REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE JIJEL
FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET SCIENCES DE LA NATURE ET DE LA VIE
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre :
Série :

THESE

Présenté pour obtenir le diplôme de

Doctorat En Sciences

OPTION

Physique Théorique

Par

Benzair Hadjira

THEME

Formulation Intégrale de Chemin Supersymétrique en Mécanique Quantique Relativiste Déformée

Soutenu le : 07/04/2013

Devant le Jury:

Président:	L. Chetouani	Prof.	Univ. Mentouri-Constantine
Rapporteur:	M. Merad	Prof.	Univ. Oum El Bouaghi
Co-Rapporteur:	A. Makhlouf	M.C.	Univ. Mulhouse-France
Examinateur:	T. Boudjedaa	Prof.	Univ. Jijel
	A. Bounames	Prof.	Univ. Jijel
	T. Meftah	Prof.	Univ. Kasdi Merbah-Ouargla

Table des matières

1 Introduction générale: 1

2 Structures algébriques et déformations formelles 6

2.1 Introduction . . . 6

2.2 Structures algébriques et Cohomologie . . . 7

2.2.1 Algèbre associative . . . 7

2.2.2 Cohomologie de Hochschild . . . 8

2.2.3 Algèbre de Lie . . . 9

2.2.4 Cohomologie de Chevalley–Eilenberg . . . 10

2.2.5 Algèbres de Poisson . . . 11

2.2.6 Cohomologie de Poisson . . . 13

2.3 Déformations formelles . . . 14

2.3.1 L'équation de déformation . . . 15

2.3.2 Obstructions . . . 16

2.3.3 Déformations équivalentes et déformations triviales . . . 16

2.3.4 Algèbres de Poisson et déformation des algèbres commutatives . . . 17

2.3.5 Déformation de la structure de Poisson de Moyal . . . 19

2.4 La mécanique classique et la mécanique quantique dans le cadre de la déformation . . . 24

2.4.1 Un bref rappel de la mécanique classique (MC) ordinaire: . . . 24

2.4.2 Un bref rappel de la mécanique quantique (MQ) ordinaire: . . . 25

2.4.3 La déformation formelle en MC . . . 26

2.4.4 La déformation formelle en MQ . . . 28

3 Formalisme de Feynman dans le cadre de la théorie de la déformation 34

3.1 Introduction 34

3.2 Construction des propagateurs 35

3.2.1 Cas de l'espace ordinaire 35

3.2.2 Cas de l'espace non-commutatif (NC) 38

3.2.3 Cas de la distance minimale (LM) 40

3.3 Etude statistique via le formalisme intégrale de chemin dans la théorie déformée 44

3.3.1 Cas de l'espace ordinaire 45

3.3.2 Cas de l'espace non-commutatif (NC) 46

3.3.3 Cas de la distance minimale (LM) 47

3.4 L'intégrale de chemins sur les variables de Spin (Technique de Fradkin-Gitman) 48

3.4.1 Evaluation de la fonction de Green au cas de l'espace ordinaire 49

4 Formalisme d'intégrale de Chemin de l'oscillateur de Dirac en présence de la distance minimale 56

4.1 Introduction 56

4.2 Construction de la fonction de Green causale 57

4.3 La vérification de la fonction de Green 64

4.4 Fonction de Green en présence de la longueur minimale 66

5 Formalisme de Feynman de l'équation de Dirac avec masse variable en présence de la distance minimale 69

5.1 Introduction 69

5.2 Résolution de l'équation de Dirac à (1+1) dimensions dans la représentation de l'espace position 71

5.3 Intégrales de chemins pour la particule de Dirac en présence d'une longueur minimale 74

6 Formalisme d'intégrale de chemin pour les oscillateurs relativistes dans un espace non-commutatif 82

6.1 Introduction 82

6.2 La fonction de Green pour l'oscillateur de Klein-Gordon dans une représentation de l'espace non-commutatif 84

6.3 La fonction de Green de l'oscillateur de Dirac dans un espace non-commutatif 87

7 Formalisme d'intégrale de chemin pour l'équation de Feshbach-Villars dans l'espace de phase non-commutatif 95

7.1 Introduction 95

7.2 L'équation de Feshbach-Villars de la géométrie non-commutative 97

7.3 Construction de la fonction de Green dans l'espace de phase NC 99

7.4 Méthode générale via la transformation de Foldy-Wouthuysen (F-W) 101

7.5 Applications 103

7.5.1 La particule libre 103

7.5.2 Champ magnétique constant 105

8 Conclusion générale 107

Dédicace

A mon père

A ma très chère mère

A tous mes frères et soeurs

A toute la famille et tous mes amis

A tous mes professeurs de l'école primaire à la fin de cette thèse

HADJIRA

Remerciements

Tout d'abord; je remercie Dieu *le tout puissant de m'avoir donnée la patience, la volonté et l'énergie pour poursuivre ce travail.*

Ma thèse s'est déroulée entre le laboratoire de physique théorique de l'Université de Jijel, le laboratoire de mathématique de l'Université de Haute Alsace à Mulhouse et bien sûre l'Université de « Kasdi Merbah » de ma ville natale Ouargla.

Je remercie aussi Mr. Mahmoud Merad, Mr. Taher Boudjedaa qui m'ont dirigée pour bien effectuer ma thèse, ainsi que Mr. Abdenacer Mekhlouf qui m'a accueillie dans le laboratoire de Mulhouse. Mon séjour à Mulhouse a été très agréable; où j'ai pu bénéficier d'une ambiance stimulante.

Le double statut est la résultante du fait que Mr. M. Merad et Mr. T. Boudjedaa ont tous deux accepté de diriger mon travail de recherche durant ces dernières années. Je dois dire que cette situation tout à fait exceptionnelle, m'a permise de bénéficier d'un encadrement de très grande qualité et je tiens à leur exprimer ma plus sincère reconnaissance pour ce qu'ils ont fait pour moi.

Je remercie en avance l'ensemble des membres du jury pour leur participations, leur critiques et leurs remarques. Un Grand merci à Mr. L. Chetouani: professeur à l'université de Constantine pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury.

Je tiens aussi à exprimer ma reconnaissance et mon respect, à mes enseignants du post-graduation de physique théorique, Mr. M. T. Meftah: professeur à l'université d'Ouargla, Mr. A. Bounames: professeur à l'université de Jijel.

Je remercie vivement tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de cette thèse, même par un petit sourire d'encouragement.

Mes remerciements s'adressent à toute la famille et tous mes amis.

Hadjira BENZAIR

Résumé

Dans notre thèse, en premier lieu, nous avons présenté les outils fondamentaux de la construction de la théorie de déformation formelle dans le cas général. Pour illustrer comment peut-on résoudre certains problèmes de la mécanique quantique relativiste spinorielle via le formalisme des intégrales de chemin supersymétrique, nous avons considéré deux approches en particulier, l'approche par les distances minimales et celle de la géométrie non-commutative.

Pour la première approche, nous avons suggéré de traiter la dynamique de l'oscillateur de Dirac à une dimension dans la représentation des impulsions par les techniques standard de Feynman et Kleinert. Dans le même contexte, nous avons étudié également la dynamique d'une particule de masse variable spinorielle soumise à l'interaction d'un potentiel linéaire, suivant deux techniques différentes, à savoir l'équation de Dirac à une dimension dans l'espace des configurations et les intégrales de chemins dans l'espace des moments. Par la méthode directe, on a résolu l'équation en suivant la technique d'approximation de la mécanique quantique ordinaire, on a obtenu le décalage des niveaux d'énergies relativistes. Pour la deuxième technique, la fonction de Green a été construite par l'approche de Feynman. Dans les deux méthodes, nous avons trouvé la même quantité des niveaux énergétiques au premier ordre du paramètre de déformation.

Alors pour la deuxième approche qui s'agit de l'introduction de la géométrie non-commutative dans l'espace de phase, nous avons traité le cas de l'oscillateur relativiste (Klein Gordon et Dirac) en présence d'un champ magnétique constant. Par-ailleurs et par la même approche, la fonction de Green de l'équation de Feshbach-Villars sans spin a été reconstruite, où l'on a introduit la transformation de F-W afin de diagonaliser l'Hamiltonien.

Dans chaque application, les propagateurs sont évalués, les fonctions d'ondes et les spectres énergétiques correspondants sont déduits.

Mots clés: Déformation formelle, Intégrale de chemin, Fonction de Green, Propagateurs, Oscillateur de Dirac, Oscillateur de Klein-Gorden (OKG), Supersymétrique, Grassmann, non-commutative (NC), Longueur minimale (GUP), Equation de Feshbach-Villars (F-V), Transformation de Foldy-Wouthuysen (F-W) .

1

Introduction générale:

Tel que c'est connu, la physique moderne repose sur deux fondements principaux; le premier est celui de la théorie relativiste générale d'Albert Einstein qui nous met dans le contexte théorique afin de comprendre le monde dans ses macros-dimensions: les planètes, les étoiles, les galaxies et les amas de galaxies voire même ce qui est en extra-univers, elle explique la force de gravité dans le macro-monde. Elle utilise principalement la géométrie Riemannienne comme formalisme mathématique. Le second fondement est celui de la mécanique quantique, elle nous renseigne, dans le cadre théorique, sur le monde dans ses micro-dimensions: les molécules, les atomes voire même les infimes composants de cette dernière, tels que les électrons et les quarks; et elle explique les trois forces principales dans le micro-monde. (les forces faibles, électromagnétiques, et fortes). Elle utilise la théorie des algèbres d'opérateur agissant sur un espace de Hilbert (les algèbres de Von Neumann). Le but de citer ces deux fondements chacune à part est une réussite, mais si on les rassemble, elles deviennent non fiables sur toutes les prévisions. Les génies du monde moderne ont essayé de rassembler ces deux théories en une seule, mais en vain. Les tentatives sont toujours d'actualité pour résoudre ce problème, plusieurs solutions sont apparues mais se montrent contradictoires après un moment. On cite pour exemple le modèle Standard qui a connu une grande réussite dans la fusion des trois interactions principales. (les interactions fortes, électromagnétiques et faibles), puis, il y a eu d'autres modèles de fusion des quatre forces en un seul modèle, tel que: le modèle supersymétrique, le modèle avec dimensions supplémentaires, théorie des cordes et la M-théorie.

Toutes ces tentatives font intervenir ou conduisent à deux nouveaux concepts: l'apparition d'une longueur fondamentale (la distance minimale) et l'émergence de la géométrie non-commutative. Où l'idée est basée sur la généralisation des relations de commutation canonique ordinaire et le principe d'incertitude de Heisenberg, ce qui conduit à une nouvelle algèbre non-commutative.

Le concept de distance minimale est l'un des choix proposés pour comprendre les différences qui apparaissent dans la fusion des quatre principales interactions de la physique; qui résulte: Une approche naturelle qui consiste à quatifier le champ gravitationnel comme les autres champs. Mais la théorie obtenue est non renormalisable, c'est à dire, sans intérêt physique. Plusieurs scénarios ont été proposés pour résoudre ce genre de problèmes, notamment, le formalisme de la mécanique quantique en présence de la longueur minimale qui a été développé par Kempf et ses collaborateurs [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Ainsi, la gravitation devrait nous orienter à une rupture de l'espace jusqu'au très petites distances, nécessite une très haute énergie. Par conséquent, les effets gravitationnels seront perturbés par la structure de l'espace-temps, et une limite inférieure de résolution de l'espace devient inévitable [7, 8, 9]. Cette longueur minimale est supposée d'être proche de la longueur de Planck.

Les motivations de cette idée sont multiples; en théorie des cordes, une longueur minimale se pose en raison du fait que la dimension des particules ne peut pas sonder des distances plus petites que l'échelle de corde [10, 11, 12]. Par ailleurs, dans la gravité quantique, la longueur de Planck peut jouer un rôle fondamental, dans lequel les effets gravitationnels ne peuvent pas être négligés et les nouveaux phénomènes sont observés[13, 14, 15]. Il y a plus d'arguments qui jouent pour l'occurrence d'une longueur minimale, viennent des géométries non-commutatives [16, 17] et la physique des trous noirs [18, 19].

Une première conséquence de la longueur minimale est de l'apparence d'une coupure naturelle qui empêche les divergences (UV) habituelles. Une autre implication intéressante de ce concept est la connexion UV\IR: lorsque Δp est large (UV), Δx est proportionnel Δp et donc aussi large (IR). Ce type de relation est apparu dans plusieurs autres contextes tel que: la correspondance ADS\CFT [20] et la théorie des champs non-commutatifs [16], etc. Il est supposé que certaine effets d'une courte distance peuvent se manifester dans la longue distance (IR), apportant une jutification aux problèmes de l'analyse de mécanique quantique en présence de la distance minimale.

Concernant le paragraphe précédent, plusieurs applications ont été étudiées dans le cadre de cette version déformée de la mécanique quantique non-relativiste: L'oscillateur harmonique de dimensions arbitraires a été résolu [1, 2, 3, 4, 5, 21], le problème de la constante cosmologique a été étudié [22, 16], l'effet de la longueur minimale (LM) sur le spectre d'énergie du potentiel de Colomb à 3 D a été également étudié dans [23, 24], la boite unidimensionnelle [25], l'étude de la dynamique d'une particule non relativiste de masse variable

$m(t)$ se mouvant dans un potentiel linéaire dépendant du temps [26], etc. En plus l'extension relativiste de ce problème a limité certaines tentatives, parmi eux nous citons: l'équation de Dirac en présence d'une longueur minimale dans la référence [27], où l'oscillateur de Dirac à une dimension a été exactement résolu, l'équation de Dirac généralisée a été récemment étudiée par Nozari [28], l'oscillateur de Dirac à une dimension a été résolu par Nouicer [29], l'oscillateur bosonique de DKP (spin 0 et 1) unidimensionnel et à trois dimensions qui ont été respectivement traités dans [30] et [31], etc.

Les racines du deuxième concept qui est la géométrie non-commutative, remontent à la découverte de la mécanique quantique par Heisenberg, puis Snyder a innové en 1947 dans la notion de l'espace-temps non commutatif en physique des particules [32]. Cette non-commutativité de l'espace géométrique et algébrique au cas plus général où l'algèbre n'est pas commutative. Le même but vu dans la déformation de la distance minimale était de pouvoir se débarrasser des divergences UV de la théorie quantique des champs, tout en conservant la covariance de Lorentz. Mais, parallèlement à cela, la théorie de la normalisation produisant des résultats remarquables, la théorie de Snyder tomba dans l'oubli. Récemment, le concept des coordonnées non-commutatives est réapparu dans le contexte des théories des super-cordes, la longueur intrinsèque des cordes induisant une structure non-commutative dans l'espace-temps à très petite échelle. Les applications de la géométrie non-commutative dans la mécanique quantique relativiste et non-relativiste ont été traitées par un grand nombre de problèmes déjà étudiés [32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40].

En addition; et comme on le sait; l'intégrale de chemin est une technique alternative aux méthodes de Heisenberg et de Schrödinger. Cette approche est basée sur le Lagrangien. Cette dernière offre un point de vue alternatif sur la mécanique quantique qui s'est rapidement imposée en physique théorique avec son extension sur la théorie quantique des champs et les théories de jauge.

La généralisation de cette technique, dans le cadre des algèbres déformés a été appliquée sur la mécanique quantique relativiste et non relativiste. Par exemple; le cas de l'oscillateur harmonique à une dimension [41], le potentiel de Coulomb [42], le cas du potentiel linéaire dépendant du temps [26], l'équation de Klein-Gordon en présence d'un champ scalaire et de masse variable [43].

De la même façon que la déformation précédente, dans le contexte de la géométrie non-commutative, une formulation des intégrales de chemin a été construite et plusieurs versions ont été présentées. Citons par exemple; le problème d'une particule chargée de spin 1/2 se mouvant dans un champ électromagnétique quelconque a été traité dans ce cas relativiste et non-relativiste [44] et les propriétés thermodynamiques à température finie [45]. D'autre part, la difficulté de l'espace de phase non commutatif peut être évitée en travaillant soit dans la base mixte de l'espace des phases $\{|q_1, p_2\rangle\}$, ou dans la base $\{|q_2, p_1\rangle\}$ [46]. En outre; une autre version a été développée en utilisant états cohérents [47, 48].

L'objectif de cette thèse est d'étudier certains problèmes relativistes via le formalisme des intégrales de chemin supersymétrique, dans le cadre des algèbres déformées, comme le cas de la distance minimale et la géométrie non-commutative.

Cette thèse se compose essentiellement de sept chapitres:

Dans le premier chapitre, on exposera quelques définitions sur la structure algébrique de la théorie de déformation formelle et son application sur la mécanique classique et quantique.

Nous poursuivrons dans le deuxième chapitre la présentation du formalisme des intégrales de chemin pour le système d'oscillateur harmonique sur la mécanique quantique et statistique, dans le cadre de la déformation formelle, à savoir le cas des distances minimales et le cas de la géométrie non-commutative, où nous discuterons aussi les prescriptions adéquates introduites. Aussi, on exposera une généralisation de la méthode de Fradkin-Gitman à deux dimensions qui sera appliquée par la suite des travaux.

Dans le troisième chapitre, nous allons suggérer de traiter le problème de l'oscillateur de Dirac à une dimension dans la représentation des impulsions en présence de la distance minimale, et ce via la fonction de Green qui nous permet d'avoir toutes les informations concernant ce système.

Dans le quatrième chapitre et dans le même contexte de la théorie déformée qu'on a appliqué dans la partie précédente, nous allons pouvoir traiter la dynamique d'une particule de Dirac de masse variable avec un potentiel scalaire linéaire; par la méthode directe dans la représentation de l'espace des positions et par l'approche de Feynman dans la représentation des moments, et nous montrerons que les deux méthodes conduisent au même résultat du spectre énergétique du système, à l'ordre « un » du paramètre de déformation.

Dans le cinquième chapitre, nous proposerons d'étudier l'oscillateur relativiste (Klein Gordon et Dirac), dans le cadre de la géométrie de l'espace non-commutatif à deux dimensions et dans le cas de la présence du champ magnétique constant. Les fonctions de Green seront déterminées et les spectres énergétiques ainsi que les fonctions d'ondes correspondantes seront extraits.

Dans le sixième chapitre, on généralisera la géométrie non-commutative au cas de l'équation Feshbach-Villars à deux composantes sans spin sur les moments. Via le formalisme des intégrales de chemin supersymétrique. Pour effectuer l'intégration sur les variables fermioniques, nous introduiserons la transformation de F-W pour diagonaliser l'Hamiltonien et par un calcul direct nous obtienderons la fonction de Green aux problèmes en question. Le dernier chapitre sera consacré à un récapitulatif des principaux résultats et à nos conclusions générales.

2

Structures algébriques et déformations formelles

2.1 Introduction

Récemment, la théorie de la déformation de structure algébrique a trouvé un grand nombre d'intérêts, représenté de nombreuses applications dans le domaine de la physique. Ses racines remontent à l'incapacité de la physique classique pour expliquer certains phénomènes macroscopiques. Mathématiquement décrit par une variété de Poisson M, et notons $F(M)$ l'algèbre (commutative) des fonctions régulières sur M, appelées observables. Dans ce cas, il est important de quantifier ces variétés de Poisson (Mécanique quantique), en vue d'obtenir des résultats plus "précis" que ceux de la mécanique classique. De nombreux travaux se sont concentrés sur des possibilités de quantifications de telles variétés et l'idée d'utiliser la théorie des déformations algébriques, appelée "quantification par déformation" revient à Bayen, Flato, Fronsdal, Lichnerowicz et Sternheimer en 1978 [49].

L'objectif de ce chapitre est d'introduire d'un point de vue mathématique la théorie des déformations formelles des structures algébriques jouant un rôle fondamental en physique. Il s'agit des notions d'algèbres associatives, algèbres de Lie et algèbres de Poisson. La théorie des déformations formelles, introduite par Gerstenhaber pour les algèbres associatives, traduit les propriétés analytiques d'un voisinage d'une structure algébrique donnée en termes de groupes de cohomologie. On rappelle les définitions et propriétés algébriques de ces structures, ainsi que la cohomologie de Hochschild des algèbres associatives, la cohomologie de Chevalley-Eilenberg des algèbres de Lie et la cohomologie de Poisson. Puis, selon les conditions de déformation formelle nous allons expliquer comment construire et appliquer un exemple de la généralisation de variété de Poisson à l'ordre de déformation ($\mathtt{t}$) sur les systèmes de mécanique classique et mécanique quantique. Ce dernier exemple est plus compliquer pour les cas particuliers, comme, longueur minimale (GUP) et la géométrie non-commutative (GNC).

2.2 Structures algébriques et Cohomologie

Dans cette section, on rappelle les notions de base et les définitions de certaines structures algébriques ainsi que leurs cohomologies correspondantes.

2.2.1 Algèbre associative

En mathématiques, une algèbre associative est un espace vectoriel muni d'une multiplication qui est une application bilinéaire possédant les propriétés de distributivité et d'associativité.

Définition 2.2.1 *Une algèbre associative A sur un corps $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ muni d'une multiplication, c'est à dire d'une application bilinéaire $A \times A \to A$, telle que*

- $(xy)z = x(yz)$ pour tous x, y et z dans A,

où l'image de (x, y) est notée xy.

Si A contient une unité, i.e. un élément 1 tel que $1x = x = x1$ pour tout x dans A, alors A est appelée algèbre associative unifère ou unitaire. Une telle algèbre est un anneau et contient le corps de base $\mathbb{K}$ par identification de c dans $\mathbb{K}$ avec $c1$ dans A.

La dimension d'une algèbre associative A sur un corps $\mathbb{K}$ est sa dimension comme espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Exemple 2.2.1 *:*

- Les nombres complexes $\mathbb{C}$ forment une algèbre associative unitaire de dimension 2 sur le corps R des nombres réels.

- Les matrices carrées de taille n, à coefficients dans un corps commutatif $\mathbb{K}$, forment une algèbre associative unitaire sur corps $\mathbb{K}$, la multiplication étant le produit de matrice. La dimension de cette algèbre est n^2.

- Les polynômes à plusieurs variables forment une algèbre associative sur un corps $\mathbb{K}$. Cette algèbre est de dimension infinie.

- Les algèbres symétriques et les algèbres extérieures d'un espace vectoriel sont des algèbres associatives.

2.2.2 Cohomologie de Hochschild

La cohomologie de Hochschild des algèbres associatives a été définie par Hochschild par un complexe explicite dans [50]. L'opérateur de cohomologie de Hochschild, noté d_H, joue un rôle important dans la théorie des déformations formelles introduite par Gerstenhaber et il apparaît naturellement dans l'équation de formalité de Kontsevich dans la théorie de quantification.

Etant donné une $\mathbb{K}$-algèbre associative commutative, notée A, le complexe cohomologique de Hochschild de A est donné par

$$C^0(A) \stackrel{d^{(0)}}{\to} C^1(A) \stackrel{d^{(1)}}{\to} C^2(A) \stackrel{d^{(2)}}{\to} C^3(A) \stackrel{d^{(3)}}{\to} C^4(A) \stackrel{d^{(4)}}{\to} \ldots, \tag{2.2.1}$$

où l'espace $C^p(A)$ des $p-$cochaînes est défini pour $p \in -N^*$ par $C^p(A) = 0$, $C^0(A) = A$, et pour $p \in N^*$, $C^p(A)$ est l'espace des applications $\mathbb{K}$-linéares de $A^{\otimes p}$ dans A (voir pour plus de détail le livre Basic non-commutative Geometry [51]). La différentielle $d^\bullet = \oplus_{i=0}^{\infty} d^{(p)}$ est donnée par la formule

$$\begin{aligned}\forall \phi \in C^p(A),\ d^{(p)}\phi(a_0, \ldots, a_p) = a_0\phi(a_1, \ldots, a_p) - \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \phi(a_0, \ldots, a_i a_{i+1}, \ldots, a_p) \\ + (-1)^{p-1} \phi(a_0, \ldots, a_{p-1})a_p.\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

On peut l'écrire en termes du crochet de Gerstenhaber $[-,-]_G$ et du produit μ de A, comme suit

$$d^{(p)}\phi = (-1)^{p+1} [\mu, \phi]_G\,. \tag{2.2.3}$$

On définit alors la cohomologie de Hochschild de A comme la cohomologie du complexe de Hochschild associé à A. On pose $HH^0(A) = Ker\ d^{(0)} = A$ et

$$\forall\ p \in N^*,\ Z^p(A) = Ker\ d^{(p)},\ B^p(A) = Im\ d^{(p-1)},\ \text{et}\ HH^p(A) = Z^p\,(A)\,/B^p(A). \tag{2.2.4}$$

Notons que les éléments de $Z^p(A)$ sont appelés p-cocycles et ceux de $B^p(A)$ sont appelés p-cobords. On a $Z^p(A) \subset Z^p(A)$ car $d^{(p+1)} \circ d^{(p)} = 0$.

On termine ce paragraphe par une propriété importante de la cohomologie de Hochschild. Une algèbre de Gerstenhaber est une algèbre associative $Z-$graduée $V = \oplus_{p=0}^{\infty} V^p$ dont la multiplication est commutative graduée, telle que l'algèbre translatée (L'algèbre translatée est l'algèbre graduée dont les éléments de degré p sont les éléments de degré $p+1$ de V) $V[1]$

est munie d'un crochet de Lie $[-,-]$ tel que pour tout $x \in V^p, [x,-]$ est une dérivation de degré $p+1$ de l'algèbre V. On dit que V est une algèbre de Gerstenhaber différentielle graduée si, en plus, V est munie d'une différentielle qui est une dérivation pour la multiplication de V et le crochet de Lie.

Etant donné deux cochaînes $F \in C^p(A)$ et $G \in C^q(A)$, leur cup-produit est défini comme la cochaîne $F \cup G \in C^{p+q}(A)$ telle que

$$(F \cup G)\left(a_1, ..., a_{p+q}\right) = (-1)^{pq} F\left(a_1, ..., a_p\right) G\left(a_{p+1}, ..., a_{p+q}\right). \tag{2.2.5}$$

- Muni du cup-produit et de la différentielle de Hochschild, le complexe de Hochschild est une algèbre associative différentielle graduée.

- Munie du cup-produit et du crochet de Gerstenhaber, la cohomologie de Hochschild est une algèbre de Gerstenhaber.

2.2.3 Algèbre de Lie

En mathématiques, une algèbre de Lie, nommée en l'honneur du mathématicien Sophus Lie, est un espace vectoriel qui est muni d'un crochet de Lie, c'est-à-dire d'une loi de composition interne bilinéaire, anti-symétrique et qui vérifie l'identité de Jacobi.

Définition 2.2.2 *Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif.*

Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{K}$ muni d'une application bilinéaire $(x,y) \to [x,y]$ de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$ qui vérifie les propriétés suivantes:

1. $\forall x \in \mathfrak{g}$, $[x,x] = 0$.

2. $\forall x,y,z \in \mathfrak{g}$, $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$

Le produit $[x,y]$ est appelé crochet de Lie (ou simplement crochet) de x et y. Puisque le crochet est une fonction bilinéaire alternée de x, y, on a aussi l'identité $[x,y] = -[y,x]$ pour tout x, y dans $\mathfrak{g}$. L'identité (2) ci-dessus est appelée l'identité de Jacobi.

Une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ stable pour le crochet de Lie. Toute sous-algèbre de Lie de g est munie de manière évidente d'une structure d'algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$.

Remarque 2.2.1 *Contrairement aux algèbres tensorielles (et aux algèbres de Clifford, dont les algèbres extérieures), les algèbres de Lie ne sont pas unitaires, ni associatives.*

Exemple 2.2.2 *:*

- Tout espace vectoriel E peut être muni d'une structure d'algèbre de Lie, en posant $\forall$ $x, y \in E$, $[x, y] = 0$. Une telle algèbre de Lie, où le crochet de Lie est identiquement nul, est appelée abélienne.

- On peut, à partir de $(A, *)$, une algèbre associative sur un corps, construire une algèbre de Lie, de la façon suivante : on pose $\forall x, y \in E$, $[x, y] = x * y - y * x$ (c'est le commutateur des deux éléments x et y). Il est facile de vérifier que l'on définit ainsi sur A une structure d'algèbre de Lie.

Inversement, toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est contenue dans une algèbre associative, appelée algèbre enveloppante, dans laquelle le crochet de Lie coïncide avec le crochet défini ci-dessus. L'algèbre enveloppante est une algèbre de dimension infinie.

- Comme exemple concret de la situation ci-dessus, considérons $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'espace des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. C'est une algèbre associative pour le produit matriciel usuel. On peut donc également lui donner une structure d'algèbre de Lie, avec le crochet $[A, B] = AB - BA$. On note $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ cette algèbre, lorsque l'on considère sa structure d'algèbre de Lie.

- L'espace euclidien tri-dimensionnel $\mathbb{R}^3$ avec le produit vectoriel comme crochet de Lie est une algèbre de Lie.

2.2.4 Cohomologie de Chevalley–Eilenberg

La cohomologie de Chevalley–Eilenberg concerne les algèbres de Lie. Soit $\mathfrak{g} = (V, [,])$ une algèbre de Lie, on désigne par $\varphi^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ l'ensemble des p-cochaines defini par les applications p-linéaires $\varphi : V \times ... \times V \to V$ anti-symétriques.

l'ensemble des cochaines est

$$C(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} C^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}). \tag{2.2.6}$$

Le complexe de Chevalley-Eilenberg est déterminé par l'opérateur cobord défini par

$$\begin{aligned} \delta^p \quad &: \quad C^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \to C^{p+1}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \\ \varphi \quad &\to \quad \delta^p \varphi, \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

avec

$$\delta^p\phi(x_1,\cdots,x_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+1}[x_i,\phi(x_1,\cdots,\hat{x}_i,...,x_{p+1})] + \sum_{1\leq i<j\leq p+1}(-1)^{i+j}\phi([x_i,x_j],\cdots,\hat{x}_i,\cdots,\hat{x}_j,\cdots,x_{p+1}). \quad (2.2.8)$$

Le symbole "$\hat{x}$ " signifie que le terme correspondant à x est omis.

2.2.5 Algèbres de Poisson

Le crochet de Poisson de deux fonctions f et g défini sur le fibré cotangent T^*N à une variété M a été découvert par Siméon Denis Poisson en 1809 [52]. Lagrange et Poisson l'ont employée pour résoudre le problème de variation des constantes d'intégration. Ils n'ont considéré cependant que le crochet des fonctions coordonnées, pas celui de deux fonctions quelconques, et n'ont pas mentionné la propriété la plus importante de ce crochet: l'identité de Jacobi, découverte par Carl Gustav Jacobi [53]. Ce n'est qu'au cours de la seconde moitié du XX^{ème} siècle que la notion de structure de Poisson, sous sa forme générale, a été identifiée et systématiquement étudiée. L'étude approfondie des structures de Poisson est due à André Lichnerowicz [54] et indépendamment à Alexander Kirillov [55], Alan Weinstein [56].

En mathématiques, une algèbre de Poisson est une algèbre associative avec un crochet de Lie qui satisfait également la loi de Leibniz, qui est, le crochet est aussi une dérivation. Les algèbres de Poisson apparaissent naturellement dans la mécanique hamiltonienne, et sont aussi au centre dans l'étude des groupes quantiques. Une variété dont les fonctions sur cette variété sont munies d'une structure d'algèbre de Poisson sont connus comme variétés de Poisson. Les variétés symplectiques et les groupes de Poisson-Lie sont des cas particuliers.

Définition 2.2.3 *Une structure de Poisson sur une variété différentiable M est déterminée par la donnée d'une loi de composition sur l'espace $C^\infty(M,\mathbb{R})$, appelée crochet, $(f,g)\to\{f,g\}$, vérifiant les propriétés suivantes:*

- Bilinéarité,
- Antisymétrie, $\{f,g\} = -\{g,f\}$,
- la régle de Leibniz

$$\{f,gh\} = \{f,g\}h + g\{f,h\}. \quad f,g,h\in C^\infty(M), \quad (2.2.9)$$

- Identité de Jacobi,

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0. \tag{2.2.10}$$

Plus généralement

Définition 2.2.4 *Une* algèbre de Poisson *est une algèbre associative commutative* $(\mathcal{A}, \cdot)$ *sur* $\mathbb{K}$ *munie d'une application bilinéaire* $\{. \, , \, .\} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ *vérifiant pour tout* $f,\ g,\ h \in \mathcal{A}$

$$\{f, g\} = -\{g, f\}, \tag{2.2.11}$$

$$\circlearrowleft_{f,g,h} \{f, \{g, h\}\} = 0 \qquad (\textit{condition de Jacobi}), \tag{2.2.12}$$

$$\{h, f \cdot g\} = \{h, f\} \cdot g + f \cdot \{h, g\} \qquad (\textit{condition de Leibniz}). \tag{2.2.13}$$

On note par $(\mathcal{A}, \cdot, \{. \, , \, .\})$ *une telle algèbre.*

Une variété de symplectique est une variété différentielle munie d'une forme différentielle de degré 2 fermée et non dégénérée, appelée forme symplectique. L'étude des variétés symplectiques relève de la géométrie symplectique. Les variétés symplectiques apparaissent dans les reformulations analytiques abstraites de la mécanique classique utilisant la notion de fibre cotangent d'une variété, notamment dans la reformulation hamiltonnienne, où les configurations d'un système forment une variété dont le fibré cotangent décrit l'espace des phases du système.

Sur une variété symplectique, chaque fonction réelle H sur la variété induit un champ de vecteurs X_H, le hamiltonien de vecteurs de champ. Alors, soit deux fonctions F, G sur la variété symplectique, le crochet de Poisson $\{-, -\}$ peut être définie comme:

$$\{F, G\} = dG\left(X_F\right). \tag{2.2.14}$$

Cette définition est conforme en partie parce que le crochet de Poisson agit comme une dérivation. De façon équivalente, on peut définir le crochet de $\{-, -\}$ comme

$$X_{\{F,G\}} = \{X_F, X_G\}. \tag{2.2.15}$$

où $[-, -]$ est la dérivée de Lie. Lorsque la variété symplectique est R^{2n} avec la structure symplectique standard, puis le crochet de Poisson prend la forme bien connue

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^{n} \tfrac{\partial F}{\partial q_i} \tfrac{\partial G}{\partial p_i} - \tfrac{\partial F}{\partial p_i} \tfrac{\partial G}{\partial q_i}. \tag{2.2.16}$$

Des considérations similaires s'appliquent pour les variétés de Poisson, qui généralisent les variétés symplectiques.

Exemple 2.2.3

- *Sur* $C[z_1, z_2]$ *, l'application* $\varphi\partial_1\Lambda\partial_2$ *définit une structure d'algèbre de Poisson pour n'importe quel polynôme* $\varphi \in C[z_1, z_2]$ *,* ∂_j *étant la dérivation par rapport à* z_j
- *Sur* $C[z_1, z_2, z_3]$ *, l'application* $\partial_1\varphi\partial_2\Lambda\partial_3 + \partial_2\varphi\partial_3\Lambda\partial_1 + \partial_3\varphi\partial_1\Lambda\partial_2$ *définit une structure d'algèbre de Poisson pour n'importe quel polynôme* $\varphi \in C[z_1, z_2, z_3]$ *.*

2.2.6 Cohomologie de Poisson

Soit A une algèbre de Poisson. On désigne par $X^p(A)$ le $A-$module des dérivations anti-symétriques de A.

