x\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}} \right) \\ + \frac{\beta}{2} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \operatorname{arcsinh} \left( \frac{2\gamma x + \beta}{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

où  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont des nombre réeles, avec  $\gamma > 0$  et  $4\alpha\gamma - \beta^2 > 0$ , nous obtenons

$$\begin{aligned}
G(\eta) &= \sqrt{k^2\eta^2 + 2k\frac{eE_0}{H^2}\eta + \frac{\mathcal{M}^2}{H^2}} \\
&- \frac{\mathcal{M}}{H} \ln \left( \frac{\frac{\mathcal{M}^2}{H^2} + k\frac{eE_0}{H^2}\eta}{k\frac{m}{H}\eta} + \sqrt{\left(\frac{\frac{\mathcal{M}^2}{H^2} + k\frac{eE_0}{H^2}\eta}{k\frac{m}{H}\eta}\right)^2 + 1} \right) \\
&+ \frac{eE_0}{H^2} \ln \left( k\eta + \frac{eE_0}{H^2} + \sqrt{\left(k\eta + \frac{eE_0}{H^2}\right)^2 + \left(\frac{m}{H}\right)^2} \right). \tag{B.5}
\end{aligned}$$



# Annexe C

## Equation relativiste dans un super-univers à 5D

Dans un super-univers avec une seule dimension supplémentaire  $\sigma$ , nous considérons la décomposition suivante pour l'action classique

$$S = g(\eta) + h(\sigma) + \vec{k}\vec{x}, \quad (\text{C.1})$$

où les deux fonctions  $g(\eta)$  et  $h(\sigma)$  satisfont l'équation

$$\frac{\phi^2(\eta)}{a^2(\eta)} \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial \eta} \right)^2 - k^2 \right] = e^{-2f(\sigma)} \left( \frac{\partial h}{\partial \sigma} \right)^2, \quad (\text{C.2})$$

et donc

$$\frac{\phi^2(\eta)}{a^2(\eta)} \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial \eta} \right)^2 - k^2 \right] = e^{-2f(\sigma)} \left( \frac{\partial h}{\partial \sigma} \right)^2 = \Lambda^2 \quad (\text{C.3})$$

où  $\Lambda^2$  est la constante de séparation de variables. Pour un univers de de Sitter, nous avons

$$g(\eta) = \pm \int \sqrt{\frac{\Lambda^2}{H^2 \eta^2} + k^2} d\eta, \quad (\text{C.4})$$

et

$$h(\sigma) = \Lambda \int e^{f(\sigma)} d\sigma. \quad (\text{C.5})$$

En utilisant l'intégrale

$$\int du \frac{\sqrt{b^2 + u^2}}{u^2} = -\frac{\sqrt{b^2 + u^2}}{u} + \ln \left( u + \sqrt{b^2 + u^2} \right) + cst, \quad (\text{C.6})$$

avec  $u = \frac{1}{\eta}$  et  $b = \frac{Hk}{\Lambda}$ , nous arrivons à

$$g(\eta) = \pm \sqrt{\frac{\Lambda^2}{H^2} + k^2 \eta^2} + \ln \left( \frac{1}{\eta} + \sqrt{\frac{H^2}{\Lambda^2} k^2 + \frac{1}{\eta^2}} \right)^{\mp \frac{\Lambda}{H}} + cst, \quad (\text{C.7})$$

Donc, les états "in" et "out" se comportent comme

$$\begin{aligned} \psi_{out}^{\pm}(\eta) &\equiv \lim_{\eta \rightarrow 0} e^{ig(\eta)} \sim \eta^{\mp i \frac{\Lambda}{H}} \\ \psi_{in}^{\pm}(\eta) &\equiv \lim_{\eta \rightarrow -\infty} e^{ig(\eta)} \sim e^{\pm ik\eta}. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

# Bibliographie

- [1] J. Schwinger, Phys. Rev. 82, 664 (1951)
- [2] A. Calogeracos, N. Dombey, Contemp. Phys. 40, 313 (1999).
- [3] L. Parker, Phys. Rev. Lett. 21, 562 (1968).
- [4] L. Parker, Phys. Rev. D 183, 1057 (1969).
- [5] L. Parker, Phys. Rev. D 3, 346 (1971).
- [6] Ya. Zeldovich and A. A. Starobinskii Sov. Phys. JETP 34, 1159 (1971)
- [7] S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. 43, 199 (1975)
- [8] A. A. Grib, S. G. Mamaev and V. M. Mostepanenko Quantum Vacuum effects in strong fields (Moscow : Energoatomizdat, 1988)
- [9] R. Ruffini, G. Vereshchagin, S-S. Xue, Phys. Rep. **487** (2010).
- [10] E. Akhmedov, Mod. Phys. Lett. A 25, 2815 (2010).
- [11] S. P. Kim, arXiv : 1008.0577v1.
- [12] I. H. Duru and N. Ünal, Phys. Rev. D 34, 966 (1986).
- [13] D. M. Chitre and J. B. Hartel, Phys. D 16, 251 (1977).
- [14] S. Biswas, J. Guha, N. G. Sarkar, Class. Quantum Gravity 12, 1591 (1995).
- [15] J. Guha, D. Biswas , N. G. Sarkar, S. Biswas, Class. Quantum Gravity 12, 1641 (1995).
- [16] S. Biswas, A. Shaw, P. Misra, Gen. Relativ. Gravit. 34, 665 (2002).
- [17] S. Biswas, I. Chowdhury, Int. J. Mod. Phys. D 15, 937 (2006).
- [18] S. Winizki, Phys. Rev. D 72, 104011 (2005).
- [19] Ya. B. Zel'dovich and A. A. Starobinski, Sov. Phys. JETP 34, 1159 (1972).
- [20] A. A. Grip and S. G. Mamayev and V. M. Mostepanenko, Gen. Relativ. Gravit. 6, 538 (1976).

- 
- [21] A. A. Grip and S. G. Mamayev and V. M. Mostepanenko, *Gen. Relativ. Gravit.* 7, 535 (1976).
- [22] A. A. Grip and S. G. Mamayev and V. M. Mostepanenko, *J. Phys. A : Math. Gen.* 13, 2057 (1980).
- [23] J. Haro and E. Elizald, *J. Phys. A : Math. Theor.* 41, 372003 (2008).
- [24] J. Haro, *J. Phys. A : Math. Theor.* 44, 205401 (2011).
- [25] Yu. V. Pavlov ; *Grav. and Cosmol.* 14 (2008) 314
- [26] J. Garriga, *Phys. Rev. D* 49, 6343 (1994).
- [27] V. M. Villalba, *Phys. Rev. D* 60, 127501 (1999).
- [28] V. M. Villalba and W. Greiner, *Phys. Rev. D* 65, 025007 (2001).
- [29] V. M. Villalba, *Prog. Theor. Phys.* 4, 859 (1993).
- [30] S. Haouat and R. Chekireb, *Mod. Phys. Lett. A*, 26, 2639 (2011).
- [31] N. B. Narozhny and A. I. Nikishov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **11**, 596 (1970).
- [32] S. Haouat and R. Chekireb, *Int. J. Theor. Phys.* 51, 1704 (2012)
- [33] S. Moradi ; *Journal of Geometry and Physics* 59 (2009) 173,184
- [34] S. Moradi ; *Int. J. Theor. Phys.* 47 (2008) 2808.
- [35] I. Antoniadis, P. O. Mazur and E. Mottola, *New J. Phys.* 9, 11 (2007).
- [36] S. Gavrilov, D. M. Gitman and S. D. Odintsov, *Int. J. Mod. Phys. A* 12, 4837(1997).
- [37] Kowalski M. et al.,SUPERNOVA COSMOLOGY PROJECT collaboration Improved cosmological constraints from new, old and combined datasets,*Astrophys. J.*686, 749 (2008).
- [38] L Perivolaropoulos, *Accelerating universe : observational status and theoretical implications*, *AIP Conf.Proc.* 848 (2006).
- [39] Padmanabhan T. and Choudhury, T.R.,A theoretician's analysis of the supernova data and the limitations in determining the nature of dark energy, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 344, 823 (2003).
- [40] R. A. Knop and all, New constraints on  $\Omega_M$ ,  $\Omega_\Lambda$ , and  $\omega$  from an independent set of eleven high-redshift supernovae observed with HST.
- [41] R. Andrew, *New Astron Rev.* 45,235 (2001).

- [42] N. Seto, S. Kawamura and T. Nakamura, *Phys. Rev. Lett.* 87, 221103 (2001).
- [43] S. Perlmutter and all, *Astrophys. J.* 517, 565 (1999).
- [44] A. G. Riess and all, *Astro. J.* 116. 1009 (1998).
- [45] P. J. E Peebles, B. Retra, *Rev. Mod. Phys.* 75, 559 (2003).
- [46] T. Padmanabhan, *Phys. Rept* 380. 235 (2003).
- [47] S. Perlmutter, M. S. Turner and M. White, *Phys. Rev. Lett.* 83, 670 (1999).
- [48] S. Debnath and A. K. Sanyal, *Class. Quant. Grav.* 28, 145015 (2011).
- [49] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, 1979).
- [50] A. A. Grib and Yu. V. Pavlov, *Int. J. Mod. Phys. D*, 11, 433 (2002).
- [51] A. A. Grib and Yu. V. Pavlov, *Int. J. Mod. Phys. A*, 17, 4435 (2002).
- [52] A. A. Grib and Yu. V. Pavlov, *Grav. and Cosmol.* 8, Suppl.,148 (2002).
- [53] A. A. Grib and Yu. V. Pavlov, *Grav. and Cosmol.*8, Suppl. II,50 (2002).
- [54] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* 48, 1303 (1982).
- [55] L. M. Krauss, *Nucl. Phys. B* 277, 556 (1983).
- [56] G. D. Coughlan, N. Fischler, E. W. Kolb, S. Raby and G. G. Ross, *Phys. Lett. B* 131, 59 (1983).
- [57] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge Univ. Press. Cambridge, 1982).
- [58] S. A. Fulling, *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time* (Cambridge University. Press, Cambridge 1985).
- [59] V. F. Mukhanov and S. Winitzki, *Intoduction of Quantum Effects in Gravity* (Cambridge Univ. Press, Cambridge 2007).
- [60] A. A. Grip S. G. Mamayev and V. M. Mostepanenko, *Vacuum Quantum Effects in Strong Fields* (FriedmannLab. Publ., St. Petersburg 1994).
- [61] L. Parker and D. J. Toms, *Quantum Field Theory in Curved Space-Time : Quantized Fields and Gravity* (Campridge University. Press, Campridge 2009).
- [62] A. Havare, T. Yetkin, M. Korunur and K. Sogut, *Nuclear Physics B* 682, 464 (2004).

- [63] E. Bresin and C. Itzykson, *Phys. Rev. D* **2** (1970) 1191.
- [64] Q. G. Lin, *J. Phys. G : Nucl. Part. Phys.* 25 (1999) 17
- [65] M. N. Hounkonnou and M. Naciri, *J. Phys. G : Nucl. Part.* 26 (2000) 1849
- [66] C. K. Dumlu and G.V. Dunne, *Phys. Rev. D* 83 (2011) 065028
- [67] S. I. Kruglov, *Annals Phys.* 293 (2001) 228
- [68] M. S. Marinov and V. S. Popov, *Sov. J. Nucl. Phys.* 15, 702 (1972).
- [69] S.P. Gavrilov, D.M. Gitman, *Phys.Rev. D* **53**, 7162 (1996)
- [70] S. P. Kim and D. N. Page, *Phys. Rev. D* 73, 065020 (2006)
- [71] E. S. Fradkin, D. M. Gitman and S.M Shvartsman, *Quantum Electrodynamics with Unstable Vacuum* ( Springer, Berlin, 1991).
- [72] I. L. Buchbinder and S. D Odintsov, *Sov. Phys. J.* 25, 385 (1982).
- [73] S. P. Kim, H. K. Lee and Y. Yoon, *Phys. Rev. D* 78, 105013 (2008).
- [74] M.B. Fröb et al., *Schwinger effect in de Sitter space*, *JCAP* 04, 009 (2014)
- [75] N. Tanji, *Annals Phys.* 324, 1691 (2009)
- [76] G. Schäfer and H. Dehnen, *J. Phys. A, Math. Gen.* 13, 517 (1980).
- [77] R-G. Cai and S. P. Kim, *JHEP* 09, 072 (2014).
- [78] T. Kaluza, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* K1, 966 (1921).
- [79] O. Klein, *Z. Phys.* 37, 895 (1926).
- [80] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G.R. Dvali, *Phys. Rev. D* 59, 086004 (1999).
- [81] L. Randall and R. Sundrum, *A Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension*, *Phys. Rev. Lett.* 83, 3370 (1999).
- [82] L. Randall and R. Sundrum, *An Alternative to Compactification*, *Phys. Rev. Lett.* 83, 4690 (1999).
- [83] J. M. Overduin, P. S. Wesson, *Physics Reports* 283, 303 (1997).
- [84] J. Garriga and E. Verdaguer, *Phys. Rev. D* **39** (1989) 1072.
- [85] S. Nojiri and S. D. Odintsov, *JCAP* **06** (2003) 004.
- [86] M. K. Mak and T. Harko, *Class. Quantum Grav.* **16** (1999) 4085.
- [87] W. H. Huang, *Phys. Lett. A* **140** (1989) 280.

- 
- [88] C. Bambi and F. R. Urban, *Phys. Rev. Lett.* **99** (2007) 191302.
- [89] S. Ghosh and J. Kar, *JCAP* **08** (2008) 1475
- [90] A. A. Saharian *Phys. Rev. D* **73** (2006) 44012.
- [91] E. R. Bezerra de Melloa and A.A. Saharian, *JHEP* **12** (2008) 081
- [92] A. A. Saharian, *Class. Quantum Grav.* **25** (2008) 165012
- [93] P. S. Wesson, *Mod. Phys. Lett. A* 7, 921 (1992).
- [94] P. S. Wesson, *Astrophys. J.* 394, 19 (1992).
- [95] P. S. Wesson, *Astrophys. J.* 436, 547 (1994).
- [96] P. S. Wesson and H. Liu, *Astrophys. J.* 440, 1(1995).
- [97] A. Billyard and P. S. Wesson, *Gen. Rel. Grav.* 28, 129 (1996).
- [98] P. S. Wesson and J. Ponce de Leon, *Astron. Astrophys.* 294, 1 (1995).
- [99] H. Liu and P. S. Wesson, *Int. J. Mod. Phys. D* 3, 627 (1994).
- [100] D. J. McManus, *J. Math. Phys.* 35, 4889 (1994).
- [101] A. A. Coley, *Astrophys. J.* 427, 585 (1994).
- [102] A. A. Grib and Yu. V. Pavlov, *Int. J. Mod. Phys. D* 11, 433 (2002); *Int. J. Mod. Phys. A* 17, 4435 (2002); *Grav. Cosmol.* 14, 1 (2008).