On considère le complexe

$$\chi^0(A) \overset{\delta^{(0)}}{\to} \chi^1(A) \overset{\delta^{(1)}}{\to} \chi^2(A) \overset{\delta^{(2)}}{\to} \chi^3(A) \overset{\delta^{(3)}}{\to} \chi^4(A) \overset{\delta^{(4)}}{\to} ..., \tag{2.2.17}$$

avec l'opérateur de cobord de Poisson $\delta^{(p)}$ défini par :

$$\begin{aligned}\delta^{(p)}(Q)\left(F_0, ..., F_p\right) &= \sum_{j=0}^{p}(-1)^j\left\{F_j, Q\left(F_0, ...,\widehat{F}_j, ..., F_p\right)\right\}\\ &+ \sum_{0\leq i\prec j\leq p}(-1)^{i+j}Q\left(\left\{F_i, F_j\right\}, F_0, ...,\widehat{F}_j, ..., F_p\right).\end{aligned} \tag{2.2.18}$$

L'espace de cohomologie de Poisson de degré p est donné par la formule

$$HP^p(A) = \ker\delta^{(p)}/Im\ \delta^{(p-1)}. \tag{2.2.19}$$

On a vu que la différentielle de Hochschild peut s'écrire en fonction du crochet de Gerstenhaber. L'analogue pour la différentielle de Poisson est fourni par le crochet de Schouten: c'est l'application $[-,-]_S$ définie par

$$\chi^p(A) \times \chi^p(A) \to \chi^{p+q-1}(A). \tag{2.2.20}$$

$$(P, Q) \to [P, Q]_S\,. \tag{2.2.21}$$

où

$$\begin{aligned}[P, Q]_S\left(F_1, ..., F_{p+q-1}\right) &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{q,p-1}}\varepsilon(\sigma)P\left(Q\left(F_{\sigma(1)}, ..., F_{\sigma(q)}\right), F_{\sigma(q+1)}, ..., F_{\sigma(p+q-1)}\right)\\ &-(-1)^{(p-1)(q-1)}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{p,q-1}}\varepsilon(\sigma)P\left(Q\left(F_{\sigma(1)}, ..., F_{\sigma(p)}\right), F_{\sigma(p+1)}, ..., F_{\sigma(p+q-1)}\right),\end{aligned} \tag{2.2.22}$$

où $S_{p,q-1}$ représente l'ensemble des permutations $(p, q-1)-$shuffles de l'ensemble $[1, p+q-1]$ (on pose $S_{p,-1} = S_{-1,q} = \emptyset$).

On a alors

$$\delta^{(p)}(Q) = -[Q, \{-,-\}]_S \qquad \text{pour tout } Q \in \chi^p(A). \tag{2.2.23}$$

2.3 Déformations formelles

La déformation des objets mathématiques est une des plus anciennes techniques utilisées par les mathématiciens. Les différents domaines où la notion de déformation apparaît sont la géométrie, variétés complexes (Kodaira et Spencer 1958). Ils ont prouvé en particulier que les déformations infinitésimales peuvent être paramétrées par un groupe de cohomologie. La théorie de déformation des variétés complexes compactes a été développée par Kuranishi (1962) [57], des variétés algébriques par Artin [58] et Schlessinger [59], des algèbres de Lie par Nijenhuis et Richardson [60] et des anneaux et les algèbres associatives par Gerstenhaber [61]. La notion duale de la déformation (dans un certain sens) est la notion de dégénérescence qui est apparue en premier dans la littérature de physique (Segal 1951, Inonu et Wigner [62]). Les dégénérescences sont aussi appelées spécialisation ou contraction.

Notre but dans ce chapitre, est de présenter les concepts de base de la théorie de déformation des algèbres associatives au sens de Gerstenhaber [63, 64]. Nous appliquons ensuite cette approche de déformation à la physique classique analytique et à la mécanique quantique dans des cas particuliers. La déformation du crochet de Poisson, permet de trouver les équations d'Hamiltonien et les équations du mouvement.

Notation 2.3.1 *Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $A_0 = (V, \mu_0)$ une algèbre associative ou $\mu_0 : V \times V \to V$ est la multiplication. Soit $\mathbb{K}[[t]]$ l'anneau des séries formelles à une variable t et à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $V[[t]]$ l'ensemble des séries formelles dont les coefficients sont des éléments de V, ($V[[t]]$ est obtenue par l'extension du domaine des coefficients V de $\mathbb{K}$ à $\mathbb{K}[[t]]$). On note que $V[[t]]$ est un $\mathbb{K}[[t]]$-module. Lorsque V est d'une dimension finie, nous avons $V[[t]] = V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[[t]]$. On constate que V est un sous-module de $V[[t]]$. De même que, $V[[t]]$ est un $\mathbb{K}[[t]]-$module. Étant donné une application $\mathbb{K}$ - bilinéaire $f : V \times V \to V$, elle admet naturellement une extension en application $\mathbb{K}[[t]]$- bilinéaire $f : V[[t]] \times V[[t]] \to V[[t]]$, définie si $x = \sum_{i\geq 0} a_i t^i$ et $y = \sum_{j\geq 0} b_j t^j$ par $f(x,y) = \sum_{i\geq 0, i\geq 0} f(a_i, b_j) t^{i+j}$.*

Définition 2.3.1 *Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $A_0 = (V, \mu_0)$ une algèbre associative. Une déformation formelle associative de A_0 est la donnée d'une application $\mathbb{K}[[t]]-$bilinéaire $\mu_t : V[[t]] \times V[[t]] \to V[[t]]$ de la forme*

$$\mu_t = \sum_{i\geq 0} \mu_i t^i, \tag{2.3.1}$$

où chaque μ_i est une application $\mathbb{K}[[\mathtt{t}]]$-bilinéaire $\mu_i : V \times V \to V$ (étendue en application $\mathbb{K}[[\mathtt{t}]]$ −bilinéaire). La condition d'associativité formelle s'écrit: pour $x, y, z \in V$

$$\mu_{\mathtt{t}}(x, \mu_{\mathtt{t}}(y, z)) - \mu_{\mathtt{t}}(\mu_{\mathtt{t}}(x, y), z) = 0. \tag{2.3.2}$$

Les séries formelles sont infinies, une question naturelle est de s'assurer de la convergence. Elle est donnée par un théorème d'Artin $[\mathcal{A}]$.

Une déformation est dite d'ordre n si $\mu_{\mathtt{t}} = \sum_{i=0}^{n} \mu_i \mathtt{t}^i$. Elle est dite infinitesimale si $n = 1$.

2.3.1 L'équation de déformation

Un premier problème est de donner des conditions sur les μ_i telle que la déformation $\mu_{\mathtt{t}}$ soit associative, c'est à dire

$$\forall \ \ x, y, z \in V \quad \mu_{\mathtt{t}}(x, \mu_{\mathtt{t}}(y, z)) - \mu_{\mathtt{t}}(\mu_{\mathtt{t}}(x, y), z) = 0. \tag{2.3.3}$$

L'équation est équivalente à un système infini d'équation qu'on obtient en remplaçant $\mu_{\mathtt{t}}$ par son expression en fonction des μ_i et $\mathtt{t}$. En developpant suivant les puissances de $\mathtt{t}$, on obtient

$$\left\{ \sum_{i+j=k \quad i,j \geq 0} \mu_i\left(x, \mu_j(y, z)\right) - \mu_i\left(\mu_j(x, y), z\right) = 0. \qquad k = 0, 1, 2, \dots \right. \tag{2.3.4}$$

Ce système infini, appelée équation de déformation, donne les conditions nécessaires et suffisantes pour que $\mu_{\mathtt{t}}$ soit associative

$$\left\{ \sum_{i=0}^{k} \mu_i\left(x, \mu_{k-i}(y, z)\right) - \mu_i\left(\mu_{k-i}(x, y), z\right) = 0. \qquad k = 0, 1, 2, \dots \right. \tag{2.3.5}$$

La première équation $(k = 0)$ est la condition d'associativité pour μ_0.

La seconde équation est:

$$\mu_0(x, \mu_1(y, z)) - \mu_0(\mu_1(x, y), z) + \mu_1(x, \mu_0(y, z)) - \mu_1(\mu_0(x, y), z) = 0. \tag{2.3.6}$$

Elle montre que μ_1 est un 2-cocycle pour la cohomologie de Hochschild $(\mu_1 \in Z^2(A_0, A_0))$.

Plus généralement, supposons que μ_p est le premier coefficient non nul après μ_0 dans la déformation μ_t. On a que μ_p est un 2-cocycle et il determine la partie infinitesimale de $\mu_{\mathtt{t}}$.

2.3.2 Obstructions

Dans cette section on étudie les contraintes pour étendre une déformation d'ordre $m-1$ en une déformation d'ordre m.

On considère la k^{th} équation du système (2.3.5), pour k arbitraire, $k>1$, En rassemblant le premier et le dernier terme, l'équation peut s'écrire

$$\delta^2\mu_k\left(x,y,z\right)=\sum_{i=1}^{k-1}\mu_i\left(\mu_{k-i}\left(x,y\right),z\right)-\mu_i\left(x,\mu_{k-i}\left(y,z\right)\right), \tag{2.3.7}$$

où $\delta^2\mu_k$ est le deuxième opérateur cobord de la cohomologie de Hochschild applique à μ_k.

Supposons que la déformation tronquée $\mu_t = \mu_0+\mathtt{t}\mu_1+\mathtt{t}^2\mu_2+...+\mathtt{t}^{m-1}\mu_{m-1}$ satisfait l'équation de déformation. La déformation tronquée est étendue à une déformation d'ordre m, c'est-à-dire $\mu_t=\mu_0+\mathtt{t}\mu_1+\mathtt{t}^2\mu_2+...+\mathtt{t}^{m-1}\mu_{m-1}+\mathtt{t}^m\mu_m$ si

$$\delta^2\mu_m\left(x,y,z\right)=\sum_{i=1}^{m-1}\mu_i\left(\mu_{m-i}\left(x,y\right),z\right)-\mu_i\left(x,\mu_{m-i}\left(y,z\right)\right). \tag{2.3.8}$$

le terme de droite de cette équation est appelé obstruction pour étendre la déformation.

En utilisant l'opération ronde de Gerstenhaber défini par

$$\mu_i\bullet\mu_j\left(x,y,z\right)=\mu_i\left(\mu_j\left(x,y\right),z\right)-\mu_i\left(x,\mu_j\left(y,z\right)\right), \tag{2.3.9}$$

l'obstruction s'écrit

$$\sum_{i=1}^{m-1}\mu_i\bullet\mu_{m-1} \text{ ou } \sum_{i+j=m \;\; i,j\neq m}\mu_i\bullet\mu_j. \tag{2.3.10}$$

Un résultat important de la théorie des déformations montre que les obstructions sont des 3-cocyles. Ainsi si l'espace de cohomologie $H_H^3\left(A,A\right)$ est trivial alors toute déformation d'ordre n peut s'étendre en une déformation d'ordre $n+1$.

2.3.3 Déformations équivalentes et déformations triviales

On caractérise maintenant les déformations équivalentes. Deux déformations formelles associatives μ_t et μ_t' de μ_0, sont dites équivalentes s'il existe un isomorphisme formel ϕ_t qui est une application $\mathbb{K}\left[[t]\right]$-linéaire s'écrivant sous la forme

$$\phi_t=\phi_0+\mathtt{t}\phi_1+\mathtt{t}^2\phi_2+... \qquad \text{où} \quad \phi_i\in End_{\mathbb{K}}(V), \tag{2.3.11}$$

avec $\phi_0=Id_V$ l'application identité de V, telle que

$$\mu_{\mathtt{t}}\left(x,y\right)=\phi_{\mathtt{t}}^{-1}(\mu_{\mathtt{t}}'((\phi_{\mathtt{t}}\left(x\right),\phi_{\mathtt{t}}\left(y\right)))) \quad \forall \quad x,y\in V. \tag{2.3.12}$$

Une déformation $\mu_{\mathtt{t}}$ de μ_0 est dite triviale si et seulement si $\mu_{\mathtt{t}}$ est équivalente à μ_0.

Supposons que $\mu_{\mathtt{t}} = \mu_0 + \mathtt{t}\mu_1 + \mathtt{t}^2\mu_2 + ...$ et $\mu'_{\mathtt{t}} = \mu_0 + \mathtt{t}\mu'_1 + \mathtt{t}^2\mu'_2 + ...$ soient deux déformations de μ_0. Elles sont équivalentes s'il existe $\phi_{\mathtt{t}} = Id + \mathtt{t}\phi_1 + \mathtt{t}^2\phi_2 + ...$ où $\phi_i \in End_{\mathbb{K}}(V)$ telle que

$$\phi_{\mathtt{t}}\left(\mu_{\mathtt{t}}(x,y)\right) = \mu'_{\mathtt{t}}\left(\phi_{\mathtt{t}}(x), \phi_{\mathtt{t}}(y)\right) \qquad \forall\ x,y \in V. \tag{2.3.13}$$

En remplaçant $\mu_{\mathtt{t}}$, $\mu'_{\mathtt{t}}$ et $\phi_{\mathtt{t}}$ par ses expressions en fonction des μ_i, ϕ_i et $\mathtt{t}$. En developpant suivant les puisances de $\mathtt{t}$, on obtient le résultat suivant:

$$\sum_{i+j=k} \phi_i\left(\mu_j(x,y)\right) = \sum_{i+j+l=k} \mu'_i\left(\phi_j(x), \phi_l(y)\right), \quad i,j,k,l = 0,1,2,... . \tag{2.3.14}$$

La première équation est la condition d'associativité pour μ_0.

La seconde équation est:

$$\mu'_1(x,y) = \mu_1(x,y) + \phi_1(\mu_0(x,y)) - \mu_0(\phi_1(x), y) - \mu_0(x, \phi_1(y)). \tag{2.3.15}$$

Si $\mu_1 \in B^2(A,A)$ alors $\exists\ f$ tell que $\mu_1 = \delta f$. En posant $\phi_1 = -f$, on obtient $\mu'_1 = 0$.

Ainsi, on obtient le résultat suivant

$$\mu_1(x,y) = -\phi_1(\mu_0(x,y)) + \mu_0(\phi_1(x), y) + \mu_0(x, \phi_1(y)). \tag{2.3.16}$$

Proposition 2.3.1 *Toute déformation non triviale μ_t de μ_0 est équivalente à*

$$\mu_t = \mu_0 + t^p\mu'_p + t^{p+1}\mu'_{p+1} + ... \tag{2.3.17}$$

où $\mu'_p \in Z^2(A,A)$ et $\mu'_p \notin B^2(A,A)$.

D'où on en déduit le théorème fondamental suivant:

Théorème 2.3.1 *Si $H^2(A,A) = 0$, alors toutes les déformations de A sont équivalentes à une déformation triviale.*

2.3.4 Algèbres de Poisson et déformation des algèbres commutatives

On étudie dans cette section les déformations des algèbres associatives commutatives. On montre que la déformation d'ordre 1 induit une structure de Poisson.

Soit $A_{\mathtt{t}} = (V, \mu_{\mathtt{t}})$ une déformation d'une algèbre associative commutative $A_0 = (V, \mu_0)$. Supposons que

$$\mu_{\mathtt{t}}(x,y) = \mu_0(x,y) + \mu_1(x,y)\,\mathtt{t} + \mu_2(x,y)\,\mathtt{t}^2 + ..., \quad \forall x,y \in V. \tag{2.3.18}$$

Alors

$$\frac{\mu_t(x,y)-\mu_t(y,x)}{\mathtt{t}} = \mu_1(x,y) - \mu_1(y,x) + \mathtt{t}\sum_{i\geq 2}(\mu_i(x,y) - \mu_i(y,x))\,\mathtt{t}^{i-1}. \tag{2.3.19}$$

Par conséquent, si $\mathtt{t}$ tend vers zéro, alors $\frac{\mu_t(x,y)-\mu_t(y,x)}{\mathtt{t}}$ tend vers $\{x,y\} := \mu_1(x,y) - \mu_1(y,x)$. le crochet précédent définit une structure d'algèbre de Poisson sur l'algèbre commutative A_0.

En terme physique, on peut considérer $\mathtt{t}$ comme un paramètre quantique telle la constante de Planck, l'algèbre de Poisson A est la limite classique de l'algèbre de Poisson $A[[\mathtt{t}]]$ et l'algèbre $A[[\mathtt{t}]]$ est la quantification par déformation de l'algèbre de Poisson A.

Théorème 2.3.2 *Soit $A_0 = (V, \mu_0)$ une algèbre associative commutative et $A_t = (V, \mu_t)$ une déformation formelle de A_0. Considérons le crochet défini pour $x, y \in V$ par $\{x,y\} = \mu_1(x,y) - \mu_1(y,x)$ où μ_1 est le premier terme de la déformation μ_t.*

Alors $(V, \mu_0, \{-,-\})$ est une algèbre de Poisson.

Preuve: le crochet est anti-symétrique par définition. Montrons que la condition de Jacobi est satisfaite par le crochet. On a

$$\begin{aligned}
\circlearrowleft_{x,y,z}\{x,\{y,z\}\} =& \circlearrowleft_{x,y,z}(\mu_1(x,\mu_1(y,z)) - \mu_1(x,\mu_1(z,y)) + \\
&- \mu_1(\mu_1(y,z),x) + \mu_1(\mu_1(z,y),x)) \\
&= \mu_1(x,\mu_1(y,z)) - \mu_1(x,\mu_1(z,y)) \\
&-\mu_1(\mu_1(y,z),x) + \mu_1(\mu_1(z,y),x) \\
&+\mu_1(y,\mu_1(z,x)) - \mu_1(y,\mu_1(x,z)) \\
&-\mu_1(\mu_1(z,x),y) + \mu_1(\mu_1(x,z),y) \\
&+\mu_1(z,\mu_1(x,y)) - \mu_1(z,\mu_1(y,x)) \\
&-\mu_1(\mu_1(x,y),z) + \mu_1(\mu_1(y,x),z) \\
=& \circlearrowleft_{x,y,z}\mu_1 \bullet \mu_1(x,y,z) - \circlearrowleft_{x,y,z}\mu_1 \bullet \mu_1(x,z,y).
\end{aligned} \tag{2.3.20}$$

l'équation de déformation (2.3.5) implique pour $s = 2$, que

$$\mu_1 \bullet \mu_1 = -\mu_2 \bullet \mu_0 - \mu_0 \bullet \mu_2, \tag{2.3.21}$$

ce qui est équivalent à

$$\mu_1 \bullet \mu_1 = -\delta^2\mu_2, \tag{2.3.22}$$

on obtient

$$\circlearrowleft_{x,y,z}\{x,\{y,z\}\} = \circlearrowleft_{x,y,z} - \circlearrowleft_{x,y,z}\delta^2\mu_2(x,y,z) + \circlearrowleft_{x,y,z}\delta^2\mu_2(x,z,y) = 0. \tag{2.3.23}$$

Remarque 2.3.1 *le problème de quantification par déformation est le problème inverse: étant donnée une algèbre de Poisson A, il s'agit de trouver une déformation formelle de A permettant de retrouver la structure d'algèbre de Poisson d'origine sur A, en considérant la limite quasi-classique. la multiplication déformée est appelée produit-star.*

2.3.5 Déformation de la structure de Poisson de Moyal

Dans cette section on étudie les déformations formelles du crochet de Moyal défini sur l'algèbre des fonctions d'une variété symplectique. On pose

$$\{f,g\}_{\mathtt{t}} = \sum_{k=0}^{n} \mathtt{t}^k \{f,g\}_k\,, \tag{2.3.24}$$

avec

$$\{f,g\}_k = \sum_{i,j=1}^{2n} \mathbb{J}_{ij}^k(x) \tfrac{\partial f}{\partial x_i}\tfrac{\partial g}{\partial x_j}, \quad k = 0,1,2,...,n, \tag{2.3.25}$$

où les $x_i = (x_1, ..., x_{2n})$ sont les coordonnées dans les espaces de phase sur la variété de Poisson M. Le tenseur $\mathbb{J}^0(x)$ est tout simplement égal à $\begin{pmatrix} \mathbb{O}_n & \mathbb{I}_n \\ -\mathbb{I}_n & \mathbb{O}_n \end{pmatrix}$, avec $\mathbb{O}_n$ et $\mathbb{I}_n$ sont les matrices nulle et unité à n dimensions. Dans le cas $k=0$ on trouve le crochet de Poisson non déformé ou habituel c'est-à-dire

$$\{f,g\}_0 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}\right), \text{ (Mécanique analytique ordinaire)..} \tag{2.3.26}$$

Les autres crochets sont $\{f,g\}_k$ pour le $k \neq 0$, la relation (2.3.24), définit une déformation formelle de l'algèbre associative M.

Le crochet $\{-,-\}_{\mathtt{t}}$ doit vérifier la compatibilité et l'identité de Jacobi

$$\{f,gh\}_{\mathtt{t}} = \{f,g\}_{\mathtt{t}}\, h + g\,\{f,h\}_{\mathtt{t}}\,, \tag{2.3.27}$$

et

$$\circlearrowleft_{f,g,h} \{f,\{g,h\}_{\mathtt{t}}\}_{\mathtt{t}} = 0, \tag{2.3.28}$$

où $\circlearrowleft_{f,g,h}$ est la somme sur les permutations circulaires de f, g et h. En utilisant la définition du crochet de Poisson, les équations (2.3.27) et (2.3.28) respectivement donnent

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mathtt{t}^k\sum_{i,j=1}^{2n}\tfrac{\partial f}{\partial x_i}\mathbb{J}_{ij}^l(x)\tfrac{\partial(gh)}{\partial x_j} = \sum_{k=0}^{\infty}\mathtt{t}^k\sum_{i,j=1}^{2n}\tfrac{\partial f}{\partial x_i}\mathbb{J}_{ij}^l(x)\tfrac{\partial(g)}{\partial x_j}h + \sum_{k=0}^{\infty}\mathtt{t}^k\sum_{i,j=1}^{2n} g\tfrac{\partial f}{\partial x_i}\mathbb{J}_{ij}^l(x)\tfrac{\partial(h)}{\partial x_j}. \tag{2.3.29}$$

et

$$\begin{aligned} \{f,\{g,h\}_{\mathtt{t}}\}_{\mathtt{t}} &= \\ \left\{f, \sum_{k=0}^{\infty}\mathtt{t}^k\{f,g\}_k\right\}_k &= \sum_{k,l=0}^{\infty}\mathtt{t}^{l+k}\sum_{i,j=1}^{2n}\sum_{\mu,\nu=1}^{2n}\tfrac{\partial f}{\partial x_i}\mathbb{J}_{ij}^l(x)\tfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\mathbb{J}_{\mu\nu}^k(x)\tfrac{\partial g}{\partial x_\mu}\tfrac{\partial h}{\partial x_\nu}\right). \end{aligned} \tag{2.3.30}$$

Par les propriétés de l'algèbre de Poisson déformée, nous pouvons trouver les caractéristiques des matrices $\mathbb{J}_{ij}^{k}(x)$.

1) **Si les matrices sont indépendantes de l'espace:**

La propriété de l'antisymétrie de l'algèbre de Poisson est $\{f,g\}_{\mathtt{t}} = -\{g,f\}_{\mathtt{t}}$ on a

$$\begin{aligned} \{f,g\}_{\mathtt{t}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathtt{t}^{k} \sum_{i,j=1}^{2n} \tfrac{\partial f}{\partial x_i} \mathbb{J}_{ij}^{k}(x) \tfrac{\partial g}{\partial x_j} \\ &= -\sum_{k=0}^{\infty} \mathtt{t}^{k} \sum_{i,j=1}^{2n} \tfrac{\partial g}{\partial x_i} \mathbb{J}_{ij}^{k}(x) \tfrac{\partial f}{\partial x_j}. \end{aligned} \tag{2.3.31}$$

Pour obtenir la propriété de la matrice $\mathbb{J}_{ij}^{k}(x)$, il faut changer l'indice i par j

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \mathtt{t}^{k} \sum_{i,j=1}^{2n} \tfrac{\partial f}{\partial x_i} \mathbb{J}_{ij}^{k}(x) \tfrac{\partial g}{\partial x_j} &= -\sum_{k=0}^{\infty} \mathtt{t}^{k} \sum_{i,j=1}^{2n} \tfrac{\partial g}{\partial x_i} \mathbb{J}_{ij}^{k}(x) \tfrac{\partial f}{\partial x_j} \\ &= -\sum_{k=0}^{\infty} \mathtt{t}^{k} \sum_{i,j=1}^{2n} \tfrac{\partial g}{\partial x_j} \mathbb{J}_{ji}^{k}(x) \tfrac{\partial f}{\partial x_i} \\ &= -\sum_{k=0}^{\infty} \mathtt{t}^{k} \sum_{i,j=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathbb{J}_{ji}^{k}(x) \tfrac{\partial g}{\partial x_j}. \end{aligned} \tag{2.3.32}$$

La relation (2.3.32) implique que le tenseur $\mathbb{J}_{ij}^{k}(x)$ est anti-symétrique:

$$\mathbb{J}_{ij}^{k} = -\mathbb{J}_{ji}^{k}, \quad \text{pour tout les } k = 0,1,2,...n, \ \mathbb{J}_{ii}^{k}(x) = 0, \tag{2.3.33}$$

donc nous pouvons s'assurer que la propriété (2.3.33) utilise l'identité de Jacobi (2.3.28),

$$\circlearrowleft_{f,g,h} \{f,\{g,h\}_{\mathtt{t}}\}_{\mathtt{t}} = 0. \tag{2.3.34}$$

En utilisant la définition du crochet de Poisson

$$\circlearrowleft_{f,g,h} \sum_{k,l=0}^{\infty} \mathtt{t}^{l+k} \sum_{i,j,\mu,\nu=1}^{2n} \left[(\partial_\mu f) \mathbb{J}_{\mu\nu}^{l} (\partial_\nu \partial_i g) \mathbb{J}_{ij}^{k} (\partial_j h) + (\partial_\mu f) \mathbb{J}_{\mu\nu}^{l} (\partial_i g) \mathbb{J}_{ij}^{k} (\partial_\nu \partial_j h) \right] = 0. \tag{2.3.35}$$

On trouve trois équations qui montrent l'antisymétrie de la matrice $\mathbb{J}_{ij}^{k}$ qui sont

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} \mathtt{t}^{l+k} \sum_{i,j,\mu,\nu=1}^{2n} \left[(\partial_\mu f) \mathbb{J}_{\mu\nu}^{l} (\partial_\nu \partial_i g) \mathbb{J}_{ij}^{k} (\partial_j h) + (\partial_\mu h) \mathbb{J}_{\mu\nu}^{l} (\partial_i f) \mathbb{J}_{ij}^{k} (\partial_\nu \partial_j g) \right] = 0, \tag{2.3.36}$$

et

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} \mathtt{t}^{l+k} \sum_{i,j,\mu,\nu=1}^{2n} \left[(\partial_\mu h) \mathbb{J}_{\mu\nu}^{l} (\partial_\nu \partial_i f) \mathbb{J}_{ij}^{k} (\partial_j g) + (\partial_\mu g) \mathbb{J}_{\mu\nu}^{l} (\partial_i h) \mathbb{J}_{ij}^{k} (\partial_\nu \partial_j f) \right] = 0, \tag{2.3.37}$$

et

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} \mathtt{t}^{l+k} \sum_{i,j,\mu,\nu=1}^{2n} \left[(\partial_\mu g)\, \mathbb{J}^l_{\mu\nu}\, (\partial_\nu \partial_i h)\, \mathbb{J}^k_{ij}\, (\partial_j f) + (\partial_\mu f)\, \mathbb{J}^l_{\mu\nu}\, (\partial_i g)\, \mathbb{J}^k_{ij}\, (\partial_\nu \partial_j h) \right] = 0, \qquad (2.3.38)$$

à l'ordre p de $\mathtt{t}$ on peut écrire l'éq.(2.3.36) comme

$$\sum_{p=0}^{\infty} \mathtt{t}^p \sum_{k=0}^{p} \sum_{i,j,\mu,\nu=1}^{2n} \left[(\partial_\mu f)\, \mathbb{J}^{p-k}_{\mu\nu}\, (\partial_\nu \partial_i g)\, \mathbb{J}^k_{ij}\, (\partial_j h) + (\partial_\mu h)\, \mathbb{J}^{p-k}_{\mu\nu}\, (\partial_i f)\, \mathbb{J}^k_{ij}\, (\partial_\nu \partial_j g) \right] = 0, \qquad (2.3.39)$$

avec les changements des indices ($\mu \to i$, $i \to \nu$, $\nu \to j$ et $j \to \mu$) on trouve

$$\sum_{i,j,\mu,\nu=1}^{2n} (\partial_i f)\, (\partial_\nu \partial_j g)\, (\partial_\mu h) \sum_{k=0}^{p} \left(-\mathbb{J}^{p-k}_{ij} \mathbb{J}^k_{\mu\nu} + \mathbb{J}^{p-k}_{\mu\nu} \mathbb{J}^k_{ij} \right) = 0, \qquad (2.3.40)$$

l'équation (2.3.40) est la somme sur k qui vérifié l'antisymétrie

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{p} \left(-\mathbb{J}^{p-k}_{ij} \mathbb{J}^k_{\mu\nu} + \mathbb{J}^{p-k}_{\mu\nu} \mathbb{J}^k_{ij} \right) &= -\mathbb{J}^p_{ij} \mathbb{J}^0_{\mu\nu} + \mathbb{J}^p_{\mu\nu} \mathbb{J}^0_{ij} \\ &\quad -\mathbb{J}^{p-k}_{ij} \mathbb{J}^k_{\mu\nu} + \mathbb{J}^{p-k}_{\mu\nu} \mathbb{J}^k_{ij} \\ &\quad \vdots \\ &\quad -\mathbb{J}^0_{ij} \mathbb{J}^p_{\mu\nu} + \mathbb{J}^0_{\mu\nu} \mathbb{J}^p_{ij}. \end{aligned} \qquad (2.3.41)$$

La condition de Jacobi est vérifiée par l'anti-symétrique de matrice de $\mathbb{J}^k$.

Donc μ_t est une déformation formelle (comme structure de Poisson) de μ_0

$$\mathbb{J}^k_{ij} = -\mathbb{J}^k_{ji} \qquad \forall i, j, k. \qquad (2.3.42)$$

Nous pouvons aisément montrer l'identité de leibniz l'éq (2.3.29) pour la déformation formelle μ_t de μ_0.

2) **Si les matrices dépendent de l'espace:**

Pour obtenir la propriété de la matrice $\mathbb{J}^k_{ij}(x)$ dans ce cas, il faut utiliser l'identité de Jacobi.

On obtient de l'équation (2.3.30)

$$\begin{aligned} \circlearrowleft_{f,g,h} \{f, \{g,h\}_{\mathtt{t}}\}_{\mathtt{t}} &= \circlearrowleft_{f,g,h} \sum_{k,l=0}^{\infty} \mathtt{t}^{l+k} \sum_{i,j=1}^{2n} \sum_{\mu,\nu=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathbb{J}^l_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mathbb{J}^k_{\mu\nu}(x) \frac{\partial g}{\partial x_\mu} \frac{\partial h}{\partial x_\nu} \right) \\ &= \circlearrowleft_{f,g,h} \sum_{k,l=0}^{\infty} \mathtt{t}^{l+k} \sum_{i,j=1}^{2n} \sum_{\mu,\nu=1}^{2n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial x_\mu} \frac{\partial h}{\partial x_\nu} \right) \mathbb{J}^l_{ij}(x) \frac{\partial \mathbb{J}^k_{\mu\nu}(x)}{\partial x_j} = 0. \end{aligned} \qquad (2.3.43)$$

A l'ordre p de $\mathtt{t}$ on peut écrire l'éq(2.3.43) comme

$$\begin{aligned} \circlearrowleft_{f,g,h} \{f, \{g,h\}_{\mathtt{t}}\}_{\mathtt{t}} = \sum_{p=0}^{\infty} \mathtt{t}^p \sum_{k=0}^{p} \sum_{i,j,\mu,\nu=1}^{2n} &\left[(\partial_\mu f)\, (\partial_i g)\, (\partial_j h)\, \mathbb{J}^{p-k}_{\mu\nu} \left(\partial_\nu \mathbb{J}^k_{ij} \right) \right. \\ &+ (\partial_\mu h)\, (\partial_i f)\, (\partial_j g)\, \mathbb{J}^{p-k}_{\mu\nu} \left(\partial_\nu \mathbb{J}^k_{ij} \right) + (\partial_\mu g)\, (\partial_i h)\, (\partial_j f)\, \mathbb{J}^{p-k}_{\mu\nu} \left(\partial_\nu \mathbb{J}^k_{ij} \right). \end{aligned} \qquad (2.3.44)$$

Après simplification, on obtient

$$\sum_{k=0}^{p}\sum_{i,j,\mu,\nu=1}^{2n}\left[\mathbb{J}_{\mu\nu}^{p-k}\left(\partial_\nu \mathbb{J}_{ij}^{k}\right)+\mathbb{J}_{j\nu}^{p-k}\left(\partial_\nu \mathbb{J}_{\mu i}^{k}\right)+\mathbb{J}_{i\nu}^{p-k}\left(\partial_\nu \mathbb{J}_{j\mu}^{k}\right)\right]=0. \tag{2.3.45}$$

On suppose $k=1$, l'identité de Jacobi (2.3.28) est:

$$\circlearrowleft_{f,g,h}\{f,\{g,h\}_{\mathtt{t}}\}_{\mathtt{t}}=\circlearrowleft_{x,y,z}\left[\{f,\{g,h\}_0\}_0+\mathtt{t}\{f,\{g,h\}_0\}_1+\mathtt{t}\{f,\{g,h\}_1\}_0\right.$$
$$\left.+\mathtt{t}^2\{f,\{g,h\}_1\}_1\right]. \tag{2.3.46}$$

Si on considère des déformations infinitesimales, on a, à l'ordre 2, :

$$\circlearrowleft_{f,g,h}\{f,\{g,h\}_1\}_1=0. \tag{2.3.47}$$

Le crochet de Poisson est définie dans la relation (2.3.25) donne

$$\circlearrowleft_{f,g,h}\sum_{k,l}^{2n}\sum_{i,j}^{2n}\left[\mathbb{J}_{ij}^{1}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mathbb{J}_{kl}^{1}\frac{\partial g}{\partial x_k}\frac{\partial h}{\partial x}\right)\right]=0. \tag{2.3.48}$$

Pour tout $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$, l'équation (2.3.48) induit l'équation de champs $\mathbb{J}_{ij}^{1}$:

$$\mathbb{J}_{\mu\nu}^{1}(x)\frac{\partial \mathbb{J}_{\alpha\beta}^{1}(x)}{\partial x_\nu}+\mathbb{J}_{\beta\nu}^{1}(x)\frac{\partial \mathbb{J}_{\mu\alpha}^{1}(x)}{\partial x_\nu}+\mathbb{J}_{\alpha\nu}^{1}(x)\frac{\partial \mathbb{J}_{\beta\mu}^{1}(x)}{\partial x_\nu}=0. \tag{2.3.49}$$

De la même manière à l'ordre 1 on a

$$\{f,\{g,h\}_0\}_1+\{f,\{g,h\}_1\}_0=0. \tag{2.3.50}$$

On trouve l'équation différentielle de $\mathbb{J}_{\mu\nu}^{1}(x)$ et $\mathbb{J}_{\mu\nu}^{0}$:

$$\mathbb{J}_{\mu\nu}^{0}(x)\frac{\partial \mathbb{J}_{\alpha\beta}^{1}(x)}{\partial x_\nu}+\mathbb{J}_{\beta\nu}^{0}(x)\frac{\partial \mathbb{J}_{\mu\alpha}^{1}(x)}{\partial x_\nu}+\mathbb{J}_{\alpha\nu}^{0}(x)\frac{\partial \mathbb{J}_{\beta\mu}^{1}(x)}{\partial x_\nu}=0. \tag{2.3.51}$$

Nous trouvons aussi les équations (2.3.49), (2.3.51) pour $k=2,3,...n$. avec la même procédure de calcul que dans le cas précédent.