# Effect of electromagnetic fields on the creation of scalar particles in a flat Robertson–Walker space-time

S. Haouat<sup>a</sup>, R. Chekireb

LPTH, Department of Physics, University of Jijel, BP 98, Ouled Aissa, Jijel 18000, Algeria

Received: 28 February 2012 / Revised: 6 May 2012  
© Springer-Verlag / Società Italiana di Fisica 2012

**Abstract** The influence of electromagnetic fields on the creation of scalar particles from vacuum in a flat Robertson–Walker space-time is studied. The Klein–Gordon equation with varying electric field and constant magnetic one is solved. The Bogoliubov transformation method is applied to calculate the pair creation probability and the number density of created particles. It is shown that the electric field amplifies the creation of scalar particles while the magnetic field minimizes it.

## 1 Introduction

It is widely known that strong electric field creates particle–antiparticle pairs from the vacuum. This effect has many important applications in modern physics from heavy nucleus to black holes [1]. Several decades ago, Schwinger studied pair creation effects in the context of gauge invariance and vacuum polarization [2]. It has been shown that the vacuum to vacuum transition amplitude can be expressed through an intermediate effective action,

$$\mathcal{A}(\text{vac} - \text{vac}) = \exp(i S_{\text{eff}}), \quad (1)$$

and the pair creation probability can be extracted from the imaginary part of this action

$$\mathcal{P}_{\text{Creat.}} = 1 - |\mathcal{A}(\text{vac} - \text{vac})|^2 \simeq 2 \text{Im} S_{\text{eff}}. \quad (2)$$

The probability of pair creation from vacuum is calculated in the presence of some electromagnetic fields [3, 4] and it has been concluded that electric field produces scalar particles with probability

$$\mathcal{P}_{\text{Creat.}} = \frac{e^2 E^2}{8\pi^3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \exp\left(-n\pi \frac{m^2}{eE}\right) \quad (3)$$

while the magnetic field and the plane wave do not create pairs.

However, in spite of the fact that constant magnetic field does not produce particles, the probability given in (3) modifies to

$$\mathcal{P}_{\text{Creat.}} = \frac{e^2 E H}{8\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{csch}\left(n\pi \frac{H}{E}\right) \exp\left(-n\pi \frac{m^2}{eE}\right) \quad (4)$$

when a magnetic field is added to the electric one. Therefore a magnetic field influences significantly the creation of particles.

Particle–antiparticle pairs may be created also by gravitational fields. This phenomenon is a prediction of quantum field theory in curved space-time and its study requires a definition of a vacuum state for the quantum fields [5–10]. However, it is well-known that in arbitrary curved background, there is no absolute definition of the vacuum state and the concept of particles is not completely clear. From physical point of view this is because in quantum theory a particle cannot be localized to a region smaller than its de Broglie wavelength. When this wavelength is sufficiently large, the concept of particle becomes unclear. In expanding universe spontaneous creation of particles occurs because the vacuum state is unstable—e.g., the vacuum state defined in the remote past differs from the vacuum state in the remote future. The effect of particle creation has many applications in contemporary cosmology—e.g., it could have consequences for early universe cosmology and may play an important role in the exit from inflationary universe and in the cosmic evolution [11–17].

The purpose of this paper is to study the effect of electromagnetic fields on the creation of scalar particles from vacuum in a flat Robertson–Walker space-time with the use of canonical method based on Bogoliubov relation between “in” and “out” states. We know that electromagnetic fields

<sup>a</sup> e-mail: [s.haouat@gmail.com](mailto:s.haouat@gmail.com)



are abundant in the universe during the initial stages of its formation and certainly these fields have some influences on particle creation. In this context, electromagnetic fields influence the cosmic evolution directly via Friedman equations and by their effect on the creation of particles. Motivated by the fact that there is no electric field in the present stage of the universe, we consider in this work a varying electric field which vanishes at  $t \rightarrow \infty$ . The study of particle creation with stationary electric field is valid only when the creation of particles is significant for a short time interval. This is due to the fact that created particles has an inverse effect on the electric field [22]. We note that the creation of scalar particles in electromagnetic and gravitational fields is discussed in several situations [18–22].

The paper is organized as follows; At the beginning we introduce a scalar field propagating in Robertson–Walker space-time and we give a general method to study the creation of scalar particles in a such space-time. Next we consider a solvable example with a varying electric field and we give two sets of exact solutions for the Klein–Gordon equation. Then by the use of the relation between these two sets we determine the probability of pair creation, the number density of created particles and the vacuum persistence. For a particular case where the universe behaves like a radiation dominated one we calculate the total pair production probability from the vacuum to vacuum transition amplitude and we show how electric field amplifies particle creation. Finally we consider the combination of electric and magnetic fields.

## 2 General formalism for particle creation

In order to study the phenomenon of particle creation in gravitational fields we have at our disposal several methods such as the adiabatic method [23–25], the Hamiltonian diagonalization technique [26–29], the Green function approach [30, 31], the Feynman path integral technique [32, 33], the semiclassical WKB approximation [10, 34–37] as well as the method based on vacuum to vacuum transition amplitude and Schwinger-like effective action [38, 39] and the “in” and “out” states formalism [40–43] that we shall use in this paper.

To begin let us consider a scalar matter field  $\Phi$  with mass  $m$  and charge  $e$  subjected to a gravitational field described by the metric  $g_{\mu\nu}$  and an electromagnetic field described by the vector  $A_\mu$ . The dynamics of this system is in general governed by the following Klein–Gordon equation:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}(i\partial_\mu - eA_\mu)[g^{\mu\nu}\sqrt{-g}(i\partial_\nu - eA_\nu)\Phi] - (m^2 + \zeta_c R)\Phi = 0, \tag{5}$$

where  $R$  is the Ricci scalar and  $\zeta_c$  is a numerical parameter (in conformal coupling  $\zeta_c = \frac{1}{6}$ ).

We consider, in this work, a flat Robertson–Walker space-time provided with a metric of the form

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \tag{6}$$

This metric can be written as

$$ds^2 = C(\eta)[d\eta^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2], \tag{7}$$

where  $\eta$  is the conformal time  $\eta = \int dt/a(t)$  and  $C(\eta)$  is the new scale factor defined by  $C(\eta) = \tilde{a}^2(\eta) \equiv a^2[t(\eta)]$ .

We choose to work with conformal time  $\eta$  which is convenient to the present coupling and we consider the gauge  $A^\mu = (0, 0, 0, A_z(\eta))$ . If we introduce a new field  $\psi(x)$  so that

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{C(\eta)}}\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{C(\eta)}}\chi(\vec{x})\varphi(\eta), \tag{8}$$

where  $\chi(\vec{x})$  has, in the case of a flat space-time, the form of a plane wave  $\chi(\vec{x}) \sim \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r})$ , we can obtain the simplified equation

$$\left[ \frac{d^2}{d\eta^2} + \omega^2(\eta) \right] \varphi(\eta) = 0, \tag{9}$$

with

$$\omega^2(\eta) = [k_z - eA_z(\eta)]^2 + k_\perp^2 + m^2C(\eta). \tag{10}$$

We assume that the space-time is asymptotically Minkowskian and the potential  $A_z(\eta)$  is asymptotically constant when  $\eta \rightarrow \pm\infty$ . This choice is suitable for the problem of particles creation. Since  $\omega(\eta)$  in (10) satisfies the super-adiabatic condition,

$$\lim_{\eta \rightarrow \pm\infty} \frac{\dot{\omega}}{\omega^2} = 0 \tag{11}$$

there is two adiabatic vacuum states and, consequently, the particle production is well-defined.

In such a case the solutions of the Klein–Gordon equation have the following asymptotic behavior:

$$\varphi_{\text{in}}^\epsilon(\eta) = \exp(-i\epsilon\omega_{\text{in}}\eta), \tag{12}$$

$$\varphi_{\text{out}}^\epsilon(\eta) = \exp(-i\epsilon\omega_{\text{out}}\eta), \tag{13}$$

where  $\epsilon$  indicates the positive or the negative frequency mode ( $\epsilon = \pm 1$ ) and  $\omega_{\text{out}}$  and  $\omega_{\text{in}}$  are given by

$$\omega_{\text{out}}^{\text{in}} = \lim_{\eta \rightarrow \mp\infty} \omega(\eta). \tag{14}$$

Let us search for the “in” and “out” vacuum states. In the first stage we write the field operator in its Fourier decomposition

$$\hat{\psi}(\vec{x}, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int d^3k [\varphi_k^*(\eta) \chi_k(\vec{x}) \hat{a}_k + \varphi_k(\eta) \chi_k^*(\vec{x}) \hat{b}_k^\dagger], \tag{15}$$

where, in canonical quantization formalism, the operators  $\hat{a}_k$  and  $\hat{b}_k$  satisfy the following commutation relation:

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = [\hat{b}_k, \hat{b}_{k'}^\dagger] = \delta(\vec{k} - \vec{k}'). \tag{16}$$

With the help of the normalization condition

$$\varphi_k^* \dot{\varphi}_k - \varphi_k \dot{\varphi}_k^* = 2i, \tag{17}$$

we can find without difficulties the following expression of the Hamiltonian associated with the scalar field system:

$$H = \frac{1}{2} \int d^3k [E_k(\eta) (\hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger + \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k) + F_k^*(\eta) \hat{b}_k \hat{a}_k + F_k(\eta) \hat{a}_k^\dagger \hat{b}_k^\dagger], \tag{18}$$

where

$$E_k(\eta) = |\dot{\varphi}_k(\eta)|^2 + \omega_k^2(\eta) |\varphi_k(\eta)|^2, \tag{19}$$

$$F_k(\eta) = \dot{\varphi}_k^2(\eta) + \omega_k^2(\eta) \varphi_k^2(\eta). \tag{20}$$

Here we remark that  $H$  is not diagonal at any time. However, since the mode functions  $\varphi_k(\eta)$  have asymptotic behaviors (12) and (13) at  $\eta \rightarrow \mp\infty$ , we can see that  $F_k(\eta) = 0$  and  $H$  becomes diagonal at  $\eta \rightarrow \pm\infty$ . In this situation we can define two vacuum states  $|0_{in}\rangle$  and  $|0_{out}\rangle$ . The state  $|0_{in}\rangle$  is an initial quantum vacuum state in the remote past with respect to a static observer and  $|0_{out}\rangle$  is a final quantum vacuum state in the remote future with respect to the same observer. This gives some vacuum instability which leads to particle creation.

Since (9) is of second order there are only two independent solutions and all other solutions can be expressed in terms of these two independent ones. Here we want to find two sets of independent solutions so that the two functions  $\varphi_{in}^\pm$  of the first set behave like positive and negative energy states at  $\eta \rightarrow -\infty$  and the two functions  $\varphi_{out}^\pm$  of the second set behave like positive and negative energy states at  $\eta \rightarrow +\infty$ . The relation between these two sets or the so-called Bogoliubov transformation is

$$\varphi_{in}^+ = \alpha \varphi_{out}^+ + \beta \varphi_{out}^-, \tag{21}$$

$$\varphi_{in}^- = \beta^* \varphi_{out}^+ + \alpha^* \varphi_{out}^-, \tag{22}$$

where the Bogoliubov coefficients  $\alpha$  and  $\beta$  satisfy the condition  $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$ . The relation between the creation and

annihilation operators is then

$$a_{out} = \alpha a_{in} + \beta^* b_{in}^\dagger, \tag{23}$$

$$b_{out}^\dagger = \beta a_{in} + \alpha^* b_{in}^\dagger. \tag{24}$$

For the process of particle creation the probability amplitude that we want to calculate is defined by

$$\mathcal{A} = \langle 0_{out} | a_{out} b_{out} | 0_{in} \rangle. \tag{25}$$

Taking into account that

$$b_{out} = \frac{1}{\alpha^*} b_{in} + \frac{\beta^*}{\alpha^*} a_{out}^\dagger \tag{26}$$

we obtain

$$\mathcal{A} = \langle 0_{out} | a_{out} b_{out} | 0_{in} \rangle = \frac{\beta^*}{\alpha^*} \langle 0_{out} | 0_{in} \rangle. \tag{27}$$

The probability to create a pair of particles in state  $k$  from vacuum is then

$$\mathcal{P}_k = \left| \frac{\beta^*}{\alpha^*} \right|^2. \tag{28}$$

Let  $\mathcal{C}_k$  to be the probability to have no pair creation in the state  $k$ . The quantity  $\mathcal{C}_k (\mathcal{P}_k)^n$  is then the probability to have only  $n$  pairs in the state  $k$ . We have

$$\mathcal{C}_k + \mathcal{C}_k \mathcal{P}_k + \mathcal{C}_k (\mathcal{P}_k)^2 + \mathcal{C}_k (\mathcal{P}_k)^3 + \dots = 1 \tag{29}$$

or simply

$$\mathcal{C}_k = 1 - \mathcal{P}_k. \tag{30}$$

Being aware of  $|\frac{\beta^*}{\alpha^*}|^2 + |\frac{1}{\alpha^*}|^2 = 1$ , we can find the vacuum persistence which reads

$$\mathcal{C}_k = \left| \frac{1}{\alpha^*} \right|^2. \tag{31}$$

Another important result is the number density of created particles

$$n(k) = \langle 0_{in} | a_{out}^+ a_{out} | 0_{in} \rangle = |\beta|^2. \tag{32}$$

The general technique for investigating the process of particle creation being demonstrated, let us give an explicit example where the Klein–Gordon equation admits exact and analytic solutions.

### 3 Solvable model with varying electric field

Particle creation in Robertson–Walker space-time has been much discussed and the pair creation probability and the number density of created particles have been derived for

several forms of the scale factor describing different stages of the evolution of the universe. For the present work we choose for the scale factor the form

$$C(\eta) = a + b \tanh(\lambda\eta) + c \tanh^2(\lambda\eta), \tag{33}$$

where  $a, b$  and  $c$  are positive parameters. We can see that this form is the generalization of various particular cases found in literature. When  $c = 0$ , we have a cosmological model with  $C(\eta) = a + b \tanh(\lambda\eta)$  which has been widely studied [44–46]. With a particular choice of parameters  $a, b$  and  $c$  we get some models discussed in [47, 48]. In addition, this universe becomes a radiation dominated one when  $a = b = 0, c = \frac{a_0^4}{4\lambda^2}$  and  $\lambda \rightarrow 0$ . We can also make connection with a Milne universe (i.e.  $a(t) = a_1 t$ .) when  $c = 0, \lambda = a_1, b = a = \frac{a_1^2}{2\varepsilon}$  by making the change  $\eta \rightarrow \eta + \frac{\ln \varepsilon}{2\lambda}$  and taking the limit  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

We choose for the varying electric field the gauge

$$A_\mu = \frac{E_0}{\lambda} \tanh \lambda \eta \delta_{\mu 3}, \tag{34}$$

which describes the following electric field:

$$\vec{E} = \frac{1}{C(\eta)} \frac{E_0}{\cosh^2 \lambda \eta} \vec{u}_z. \tag{35}$$

This field becomes the so-called Sauter field in the case of Minkowski space-time (i.e.  $C(\eta) = 1$  and  $\eta = t$ ) [49].

In such a case  $\omega_{\text{out}}$  and  $\omega_{\text{in}}$  are given by

$$\omega_{\text{in}} = \sqrt{k^2 + m^2(a + \bar{c} - \bar{b})}, \tag{36}$$

$$\omega_{\text{out}} = \sqrt{k^2 + m^2(a + \bar{c} + \bar{b})} \tag{37}$$

and the simplified Klein–Gordon equation becomes

$$\left( \frac{d^2}{d\eta^2} + k^2 + m^2(a + \bar{b} \tanh \lambda \eta + \bar{c} \tanh^2 \lambda \eta) \right) \varphi = 0 \tag{38}$$

with

$$\bar{b} = b - \frac{2ek_z E_0}{\lambda m^2}, \tag{39}$$

$$\bar{c} = c + \left( \frac{eE_0}{\lambda m} \right)^2.$$

Now in order to solve (38) we make the change  $\eta \rightarrow \xi$ , where

$$\xi = \frac{1 + \tanh(\lambda\eta)}{2}. \tag{40}$$

The resulting equation, which takes the form

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \left( \frac{1}{\xi} - \frac{1}{1-\xi} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} + \left( \frac{\omega_{\text{in}}^2}{4\lambda^2} \frac{1}{\xi} - \frac{m^2 c}{\lambda^2} \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\omega_{\text{out}}^2}{4\lambda^2} \frac{1}{(1-\xi)} \right) \frac{1}{\xi(1-\xi)} \right] \tilde{\varphi}(\xi) = 0, \tag{41}$$

is a Riemann type equation [50]

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \left( \frac{1 - \alpha_1 - \alpha'_1}{\xi} - \frac{1 - \alpha_3 - \alpha'_3}{1 - \xi} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} + \left( \frac{\alpha_1 \alpha'_1}{\xi} - \alpha_2 \alpha'_2 + \frac{\alpha_3 \alpha'_3}{1 - \xi} \right) \frac{1}{\xi(1 - \xi)} \right] \tilde{\varphi}(\xi) = 0, \tag{42}$$

where

$$\alpha_1 = -\alpha'_1 = i \frac{\omega_{\text{in}}}{2\lambda}, \tag{43}$$

$$\alpha_3 = -\alpha'_3 = i \frac{\omega_{\text{in}}}{2\lambda},$$

$$\alpha_2 = 1 - \alpha'_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{m^2 \bar{c}}{\lambda^2} - \frac{1}{4}},$$

with the condition  $\alpha_1 + \alpha'_1 + \alpha_2 + \alpha'_2 + \alpha_3 + \alpha'_3 = 1$ .

Following [50] we can find for (42) several sets of solutions that can be written in terms of hypergeometric functions. Taking into account the behavior of positive and negative energy states we can classify our two sets as follows; for the “in” states we have

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{\text{in}}^+(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\text{in}}}} \xi^{-i \frac{\omega_{\text{in}}}{2\lambda}} (1 - \xi)^{i \frac{\omega_{\text{out}}}{2\lambda}} \\ &\times F\left(\frac{1}{2} + i \frac{\omega_-}{\lambda} + i\delta, \frac{1}{2} + i \frac{\omega_-}{\lambda} - i\delta; 1 - i \frac{\omega_{\text{in}}}{\lambda}; \xi\right) \end{aligned} \tag{44}$$

and

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{\text{in}}^-(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\text{in}}}} \xi^{i \frac{\omega_{\text{in}}}{2\lambda}} (1 - \xi)^{-i \frac{\omega_{\text{out}}}{2\lambda}} \\ &\times F\left(\frac{1}{2} - i \frac{\omega_-}{\lambda} + i\delta, \frac{1}{2} - i \frac{\omega_-}{\lambda} - i\delta; 1 + i \frac{\omega_{\text{in}}}{\lambda}; \xi\right), \end{aligned} \tag{45}$$

with

$$\omega_{\pm} = \frac{\omega_{\text{out}} \pm \omega_{\text{in}}}{2} \tag{46}$$

and

$$\delta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4m^2 \bar{c}}{\lambda^2} - 1}. \tag{47}$$

The factors  $(2\omega_{\text{in}})^{-1/2}$  and  $(2\omega_{\text{out}})^{-1/2}$  are determined by the use of the normalization condition (17) which explains the conservation of the Klein–Gordon particle current.

For the “out” states we have

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{\text{out}}^+(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\text{out}}}} \xi^{-i\frac{\omega_{\text{in}}}{2\lambda}} (1-\xi)^{i\frac{\omega_{\text{out}}}{2\lambda}} \\ &\times F\left(\frac{1}{2} + i\frac{\omega_-}{\lambda} + i\delta, \frac{1}{2} + i\frac{\omega_-}{\lambda} - i\delta; \right. \\ &\quad \left. 1 + i\frac{\omega_{\text{out}}}{\lambda}; 1 - \xi\right) \end{aligned} \tag{48}$$

and

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{\text{out}}^-(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\text{out}}}} \xi^{i\frac{\omega_{\text{in}}}{2\lambda}} (1-\xi)^{-i\frac{\omega_{\text{out}}}{2\lambda}} \\ &\times F\left(\frac{1}{2} - i\frac{\omega_-}{\lambda} + i\delta, \frac{1}{2} - i\frac{\omega_-}{\lambda} - i\delta; \right. \\ &\quad \left. 1 - i\frac{\omega_{\text{out}}}{\lambda}; 1 - \xi\right). \end{aligned} \tag{49}$$

Let us, now use the relation between “in” and “out” solutions to determine the probability of pair creation and the number density of created particles. By the use of the relation between hypergeometric functions [50]

$$\begin{aligned} F(u, v; w; \xi) &= \frac{\Gamma(w)\Gamma(w-v-u)}{\Gamma(w-u)\Gamma(w-v)} F(u, v; u+v-w+1; 1-\xi) \\ &+ (1-\xi)^{w-u-v} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(u+v-w)}{\Gamma(u)\Gamma(v)} \\ &\times F(w-u, w-v; w-v-u+1; 1-\xi) \end{aligned} \tag{50}$$

and the property

$$F(u, v; w; \xi) = (1-\xi)^{w-u-v} F(w-u, w-v; w; \xi), \tag{51}$$

we obtain

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega_{\text{out}}}{\omega_{\text{in}}}} \frac{\Gamma(1-i\frac{\omega_{\text{in}}}{\lambda})\Gamma(-i\frac{\omega_{\text{out}}}{\lambda})}{\Gamma(\frac{1}{2}-i\frac{\omega_+}{\lambda}-i\delta)\Gamma(\frac{1}{2}-i\frac{\omega_+}{\lambda}+i\delta)} \tag{52}$$

and

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega_{\text{out}}}{\omega_{\text{in}}}} \frac{\Gamma(1-i\frac{\omega_{\text{in}}}{\lambda})\Gamma(i\frac{\omega_{\text{out}}}{\lambda})}{\Gamma(\frac{1}{2}+i\frac{\omega_-}{\lambda}-i\delta)\Gamma(\frac{1}{2}+i\frac{\omega_-}{\lambda}+i\delta)}. \tag{53}$$

The probability to create one pair of particles from vacuum is then

$$\mathcal{P}_k = \left| \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-i\frac{\omega_+}{\lambda}-i\delta)\Gamma(\frac{1}{2}-i\frac{\omega_+}{\lambda}+i\delta)}{\Gamma(\frac{1}{2}+i\frac{\omega_-}{\lambda}-i\delta)\Gamma(\frac{1}{2}+i\frac{\omega_-}{\lambda}+i\delta)} \right|^2. \tag{54}$$

Using the following properties of the Gamma functions [50]:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \tag{55}$$

$$|\Gamma(ix)|^2 = \frac{\pi}{x \sinh \pi x} \tag{56}$$

and

$$\left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + ix\right) \right|^2 = \frac{\pi}{\cosh \pi x} \tag{57}$$

we arrive at

$$\mathcal{P}_k = \frac{\cosh(2\pi\frac{\omega_-}{\lambda}) + \cosh(\pi\sqrt{\frac{4m^2\bar{c}}{\lambda^2} - 1})}{\cosh(2\pi\frac{\omega_+}{\lambda}) + \cosh(\pi\sqrt{\frac{4m^2\bar{c}}{\lambda^2} - 1})}. \tag{58}$$

For the vacuum persistence we obtain

$$\mathcal{C}_k = \frac{\cosh(2\pi\frac{\omega_+}{\lambda}) - \cosh(2\pi\frac{\omega_-}{\lambda})}{\cosh(2\pi\frac{\omega_+}{\lambda}) + \cosh(\pi\sqrt{\frac{4m^2\bar{c}}{\lambda^2} - 1})}. \tag{59}$$

A simple calculation gives for the number density of created particles

$$n(k) = \frac{\cosh(2\pi\frac{\omega_-}{\lambda}) + \cosh(\pi\sqrt{\frac{4m^2\bar{c}}{\lambda^2} - 1})}{\cosh(2\pi\frac{\omega_+}{\lambda}) - \cosh(2\pi\frac{\omega_-}{\lambda})}. \tag{60}$$

Here we note that the number density of created particles can be written as

$$n(k) = \frac{1}{|\frac{\alpha}{\beta}|^2 - 1}, \tag{61}$$

and for large frequencies  $n(k)$  becomes

$$n(k) = \frac{1}{\exp(\frac{2\pi}{\lambda}\omega_{\text{in}}) - 1} \tag{62}$$

which is a thermal Bose–Einstein distribution.

Let us note that when  $b = c = 0$  and  $a = 1$  and by taking the limit  $\lambda \rightarrow 0$ , we obtain the well-known result associated with the constant electric field in Minkowski space-time

$$\mathcal{P}_k = \frac{\exp(-\pi\frac{k_{\perp}^2+m^2}{eE_0})}{1 + \exp(-\pi\frac{k_{\perp}^2+m^2}{eE_0})}, \tag{63}$$

with  $k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2$ .

#### 4 Particular case

Now we consider a cosmological model with a scale factor of the form

$$C(\eta) = a + \frac{a_0^4}{4}\eta^2 \tag{64}$$

which describes a radiation dominated like universe  $a(t) \sim a_0 \sqrt{t}$ . It is obvious that this situation can be obtained by considering the particular case when  $b = 0$ ,  $c = \frac{a_0^4}{4\lambda^2}$  and by taking the limit  $\lambda \rightarrow 0$ . Here the role of the parameter  $a$  is to check the correctness of our results by making comparison to the case of Minkowski space-time when  $a = 1$  and  $a_0 = 0$ . To consider the particle creation in pure radiation dominated universe we have to put  $a = 0$ .

It is easy to show that when the scale factor is given by (64), the probability  $\mathcal{P}_k$  can be written in the form

$$\mathcal{P}_k = \frac{\sigma}{1 + \sigma}, \tag{65}$$

where

$$\sigma = \exp \left[ -2\pi \left( \frac{k_{\perp}^2 + am^2}{\sqrt{m^2 a_0^4 + 4e^2 E_0^2}} + \frac{m^2 a_0^4 k_z^2}{(m^2 a_0^4 + 4e^2 E_0^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \right]. \tag{66}$$

The vacuum to vacuum transition probability is then

$$\exp(-2 \text{Im } S_{\text{eff}}) = \prod_k \mathcal{C}_k = \prod_k \exp[-\ln(1 + \sigma)] \tag{67}$$

and consequently

$$2 \text{Im } S_{\text{eff}} = \sum_k \ln(1 + \sigma). \tag{68}$$

Expanding the quantity  $\ln(1 + \sigma)$  and replacing the summation over  $k$  by  $\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}$ , we get

$$\begin{aligned} 2 \text{Im } S_{\text{eff}} &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \exp \left[ -2n\pi \left( \frac{k_{\perp}^2 + am^2}{\sqrt{m^2 a_0^4 + 4e^2 E_0^2}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{m^2 a_0^4 k_z^2}{(m^2 a_0^4 + 4e^2 E_0^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \right]. \end{aligned} \tag{69}$$

By doing the integration over  $k_x$  and  $k_y$  we obtain

$$\begin{aligned} 2 \text{Im } S_{\text{eff}} &= \frac{\sqrt{m^2 a_0^4 + 4e^2 E_0^2}}{2(2\pi)^3} \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \\ &\quad \times \exp \left[ -2n\pi \left( \frac{am^2}{\sqrt{m^2 a_0^4 + 4e^2 E_0^2}} \right) \right] \\ &\quad \times \int dk_z \exp \left[ -2n\pi \left( \frac{m^2 a_0^4}{(m^2 a_0^4 + 4e^2 E_0^2)^{\frac{3}{2}}} \right) k_z^2 \right]. \end{aligned} \tag{70}$$

For the integration over  $k_z$  we can use the following property:

$$dk_z = \frac{m^2 a_0^4 + 4e^2 E_0^2}{4e E_0} d\eta \tag{71}$$

to write  $2 \text{Im } S_{\text{eff}}$  in the form

$$2 \text{Im } S_{\text{eff}} = \int d\eta \Gamma(\eta) \tag{72}$$

where the particle creation probability per unit of time  $\Gamma(\eta)$  is given by

$$\begin{aligned} \Gamma(\eta) &= \frac{(2e\mathcal{E})^3}{8(2\pi)^3 e E_0} \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \exp \left[ -n\pi \left( \frac{am^2}{e\mathcal{E}} \right) \right] \\ &\quad \times \exp \left[ -2n\pi \left( \frac{m^2 a_0^4}{16e^2 E_0^2} 2e\mathcal{E} \right) \eta^2 \right], \end{aligned} \tag{73}$$

with

$$4e^2 \mathcal{E}^2 = m^2 a_0^4 + 4e^2 E_0^2. \tag{74}$$

Here we note that we obtain the Schwinger result by setting  $a = 1$  and  $a_0 = 0$ .

For  $a_0 \neq 0$ , by doing integration over conformal time  $\eta$ , we get a Schwinger-like series

$$2 \text{Im } S_{\text{eff}} = \frac{1}{4\pi^3} \frac{(e\mathcal{E})^{\frac{5}{2}}}{ma_0^2} \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\frac{5}{2}}} \exp \left[ -n\pi \frac{m^2 a}{e\mathcal{E}} \right]. \tag{75}$$

Now if we consider a pure radiation dominated universe (i.e.  $a = 0$ ) we can see that the electric field amplifies the gravitational particle creation by the following factor:

$$\gamma = \frac{2 \text{Im } S_{\text{eff}}}{2 \text{Im } S_{\text{eff}}(E_0 = 0)} = \left( 1 + 4 \frac{e^2 E_0^2}{m^2 a_0^4} \right)^{\frac{5}{4}} \tag{76}$$

which is, for a strong field, of order  $(eE_0/ma_0^2)^{\frac{5}{2}}$ .