Exemple 2.3.1 *Dans le premier cas le crochet de Poisson de longueur minimale à une dimension est*

$$\{x,p\}=1+\beta p^2. \tag{2.3.52}$$

Nous savons que le crochet de Poisson déformé s'écrit comme la relation (2.3.24), alors nous pouvons aussi conclure que les matrices $\mathbb{J}^0$ et $\mathbb{J}^1$:

$$\mathbb{J}^0=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\text{ et }\mathbb{J}^1=\begin{pmatrix}0 & p^2\\ -p^2 & 0\end{pmatrix}. \tag{2.3.53}$$

On obtient de la relation (2.3.33) que la matrice $\mathbb{J}^1_{ij}\,(p)$ vérifie la règle de Leibniz et l'antisymétrie.

Ainsi que les matrices $\mathbb{J}^1_{ij}\,(p)$ et $\mathbb{J}^0_{\mu\nu}$ vérifient les conditions précédentes de Jacobi (2.3.49), (2.3.51).

Si $\mu, \alpha, \beta = 1 \rightarrow \mathbb{J}^{1,0}_{11} = 0$ et si $\mu, \alpha, \beta = 2 \rightarrow \mathbb{J}^{1,0}_{22} = 0$, donc il faut prendre les indices $\mu, \alpha = 1$ et $\beta = 2$, de la relation (2.3.49)

$$\mathbb{J}^1_{1\nu}\,(x)\,\frac{\partial \mathbb{J}^1_{12}(x)}{\partial x_\nu} + \mathbb{J}^1_{1\nu}\,(x)\,\frac{\partial \mathbb{J}^1_{21}(x)}{\partial x_\nu} = 0. \tag{2.3.54}$$

$$\mathbb{J}^0_{1\nu}\,(x)\,\frac{\partial \mathbb{J}^1_{12}(x)}{\partial x_\nu} + \mathbb{J}^0_{1\nu}\,(x)\,\frac{\partial \mathbb{J}^1_{21}(x)}{\partial x_\nu} = 0. \tag{2.3.55}$$

Remarque 2.3.2 *Nous remarquons dans cette dernière que $\mathbb{J}^1_{12}\,(x) = -\mathbb{J}^1_{21}\,(x)$, alors dans ce cas la matrice qu'on a considérée vérifie les identités (2.3.49) et (2.3.51).*

Exemple 2.3.2 *Dans le deuxième cas le crochet de Poisson de l'espace non-commutative à deux dimension est*

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{q_i, q_j\} = \theta\epsilon_{ij} \quad et \ \{p_i, p_j\} = 0. \tag{2.3.56}$$

De la même manière que dans l'exemple précédent, la matrice $(\mathbb{J}^0 + \mathtt{t}\mathbb{J}^1\,(x))$ est donnée par

$$\mathbb{J}^0 + \mathtt{t}\mathbb{J}^1 = \begin{pmatrix} 0 & \theta & 1 & 0 \\ -\theta & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathtt{t} = \theta, \tag{2.3.57}$$

avec $\mathbb{J}^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & \mathbb{O} \end{pmatrix}$, où $(\mathbb{O}, \mathbb{I})$ sont les matrices nulle et unité respectivement à deux dimensions, $\mathtt{t}$ le paramètre déformé comme θ et la matrice $\mathbb{J}^1 = i \begin{pmatrix} \sigma_2 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}$ avec σ_2 est une matrice de Pauli.

Conclusion 2.3.1 *les déformations formelles dans les deux cas, longueur minimale à une dimension et l'espace non-commutative à deux dimensions, vérifient les conditions de l'algèbre de Poisson.*

2.4 La mécanique classique et la mécanique quantique dans le cadre de la déformation

2.4.1 Un bref rappel de la mécanique classique (MC) ordinaire:

La mécanique classique est gouvernée par les *équations de Newton:* Le mouvement d'une particule de masse $m \in \mathbb{R}$ strictement positive dans un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est décrit par le système d'équations différentielles d'ordre 2 suivant:

$$m\frac{d^2x_i}{dt^2} = F_i\left(x_1, ..., x_n\right), \tag{2.4.1}$$

où $x := (x_1, ..., x_n)$ désignent les n coordonnées de la particule et $F = (F_1, ..., F_n) : U \to \mathbb{R}^n$ est une application de classe C^2, le "champ de force". S'il y a plusieurs particules de masses strictement positives $m_1, ..., m_N$ le système (2.4.1) se généralise de façon évidente aux Nn coordonnées, à savoir $(x_{11}, ..., x_{nN})$, où le champ de force est maintenant une application $\mathbb{R}^{Nn} \supset U \to \mathbb{R}^{Nn}$ de classe C^2 où U est un ouvert de $\mathbb{R}^{Nn}$. L'exemple canonique est le système solaire avec 10 particules, à savoir les neuf planètes et le soleil, où U est égal à $\mathbb{R}^{30}$ privé de tous les sous-espaces vectoriels décrivant toutes les situations où deux positions (dans $\mathbb{R}^3$) de deux particules distinctes coincident, et F est le champ de force gravitationnelle de Newton. Ce dernier est un exemple d'un champ conservateur, c'est-à-dire pour lequel il existe une fonction (l'énergie potentielle) $V : U \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que F soit donnée par le gradient de V

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \text{ quel que soit } 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{2.4.2}$$

L'idée principale de la mécanique Hamiltonienne est la transformation du système d'ordre 2 (2.4.1) à n variables en un système d'ordre 1 à $2n$ variables

$$(q, p) := \left(q^1, ..., q^n, p_1, ..., p_n\right) := \left(x_1, ..., x_n, m\tfrac{dx_1}{dt}, ..., m\tfrac{dx_n}{dt}\right), \tag{2.4.3}$$

en introduisant la fonction de Hamilton (somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle)

$$H\left(q, p\right) := \sum_{i=1}^{n} \tfrac{p_i^2}{2m} + V\left(q\right). \tag{2.4.4}$$

Le système (2.4.1) se reécrit de façon suivante ($1 \leqslant i \leqslant n$) :

$$\tfrac{dq^i}{dt} = \tfrac{p_i}{m} = \tfrac{\partial H}{\partial p_i}\left(q, p\right) =: X_{H_{q^i}}\left(q, p\right). \tag{2.4.5}$$

$$\tfrac{dp_i}{dt} = -\tfrac{\partial V}{\partial q^i}\left(q\right) = -\tfrac{\partial H}{\partial q^i}\left(q, p\right) =: X_{H_{p^i}}\left(q, p\right). \tag{2.4.6}$$

Où $X_H := \left(X_{H_q}, X_{H_p}\right) := \left(X_{H_{q^1}}, ..., X_{H_{q^n}}, X_{H_{p^1}}, ..., X_{H_{p^n}}\right) : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ s'appelle le champ hamiltonien associé à la fonction H. Un tel champ peut être associé à une fonction arbitraire $H : U \to \mathbb{R}$. Il est évident que la fonction hamiltonienne H est une intégrale première du système (2.4.4), c'est-à-dire $H\left(q\left(t\right), p\left(t\right)\right) = H\left(q\left(0\right), p\left(0\right)\right)$, ce qui correspond bien à la conservation de l'énergie. On appelle l'espace $\mathcal{C}^\infty\left(U, \mathbb{R}\right) := \left\{f : U \to \mathbb{R} \mid f \;\; \mathcal{C}^\infty\right\}$ l'ensemble des observables classiques. Les éléments $(q, p) \in U$ s'appellent les états (purs) du système [65].

2.4.2 Un bref rappel de la mécanique quantique (MQ) ordinaire:

Dans la mécanique quantique, le tableau classique des observables, des états et des lois de mouvement est remplacé par des structures plus compliquées, selon la philosophie suivante: d'après de Broglie toute particule (comme, par exemple, un électron) a toujours l'aspect d'une onde, et il associe à son énergie E la formule de Planck $E = \hbar\omega$ où ω est la fréquence de l'onde et $\hbar$ la constante de Planck, et à sa quantité de mouvement p le vecteur $\hbar k$ où la longueur du vecteur k est donnée par $2\pi/\lambda$ et λ étant la longueur d'onde. Une particule libre (pour laquelle l'énergie potentielle V s'annule) est décrite par une onde plane

$$(t, q) = \Psi\left(t, q\right) = \exp\left(-i\omega t + ik.q\right), \tag{2.4.7}$$

où $k.q := \sum_{j=1}^{n} k_j q_j$. La fonction d'onde Ψ est évidemment une solution de l'équation

$$E\Psi = i\hbar\tfrac{\partial\Psi}{\partial t} = -\tfrac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi = \tfrac{p^2}{2m}\Psi, \tag{2.4.8}$$

où $\Delta := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial q_j^2}$ est l'opérateur de Laplace et $p^2 := p \cdot p$. Schrödinger a généralisé cette équation pour inclure des forces par son équation de Schrödinger

$$i\hbar\tfrac{\partial\Psi}{\partial t}\left(t, q\right) = -\tfrac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi\left(t, q\right) + V\left(q\right)\Psi\left(t, q\right) =: \left(\hat{H}\Psi\right)\left(t, q\right), \tag{2.4.9}$$

où l'opérateur différentiel $\hat{H}$ s'appelle opérateur hamiltonien du système par son analogie évidente avec la fonction hamiltonienne H. Cette description de Schrödinger avait un grand succès pour l'atome d'hydrogène pour lequel $V(q) = -\alpha/\left|q\right|$, α étant une constante: l'ensemble des valeurs propres de $\hat{H}$ correspondait exactement au spectre mesuré. Ici $\hat{H}$ est considéré comme un opérateur auto-adjoint, défini sur un domaine dense $D(\hat{H})$ dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H} := L^2\left(\mathbb{R}^3, d^3q\right)$. Les (classes des) fonctions d'onde dans $\mathcal{H}$ –à un multiple complexe près– sont interprétées comme des états purs du système quantique, c'est-à-dire elles donnent déjà une description complète du système. Le carré du module de Ψ, $\left|\Psi\right|^2$, est considéré comme une distribution de probabilité pour la position au cas où la norme de Ψ vaut 1. Evidemment, la fonction d'onde pour la particule libre ne fait pas partie de $\mathcal{H}$: vue comme distribution tempérée (au sens de Laurent Schwartz) elle s'obtient par approximation avec des éléments de $\mathcal{H}$, le dernier espace étant dense dans l'espace de distributions. En général, comme déjà dans la mécanique classique, on peut considérer d'autres observables quantiques comme par exemple la position

$$Q_k : \Psi \to (q \to q_k \Psi(q)) . \tag{2.4.10}$$

Où l'impulsion (qui est proportionelle à la vitesse pour les systèmes non-relativistes)

$$P_l : \Psi \to \tfrac{\hbar}{i} \tfrac{\partial \Psi}{\partial q_l}. \tag{2.4.11}$$

En général tous les opérateurs auto-adjoints A définis sur un domaine de définition $D(A) \subset \mathcal{H}$ dense (pour lesquels on a une bonne définition du spectre). Un espace d'observables mathématiquement plus commode est $B(\mathcal{H})$, l'espace de tous les opérateurs linéaires bornés: $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Heisenberg observa que l'effet de dispersion d'une onde se traduit dans la fameuse relation d'incertitude entre la position et l'impulsion. Il en déduisit que les seules valeurs que l'on puisse mesurer dans une expérience sans aucune déviation sont les valeurs propres (plus général: les valeurs spectrales) de l'opérateur hamiltonien [65].

2.4.3 La déformation formelle en MC

Dans le cas non déformé l'espace de phase d'un système mécanique est une variété de Poisson M. La variété M est généralement symplectique et égale souvent à T^*X, où X est une autre variété appelée l'espace de configuration. La dynamique du système est définie par son hamiltonien (ou la fonction de l'énergie) $H \in C^\infty(M)$. Si x_i sont les coordonnées sur M, les équations différentielles non déformées définissant le flux (équations Hamilton) sont écrites sous forme

$$\tfrac{d}{dt} x(t) = \{\mathcal{H}, x\} , \tag{2.4.12}$$

où t est le temps. Le principal problème mathématique de la mécanique classique est de trouver et étudier les solutions de ces équations. Les lois de la mécanique classique peuvent être formulées en décrivant un système à un instant donné par un ensemble de coordonnées générales q_i et leurs moments conjugués p_i. Pour un système avec "n degrés de liberté", Les propriétés dynamiques du système mécanique sont spécifiées par l'énergie exprimée en fonction des variables q_i et p_i. Cette fonction est appelée le hamiltonien et doit être désignée par

$$\mathcal{H}\left(p_1, q_1, ...p_n, q_n\right). \tag{2.4.13}$$

Ou, en abrégé,

$$\mathcal{H}\left(p_i, q_i\right), \tag{2.4.14}$$

où les symboles p_i et q_i seront utilisés pour indiquer les deux ensembles complets de n variables p_i et q_i respectivement. Une connaissance de la fonction $\mathcal{H}\left(p_i, q_i\right)$ est suffisant pour donner les équations du mouvement (2.4.12), alors le réglage de base de la mécanique classique hamiltonien dans le cas déformé, est donné par:

$$\tfrac{d}{dt}x\left(t\right) = \left\{\mathcal{H}, x\right\}_{\mathtt{t}}. \tag{2.4.15}$$

On introduit une structure de l'espace de phase déformé à l'ordre $\mathtt{t}$, le crochet de Poisson de deux fonctions H et $x = \left(q_i, p_i\right)$ sur l'espace de phase:

$$\left\{\mathcal{H}, x\right\}_{\mathtt{t}} = \left\{\mathcal{H}, x\right\}_0 + \mathtt{t}\left\{\mathcal{H}, x\right\}_1. \tag{2.4.16}$$

Les équations canoniques de Hamilton se réécrivent à l'aide du crochet de Poisson déformé sous la forme:

$$\dot{x}_i = \left(\mathbb{J}^0 + \mathtt{t}\mathbb{J}^1\left(x\right)\right)_{ij}\tfrac{\partial\mathcal{H}(x)}{\partial x_j}. \tag{2.4.17}$$

avec $x_i^T = \left(q_{1,}...q_n, p_1..., p_n\right)$. C'est très difficile d'obtenir des solutions aux équations Hamiltoniens dans ce cas, parce que la matrice $\mathbb{J}^1\left(x\right)$ n'est pas définie.

Les cas particuliers

a) La longueur minimale dans le cas classique:

De l'Eq.(2.4.17), où $x_i^T = \left(q, p\right)$, nous pouvons écrire les équations hamiltoniennes de longueur minimale à une dimension:

$$\dot{q} = \left(1 + \beta p^2\right)\tfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial p}. \tag{2.4.18}$$

$$\dot{p} = -\left(1 + \beta p^2\right)\tfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial q}. \tag{2.4.19}$$

Dans le cas libre $\left(\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m}\right)$ les équations du mouvement s'écrivent

$$\dot{p} = 0 \Longrightarrow p = cte;\text{ et } \dot{q} = \left(1 + \beta p^2\right)p/m \Longrightarrow q = \left(1 + \beta p^2\right)\tfrac{p}{m}t. \tag{2.4.20}$$

et avec l'oscillateur harmonique $\left(\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2\right)$; les équations (2.4.18) et (2.4.19) correspondent:

$$\dot{q} = \left(1 + \beta p^2\right)p/m \text{ et } \dot{p} = -\left(1 + \beta p^2\right)m\omega^2 q. \tag{2.4.21}$$

Puis nous pouvons trouver les équations de mouvement de p et q :

$$\ddot{p} - \tfrac{2p\dot{p}^2}{(1+\beta p^2)} + \omega^2 p \left(1+\beta p^2\right)^2 = 0. \tag{2.4.22}$$

$$q = -\tfrac{\dot{p}}{m\omega^2 (1+\beta p^2)}. \tag{2.4.23}$$

b) La géométrie non-commutative dans le cas classique

De l'Eq.(2.4.17) , où $x_i^T = (q_1, q_2, p_1, p_2)$, nous pouvons écrire les équations hamiltoniennes dans le cas de l'espace non-commutatif à deux dimensions:

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \theta & 1 & 0 \\ -\theta & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \frac{\partial H}{\partial q_2} \\ \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \frac{\partial H}{\partial p_2} \end{pmatrix}. \tag{2.4.24}$$

Dans le cas libre nous trouvons les mêmes équations de mouvement que dans l'espace commutatif (c'est-à-dire $p_1 = p_2 = cte$, $q_1 = q_2 = \frac{p_1}{m} t$) et avec le système de l'oscillateur harmonique $\left(H = \frac{p_i^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q_i^2\right)$, nous trouvons les équations de mouvements suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{q}_1 = \theta \frac{\partial H}{\partial q_2} + \frac{\partial H}{\partial p_1} = m\omega^2 \theta q_2 + \frac{p_1}{m} \\ \dot{q}_2 = -\theta \frac{\partial H}{\partial q_1} + \frac{\partial H}{\partial p_2} = -m\omega^2 \theta q_1 + \frac{p_2}{m} \\ \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = -m\omega^2 q_1 \\ \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = -m\omega^2 q_2 \end{array} \right. . \tag{2.4.25}$$

2.4.4 La déformation formelle en MQ

Comme il est bien connu, lors du passage du mécanique classique à la mécanique quantique, les crochets de Poisson sont remplacés par des commutateurs, et la déformation de celle-ci implique une modification des relations d'incertitude d'Heinsenberg. Les relations d'incertitude de modification ont été étudiées dans plusieurs articles voir [66]. Dans ce qui suit, nous aurons recours à des méthodes introduites dans [2], afin d'étudier la déformation spécifique induite par le modèle de déformation formelle. Les relations de commutation entre les opérateurs de position et les opérateurs d'impulsion:

$$\left[\widehat{\tilde{x}}_i, \widehat{\tilde{x}}_j\right] = i\hbar \hat{f}_{ij}\left(\widehat{\tilde{x}}, \widehat{\tilde{p}}\right), \quad \left[\widehat{\tilde{p}}_i, \widehat{\tilde{p}}_j\right] = i\hbar \hat{g}_{ij}\left(\widehat{\tilde{x}}, \widehat{\tilde{p}}\right), \quad \left[\widehat{\tilde{x}}_i, \widehat{\tilde{p}}_j\right] = i\hbar \hat{h}_{ij}\left(\widehat{\tilde{x}}, \widehat{\tilde{p}}\right), \tag{2.4.26}$$

où $\hat{f}_{ij}$, $\hat{g}_{ij}$ et $\hat{h}_{ij}$ sont des fonctions positives de la position et l'impulsion. Les relations d'incertitude qui découle de (2.4.26) sont

$$\Delta \tilde{x}_i \Delta \tilde{p}_j \geqslant \tfrac{\hbar}{2} \left| \left\langle \left[\widehat{\tilde{x}}_i, \widehat{\tilde{p}}_j\right] \right\rangle \right| = \tfrac{\hbar}{2} \left\langle \hat{h}_{ij}\left(\widehat{\tilde{x}}, \widehat{\tilde{p}}\right) \right\rangle, \tag{2.4.27}$$

où $\langle\ \ \rangle$ désigne les valeurs des expectation.

C'est très difficile d'introduire le lien entre les opérateurs $\left(\widehat{\tilde{x}}_i, \widehat{\tilde{p}}_i\right)$ et les opérateurs auxiliaires $(\hat{x}_i, \hat{p}_i)$ qui vérifient les relations des commutations ordinaires dans ce cas général

$$\begin{aligned} \widehat{\tilde{x}}_i &= \widehat{\tilde{x}}_i\left(\hat{x}_i, \hat{p}_i\right). && (2.4.28)\\ \widehat{\tilde{p}}_i &= \widehat{\tilde{p}}_i\left(\hat{x}_i, \hat{p}_i\right). && (2.4.29)\end{aligned}$$

Par la suite nous pouvons prendre ces deux cas spéciaux.

Les cas particuliers

a) Longueur minimale:

Dans le travail de Kempf [2], la relation de commutation entre la position et l'impulsion à une dimension s'écrit

$$\left[\widehat{\tilde{x}}, \widehat{\tilde{p}}\right] = i\hbar\left(1 + \beta\tilde{p}^2\right), \qquad (2.4.30)$$

et la relation d'incertitude correspondante est

$$\Delta\tilde{x}\Delta\tilde{p} \geqslant \tfrac{\hbar}{2}\left[1 + \beta\left(\Delta\tilde{p}\right)^2 + \beta\left\langle\tilde{p}\right\rangle^2\right]. \qquad (2.4.31)$$

Pour un $(\Delta\tilde{x})$ fixe, l'intégalité (2.4.31) est satisfaite dans l'intervalle: $[\Delta\tilde{p}_-, \Delta\tilde{p}_+]$, tel que:

$$\Delta\tilde{p}_\pm = \tfrac{\Delta\tilde{x}}{\hbar\beta} \pm \sqrt{\left(\tfrac{\Delta\tilde{x}}{\hbar\beta}\right) - \tfrac{1}{\beta} - \left\langle\tilde{p}\right\rangle^2}. \qquad (2.4.32)$$

La valeur minimale $(\Delta\tilde{x})_{\min}$

$$\begin{aligned} \left(\Delta\tilde{x}\right)_{\min}\left(\left\langle\tilde{p}\right\rangle\right) &= \hbar\sqrt{\beta}\sqrt{1 + \beta\left\langle\tilde{p}\right\rangle^2}. && (2.4.33)\\ &= \hbar\sqrt{\beta} \text{ correspond à } \left\langle\tilde{p}\right\rangle = 0. && (2.4.34)\end{aligned}$$

Les opérateurs $\left(\widehat{\tilde{x}}, \widehat{\tilde{p}}\right)$ peuvent être considérés comme des fonctions des anciens opérateurs $\hat{x}$ et $\hat{p}$, satisfaisant la relation de commutation canonique: $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$. Alors on peut trouver une représentation de $\widehat{\tilde{x}}$ et $\widehat{\tilde{p}}$ qui vérifie la relation de commutation modifiée (2.4.30), s'écrit

$$\widehat{\tilde{x}} = i\hbar\left(1 + \beta p^2\right)\hat{q}, \quad \widehat{\tilde{p}} = p \quad \text{et } \hat{q} = \tfrac{\partial}{\partial p}. \qquad (2.4.35)$$

Dans l'espace des impulsions, nous pouvons définir les opérateurs de position et d'impulsion $\widehat{\tilde{x}}$ et $\widehat{\tilde{p}}$ agissent sur les fonctions $\Psi(p)$ définis sur un espace impulsion paramétré par p, comme

$$\widehat{\tilde{p}}.\Psi(p) = p\Psi(p), \quad \widehat{\tilde{x}}\Psi(p) = i\hbar\left(1 + \beta p^2\right)\tfrac{\partial}{\partial p}\Psi(p). \qquad (2.4.36)$$

La condition la plus importante que doit satisfaire la représentation (2.4.30), est la préservation de la symétrie des operateurs $\widehat{\widehat{x}}$ et $\widehat{\widehat{p}}$, pour que leurs valeurs propres soient réelles. Du moment que $\widehat{\widehat{p}}$ n'est pas modifié, alors sa symétrie est évidente; il n'en est pas le cas pour l'opérateur $\widehat{\widehat{x}}$. En effet, la condition de symétrie s'écrit [2]:

$$\left(\langle\Psi|\,\widehat{\widehat{x}}\right)|\Phi\rangle = \langle\Psi|\left(\widehat{\widehat{x}}\,|\Phi\rangle\right). \tag{2.4.37}$$

Le produit scalaire doit être défini comme

$$\langle\Psi \mid \Phi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{dp}{1+\beta p^2}\Psi^*(p)\,\Phi(p). \tag{2.4.38}$$

la modification de ce produit implique une nouvelle relation de fermeture, qui s'écrit comme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{dp}{1+\beta p^2}\,|p\rangle\langle p| = 1. \tag{2.4.39}$$

En insérant cette dernière relation dans le produit scalaire de deux vecteurs propres de l'opérateur impulsion, on obtient:

$$\langle p \mid p'\rangle = \left(1+\beta p^2\right)\delta\left(p-p'\right), \tag{2.4.40}$$

et donne également

$$\langle p|\,p'\rangle = \delta\left(\tfrac{1}{\sqrt{\beta}}\arctan\sqrt{\beta}p - \tfrac{1}{\sqrt{\beta}}\arctan\sqrt{\beta}p'\right). \tag{2.4.41}$$

Dans ce cas l'équation de Schrödinger pour la particule de l'oscillateur harmonique dans la réprésentation de l'espace d'impulsion à une dimension, s'écrit comme

$$\hat{H} = \left(\tfrac{\widehat{\widehat{p}}^2}{2m} + \tfrac{m\omega^2}{2}\widehat{\widehat{x}}^2\right) = \left[\tfrac{p^2}{2m} + \tfrac{m\omega^2}{2}\left(i\hbar\left(1+\beta p^2\right)\tfrac{\partial}{\partial p}\right)^2\right]. \tag{2.4.42}$$

Les solutions exactes sont définies dans [21]:

$$E_n = \hbar\omega\left[\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\sqrt{1+\left(\tfrac{\beta\hbar m\omega}{2}\right)^2} + \left(n^2+n+1\right)\left(\tfrac{\beta\hbar m\omega}{2}\right)\right]. \tag{2.4.43}$$

Aussi, les fonctions propres normalisées des états liés peuvent être facilement déduites

$$\Psi_n(p) = \sqrt{\tfrac{2^{2\lambda-1}(\lambda+n)n!\sqrt{\beta}}{\pi\Gamma(2\lambda+n)[\Gamma(\lambda)]^{-2}}}\left[\tfrac{1}{\sqrt{1+\beta p^2}}\right]^{\lambda} C_n^{\lambda}\left(\tfrac{\sqrt{\beta}p}{\sqrt{1+\beta p^2}}\right), \tag{2.4.44}$$

avec C_n^{λ} sont des polynômes de Gegenbauer.

b) L'espace non-commutatif:

La mécanique quantique non-commutative est formée de la même manière que la mécanique ordinaire avec des variables dynamiques $\tilde{x}_i$ et $\tilde{p}_j$ représentées par des opérateurs dans un espace de Hilbert et vérifient les relations de commutation suivantes:

$$\left[\widehat{\tilde{x}}_i, \widehat{\tilde{p}}_j\right] = i\delta_{ij}, \quad \left[\widehat{\tilde{x}}_i, \widehat{\tilde{x}}_j\right] = i\theta_{ij}, \quad \left[\widehat{\tilde{p}}_i, \widehat{\tilde{p}}_j\right] = 0, \quad \text{et } i, j = 0, 1, 2, \tag{2.4.45}$$

où $\theta_{ij} = \epsilon_{ijk}\theta^k$ est un paramètre constant qui décrit la non-commutativité de l'espace, il est réel, anti-symétrique et a la dimension (longueur)^2.

La quantification de Weyl et produit de Moyal

La quantification de Weyl [67] consiste à faire une correspondance biunivoque entre l'algèbre des fonctions $f(x)$ définies sur deux dimensions et l'algèbre des opérateurs. On définit le symbole de Weyl par:

$$W(f) = \hat{f} = \tfrac{1}{(2\pi)} \int d^2k e^{ik_\nu \tilde{x}^\nu} \tilde{f}(k), \tag{2.4.46}$$

et $\tilde{f}(k)$ est la transformation de Fourier de $f(x)$:

$$\tilde{f}(k) = \tfrac{1}{(2\pi)} \int d^2x e^{-ik_\nu x^\nu} f(x). \tag{2.4.47}$$

La multiplication des deux opérateurs $W(f)$ et $W(g)$ obtenue à partir de Eq.(2.4.46) donne un autre opérateur $W(f * g)$:

$$W(f) \bullet W(g) = \hat{f} \bullet \hat{g} = W(f * g), \tag{2.4.48}$$

avec $f*g \in (A, *)$, une fonction classique qui est bien définie, comme indiqué dans le suivant. En substituant Eq.(2.4.46) dans Eq.(2.4.48) nous obtenons:

$$W(f * g) = W(f) \bullet W(g) = \tfrac{1}{(2\pi)^2} \int d^2k d^2p e^{ik_\mu \tilde{x}^\mu} e^{ip_\nu \tilde{x}^\nu} \tilde{f}(k)\tilde{g}(p). \tag{2.4.49}$$

Dans le cas de non-commutativité canonique donnée par Eq.(2.4.45), le produit des deux exponentielles dans la formule ci-dessus donne une exponentielle d'une combinaison linéaire de la $\tilde{x}_\mu$ après l'application de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff

$$e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}+\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]+\frac{1}{12}\left([\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]]+[[\hat{A},\hat{B}],\hat{B}]+\ldots\right)}, \tag{2.4.50}$$

et considérant la relation commutateur $[[\tilde{x}^\mu, \tilde{x}^\nu], \tilde{x}^\rho] = 0$ permet ainsi tous les termes, y compris plus d'un commutateur de Eq.(2.4.50) disparus:

$$e^{ik_\mu \tilde{x}^\mu} e^{ip_\nu \tilde{x}^\nu} = e^{i(k_\nu + p_\nu)\tilde{x}^\nu - \frac{i}{2} k_\mu p_\nu \theta^{\mu\nu}}. \tag{2.4.51}$$

Nous obtenons $f * g$ en comparant Eq.(2.4.49) avec Eq.(2.4.46) et en remplaçant l'opérateur $\tilde{x}_\mu$ par la coordonnée x_μ:

$$(f * g) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2k d^2p e^{i(k_\nu + p_\nu)\tilde{x}^\nu - \frac{i}{2} k_\mu p_\nu \theta^{\mu\nu}} \tilde{f}(k)\tilde{g}(p). \tag{2.4.52}$$

Ainsi, le Moyal-Weyl $*$-produit est défini par:

$$f(x) * g(x) = \exp\left[\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_{x_\mu}\partial_{y_\nu}\right] f(x)g(y)_{|x=y}, \tag{2.4.53}$$

avec ∂_{x_μ} est l'opérateur partiel dérivé. Montrons que le produit star induit par la non-commutativité et est remplacé par le produit d'habitude, plus une correction non locale dans la fonction scalaire $f(x)$.

Décalage de Bopp

En effet, il est facile de montrer que:

$$\begin{aligned} f(x) * g(x) = f(x) . g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{2}\right)^n \partial_{\mu_1} ... \partial_{\mu_n} f(x) \, \theta^{\mu_1\nu_1} ... \theta^{\mu_n\nu_n} \\ \partial_{\nu_1} ... \partial_{\nu_n} g(x) . \end{aligned} \tag{2.4.54}$$

Maintenant, nous remplaçons ∂_{j_k} par $ip_{j_k} = \frac{\partial}{\partial x^{j_k}}$ et introduire $\mathcal{P}_{i_k} = \theta^{i_k j_k} p_{j_k}$. Nous prenons la transformée de Fourier $f(x)$, alors

$$\partial_{\mu_1} ... \partial_{\mu_n} f(x) \mathcal{P}_{\mu_1} ... \mathcal{P}_{\mu_n} g(x) = i^n \int d^3k e^{ikx} f(k) (k\mathcal{P})^n g(x) . \tag{2.4.55}$$

En sommant sur n dans (2.4.54), nous obtenons:

$$f(x) * g(x) = \int d^2k e^{ikx} e^{\frac{i}{2}\mathcal{P}k} f(k) \, g(x) . \tag{2.4.56}$$

Maintenant, en utilisant $[p_i, x_j] = -i\delta_{ij}$, nous obtenons:

$$f(x) * g(x) = f\left(x - \frac{\mathcal{P}}{2}\right) . g(x) . \tag{2.4.57}$$

Ce résultat (2.4.57) est un point de passage du cas non-commutatif au cas commutatif, (c'est-à-dire, le $*$-produit peut être transformé en un produit ordinaire en décalant $\tilde{x}$ par $x - \frac{\mathcal{P}}{2}$) [68].

Dans ce cas l'équation de Schrödinger correspondante à l'oscillateur harmonique dans l'espace non-commutatif à deux dimensions est:

$$\hat{H} = \left(\frac{\hat{\tilde{p}}_i^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{\tilde{x}}_i^2\right) = \left[\frac{\hat{p}_i^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\left(\hat{x}_i - \frac{\mathcal{P}}{2}\right)^2\right] . \tag{2.4.58}$$

Selon [69], le système physique décrit par (2.4.58) est équivalent à l'oscillateur harmonique habituel décrit par l'Hamiltonienne:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(1 + \frac{m^2\omega^2\theta^2}{4}\right)\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right) + \frac{m\omega^2\theta}{2}\left(yp_x - xp_y\right). \tag{2.4.59}$$

Ainsi à propos du problème de valeur propre $\hat{H}\Psi(p) = E\Psi(p)$. Les solutions exactes [70] sont

$$E_{n_x,n_y,\ell}^{(\theta)} = \hbar\omega\sqrt{1 + \frac{m^2\omega^2\theta^2}{4}}\left(n_x + n_y + 1\right) - \frac{m\omega^2\theta}{2}m_\ell, \quad n = 0, 1, 2, ..., \quad m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \ ... \ . \tag{2.4.60}$$

avec $n_x + n_y = 2n_r + m_\ell$, et la fonction d'onde:

$$\Phi_{n_r,m_\ell}(r,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\mathcal{R}_{n_r,m_\ell}e^{im_\ell\varphi}, \tag{2.4.61}$$

dans laquelle $\mathcal{R}_{n_r,m_\ell}$ est la fonction d'onde radiale

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{n_r,m_\ell} = \sqrt{r}\left(2\frac{m\omega}{\hbar\sqrt{1+\frac{m^2\omega^2\theta^2}{4}}}\right)^{1/2}\sqrt{\frac{n_r!}{(n_r+|m_\ell|)!}}\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar\sqrt{1+\frac{m^2\omega^2\theta^2}{4}}}r^2\right) \\ \times\left(\frac{m\omega}{\hbar\sqrt{1+\frac{m^2\omega^2\theta^2}{4}}}r^2\right)^{|m_\ell|/2}L_{n_r}^{m_\ell}\left(\frac{m\omega}{\hbar\sqrt{1+\frac{m^2\omega^2\theta^2}{4}}}r^2\right).\end{aligned} \tag{2.4.62}$$

En conclusion, nous avons présenté, dans ce chapitre, les définitions nécessaires de la structure algébrique de déformation formelle. Puis, selon les conditions de déformation formelle nous avons essayé d'étudier explicitement un exemple de la généralisation de la variété de Poisson à l'ordre de la déformation $(\mathtt{t})$ dans l'Eq.(2.4.16). Mais, pour appliquer ce dernier exemple sur les systèmes de mécanique classique et mécanique quantique, nous trouvons quelques difficultés de calcul (c.-à-d. la matrice $\mathbb{J}^1(x)$ n'est pas définie). C'est pour ça, nous avons suggéré les cas particuliers de cette déformation, comme; longueur minimale (GUP) et la géométrie NC sur l'espace.

3

Formalisme de Feynman dans le cadre de la théorie de la déformation

3.1 Introduction

L'idée principale de l'intégrale de chemin existe depuis 1920 grâce aux travaux de Norbert Wiener, qui a résolu les problèmes de la théorie de la diffusion et du mouvement brownien, aussi dans ces articles [71], on démontre la connexion importante entre l'analyse mathématique classique et l'analyse fonctionnelle. En 1933, Dirac a fait l'observation que l'action joue un rôle central dans la mécanique classique (qu'il considérait comme la formulation lagrangienne de la mécanique classique être plus fondamentale que l'Hamilton), mais qui semblait ne pas avoir de rôle important dans la mécanique quantique comme on l'appelait à l'époque. Il a spéculé sur la façon dont cette situation pourrait être rectifiée, et il est arrivé à la conclusion que (en langue plus moderne) le propagateur de la mécanique quantique "correspond à" $\exp(iS_\Gamma/\hbar)$, où S_Γ est l'action classique évaluée le long du chemin classique, c.-à-d. $S_\Gamma = \int_\Gamma \mathcal{L}\left(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t\right) dt$, où $\mathcal{L}\left(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t\right)$ est le Lagrangien de la particule.