For the number density of created particles we have

$$\begin{aligned} n(k) &= \exp \left[ -2\pi \left( \frac{k_{\perp}^2}{\sqrt{m^2 a_0^4 + 4e^2 E_0^2}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{m^2 a_0^4 k_z^2}{(m^2 a_0^4 + 4e^2 E_0^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \right]. \end{aligned} \tag{77}$$

The total number of created particles can be written then in the form

$$\begin{aligned} N_T &= \frac{(m^2 a_0^4 + 4e^2 E_0^2)^{\frac{3}{2}}}{8(2\pi)^3 e E_0} \int d\eta \\ &\quad \times \exp \left[ -\pi \left( \frac{m^2 a_0^4}{8e^2 E_0^2} \sqrt{m^2 a_0^4 + 4e^2 E_0^2} \right) \eta^2 \right]. \end{aligned} \tag{78}$$

Consequently we have

$$\begin{aligned} \frac{dN}{d\eta} &= n(\eta) \\ &= \frac{(m^2 a_0^4 + 4e^2 E_0^2)^{\frac{3}{2}}}{8(2\pi)^3 e E_0} \\ &\quad \times \exp\left[-\pi \left(\frac{m^2 a_0^4}{8e^2 E_0^2} \sqrt{m^2 a_0^4 + 4e^2 E_0^2}\right) \eta^2\right]. \end{aligned} \tag{79}$$

By doing the integration over  $\eta$  we get

$$N_T = \frac{(m^2 a_0^4 + 4e^2 E_0^2)^{\frac{5}{4}}}{\sqrt{8}(2\pi)^3 m a_0^2}. \tag{80}$$

We see that the factor  $\gamma$  can be obtained also from  $N_T$

$$\frac{N_T}{N_T(E_0 = 0)} = \gamma. \tag{81}$$

This effect seems to be important for light particles. However, this is not true. Since  $n(\eta)$  in (79) is Gaussian with respect to  $\eta$  we find that particle creation is significant in the time interval

$$\Delta\eta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{4eE_0}{m a_0^2} (m^2 a_0^4 + 4e^2 E_0^2)^{-\frac{1}{4}}. \tag{82}$$

In radiation dominated universe, electromagnetic backgrounds can be considered quasi-stationary only for short time  $\Delta\eta \ll 1$ . This gives

$$m a_0^2 \gg \sqrt{eE_0}. \tag{83}$$

The effect of electric field is then more important when the mass of created particles verifies the condition  $\sqrt{eE_0} \ll m a_0^2 \ll eE_0$ . Thus, electric field predominantly produces heavy particles. Furthermore, it is possible to create super-heavy particles with the mass of the Grand Unification scale in the early universe by strong electric field. This may have many important cosmological consequences. For light particles the effect of the electric field on particle creation is negligible although the factor  $\gamma$  becomes large when  $m$  is small. This is explained by the fact that, when  $m$  decreases,  $N_T(E_0 = 0)$  decreases so that  $N_T = \gamma N_T(E_0 = 0)$  remains negligible.

### 5 Effect of magnetic field

Having studied the phenomenon of particle creation in the presence of an electric field, let us now consider the superposition of an electric field and a magnetic one to investigate

the influence of the magnetic fields on the creation of scalar particles. For this aim we choose the gauge

$$A_\mu = \frac{E_0}{\lambda} \tanh(\lambda\eta) \delta_{\mu 3} - Hx \delta_{\mu 2} \tag{84}$$

which leads to the following Klein–Gordon equation:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left( i \frac{\partial}{\partial y} + eHx \right)^2 + \left( i \frac{\partial}{\partial z} - \frac{eE_0}{\lambda} \tanh \lambda\eta \right)^2 \right. \\ \left. + m^2 C(\eta) \right] \psi(\eta, \vec{x}) = 0. \end{aligned} \tag{85}$$

To solve this equation we decompose  $\psi(\eta, \vec{x})$  as

$$\psi(\eta, \vec{x}) = \varphi(\eta) g(x) \exp(-ik_y y - ik_z z), \tag{86}$$

where the functions  $\varphi(\eta)$  and  $g(x)$  obey respectively

$$\left[ \frac{d^2}{d\eta^2} + \left( k_z - \frac{eE_0}{\lambda} \tanh \lambda\eta \right)^2 + m^2 C(\eta) + \kappa \right] \varphi(\eta) = 0 \tag{87}$$

and

$$\left[ -\frac{d^2}{dx^2} + (k_y + eHx)^2 \right] g(x) = \kappa g(x), \tag{88}$$

where  $\kappa$  is a constant resulting from the separation of variables. It is clear that by making the change  $x \rightarrow x - \frac{k_y}{eH}$ , (88) becomes similar to the wave equation associated with the harmonic oscillator, where the solution is given by

$$\begin{aligned} g(x) &= \left( \frac{1}{2^l l! \sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{eH}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[ -\frac{eH}{2} \left( x + \frac{k_y}{eH} \right)^2 \right] \\ &\quad \times \mathcal{H}_l \left[ \sqrt{eH} \left( x + \frac{k_y}{eH} \right) \right] \end{aligned} \tag{89}$$

and

$$\kappa = eH(2l + 1). \tag{90}$$

Here,  $l$  is an integer and  $\mathcal{H}_l(x)$  is the Hermite polynomial. For the function  $\varphi(\eta)$  we have

$$\left[ \frac{d^2}{d\eta^2} + k_z^2 + m^2 (a' + \bar{b} \tanh \lambda\eta + \bar{c} \tanh^2 \lambda\eta) \right] \varphi(\eta) = 0, \tag{91}$$

where

$$a' = a + \frac{eH}{m^2} (2l + 1). \tag{92}$$

The latter equation is similar to (38) with the change  $a \rightarrow a'$ . Then with the same steps as in Sect. 3 we can obtain the

following results:

$$\mathcal{P}_{k,l} = \frac{\cosh(2\pi \frac{\omega'_-}{\lambda}) + \cosh(2\pi \delta)}{\cosh(2\pi \frac{\omega'_+}{\lambda}) + \cosh(2\pi \delta)}, \tag{93}$$

where

$$\omega'_{in} = \sqrt{k_z^2 + m^2(a' + \bar{c} - \bar{b})}, \tag{94}$$

$$\omega'_{out} = \sqrt{k_z^2 + m^2(a' + \bar{c} + \bar{b})}. \tag{95}$$

Let us remark here that when  $a = 1, b = c = 0$  and  $\lambda \rightarrow 0$  we obtain the probability of pair creation in Minkowski space-time with electric and magnetic fields

$$\mathcal{P}_{k,l} = \frac{\exp(-\pi \frac{m^2 + eH(2l+1)}{eE_0})}{1 + \exp(-\pi \frac{m^2 + eH(2l+1)}{eE_0})}. \tag{96}$$

Like in the previous section when  $b = 0, c = \frac{c_0}{\lambda^2}$  and  $\lambda \rightarrow 0$  we get easily

$$2 \text{Im } S_{\text{eff}} = \int \frac{dk_y dk_z}{(2\pi)^2} \sum_l \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \times \exp\left[-n\pi \left(\frac{eH(2l+1) + am^2}{e\mathcal{E}} + \frac{m^2 a_0^4 k_z^2}{4(e\mathcal{E})^3}\right)\right]. \tag{97}$$

Taking into account that

$$dk_y = eH dx \tag{98}$$

we can write  $2 \text{Im } S_{\text{eff}}$  as follows:

$$2 \text{Im } S_{\text{eff}} = \int dx d\eta \Gamma(x, \eta), \tag{99}$$

where  $\Gamma(x, \eta)$  is the pair creation probability per unit of time per unit of volume. It is given by

$$\Gamma(x, \eta) = \frac{eH}{(2\pi)^2} \frac{e^2 \mathcal{E}^2}{eE_0} \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \times \sum_l \exp\left[-n\pi \frac{H}{\mathcal{E}}(2l+1)\right] \times \exp\left[-n\pi \left(\frac{am^2}{e\mathcal{E}} + \frac{m^2 a_0^4 e\mathcal{E}}{4e^2 E_0^2} \eta^2\right)\right]. \tag{100}$$

Note here that  $\Gamma(x, \eta)$  does not depend on  $x$  because de universe is homogeneous and the magnetic field too.

By summing over  $l$

$$\sum_{l=0} \exp\left[-n\pi \frac{H}{\mathcal{E}}(2l+1)\right] = \frac{1}{2 \sinh(n\pi \frac{H}{\mathcal{E}})} \tag{101}$$

we get the Schwinger-like series

$$\Gamma(\eta) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{(e\mathcal{E})^3}{eE_0} \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} F_n(H) \times \exp\left[-n\pi \left(\frac{am^2}{e\mathcal{E}} + \frac{m^2 a_0^4 e\mathcal{E}}{4e^2 E_0^2} \eta^2\right)\right], \tag{102}$$

where the factor  $F_n(H)$  that describes the effect of the magnetic field is given by

$$F_n(H) = \frac{n\pi \frac{H}{\mathcal{E}}}{\sinh(n\pi \frac{H}{\mathcal{E}})}. \tag{103}$$

We remark that  $0 < F_n(H) \leq 1$ . This means that the magnetic field minimizes the creation of scalar particles.

For the number density we obtain

$$N_T(H, E_0) = \int d\eta \frac{\pi \frac{H}{\mathcal{E}}}{\sinh(\pi \frac{H}{\mathcal{E}})} \frac{4e^2 \mathcal{E}^3}{4(2\pi)^3 eE_0} \times \exp\left[-\pi \left(\frac{am^2}{e\mathcal{E}} + \frac{m^2 a_0^4 e\mathcal{E}}{4e^2 E_0^2} \eta^2\right)\right]. \tag{104}$$

In the radiation era (i.e.  $a = 0$ ), we have

$$n(\eta) = \frac{\pi \frac{H}{\mathcal{E}}}{\sinh(\pi \frac{H}{\mathcal{E}})} \frac{4e^2 \mathcal{E}^3}{4(2\pi)^3 eE_0} \exp\left[-\pi \frac{m^2 e\mathcal{E}}{e^2 E_0^2} C(\eta)\right]. \tag{105}$$

This result is in complete agreement with (5.8) in [20].

Now by doing integration over  $\eta$  we obtain the expression

$$N_T = \left(1 + \frac{4e^2 E_0^2}{m^2 a_0^4}\right)^{\frac{5}{4}} \frac{\pi \frac{H}{\mathcal{E}}}{\sinh(\pi \frac{H}{\mathcal{E}})} \frac{(ma_0^2)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2}(2\pi)^3}, \tag{106}$$

which reduces in the case of a pure magnetic field to

$$N_T(H, E_0 = 0) = \frac{\sqrt{ma_0^2}}{8\sqrt{2}\pi^2} \frac{eH}{\sinh(2\pi \frac{eH}{ma_0^2})}. \tag{107}$$

Thus the magnetic field minimizes the gravitational particle creation by the factor

$$\gamma' = \frac{2\pi \frac{eH}{ma_0^2}}{\sinh(2\pi \frac{eH}{ma_0^2})} < 1. \tag{108}$$

In the presence of both fields the amplification factor will be given by

$$\gamma'' = \frac{\pi Y(1 + X^2)^{\frac{3}{4}}}{\sinh(\pi \frac{Y}{\sqrt{1+X^2}})}, \tag{109}$$

where  $X = \frac{2eE_0}{ma_0^2}$  and  $Y = \frac{2eH}{ma_0^2}$ . In this case  $\gamma''$  may be less than 1. This depends on the values of  $E_0$  and  $H$ . When

$H \sim E_0 \gg ma_0^2$ , we can see that  $\gamma'' \gg 1$  and the creation of super-heavy particles increases.

In addition, it is well-known that pure gravitational fields do not create massless particles with conformal coupling. Unlike results of reference [21] this remains true even if electromagnetic fields are present. In effect from (106) and (83) we can see that  $N_T = 0$  when  $m = 0$ .

## 6 Conclusion

In this paper we have studied the effect of electromagnetic fields on the creation of scalar particles in a Robertson–Walker space-time by considering the canonical method based on Bogoliubov transformation. We have given two sets of exact solutions for the Klein–Gordon field equation with varying electric field and we have used these solutions to calculate the probability of pair creation and the number density of created particles.

Then we have discussed a particular cosmological model that behaves like radiation dominated universe where we have calculated the vacuum to vacuum transition probability and we have extracted the nonvanishing imaginary term of the effective action that means that created particles are real and not virtual ones. We have considered also the combination of varying electric field and constant homogeneous magnetic field.

The essential result is that strong electric field amplifies gravitational particle creation by a factor of order  $(eE_0/ma_0^2)^{\frac{5}{2}}$ . This conclusion is in agreement with the result of [22]. We have shown also that the magnetic field minimizes the particle creation like in case of Minkowski space-time with pure electromagnetic fields. Then the effect of electric field is more important than the magnetic field one vis-à-vis the process of cosmological scalar particle creation.

It is obvious that the inclusion of magnetic field may be done by making the change  $k_{\perp}^2 \rightarrow (2n + 1)eH$ . This explains why the magnetic field minimizes the particles creation—e.g., since particles prefer to be created in lower energy state [4] and the minimum of  $k_{\perp}^2$  is 0 while the minimum of  $(2n + 1)eH$  is  $eH$ .

In addition, the creation of massless particles with conformal coupling is impossible even if electromagnetic fields are present.

**Acknowledgements** The authors wish to thank the referees for their precious comments which greatly improved the paper. The work of S. Haouat is partially supported by Algerian Ministry of High Education and Scientific Research and ANDRU under the PNR project: COSMOGR (code: 8/u18/976, contract n° 28/04).