En 1948, Feynman a développé la suggestion de Dirac, et a réussi à dériver une troisième formulation de la mécanique quantique, basée sur le fait que le propagateur peut être écrit comme une somme sur tous les chemins possibles, (non seulement le classique) entre les points initiaux et finaux. Chaque chemin contribue $\exp(iS/\hbar)$ dans le propagateur. Ainsi, alors que Dirac l'a considéré comme le seul chemin classique, Feynman a montré que tous les chemins contribuent: en un sens, la particule quantique prend tous les chemins, et le rôle des amplitudes pour chaque chemin est d'ajouter en fonction de la règle habituelle mécanique quantique pour combiner les amplitudes.

L'interprétation de l'attention des chercheurs physiciens et mathématiciens de cette approche, dont de nombreux travaux ont été commencés par Feynman [72]. En plus du travail de Feynman, elle a été illustrée par la résolution d'une façon particulièrement élégante de plusieurs problèmes importants de la mécanique quantique non-relativiste dans divers systèmes de coordonnées. A aussi été l'expansion de l'utilisation même dans la mécanique quantique relativiste. Mais la grande difficulté a été trouvée dans les systèmes où la particule dépend du spin, c'est à dire: le formalisme d'intégrale de chemin posé sur les trajectoires classique, mais la nature de spin est discrète. En conséquence, de nombreux modèles ont été proposés, à savoir le modèle classique de l'électron [73]. Parmi les plusieurs applications de cette destination [74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84]. Cependant; l'émergence de la géométrie non-commutative basée sur le principe d'incertitude généralisée, comme c'était la chance de certains chercheurs qui l'ont traités en utilisant le formalisme de l'intégrale de chemin; par exemple [41, 43, 44, 45, 46, 47]. Comme nous allons être chanceux dans cette thèse qui va répondre à certains des systèmes physiques relativistes dans le cadre de la géométrie non-commutative.

3.2 Construction des propagateurs

L'objectif de cette section, nous allons étudier les propagateurs et leurs corrections quantiques via la technique standard de Feynman ou Kleinert, pour le système non-relativiste dans le contexte de la mécanique quantique non déformée et déformée au $\alpha-$point de discrétisation, où nous considérons deux cas déformés; le cas de la géométrie non-commutative et le cas de la distance minimale.

3.2.1 Cas de l'espace ordinaire

À une dimension, nous considérons l'expression du propagateur de la mécanique quantique (MQ) non-relativiste ordinaire à la forme intégrale de chemin discontinue.

$$K_N = A_N \int \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N+1} S_n \right\} \prod_{n=1}^{N} dz_n, \tag{3.2.1}$$

avec $A_N = \left(\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}}\right)^{N+1}$, et l'action discrétisé dans intervalle $[n-1, n]$, prenant la forme

$$S_n = \frac{m}{2\varepsilon} \left(z_n - z_{n-1}\right)^2 - \varepsilon V\left(x_n\right). \tag{3.2.2}$$

Selon la méthode standard de Feynman [85], nous allons appliquer la méthode de transformation du spatio-temporel $\bar{z}_n^{(\alpha)} = f(\bar{q}_j^{(\alpha)})$ au $\alpha-$point de discrétisation défini comme:

$$\bar{z}_n^{(\alpha)} = \alpha z_n + (1-\alpha)\, z_{n-1}. \tag{3.2.3}$$

Deux termes de corrections quantiques sont apparus $(C_{act},\ C_{mes})$. Commençons tout d'abord par le calcul de la correction sur l'action C_{act}. En développant Δz_n au α-point de discrétisation, nous aurons:

$$\Delta z_n = \Delta q_n \bar{f}_n^{(\alpha)\prime} \left(1 + \tfrac{(1-2\alpha)}{2!} \tfrac{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}} \Delta q_n + \tfrac{(1-\alpha)^3+\alpha^3}{3!} \tfrac{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime\prime\prime}}{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}} \Delta q_n^2 \right), \tag{3.2.4}$$

où la prime indique les dérivés $\bar{f}_j^{(\alpha)}$ par rapport à $\bar{q}_j^{(\alpha)}$, puis nous trouvons le terme d'énergie cinétique dans l'action:

$$\tfrac{\Delta z_n^2}{4\varepsilon} = \tfrac{\Delta q_n^2}{4\varepsilon} \left(\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}\right)^2 \left(1 + (1-2\alpha) \tfrac{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}} \Delta q_n + \left[\tfrac{(1-2\alpha)^2}{4} \left(\tfrac{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}} \right)^2 + \tfrac{\left(1-\alpha^3\right)+\alpha^3}{3} \tfrac{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime\prime\prime}}{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}} \right] \Delta q_n^2 \right). \tag{3.2.5}$$

Le terme de l'énergie potentielle prend la forme simple:

$$\varepsilon V(z_n) = \varepsilon V(\bar{q}_n^{(\alpha)}) + O(\varepsilon^2) = \varepsilon V(\bar{q}_n^{(\alpha)}). \tag{3.2.6}$$

En addition, nous remarquons que la transformation $z = f(q)$ a rendu l'intégrale de chemin assez compliqué, où le paramètre de masse est transformé en $m\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}$. Pour cela, nous allons appliquer aussi la transformation sur le temps afin de dépasser cette difficulté:

$$\varepsilon = \sigma_n f'(q_n)\, f'(q_{n-1}), \tag{3.2.7}$$

où $\sigma_n = s_n - s_{n-1}$. Le développement $f'(q_n)$ et $f'(q_{n-1})$ au α-point de discrétisation à l'ordre deux de Δq_n, nous trouvons:

$$\varepsilon = \sigma_n \left(\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}\right)^2 \left(1 + (1-2\alpha) \tfrac{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}} \Delta q_n + \left(\tfrac{(1-\alpha)^2+\alpha^2}{2} \tfrac{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime\prime\prime}}{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}} - \alpha(1-\alpha) \left(\tfrac{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}} \right)^2 \right) \Delta q_n^2 \right). \tag{3.2.8}$$

A partir de deux expressions (3.2.5) et (3.2.8), nous pouvons déduire la correction quantique sur l'action:

$$\exp\left[\tfrac{i}{\hbar} \tfrac{m}{2\varepsilon} (\Delta z_n)^2\right] = \exp\left[\tfrac{i}{\hbar} \tfrac{m}{2\sigma_n} (\Delta q_n)^2\right] (1 + C_{act}), \tag{3.2.9}$$

avec

$$C_{act} = \tfrac{i}{\hbar} \tfrac{m}{8\sigma_n} \Delta q_n^4 \left[\left(-16\alpha^2 + 16\alpha - 3\right) \left(\tfrac{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}} \right)^2 - \tfrac{2}{3} \tfrac{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime\prime\prime}}{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}} \right]. \tag{3.2.10}$$

Passons maintenant au calcul de la deuxième correction de C_{mes}, nous avons:

$$A_N \prod_{n=1}^{N} dz_n = \left(\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}}\right)^{N+1} \prod_{n=1}^{N} dq_n f'(q_n). \tag{3.2.11}$$

Cela peut être réalisé en réécrivant:

$$A_N \prod_{n=1}^{N} dz_n = [f'(q_b) f'(q_a)]^{-1/2} \prod^{N+1} \left(\sqrt{\frac{mf'(q_n)f'(q_{n-1})}{2\pi i\hbar\varepsilon}}\right) \prod_{n=1}^{N} dq_n.. \tag{3.2.12}$$

Nous développons $f(q_n)$ et $f(q_{n-1})$ jusqu'au deuxième ordre de Δq_n comme suit:

$$[f'(q_n) f'(q_{n-1})]^{1/2} =$$

$$\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}\left(1 + \frac{(1-2\alpha)}{2}\frac{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}}\Delta q_n + \left(\frac{(1-\alpha)^2+\alpha^2}{4}\frac{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime\prime\prime}}{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}} - \frac{\alpha(1-\alpha)}{2}\left(\frac{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}}\right)^2\right)\Delta q_n^2\right). \tag{3.2.13}$$

A partir des expressions (3.2.12), (3.2.13) et (3.2.8) nous pouvons déduire C_{mes},

$$A_N \prod_{n=1}^{N} dz_n = \prod_{n=1}^{N+1} \left(\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\sigma_n}}\right)(1 + C_{mes}) \prod_{n=1}^{N} dq_n., \tag{3.2.14}$$

à la forme

$$C_{mes} = \frac{(1-2\alpha)^2}{4}\left(\frac{\bar{f}_j^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{f}_j^{(\alpha)\prime}}\right)^2 \Delta q_n^2. \tag{3.2.15}$$

Pour calculer la correction quantique totale C_T , nous pouvons utiliser l'expression suivante

$$\left\langle (\Delta q)^{2n} \right\rangle = \left(\frac{i\hbar\sigma}{m}\right)^n (2n-1)!!, \tag{3.2.16}$$

on en résulte

$$\left\langle (\Delta q)^{2} \right\rangle = \left(\frac{i\hbar\sigma}{m}\right), \left\langle (\Delta q)^{4} \right\rangle = \left(\frac{i\hbar\sigma}{m}\right)^2 (3)!! = -3\left(\frac{\hbar\sigma}{m}\right)^2. \tag{3.2.17}$$

En combinant tous ces résultats, nous arrivons à:

$$C_T = V_{eff}$$

$$= -\sigma_n \frac{i\hbar^2}{4m}\left[\left(\frac{11}{2} - 28\alpha^2 + 28\alpha\right)\left(\frac{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}}\right)^2 - \frac{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime\prime\prime}}{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}}\right]. \tag{3.2.18}$$

On note, quand nous avons utilisé le formalisme standard de Feynman [85] au α-point de discrétisation, nous avons obtenu le propagateur de la mécanique non-relativiste usuelle dépendante de α. Un seul cas de α qui donne le même resultat de la méthode d'équation, c'est quand le $\alpha = 1/2$.

$$V_{eff} = \sigma_n \frac{i\hbar^2}{4m}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}}\right)^2 - \frac{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime\prime\prime}}{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}}\right]. \tag{3.2.19}$$

3.2.2 Cas de l'espace non-commutatif (NC)

Dans cette section, nous allons utiliser le formalisme de l'intégrale du chemin pour construire la fonction de propagation (un symbole de l'opérateur d'évolution) dans la mécanique quantique (MQ) non-relativiste sur un espace non-commutatif, qui réalise l'algèbre de commutations suivante:

$$\left[\widehat{\tilde{x}}_i, \widehat{\tilde{p}}_j\right] = i\delta_{ij}, \quad \left[\widehat{\tilde{x}}_i, \widehat{\tilde{x}}_j\right] = i\theta_{ij}, \quad \left[\widehat{\tilde{p}}_i, \widehat{\tilde{p}}_j\right] = 0, \quad \text{et } i,j = 0,1,2. \tag{3.2.20}$$

En conventionnel de la MQ non-relativiste, nous allons construire une représentation de l'intégrale du chemin pour les éléments de la matrice de l'opérateur d'évolution $U(t,t')$ (dans une représentation de coordonnées). Dans la MQ prise en considération, nous avons aussi commencé par le même opérateur. Il obéit à l'équation de Schrödinger et pour le H indépendant du temps (que nous considérons pour plus de simplicité dans ce qui suit) à la forme:

$$U(t',t) = \exp\left[-\tfrac{i}{\hbar}\hat{H}(t'-t)\right]. \tag{3.2.21}$$

Puis ce que les opérateurs de coordonnés $\widehat{\tilde{x}}_i$ ne commutent pas, ils ne possèdent pas un ensemble commun complet de vecteurs propre. Pour cette raison, il n'ya pas de représentation de $\tilde{x}-$coordonnées et on ne peut pas parler des éléments de matrice de l'opérateur d'évolution dans une telle représentation. Par conséquent, on ne peut pas définir une amplitude de probabilité d'une transition entre deux points dans l'espace de position.

Néanmoins, on peut envisager d'autres types d'éléments de matrice de l'opérateur d'évolution qui sont des amplitudes de probabilité et qui peuvent être représentées via trois types de la représentation d'intégrales de chemin, à savoir; les espaces des moments $|\tilde{p}\rangle$, les espaces usuels des coordonnés $|x\rangle$ et les espaces mixtes entre les coordonnées et les impulsions $|\tilde{x},\tilde{p}_y\rangle$ ou $|\tilde{y},\tilde{p}_x\rangle$, qui forment des ensembles complet de vecteurs propres. Dans ce cas, nous allons choisir les opérateurs de x_i [38] définis par:

$$\begin{aligned} \hat{x}^i &= \widehat{\tilde{x}}^i + \tfrac{\theta^{ij}}{2\hbar}\hat{p}_j,\ \left[\hat{x}^i,\hat{x}^j\right] = 0,\ \left[\hat{x}^i,\hat{p}_j\right] = i\hbar\delta^i_j \\ \hat{x}^i\left|x\right\rangle &= x^i\left|x\right\rangle, \quad \langle x \mid x'\rangle = \delta^D\left(x-x'\right), \quad \textstyle\int \left|x\right\rangle\left\langle x\right| dx = I. \end{aligned} \tag{3.2.22}$$

Dans ce type d'éléments, nous dérivons une représentation intégrale de chemin pour la fonction d'évolution G. Comme d'habitude, nous divisons l'intervalle de temps $T = t_b - t_a$ dans $N+1$ parties égales $t = T/\left(N+1\right)$ au moyen des points t_n, $n = 1,...,N$ tel que $t_n = t_a + n\Delta t$. En utilisant la propriété du groupe de l'opérateur d'évolution et de la relation de fermeture (voir (3.2.22)) pour l'ensemble $|x_i\rangle$, on peut écrire

$$G_x^\theta = \lim_{N\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx_1...dx_n \prod_{n=1}^{N+1}\left\langle \mathbf{x}_n\left|\exp\left(-\tfrac{i}{\hbar}\hat{H}\left(t_n - t_{n-1}\right)\right)\right|\mathbf{x}_{n-1}\right\rangle, \tag{3.2.23}$$

et en utilisant la relation de fermeture pour les vecteurs propres de moment $|p\rangle$, on peut calculer la représentation Hamiltonienne de l'intégrale de chemins pour le propagateur G_x, à partir de (3.2.23),

$$G_x^{\theta}(\mathbf{x}_b, t_b; \mathbf{x}_a, t_a) = \int \prod_{n=1}^{N} d\mathbf{x}_j \int \prod_{n=1}^{N+1} \frac{d\mathbf{p}_j}{(2\pi\hbar)^2} \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N+1} \left[\mathbf{p}_n \Delta\mathbf{x}_n - \varepsilon \left(\frac{\mathbf{p}_n^2}{2m} + V\left(x^i - \frac{\theta^{ij}}{2\hbar}\hat{p}_j \right) \right) \right] \right\}. \tag{3.2.24}$$

Comme il est bien apparent, à partir de cette expression il y a peu de cas où on peut le résoudre exactement; à savoir, le cas d'un potentiel linéaire ($V(x) = gx$) et le cas d'un potentiel harmonique $\left(V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2\right)$. Dans le cas de l'oscillateur harmonique, ils ont trouvés la forme Hamiltonienne de l'intégrale de chemins pour le propagateur G_x^{θ} comme suivant:

$$G_x^{\theta}(\mathbf{x}_b, t_b; \mathbf{x}_a, t_a) = \int \prod_{n=1}^{N} d\mathbf{x}_n \int \prod_{n=1}^{N+1} \frac{d\mathbf{p}_n}{(2\pi\hbar)^2}$$
$$\times \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N+1} \left[\mathbf{p}_n \Delta\mathbf{x}_n - \varepsilon \left(\frac{\mathbf{p}_n^2}{2m^{(\theta)}} + \frac{m^{(\theta)}\left(\omega^{(\theta)}\right)^2}{2}\mathbf{x}_n^2 - \bar{\omega}\epsilon^{ij} x_{ni} p_{nj} \right) \right] \right\}, \tag{3.2.25}$$

avec

$$m^{(\theta)} = \frac{m}{\left(1 + \frac{m^2\omega^2\theta^2}{4\hbar^2}\right)}, \omega^{(\theta)} = \omega\sqrt{1 + \frac{m^2\omega^2\theta^2}{4\hbar^2}}, \quad \text{et } \bar{\omega} = \frac{1}{2}m^{(\theta)}\theta\left(\omega^{(\theta)}\right)^2. \tag{3.2.26}$$

On peut l'intégrer sur les variables de l'impulsion car elle est d'une forme quadratique, nous arrivons à la forme lagrangienne:

$$G_x^{\theta}(\mathbf{x}_b, t_b; \mathbf{x}_a, t_a) = \mathcal{N} \int \prod_{n=1}^{N} d\mathbf{x}_n \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N+1} \left[\frac{m^{(\theta)}}{2} (\Delta\mathbf{x}_n)^2 + m^{(\theta)}\bar{\omega}\epsilon^{ij} x_{ni} \Delta x_{nj} - \varepsilon \frac{m^{(\theta)}\omega^2}{2}\mathbf{x}_n^2 \right] \right\}, \tag{3.2.27}$$

où

$$\mathcal{N} = \int \prod_{n=1}^{N+1} \frac{d\mathbf{p}_n}{(2\pi\hbar)^2} \exp\left(\frac{i\varepsilon}{\hbar} \sum_{n=1}^{N+1} \frac{\mathbf{p}_n^2}{2m^{(\theta)}} \right) = \prod_{n=1}^{N+1} \frac{1}{\left(2\pi i\hbar\varepsilon m^{(\theta)}\right)}. \tag{3.2.28}$$

Ce propagateur est le même propagateur de particule non-relativiste dans un champ magnétique constant, et nous allons utiliser les coordonnées polaires, pour obtenir la forme finale de ce propagateur.

$$G_x^{\theta}(\mathbf{x}_b, t_b; \mathbf{x}_a, t_a) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{n_r=0}^{\infty} \Phi_{n_r, m_\ell}(\rho_b, \varphi_b) \Phi_{n_r, m_\ell}^*(\rho_a, \varphi_a) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_{n_r, m_\ell}^{(\theta)} T\right), \tag{3.2.29}$$

et le spectre de l'énergie est

$$E_{n_x, n_y, \ell}^{(\theta)} = \hbar\omega\sqrt{1 + \frac{m^2\omega^2\theta^2}{4}}(2n_r + m_\ell + 1) - \frac{m\omega^2\theta}{2}m_\ell, \quad n = 0, 1, 2, ..., \quad m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{3.2.30}$$

ainsi que la fonction d'onde correspondante

$$\Phi_{n_r, m_\ell}(r, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \mathcal{R}_{n_r, m_\ell} e^{i m_\ell \varphi}, \tag{3.2.31}$$

dans laquelle $\mathcal{R}_{n_r,m_\ell}$ est la fonction d'onde radiale

$$\mathcal{R}_{n_r,m_\ell} = \sqrt{r}\left(2\frac{m\omega}{\hbar\sqrt{1+\frac{m^2\omega^2\theta^2}{4}}}\right)^{1/2}\sqrt{\frac{n_r!}{(n_r+|m_\ell|)!}}\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar\sqrt{1+\frac{m^2\omega^2\theta^2}{4}}}r^2\right)$$
$$\times\left(\frac{m\omega}{\hbar\sqrt{1+\frac{m^2\omega^2\theta^2}{4}}}r^2\right)^{|m_\ell|/2}L_{n_r}^{m_\ell}\left(\frac{m\omega}{\hbar\sqrt{1+\frac{m^2\omega^2\theta^2}{4}}}r^2\right). \quad (3.2.32)$$

La même remarque que l'espace ordinaire pour α point de discrétisation qui vérifie l'équation $(\alpha = 1/2)$.

3.2.3 Cas de la distance minimale (LM)

Dans ce cas, nous allons construire le formalisme d'intégrale du chemin de l'amplitude de transition dans la représentation des impulsions, pour les systèmes quantiques indépendants du temps avec l'incertitude minimale de position non nulle. Suivant les étapes bien connues, nous avons

$$G_p^\beta\left(p_b,t_b;p_a,t_a\right) = \left\langle p_b\left|U\left(t_b,t_a\right)\right|p_a\right\rangle = \lim_{N\to\infty}\left\langle p_b\left|\prod_{n=1}^{N+1}\exp\left[\frac{-i}{\hbar}\epsilon\hat{H}\left(t_n,t_{n-1}\right)\right]\right|p_a\right\rangle. \quad (3.2.33)$$

Où $t_n - t_{n-1} = \frac{t_b-t_a}{N+1}$, Insérant la relation de fermeture pour les états impulsion donnée par l'Eq. (2.4.39) entre chaque paire d'opérateurs évolution infinitésimales et comme nous allons utiliser le produit scalaire de vecteurs propres qui nous avons définis dans relation (2.4.40) contrairement au travail de Nouicer [41], qui utilise la relation (2.4.41). Il y a peu de cas où on peut le résoudre exactement; à savoir, le cas d'un potentiel linéaire $(V(x) = gx)$ et le cas d'un potentiel harmonique $\left(V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2\right)$. Dans le cas de l'oscillateur harmonique, ils ont trouvés la forme Hamiltonienne de l'intégrale de chemin pour le propagateur G_p:

$$G_p^\beta\left(p_b,t_b;p_a,t_a\right) = \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\int\frac{dp_n}{(1+\beta p_n^2)}\prod_{n=1}^{N+1}\int\frac{dq_n}{2\pi\hbar}\left(1+\beta p_n^2\right)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\left[q_n\Delta p_n - \varepsilon\frac{p_n^2}{2m}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\varepsilon\frac{m\omega^2}{2}\left(\left(1+\beta p_n^2\right)^2q_n^2 - 6i\hbar\beta p_nq_n\left(1+\beta p_n^2\right) - 2\hbar^2\beta\left(1+3\beta p_n^2\right)\right)\right]\right\}. \quad (3.2.34)$$

La forme de l'expression (3.2.34) fait apparaître que l'intégrale de chemin sur les variables q_n est gaussienne, donc le résultat est simplement écrit par:

$$G_p^\beta\left(p_b,t_b,p_a,t_a\right) = \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\int\underbrace{\frac{dp_n}{\left(1+\beta p_n^2\right)}}_{=C_m^T}\prod_{n=1}^{N+1}\frac{1}{\sqrt{2\pi i\hbar m\omega^2\varepsilon}}$$

$$\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\left[\underbrace{\frac{(\Delta p_n)^2}{2m\omega^2\varepsilon(1+\beta p_n^2)^2}}_{=C_{act}^T}+\underbrace{\frac{3i\hbar\beta p_n\Delta p_n}{(1+\beta p_n^2)}}_{=C_f^T}-\varepsilon\frac{p_n^2}{2m}-\varepsilon\frac{m\omega^2\hbar^2\beta}{2}\left(-2+3\beta p_n^2\right)\right]\right\}. \quad (3.2.35)$$

Dans l'expression de l'intégrale de chemin ci-dessus, $\frac{(\Delta p_n)^2}{2m\omega^2\varepsilon(1+\beta p_n^2)^2}$ représente le terme de l'action cinétique où il est évident que la «masse» est dépendante de l'impulsion p. C'est l'intégrale de chemin correct pour la représentation du propagateur de l'oscillateur harmonique à une dimension dans ce cadre déformé. Afin de convertir cette expression à la forme habituelle de l'intégrale du chemin de Feynman, nous allons utiliser la méthode de transformation au α-point de discrétisation est défini comme:

$$\bar{p}_n^{(\alpha)} = \alpha p_n + (1-\alpha)\, p_{n-1}. \tag{3.2.36}$$

Selon la méthode [86], nous pouvons montrer qu'il y a trois corrections dans l'expression (3.2.35):

- la première est liée à l'action $C_{act}^{(1)}$,
- la deuxième est liée à la mesure $C_m^{(1)}$,
- et la troisième est liée au facteur C_f^T.

Nous développons l'exponentielle $\frac{(\Delta p_n)^2}{2m\omega^2\varepsilon(1+\beta p_n^2)^2}$ au $\alpha-$point de discrétisation, nous trouvons

$$\exp\left[\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{N+1}\left(\frac{(\Delta p_n)^2}{2m\omega^2\varepsilon(1+\beta p_n^2)^2}\right)\right] = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{N+1}\left(\frac{\left(\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}\right)^2(\Delta p_n)^2}{2m\omega^2\varepsilon}\right)\right]\left(1+C_{act}^{(1)}\right), \tag{3.2.37}$$

avec la fonction $\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}$ est donnée par

$$\bar{f}_n^{(\alpha)\prime} = \frac{1}{(1+\beta p_n^2)}. \tag{3.2.38}$$

On trouve

$$\begin{aligned} C_{act}^{(1)} = \frac{i}{2\hbar m\omega^2\varepsilon}&\left[2(1-\alpha)\frac{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}}\left(\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}\right)^2(\Delta p_n)^3 + (1-\alpha)^2\left[\left(\frac{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}}\right)^2 + \frac{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime\prime\prime}}{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}}\right]\left(\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}\right)^2(\Delta p_n)^4\right] \\ &-\frac{1}{2(2\hbar m\omega^2\varepsilon)^2}4(1-\alpha)^2\left(\frac{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}}\right)^2\left(\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}\right)^4(\Delta p_n)^6, \end{aligned} \tag{3.2.39}$$

est la première correction de l'action lorsque nous avons écrit l'acte en termes de α-point.

Le terme dans la mesure induit aussi une correction à α-point de discrétisation.

$$\frac{1}{(1+\beta p_n^2)} = \bar{f}_n^{(\alpha)\prime}\left(1+C_m^{(1)}\right), \tag{3.2.40}$$

où $C_m^{(1)}$

$$C_m^{(1)} = (1-\alpha)\frac{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}}\Delta p_n + \frac{(1-\alpha)^2}{2}\frac{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime\prime\prime}}{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}}\Delta p_n^2, \tag{3.2.41}$$

est la première correction de la mesure.

Aussi la troisième correction C_f^T qui est donnée par :

$$\exp\left(-\tfrac{3\beta p_n \Delta p_n}{(1+\beta p_n^2)}\right) = 1 + C_f^T$$
$$= 1 + \tfrac{3}{2}\left(\tfrac{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}}\right)\Delta p_n + \tfrac{9}{8}\left(\tfrac{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}}\right)^2 (\Delta p_n)^2 + \tfrac{3}{2}(1-\alpha)\left(\tfrac{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime\prime\prime}}{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}} - \left(\tfrac{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}}\right)^2\right)(\Delta p_n)^2 . \quad (3.2.42)$$

Selon la méthode [86]. Apportons le terme cinétique à la forme conventionelle en utilisant la transformation des impulsions $p_n = g(k_n)$, qui génère deux corrections:

- la première est liée à l'action $C_{act}^{(2)}$
- et la seconde est liée à la mesure $C_m^{(2)}$

Le α-point expansion de Δp_n est écrit par l'indice (n)

$$\Delta p_n = g(k_n) - g(k_{n-1}) = \Delta k_n \bar{g}_n^{(\alpha)\prime}\left(1 + \tfrac{(1-2\alpha)}{2!}\tfrac{\bar{g}_n^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{g}_n^{(\alpha)\prime}}\Delta k_n + \tfrac{(1-\alpha)^3+\alpha^3}{3!}\tfrac{\bar{g}_n^{(\alpha)\prime\prime\prime}}{\bar{g}_n^{(\alpha)\prime}}\Delta k_n^2\right). \quad (3.2.43)$$

Le choix de g est arbitraire, nous imposons la condition suivante

$$\frac{\partial g}{\partial k} = \left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)^{-1}, \quad (3.2.44)$$

cette condition(3.2.44) rend la transformation $g(k) = \frac{\tan\sqrt{\beta}k}{\sqrt{\beta}}$, par la suite, nous développons l'exponentielle avec le terme cinétique

$$\exp\left[\tfrac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{N+1}\left(\tfrac{(\Delta p_n)^2}{2m\omega^2\varepsilon(1+\beta p_n^2)^2}\right)\right] = \exp\left\{i\left[\tfrac{\Delta k_n^2}{2m\omega^2\varepsilon}\right]\right\}\left[1 + C_{act}^{(1)}\right]\left[1 + C_{act}^{(2)}\right], \quad (3.2.45)$$

où

$$C_{act}^{(2)} = \left\{\tfrac{i}{2m\omega^2\varepsilon}\left[(1-2\alpha)\tfrac{\bar{g}_n^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{g}_n^{(\alpha)\prime}}\left(\bar{g}_n^{(\alpha)\prime}\right)^2\left(\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}\right)^2 \Delta k_n^3\right.\right.$$
$$+\left[\tfrac{(1-2\alpha)^2}{4}\left(\tfrac{\bar{g}_n^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{g}_n^{(\alpha)\prime}}\right)^2 + \tfrac{(1-\alpha)^3+\alpha^3}{3}\tfrac{\bar{g}_n^{(\alpha)\prime\prime\prime}}{\bar{g}_n^{(\alpha)\prime}}\right]\left(\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}\right)^2\left(\bar{g}_n^{(\alpha)\prime}\right)^2\Delta k_n^4\Bigg]$$
$$\left.-\tfrac{(1-2\alpha)^2}{2(2m\omega^2\varepsilon)^2}\left(\tfrac{\bar{g}_n^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{g}_n^{(\alpha)\prime}}\right)^2\left(\bar{g}_n^{(\alpha)\prime}\right)^4\left(\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}\right)^4\Delta k_n^6 + \ldots\right\}. \quad (3.2.46)$$

Est la 2^e correction de l'action, quand on introduit le changement de variable.

La mesure induit également une correction

$$\prod_{n=1}^{N}\int dp_n = \prod_{n=2}^{N+1}\int d(\Delta p_n) = \prod_{n=2}^{N+1}\int \mathcal{J} d(\Delta k_n), \quad (3.2.47)$$

où J est le Jacobien de la transformation

$$\mathcal{J} = \frac{\partial \Delta p}{\partial \Delta k} = \bar{g}_n^{(\alpha)\prime} \left(1 + C_m^{(2)}\right), \tag{3.2.48}$$

où $C_m^{(2)}$

$$C_m^{(2)} = (1-2\alpha)\,\frac{\bar{g}_n^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{g}_n^{(\alpha)\prime}}\Delta k_n + \frac{(1-\alpha)^3+\alpha^3}{2}\,\frac{\bar{g}_n^{(\alpha)\prime\prime\prime}}{\bar{g}_n^{(\alpha)\prime}}\Delta k_n^2, \tag{3.2.49}$$

est la 2^e correction de la mesure.

En combinant ces corrections, on obtient la correction totale C_T

$$1 + C_T = \left(1 + C_{act}^{(1)}\right)\left(1 + C_{act}^{(2)}\right)\left(1 + C_m^{(1)}\right)\left(1 + C_m^{(2)}\right)\left(1 + C_f^{T}\right). \tag{3.2.50}$$

Les termes de correction sont évalués perturbativement à l'aide des valeurs moyennes

$$\left\langle (\Delta k)^{2\ell} \right\rangle = \left(i\hbar m\omega^2\varepsilon\right)^{\ell}(2\ell-1)!!. \tag{3.2.51}$$

Nous allons obtenir la valeur de correction C_T dépendante de α, est définie par:

$$\left(1 + C^{T}\right) = 1 + i\hbar m\omega^2\varepsilon\left[\left(2\alpha^2-\alpha-1\right)\beta + \left(2\alpha^2-\alpha+\frac{3}{2}\right)\beta\tan^2\sqrt{\beta}k_n\right]. \tag{3.2.52}$$

Nous notons que, la correction totale dépendante de valeur α. Dans une autre part, grâce au travail précédent [21] qui utilise la méthode des équations, ses résultats sont équivalents à notre travail, sauf dans les cas $\alpha = 0$ et $\alpha = 1/2$ qui représentent respectivement la pré-point et à mi-point. Donc, à ces points ($\alpha = 0,\ 1/2$) le potentiel effectif prend la forme suivante

$$V_{eff} = m\omega^2\hbar^2\beta\left[-1 + \frac{3}{2}\tan^2\sqrt{\beta}k\right]. \tag{3.2.53}$$

L'expression (3.2.35) se transforme,

$$G_p^{\beta}(k_b,k_a) = \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\int dk_n\prod_{n=1}^{N+1}\frac{1}{\sqrt{2\pi i\hbar m\omega^2\varepsilon}}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\left[\frac{(\Delta k_n)^2}{2m\omega^2\varepsilon} - \varepsilon\frac{\tan^2\left(\sqrt{\beta}k_n\right)}{2m\beta}\right]\right\}, \tag{3.2.54}$$

Cette expression est exactement la représentation intégrale de chemin de l'amplitude de transition d'une particule ponctuelle, se déplaçant dans le potentiel symétrique Pöschl-Teller (voir l'appendice B)

$$\mathcal{K}(k_b,k_a) = \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\int dk_n\prod_{n=1}^{N+1}\frac{1}{\sqrt{2\pi i\hbar m\omega^2\varepsilon}}$$
$$\times\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\left[\frac{(\Delta k_n)^2}{2m\omega^2\varepsilon} - \varepsilon\frac{\beta\hbar^2 m\omega^2}{2}\lambda(\lambda-1)\tan^2\left(\sqrt{\beta}k_n\right)\right]\right\}, \tag{3.2.55}$$

avec $\lambda = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+\left(\frac{2}{\beta\hbar m\omega}\right)^2}\right)$. La solution de cette intégrale de chemin est donnée dans Réf, [85] et aussi dans l'appendice (B):

$$G_p^\beta\left(k_b,k_a\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2\lambda-1}(\lambda+n)n!\sqrt{\beta}}{\pi\Gamma(2\lambda+n)[\Gamma(\lambda)]^{-2}}\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\frac{\beta\hbar^2m\omega^2(t_b-t_a)}{2}\left(n^2+2\left(n+1\right)\lambda\right)\right]$$
$$\cos^\lambda\left(\sqrt{\beta}k_b\right)\cos^\lambda\left(\sqrt{\beta}k_a\right)C_n^\lambda\left(\sin\left(\sqrt{\beta}k_b\right)\right)C_n^\lambda\left(\sin\left(\sqrt{\beta}k_b\right)\right). \tag{3.2.56}$$

Nous obtenons finalement la décomposition spectrale de l'amplitude de transition pour l'oscillateur harmonique à une dimension avec l'incertitude de position minimum différente de zéro

$$G_p^\beta\left(p_b,t_b;p_a,t_a\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\Psi_n\left(p_b\right)\Psi_n^*\left(p_a\right)e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t_b-t_a)}. \tag{3.2.57}$$

Le spectre d'énergie est obtenu à partir des pôles de la fonction de Green (3.2.57) est donné par la relation suivante:

$$E_n=\frac{\beta\hbar^2m\omega^2}{2}\left(n^2+2\left(n+1\right)\lambda\right). \tag{3.2.58}$$

En utilisant l'expression de λ, on trouve

$$E_n=\hbar\omega\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\sqrt{1+\left(\frac{\beta\hbar m\omega}{2}\right)^2}+\left(n^2+n+1\right)\left(\frac{\beta\hbar m\omega}{2}\right)\right]. \tag{3.2.59}$$

Aussi, les fonctions propres normalisées des états liés peuvent être facilement déduites

$$\Psi_n\left(p\right)=\sqrt{\frac{2^{2\lambda-1}(\lambda+n)n!\sqrt{\beta}}{\pi\Gamma(2\lambda+n)[\Gamma(\lambda)]^{-2}}}\left[\frac{1}{\sqrt{1+\beta p^2}}\right]^\lambda C_n^\lambda\left(\frac{\sqrt{\beta}p}{\sqrt{1+\beta p^2}}\right). \tag{3.2.60}$$

On remarque que les équations (3.2.59) et (3.2.60) coïncident exactement avec ceux obtenus dans les [21]. Aussi nous pouvons vérifier ces résultats lorsque $\beta\to 0$ et on obtient l'énergie et fonction d'onde dans la représentation de l'espace impulsion de l'oscillateur harmonique usuel à une dimension

$$E_n\underset{\beta\to 0}{=}\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right). \tag{3.2.61}$$

et

$$\Psi_n\left(p\right)\underset{\beta\to 0}{=}\left[\frac{1}{2^nn!\sqrt{\pi}}\right]^{1/2}\left(\frac{1}{m\hbar\omega}\right)^{1/4}e^{-\frac{p^2}{2m\hbar\omega}}H_n\left(\sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}}p\right). \tag{3.2.62}$$

3.3 Etude statistique via le formalisme intégrale de chemin dans la théorie déformée

Nous étudierons dans cette section, la fonction de partition quantique via le formalisme intégrale de chemin, pour le système non-relativiste dans le contexte de la mécanique quantique non déformée et déformée.

3.3.1 Cas de l'espace ordinaire

Comme on le sait, le calcul des éléments de matrice de l'opérateur statistique à l'exemple le plus simple, où la forme standard de l'hamiltonien $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$, avec $\hat{x}$ et $\hat{p}$ sont respectivement les opérateurs de position et d'impulsion dans l'espace ordinaire.

En supposant que cette particule est en équilibre thermodynamique avec un réservoir d'énergie de température T_B, sa fonction de partition canonique est définie par:

$$\mathcal{Z} = \mathrm{Tr}\exp\left(-\hat{H}/k_B T\right), \tag{3.3.1}$$

où Tr désigne une trace habituellement exprimée dans la base des états propres de l'Hamiltonien $\hat{H}$.

La fonction de partition quantique (3.3.1) a une représentation sous forme d'intégrale de chemin qui se déduit immédiatement de la représentation des éléments de matrice de l'opérateur statistique $e^{-\hat{H}/k_B T}$. En effet

$$\mathcal{Z}(\beta) = \mathrm{Tr}e^{-\beta H} = \mathrm{Tr}U(i\hbar\beta, 0) = \int dx_b dx_a \delta(x_b - x_a) \langle x_b | U(\hbar\beta, 0) | x_a\rangle . \tag{3.3.2}$$

Pour évaluer cette fonction de partition, nous allons découper le paramètre $(1/k_B T)$ en $(N+1)$ intervalles identiques et infiniment petits: $\left(\frac{1}{k_B T} = (N+1)\varepsilon\right)$. Puisque l'opérateur $\hat{H}$ commute avec lui-même, on peut introduire N fois la relation de fermeture en une représentation coordonnée entre chaque opérateur $\exp\left(-\varepsilon\hat{H}\right)$, on obtient l'expression suivante de la fonction de partition:

$$\mathcal{Z} = \int \prod_{n=1}^{N+1} dx_n \left\langle x_n \left| \exp\left(-\varepsilon\hat{H}\right) \right| x_{n-1}\right\rangle . \tag{3.3.3}$$

L'étape suivante consiste à développer les différents éléments de matrice en utilisant la limite $\varepsilon \to 0$, c'est-à-dire $N \to \infty$. Ainsi, en considérant un élément de matrice particulier, on a tout d'abord:

$$\left\langle x_n \left| \exp\left(-\varepsilon\hat{H}\right) \right| x_{n-1}\right\rangle = \int dp_n \langle x_n \mid p_n\rangle \left\langle p_n \left| \exp\left(-\varepsilon\hat{H}\right) \right| x_{n-1}\right\rangle . \tag{3.3.4}$$

Après injection de l'opérateur $\hat{H}$ sur les états $|p_n\rangle$ et $|x_{n-1}\rangle$ en utilisant l'expression du produit des représentations de la coordonnée et de l'impulsion:

$$\left\langle x_n \left| \exp\left(-\varepsilon\hat{H}\right) \right| x_{n-1}\right\rangle = \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar} p_n \Delta x_n - \varepsilon\left(\frac{p_n^2}{2m} + V(x_{n-1})\right)\right]. \tag{3.3.5}$$

On obtient une intégrale gaussienne sur p_n et dont le résultat finale de la fonction de partition est:

$$\mathcal{Z} = \left(\frac{m}{2\pi\varepsilon\hbar^2}\right)^{(N+1)/2} \int \prod_{n=1}^{N+1} dx_n \exp\left[\sum_{n=1}^{N+1} \left[-\frac{m}{2\varepsilon\hbar^2} (\Delta x_n)^2 - \varepsilon V(x_n)\right]\right]. \tag{3.3.6}$$

On note dans l'Eq.(3.3.6) est dépendante du propagateur

$$\mathcal{Z}\left(\frac{1}{k_BT}\right) = \int dx_b dx_a \delta\left(x_b - x_a\right) \mathcal{K}(x_b, i\hbar/k_BT; x_a, 0). \tag{3.3.7}$$

On va ramener les mêmes étapes précédentes. La fonction de partition s'agit de mettre $t \to -i\tau$ et $x_b = x_a$, puis en intégrant sur x_b, ce qui s'écrit souvent:

$$\mathcal{Z}\left(\beta\right) = \int\limits_{x_b=x_a} \mathcal{D}x \exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\int\limits_0^{\beta\hbar} d\tau\left[\frac{m}{2\varepsilon}\dot{x}^2 + \varepsilon V\left(x\left(\tau\right)\right)\right]\right\}, \tag{3.3.8}$$

avec $\dot{x} = dx/d\tau$.

3.3.2 Cas de l'espace non-commutatif (NC)

Dans la même manière que nous avons présenté dans le cas commutatif, nous pouvons calculer la fonction de partition dans l'espace non-commutatif de l'oscillateur harmonique. De l'Eq.(3.3.7) et le résultat du propagateur (3.2.27), nous trouvons:

$$Z^{(\theta)} = \int\limits_{x_a=x_b} D\mathbf{x}\left(t\right) \exp\left[-\frac{1}{\hbar}\int\limits_0^{\beta\hbar} d\tau\left(\mathcal{L}^{(\theta)}\left(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}\right)\right)\right], \tag{3.3.9}$$

avec Lagrangien de ce cas est défini par:

$$\mathcal{L}^{(\theta)}\left(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}\right) = \frac{m^{(\theta)}}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 - \frac{m^{(\theta)}}{2}\omega^2\mathbf{x}^2 + m^{(\theta)}\bar{\omega}\epsilon^{ij}x_i\dot{x}_j. \tag{3.3.10}$$

Et le résultat de ce propagateur s'écrit:

$$\begin{aligned} Z^{(\theta)} = & \int\limits_{\mathbf{x}_a=\mathbf{x}_b} d\mathbf{x}\left(\tau\right) \frac{m\omega}{2\pi i\sqrt{\kappa}\sin\left(\omega\tau\sqrt{\kappa}\right)} \\ & \times \exp\left\{\frac{m\omega}{2\sqrt{\kappa}\sin\left(\omega\tau\sqrt{\kappa}\right)}\left[2\left(\mathbf{x}_a^2 + \mathbf{x}_b^2\right)\cos\left(\omega\tau\sqrt{\kappa}\right) - 2\mathbf{x}_b.\mathbf{x}_a\cos\left(\omega\tau\sqrt{\kappa-1}\right)\right.\right. \\ & \left.\left. +2\left(\mathbf{x}_a \times \mathbf{x}_b\right)_z \sin\left(\omega\tau\sqrt{\kappa-1}\right)\right]\right\}, \end{aligned} \tag{3.3.11}$$

avec $\kappa = \left(1 + \frac{m^2\omega^2\theta^2}{4\hbar^2}\right)$ et $\tau = -\frac{i}{k_BT}$. Alors la fonction de partition de l'espace non-commutatif se donne par,

$$\begin{aligned} Z^{(\theta)} &= \frac{1}{2\left[\cosh\left(\frac{\omega}{k_BT}\sqrt{\kappa}\right) - \cosh\left(\frac{\omega}{k_BT}\sqrt{\kappa-1}\right)\right]} \\ &= \frac{1}{4\sinh\left[\frac{\omega}{2}\frac{1}{k_BT}\left(\sqrt{\kappa}+\sqrt{\kappa-1}\right)\right]\sinh\left[\frac{\omega}{2}\frac{1}{k_BT}\left(\sqrt{\kappa}-\sqrt{\kappa-1}\right)\right]}. \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

Le résultat ci-dessus pour la fonction de partition est dérivé précédemment dans le cadre de la formulation Hamiltonienne du problème [39].

$$Z^{(\theta)} = \mathrm{Tr}e^{-\frac{1}{k_BT}H} = \sum_{n_x,n_y=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{k_BT}E_{n_x,n_y}} \tag{3.3.13}$$

$$= \frac{1}{4\sinh\left[\frac{\omega}{2}\frac{1}{k_BT}\left(\sqrt{\kappa}+\sqrt{\kappa-1}\right)\right]\sinh\left[\frac{\omega}{2}\frac{1}{k_BT}\left(\sqrt{\kappa}-\sqrt{\kappa-1}\right)\right]} \tag{3.3.14}$$

avec le spectre d'énergie est donné dans l'Eq.(3.2.30) . L'énergie libre $F(\beta)$ de ce système est liée à la fonction de partition comme

$$F(\beta) = -\tfrac{1}{\beta}\ln\left(Z(\beta)\right). \tag{3.3.15}$$

Qui, à basse température limite tend à l'énergie de l'état fondamental du système. En particulier pour le cas de l'oscillateur harmonique, on obtient:

$$\lim_{\beta\to\infty} F(\beta) = \omega\sqrt{\kappa}. \tag{3.3.16}$$

Qui coïncide avec l'énergie de l'état fondamental du système, $\varepsilon_{0,0} = \omega\sqrt{\kappa}$ (Voir Eq.(3.2.30)). Dans la limite $\theta \to 0$, le paramètre κ tend vers l'unité et on récupère l'énergie de l'état fondamental de l'oscillateur harmonique ordinaire en deux dimensions.

3.3.3 Cas de la distance minimale (LM)

Dans la même manière que nous avons présenté dans le paragraphe précédent, nous pouvons calculer la fonction de la partition d'une particule quantique de l'oscillateur harmonique avec présence de la distance minimale, des (3.3.7) et (3.2.56) , nous obtenons:

$$Z^{(\beta)} = \int\limits_{k_a=k_b} Dk(t)\exp\left[-\tfrac{1}{\hbar}\int\limits_0^{\beta\hbar} d\tau\left(\mathcal{L}^{(\beta)}\left(k,\dot{k}\right)\right)\right], \tag{3.3.17}$$

avec Lagrangien dans ce cas est défini par:

$$\mathcal{L}^{(\beta)}\left(k,\dot{k}\right) = \tfrac{\dot{k}^2}{2m\omega^2} - \tfrac{\tan^2\left(\sqrt{\beta}k\right)}{2m\beta}. \tag{3.3.18}$$

Et la solution de ce propagateur [41] est donnée par:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}^{(\beta)}(k_b,k_a;t_b,t_a) &= \sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{2^{2\lambda-1}(\lambda+n)n!\sqrt{\beta}}{\pi\Gamma(2\lambda+n)[\Gamma(\lambda)]^{-2}}e^{\left[-\frac{i}{\hbar}\frac{\beta\hbar^2m\omega^2}{2}\left(n^2+2(n+1)\lambda\right)(t_b-t_a)\right]}\\ &\times\cos^{\lambda}\left(\sqrt{\beta}k_b\right)\cos^{\lambda}\left(\sqrt{\beta}k_a\right)C_n^{\lambda}\left(\sin\left(\sqrt{\beta}k_b\right)\right)C_n^{\lambda}\left(\sin\left(\sqrt{\beta}k_b\right)\right).\end{aligned} \tag{3.3.19}$$

La fonction de partition, peut être définie en termes de propagateur du système

$$\mathcal{Z}^{(\beta)} = \mathrm{Tr}\mathcal{K}^{(\beta)}\left(k_b,\tfrac{1}{k_BT};k_a,0\right), \tag{3.3.20}$$

avec le symbole (Tr) représentant la trace fonctionnelle qui pour une fonction bilocale $A(k_b,k_a)$ en D dimensions est défini comme

$$\mathrm{Tr}A(k_b,k_a) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk A(k,k). \tag{3.3.21}$$

Lorsque on remplace le t_b par le temps imaginaire $\left(-\frac{i}{k_B T}\right)$

$$\mathcal{Z}^{(\beta)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2\lambda-1}(\lambda+n)n!\sqrt{\beta}}{\pi\Gamma(2\lambda+n)[\Gamma(\lambda)]^{-2}} \exp\left[-\frac{1}{\hbar}\frac{\beta\hbar^2 m\omega^2}{2k_B T}\left(n^2+2(n+1)\lambda\right)\right]$$
$$\times \int dk(t)\cos^{2\lambda}\left(\sqrt{\beta}k\right)\left[C_n^\lambda\left(\sin\left(\sqrt{\beta}k\right)\right)\right]^2. \tag{3.3.22}$$

Et on utilise la relation qui est présentée dans l'appendice (A) [87]:

$$\int \left(1-x^2\right)^{\lambda-1/2} C_n^\lambda(x)\, C_n^\lambda(x)\, dx = 2^{1-2\lambda}\pi\frac{\Gamma(n+2\lambda)}{(n+\lambda)[\Gamma(\lambda)]^2 n!}. \tag{3.3.23}$$

Alors la fonction de partition dans la présence de la distance minimale s'écrit comme suit:

$$\mathcal{Z}^{(\beta)} = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{k_B T}\frac{\beta\hbar^2 m\omega^2}{2\hbar}\left(n^2+2(n+1)\lambda\right)\right], \tag{3.3.24}$$

avec $\lambda = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+\left(\frac{2}{\beta\hbar m\omega}\right)^2}\right)$.

Le résultat ci-dessus pour la fonction de partition est dérivé précédemment dans le cadre de la formulation Hamiltonienne du problème.

$$Z^{(\theta)} = \mathrm{Tr}\, e^{-\frac{1}{k_B T}H} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{k_B T}E_n}, \tag{3.3.25}$$

avec le spèctre d'énergie donné dans l'Eq.(3.2.59) . L'énergie libre $F(k_B T)$ de ce système est liée à la fonction de partition comme

$$F(k_B T) = -k_B T \ln\left(\mathcal{Z}\left(\frac{1}{k_B T}\right)\right). \tag{3.3.26}$$

Alors, dans les derniers cas, nous avons essayé de traiter certains problèmes quadratiques de la mécanique quantique et statistique en utilisant le formalisme de Feynman au α-point de discrétisation dans le contexte de cas déformé. Nous avons trouvé les mêmes resultats déjà étudiés avec d'autres méthodes.

3.4 L'intégrale de chemins sur les variables de Spin (Technique de Fradkin-Gitman)

Le formalisme de l'intégrale de chemin en mécanique quantique relativiste ou non-relativiste pour les particules qui ont les caractéristiques de spin, n'était pas tout à fait claire à cause du problème que constitue de nature discrète du spin. Cette propriété n'est pas conforme avec ce qui a été apporté par Feynman [72]. En fait, il y a eu plusieurs essais pour traiter ces qualités des problèmes sur la façon de Feynman. La première proposition était en 1965 par Fradkin [88] et ensuite par Berezin et Marinov [89], et enfin elle a pris sa dernière forme par Fradkin et Gitman en 1991 [73] où ils ont réussi à obtenir le propagateur relatif à la particule de Dirac une formulation integrale de chemin et ceci suivant la forme standard de Feynman.

$$\sum_{\text{paths}} \exp\left[iS\left(\text{path}\right)\right], \tag{3.4.1}$$

où $S\left(\text{path}\right)$ est une action supersymétrique décrivant à la fois les mouvements externes de la particule par des variables de type bosoniques et la dynamique interne relative au spin de la particule par des variables de Grassmann. L'idée de base consiste d'abord à écrire formellement la fonction de Green solution de l'équation

$$\left[\gamma^{\mu}\mathcal{P}_{\mu} - m\right] S^{c}(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a) = -\delta^{3}(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_a). \tag{3.4.2}$$

où $\mathcal{P}_{\mu} = \left(i\partial_{\mu} - eA_{\mu}\right)$, e est la charge électrique, $x \equiv (x_0, x_1, x_2)$ sont les coordonnées d'espace cartésiennes et le tenseur de Minkowski est $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1)$. Les matrices de Dirac sont alors représentées par les matrices de Pauli

$$\gamma^{0} = \sigma_3, \gamma^{1} = i\sigma_2, \text{ et } \gamma^{2} = -i\sigma_1. \tag{3.4.3}$$

Cette méthode de calcul utilise la technique du temps propre de Schwinger, Au debut nous écrivons l'inverse de l'équation de Dirac, en suite, multiplions cet inverse par un autre opérateur qui donne à un opérateur quadratique de type Klein-Gordon, plus un terme de couplage de type spin-orbite. A ce niveau, nous introduisons la relation de fermeture de x_b entre l'opérateur fermionique $(\gamma^{\mu}\mathcal{P}_{\mu} + m)$ et l'opérateur bosonique de type Klein-Gordon. Cette écriture, s'appelle la projection globale. Après avoir effectué toutes les intégrales fonctionelles suivant une méthode matricielle appropriée, on applique alors cet opérateur fermionique. Finalement, le résultat de la fonction de Green est donné explicitement et ainsi extraire de cette fonction de Green toute les informations quantiques nécessaire c'est-à-dire les fonctions d'ondes ainsi que le spectre d'énergie.

3.4.1 Evaluation de la fonction de Green au cas de l'espace ordinaire

Par ailleurs, il a été montré par Alexandrou et les autres [90]; que le problème de l'équation de Dirac avec un champ électromagnétique peut être formulé suivant la représentation globale.

$$S^{c}(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a) = \left[\gamma^{\mu}\mathcal{P}_{\mu} + m\right]_b G\left(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a\right), \tag{3.4.4}$$

avec $G(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a)$ élément de matrice.

$$G(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a) = \left\langle \mathbf{x}_b \left| \frac{1}{[\gamma^\nu \mathcal{P}_\nu - m][\gamma^\mu \mathcal{P}_\mu + m]} \right| \mathbf{x}_a \right\rangle, \tag{3.4.5}$$

le propagateur (3.4.5) on peut l'écrire dans la forme

$$G(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a) = i \int_0^\infty d\lambda_0 \left\langle \mathbf{x}_b \left| \exp\left(-iH(\lambda_0)\right) \right| \mathbf{x}_a \right\rangle, \tag{3.4.6}$$

où

$$\hat{H}(\lambda) = -\lambda_0 \left(\mathcal{P}^2 - m^2 - \frac{ie}{2} F_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu \right). \tag{3.4.7}$$

Ainsi, en vue de construire une représentation d'intégrale de chemin pour $G(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a)$, nous suivons la méthode de discrétisation standard pour le kernel de (3.4.6). Comme il est connu généralement, nous écrivons $\exp\left(-i\hat{H}(\lambda_0)\right) = \left[\exp\left(-i\frac{\hat{H}(\lambda_0)}{N+1}\right)\right]^{N+1}$ et insérer N fois l'identité $\int |\mathbf{x}\rangle \langle \mathbf{x}| \, dx = I$ entre tous les opérateurs $\exp\left(-i\frac{\hat{H}(\lambda_0)}{N+1}\right)$, et l'identité $\int |\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p}| \, dp = I$, de transformer l'expression de $G(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a)$ dans l'intégrale de chemin suivant :

$$G(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a) = i\mathcal{T} \int_0^\infty d\lambda_0 \int D\mathbf{x} D\mathbf{p} \exp\left[i \int_0^1 \left[\lambda_0 \left(\mathcal{P}^2 - m^2 - \frac{ie}{2} F_{\mu\nu}(x) \gamma^\mu \gamma^\nu \right) + \mathbf{p}\dot{\mathbf{x}} \right] ds \right]. \tag{3.4.8}$$

Dans ce cas, nous introduisons le produit $\mathcal{T}$ qui ordonne les matrices γ^μ. Où $F_{\mu\nu}$ est matrice anti-symétrique écrite comme

$$F_{\mu\nu} = h(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.4.9}$$

avec les a, b, c sont les variables complexes constantes et $h(\mathbf{x})$ est une fonction dépendante du champs (c'est-à-dire dépendante de la position $(\mathbf{x})$). L'opérateur chronologique $\mathcal{T}$ est nécessaire à cause de l'ordre dû aux matrices de Dirac qui sont supposées dépendre du temps formelle. On doit obligatoirement éliminer cet opérateur et l'astuce maintenant consiste à introduire des courants $\rho_\mu(s)$ qui anticommutent avec les matrices γ^μ où $\mu = 0, 1, 2$ à l'aide de la formule suivante [73]:

$$\mathcal{T} \exp\{f(\gamma^\mu)\} = \exp\left\{ f\left(\frac{\delta_g}{\delta \rho_\mu} \right) \right\} \mathcal{T} \exp\left[\int_0^1 \rho_\mu(s) \gamma^\mu ds \right]_{\rho=0.}, \tag{3.4.10}$$

où $\frac{\delta_g}{\delta\rho_\mu}$ signifie une dérivation fonctionnelle par la gauche par rapport au nième courant Grassmannien et aussi on a [73]

$$\begin{aligned}\mathcal{T}\exp\left\{\int_0^1 \rho_n(s)\,\gamma^n ds\right\}|_{\rho=0} &= \exp\left(i\gamma^n \frac{\delta_l}{\delta\xi^n}\right)\\ \times\int_{\psi_n(0)+\psi_n(1)=\xi_n} &\exp\left[\int_0^1 \left(\psi_n\dot{\psi}^n - 2i\rho_n\psi^n\right)ds\right.\\ &\left.+\psi_n(1)\,\psi^n(0)\right]\mathcal{D}\psi\,|_{\xi=0}^{\rho=0}. \qquad (3.4.11)\end{aligned}$$

La mesure $D\psi$ est définie par

$$\mathcal{D}\psi = D\psi\left[\int_{\psi_n(0)+\psi_n(1)=0} D\psi\exp\left(\int_0^1 \psi_n\dot{\psi}^n ds\right)\right]^{-1}. \qquad (3.4.12)$$

ξ^μ sont les variables Grassmann auxiliaire (*impaire*) qui anticommute avec les γ-matrices de Dirac. $\psi^n(s)$ sont trajectoires impaires de l'intégration; sont des variables de Grassmann impaires, remplaçons (3.4.11) dans (3.4.8). Alors, la fonction de Green prend la forme suivante:

$$\begin{aligned}G(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a) &= i\exp\left(i\gamma^n\frac{\delta_l}{\delta\xi^n}\right)\int_0^\infty d\lambda_0\int D\mathbf{x}D\mathbf{p}\exp\left[i\int_0^{\lambda_0}\left[\left(\mathcal{P}^2-m^2\right)+\mathbf{p}\dot{\mathbf{x}}\right]ds\right]\\ &\times\int\mathcal{D}\psi\exp\left[i\int_0^{\lambda_0}\left[2ieF_{nk}(\mathbf{x})\,\psi^n\psi^k - i\psi_n\dot{\psi}^n\right]ds+\psi_n(1)\,\psi^n(0)\right]_{\xi=0}. \qquad (3.4.13)\end{aligned}$$

Où x, ψ obéissent aux conditions aux bords suivants

$$\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_a, \mathbf{x}(1)=\mathbf{x}_b, \quad \text{et } \psi^n(0)+\psi^n(1)=\xi^n. \qquad (3.4.14)$$

Notons que l'intégrations des variables de Grassmann ψ de (3.4.13) est soumise à la condition aux bords $\psi_n(0)+\psi_n(1)=\xi_n$. Pour se libérer de cette contrainte passons à l'espace des variables de vitesses relatives $\omega_n(s)$ définis par:

$$\psi_n(s)=\frac{1}{2}\int_0^1 \varepsilon(s-s')\,\omega_n(s')\,ds'+\frac{\xi_n}{2}. \qquad (3.4.15)$$

Où le $\varepsilon(s)$ étant le signe de temps s et ω est une variable de Grassmann impaire, il est claire qu'on a

$$\dot{\psi}_n(s)=\omega_n(s), \quad \psi_n(1)\,\psi^n(0)=-\frac{\xi^n}{2}\int_0^1 \omega^n(s)\,ds, \qquad (3.4.16)$$

et

$$\omega(1)+\omega(0)=0. \qquad (3.4.17)$$

De l'éq.(3.4.13) le terme Grassmanienne est simplifie comme:

$$\mathcal{I}_{spin} = \exp\left(i\gamma^n \frac{\delta_l}{\delta\xi^n}\right) \int \mathcal{D}\omega \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \omega_\mu(s)\varepsilon\left(s-s'\right)\omega^\mu(s')dsds' \right.$$
$$+\frac{\lambda_0 e}{2}\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \omega^\mu(s)\varepsilon\left(s-s''\right)F_{\mu\nu}\left(s''\right)\varepsilon\left(s''-s'\right)\omega^\nu(s')dsds'ds''$$
$$\left. -\lambda_0 e\int_0^1\int_0^1 \xi^\mu F_{\mu\nu}(s)\varepsilon\left(s-s'\right)\omega^\nu(s')dsds' - \frac{\lambda_0 e}{2}\int_0^1 F_{\mu\nu}(s)\xi^\mu\xi^\nu ds.\right. \tag{3.4.18}$$

Nous allons utiliser les notations condensées

$$f\varepsilon g = \int_0^1 f\left(s\right)\varepsilon\left(s-s'\right)g(s')ds', \quad \text{e.g. } \omega^n\varepsilon\omega_n = \int_0^1 dsds'\omega(s)\varepsilon(s-s')\omega(s'). \tag{3.4.19}$$

On peut écrire $\mathcal{I}_{spin}$ à la forme suivante:

$$\mathcal{I}_{spin} = \exp\left(i\gamma^n \frac{\delta_l}{\delta\xi^n}\right) \int \mathcal{D}\omega \exp\left[i\left[-\frac{i\lambda_0 e}{2}\left(\omega^\mu\varepsilon-\xi^\mu\right)F_{\mu\nu}\left(\varepsilon\omega^\nu+\xi^\nu\right)\right]+\frac{i}{2}\omega_n\varepsilon\omega^n\right]_{\xi=0}. \tag{3.4.20}$$

Ou bien

$$\mathcal{I}_{spin} = \exp\left(i\gamma^n \frac{\delta_l}{\delta\xi^n}\right) \exp\left[i\int_0^{\lambda_0}\frac{ie}{2}F_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu\right]\int \mathcal{D}\omega \exp\left[-\frac{1}{2}\omega^n T_{nk}\omega^k + I_n\omega^n\right]_{\xi=0}. \tag{3.4.21}$$

Où la mesure $\mathcal{D}\omega$ est:

$$\mathcal{D}\omega = D\omega\left[\int D\omega \exp\left(-\frac{1}{2}\omega^n\varepsilon\omega_n\right)\right]^{-1}. \tag{3.4.22}$$

Et ainsi de suite. De l'eq(3.4.21), on peut obtenir les formes des I_k et T_{nk} :

$$\begin{aligned} I_k &= -\lambda_0 e\xi^n F_{nk}\varepsilon. \\ T_{nk} &= \eta_{nk}\varepsilon - \lambda_0 e\varepsilon F_{nk}\varepsilon. \end{aligned} \tag{3.4.23}$$

L'intégration sur ω a une forme gaussienne, qui écrit ce qui suit:

$$\mathcal{I}_{spin} = \exp\left(i\gamma^n \frac{\delta_l}{\delta\xi^n}\right) \exp\left[i\int_0^{\lambda_0}\frac{ie}{2}F_{nk}\xi^n\xi^k\right]\sqrt{\frac{\det T}{\det\varepsilon}}\exp\left[-\frac{1}{2}I_n\left[T^{-1}\right]^{nk}I_k\right]_{\xi=0}. \tag{3.4.24}$$

Où T^{-1} est l'inverse de T. Il peut être facilement fait [77], [78], en tenant compte de sa définition initiale [78],

$$I_n\left[T^{-1}\right]^{nk}I_k = 2e^2\lambda_0^2\left(F\mathcal{G}F\right)_{ml}\xi^m\xi^l, \tag{3.4.25}$$

avec

$$\mathcal{G}^{nk} = \frac{1}{2}\varepsilon \left[T^{-1}\right]^{nk} \varepsilon. \tag{3.4.26}$$

On peut facilement calculer le terme de $\sqrt{\frac{\det T}{\det \varepsilon}}$, en utilisant la bonne formule

$$\det T\left(x\right| e) = \exp(\mathrm{Tr} \ln T\left(x\right| e)). \tag{3.4.27}$$

Avec la dérivation de e, on obtient l'équation

$$\frac{d}{de}\det T\left(x\right| e) = \det T\left(x\right| e)\mathrm{Tr}T^{-1}\left(x\right| e)\frac{dT\left(x\right| e)}{de} = -2\lambda_0 \det T\left(x\right| e)\mathrm{Tr}\mathcal{G}\left(x\right| e)F(x). \tag{3.4.28}$$

Elle se réduit à une équation différentielle du premier ordre, dont la solution est comme suit [78]

$$\left[\frac{\det T\left(x\right| e)}{\det \varepsilon}\right] = \exp\left[-2\lambda_0 \int_0^e de' Tr\mathcal{G}\left(x\right| e')F\left(x\right)\right]. \tag{3.4.29}$$

En insérant ces résultats dans eq(3.4.24), nous obtenons:

$$\mathcal{I}_{spin} = \exp\left(i\gamma^n \frac{\delta_l}{\delta\xi^n}\right) \exp\left[i\left[2i\lambda_0 \int_0^e de' Tr\mathcal{G}\left(x\right| e')F\left(x\right) + i\frac{\lambda_0 e}{2}\left(F\mathcal{K}\right)_{nk}\xi^n\xi^k\right]\right]_{\xi\theta=0}. \tag{3.4.30}$$

Où

$$\mathcal{K}_{nk} = \left(\eta_{nk} + 2\lambda_0 e\left(\mathcal{G}F\right)_{nk}\right). \tag{3.4.31}$$

Maintenant, il faut calculer T^{-1}, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{K}$, comme nous le savons la fonction T_{nk} est définie par

$$T_{nk}\left(s, s'\right) = \varepsilon\left(s - s'\right)\eta_{nk} - \lambda_0 e \int_0^1 \varepsilon\left(s - s''\right) F_{nk} \varepsilon\left(s'' - s'\right) ds''. \tag{3.4.32}$$

Pour obtenir la fonction $\mathcal{G}_{\alpha\beta}\left(s, s'\right)$

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta}\left(s, s'\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 \Omega_{\alpha\beta}\left(s, s'\right)\varepsilon\left(\tau - s'\right) d\tau. \tag{3.4.33}$$

Il est commode de définir d'abord la fonction $\Omega_{\alpha\beta}\left(s, s'\right)$ par

$$\Omega_{\alpha\beta}\left(s, s'\right) = \int_0^1 \varepsilon\left(s - \tau\right) T^{-1}_{\alpha\beta}\left(\tau, s'\right) d\tau. \tag{3.4.34}$$

Maintenant, nous avons

$$\int_0^1 T_{nk}\left(s, s''\right)\left(T^{k\beta}\right)^{-1}\left(s'', s'\right) ds'' = \delta_n^\beta \delta\left(s - s'\right). \tag{3.4.35}$$

Remplaçant (3.4.32) dans (3.4.35), on peut facilement arriver à

$$\Omega_{n\beta}(s,s') - \lambda_0 e \int_0^1 \varepsilon(s-s'') F_{nk} \Omega^k_{\ \beta}(s'',s')\, ds'' = \eta_{n\beta}\delta(s-s'). \tag{3.4.36}$$

Cette équation est équivalente à l'équation différentielle

$$\frac{d\Omega_{n\beta}(s,s')}{ds} - 2\lambda_0 e F_{nk}\Omega^k_{\ \beta}(s,s') = \eta_{n\beta}\frac{d\delta(s-s')}{ds}. \tag{3.4.37}$$

Avec la condition initiale

$$\Omega_{n\beta}(0,s') + \lambda_0 e \int_0^1 F_{nk}\Omega^k_{\ \beta}(s'',s')\, ds'' = \eta_{n\beta}\delta(s'). \tag{3.4.38}$$

Des (3.4.37) et (3.4.38), nous trouvons la solution

$$\Omega(s,s') = \delta(s-s') + \lambda_0 F e^{2\lambda_0 e\left[\int_0^\tau F(s)ds - \int_0^{\tau'} F(s')ds'\right]}\left[\varepsilon(s-s') - \tanh\left(\int_0^1 \lambda_0 e F(s)\, ds\right)\right]. \tag{3.4.39}$$

En insérant (3.4.39) dans (3.4.33), nous pouvons obtenir

$$\begin{aligned} T^{-1}(\tau-\tau') &= \varepsilon^{-1}(\tau,\tau') \\ &+ (\lambda_0 e F)^2 e^{2\lambda e\left[\int_0^\tau F(s)ds - \int_0^{\tau'} F(s')ds'\right]}\left[\varepsilon(\tau-\tau') - \tanh\left(\int_0^1 \lambda_0 e F(s)\, ds\right)\right] \\ &+ \lambda_0 e F e^{2\lambda e\left[\int_0^\tau F(s)ds - \int_0^{\tau'} F(s')ds'\right]}\delta(\tau-\tau'). \end{aligned} \tag{3.4.40}$$

Et

$$\mathcal{G}(\tau-\tau') = \frac{1}{2} e^{2\lambda e\left[\int_0^\tau F(s)ds - \int_0^{\tau'} F(s')ds'\right]}\left[\varepsilon(\tau-\tau') - \tanh\left(\int_0^1 \lambda_0 e F(s)\, ds\right)\right]. \tag{3.4.41}$$

Par un simple calcul, on peut déduire

$$\begin{aligned} -2\lambda_0 \int_0^e de' Tr\mathcal{G}(x|\, e')F(x) &= -2\lambda_0 \int_0^e de' \int_0^1 ds\ \mathcal{G}^{\mu\nu}(s,s)\, F_{\mu\nu}(x(s)) \\ &= \lambda_0 \int_0^e de' \int_0^1 ds\ \left[\tanh\left(\int_0^1 \lambda_0 e' F(s)\, ds\right)\right]^{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x(s)) \\ &= \ln\cosh\left(\int_0^1 \lambda_0 e F(s)\, ds\right) \end{aligned} \tag{3.4.42}$$

Et aussi la fonction $(F\mathcal{K})$ est simplifie par

$$(F\mathcal{K})_{nk} = \frac{2}{\lambda_0}\tanh\left(\int_0^1 \lambda_0 e F(s)\, ds\right). \tag{3.4.43}$$

En utilisant la série de $\tanh(x)$ et les caractéristiques de matrice $F(s)$, qui est définie en formulant (3.4.9), on obtient

$$(F\mathcal{K})_{nk} = \frac{2}{\lambda_0}\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{pmatrix} \tanh\left(\int_0^{\lambda_0} e\sqrt{(a^2+b^2)-c^2}h(\mathbf{x})\,ds\right). \tag{3.4.44}$$

On trouve

$$\mathcal{I}_{spin} = e^{\left(i\gamma^n \frac{\delta_l}{\delta\xi^n}\right)}\left[\cos\left(\int_0^{\lambda_0} e\sqrt{c^2-(a^2+b^2)}h(\mathbf{x})\,ds\right) - \frac{\sin\left(\int_0^{\lambda_0} e\sqrt{c^2-(a^2+b^2)}h(\mathbf{x})ds\right)}{h(\mathbf{x})}F_{nk}\xi^n\xi^k\right]_{\xi=0}. \tag{3.4.45}$$

Pour la dérivation sur les variables des Grassmannes (ξ^n) de cette dernière relation $(\mathcal{I}_{spin})$, nous utilisons la formule suivante:

$$\begin{aligned} &\exp\left(i\gamma^n\frac{\delta_l}{\delta\xi^n}\right) f(\xi)\,|_{\xi=0} = f\left(\frac{\delta_l}{\delta\zeta}\right)\exp\left(i\zeta_n\gamma^n\right)|_{\zeta=0} \\ &= \sum_{k=0}^{3}\sum_{n_1\ldots n_k} f_{n_1\ldots n_k}\frac{\delta_l}{\delta\zeta_{n_1}}\cdots\frac{\delta_l}{\delta\zeta_{n_k}}\sum_{l=0}^{3}\frac{i^l}{l!}\left(\zeta_n\gamma^n\right)^l|_{\zeta=0}\,. \end{aligned} \tag{3.4.46}$$

Finalement, nous avons expliqué la manière de traiter avec les systèmes relatifs au spin (méthode de Fradkin-Gitman). Nous allons obtenir les expressions de Spin dans chaque cas des applications que nous présentons dans les chapitres suivants.