## References

- R. Ruffini, G. Vereshchagin, S.-S. Xue, Phys. Rep. **487** (2010)
- J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951)
- E. Bresin, C. Itzykson, Phys. Rev. D **2**, 1191 (1970)
- E.S. Fradkin, D.M. Gitman, S.M. Shvartsman, *Quantum Electrodynamics with Unstable Vacuum* (Springer, Berlin, 1991)
- N.D. Birrell, P.C.W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge University Press, Cambridge, 1982)
- S.A. Fulling, *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985)
- V.F. Mukhanov, S. Winitzki, *Introduction to Quantum Effects in Gravity* (Cambridge University Press, Cambridge, 2007)
- A.A. Grib, S.G. Mamayev, V.M. Mostepanenko, *Vacuum Quantum Effects in Strong Fields* (Friedmann Lab. Publ., St. Petersburg, 1994)
- L. Parker, D.J. Toms, *Quantum Field Theory in Curved Space-Time: Quantized Fields and Gravity* (Cambridge University Press, Cambridge, 2009)
- S. Winitzki, Phys. Rev. D **72**, 104011 (2005)
- S. Debnath, A.K. Sanyal, Class. Quantum Gravity **28**, 145015 (2011)
- J.A.S. Lima, F.E. Silva, R.C. Santos, Class. Quantum Gravity **25**, 205006 (2008)
- V. Sahni, S. Habib, Phys. Rev. Lett. **81**, 1766 (1998)
- L. Kofman, *Preheating After Inflation*. Lect. Notes Phys., vol. 738 (Springer, Berlin, 2008), p. 55
- J. Martin, *Inflationary Perturbations: The Cosmological Schwinger Effect*. Lect. Notes Phys., vol. 738 (Springer, Berlin, 2008), p. 193
- I. Antoniadis, P.O. Mazur, E. Mottola, New J. Phys. **9**, 11 (2007)
- J. Chen, P. Wu, H. Yu, Z. Li, Eur. Phys. J. C **72**, 1861 (2012)
- V.M. Villalba, Phys. Rev. D **60**, 127501 (1999)
- S. Haouat, R. Chekireb, Int. J. Theor. Phys. **51**, 1704 (2012)
- G. Schäfer, H. Dehnen, J. Phys. A, Math. Gen. **13**, 517 (1980)
- S. Moradi, Mod. Phys. Lett. A **24**, 1129 (2009)
- I.L. Buchbinder, S.D. Odintsov, Sov. Phys. J. **25**, 385 (1982)
- L. Parker, Phys. Rev. Lett. **21**, 562 (1968)
- L. Parker, Phys. Rev. D **183**, 1057 (1969)
- L. Parker, Phys. Rev. D **3**, 346 (1971)
- A.A. Grip, S.G. Mamayev, V.M. Mostepanenko, Gen. Relativ. Gravit. **7**, 535 (1976)
- A.A. Grip, S.G. Mamayev, V.M. Mostepanenko, J. Phys. A, Math. Gen. **13**, 2057 (1980)
- J. Haro, E. Elizald, J. Phys. A, Math. Theor. **41**, 372003 (2008)
- J. Haro, J. Phys. A: Math. Theor. **44** (2011)
- S. Gavrilov, D.M. Gitman, S.D. Odintsov, Int. J. Mod. Phys. A **12**, 4837 (1997)
- I.L. Buchbinder, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Fiz. **7**, 3 (1980)
- I.H. Duru, N. Ünal, Phys. Rev. D **34**, 966 (1986)
- D.M. Chitre, J.B. Hartle, Phys. Rev. D **16**, 251 (1977)
- S. Biswas, J. Guha, N.G. Sarkar, Class. Quantum Gravity **12**, 1591 (1995)
- J. Guha, D. Biswas, N.G. Sarkar, S. Biswas, Class. Quantum Gravity **12**, 1641 (1995)
- S. Biswas, A. Shaw, P. Misra, Gen. Relativ. Gravit. **34**, 665 (2002)
- S. Biswas, I. Chowdhury, Int. J. Mod. Phys. D **15**, 937 (2006)
- E. Akhmedov, Mod. Phys. Lett. A **25**, 2815 (2010)
- S.P. Kim, arXiv:1008.0577v1 [hep-th]
- J. Garriga, Phys. Rev. D **49**, 6343 (1994)
- V.M. Villalba, W. Greiner, Phys. Rev. D **65**, 025007 (2001)
- V.M. Villalba, Prog. Theor. Phys. **90**, 851 (1993)
- S. Haouat, R. Chekireb, Mod. Phys. Lett. A **26**, 2653 (2011)
- C. Bernard, A. Duncun, Ann. Phys. **107**, 201 (1977)
- M.R. Setare, Int. J. Theor. Phys. **43**, 2237 (2004)
- F. Pascoal, C. Farina, Int. J. Theor. Phys. **46** (2007)
- S. Moradi, Int. J. Theor. Phys. **47**, 2808 (2008)
- S. Moradi, J. Geom. Phys. **59**, 173 (2009)
- S.P. Kim, H.K. Lee, Y. Yoon, Phys. Rev. D **78**, 105013 (2008)
- I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, New York, 1979)



**Comment on “Creation of spin 1/2 particles by an electric field in de Sitter space”**

S. Haouat\* and R. Chekireb

Department of Physics, LPTh, University of Jijel, BP 98, Ouled Aissa, Jijel 18000, Algeria

(Received 17 July 2012; published 4 April 2013)

The main objective of this comment is to correct the density number of created fermions by an electric field in the (1 + 1) dimensional de Sitter space-time communicated by V. M. Villalba in [Phys. Rev. D **52**, 3742 (1995)]. This comment will show how the positive and negative energy solutions are connected to one another by the charge conjugation. Some concluding remarks are made.

 DOI: [10.1103/PhysRevD.87.088501](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.87.088501)

PACS numbers: 04.62.+v, 03.65.Pm, 03.70.+k, 98.80.Cq

Several years ago, V. I. Villalba studied the problem of spin 1/2 particle creation by an electric field in (1 + 1) dimensional de Sitter space-time. In the first part of his paper, Villalba derived the pair creation rate in the absence of the electric field. Then, in a second part, he considered the effect of the electric field on the particle creation. He considered a spin  $\frac{1}{2}$  fermion of mass  $m$  and charge  $e$  moving in  $dS_2$  space-time described by the line element

$$ds^2 = a^2(\eta)(-d\eta^2 + dx^2), \quad (1)$$

where  $\eta$  is the conformal time  $\eta = \frac{-1}{H}e^{-Ht}$  and  $a(\eta) = \frac{-1}{H\eta}$ . For the electric field he chose the gauge  $A_\mu = (0, A_1(\eta))$ , with

$$A_1 = -\frac{E_0}{H}e^{Ht} = \frac{E_0}{H^2\eta}. \quad (2)$$

To accomplish his study, Villalba determined the positive and negative energy solutions for the corresponding Dirac equation and used these solutions to compute the rate of particles created via the Bogoliubov transformation connecting the “in” with the “out” states. As a result, he concluded that the ratio between Bogoliubov coefficients is given by

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} \right|^2 = \frac{\sinh \frac{\pi}{H} \left( \mathcal{M} - \frac{eE_0}{H} \right)}{\sinh \frac{\pi}{H} \left( \mathcal{M} + \frac{eE_0}{H} \right)} \exp \left[ \frac{2\pi}{H} \left( \mathcal{M} - \frac{eE_0}{H} \right) \right], \quad (3)$$

where

$$\mathcal{M} = \sqrt{m^2 + \frac{e^2 E_0^2}{H^2}}. \quad (4)$$

Reading carefully that paper, one can see that Villalba used an erroneous formula between Whittaker functions (see Eq. (42) in Ref. [1]). Consequently, Eq. (3) is incorrect. In addition, he did not show how the positive and negative solutions are connected to one another by the charge conjugation. This symmetry is more important in the quantization of the spinor field and the derivation of the particle creation rate. Furthermore, the author claimed that for the Dirac case, we do not need to impose any restriction on the relation between  $m$  and  $H$  in order to obtain well-defined “out” states. However, this should be investigated rigorously since the particle creation is well defined only in the adiabatic regimes. From a physical point of view, this is the major drawback of Ref. [1] because of the fact that light or super-heavy particles created in abundance will affect significantly the cosmic evolution.

Before making any comment, let us first use the solutions obtained by Villalba for the Dirac equation to write the Dirac spinors corresponding to the “in” states in the form

$$\Psi_{\text{in}}^+(\eta) = \mathcal{N}_{\text{in}} \begin{pmatrix} W_{\lambda, \mu}(2ik_x \eta) - i\frac{m}{H}W_{\lambda-1, \mu}(2ik_x \eta) \\ -iW_{\lambda, \mu}(2ik_x \eta) + \frac{m}{H}W_{\lambda-1, \mu}(2ik_x \eta) \end{pmatrix} \quad (5)$$

and

$$\Psi_{\text{in}}^-(\eta) = \mathcal{N}_{\text{in}}^* \begin{pmatrix} \frac{m}{H}W_{-\lambda, \mu}(-2ik_x \eta) + iW_{-\lambda+1, \mu}(-2ik_x \eta) \\ -W_{-\lambda+1, \mu}(-2ik_x \eta) - i\frac{m}{H}W_{-\lambda, \mu}(-2ik_x \eta) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

where  $\mathcal{N}_{\text{in}}$  is a normalization constant that is unimportant *vis-à-vis* the mechanism of particle creation and

$$\mu = i\frac{\mathcal{M}}{H}, \quad (7)$$

$$\lambda = \frac{1}{2} + \frac{ieE_0}{H^2}. \quad (8)$$

For the “out” states, we have

\*s.haouat@gmail.com

$$\Psi_{\text{out}}^+(\eta) = \mathcal{N}_{\text{out}} \begin{pmatrix} \sqrt{\mathcal{M} + \frac{eE_0}{H}} M_{\lambda,\mu}(2ik_x\eta) + \sqrt{\mathcal{M} - \frac{eE_0}{H}} M_{\lambda-1,\mu}(2ik_x\eta) \\ -i\sqrt{\mathcal{M} + \frac{eE_0}{H}} M_{\lambda,\mu}(2ik_x\eta) + i\sqrt{\mathcal{M} - \frac{eE_0}{H}} M_{\lambda-1,\mu}(2ik_x\eta) \end{pmatrix} \quad (9)$$

and

$$\Psi_{\text{out}}^-(\eta) = \mathcal{N}_{\text{out}}^* \begin{pmatrix} \sqrt{\mathcal{M} - \frac{eE_0}{H}} M_{-\lambda,-\mu}(-2ik_x\eta) - \sqrt{\mathcal{M} + \frac{eE_0}{H}} M_{-\lambda+1,-\mu}(-2ik_x\eta) \\ -i\sqrt{\mathcal{M} - \frac{eE_0}{H}} M_{-\lambda,-\mu}(-2ik_x\eta) - i\sqrt{\mathcal{M} + \frac{eE_0}{H}} M_{-\lambda+1,-\mu}(-2ik_x\eta) \end{pmatrix}, \quad (10)$$

where  $\mathcal{N}_{\text{out}}$  is also a normalization constant. Here we note that those states are connected to one another by the charge conjugation transformation defined by

$$\Psi \rightarrow \Psi^c = i\sigma_2 \Psi^*. \quad (11)$$

In addition, positive and negative energy solutions satisfy the orthogonality condition,

$$\bar{\Psi}^+ \Psi^- = \bar{\Psi}^- \Psi^+ = 0. \quad (12)$$

Let us now use the Bogoliubov transformation connecting the ‘‘in’’ with the ‘‘out’’ states to determine the density of created particles. The relation between those states can be obtained by the use of the relation between Whittaker functions [2],

$$M_{\lambda,\mu}(\rho) = \Gamma(2\mu + 1) e^{i\pi\lambda} \left[ \frac{W_{-\lambda,\mu}(-\rho)}{\Gamma(\mu - \lambda + \frac{1}{2})} + \frac{W_{\lambda,\mu}(\rho)}{\Gamma(\mu + \lambda + \frac{1}{2})} \exp\left[-i\pi\left(\mu + \frac{1}{2}\right)\right] \right] \quad (13)$$

with  $-\frac{3\pi}{2} < \arg \rho < \frac{\pi}{2}$  and  $2\mu \neq -1, -2, \dots$ . The spinor  $\Psi_{\text{out}}^+(\eta)$  can be expressed then in terms of  $\Psi_{\text{in}}^+(\eta)$  and  $\Psi_{\text{in}}^-(\eta)$  as follows,

$$\Psi_{\text{out}}^+(\eta) = \alpha \Psi_{\text{in}}^+(\eta) + \beta \Psi_{\text{in}}^-(\eta), \quad (14)$$

where the Bogoliubov coefficients  $\alpha$  and  $\beta$  are given by

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\mathcal{N}_{\text{in}}}{\mathcal{N}_{\text{in}}^*} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu - \lambda)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu + \lambda)} \sqrt{\mathcal{M}^2 - \frac{e^2 E_0^2}{H^2}} e^{-i\pi(\mu + \frac{1}{2})} \quad (15)$$

and

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (16)$$

By the use of the following property of gamma function [2],

$$|\Gamma(ix)|^2 = \frac{\pi}{x \sinh \pi x}, \quad (17)$$

we find

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} \right|^2 = \frac{\sinh \pi(\frac{\mathcal{M}}{H} + \frac{eE_0}{H^2})}{\sinh \pi(\frac{\mathcal{M}}{H} - \frac{eE_0}{H^2})} e^{2\pi\frac{\mathcal{M}}{H}}. \quad (18)$$

Notice that Eq. (18) differs from Eq. (3). As is mentioned above, this is because the author of Ref. [1] used an erroneous formula between Whittaker functions.

For the density number of created particles, we have  $n(k) = |\beta|^2$ . Taking into account that the Bogoliubov coefficients satisfy the condition (16), it is easy to show that

$$n(k_x) = \frac{\sinh \pi(\frac{\mathcal{M}}{H} - \frac{eE_0}{H^2}) e^{-2\pi\frac{\mathcal{M}}{H}}}{\sinh \pi(\frac{\mathcal{M}}{H} + \frac{eE_0}{H^2}) + \sinh \pi(\frac{\mathcal{M}}{H} - \frac{eE_0}{H^2}) e^{-2\pi\frac{\mathcal{M}}{H}}}. \quad (19)$$

We note that this result is obtained for a positive wave vector ( $k_x > 0$ ) and  $-\frac{3\pi}{2} < \arg(2ik_x\eta) < \frac{\pi}{2}$ . For the case when  $k_x < 0$ , the quantity  $n(k_x)$  can be obtained from (19) by changing the sign of  $e$ .

Let us notice also that the auxiliary functions  $\Theta_1$  and  $\Theta_2$  introduced in Ref. [1] satisfy the system of equations,

$$\left[ \eta \frac{d}{d\eta} - \frac{1}{2} + i\left(k_x\eta - \frac{eE_0}{H^2}\right) \right] \Theta_1 = \frac{m}{H} \Theta_2 \quad (20)$$

$$\left[ \eta \frac{d}{d\eta} - \frac{1}{2} - i\left(k_x\eta - \frac{eE_0}{H^2}\right) \right] \Theta_2 = -\frac{m}{H} \Theta_1, \quad (21)$$

where the mixing term vanishes in the limit  $m \rightarrow 0$ . This means that for massless particles, the positive and negative energy solutions never intercept each other, and there is no production of massless particles even if an electric field is present.

Furthermore, since Eq. (36) in Ref. [1] is of the form  $\Theta_{1,2}''(\eta) + \omega_{1,2}^2(\eta)\Theta_{1,2}(\eta) = 0$ , with  $\omega_{1,2}^2(\eta) = (\frac{\mathcal{M}^2}{H^2} + \frac{1}{4}) \times \frac{1}{\eta^2} - 2k_x(\frac{eE_0}{H^2} \mp \frac{i}{2})\frac{1}{\eta} + k_x^2$ , we can see that the adiabatic condition

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \left| \frac{\dot{\omega}_{1,2}(\eta)}{\omega_{1,2}^2(\eta)} \right| \approx \frac{1}{(\frac{\mathcal{M}^2}{H^2} + \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}} \ll 1 \quad (22)$$

implies that  $\mathcal{M} \gg H$ . Taking into account this condition, the density of created particles can be approximated by

$$n(k_x) = \exp\left[-\frac{2\pi}{H}\left(\mathcal{M} + \text{sign}(k_x)\frac{eE_0}{H}\right)\right], \quad (23)$$

which is similar to the density of scalar particles (see Eq. (27) in Ref. [3]). It follows from (23) that  $n(k_x)$  is more significant when  $k_x < 0$ . Therefore, the constant electric field produces predominantly particles with  $k_x < 0$ . In other words, in the presence of a constant electric field, particles prefer to be created with a specific sign of the canonical momentum  $k_x$ . This depends on the

orientation of the electric field and the sign of the particle charge. The antiparticles are mainly created with the opposite sign for  $k_x$ .

In conclusion, we have succeeded to derive the exact number density of created fermions by an electric field in  $(1 + 1)$  dimensional de Sitter space-time. We have found that Eq. (18) in the present paper differs from Eq. (3). This is due to a mistake in Eq. (42) in Ref. [1], which leads to incorrect results. Let us notice that a constant electric field amplifies the creation of fermions with negative wave number  $k_x$  and minimizes it in the opposite direction. The inverse is true for antiparticles. In addition, we have shown that the creation of light particles is possible in the presence of the electric field, and the thermal spectrum of particle creation will be obtained only when  $\mathcal{M}$  satisfies the adiabatic condition  $\frac{\mathcal{M}}{H} \gg 1$ . Another important result is that the creation of massless particles with conformal coupling is impossible even if an electric field is present.