4

Formalisme d'intégrale de Chemin de l'oscillateur de Dirac en présence de la distance minimale

4.1 Introduction

Le vingtième siècle a été caractérisé par trois révolutions de la physique théorique. Deux d'entre eux avaient commencé simultanément; la physique quantique et la théorie de la relativité générale et le troisième est la géométrie non-commutative (GNC) est venue dernièrement après le milieu du siècle. Mathématiquement l'idée de la géométrie non-commutative est basée sur la généralisation du principe de Heisenberg. La recherche dans ce domaine et toujours en cours, et cela se reflète sur notre chapitre qui est inspiré à partir d'une série de documents, Kempf et al [1, 3, 4, 5]. La présente étude se situe sur la modification de la relation incertitude de Heisenberg $\Delta\tilde{x}\Delta\tilde{p} \geq \frac{\hbar}{2}\left(1+\beta\left(\Delta p\right)^2\right)$ et leurs relations de commutations canoniques entre l'opérateur de position $\widehat{\tilde{x}}$ et l'opérateur de moment $\widehat{\tilde{p}}$ correspondant $\left[\widehat{\tilde{x}},\widehat{\tilde{p}}\right] = i\hbar\left(1+\beta\hat{p}^2\right)$. Cette déformation conduisant à une nouvelle incertitude minimale non nulle $(\Delta x)_{\min} = \hbar\sqrt{\beta}$ sur la position correspondante à la longueur minimale. Les motivations de l'apparition d'une longueur minimale sont multiples, dans la théorie des cordes [91, 92], dans la gravité quantique [7], dans la géométrie non-commutative [93] et dans la physique des trous noirs [19], en impliquant une incertitude minimale finie dans les mesures de position, par exemple, à l'échelle de Planck. La première conséquence de la distance minimale est l'apparition d'un cut-off naturel ce qui empêche les divergences UV habituelles. Une autre conséquence d'une telle incertitude généralisée d'Heisenberg est l'apparition d'un mélange intrigant l'UV/IR. Ce type de relation UV/IR est apparu dans d'autres plusieurs contextes: la correspondance ADS/CFT [20], la théorie de champ non-commutative [16].

Comme il est bien expliqué dans l'introduction générale, il y a de nombreuses applications ont été consacrées à l'étude de cette version déformée de la mécanique quantique relativiste et non-relativiste. Certains de ces problèmes ont été traités par la méthode d'équation différentielles, par exemple [21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31]. D'autres ont utilisé le formalisme d'intégrale de chemins, citant par exemple, le cas de l'oscillateur harmonique à une dimension [41], le potentiel de Coulomb [42], le cas du potentiel linéaire dépendant du temps [26] et l'équation de Klein-Gordon en présence d'un champ scalaire et de masse variable [43].

Le but principal de ce chapitre, nous suggérons, dans l'application ci-dessous, de développer l'article [94] qui traite le dynamique de l'oscillateur de Dirac à (1+1)-dimension dans le cadre de la mécanique quantique avec la présence d'incertitude de longueur minimale, suivant la même approche a déjà utilisée dans l'espace de moments à une dimension (1D) pour traiter la particule relativiste avec spin 0 [43], alors nous pouvons étendre cette étude à inclure les particules de spin $\frac{1}{2}$. Pour cela, nous avons l'intention de construire l'intégrale de chemin pour le propagateur de l'oscillateur relativiste de Dirac à (1+1)-dimension dans une représentation d'espace de moments et en présence d'une longueur minimale suivant la procédure de Fradkin-Gitman [73].

4.2 Construction de la fonction de Green causale

Le propagateur de l'oscillateur de Dirac est régi par l'équation de la fonction de Green causale $S^{(\beta)c}(p_b, p_a)$:

$$\left(\gamma^\mu \hat{\Pi}_\mu - m\right) S^{(\beta)c}(p_b, p_a) = \left(1 + \beta p_b^2\right) \delta^2 (p_b - p_a), \tag{4.2.1}$$

à partir de [95], nous pouvons écrire $\hat{\Pi}_\mu$ comme suit

$$\hat{\Pi}_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad \hat{\Pi} = \widehat{p} - im\omega\gamma^0 \widehat{x}, \tag{4.2.2}$$

et ω est la fréquence de l'oscillateur, γ^0 la matrice ordinaire de Pauli et m la masse de la particule. Nous soulignons que Eq.(4.2.1) s'obtient du propagateur de l'équation de Dirac dans une dimension suivant le remplacement, couplage minimum $\widehat{p} \to \widehat{p} - im\omega\gamma^0\widehat{x}$. Ainsi que les $\gamma-$matrices dans (1+1)-dimension qui satisfait la relation de commutation $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$ avec $\eta^{\mu\nu}$ =diag$(1, -1)$. Ces matrices de Dirac concernent des matrices de

Pauli et elles obéissent à des relations

$$\gamma^0 = \sigma^3, \quad \gamma^1 = i\sigma_1. \tag{4.2.3}$$

Selon la procédure habituelle de la construction de l'intégrale de chemin, nous définissons la fonction de Green $S^{(\beta)c}(p_b, p_{b0}, p_a, p_{a0})$ que l'élément de matrice d'un opérateur $\hat{S}^{(\beta)c}$ entre l'état initial $|p_a, p_{a0}\rangle$ et l'état final $|p_b, p_{b0}\rangle$:

$$S^{(\beta)c}(p_b, p_{b0}, p_a, p_{a0}) = \langle p_b, p_{b0}| \hat{S}^{(\beta)c} |p_a, p_{a0}\rangle, \tag{4.2.4}$$

où $\hat{S}^{(\beta)c}$ est donnée par

$$\hat{S}^{(\beta)c} = \left(\gamma^\nu \hat{\Pi}_\nu + m\right) \frac{1}{\left(\gamma^\mu \hat{\Pi}_\mu - m\right)\left(\gamma^\nu \hat{\Pi}_\nu + m\right)}. \tag{4.2.5}$$

Via la technique de [73, 90], nous pouvons construire une représentation globale de la fonction de Green causale, qui est la quantité la plus importante de la formulation intégrale de chemin, en utilisant le temps propre avec la nature bosonique, et l'action doit être de l'opérateur de type bosonique pour les $\gamma-$matrices. Donc, en insérant la relation de fermeture pour les états d'énergie-impulsion qu'en a déjà défini dans le deuxième chapitre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{dp}{1+\beta p^2} |p\rangle \langle p| = 1, \text{ et } \int dp_0 |p_0\rangle \langle p_0| = 1, \tag{4.2.6}$$

entre les opérateurs $\left(\gamma^\nu \hat{\Pi}_\nu + m\right)$ et $\left[\left(\gamma^\mu \hat{\Pi}_\mu - m\right)\left(\gamma^\nu \hat{\Pi}_\nu + m\right)\right]^{-1}$, nous obtenons

$$S^{(\beta)c}(p_b, p_a) = \left(\gamma^\nu \hat{\Pi}_\nu + m\right)_b G^{(\beta)}(p_b, p_a). \tag{4.2.7}$$

Selon la méthode de temps propre de Schwinger [96], $G^{(\beta)}(p_b, p_a)$ s'écrit

$$G^{(\beta)}(p_b, p_a) = (-i) \int_0^\infty d\lambda \langle p_b, p_{b0}| \exp\left(-i\lambda\left(\hat{H}^{(\beta)} - i\epsilon\right)\right) |p_a, p_{a0}\rangle, \tag{4.2.8}$$

et λ est le temps propre et l'infinitésimal ϵ doit être mis à zéro à la fin des calculs pour réobtenir la fonction de Green (6.2.9). Il est commode d'écrire l'hamiltonien $\hat{H}^{(\beta)}$ comme suit:

$$\hat{H}^{(\beta)} = -\lambda\left[\hat{p}_0^2 - \hat{p}^2 - m^2 - (m\omega)^2 \hat{\tilde{x}}^2 - \tfrac{i}{2} F_{nk}^{(\beta)} \gamma^n \gamma^k\right], \tag{4.2.9}$$

$F_{nk}^{(\beta)}$ est une matrice anti-symétrique définie par

$$F^{(\beta)} = m\omega \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1+\beta\hat{p}^2) \\ 0 & -(1+\beta\hat{p}^2) & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.2.10}$$

Nous incluons le facteur $(-i\epsilon)$ dans m^2, (c'est-à-dire, $m^2 \to m^2 - i\epsilon$). Ainsi, pour construire une représentation intégrale de chemin pour $S^{(\beta)g}(p_b, p_a)$, nous suivons la méthode de discrétisation standard pour le kernel de l'Eq.(4.2.8). Comme on le sait, nous écrivons $\exp\left(-i\hat{H}^{(\beta)}\right) = \left[\exp\left(-i\hat{H}^{(\beta)}/(N+1)\right)\right]^{N+1}$ et nous insérons N fois, les identités (4.2.6) entre chaque paire d'opérateurs infinitésimale $\exp\left(-i\hat{H}^{(\beta)}/(N+1)\right)$. L'expression $G^{(\beta)}(p_b, p_a)$ se transforme à l'intégrale de chemin suivante:

$$\begin{aligned} G^{(\beta)}(p_b, p_a) &= (-i) \lim_{N\to\infty} \int_0^\infty d\lambda \prod_{n=1}^{N} \int \tfrac{dp_n}{(1+\beta p_n^2)} dp_{0n} \prod_{n=1}^{N+1} \\ &\times \langle p_n, p_{0n}| \exp\left[i\epsilon\lambda\left[\hat{p}_0^2 - \hat{p}^2 - m^2 - (m\omega)^2 \widehat{\widehat{x}}^2 - \tfrac{i}{2} F_{nk}^{(\beta)} \gamma^n \gamma^k\right]\right] |p_{n-1} p_{0n-1}\rangle, \end{aligned} \tag{4.2.11}$$

avec $\epsilon = 1/N+1$. En utilisant la relation (2.4.35) dans (4.2.11) et introduisant la représentation intégrale de $\left\langle p_n, p_{0n} \mid p_{n-1}, p_{0(n-1)}\right\rangle$ donnée par

$$\langle p_n, p_{0n} \mid p_{n-1}, p_{0n-1}\rangle = \int \tfrac{dq_n}{2\pi} \tfrac{dt_n}{2\pi} e^{it_n \Delta P_{0n}} \exp\left[iq_n \left(\frac{\left(\Delta \arctan\sqrt{\beta} p_n\right)}{\sqrt{\beta}}\right)\right]. \tag{4.2.12}$$

Lorsqu'il a été utilisé (4.2.12), alors; la fonction de Green (4.2.11) prend la forme suivante:

$$\begin{aligned} G^{(\beta)}(p_b, p_a) &= (-i)\,\mathcal{T} \int_0^\infty d\lambda \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \int \tfrac{dp_n}{(1+\beta p_n^2)} dp_{0n} \prod_{n=1}^{N+1} \int \tfrac{dq_n}{2\pi} \tfrac{dt_n}{2\pi} \\ &\times e^{it_n \Delta p_{0n}} \exp\left[i\left(\epsilon\lambda\left[p_{0n}^2 - p_n^2 - m^2 - \tfrac{i}{2} F_{nk}^{(\beta)} \gamma^n \gamma^k\right]\right)\right] \\ &\times \exp\left\{i\left[\left(\frac{\left(\Delta \arctan\sqrt{\beta} p_n\right)}{\sqrt{\beta}}\right) q_n - \epsilon\lambda q_n^2 (m\omega)^2\right]\right\}, \end{aligned} \tag{4.2.13}$$

L'opérateur ordonnant $\mathcal{T}$ agit sur le $\gamma-$matrices qui sont supposées dépendre formellement sur le paramètre de temps s. Par des moyens de la source de la méthode [73], l'Eq.(4.2.13) peut être transformée comme suit:

$$\begin{aligned} G^{(\beta)}(p_b, p_a) &= (-i)\,\mathcal{T} \int_0^\infty d\lambda \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \int \tfrac{dp_n}{(1+\beta p_n^2)} dp_{0n} \prod_{n=1}^{N+1} \int \tfrac{dq_n}{2\pi} \tfrac{dt_n}{2\pi} e^{it_n \Delta p_{0n}} \\ &\times e^{i\left(\epsilon\lambda\left[p_{0n}^2 - p_n^2 - m^2\right]\right)} \exp\left\{i\left[\left(\frac{\left(\Delta \arctan\sqrt{\beta} p_n\right)}{\sqrt{\beta}}\right) q_n - \epsilon\lambda q_n^2 (m\omega)^2\right]\right\} \mathcal{I}_{spin}^{(\beta)}(p_n), \end{aligned} \tag{4.2.14}$$

où $\mathcal{I}_{spin}^{(\beta)}$ est un terme lié à l'opérateur de spin et peut être écrit comme,

$$\mathcal{I}_{spin}^{(\beta)} = e^{i\gamma^n \frac{\delta_l}{\delta\theta^n}} \int_{\psi(0)+\psi(1)=\theta} \mathcal{D}\psi \exp\left[i \int_0^\lambda \left(2iF_{nk}^{(\beta)} \psi^n \psi^k - i\psi_n \dot{\psi}^n\right) ds + \psi_n(1)\, \psi^n(0)\right], \tag{4.2.15}$$

et

$$\mathcal{D}\psi = D\psi \left[\int_{\psi(0)+\psi(1)=0} D\psi \exp\left(\int_0^1 \psi_n \dot{\psi}^n ds\right)\right]^{-1}, \tag{4.2.16}$$

Avec θ et $\psi(s)$ sont des variables grassmanniennes (impaire), anti-commute avec les $\gamma-$matrices. En outre, ces trajectoires impaires $\psi(s)$ obéissent à des conditions aux limites antipériodiques $\psi^n(0) + \psi^n(1) = \theta^n$.

Effectuant les intégrations multiples gaussiennes sur q_n et t_n dans (4.2.14) nous obtenons

$$G^{(\beta)}(p_b, p_a) = (-i)\,\mathcal{T}\int_0^{\infty} d\lambda \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\int \frac{dp_n}{(1+\beta p_n^2)} dp_{0n} \prod_{j=1}^{N+1}\frac{\delta\left(p_{0n}-p_{0(n-1)}\right)}{\sqrt{4\pi i\lambda\epsilon(m\omega)^2}}$$
$$\times \exp\left\{ i\sum_{n=1}^{N+1}\left[\frac{\left(\Delta \arctan\sqrt{\beta}p_n\right)^2}{4\lambda(m\omega)^2\beta\epsilon} + \epsilon\lambda\left(p_{0n}^2 - p_n^2 - m^2\right)\right]\right\}\mathcal{I}_{spin}^{(\beta)}(p_n), \tag{4.2.17}$$

Dans l'expression de l'intégrale de chemin ci-dessus, $\frac{\left(\Delta \arctan\sqrt{\beta}p_n\right)^2}{2m\omega^2\beta\epsilon}$ représente le terme de l'action cinétique où il est évident que la «masse» est dépendante de l'impulsion p. C'est l'intégrale de chemin correct pour la représentation de la fonction de Green globale $G^{(\beta)}(p_b, p_a)$ à une dimension dans ce cadre déformé. Afin de convertir cette expression à la forme habituelle de l'intégrale du chemin de Feynman, nous allons utiliser la méthode de transformation sur les cordonnées de l'espace à α-point de discrétisation est défini comme

$$\bar{p}_n^{(\alpha)} = \alpha p_n + (1-\alpha)\,p_{n-1}. \tag{4.2.18}$$

Nous allons utiliser d'abord la méthode proposée dans [86], nous pouvons montrer qu'il y a deux corrections dans l'expression (3.2.35):

- la première est liée à l'action $C_{act}^{(1)}$,
- la deuxième est liée à la mesure $C_m^{(1)}$.

Le α-point expansion de fonction $f(p_n)$ est défini par

$$\Delta f(p_n) = \Delta p_n \bar{f}_n^{(\alpha)\prime}\left(1 + \frac{(1-2\alpha)}{2!}\frac{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}}\Delta p_n + \frac{(1-\alpha)^3+\alpha^3}{3!}\frac{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime\prime\prime}}{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}}\Delta p_n^2 + ...\right). \tag{4.2.19}$$

Dans notre cas, nous choisissons $f(p_n) = \frac{\arctan\sqrt{\beta}p_n}{\sqrt{\beta}}$, développons l'exponentielle, nous trouvons

$$\exp\left\{i\left[\frac{\left(\Delta \arctan\sqrt{\beta}p_n\right)^2}{2m\omega^2\beta\varepsilon}\right]\right\} = \exp\left\{i\left[\frac{\left(\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}\right)^2\Delta p_n^2}{2m\omega^2\varepsilon}\right]\right\}\left[1 + C_{act}^{(1)}\right], \tag{4.2.20}$$

où

$$C_{act}^{(1)} = \frac{i}{2m\omega^2\epsilon}\left\{(1-2\alpha)\frac{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}}\left(\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}\right)^2\Delta p_n^3 + \left[\frac{(1-2\alpha)^2}{4}\left(\frac{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}}\right)^2\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{(1-\alpha)^3+\alpha^3}{3}\frac{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime\prime\prime}}{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}}\right]\left(\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}\right)^2\Delta p_n^4\right\} - \frac{(1-2\alpha)^2}{2(2m\omega^2\epsilon)^2}\left(\frac{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}}\right)^2\left(\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}\right)^4\Delta p_n^6. \tag{4.2.21}$$

Est la première correction de l'action lorsque nous avons écrit l'acte en termes de α-point.

Le terme dans la mesure induit aussi une correction à α-point discrétisation.

$$\frac{1}{(1+\beta p_n^2)} = \sqrt{(1+\beta p_b^2)(1+\beta p_a^2)}\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}\left(1+C_m^{(1)}\right), \tag{4.2.22}$$

où $C_m^{(1)}$

$$C_m^{(1)} = \frac{(1-2\alpha)}{2}\frac{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}}\Delta p_n + \left(\frac{(1-\alpha)^2+\alpha^2}{4}\frac{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime\prime\prime}}{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}} - \frac{\alpha(1-\alpha)}{2}\left(\frac{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}}\right)^2\right)\Delta p_n^2. \tag{4.2.23}$$

est la première correction de la mesure.

Selon la méthode standard de Feynman [85] apportons le terme cinétique à la forme classique en utilisant la transformation des impulsions ci-dessous $p_n = g(k_n)$, alors évidemment, cette transformation génère deux corrections:

- la première est liée à l'action $C_{act}^{(2)}$
- et la seconde est liée à la mesure $C_m^{(2)}$

Le α-point expansion de Δp_n est écrit par l'indice (n)

$$\Delta p_n = g(k_n) - g(k_{n-1}) = \Delta k_n \bar{g}_n^{(\alpha)\prime}\left(1 + \frac{(1-2\alpha)}{2!}\frac{\bar{g}_n^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{g}_n^{(\alpha)\prime}}\Delta k_n + \frac{(1-\alpha)^3+\alpha^3}{3!}\frac{\bar{g}_n^{(\alpha)\prime\prime\prime}}{\bar{g}_n^{(\alpha)\prime}}\Delta k_n^2\right). \tag{4.2.24}$$

Le choix de g est arbitraire, nous imposons la condition suivante

$$\frac{\partial g}{\partial k} = \left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)^{-1}, \tag{4.2.25}$$

cette condition(3.2.44) rend la transformation $g(k) = \frac{\tan\sqrt{\beta}k}{\sqrt{\beta}}$, par la suite, nous développons l'exponentielle avec le terme cinétique

$$\exp\left\{i\left[\frac{\left(\Delta\arctan\sqrt{\beta}p_n\right)^2}{2m\omega^2\beta\epsilon}\right]\right\} = \exp\left\{i\left[\frac{\Delta k_n^2}{2m\omega^2\epsilon}\right]\right\}\left[1+C_{act}^{(1)}\right]\left[1+C_{act}^{(2)}\right], \tag{4.2.26}$$

où

$$\begin{aligned} C_{act}^{(2)} = \Bigg\{ & \frac{i}{2m\omega^2\epsilon}\left[(1-2\alpha)\frac{\bar{g}_n^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{g}_n^{(\alpha)\prime}}\left(\bar{g}_n^{(\alpha)\prime}\right)^2\left(\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}\right)^2\Delta k_n^3\right. \\ & + \left[\frac{(1-2\alpha)^2}{4}\left(\frac{\bar{g}_n^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{g}_n^{(\alpha)\prime}}\right)^2 + \frac{(1-\alpha)^3+\alpha^3}{3}\frac{\bar{g}_n^{(\alpha)\prime\prime\prime}}{\bar{g}_n^{(\alpha)\prime}}\right]\left(\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}\right)^2\left(\bar{g}_n^{(\alpha)\prime}\right)^2\left.\Delta k_n^4\right] \\ & - \frac{(1-2\alpha)^2}{2(2m\omega^2\epsilon)^2}\left(\frac{\bar{g}_n^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{g}_n^{(\alpha)\prime}}\right)^2\left(\bar{g}_n^{(\alpha)\prime}\right)^4\left(\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}\right)^4\Delta k_n^6 + \ldots\Bigg\}. \end{aligned} \tag{4.2.27}$$

Est la 2^e correction de l'action, quand on introduit le changement de variable.

La mesure induit également une correction

$$\prod_{n=1}^{N}\int dp_n=\prod_{n=2}^{N+1}\int d\left(\Delta p_n\right)=\prod_{n=2}^{N+1}\int \mathcal{J}d\left(\Delta k_n\right), \tag{4.2.28}$$

où $\mathcal{J}$ est le Jacobien de la transformation

$$\mathcal{J}=\frac{\partial\Delta p}{\partial\Delta k}=\bar{g}_n^{(\alpha)\prime}\left(1+C_m^{(2)}\right), \tag{4.2.29}$$

avec $C_m^{(2)}$

$$C_m^{(2)}=\left(1-2\alpha\right)\frac{\bar{g}_n^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{g}_n^{(\alpha)\prime}}\Delta k_n+\frac{\left(1-\alpha^3\right)+\alpha^3}{2}\frac{\bar{g}_n^{(\alpha)\prime\prime\prime}}{\bar{g}_n^{(\alpha)\prime}}\Delta k_n^2, \tag{4.2.30}$$

est la 2^e correction de la mesure.

En combinant ces corrections, on obtient la correction totale C_T

$$1+C_T=\left(1+C_{act}^{(1)}\right)\left(1+C_{act}^{(2)}\right)\left(1+C_m^{(1)}\right)\left(1+C_m^{(2)}\right). \tag{4.2.31}$$

Les termes de correction sont évalués perturbativement à l'aide des valeurs moyennes

$$\left\langle(\Delta k)^{2\ell}\right\rangle=\left(2i\lambda(m\omega)^2\epsilon\right)^{\ell}\left(2\ell-1\right). \tag{4.2.32}$$

Nous allons obtenir la valeur de correction C_T dépendante de α, est définie par

$$1+C_T=1+2i\lambda(m\omega)^2\epsilon\left(\beta+\beta\tan^2\sqrt{\beta}k_n\right)\alpha\left(2\alpha-1\right). \tag{4.2.33}$$

En plus de cela, lorsque nous utilisons la méthode standard [85], la différence de correction entre les deux méthodes est générée par le terme mesure, puis nous avons dans ce cas

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{N}\int\frac{dp_n}{1+\beta p_n^2}&=\sqrt{\left(1+\beta p_b^2\right)\left(1+\beta p_a^2\right)}\prod_{n=1}^{N}\int dp_n\prod_{n=1}^{N+1}\frac{1}{\sqrt{\left(1+\beta p_n^2\right)\left(1+\beta p_{n-1}^2\right)}}\\&=\left[\frac{1}{f_b'f_a'}\right]\prod_{n=1}^{N}\int dp_n\prod_{n=1}^{N+1}\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}\left(1+C_m^{(1)}\right),\end{aligned} \tag{4.2.34}$$

avec

$$C_m^{(1)}=\frac{\left(1-2\alpha\right)}{2}\frac{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}}\Delta p_n+\left(\frac{\left(1-\alpha\right)^2+\alpha^2}{4}\frac{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime\prime\prime}}{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}}-\frac{\alpha\left(1-\alpha\right)}{2}\left(\frac{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}}\right)^2\right)\Delta p_n^2. \tag{4.2.35}$$

Après la transformation $p_n=\frac{\tan\sqrt{\beta}k_n}{\sqrt{\beta}}=g\left(k_n\right)$, l'équation (4.2.34) devient

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{N}\int\frac{dp_n}{1+\beta p_n^2}&=\sqrt{\frac{1}{f_b'f_a'g_b'g_a'}}\prod_{n=1}^{N}\int dk_n\prod_{n=1}^{N+1}\bar{f}_n^{(\alpha)\prime}\bar{g}_n^{(\alpha)\prime}\left(1+C_m^{(2)}\right)\left(1+C_m^{(1)}\right)\\&=\prod_{n=1}^{N}\int dk_n\prod_{n=1}^{N+1}\left(1+C_m^{(1)}\right)\left(1+C_m^{(2)}\right),\end{aligned} \tag{4.2.36}$$

avec $C_m^{(2)}$ est donnée par

$$C_m^{(2)} = \frac{(1-2\alpha)}{2}\frac{\bar{g}_n^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{g}_n^{(\alpha)\prime}}\Delta k_n + \left[-\alpha\frac{(1-\alpha)}{2}\left(\frac{\bar{g}_n^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{g}_n^{(\alpha)\prime}}\right)^2 + \frac{(1-\alpha)^2+\alpha^2}{4}\frac{\bar{g}_n^{(\alpha)\prime\prime\prime}}{\bar{g}_n^{(\alpha)\prime}}\right]\Delta k_n^2. \quad (4.2.37)$$

Par conséquent, la correction totale est par l'utilisation de la relation (4.2.32):

$$\begin{aligned} 1 + C_T &= \left(1 + C_{act}^{(1)}\right)\left(1 + C_{act}^{(2)}\right)\left(1 + C_m^{(1)}\right)\left(1 + C_m^{(2)}\right) \\ &= 1 + 2i\lambda(m\omega)^2\beta\epsilon\tan^2\sqrt{\beta}k_n\left[8\alpha^2 - 8\alpha + 1\right]. \end{aligned} \quad (4.2.38)$$

Confirmons que la correction C_T dépend de l'intervalle de α-point discrétisation pour les deux méthodes. Cependant, le problème de la discrétisation n'est pas définitivement réglé et demande des éclaircissements sur la méthode intégrale de chemin. cela ressemble le cas des espaces courbés dont le mi-point a été prévilégié. Le développement dans [86] résout ce problème de l'espace courbé et donne un résultat équivalent à tout les points de l'intervalle.Malheureusement, avec la déformation de longueur minimale, le problème est apparu et nous allons dire qu'il ressemble beaucoup plus à celui de quantisation avec des contraintes [74]. Ajoutant à cela, un choix raisonnable du paramètre de la discrétisation a été mentionné dans [27] qui utilise la méthode d'équation, le résultat coïncide avec l'approche de l'intégrale de chemin où $C_T = 0$ et ceci correspond à $\alpha = 0$ et $\alpha = 1/2$ pour la méthode en [86] et à $\alpha = \frac{1}{2}\left(1 \pm 1/\sqrt{2}\right)$ pour la méthode standard [85] et finalement nous obtenons

$$\begin{aligned} G^{(\beta)}(p_b, p_a) &= (-i)\,\mathcal{T}\int_0^\infty d\lambda \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\int dk_n dk_{0n}\prod_{n=1}^{N+1}\frac{\delta\left(k_{0n}-k_{0(n-1)}\right)}{\sqrt{4\pi i\lambda\epsilon(m\omega)^2}} \\ &\times \exp\left\{i\sum_{n=1}^{N+1}\left[\frac{(\Delta k_n)^2}{4\lambda(m\omega)^2\epsilon} + \epsilon\lambda\left(k_{0n}^2 - \frac{\tan^2\sqrt{\beta}k_n}{\beta} - m^2\right)\right]\right\}\mathcal{I}_{spin}^{(\beta)}(k_n), \end{aligned} \quad (4.2.39)$$

La condition $\psi^n(0) + \psi^n(1) = \theta^n$ a crée une difficulté dans la grassmannienne technique des intégrations fonctionnelles, il est convenable pour remplacer l'intégration sur ψ par les vitesses impaires ω, se définit

$$\psi(s) = \frac{1}{2}\int_0^1 \varepsilon(s-s')\,\omega(s')\,ds' + \frac{\theta}{2}. \quad (4.2.40)$$

Nous avons alors obtenu l'expression de la fonction de Green globale suivante

$$G^{(\beta)}(p_b,p_a) = (-i)\, e^{\left(i\gamma^n \frac{\delta_l}{\delta\theta^n}\right)} \int_0^{+\infty} d\lambda \int Dk_0 \delta\left(\dot{k}_0\right) e^{i\int_0^1 \lambda k_0^2 ds}$$

$$\int \mathcal{D}\omega \int Dk \exp\left\{ i\int_0^1 ds \left[\frac{\dot{k}^2}{4\lambda(m\omega)^2} - \frac{\tan^2\left(\sqrt{\beta}k\right)}{\beta} - m^2\right]\right.$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \omega^n(s)\left(\varepsilon(s-s')\eta_{nk} - \lambda\int_0^1 \varepsilon(s-s'')F_{nk}^{(\beta)}(s'')\varepsilon(s''-s')ds''\right)\omega^k(s')dsds'$$

$$\left. -\lambda\theta^n F_{nk}^{(\beta)}(s)\varepsilon(s-s')\omega^k(s')dsds' - \frac{\lambda}{2}\theta^n\theta^k \int_0^1 F_{nk}^{(\beta)}(s)\,ds\right\}_{\theta=0}. \tag{4.2.41}$$

avec la mesure $\mathcal{D}\omega$ donnée par

$$\mathcal{D}\omega = D\omega\left[\int D\omega \exp\left(-\frac{1}{2}\omega^n\varepsilon\omega_n\right)\right]^{-1}. \tag{4.2.42}$$

4.3 La vérification de la fonction de Green

Tout d'abord, il est préférable d'introduire une analogie avec la propagation de Schrödinger en écrivant d'abord pour (4.2.8) la décomposition suivante [97]:

$$G^{(\beta)}(p_b,p_a) = (-i)\int_0^{+\infty} d\lambda \exp(-i\lambda m^2)\tilde{K}(p_b,p_a,\lambda), \tag{4.3.1}$$

avec m^2 qui joue le rôle de l'énergie correspondant au temps propre λ. Il est facile de vérifier que

$$\left(i\frac{\partial}{\partial\lambda} - \tilde{H}\right)\tilde{K}(p_b,p_a,\lambda) = \delta(p_b-p_a)\,\delta(\lambda), \tag{4.3.2}$$

avec

$$\tilde{H} = \left[\hat{p}_0^2 - \hat{p}^2 - m^2 - (m\omega)^2\hat{X}^2 - \frac{i}{2}F_{nk}^{(\beta)}\gamma^n\gamma^k\right]. \tag{4.3.3}$$

L'extrême ressemblance de (4.3.2) à l'équation de Schrödinger signifie que nous pouvons maintenant utiliser $\tilde{K}(k,k',\lambda)$ pour décrire la propagation suivante:

$$\Phi(k,\lambda) = \int \tilde{K}(k,k',\lambda)\Phi(k',0)\,dk', \tag{4.3.4}$$

avec

$$\tilde{K}(k,k',\lambda) = \exp\left(i\gamma^n\frac{\delta_l}{\delta\theta^n}\right)\int Dk_0\delta\left(\dot{k}_0\right)e^{i\int_0^1 \lambda k_0^2 ds}$$

$$\times\int \mathcal{D}\omega\int Dk\exp\left\{i\int_0^1 ds\left[\frac{\dot{k}^2}{4\lambda(m\omega)^2} - \frac{\tan^2\left(\sqrt{\beta}k\right)}{\beta} - m^2\right]\right.$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \omega^n(s)\left(\varepsilon(s-s')\eta_{nk} - \lambda\int_0^1 \varepsilon(s-s'')F_{nk}^{(\beta)}(s'')\varepsilon(s''-s')ds''\right)\omega^k(s')dsds'$$

$$\left. -\lambda\theta^n F_{nk}^{(\beta)}(s)\varepsilon(s-s')\omega^k(s')dsds' - \frac{\lambda}{2}\theta^n\theta^k\int_0^1 F_{nk}^{(\beta)}(s)\,ds\right\}_{\theta=0}. \tag{4.3.5}$$

La fonction d'onde $\Phi(k,\lambda)$ est reliée à celui de l'équation quadratique de Dirac $\Psi(k)$ par la relation

$$\Phi(k,\lambda) = \exp\left(-i\lambda\left(m^2\right)\right)\Psi(k). \tag{4.3.6}$$

Par analogie avec le cas de Schrödinger, calculons la propagation infinitésimale de $\Phi(y,\lambda(s))$:

$$\begin{aligned}\Phi(k,\lambda(s+ds)) = {} & e^{\left(i\gamma^n \frac{\delta_l}{\delta\theta^n}\right)}\delta\left(k_0-k_0'\right)e^{i\left(\lambda k_0^2\right)ds}\int d\omega\left[\det(\varepsilon)(ds)^2\right]^{-1/2}\\ & \times\int\frac{dk}{\sqrt{4\pi i\lambda(m\omega)^2 ds}}\exp\left\{ids\left[\frac{(k-k')^2}{4\lambda(m\omega)^2}-\frac{\tan^2\left(\sqrt{\beta}k\right)}{\beta}\right]\right.\\ & -\frac{1}{2}\omega^n(s)\left(\varepsilon(s-s')\eta_{nk}-\lambda\varepsilon(s-s'')F_{nk}^{(\beta)}(s'')\varepsilon(s''-s')ds\right)\omega^k(s')(ds)^2\\ & \left.-\lambda\theta^n F_{nk}^{(\beta)}(s)\varepsilon(s-s')\omega^k(s')(ds)^2-\tfrac{\lambda}{2}\theta^n\theta^k F_{nk}^{(\beta)}(s)\,ds\right\}_{\theta=0}\Phi(k',\lambda(s)),\end{aligned} \tag{4.3.7}$$

avec $s\to s'\to s''$ et $k\to k'$ $(ds\to 0)$. Faisons intégrer d'abord sur les variable grassmanniennes $\omega_n(s)$, qui sont une intégrale gaussienne, le résultat étant

$$\begin{aligned}&\int d\omega\left[\det(\varepsilon)(ds)^2\right]^{-1/2}\exp\left\{-\tfrac{1}{2}\omega^n(s)\varepsilon(s-s')\omega_n(s')(ds)^2\right.\\ &\left.+\tfrac{1}{2}\lambda\omega^n(s)\varepsilon(s-s'')F_{nk}^{(\beta)}(s'')\varepsilon(s''-s')\omega^k(s')(ds)^3-\lambda\theta^n F_{nk}^{(\beta)}(s)\varepsilon(s-s')\omega^k(s')(ds)^2\right\}\\ &=\left[\det\left(1-\lambda F_{nk}^{(\beta)}\varepsilon ds\right)\right]^{1/2}\exp\left[\tfrac{1}{2}\lambda^2\theta^n F_{nk}^{(\beta)}\left(1-\lambda F_{nm}^{(\beta)}\varepsilon ds\right)_{kl}^{-1}F_{lm}^{(\beta)}\varepsilon\theta^m(ds)^2\right].\end{aligned} \tag{4.3.8}$$

Nous savons que $\det\left(1-\lambda F_{nk}^{(\beta)}\varepsilon ds\right)=\exp\left(Tr\ln\left(1-\lambda F_{nk}^{(\beta)}\varepsilon ds\right)\right)$, $trF^{(\beta)}=0$ et $tr(\varepsilon)=0$ ($F^{(\beta)}$ et ε sont matrices anti-symétriques) et que nous pouvons prendre le développement au premier ordre de ds (la prescription standard de Feynman), le résultat sera égal à 1. Ceci est équivalent de dire au premier dans (4.3.7) que $(ds)^3\ll(ds)^2\ll ds\to 0$ (la prescription de Feynman pour le dynamique de variable de Grassmann).

Nous allons maintenant substituer $k'=k+\eta$ dans (4.3.7) prend η suffisamment petite pour préparer le développement en série:

$$\begin{aligned}\Phi(k,\lambda(s+ds)) = {} & e^{\left(i\gamma^n\frac{\delta_l}{\delta\theta^n}\right)}\frac{\delta\left(k_0-k_0'\right)}{\sqrt{4\pi i\lambda(m\omega)^2 ds}}e^{i\left(\lambda k_0^2\right)ds}\\ & \times\int d\eta\exp\left\{i\left[\frac{(\eta)^2}{4\lambda(m\omega)^2 ds}-\frac{\lambda\tan^2\left(\sqrt{\beta}k\right)}{\beta}ds-\tfrac{\lambda}{2}\theta^n\theta^k F_{nk}^{(\beta)}(s)\,ds\right]\right\}_{\theta=0}\Phi(k+\eta,\lambda(s)).\end{aligned} \tag{4.3.9}$$

Maintenant, nous le développons dans une série de puissance du premier ordre de ds:

$$\begin{aligned}\Phi(k,\lambda(s))+ds\tfrac{\partial}{\partial\lambda}\Phi(k,\lambda(s)) = {} & e^{\left(i\gamma^n\frac{\delta_l}{\delta\theta^n}\right)}\frac{\delta\left(k_0-k_0'\right)}{\sqrt{4\pi i\lambda(m\omega)^2 ds}}\int d\eta\; e^{\left(i\frac{\eta^2}{4\lambda(m\omega)^2 ds}\right)}\\ & \times\left(1+i\lambda k_0^2 ds-i\frac{\lambda\tan^2\left(\sqrt{\beta}k\right)}{\beta}ds-i\tfrac{\lambda}{2}\theta^n\theta^k F_{nk}^{(\beta)}ds\right)\\ & \times\left[\Phi(k,\lambda(s))+\eta\tfrac{\partial}{\partial k}\Phi(k,\lambda(s))+\tfrac{1}{2}\eta^2\frac{\partial^2}{\partial k^2}\Phi(k,\lambda(s))\right],\end{aligned} \tag{4.3.10}$$

et nous effectuerons l'intégration de Gauss sur les variables η et x et la dérivation sur le θ variables; ce qui donne, après comparaison les côtés gauche et droite d'un même ordre de ds, le type de l'équation de Schrödinger vérifié par $\Phi(k, \lambda(s))$:

$$i\frac{\partial}{\partial\lambda}\Phi(k(s)) = \left[k_0^2 - \frac{\tan^2\left(\sqrt{\beta}k\right)}{\beta} - (m\omega)^2 \frac{\partial^2}{\partial k^2} - \frac{i}{2}\gamma^n\gamma^k F_{nk}^{(\beta)}(k)\right]\Phi(k, \lambda(s)). \tag{4.3.11}$$

Et nous pouvons trouver l'équation (4.3.11) de la représentation ancienne p,

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial\lambda}\Phi(p(s)) &= \left[\hat{p}_0^2 - \hat{p}^2 - (m\omega)^2\left(\left(1+\beta p^2\right)\frac{\partial}{\partial p}\right)^2 - \frac{i}{2}\gamma^n\gamma^k F_{nk}^{(\beta)}(p)\right]\Phi(p, \lambda(s)) \\ &= \tilde{H}\Phi(p, \lambda(s)). \end{aligned} \tag{4.3.12}$$

Dont les garanties (4.3.2) et en conséquence (4.2.1) sont vérifiées.

4.4 Fonction de Green en présence de la longueur minimale

Notez que dans l'Eq.(4.2.41), la vitesse $\omega(s)$ sont des variables grassmanniennes qui doivent être libres à partir des conditions aux limites (3.4.17). Par conséquent, à la suite de cette transformation, il est clair que l'intégrale de chemin dans les variables de Grassmann de vitesse $\omega(s)$ est indiquée dans le troisième chapitre, nous trouvons le $\mathcal{I}_{spin}^{(\beta)}(k)$ comme suit:

$$\mathcal{I}_{spin}^{(\beta)}(k) = \left[\cos\left(\int\limits_0^{m\omega\lambda}\left(1+\tan^2\sqrt{\beta}k\right)ds\right) + i\gamma^0\sin\left(\int\limits_0^{m\omega\lambda}\left(1+\tan^2\sqrt{\beta}k\right)ds\right)\right]. \tag{4.4.1}$$

En substituant l'Eq.(4.4.1) dans Eq.(4.2.14), alors (4.2.14) devient

$$G^{(\beta)}(k_b, k_{0b}, k_a, k_{0a}) = \begin{bmatrix} G^+(k_b, k_{0b}, k_a, k_{0a}) & 0 \\ 0 & G^-(k_b, k_{0b}, k_a, k_{0a}) \end{bmatrix}, \tag{4.4.2}$$

avec G^+ et G^- qui sont définis dans la même expression

$$\begin{aligned} G^{(\pm)}(p_b, p_a) = (-\imath)\int_0^\infty d\lambda \lim_{N\to\infty}\prod_{j=1}^{N}\int dk_{0j}\prod_{j=1}^{N+1}\delta\left(k_{0j}-k_{0j-1}\right)\, e^{\imath\left(\varepsilon\lambda\left[k_{0j}^2 - m^2 \pm (m\omega)\right]\right)} \\ \times\prod_{j=1}^{N}\int dk_j\prod_{j=1}^{N+1}\frac{1}{\sqrt{4\pi\imath\lambda\varepsilon(m\omega)^2}} e^{\imath\left[\left[\frac{\left(\Delta k_j\right)^2}{4\lambda\varepsilon(m\omega)^2} - \varepsilon\lambda\tan^2\left(\sqrt{\beta}k_j\right)\left(\frac{1}{\beta}\mp(m\omega)\right)\right]\right]}, \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

ces expressions (4.4.3) sont formellement identiques à celles du potentiel de Pöschl-Teller qui l'a déjà éxprimé dans [85, 98]. Donc, les solutions de ces intégrales de chemin peuvent être écrites comme suit:

$$G_{(\pm)}^{(\beta)}\left(p_b,p_a\right)=(-\imath)\sum_{n=0}^{\infty}N_n^{\eta_\pm}\int_0^\infty d\lambda\delta\left(k_{0b}-k_{0a}\right)\ e^{\imath\lambda\left[k_0^2-m^2\pm m\omega\right]}e^{-\imath\lambda\beta(m\omega)^2\left(n^2+(2n+1)\eta_\pm\right)}$$
$$\times C_n^{\eta_\pm}\left(\sin\left(\sqrt{\beta}k_a\right)\right)C_n^{\eta_\pm}\left(\sin\left(\sqrt{\beta}k_b\right)\right)\left(\cos\left(\sqrt{\beta}k_a\right)\cos\left(\sqrt{\beta}k_b\right)\right)^{\eta_\pm}, \tag{4.4.4}$$

et $\eta_\pm$ sont des parametres positifs et $C_n^{\eta_\pm}$ sont des polynômes de Gegenbauer et la constante de normalisation $N_n^{\eta_\pm}$ est donnée par

$$N_n^{\eta_\pm}=\Gamma\left(\eta_\pm\right)^2\frac{2^{2\eta-1}n!\left(n+\eta_\pm\right)\sqrt{\beta}}{\pi\Gamma\left(n+2\eta_\pm\right)}, \tag{4.4.5}$$

et

$$\eta_+=\tfrac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{1+4\tfrac{(1-\beta(m\omega))}{\beta^2(m\omega)^2}}\right),\eta_-=\tfrac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{1+4\tfrac{(1+\beta(m\omega))}{\beta^2(m\omega)^2}}\right). \tag{4.4.6}$$

Grâce à la condition du principe d'incertitude généralisée donnée dans le chapitre II, les valeurs $\eta_+=\frac{1}{\beta m\omega}$, $\eta_-=1+\frac{1}{\beta m\omega}$ doivent être acceptées, en rejetant les autres valeurs négatives, de sorte qu'il deviendra $\eta_-=\eta_++1$ et remplaçant η_+ par η. Nous intégrons sur le temps propre λ, et agissant par l'opérateur $\left(\gamma^\nu\hat{\Pi}_\nu+m\right)_b$ sur Eq.(4.4.2) et à l'aide des propriétés de polynôme de Gegenbauer [99], $\frac{d}{du}C_n^\eta\left(u\right)=2\eta C_{n-1}^{\eta+1}\left(u\right)$, nous obtenons

$$S^{(\beta)c}\left(k_b,k_{0b},k_a,k_{0a}\right)=-\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{\delta(k_{0b}-k_{0a})}{k_{0b}^2-m^2-\beta(m\omega)^2n^2-2n(m\omega)}\Gamma\left(\eta\right)^2\tfrac{2^{2\eta-1}n!(n+\eta)\sqrt{\beta}}{\pi\Gamma(n+2\eta)}$$
$$\times\begin{pmatrix}\left(k_{0b}+m\right)\upsilon_b^\eta C_n^\eta\left(u_b\right)\upsilon_a^\eta C_n^\eta\left(u_a\right) & -\frac{2i}{\sqrt{\beta}}\upsilon_b^\eta C_n^\eta\left(u_b\right)\upsilon_a^{\eta+1}C_{n-1}^{\eta+1}\left(u_a\right)\\ -\frac{2i}{\sqrt{\beta}}\upsilon_b^{\eta+1}C_{n-1}^{\eta+1}\left(u_b\right)\upsilon_a^\eta C_n^\eta\left(u_a\right) & \left[\frac{4\eta^2(-k_{0b}+m)}{n(n+2\eta)}\right]\upsilon_b^{\eta+1}C_{n-1}^{\eta+1}\left(u_b\right)\upsilon_a^{\eta+1}C_{n-1}^{\eta+1}\left(u_a\right)\end{pmatrix}, \tag{4.4.7}$$

avec

$$u=\sin\left(\sqrt{\beta}k\right),\upsilon=\cos\left(\sqrt{\beta}k\right). \tag{4.4.8}$$

Finalement, nous notons que la présence de δ qui reflète la conservation de l'énergie.

Afin d'évaluer exactement l'expression du propagateur, il est commode d'écrire la transformation de Fourier (4.4.7) des variables k_{0b} et k_{0a}. La première intégrale sur le delta est immédiate [43], nous obtenons

$$S^{(\beta)c}\left(k_b,k_a\right)=-\sum_{n=0}^{\infty}\int dE\tfrac{e^{-iE\left(t_b-t_a\right)}}{E^2-E_n^2}\Gamma\left(\eta\right)^2\tfrac{2^{2\eta-1}n!(n+\eta)\sqrt{\beta}}{\pi\Gamma(n+2\eta)}$$
$$\times\begin{pmatrix}\left(E+m\right)\upsilon_b^\eta C_n^\eta\left(u_b\right)\upsilon_a^\eta C_n^\eta\left(u_a\right) & -\frac{2i}{\sqrt{\beta}}\upsilon_b^\eta C_n^\eta\left(u_b\right)\upsilon_a^{\eta+1}C_{n-1}^{\eta+1}\left(u_a\right)\\ -\frac{2i}{\sqrt{\beta}}\upsilon_b^{\eta+1}C_{n-1}^{\eta+1}\left(u_b\right)\upsilon_a^\eta C_n^\eta\left(u_a\right) & \left[\frac{4\eta^2(-E+m)}{n(n+2\eta)}\right]\upsilon_b^{\eta+1}C_{n-1}^{\eta+1}\left(u_b\right)\upsilon_a^{\eta+1}C_{n-1}^{\eta+1}\left(u_a\right)\end{pmatrix}, \tag{4.4.9}$$

cette dernière relation (4.4.9) exprime la fonction de Green de l'oscillateur de Dirac à une dimension dans la représentation de l'espace et dans le cadre de la mécanique quantique en présence de l'incertitude de longueur minimale.

Pour évaluer les fonctions d'onde et le spectre d'énergie; intégrons sur la variable E. Ce qui peut être converti en une intégrale complexe le long du contour spécial C, puis en utilisant le théorème des résidus que nous obtenons

$$\oint \frac{dE}{2\pi} \frac{e^{-iE(t_b-t_a)}}{E^2-E_n^2} = \frac{-i}{2E_n} \left[\Theta(T) e^{-iE_n^{(\beta)}T} + \Theta(-T) e^{iE_n^{(\beta)}T} \right], \tag{4.4.10}$$

avec

$$E_{n,\pm}^{(\beta)} = \pm \sqrt{m^2 + \beta (m\omega)^2 n^2 + 2n (m\omega)}. \tag{4.4.11}$$

En (4.4.10), nous avons deux types de propagation, l'une avec l'énergie positive $(+E_n^{(\beta)})$ se propageant vers le futur et l'autre avec une énergie négative $(-E_n^{(\beta)})$ se propageant vers le passé. Nous obtenons le propagateur correspondant à l'oscillateur de Dirac à une dimension en présence de la distance minimale.

$$S^{(\beta)c}(p_b, p_a) = -\sum_{n=0}^{\infty} \left[\Theta(T) \Psi_n^{(\beta)+}(p_b) \bar{\Psi}_n^{(\beta)+}(p_a) e^{-iE_n^{(\beta)}T} + \Theta(-T) \Psi_n^{(\beta)-}(p_b) \bar{\Psi}_n^{(\beta)-}(p_a) e^{iE_n^{(\beta)}T} \right]. \tag{4.4.12}$$

De ce résultat, on en déduit le spectre d'énergie définie dans (4.4.11) et les fonctions d'ondes correspondantes

$$\Psi_n^{(\beta)+}(p) = \begin{pmatrix} f_n^{(\beta)+}(p) \\ g_n^{(\beta)+}(p) \end{pmatrix}, \text{ et } \Psi_n^{(\beta)-}(p) = \begin{pmatrix} f_n^{(\beta)-}(p) \\ g_n^{(\beta)-}(p) \end{pmatrix}, \tag{4.4.13}$$

on peut respectivement écrire les composantes des fonctions d'onde $f_n^{(\beta)\pm}(p)$ et $g_n^{(\beta)\pm}(p)$

$$f_n^{(\beta)+}(p) = \sqrt{\Gamma(\eta)^2 \frac{2^{2\eta-1} n+1!(n+\eta)\sqrt{\beta}\left(E_n^{(\beta)}+m\right)}{\pi\Gamma(n+2\eta)2E_n^{(\beta)}}} \left(\frac{1}{1+\beta p^2}\right)^{\eta} C_n^{\eta}\left(\frac{\sqrt{\beta}p}{1+\beta p^2}\right). \tag{4.4.14}$$

$$g_n^{(\beta)+}(p) = \frac{2i}{\sqrt{\beta}} \sqrt{\Gamma(\eta)^2 \frac{2^{2\eta-1} n!(n+\eta)\sqrt{\beta}}{\pi\Gamma(n+2\eta)2E_n^{(\beta)}\left(E_n^{(\beta)}+m\right)}} \left(\frac{1}{1+\beta p^2}\right)^{\eta+1} C_{n-1}^{\eta+1}\left(\frac{\sqrt{\beta}p}{1+\beta p^2}\right). \tag{4.4.15}$$

et

$$f_n^{(\beta)-}(p) = \sqrt{\Gamma(\eta)^2 \frac{2^{2\eta-1} n!(n+\eta)\sqrt{\beta}\left(E_n^{(\beta)}-m\right)}{\pi\Gamma(n+2\eta)2E_n^{(\beta)}}} \left(\frac{1}{1+\beta p^2}\right)^{\eta} C_n^{\eta}\left(\frac{\sqrt{\beta}p}{1+\beta p^2}\right). \tag{4.4.16}$$

$$g_n^{(\beta)-}(p) = \frac{2i}{\sqrt{\beta}} \sqrt{\Gamma(\eta)^2 \frac{2^{2\eta-1} n!(n+\eta)\sqrt{\beta}}{\pi\Gamma(n+2\eta)2E_n^{(\beta)}\left(E_n^{(\beta)}-m\right)}} \left(\frac{1}{1+\beta p^2}\right)^{\eta+1} C_{n-1}^{\eta+1}\left(\frac{\sqrt{\beta}p}{1+\beta p^2}\right). \tag{4.4.17}$$

La conclusion que nous pouvons tirer de ce chapitre est que l'effet de la distance minimale affecte tous les résultats physiques comme dans le cas de la théorie non-commutative. A la fin de ce calcul, nous avons obtenu des résultats très satisfaisants et localises dans l'énergie et les fonctions d'ondes correspondantes. Ces résultats sont exactement les résultats donnés dans la littérature.

5

Formalisme de Feynman de l'équation de Dirac avec masse variable en présence de la distance minimale

5.1 Introduction

L'étude de la particule relativiste sous l'action des potentiels vecteurs ainsi scalaires suscite un intérêt considérable dans divers domaines de la physique afin de garantir l'existence d'états liés, tels que le problème de confinement dans le modèle de bag et le modèle de hadrons [100], etc. La solution analytique de ces modèles est bien nécessaire, car elle nous permet, en même temps, d'explorer la nature relativiste et spinoriel . En particulier, dans le cadre de l'équation de Dirac était un grand développement et a été appliqué à plusieurs mélange de potentiels vecteurs et scalaires et en utilisant des méthodes différentes, citant par exemple, le potentiel linéaire [101, 102], le potentiel Pöschl-Teller [103], les potentiels vecteurs et scalaires de Eckart [104, 105], les potentiels vecteurs et scalaires de type-Scarf [106], les potentiels de Manning-Rosen [107], les potentiels de Hartmann [108] et le potentiel Coulomb à dimensions quelconques [109], etc.

Dans tous ces cas, les modèles ont été traités par la mécanique quantique ordinaire, où les opérateurs de position et d'impulsion agissant sur l'espace de Hilbert des états qui vérifie l'algèbre usuelle d'Heisenberg. En revanche, si on prend en considération les effets des fluctuations quantiques du champ gravitationnel en vue d'intégrer la gravité dans la mécanique quantique, une conséquence significative remarquée dans cette unification est dans la gravité quantique. Il existe une distance minimale observable de l'ordre de la longueur de Planck.

Cette incertitude longueur minimale est liée à une modification de l'algèbre d'Heisenberg en ajoutant de petite correction aux relations de commutation canonique.

Comme il a été mentionné dans l'introduction du chapitre précédent, plusieurs problèmes ont été abordés dans le cadre de la mécanique quantique déformée via le formalisme de Kempf et ses collaborateurs [1, 3, 4, 5].

Ici, nous avons l'objectif de développer le travail [110], pour étudier en détail la dynamique d'un système relativiste de particule de Dirac soumis à un mélange des potentiels scalaire et vecteur linéaire dans le contexte de l'algèbre d'Heisenberg généralisée par deux approches. Dans la première étape, nous considérons une équation de Dirac modifiée avec la nouvelle forme de l'opérateur d'impulsion qui contient de hauts dérivés dans l'espace de configuration.

Quand nous découplons le système de l'équation différentielle décrivant la dynamique du système physique, le problème serait converti directement à une équation différentielle du quatrième ordre, qui a une solution analytique compliquée dans la présence des champs externes. Dans une technique d'approximation convenable d'une mécanique quantique non-relativiste, nous avons trouvé les décalages des niveaux d'énergie relativiste, les quantités dominantes à l'ordre 1 de paramètre de déformation. Dans la deuxième étape, nous allons introduire le formalisme d'intégrale de chemin de Feynman pour la particule relativiste à spin $\frac{1}{2}$ dans l'espace de moment. La forme exacte de la fonction de Green est déterminée, où nous allons utiliser la méthode du temps propre de Schwinger et la technique intégrale fonctionnelle de Grassmann pour les variables de spin [73]. Le spectre d'énergie ainsi que les fonctions d'ondes normalisées de l'état lié sont déduites. En outre, les cas limites sont également déduits pour un petit paramètre de déformation et nous allons comparer avec la première méthode de la théorie de déformation. Bien que les deux méthodes donnent des résultats similaires de décalage de niveaux d'énergie pour un petit paramètre de déformation. C'est le Feynman qui reste plus attrayant en raison de sa façon intuitive de l'interprétation des équations de base de la mécanique quantique ordinaire en utilisant des trajectoires classiques.

5.2 Résolution de l'équation de Dirac à (1+1) dimensions dans la représentation de l'espace position

Dans cette section, nous considérons quelques particules relativistes spinoriels sous l'action d'un potentiel Lorentz $\left(V(\tilde{x}), \vec{\mathbf{A}} = 0\right)$ plus un potentiel scalaire $S(\tilde{x})$, décrit par l'équation de Dirac à une dimension

$$\left\{\sigma_2 \widehat{\tilde{p}} + \sigma_3 \left(m_0 + S\left(\widehat{\tilde{x}}\right)\right) - \left(i\partial_t - V\left(\widehat{\tilde{x}}\right)\right)\right\} \Psi(x,t) = 0, \tag{5.2.1}$$

où σ_2 et σ_3 sont les matrices standard de Pauli

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5.2.2}$$

Comme les potentiels sont indépendants du temps, nous allons alors trouver les états stationnaires de cette équation. En conséquence, nous choisissons $\Psi(x,t)$ comme la forme suivante $\exp(-iEt)\,\Phi(x)$, et puis nous obtenons l'équation de la valeur propre suivante

$$\left\{\sigma_2 \widehat{\tilde{p}} + \sigma_3 \left(m_0 + S\left(\widehat{\tilde{x}}\right)\right) - \left(E - V\left(\widehat{\tilde{x}}\right)\right)\right\} \Phi(x) = 0. \tag{5.2.3}$$

A fin de traiter ce problème dans le contexte de longueur minimale, dans la représentation de l'espace de la position [25, 111], nous définissons

$$\widehat{\tilde{x}} = \hat{x}, \tag{5.2.4}$$

$$\widehat{\tilde{p}} = \hat{p}(1 + \tfrac{1}{3}\beta\hat{p}^2), \tag{5.2.5}$$

où $\hat{x}$ et $\hat{p}$ obéissent aux relations de commutations canoniques $[\hat{x}, \hat{p}] = i$. En outre, à partir de l'équation ci-dessus, nous pouvons interpréter $\hat{p}$ comme l'opérateur d'impulsion aux faibles énergies ($\hat{p} = -i\partial/\partial x$) et $\widehat{\tilde{p}}$ l'opérateur d'impulsion à haute énergie. Nous remplaçons $\hat{p}$ par $\left(-i\partial_x\left(1 - \frac{\beta}{3}\partial_x^2\right)\right)$ dans Eq.(5.2.3), et nous proposons que les effets des fluctuations quantiques du champ gravitationnel sont à l'ordre 1 de β. Ensuite, l'équation modifiée de Dirac peut être écrite comme,

$$\left[-i\sigma_2\partial_x\left(1 - \tfrac{\beta}{3}\partial_x^2\right) + \sigma_3\left(m_0 + S(x)\right) - \left(E - V(x)\right)\right]\Phi(x) = 0. \tag{5.2.6}$$

En utilisant ce qui suit ansatz.

$$\Phi = \left\{-i\sigma_2\partial_x\left(1 - \tfrac{\beta}{3}\partial_x^2\right) + \sigma_3\left(m_0 + S(x)\right) + \left(E - V(x)\right)\right\}\chi, \tag{5.2.7}$$

qui est une équation différentielle du quatrième ordre dont la solution est très compliquée dans la présence de potentiels et $\chi = \binom{\chi_1}{\chi_2}$, est une fonction spineur à deux composants.

Maintenant, nous suggérons que le système soit soumis à l'action des potentiels vecteurs $V(x)$ et scalaires $S(x)$, sont définis par:

$$V(x) = V_0 x, \quad S(x) = S_0 x, \tag{5.2.8}$$

avec S_0 et V_0 sont des constantes réelles et positives, nous obtenons le spineur de Dirac satisfait:

$$\left\{-\tfrac{2}{3}\beta\partial_x^4 + \partial_x^2 + (E - V_0 x)^2 - (m_0 + S_0 x)^2 - \sqrt{(S_0^2 - V_0^2)}\left(1 - \beta\partial_x^2\right)\tilde{M}\right\}\chi = 0. \tag{5.2.9}$$

Nous notons que ce potentiel linéaire est intéressant, il est envisagé comme un potentiel de quark-confinement et il décrit un mouvement dans un champ uniforme gravitationnel ou électrique [112], en d'onde-matière de diffraction dans le temps [113] et dans une cône de lumière QCD modèle inspiré [114].

Où la matrice $\tilde{M}$ est donnée par:

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{(V_0+S_0)}{\sqrt{(S_0^2-V_0^2)}} \\ \frac{(S_0-V_0)}{\sqrt{(S_0^2-V_0^2)}} & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.2.10}$$

Depuis les valeurs propres de la matrice $\tilde{M}$ sont ± 1, les valeurs propres sont réelles, nous pouvons introduire la transformation canonique comme suit:

$$\chi(x) = U\xi(x), \tag{5.2.11}$$

avec

$$U = \begin{bmatrix} \frac{(V_0 + S_0)}{\sqrt{(S_0^2 - V_0^2)}} & \frac{(V_0 + S_0)}{-\sqrt{(S_0^2 - V_0^2)}} \end{bmatrix}. \tag{5.2.12}$$

La fonction $\xi(x)$ satisfait l'équation de Klein-Gordon plus le terme de spin, s'écrit:

$$\left[-\tfrac{2\beta}{3\alpha}\partial_x^4 + \tfrac{(1+\varepsilon\beta\alpha)}{\alpha}\partial_x^2 - \alpha\left[x^2 + 2\tfrac{(m_0 S_0 + E V_0)}{\alpha^2}x\right] + \tfrac{\left(E^2 - m_0^2\right)}{\alpha} - \varepsilon\right]\xi_\varepsilon(x) = 0, \tag{5.2.13}$$

avec $\alpha = \sqrt{(S_0^2 - V_0^2)}$ et $\varepsilon = \pm 1$.

Selon l'équation de Dirac modifiée (5.2.13), comme il a été mentionné précédemment que la solution est compliquée, nous essayons de trouver par la méthode de perturbation habituelle de la mécanique quantique et de la correction de l'énergie à l'ordre 1 en β et comment l'introduire l'algèbre de Heisenberg modifié affecte les résultats physiques. Pour ce fait, supposons d'abord dans ce cas que $\alpha^2 > 0$ de façon à éviter les valeurs propres complexes et on arrange l'équation (5.2.13) à une somme de deux termes, dont l'un est le term de perturbation comme suit,

$$\left[H^0\left(z,\partial_z\right)+H^{pert}\left(\partial_z\right)\right]\xi_\varepsilon\left(z\right)=0. \tag{5.2.14}$$

avec le changement suivant

$$z=\left(S_0^2-V_0^2\right)^{1/4}\left(x+\tfrac{\left(m_0S_0+EV_0\right)}{\left(S_0^2-V_0^2\right)}\right). \tag{5.2.15}$$

avec

$$\begin{aligned} H^0 &= \partial_z^2-z^2+z_1,\\ H^{pert} &= -\tfrac{2}{3}\beta\alpha\partial_z^4+\varepsilon\beta\alpha\partial_z^2, \end{aligned} \tag{5.2.16}$$

où

$$z_1=\tfrac{\left(m_0S_0+EV_0\right)^2}{\left(S_0^2-V_0^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\tfrac{\left(E^2-m_0^2\right)}{\sqrt{\left(S_0^2-V_0^2\right)}}-\varepsilon. \tag{5.2.17}$$

Maintenant, dans le cas où $H^{pert}\left(\partial_z\right)$ disparaît, (c.-à-d., $\beta\rightarrow 0$), l'équation (5.2.14) devient le problème de l'oscillateur harmonique dont la solution est connue,

$$\xi_\varepsilon^{\beta=0}\left(z\right)=C_{n'}\exp\left(-\tfrac{1}{2}z^2\right)H_{n'}\left(z\right),\quad n'=n+\tfrac{1}{2}+\tfrac{\varepsilon}{2}. \tag{5.2.18}$$

avec z_1 vérifie

$$z_1=2n+1.\qquad n=0,1,2,... \tag{5.2.19}$$

où $n'=\left(n+1,n\right)$. L'équation (5.2.14) est juste la même que celle de l'équation de Schrödinger de l'oscillateur harmonique dans $\beta=0$. La comparaison avec ce resultat standard, donne la valeur suivante pour z_1. Donc de (5.2.17) et (5.2.19), nous obtenons les niveaux d'énergie suivants, de l'équation de Dirac à l'étude:

$$E_{n,\pm}^{\beta=0}=-\tfrac{m_0V_0}{S_0}\pm\sqrt{2n}\tfrac{\left(S_0^2-V_0^2\right)^{3/4}}{S_0}, \tag{5.2.20}$$

nous notons l'existence de ces deux signes en (5.2.20) est une propriété caractéristique des énergies dans la mécanique quantique relativiste. Maintenant, pour trouver la première correction dans les niveaux d'énergie, nous prenons la valeur moyenne de l'opérateur de perturbation en utilisant des fonctions propres (5.2.18)

$$\Delta z_{n1}=\tfrac{\left\langle\xi^{\beta=0}(z)\middle|H^{pert}\middle|\xi^{\beta=0}(z)\right\rangle}{\left\langle\xi^{\beta=0}(z)|\xi^{\beta=0}(z)\right\rangle}. \tag{5.2.21}$$

A l'aide de l'annexe C, nous pouvons obtenir ce résultat:

$$\begin{aligned}\Delta z_{n1} &= \frac{\beta\alpha \int \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right)H_n(z)\left[-\frac{2}{3}\partial_z^4+\varepsilon\partial_z^2\right]\exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right)H_n(z)dz}{\int \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right)H_n(z)\exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right)H_n(z)dz} \\ &= -\frac{\beta\alpha}{2}\left(n^2\right). \end{aligned} \tag{5.2.22}$$

Où nous avons utilisé certaines propriétés des polynômes de Hermite. De la relation (5.2.17), nous dérivons l'expression de ΔE_{n1} en fonction de Δz_{n1}, nous écrivons,

$$\Delta E_n^1 = \frac{\left(S_0^2-V_0^2\right)^{3/2}\Delta z_{n1}}{2S_0\left(E_{n,\pm}^{\beta=0}S_0+m_0V_0\right)}, \tag{5.2.23}$$

et en substituant (5.2.22) et (5.2.20) dans (5.2.23), nous obtenons,

$$\Delta E_n^1 = \pm\beta\frac{\left(S_0^2-V_0^2\right)^2\left(n^2\right)}{2S_0\sqrt{(2n)}\left(S_0^2-V_0^2\right)^{3/4}}. \tag{5.2.24}$$

Ensuite, le spectre d'énergie du système à l'ordre 1 de β peut-être réécrit comme:

$$E_n\left(\beta\right) = E_{n,\pm}^{\beta=0} + \Delta E_n^1 + O\left(\beta^2\right), \tag{5.2.25}$$

qui est égal à,

$$E_n\left(\beta\right) = -\frac{m_0V_0}{S_0} \pm \sqrt{(2n)}\frac{\left(S_0^2-V_0^2\right)^{3/4}}{S_0} \pm \beta\frac{\left(S_0^2-V_0^2\right)^{5/4}\left(n^2\right)}{2S_0\sqrt{(2n)}} + O\left(\beta^2\right). \tag{5.2.26}$$

5.3 Intégrales de chemins pour la particule de Dirac en présence d'une longueur minimale

Dans cette section, nous nous sommes intéressés à résoudre le même problème dans la représentation spatiale de l'énergie et l'impulsion et à la présence de la longueur minimale, en introduisant le propagateur dit globale, qui est la quantité la plus importante de la formulation de l'intégrale de chemin. Maintenant, nous sommes prêts à commencer la construction du propagateur de Dirac dans $(1+1)$-dimension qui représente la fonction de Green causale S^c, et réalise l'équation suivante:

$$\left(\gamma^\mu\hat{\Pi}_\mu - m + i\epsilon\right)S^c = I, \tag{5.3.1}$$

où $\mu = 0,1$, γ^μ sont les matrices de Dirac à 2-dimension Minkowski space, $\hat{\pi}_0 = \hat{p}_0 - V\left(\widehat{\widetilde{x}}\right)$, $\hat{\pi}_1 = \hat{p}$ et $V\left(\widehat{\widetilde{x}}\right)$ est le potentiel électrique dépendant de la variable $\widehat{\widetilde{x}}$ et les matrices de γ dans (1+1)-dimensionnelle satisfaisante la relation de commutation $\left[\gamma^n,\gamma^k\right]_+ = 2\eta^{nk}$ avec $\eta^{nk} = diag(1;-1)$. Elles sont liées aux matrices de Pauli:

$$\beta = \gamma^0, \gamma^1 = i\sigma^1, \gamma^2 = i\sigma^2, \beta = \sigma^3. \tag{5.3.2}$$

et $0 < \epsilon \ll 1$. Alors

$$S^c = \left(\gamma^\mu \hat{\Pi}_\mu - m + i\epsilon\right)^{-1} = \left(\gamma^\mu \hat{\Pi}_\mu + m + i\epsilon\right) G^g, \tag{5.3.3}$$

avec

$$G^g = \left[\gamma^\mu \hat{\Pi}_\mu \gamma^\nu \hat{\Pi}_\nu - m^2 + i\epsilon\right]^{-1}. \tag{5.3.4}$$

Tout d'abord, nous présentons $S^c(p_b, p_a, p_{0b}, p_{0a})$ un élément de matrice d'un opérateur $\hat{S}^c$

$$S^c(p_b, p_a, p_{0b}, p_{0a}) = \langle p_b, p_{0b}| \hat{S}^c |p_a, p_{0a}\rangle. \tag{5.3.5}$$

Dans la représentation globale [90], nous utilisons un seul temps propre à la nature bosonique et l'action doit être de type de Bose d'opérateur pour les $\gamma-$matrices. La signification de cela est que nous avons pour insérer les relations de fermeture de p et p_0 défini dans l'Eq.(4.2.6) du côté gauche de l'opérateur $\left[\left(\gamma^\mu \hat{\Pi}_\mu - m\right)\left(\gamma^\nu \hat{\Pi}_\nu + m\right)\right]^{-1}$, ce qui donne:

$$S^c(p_b, p_a, p_{0b}, p_{0a}) = \left(\gamma^\nu \hat{\Pi}_\nu + m\right)_b G^g_{(\beta)}(p_b, p_a, p_{0b}, p_{0a}). \tag{5.3.6}$$