**APPENDIX: USEFUL RELATIONS**

The spinors given in this comment are obtained from Villalba's solutions by the use of the following relations [4]:

$$\left[ \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{2} \rho - \lambda \right] W_{\lambda, \mu}(\rho) = \left[ \left( \lambda - \frac{1}{2} \right)^2 - \mu^2 \right] W_{\lambda-1, \mu}(\rho),$$

$$\left[ \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{2} \rho + \lambda \right] W_{\lambda, \mu}(\rho) = -W_{\lambda+1, \mu}(\rho),$$

$$\left[ \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \lambda - \frac{1}{2} \rho \right] M_{\lambda, \mu}(\rho) = \left( \mu + \lambda + \frac{1}{2} \right) M_{\lambda+1, \mu}(\rho),$$

and

$$\left[ \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \lambda + \frac{1}{2} \rho \right] M_{\lambda, \mu}(\rho) = \left( \mu - \lambda + \frac{1}{2} \right) M_{\lambda-1, \mu}(\rho). \tag{A1}$$

---

[1] V.M. Villalba, *Phys. Rev. D* **52**, 3742 (1995).

[2] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, New York, 1979).

[3] J. Garriga, *Phys. Rev. D* **49**, 6343 (1994).

[4] N.J. Vilenkin, *Special Functions and the Theory of Group Representations* (American Mathematical Society, Providence, 1968).

## Fermion creation in 5D space–time with a warped extra dimension

R. Chekireb and S. Haouat\*

*LPTth, Department of Physics, University of Jijel,  
BP 98, Ouled Aissa, Jijel 18000, Algeria  
\*s.haouat@gmail.com*

Received 23 February 2015  
Revised 19 March 2015  
Accepted 25 March 2015  
Published 20 May 2015

The phenomenon of fermion production in a 5D FRW space–time with a warped extra dimension is studied by considering the canonical method based on Bogoliubov transformation connecting the “in” with the “out” states. For an exactly solvable model, two sets of exact solution are expressed in terms of Bessel functions. Studying the semiclassical Hamilton–Jacobi equation, the “in” and “out” states are identified. The pair creation probability and the mean number of created particles are calculated from the Bogoliubov coefficients. It is shown that the particle creation probability and the number density of created particles depend on the ratio of the scale factors associated with the ordinary space  $\{\mathbf{x}\}$  and the extra dimension. It is also shown that the contraction of the extra dimension induces particle creation like the ordinary space expansion.

*Keywords:* Particle creation; Dirac equation; extra dimension.

PACS numbers: 11.10.–z, 11.10.Kk, 04.62.+v

### 1. Introduction

The hypothesis of the five-dimensional (5D) space–time was first proposed by Kaluza in 1921<sup>1</sup> and reinterpreted by Klein few years later.<sup>2</sup> The main objective of the old Kaluza–Klein theory was to unify the electromagnetic and gravitational forces through a 5D space–time (The direct product of the usual four-dimensional (4D) space–time with a circle.) In the same direction, some higher-dimensional theories such as superstring theory and supergravity are elaborated in the beginning of 1970’s. Recently, several models based on the existence of extra dimensions are proposed. In general, there are two types of extra-dimensional models; the first one is the Kaluza–Klein type models, where extra dimensions are accessible for

\*Corresponding author.

all fields<sup>3</sup> and the braneworld models, where the fields of the standard model of particle physics are localized on a hypersurface (brane).<sup>4–6</sup>

Besides the possibility to unify the four interactions, extra-dimensional models offer the possibility to solve the mass hierarchy problem and to explain the weakness of gravity compared to the other forces. Furthermore, extra dimensions give rise to the topological mass generation and lead to new possibilities for gauge symmetry breaking. This explains the increased interest of these models and particularly the importance to study their physical properties. It is obvious that such studies could satisfy the deep need of comprehension of the extra dimensions nature and offer the possibility to put their existence into evidence. Even if there is no clear experimental justification of the existence of extra dimensions, their importance is well known in high energy physics.<sup>31</sup>

On the other hand, quantum effects in curved space–time, in particular, particle creation in an expanding universe, have many important applications in contemporary cosmology — e.g. it could have consequences for early universe cosmology and may play an important role in the exit from inflationary universe and in the cosmic evolution.<sup>7–13</sup> The study of quantum field theory in an expanding universe is then of great interest.<sup>14–17</sup> Therefore, the generalization of these studies to the case of 5D space–time with warped extra dimension is of the same importance. We note that, during the last two decades, some quantum effects in higher-dimensional space–time are studied. Among these effects, we cite the particle creation<sup>18–24</sup> and the Casimir effect.<sup>25–27</sup> However, the case studied in particular detail is that of scalar fields (or scalar particles). Less studied is the case of the spinor particles, where the spin of the particle could play an important role on the physical effects. It is obvious that the behaviors of spin 0 bosons differs from that of spin  $\frac{1}{2}$  fermions.

In this paper, we propose to study the phenomenon of fermion production in an expanding universe with one warped extra dimension by considering the canonical method based on Bogoliubov transformation connecting the “in” with the “out” states. This method which consists on finding exact solutions to the Dirac equation allows a better description of the phenomenon of particle creation.<sup>28–30</sup> The fact that the Kaluza–Klein models have not been detected at colliders up to TeV energies implies that the size of the extra dimension is too small to be detected by experiments. A possible explanation of this is that the three-dimensional space expands while the extra dimension contracts.<sup>32</sup> Therefore, the contraction of the extra dimension may induce very important effects. This motivates us to study the effect of the extra dimension contraction on the creation of particles.

In the first stage, we give a short reminder about the Dirac equation in 5D space–time. Then, we proceed to separate variables and give two sets of exact solutions. By solving the semiclassical Hamilton–Jacobi (HJ) equation we classify our solutions in terms of positive and negative frequency modes. Next, we calculate the pair creation probability and the mean number of created particles from the Bogoliubov coefficients resulting from the expansion of the “in” states on the “out” states.

## 2. Dirac Equation in a 5D Space

In the Kaluza–Klein gravity, a very large class of solutions to the 5D Einstein equations has the form

$$dS^2 = e^{2f(\sigma)}[-dt^2 + \tilde{a}^2(t)d\mathbf{x}^2] + \tilde{\phi}^2(t)d\sigma^2, \quad (1)$$

where  $\sigma$  is the extra dimension,  $\tilde{a}(t)$  and  $\tilde{\phi}(t)$  are the scale factors associated with, respectively, the ordinary space  $\{\mathbf{x}\}$  and the extra dimension  $\sigma$  and  $e^{2f(\sigma)}$  is the warp factor, where  $f(\sigma)$  is a function of  $\sigma$ .

Since this solution reduces, on the hypersurface with  $d\sigma = 0$ , to the familiar flat Friedmann–Robertson–Walker (FRW) metric, it can be considered as the generalization of the flat FRW cosmological metric to five dimensions. As is mentioned in Ref. 3 these solutions are consistent with a wide variety of equations of state: radiation-dominated universe, dust-filled one or an inflationary one . . . , etc. Let us note that the physical properties of these cosmological models and their implications for astrophysics are well known.<sup>33–37</sup> We note also that some generalizations of this class of solutions to the case of open and closed universes<sup>38,39</sup> and extended theories of gravity have been made.<sup>40–42</sup>

In terms of the conformal time  $\eta = \int dt/\tilde{a}(t)$ , the line element (1) reads

$$dS^2 = e^{2f(\sigma)}a^2(\eta)[-d\eta^2 + d\mathbf{x}^2] + \phi^2(\eta)d\sigma^2, \quad (2)$$

where  $a(\eta) = \tilde{a}(t)$  and  $\phi(\eta) = \tilde{\phi}(t)$ .

Let us now consider a massless spin  $\frac{1}{2}$  fermion moving in the background geometry of the 5D space–time described by the metric (2). The dynamics of this particle is governed by the following Dirac equation

$$\tilde{\gamma}^\mu(x)[\partial_\mu - \Gamma_\mu(x)]\Psi(\eta, \mathbf{x}, \sigma) = 0, \quad (3)$$

where  $\tilde{\gamma}^\mu(x)$  are the curved ( $4 \times 4$ ) Dirac matrices satisfying the anticommutation relation  $\{\tilde{\gamma}^\mu(x), \tilde{\gamma}^\nu(x)\} = 2g^{\mu\nu}$  and  $\Gamma_\mu(x)$  are the spin connections defined by

$$\Gamma_\mu(x) = -\frac{1}{8}g_{\alpha\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^\lambda[\tilde{\gamma}^\alpha(x), \tilde{\gamma}^\nu(x)], \quad (4)$$

where  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  are the Christoffel symbols

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{1}{2}g^{\gamma\lambda}(g_{\alpha\lambda,\beta} + g_{\lambda\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\lambda}). \quad (5)$$

For the line element (2), the curved Dirac matrices are given, in the tetrad gauge, by

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}^0(x) &= a^{-1}(\eta)e^{-f(\sigma)}\gamma^0, \\ \tilde{\gamma}^i(x) &= a^{-1}(\eta)e^{-f(\sigma)}\gamma^i, \\ \tilde{\gamma}^4(x) &= \phi^{-1}(\eta)\gamma^4, \end{aligned} \quad (6)$$

with the flat  $\gamma^\mu$  matrices

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^i \\ -i\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^4 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Here,  $\sigma^i$  are the Pauli matrices.

The only nonzero  $\Gamma_\mu(x)$  are

$$\Gamma_0 = \frac{1}{2}a(\eta)e^{f(\sigma)}f'(\sigma)\phi^{-1}(\eta)\gamma^0\gamma^4, \quad (8)$$

$$\Gamma_i = \frac{1}{2}\left[\frac{\dot{a}(\eta)}{a(\eta)}\gamma^0 + \frac{a(\eta)}{\phi(\eta)}e^{f(\sigma)}f'(\sigma)\gamma^4\right]\gamma^i, \quad (9)$$

$$\Gamma_4 = \frac{1}{2}\frac{\dot{\phi}(\eta)}{a(\eta)}e^{-f(\sigma)}\gamma^0\gamma^4, \quad (10)$$

where the point  $(\cdot)$  and the prime  $(\prime)$  denote respectively, derivative with respect to the conformal time  $\eta$  and derivative with respect to the extra dimension coordinate  $\sigma$ .

Inserting the spin connections and the curved Dirac matrices into Eq. (3), we obtain

$$\left[\left(\partial_\eta + \frac{1}{2}\frac{\dot{\phi}(\eta)}{\phi(\eta)} + \frac{3}{2}\frac{\dot{a}(\eta)}{a(\eta)}\right)\gamma^0 + \frac{a(\eta)}{\phi(\eta)}e^{f(\sigma)}(\partial_\sigma + 2f'(\sigma))\gamma^4 + \gamma^i\partial_i\right]\Psi(\eta, \mathbf{x}, \sigma) = 0, \quad (11)$$

where  $\partial_\eta = \frac{\partial}{\partial\eta}$ ,  $\partial_\sigma = \frac{\partial}{\partial\sigma}$  and  $\partial_i$  with  $i = \overline{1,3}$  denote derivatives with respect to the ordinary space coordinates  $x$ ,  $y$  and  $z$ . To simplify this equation, let us write the solution  $\Psi(\eta, \mathbf{x}, \sigma)$  in the form

$$\Psi(\eta, \mathbf{x}, \sigma) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}[a(\eta)]^{-\frac{3}{2}}[\phi(\eta)]^{-\frac{1}{2}}e^{-2f(\sigma)}\vartheta(\eta, \sigma). \quad (12)$$

It is obvious that  $\vartheta(\eta, \sigma)$  satisfy the following equation

$$\left[i\gamma^0\partial_\eta + i\gamma^4\frac{a(\eta)}{\phi(\eta)}e^{f(\sigma)}\partial_\sigma - \gamma^i k_i\right]\vartheta(\eta, \sigma) = 0. \quad (13)$$

This equation shows that the dynamics of a massless fermion in a 5D space with a warped extra dimension depends on the ratio of the scale factors  $a(\eta)$  and  $\phi(\eta)$ .

### 3. Variables Separation

At the beginning, let us write Eq. (13) in the form

$$\left[i\gamma^4\partial_\eta + \gamma^0\frac{a(\eta)}{\phi(\eta)}D_\sigma - \hat{K}\right]\vartheta(\eta, \sigma) = 0, \quad (14)$$

where

$$D_\sigma = ie^{f(\sigma)}\partial_\sigma, \quad (15)$$

and

$$\hat{K} = (\gamma^i k_i)\gamma^0\gamma^4 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Then, by taking into account the fact that  $[D_\sigma, i\gamma^4\partial_\eta + \gamma^0 \frac{a(\eta)}{\phi(\eta)} D_\sigma - \hat{K}] = 0$ , which means that we can find a complete set of solutions that are eigenstates of the operator  $D_\sigma$ , we can write the solutions of Eq. (14) in the form

$$\vartheta(\eta, \sigma) = \xi(\eta) \exp(-i\Lambda \int e^{-f(\sigma)} d\sigma), \quad (17)$$

where  $\Lambda$  is an eigenvalue of the operator  $D_\sigma$

$$D_\sigma \exp\left(-i\Lambda \int e^{-f(\sigma)} d\sigma\right) = \Lambda \exp\left(-i\Lambda \int e^{-f(\sigma)} d\sigma\right). \quad (18)$$

The time-dependent function  $\xi(\eta)$  is then a solution of the following equation:

$$\hat{D}\xi(\eta) = \hat{K}\xi(\eta), \quad (19)$$

where

$$\hat{D} = \gamma^4 i\partial_\eta + \gamma^0 \frac{a(\eta)}{\phi(\eta)} \Lambda. \quad (20)$$

Since  $[\hat{D}, \hat{K}] = 0$ , we can find a common set of eigenfunctions for the operators  $\hat{D}$  and  $\hat{K}$ . Furthermore, we can easily show that  $\hat{K}^2 = k^2$  and, consequently, the eigenvalues of the operator  $\hat{K}$  are  $sk$ , with  $s = \pm 1$ . Then, if  $\xi(s, \eta)$  is an eigenvector of  $\hat{K}$  with the eigenvalue  $sk$  it is necessarily an eigenvector of  $\hat{D}$  with the same eigenvalue. It is not difficult to show that the spinor

$$\xi(s, \eta) = \begin{pmatrix} \xi_1(s, \eta) \Upsilon_s(\mathbf{k}) \\ \xi_2(s, \eta) \Upsilon_s(\mathbf{k}) \end{pmatrix}, \quad (21)$$

with  $s = \pm 1$  and

$$\Upsilon_s(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{(k_x - ik_y)}{2k(k - sk_z)(k_x + ik_y)}} \begin{pmatrix} k - sk_z \\ k_x + ik_y \end{pmatrix}, \quad (22)$$

is an eigenvector of  $\hat{K}$ . Here,  $\Upsilon_s(\mathbf{k})$  is a normalized eigenvector of  $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k})$  satisfying the relation

$$\Upsilon_s(-\mathbf{k}) = e^{i\epsilon} \sigma_y \Upsilon_s^*(\mathbf{k}), \quad (23)$$

where  $e^{i\epsilon}$  is a phase factor.

Since  $\xi(s, \eta)$  is an eigenvector of  $\hat{D}$  and  $\hat{K}$ , it must satisfy the equation

$$\left[ \gamma^4 i\partial_\eta + \gamma^0 \frac{a(\eta)}{\phi(\eta)} \Lambda - sk \right] \xi(s, \eta) = 0. \quad (24)$$

Then the two components  $\xi_1(s, \eta)$  and  $\xi_2(s, \eta)$  satisfy the following system of equations

$$i\partial_\eta \xi_1(s, \eta) = -\left( -sk - i \frac{a(\eta)}{\phi(\eta)} \Lambda \right) \xi_2(s, \eta), \quad (25)$$

$$i\partial_\eta \xi_2(s, \eta) = -\left( -sk + i \frac{a(\eta)}{\phi(\eta)} \Lambda \right) \xi_1(s, \eta). \quad (26)$$



In order to solve this system of equations, let us introduce the unitary transformation  $U$

$$\begin{pmatrix} \xi_1(s, \eta) \\ \xi_2(s, \eta) \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \psi_1(s, \eta) \\ \psi_2(s, \eta) \end{pmatrix}, \quad (27)$$

where

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

The novel components  $\psi_1(s, \eta)$  and  $\psi_2(s, \eta)$  satisfy, then the following equations:

$$\left( i \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{a(\eta)}{\phi(\eta)} \Lambda \right) \psi_1(s, \eta) = sk\psi_2(s, \eta), \quad (29)$$

$$\left( i \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{a(\eta)}{\phi(\eta)} \Lambda \right) \psi_2(s, \eta) = sk\psi_1(s, \eta). \quad (30)$$

At this stage, the usual iteration procedure leads to a second-order equation for each component

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - i\dot{b}(\eta)\Lambda + b^2(\eta)\Lambda^2 + k^2 \right) \psi_1(s, \eta) = 0, \quad (31)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + i\dot{b}(\eta)\Lambda + b^2(\eta)\Lambda^2 + k^2 \right) \psi_2(s, \eta) = 0, \quad (32)$$

where  $b(\eta) = \frac{a(\eta)}{\phi(\eta)}$ .

Let us note that Eqs. (31) and (32) are of the form  $\psi''_{1,2}(s, \eta) + \omega^2(\eta)\psi_{1,2}(s, \eta) = 0$ , with  $\omega^2_{1,2}(\eta) = \mp i\dot{b}(\eta)\Lambda + b^2(\eta)\Lambda^2 + k^2$ . This makes the exact solution possible for various choice of  $a(\eta)$  and  $\phi(\eta)$ . Furthermore, this form is suitable for Wentzel–Kramers–Brillouin (WKB) calculations.

It should be noted also that when  $a(\eta) = \phi(\eta)$ , i.e.  $b(\eta) = 1$ , the solutions  $\psi_{1,2}(s, \eta)$  take the form  $e^{\pm i\omega_0\eta}$ , where  $\omega_0^2 = \Lambda^2 + k^2$ , and consequently, the positive and negative energy solutions never intercept each other. This means that there is no production of particles with  $a(\eta) = \phi(\eta)$ .

#### 4. Particles Creation in a 5D Space

Particle creation in 4D FRW space–time has been much discussed and the pair creation probability and the number density of created particles have been derived for several cosmological models describing different stages of the evolution of the universe.<sup>43–47</sup> The case studied in particular detail is that of de Sitter space–time.<sup>48–54</sup> This is because de Sitter metric is of interest both for the cosmology of the early and late universe. It is known that the de Sitter metric is a good approximation of the early stage of inflation as well as the actual accelerated expansion of the universe.

In this paper, we consider

$$b(\eta) = -\frac{1}{H\eta}. \quad (33)$$

Besides the fact that this choice leads to exact solution, it describes an important cosmological model, particularly, when  $a(\eta) = -\frac{1}{H\eta}$  and  $\phi(\eta) = 1$ . In such a case, the 4D hypersurface is the ordinary de Sitter expansion.

Let us now use the Bogoliubov transformation method to derive the pair creation probability and the number density of created particles. At the first stage, we must find two sets of exact solutions. Then we classify these solutions as “in” and “out” particle and antiparticle states.

#### 4.1. Exact solutions

When  $b(\eta) = -\frac{1}{H\eta}$ , Eqs. (31) and (32) become

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \left( \frac{\Lambda^2}{H^2} - i \frac{\Lambda}{H} \right) \frac{1}{\eta^2} + k^2 \right) \psi_1(s, \eta) = 0, \quad (34)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \left( \frac{\Lambda^2}{H^2} + i \frac{\Lambda}{H} \right) \frac{1}{\eta^2} + k^2 \right) \psi_2(s, \eta) = 0. \quad (35)$$

In order to solve these equations, we make the change

$$\rho = k\eta, \quad (36)$$

and

$$\psi_{1,2}(s, \eta) = \sqrt{\eta} \chi_{1,2}(s, \rho). \quad (37)$$

The resulting equations

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \left( 1 - \frac{\lambda_{1,2}^2}{\rho^2} \right) \right] \tilde{\chi}_{1,2}(s, \rho) = 0, \quad (38)$$

with

$$\lambda_1 = \lambda = \frac{1}{2} + i \frac{\Lambda}{H}, \quad (39)$$

$$\lambda_2 = \lambda^* = \frac{1}{2} - i \frac{\Lambda}{H}, \quad (40)$$

are similar to the well-known Bessel equation. It is known that one can find for this equation several sets of linearly independent solutions which can be written in terms of Bessel functions.<sup>55,56</sup> The first set of solutions, for example, is the first kind of Bessel functions  $J_{\pm\lambda_{1,2}}(\rho)$ . The Hankel functions  $H_{\lambda_{1,2}}^{(1)}(\rho)$  and  $H_{\lambda_{1,2}}^{(2)}(\rho)$  form another set of solutions.

#### 4.2. Vacuum definition and particles creation

The study of particle creation in an expanding universe requires a definition of a vacuum state for the field theory.<sup>57</sup> However, in arbitrary curved background, there is no absolute definition of the vacuum state and the concept of particles is not completely clear. From a physical point of view, it is well known that in the standard quantum theory a particle cannot be localized to a region smaller than its de Broglie wavelength. When this wavelength is sufficiently large, the concept of particle becomes unclear.<sup>12</sup> Moreover, when the vacuum state is defined in the remote past it is habitually unstable so that it may differ from the vacuum state in the remote future. This gives rise to spontaneous particle creation.

To obtain a well-defined vacuum state with a reasonable choice of positive and negative frequency modes we use the so-called adiabatic method based on the solutions of the relativistic HJ equation. Taking into account the asymptotic expansion of the Bessel functions at  $\rho \rightarrow 0$ <sup>55</sup>

$$J_\lambda(\rho) = \frac{\rho^\lambda}{2^\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\rho^{2n}}{2^{2n} n! \Gamma(\lambda + n + 1)}, \quad |\arg(\rho)| < \pi, \quad (41)$$

and using the property  $J_\lambda(e^{im\pi}\rho) = e^{i\lambda m\pi} J_\lambda(\rho)$ , we find that the first set of solutions behaves like

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} J_{\lambda_{1,2}}(k\eta) \approx (k\eta)^{\lambda_{1,2}}, \quad (42)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} J_{-\lambda_{1,2}}(k\eta) \approx (k\eta)^{-\lambda_{1,2}}. \quad (43)$$

For the second set, the behavior of the Hankel functions for large  $|\rho|$  is<sup>55,56</sup>

$$H_\lambda^{(1)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} e^{i(\rho - \frac{\pi}{2}\lambda - \frac{\pi}{4})} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \right], \quad -\pi < \arg(\rho) < 2\pi, \quad (44)$$

$$H_\lambda^{(2)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} e^{-i(\rho - \frac{\pi}{2}\lambda - \frac{\pi}{4})} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \right], \quad -2\pi < \arg(\rho) < \pi. \quad (45)$$

We have then

$$\lim_{\eta \rightarrow -\infty} H_{\lambda_{1,2}}^{(1)}(k\eta) \approx e^{ik\eta}, \quad (46)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow -\infty} H_{\lambda_{1,2}}^{(2)}(k\eta) \approx e^{-ik\eta}. \quad (47)$$

Comparing these results with the solutions of the HJ equation, we can find for the “in” and “out” states the following components:

$$\psi_{1,\text{in}}^+(s, \eta) = \sqrt{\eta} H_\lambda^{(2)}(k\eta), \quad (48)$$

$$\psi_{1,\text{in}}^-(s, \eta) = \sqrt{\eta} H_\lambda^{(1)}(k\eta), \quad (49)$$

and

$$\psi_{1,\text{out}}^+(s, \eta) = \sqrt{\eta} J_{-\lambda}(k\eta), \quad (50)$$

$$\psi_{1,\text{out}}^-(s, \eta) = \sqrt{\eta} J_{\lambda}(k\eta). \quad (51)$$

By the use of the relation<sup>55</sup>

$$\left( \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \pm \lambda \right) Z_{\lambda}(\eta) = \pm \eta Z_{\lambda \mp 1}(\eta), \quad (52)$$

where  $Z_{\lambda}(\eta)$  denotes  $J$ ,  $H^{(1)}$  or  $H^{(2)}$  functions, we find the lower component for the positive and negative frequency modes

$$\psi_{2,\text{in}}^-(s, \eta) = is\sqrt{\eta} H_{\lambda-1}^{(1)}(k\eta), \quad (53)$$

$$\psi_{2,\text{in}}^+(s, \eta) = is\sqrt{\eta} H_{\lambda-1}^{(2)}(k\eta), \quad (54)$$

and

$$\psi_{2,\text{out}}^-(s, \eta) = is\sqrt{\eta} J_{\lambda-1}(k\eta), \quad (55)$$

$$\psi_{2,\text{out}}^+(s, \eta) = -is\sqrt{\eta} J_{1-\lambda}(k\eta). \quad (56)$$

Thus, the Dirac spinors are

$$\xi_{\text{out}}^+(\eta, s, \mathbf{k}) = \mathcal{N}^* \sqrt{\eta} \begin{pmatrix} [J_{-\lambda}(k\eta) + sJ_{1-\lambda}(k\eta)] \Upsilon_s(\mathbf{k}) \\ i[J_{-\lambda}(k\eta) - sJ_{1-\lambda}(k\eta)] \Upsilon_s(\mathbf{k}) \end{pmatrix}, \quad (57)$$

$$\xi_{\text{out}}^-(\eta, s, \mathbf{k}) = \mathcal{N} \sqrt{\eta} \begin{pmatrix} [J_{\lambda}(k\eta) - sJ_{\lambda-1}(k\eta)] \Upsilon_s(\mathbf{k}) \\ i[J_{\lambda}(k\eta) + sJ_{\lambda-1}(k\eta)] \Upsilon_s(\mathbf{k}) \end{pmatrix}, \quad (58)$$

and

$$\xi_{\text{in}}^+(\eta, s, \mathbf{k}) = \mathcal{N}'^* \sqrt{\eta} \begin{pmatrix} [H_{\lambda}^{(2)}(k\eta) - sH_{\lambda-1}^{(2)}(k\eta)] \Upsilon_s(\mathbf{k}) \\ i[H_{\lambda}^{(2)}(k\eta) + sH_{\lambda-1}^{(2)}(k\eta)] \Upsilon_s(\mathbf{k}) \end{pmatrix}, \quad (59)$$

$$\xi_{\text{in}}^-(\eta, s, \mathbf{k}) = \mathcal{N}' \sqrt{\eta} \begin{pmatrix} [H_{\lambda}^{(1)}(k\eta) - sH_{\lambda-1}^{(1)}(k\eta)] \Upsilon_s(\mathbf{k}) \\ i[H_{\lambda}^{(1)}(k\eta) + sH_{\lambda-1}^{(1)}(k\eta)] \Upsilon_s(\mathbf{k}) \end{pmatrix}, \quad (60)$$

where  $\mathcal{N}$  and  $\mathcal{N}'$  are the normalization constants. We note that the vacuum state defined by the ‘‘in’’ states  $\xi_{\text{out}}^{\pm}(\eta, s, \mathbf{k})$  is nothing but the Bunch–Davies vacuum. It should be noted also that, taking into account Eq. (23), we can see that both ‘‘in’’ and ‘‘out’’ positive and negative frequency states are connected to one another by the charge conjugation transformation

$$\xi_{\text{in, out}}^{\mp}(\eta, s, \mathbf{k}) = \gamma^2 (\xi_{\text{in, out}}^{\pm}(\eta, s, -\mathbf{k}))^*. \quad (61)$$

In addition, positive and negative energy solutions satisfy the orthogonality condition

$$\bar{\xi}_{\text{in}}^+ \xi_{\text{in}}^- = \bar{\xi}_{\text{in}}^- \xi_{\text{in}}^+ = \bar{\xi}_{\text{out}}^+ \xi_{\text{out}}^- = \bar{\xi}_{\text{out}}^- \xi_{\text{out}}^+ = 0. \quad (62)$$

In all, we have two sets of exact solutions. However, there are only two independent solutions and the two other solutions can be expressed in terms of these two independent ones. For instance, by the use of the following relation between different kinds of Bessel functions<sup>55</sup>

$$H_\lambda^{(2)}(k\eta) = \frac{e^{i\lambda\pi} J_\lambda(k\eta) - J_{-\lambda}(k\eta)}{i \sin(\pi\lambda)}, \quad (63)$$

$$H_\lambda^{(1)}(k\eta) = \frac{J_{-\lambda}(k\eta) - e^{-i\lambda\pi} J_\lambda(k\eta)}{i \sin(\pi\lambda)}, \quad (64)$$

we find the Bogoliubov transformation connecting the “in” with the “out” states

$$\xi_{\text{in}}^+(\eta, s, \mathbf{k}) = \alpha \xi_{\text{out}}^+(\eta, s, \mathbf{k}) + \beta \xi_{\text{out}}^-(\eta, s, \mathbf{k}), \quad (65)$$

$$\xi_{\text{in}}^-(\eta, s, \mathbf{k}) = \alpha^* \xi_{\text{out}}^-(\eta, s, \mathbf{k}) + \beta^* \xi_{\text{out}}^+(\eta, s, \mathbf{k}), \quad (66)$$

where the Bogoliubov coefficients  $\alpha, \beta$  are given by

$$\alpha = i \frac{\mathcal{N}'}{\mathcal{N}} \frac{1}{\sin(\pi\lambda)}, \quad (67)$$

$$\beta = -i \frac{\mathcal{N}'}{\mathcal{N}^*} \frac{1}{\sin(\pi\lambda)} e^{i\lambda\pi}, \quad (68)$$

and satisfy the following relation:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (69)$$

The probability to creating one pair of massless spin  $\frac{1}{2}$  particle can be then expressed in terms of Bogoliubov coefficients

$$\mathcal{P}_{\text{cr}} = \left| \frac{\beta}{\alpha} \right|^2. \quad (70)$$

It is easy to show that

$$\mathcal{P}_{\text{cr}} = \exp\left(-2\pi \frac{\Lambda}{H}\right). \quad (71)$$

As is expected, this expression is the same as that obtained for massive fermions in the ordinary 4D de Sitter space-time, where  $\Lambda$  is the mass of the fermion.

For the density number of created particles, we have

$$n(k) = |\beta|^2. \quad (72)$$

Taking into account that the Bogoliubov coefficients satisfy the normalization condition (69), it is easy to show that the number density of created particles is given by

$$n(k) = \frac{1}{1 + \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|^2} = \frac{1}{1 + \exp\left(2\pi \frac{\Lambda}{H}\right)}. \quad (73)$$

This expression is nothing but the thermal Fermi–Dirac distribution. We notice that the pair production probability and the density number of created particles given by Eqs. (71) and (73) do not depend on the nature of  $\Lambda$ . The same expressions must be obtained either  $\Lambda$  takes discrete or continuous values. However, it should be noted that if  $\Lambda = 0$ , the solutions  $\psi_{1,2}(s, \eta)$  take the form  $e^{\pm ik\eta}$ . In this case, the “in” and “out” vacuum states are the same and consequently, no particles are produced.

We note here that, since Eqs. (31) and (32) are of the form  $\psi''_{1,2}(s, \eta) + \omega_{1,2}^2(\eta)\psi_{1,2}(s, \eta) = 0$ , with  $\omega_{1,2}^2(\eta) = \mp i\dot{b}(\eta)\Lambda + b^2(\eta)\Lambda^2 + k^2$ , we can derive the adiabatic condition for the particle creation

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \left| \frac{\dot{\omega}_s(\eta)}{\omega_s^2(\eta)} \right| \approx \frac{H}{\Lambda} \ll 1. \quad (74)$$

This is in agreement with the fact that there is no particle creation for  $\Lambda = 0$ .

## 5. Some Cosmological Consequences

In ordinary 4D cosmology, the process of particle creation has many important consequences on the cosmic evolution especially when particles are produced in abundant. It is known that the particle creation induces an effective negative pressure which leads to an inflationary phase with an exponential expansion. After a sufficient period of inflation the exponential expansion will be adiabatically switched off giving rise to a power law expansion. In addition, the gravitational creation of cold dark matter in the expanding universe could explain the actual accelerated expansion without appealing to the existence of dark energy.<sup>7–13</sup>

In braneworld models, the Friedmann equation modifies to be

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_M \left( 1 + \frac{\rho_M}{2\tau} \right) + \frac{\Lambda_4}{3}, \quad (75)$$

where  $\tau$  is the brane tension and  $\Lambda_4$  is the 4D cosmological constant. Then, in the braneworld regime (i.e. high energy regime,  $H \propto \sqrt{\frac{4\pi G}{3\sigma}\rho_M}$ ), the universe could undergo a faster expansion. This allows an enormous creation of particles compared to the standard cosmology and, consequently, the effects of the produced particles on the cosmic evolution become more important than the ordinary case. Furthermore, since, in braneworld models, the conservation of the energy is given like in ordinary 4D cosmology by

$$\dot{\rho}_M + 3H(\rho_M + p_M) = 0, \quad (76)$$

the effective negative pressure induced by the particle creation could play a role in the exit from the braneworld regime  $H \propto \rho_M$  to the standard regime  $H \propto \sqrt{\rho_M + \frac{\Lambda_4}{8\pi G}}$ .

Another possible effect of the particle creation in 4D cosmology is the isotropization of the anisotropic universe. Accordingly, if the contraction of the extra space starts near the Planck time, the created particles will produce a very rapid isotropization of the 5D model.<sup>18</sup> If this is right, the size of the extra dimension becomes large enough to be detected by experiments. However, this is not true because the fact that the Casimir effect of external matter fields or of gravitons will induce contraction of the extra space. The contraction may be induced also by an antisymmetric tensor field like in 11-dimensional supergravity.<sup>18</sup> Moreover, even if the particle creation effect is more important than the effects leading to the contraction of the extra space and makes the extra space expanding it finishes by  $a(\eta) \sim \phi(\eta)$ , and then the process of particle creation ceases and the extra space contracts by the other effects.

## 6. Conclusion

In this paper, we have studied the phenomenon of fermion production in an expanding universe with one warped extra dimension by considering the canonical method based on Bogoliubov transformation connecting the “in” with the “out” states. In the first stage, we have found two sets of exact solutions to the corresponding Dirac equation. We have expressed these solution in terms of Bessel functions. Studying the semiclassical HJ equation, we were able to identify the “in” and “out” states. The “in” states define the well-known Bunch–Davies vacuum. Next, we have calculated the pair creation probability and the mean number of created particles from the Bogoliubov coefficients.

The main result of these studies that the particle creation process depends on the ratio  $\frac{a(\eta)}{\phi(\eta)}$ , so that there is no production of particles with  $a(\eta) = \phi(\eta)$ . It is shown also that the role of the warp factor  $e^{-2f(\sigma)}$  is not of great interest. It determines the nature of  $\Lambda$ ; discrete or continuous. In addition, there is no particle creation for  $\Lambda = 0$ . This is like the case of massless particles in the ordinary 4D space–time.

For the case of  $\frac{a(\eta)}{\phi(\eta)} = \frac{-1}{H\eta}$ , the obtained number density of created particles is nothing but the thermal Fermi–Dirac distribution. This case may correspond to various choice of  $a(\eta)$  and  $\phi(\eta)$ . For example, if  $a(\eta) = \frac{-1}{H\eta}$  and  $\phi(\eta) = 1$ , the 4D hypersurface is the ordinary de Sitter space and the particle creation can be understood as the usual particle creation in an expanding universe. In the case when  $a(\eta) = 1$  and  $\phi(\eta) = -H\eta$ , the 4D hypersurface is the static Minkowski space–time. The particle creation is caused then by the contraction of the fifth dimension. This effect resembles to the well-known Unruh effect, where an observer in the bulk see thermal bath in 4D hypersurface.

In addition, since  $\Lambda$  is proportional to the inverse of the size of the extra dimension, the exponential  $\exp(-2\pi\frac{\Lambda}{H})$  shows that the particle creation more important in the case of large extra dimension on condition that the adiabatic condition is fulfilled.

Let us note that, according to Refs. 30 and 58, the discussed particle creation is expected to be amplified by an electric field. We know that actually there is no electric field in the universe. However, the existence of the 2.7 K background radiation implies that strong electromagnetic fields existed in the early stages of the universe. As is mentioned in Ref. 58, we reconcile that electric fields were present during the initial stages of the formation of the universe and they vanish because of the inverse effect of the particle creation. This effect is actually under consideration.

## Appendix A. The Hamilton–Jacobi Equation

The “in” and “out” states are chosen according to the asymptotic behavior of the semiclassical solutions constructed by the use of WKB approximation starting from the solutions of the relativistic HJ equation. In this appendix, we give the analytic solution of the HJ equation. The general form of the HJ equation is given by

$$g^{\mu\nu} \partial_\mu S \partial_\nu S = 0. \quad (\text{A.1})$$

For the case of 5D space–time with a warped extra dimension the classical action  $S$  can be decomposed as

$$S = g(\eta) + h(\sigma) + \mathbf{kx}, \quad (\text{A.2})$$

where the time dependent part  $g(\eta)$  and the  $\sigma$  dependent one  $h(\sigma)$  satisfy the following equation:

$$\frac{\phi^2(\eta)}{a^2(\eta)} \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial \eta} \right)^2 - k^2 \right] = \frac{1}{e^{2f(\sigma)}} \left( \frac{\partial h}{\partial \sigma} \right)^2. \quad (\text{A.3})$$

This equation makes sense only if each member is a constant. We have then

$$\frac{1}{e^{2f(\sigma)}} \left( \frac{\partial h}{\partial \sigma} \right)^2 = \frac{\phi^2(\eta)}{a^2(\eta)} \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial \eta} \right)^2 - k^2 \right] = \Lambda^2, \quad (\text{A.4})$$

where  $\Lambda^2$  is a constant. Therefore, the functions  $g(\eta)$  and  $h(\sigma)$  are given by

$$g(\eta) = \pm \int \sqrt{\frac{\Lambda^2}{H^2 \eta^2} + k^2} d\eta, \quad (\text{A.5})$$

and

$$h(\sigma) = \Lambda \int e^{f(\sigma)} d\sigma. \quad (\text{A.6})$$

Making the change  $u = \frac{1}{\eta}$  and using the well-known integral

$$\int du \frac{\sqrt{c^2 + u^2}}{u^2} = -\frac{\sqrt{c^2 + u^2}}{u} + \ln(u + \sqrt{c^2 + u^2}), \quad (\text{A.7})$$



where  $c = \frac{Hk}{\Lambda}$ , we get

$$g(\eta) = \pm \sqrt{\frac{\Lambda^2}{H^2} + k^2 \eta^2} + \ln \left( \frac{1}{\eta} + \sqrt{\frac{H^2}{\Lambda^2} k^2 + \frac{1}{\eta^2}} \right)^{\mp \frac{\Lambda}{H}}. \quad (\text{A.8})$$

Then, the “out” states have the behavior

$$\psi_{\text{out}}^{\pm}(\eta) \equiv \lim_{\eta \rightarrow 0} e^{ig(\eta)} \sim \eta^{\mp i \frac{\Lambda}{H}}, \quad (\text{A.9})$$

while the “in” states behave like

$$\psi_{\text{in}}^{\pm}(\eta) \equiv \lim_{\eta \rightarrow -\infty} e^{ig(\eta)} \sim e^{\pm i k \eta}. \quad (\text{A.10})$$

## References

1. T. Kaluza, *Sitz. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* **K1**, 966 (1921).
2. O. Klein, *Z. Phys.* **37**, 895 (1926).
3. J. M. Overduin and P. S. Wesson, *Phys. Rep.* **283**, 303 (1997).
4. N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, *Phys. Rev. D* **59**, 086004 (1999).
5. L. Randall and R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3370 (1999).
6. L. Randall and R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4690 (1999).
7. S. Debnath and A. K. Sanyal, *Class. Quantum Grav.* **28**, 145015 (2011).
8. J. A. S. Lima, F. E. Silva and R. C. Santos, *Class. Quantum Grav.* **25**, 205006 (2008).
9. V. Sahni and S. Habib, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1766 (1998).
10. L. Kofman, *Preheating After Inflation*, Lecture Notes in Physics, Vol. 738 (Springer-Verlag, Berlin, 2008), p. 55.
11. J. Martin, *Inflationary Perturbations: The Cosmological Schwinger Effect*, Lecture Notes in Physics, Vol. 738 (Springer-Verlag, Berlin, 2008), p. 193.
12. I. Antoniadis, P. O. Mazur and E. Mottola, *New J. Phys.* **9**, 11 (2007).
13. J. Chen, P. Wu, H. Yu and Z. Li, *Eur. Phys. J. C* **72**, 1861 (2012).
14. L. Parker and D. J. Toms, *Quantum Field Theory in Curved Space-Time: Quantized Fields and Gravity* (Cambridge University Press, Cambridge, 2009).
15. V. F. Mukhanov and S. Winitzki, *Introduction to Quantum Effects in Gravity* (Cambridge University Press, Cambridge, 2007).
16. S. A. Fulling, *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985).
17. N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge University Press, Cambridge, 1982).
18. J. Garriga and E. Verdaguer, *Phys. Rev. D* **39**, 1072 (1989).
19. S. Nojiri and S. D. Odintsov, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **06**, 004 (2003).
20. M. K. Mak and T. Harko, *Class. Quantum Grav.* **16**, 4085 (1999).
21. W. H. Huang, *Phys. Lett. A* **140**, 280 (1989).
22. A. A. Saharian, *Phys. Rev. D* **73**, 44012 (2006).
23. C. Bambi and F. R. Urban, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 191302 (2007).
24. S. Ghosh and J. Kar, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **08**, 1475 (2008).
25. E. R. Bezerra de Mello and A. A. Saharian, *J. High Energy Phys.* **12**, 081 (2008).
26. A. A. Saharian, *Class. Quantum Grav.* **25**, 165012 (2008).
27. S. Bellucci, A. A. Saharian and H. A. Nersisyan, *Phys. Rev. D* **88**, 024028 (2013).
28. S. Haouat and R. Chekireb, *Mod. Phys. Lett. A* **26**, 2639 (2011).
29. S. Haouat and R. Chekireb, *Int. J. Theor. Phys.* **51**, 1704 (2012).

30. S. Haouat and R. Chekireb, *Eur. Phys. J. C* **72**, 2034 (2012).
31. P. S. Wesson, *Int. J. Mod. Phys. D* **24**, 1530001 (2015).
32. Y. Kanou, H. Ishihara, M. Kimura, K. Matsuno and T. Tatsuoka, *Phys. Rev. D* **90**, 084004 (2014).
33. P. S. Wesson, *Mod. Phys. Lett. A* **7**, 921 (1992).
34. P. S. Wesson, *Astrophys. J.* **394**, 19 (1992).
35. P. S. Wesson, *Astrophys. J.* **436**, 547 (1994).
36. P. S. Wesson and H. Liu, *Astrophys. J.* **440**, 1 (1995).
37. A. Billyard and P. S. Wesson, *Gen. Relativ. Gravit.* **28**, 129 (1996).
38. P. S. Wesson and J. Ponce de Leon, *Astron. Astrophys.* **294**, 1 (1995).
39. H. Liu and P. S. Wesson, *Int. J. Mod. Phys. D* **3**, 627 (1994).
40. D. J. McManus, *J. Math. Phys.* **35**, 4889 (1994).
41. A. A. Coley, *Astrophys. J.* **427**, 585 (1994).
42. A. A. Coley and D. J. McManus, *J. Math. Phys.* **36**, 335 (1995).
43. C. Bernard and A. Duncun, *Ann. Phys.* **107**, 201 (1977).
44. M. R. Setare, *Int. J. Theor. Phys.* **43**, 2237 (2004).
45. F. Pascoal and C. Farina, *Int. J. Theor. Phys.* **46**, 2950 (2007).
46. S. Moradi, *J. Geom. Phys.* **59**, 173 (2009).
47. J. Haro, *J. Phys. A: Math. Theor.* **44**, 205401 (2011).
48. G. W. Gibbons and S. W. Hawking, *Phys. Rev. D* **15**, 2738 (1977).
49. E. Mottola, *Phys. Rev. D* **31**, 754 (1985).
50. J. Garriga, *Phys. Rev. D* **49**, 6343 (1994).
51. A. Havare, T. Yetkin, M. Korunur and K. Sogut, *Nucl. Phys. B* **682**, 464 (2004).
52. J. Haro and E. Elizald, *J. Phys. A: Math. Theor.* **41**, 372003 (2008).
53. S. P. Kim and D. N. Page, *Phys. Rev. D* **78**, 103517 (2008).
54. A. Higuchi and L. Y. Cheong, *Class. Quantum Grav.* **26**, 145015 (2009).
55. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products* (Academic Press, New York, 1979).
56. M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New York, 1964).
57. S. Winitzki, *Phys. Rev. D* **72**, 104011 (2005).
58. I. L. Buchbinder and S. D. Odintsov, *Sov. Phys. J.* **25**, 385 (1982).