Selon la méthode de Schwinger, la représentation globale de la fonction de Green dans l'espace du moment (p_0, p) est écrit comme:

$$G^g_{(\beta)}(p_b, p_a, p_{0b}, p_{0a}) = i\int_0^\infty d\lambda \langle p_b, p_{0b}| \exp\left(-i\hat{H}^{(\beta)}(\lambda)\right) |p_a, p_{0a}\rangle. \tag{5.3.7}$$

Où l'hamiltonien $\hat{H}^{(\beta)}(\lambda)$ prend la forme suivante:

$$\hat{H}^{(\beta)}(\lambda) = -\lambda\left[-\hat{p}^2 - \left(m_0 + S_0\widehat{\widehat{x}}\right)^2 + \left(\hat{p}_0 - V_0\widehat{\widehat{x}}\right)^2 - \frac{i}{2}F^{(\beta)}_{\mu\nu}(\hat{p})\gamma^\mu\gamma^\nu\right], \tag{5.3.8}$$

En outre, nous supposons $(S_0^2 - V_0^2) > 0$ pour éviter les valeurs propres complexes, avec les V_0 et S_0 sont des constantes arbitraires. Et l'opérateur $F^{(\beta)}$ est une matrice anti-symétrique définie par:

$$F^{(\beta)} = \left(1 + \beta\hat{p}^2\right)\begin{pmatrix} 0 & V_0 & iS_0 \\ -V_0 & 0 & 0 \\ -iS_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.3.9}$$

Donc, pour en tirer une représentation intégrale de chemins pour Eq.(5.3.7), nous suivons la méthode de discrétisation standard pour le kernel de l'Eq.(5.3.7). Comme il est connu habituellement, nous écrivons $\exp\left(-i\hat{H}^{(\beta)}(\lambda)\right) = \left[\exp\left(-i\lambda\hat{H}^{(\beta)}/(N+1)\right)\right]^{N+1}$ et nous insérons N fois l'identité $(4.2.6)$, entre tous les opérateurs $\exp\left(-i\lambda\hat{H}^{(\beta)}/(N+1)\right)$, l'expression de $G^{g}_{(\beta)}\left(p_b,p_a,p_{0b},p_{0a}\right)$ se transforme de l'intégrale de chemin suivante

$$\begin{aligned}G^{g}_{(\beta)}\left(p_b,p_a,p_{0b},p_{0a}\right) &= (-i)\lim_{N\to\infty}\int_0^\infty d\lambda_0\prod_{n=1}^{N}\int\tfrac{dp_n}{(1+\beta p_n^2)}dp_{0n}\\ \times\prod_{n=1}^{N+1}\left\langle p_n,p_{0n}\right| &\exp\left(i\epsilon\lambda_0\left[-\hat{p}^2-\left(m_0+S_0\hat{x}\right)^2+\left(\hat{p}_0-V_0\hat{x}\right)^2\right.\right.\\ &\left.\left.-\frac{i}{2}F^{(\beta)}_{\mu\nu}\left(\hat{p}\right)\gamma^\mu\gamma^\nu\right]\right)\left|p_{n-1}p_{0n-1}\right\rangle,\end{aligned}\tag{5.3.10}$$

où $\epsilon=1/N+1$. En substituant (2.4.35) dans (5.3.10) et introduisant la représentation intégrale de $\left\langle p_n,p_{0n}\right|p_{n-1},p_{0n-1}\rangle$ donnée par:

$$\left\langle p_n,p_{0n}\right|p_{n-1},p_{0n-1}\rangle=\int\frac{dq_n}{2\pi}\frac{dt_n}{2\pi}e^{it_n\Delta p_{0n}}e^{iq_n\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}}\arctan\sqrt{\beta}p_n-\frac{1}{\sqrt{\beta}}\arctan\sqrt{\beta}p_{n-1}\right)}.\tag{5.3.11}$$

l'expression (5.3.10) pourrait être transformé à l'intégrale de chemins suivante

$$\begin{aligned}G^{g}_{(\beta)}\left(p_b,p_a,p_{0b},p_{0a}\right) &= (-i)\lim_{N\to\infty}\mathcal{T}\int_0^\infty d\lambda_0\prod_{n=1}^{N}\int\frac{dp_n}{\left(1+\beta p_n^2\right)}dp_{0n}\\ \times\prod_{n=1}^{N+1}\int\frac{dq_n}{2\pi}\frac{dt_n}{2\pi}&\exp\left\{i\left[t_n\Delta p_{0n}+\epsilon\lambda_0\left[p_{0n}^2-p_n^2-m_0^2-\frac{i}{2}F^{(\beta)}_{\mu\nu}\left(p_n\right)\gamma^\mu\gamma^\nu\right]\right]\right\}\\ \times\exp\left\{i\left[q_n\left(\tfrac{\Delta\arctan\sqrt{\beta}p_n}{\sqrt{\beta}}\right.\right.\right.&\left.\left.\left.+2\epsilon\lambda_0\left(p_{0n}V_0+m_0S_0\right)\right)-\epsilon\lambda_0q_n^2\left(S_0^2-V_0^2\right)\right]\right\}.\end{aligned}\tag{5.3.12}$$

$p(s)$, $p_0(s)$ sont des trajectoires bosoniques paires obéissant à la condition aux limites $p_{N+1}=p_b$, $p_0=p_a$, $p_{(N+1)0}=p_{b0}$ et $p_{00}=p_{0a}$. L'opérateur chronologique $\mathcal{T}$ agit sur les $\gamma-$matrices qui sont supposées être formellement dépendantes du paramètre de temps s. Via une intégrale de chemin sur des trajectoires impaires grassmanniennes [73]; la représentation hamiltonienne de l'intégrale de chemin (5.3.12), peut être transformé en forme de Lagrange après avoir éliminé l'intégration fonctionnelle sur t_n et q_n :

$$\begin{aligned}G^{g}_{(\beta)}\left(p_b,p_a,p_{0b},p_{0a}\right) &= (-i)\lim_{N\to\infty}\int_0^\infty d\lambda_0\prod_{n=1}^{N}\int\tfrac{dp_n}{(1+\beta p_n^2)}dp_{0n}\prod_{n=1}^{N+1}\tfrac{\delta\left(p_{0n}-p_{0n-1}\right)}{\sqrt{4\pi i\epsilon\left(S_0^2-V_0^2\right)}}\\ \times\exp\left\{i\sum_{n=1}^{N+1}\left[\tfrac{\left(\Delta\arctan\sqrt{\beta}p_n\right)^2}{4\lambda_0\left(S_0^2-V_0^2\right)\beta\epsilon}\right.\right.&\left.+\tfrac{\left(p_{0n}V_0+m_0S_0\right)}{\sqrt{\beta}\left(S_0^2-V_0^2\right)}\left(\Delta\arctan\sqrt{\beta}p_n\right)\right]\\ +\epsilon\lambda_0\tfrac{\left(k_{0n}V_0+m_0S_0\right)^2}{\left(S_0^2-V_0^2\right)}&\left.\left.+\epsilon\lambda_0\left(p_{0n}^2-p_n^2-m_0^2\right)\right]\right\}\mathcal{I}^{(\beta)}_{spin}\left(p_n\right),\end{aligned}\tag{5.3.13}$$

où $\mathcal{I}^{(\beta)}_{spin}\left(p_n\right)$ est le facteur de spin, il peut être exprimé comme suit:

$$\mathcal{I}^{(\beta)}_{spin}\left(p\right)=e^{i\gamma^m\frac{\delta_l}{\delta\theta^m}}\int\mathcal{D}\psi\exp\left[i\int_0^{\lambda_0}\left(2iF^{(\beta)}_{\mu\nu}\psi^\mu\psi^\nu-i\psi_m\dot{\psi}^m\right)ds+\psi_m\left(1\right)\psi^m\left(0\right)\right]_{\theta=0}.\tag{5.3.14}$$

Avec θ et $\psi^m(s)$ sont variables des grassmenniennes (impaire), anti-commute avec les γ-matrices. Il est important de remplacer l'intégration sur $\psi^m(s)$ par les vitesses impaires $\omega^m(s)$; à cause des conditions aux limites $\psi^m(0) + \psi^m(1) = \theta^m$. Après le remplacement,

$$\psi(s) = \frac{1}{2}\int_0^1 \varepsilon(s - s')\,\omega(s')\,ds' + \frac{\theta}{2}. \tag{5.3.15}$$

$\epsilon(s)$ est le signe de s. Eq.(5.3.14) est simplifié à

$$\mathcal{I}_{spin}^{(\beta)}(p) = e^{i\gamma^m \frac{\delta_l}{\delta\theta^m}} \exp\left[i\int_0^1 \frac{i}{2}F_{\mu\nu}^{(\beta)}\theta^\mu\theta^\nu\right]\int \mathcal{D}\omega \exp\left[-\frac{1}{2}\omega^m T_{mk}\omega^k + I_m\omega^m\right]_{\theta=0}, \tag{5.3.16}$$

avec

$$I_k = -\lambda_0\theta^m F_{mk}^{(\beta)}\varepsilon,\ T_{mk} = \delta_{mk}\varepsilon - \lambda_0\varepsilon F_{mk}^{(\beta)}\varepsilon. \tag{5.3.17}$$

où la mesure $\mathcal{D}\omega$ est donnée par:

$$\mathcal{D}\omega = D\omega\left[\int D\omega \exp\left(-\frac{1}{2}\omega^m\varepsilon\omega_m\right)\right]^{-1}. \tag{5.3.18}$$

Via les étapes des calculs, qui a présenté dans chapitre 3, nous pouvons obtenir le résultat suivant:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{spin}^{(\beta)}(p) = \exp\left[i\gamma^m \tfrac{\partial_l}{\partial\theta^m}\right]&\left\{\cos\left(\int\limits_0^{\lambda_0\sqrt{S_0^2-V_0^2}}\left(1+\beta p^2\right)ds\right)\right.\\ &\left.+\frac{1}{\sqrt{S_0^2-V_0^2}}\left(iV_0\theta^1\theta^3 - S_0\theta^2\theta^3\right)\sin\left(\int\limits_0^{\lambda_0\sqrt{S_0^2-V_0^2}}\left(1+\beta p^2\right)ds\right)\right\}_{\theta=0}.\end{aligned} \tag{5.3.19}$$

Puis, nous appliquons l'identité de l'algèbre de Grassmann suivante:

$$\begin{aligned}\exp\left[i\gamma^m\frac{\partial_l}{\partial\theta^m}\right] f(\theta)\,|_{\theta=0} &= f\left(\frac{\delta}{\delta\xi^m}\right)\exp\left(i\xi_m\gamma^m\right)|_{\xi=0}\\ &= \sum_{k=0}^{2}\sum_{m_1\ldots m_k} f_{m_1\ldots m_2}\frac{\partial}{\partial\xi_{m_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial\xi_{m_k}}\sum_{\ell=0}^{2}\frac{i^\ell}{\ell!}\left(\xi_m\gamma^m\right)^\ell|_{\xi=0}.\end{aligned} \tag{5.3.20}$$

Développer $\exp(i\xi_m\gamma^m)$ au deuxième ordre et ensuite en effectuant une différenciation par rapport à ξ, nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{spin}^{(\beta)}(p) &= \cos\left(\int\limits_0^{\lambda_0\sqrt{S_0^2-V_0^2}}\left(1+\beta p^2\right)ds\right)\\ &+\left(-\frac{V_0}{\sqrt{S_0^2-V_0^2}}\sigma_2 + i\frac{S_0}{\sqrt{S_0^2-V_0^2}}\sigma_1\right)\sin\left(\int\limits_0^{\lambda_0\sqrt{S_0^2-V_0^2}}\left(1+\beta p^2\right)ds\right).\end{aligned} \tag{5.3.21}$$

nous notons que, l'expression (5.3.13) est un similaire à le propagateur de celui généré par le mouvement de particule ponctuelle sur les espaces courbes, si à l'aide de l'expansion à mi-point, nous pouvons trouver l'expression suivante :

$$G^{g}_{(\beta)}\left(p_b,p_a,p_{0b},p_{0a}\right)=(-i)\lim_{N\to\infty}\int_0^\infty d\lambda_0 e^{i\frac{\left(k_{0b}V_0+m_0S_0\right)}{\sqrt{\beta}\left(S_0^2-V_0^2\right)}\left(\arctan\sqrt{\beta}p_b-\arctan\sqrt{\beta}p_a\right)}\prod_{n=1}^{N}\int\frac{dp_n dp_{0n}}{\left(1+\beta p_n^2\right)}$$
$$\times\prod_{n=1}^{N+1}\frac{\delta\left(p_{0n}-p_{0n-1}\right)}{\sqrt{4\pi i\epsilon\left(S_0^2-V_0^2\right)}}\exp\left\{i\sum_{n=1}^{N+1}\left[\frac{\left(\Delta p_n\right)^2}{4\lambda_0\epsilon\left(S_0^2-V_0^2\right)\left(1+\beta\bar{p}_n^2\right)^2}+\frac{\left(-2\beta+6\beta^2\bar{p}_n^2\right)}{48\lambda_0\epsilon\left(S_0^2-V_0^2\right)}\frac{\left(\Delta p_n\right)^4}{\left(1+\beta\bar{p}_n^2\right)^4}\right]\right\}$$
$$+\epsilon\lambda_0\frac{\left(k_{0n}V_0+m_0S_0\right)^2}{\left(S_0^2-V_0^2\right)}+\varepsilon\lambda_0\left(p_{0n}^2-\bar{p}_n^2-m_0^2\right)\Bigg]\Bigg\}\mathcal{I}^{(\beta)}_{spin}\left(\bar{p}_n\right),\tag{5.3.22}$$

où le mi-point est défini par $\left(\bar{p}_n=\frac{p_n+p_{n-1}}{2}\right)$. Le deuxième terme de l'action est une correction quantique dûe à la présence de l'incertitude de position minimum non nulle. Par conséquent, afin d'obtenir le terme cinétique classique, nous utilisons la transformation des coordonnées ci-dessous, avec $p\in[-\infty,+\infty]\to k\in\left[-\pi/2\sqrt{\beta},+\pi/2\sqrt{\beta}\right]$,

$$\sqrt{\beta}p_n=\tan\sqrt{\beta}k_n.\tag{5.3.23}$$

Via la technique [86], nous pouvons calculer les termes des corrections quantiques de l'action et de la mesure, de ce qui se traduit dans le potentiel effectif généré (V_{eff}) prend une valeur nulle à la mi-point $\bar{k}_n$. L'expression (5.3.22) peut être transformé à la forme suivante:

$$G^{g}\left(k_b,k_a;k_{0b},k_{0a}\right)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}G^++G^- & \frac{\left(V_0+S_0\right)}{\sqrt{S_0^2-V_0^2}}\left[G^+-G^-\right]\\ \frac{-\left(V_0-S_0\right)}{\sqrt{S_0^2-V_0^2}}\left[G^+-G^-\right] & G^++G^-\end{bmatrix}.\tag{5.3.24}$$

Il est facile d'obtenir que G^+ et G^- sont définis par la même expression suivante

$$G^{\mp}\left(k_b,k_a;k_{0b},k_{0a}\right)=\lim_{N\to\infty}(-i)\int_0^\infty d\lambda_0 e^{i\frac{\left(k_{0b}V_0+m_0S_0\right)}{\left(S_0^2-V_0^2\right)}\left(k_b-k_a\right)}\prod_{j=1}^{N}\int dk_j dk_{0j}\frac{\delta\left(k_{0j}-k_{0j-1}\right)}{\sqrt{4\pi i\epsilon\left(S_0^2-V_0^2\right)}}$$
$$\times\prod_{j=1}^{N+1}\exp\left(i\left(\epsilon\lambda_0\left[k_{0j}^2-m^2+\frac{\left(k_{0j}V_0+M_0S_0\right)^2}{\left(S_0^2-V_0^2\right)}\mp\sqrt{S_0^2-V_0^2}\right]\right)\right)$$
$$\times\exp\left[i\left[\frac{\left(\Delta k_j\right)^2}{4\epsilon\lambda_0\left(S_0^2-V_0^2\right)}-\epsilon\lambda_0\tan^2\left(\sqrt{\beta}k_j\right)\left(\frac{1}{\beta}\pm\sqrt{S_0^2-V_0^2}\right)\right]\right],\tag{5.3.25}$$

ces expressions (5.3.25) sont exactement et formellement identiques à la représentation intégrale de chemins de potentiel Pöschl-Teller, qui a étudié dans l'annexe (B) et aussi dans [85]; donc les solutions des $G^+\left(k_b,k_a;k_{0b},k_{0a}\right)$ et $G^-\left(k_b,k_a;k_{0b},k_{0a}\right)$ peuvent être construites comme

$$G^{\mp}\left(k_b,k_a;k_{0b},k_{0a}\right)=(-i)\sum N_n^{\eta_\mp}\int_0^\infty d\lambda_0\int\frac{dt}{2\pi}e^{it(k_{0b}-k_{0a})}e^{i\frac{(k_{0b}V_0+m_0S_0)}{\left(S_0^2-V_0^2\right)}(k_b-k_a)}$$
$$\exp\left(i\int_0^{\lambda_0}\left[k_{0b}^2-m^2+\frac{(k_{0b}V_0+M_0S_0)^2}{\left(S_0^2-V_0^2\right)}\mp\sqrt{S_0^2-V_0^2}\right]ds\right)$$
$$\times\sum_{n=0}^{\infty}e^{-i\lambda_0\beta\left(S_0^2-V_0^2\right)\left(n^2+(2n+1)\eta_\mp\right)}\left(\cos\left(\sqrt{\beta}k_a\right)\cos\left(\sqrt{\beta}k_b\right)\right)^{\eta_\mp}$$
$$\times C_n^{\eta_\mp}\left(\sin\left(\sqrt{\beta}k_a\right)\right)C_n^{\eta_\mp}\left(\sin\left(\sqrt{\beta}k_b\right)\right),\tag{5.3.26}$$

où $C_n^{\eta_\mp}$ sont polynômes de Gegenbauer et la constante de normalisation $N_n^{\eta_\mp}$ est donnée par:

$$N_n^{\eta_\mp}=\Gamma\left(\eta_\mp\right)^2\left[\frac{2^{2\eta}n!\left(n+\eta_\mp\right)\sqrt{\beta}}{2\pi\Gamma\left(n+2\eta_\mp\right)}\right],\tag{5.3.27}$$

et

$$\eta_+=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\beta\sqrt{S_0^2-V_0^2}-2}{\beta\sqrt{S_0^2-V_0^2}}\right),\eta_-=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\beta\sqrt{S_0^2-V_0^2}+2}{\beta\sqrt{S_0^2-V_0^2}}\right),\tag{5.3.28}$$

Nous notons que, les valeurs des η_+,η_- sont paramètres positives, nous pouvons nous limiter dans ce calcul sur les $\eta_+=\frac{1}{\beta\sqrt{S_0^2-V_0^2}}$, $\eta_-=1+\frac{1}{\beta\sqrt{S_0^2-V_0^2}}$, d'autres solutions des $\left(\eta_+,\eta_-\right)$ sont rejetées parce que la condition est en contradiction avec le principe d'incertitude généralisé donné par (2.4.31). Ensuite nous intégrons sur le temps propre λ_0 et agissant sur l'opérateur $\left(\gamma^\nu\hat{\Pi}_\nu+m\right)_b$ et à l'aide de propriétés de polynôme de Gegenbauer [99]. Enfin, nous notons que la présence de δ reflète la conservation de l'énergie. Afin d'évaluer exactement l'expression du propagateur, il est commode d'écrire la transformation de Fourier $G^+\left(k_b,k_a;t_b,t_a\right),G^-\left(k_b,k_a;t_b,t_a\right)$ pour les variables k_{0b} et k_{0a}. La première intégrale sur le delta est immédiate. La fonction de Green sera simplifiée comme

$$S\left(k_b,k_a.t_b,t_a\right)=-\frac{\left(S_0^2-V_0^2\right)}{2S_0^2}\sum_{n=0}^{\infty}N_n\oint\frac{dE}{2\pi}\frac{e^{i\frac{(EV_0+m_0S_0)}{\left(S_0^2-V_0^2\right)}(k_b-k_a)}e^{-iE(t_b-t_a)}}{\left(E+\frac{mV_0}{S_0}\right)^2-\omega_n^2}$$
$$\times\begin{bmatrix}S^{++}\left(k_b,k_a\right) & S^{+-}\left(k_b,k_a\right)\\ S^{-+}\left(k_b,k_a\right) & S^{--}\left(k_b,k_a\right)\end{bmatrix},\tag{5.3.29}$$

où

$$\omega_n=\frac{1}{S_0}\sqrt{\beta\left(S_0^2-V_0^2\right)^2n^2+2n\left(S_0^2-V_0^2\right)^{3/2}}.\tag{5.3.30}$$

En utilisant la propriété suivante de polynôme de Gegenbauer de [99], $\frac{d}{du}C_n^\eta(u)=2\eta C_{n-1}^{\eta+1}(u)$, nous trouvons

$$S^{++}\left(k_b,k_a\right)=\left\{\left[\frac{(ES_0+mV_0)}{(S_0+V_0)}\upsilon_b^\eta C_n^\eta\left(u_b\right)+\frac{2i}{\sqrt{\beta}}\sqrt{\frac{(S_0-V_0)}{(S_0+V_0)}}\upsilon_b^{\eta+1}C_{n-1}^{\eta+1}\left(u_b\right)\right]\upsilon_a^\eta C_n^\eta\left(u_a\right)\right.$$
$$\left.+\left[\frac{4\eta^2}{n^2+2n\eta}\frac{(ES_0+mV_0)}{(S_0+V_0)}\upsilon_b^{\eta+1}C_{n-1}^{\eta+1}\left(u_b\right)-\frac{2i}{\sqrt{\beta}}\sqrt{\frac{(S_0-V_0)}{(S_0+V_0)}}\upsilon_b^\eta C_n^\eta\left(u_b\right)\right]\upsilon_a^{\eta+1}C_{n-1}^{\eta+1}\left(u_a\right)\right\}.\tag{5.3.31}$$

Et

$$S^{--}(k_b,k_a)=\left[-\tfrac{(ES_0+mV_0)}{(S_0-V_0)}\upsilon_b^{\eta}C_n^{\eta}(u_b)+\tfrac{2i}{\sqrt{\beta}}\sqrt{\tfrac{(S_0+V_0)}{(S_0-V_0)}}\upsilon_b^{\eta+1}C_{n-1}^{\eta+1}(u_b)\right]\upsilon_a^{\eta}C_n^{\eta}(u_a)$$
$$+\left[-\tfrac{4\eta^2}{n^2+2n\eta}\tfrac{(ES_0+mV_0)}{(S_0-V_0)}\upsilon_b^{\eta+1}C_{n-1}^{\eta+1}(u_b)-\tfrac{2i}{\sqrt{\beta}}\sqrt{\tfrac{(S_0+V_0)}{(S_0-V_0)}}\upsilon_b^{\eta}C_n^{\eta}(u_b)\right]\upsilon_a^{\eta+1}C_{n-1}^{\eta+1}(u_a). \quad (5.3.32)$$

Et

$$S^{+-}(k_b,k_a)=\left[\tfrac{(ES_0+m_0V_0)}{\sqrt{S_0^2-V_0^2}}\upsilon_b^{\eta}C_n^{\eta}(u_b)+i\tfrac{2}{\sqrt{\beta}}\upsilon_b^{\eta+1}C_{n-1}^{\eta+1}(u_b)\right]\upsilon_a^{\eta}C_n^{\eta}(u_a)$$
$$+\left[-\tfrac{4\eta^2}{n^2+2n\eta}\tfrac{(ES_0+mV_0)}{\sqrt{S_0^2-V_0^2}}\upsilon_b^{\eta+1}C_{n-1}^{\eta+1}(u_b)+i\tfrac{2}{\sqrt{\beta}}\upsilon_b^{\eta}C_n^{\eta}(u_b)\right]\upsilon_a^{\eta+1}C_{n-1}^{\eta+1}(u_a). \quad (5.3.33)$$

Et

$$S^{-+}(k_b,k_a)=\left[-\tfrac{(ES_0+m_0V_0)}{\sqrt{S_0^2-V_0^2}}\upsilon_b^{\eta}C_n^{\eta}(u_b)+i\tfrac{2}{\sqrt{\beta}}\upsilon_b^{\eta+1}C_{n-1}^{\eta+1}(u_b)\right]\upsilon_a^{\eta}C_n^{\eta}(u_a)$$
$$+\left[\tfrac{4\eta^2}{(n^2+2n\eta)}\tfrac{(ES_0+mV_0)}{\sqrt{S_0^2-V_0^2}}\upsilon_b^{\eta+1}C_{n-1}^{\eta+1}(u_b)+i\tfrac{2}{\sqrt{\beta}}\upsilon_b^{\eta}C_n^{\eta}(u_b)\right]\upsilon_a^{\eta+1}C_{n-1}^{\eta+1}(u_a). \quad (5.3.34)$$

Pour évaluer les fonctions d'ondes et le spectre d'énergie, intégrons sur la variable E. Ce qui peut être converti en une intégration complexe le long du contour spécial C, puis en utilisant le théorème des résidus

$$\oint\frac{dE}{2\pi}e^{i\frac{(EV_0+m_0S_0)}{\left(S_0^2-V_0^2\right)}(k_b-k_a)}\frac{e^{-iE(t_b-t_a)}}{\left(E+\frac{mV_0}{S_0}\right)^2-\left(\omega_n^{(\beta)}\right)^2}$$
$$=\frac{-i}{2\omega_n^{(\beta)}}\left[e^{i\frac{\left(E_n^{(\beta)+}V_0+m_0S_0\right)}{\left(S_0^2-V_0^2\right)}(k_b-k_a)}\Theta(T)\,e^{-i\left(\omega_n^{(\beta)}-\frac{mV_0}{S_0}\right)T}+\Theta(-T)\,e^{i\frac{\left(E_n^{(\beta)-}V_0+m_0S_0\right)}{\left(S_0^2-V_0^2\right)}(k_b-k_a)}e^{i\left(\omega_n^{(\beta)}+\frac{mV_0}{S_0}\right)T}\right], \quad (5.3.35)$$

où

$$E_n^{(\beta)\pm}=-\frac{m_0V_0}{S_0}\pm\omega_n^{(\beta)};T=t_b-t_a. \quad (5.3.36)$$

$$\omega_n^{(\beta)}=\frac{\left(S_0^2-V_0^2\right)}{S_0}\sqrt{\beta\left(n^2+\frac{2n}{\beta\sqrt{S_0^2-V_0^2}}\right)}. \quad (5.3.37)$$

Enfin, nous obtenons la décomposition spectrale du propagateur de la particule (1+1)-dimensionnelle de Dirac sous l'action des potentiels vecteurs et scalaires linéaires en présence d'incertitude longueur minimale

$$S^c(k_b,k_a;T)$$
$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\left[\Theta(T)\,\Psi_n^{(\beta)+}(k_b)\,\bar{\Psi}_n^{(\beta)+}(k_a)\,e^{-i\left(\omega_n^{(\beta)}-\frac{mV_0}{S_0}\right)T}+\Theta(-T)\,\Psi_n^{(\beta)-}(k_b)\,\bar{\Psi}_n^{(\beta)-}(k_a)\,e^{i\left(\omega_n^{(\beta)}+\frac{mV_0}{S_0}\right)T}\right]. \quad (5.3.38)$$

Dans l'Eq.(5.3.38), nous avons deux types de propagations, l'une avec l'énergie positive $E_n^{(\beta)+} = \left(\omega_n^{(\beta)} - \frac{m_0 V_0}{S_0}\right)$ se propageant vers le futur et l'autre avec une énergie négative $E_n^{(\beta)-} = -\left(\omega_n^{(\beta)} + \frac{m_0 V_0}{S_0}\right)$ se propageant vers le passé. Où $\Psi_n^{(\beta)\pm}(k)$ sont données par

$$\Psi^{(\beta)\pm}(k) = e^{i\frac{\left(E_n^{(\beta)\pm}V_0 + m_0 S_0\right)}{\left(S_0^2 - V_0^2\right)}k} \sqrt{\frac{N_n\left(S_0^2 - V_0^2\right)}{4S_0\left(E_n^{(\beta)\pm}S_0 + mV_0\right)}}$$
$$\times \left(\begin{array}{c} \left[\sqrt{\frac{\left(E_n^{(\beta)\pm}S_0 + mV_0\right)}{(S_0+V_0)}}\upsilon^{\eta} C_n^{\eta}(u) + \frac{2i}{\sqrt{\beta}}\sqrt{\frac{(S_0-V_0)}{\left(E_n^{(\beta)\pm}S_0 + mV_0\right)}}\upsilon^{\eta+1}C_{n-1}^{\eta+1}(u)\right] \\ \left[-\sqrt{\frac{\left(E_n^{(\beta)\pm}S_0 + mV_0\right)}{(S_0-V_0)}}\upsilon^{\eta} C_n^{\eta}(u) + \frac{2i}{\sqrt{\beta}}\sqrt{\frac{(S_0+V_0)}{\left(E_n^{(\beta)\pm}S_0 + mV_0\right)}}\upsilon^{\eta+1}C_{n-1}^{\eta+1}(u)\right] \end{array}\right). \qquad (5.3.39)$$

De ce résultat, nous pouvons déduire le spectre d'énergie et les fonctions d'ondes correspondantes à partir de l'Eq.(5.3.38) en utilisant les variables anciennes p.

$$u = \frac{p\sqrt{\beta}}{\sqrt{1+\beta p^2}}, \upsilon = \frac{1}{\sqrt{1+\beta p^2}} \text{ et } k = \frac{\arctan\left(\sqrt{\beta}p\right)}{\sqrt{\beta}}. \qquad (5.3.40)$$

Enfin de compte, il est remarquable que si l'on considère un très petit β, sous la forme d'Eq. (5.3.37) peut facilement être écrit comme

$$\omega_n^{\ll\beta} = \sqrt{2n}\frac{\left(S_0^2 - V_0^2\right)^{3/4}}{S_0} + \beta\frac{\left(S_0^2 - V_0^2\right)^{5/4}\left(n^2\right)}{2S_0\sqrt{2n}} + O\left(\beta^2\right). \qquad (5.3.41)$$

alors nous obtenons

$$E_n^{(\beta)} = -\frac{MV_0}{S_0} \pm \sqrt{2n}\frac{\left(S_0^2 - V_0^2\right)^{3/4}}{S_0} \pm \beta\frac{\left(S_0^2 - V_0^2\right)^{5/4}\left(n^2\right)}{2S_0\sqrt{2n}} + O\left(\beta^2\right). \qquad (5.3.42)$$

Nous pouvons maintenant comparer ce résultat (5.3.42) avec celui obtenu dans la section précédente (5.2.26) de la théorie des perturbations, même si les deux méthodes donnent le même décalage des niveaux d'énergie.

En déduit de cette application, qu'il nous est difficile de résoudre le problème dans la réprésentation de l'espace de configuration (avec $\widehat{p} = -i\frac{\partial}{\partial x}\left(1 + \frac{\beta}{3}\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\right)$), car nous obtenons une équation différentielle du quatrième ordre. Par conséquent, en s'aidant de la téchnique d'approximation ordinaire de la mécanique quantique. Nous avons calculer la correction des niveaux d'énergie au premier ordre de β. Où nous avons comparé ce résultat avec le résultat que nous avons obtenu avec l'utilisation du formalisme de l'intégrale de chemin supersymétrique et qui étaient compatibles. Dans cette étude, nous n'avons pas étudié le cas $S_0^2 - V_0^2 < 0$, pour éviter les valeurs propres complexes. Mais quand $S_0^2 - V_0^2 = 0$, le calcul est très simple et on peut obtenir les résultats physique facilement.

6

Formalisme d'intégrale de chemin pour les oscillateurs relativistes dans un espace non-commutatif

6.1 Introduction

Récemment, la géométrie non-commutative (GNC) a reçu un accueil chaleureux de la part des chercheurs dans le domaine de physique et mathématique. Ses racines se trouvent dans la mécanique quantique, décrivant des échantillons microscopiques des lois de la nature. La mécanique quantique a également motivé dans la première moitié du XXe siècle un développement important dans la théorie des algèbres d'opérateurs, comme l'étude de C^*-algèbre et l'algèbres de Von Neumann. Nous savons que de la mécanique classique à la mécanique quantique, algèbre commutative des fonctions sur l'espace des phases se change à une algèbre d'opérateur non-commutative sur un espace de Hilbert. Une procédure similaire pouvait être réalisée en géométrie, où les notions classiques perdent leur applicabilité et leur pertinence et pouvait aussi être remplacée par une nouvelle idée de l'espace, représentée par les algèbres non-commutatives [115].

La représentation de l'espace non-commutatif, pouvait être réalisé par les opérateurs de coordonnées $\tilde{x}^\mu, \mu = 0, 1, 2$, satisfaisant les relations de commutation (nous adoptons les unités naturelles $\hbar = c = 1$):

$$[\tilde{x}^\mu, \tilde{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}, \tag{6.1.1}$$

où $\theta^{\mu\nu}$ est une matrice anti-symétrique à (2+1)-dimensionnelle avec les éléments constants, où la matrice anti-symétrique peut-être tout simplement choisie comme $\theta^{\mu\nu} = \theta\epsilon^{\mu\nu}$ et $\theta^{\mu 0} =$

$\theta^{0\mu} = 0$, où $\epsilon^{\mu\nu}$ est le symbole de Levi-Civita et θ est un paramètre qui mesure la non-commutativité sur l'espace de coordonné, (voir, par exemple, la référence de la base de la géométrie non-commutative [16]). Le résultat (2.4.57) qui est mentionné dans le deuxième chapitre est un point de passage de l'affaire non-commutative au cas commutatif, (c'est-à-dire, le $*$-produit peut être transformé en un produit ordinaire en décalant $\tilde{x}$ par $x - \frac{\mathcal{P}}{2}$).

L'un des plus grands succès de la géométrie non-commutative a été l'unification des forces de la nature en une seule action gravitationnelle [115, 116]. En outre, la géométrie non-commutative joue un rôle important dans la théorie des cordes et la M-théorie [117]. En addition, les espaces non-commutatifs ont été inclus dans la théorie quantique des champs par un grand nombre de chercheurs scientifiques, voir par exemple [33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40]. En même temps, nous trouvons moins d'intérêt dans l'étude de ces problèmes du point de vue de Feynman. La principale difficulté pour l'application de ce formalisme (technique de Feynman) est dans la nature discrète de spin, comme a été discuté par de nombreux chercheurs [88, 89]. Le premier traitement a été donné par Fradkin et Berzin basé sur l'idée de remplacer les matrices de Dirac-Pauli par le nombre magique (variables grassmanniennes de ψ^{μ}). Leur idée fondamentale est d'écrire l'équation formelle de la fonction de Green causale comme l'inverse d'un opérateur et d'exprimer cet inverse comme un opérateur d'évolution standard en utilisant une représentation intégrale. En général, dans l'équation de Dirac oscillateur, nous trouvons un temps propre supersymétrique qui a deux parties: une fermioniques et l'autre bosonique. Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur le temps propre bosonique, dont le traitement est analogue à la soi-disant la projection globale [90]. Ce formalisme a été utilisé dans l'espace-temps non-commutatif et commutatif dans quelques applications de la théorie quantique des champs [44, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84].

Dans ce chapitre, nous suggérons de développer l'article [118] que d'utiliser le formalisme d'intégrale de chemin supersymétrique pour calculer la fonction de Green, pour les particules relativistes des oscillateurs de Dirac et Klein Gordon à deux dimensions dans un espace non-commutatif, avec la présence et l'absence d'un champ magnétique constant $\mathcal{B}$ perpendiculaire au plan non-commutatif $(\tilde{x}, \tilde{y})$. Nos résultats seront comparés avec ceux obtenus par le formalisme de Schrödinger comme ils ont été déterminés par [119].

Au lieu de résoudre la représentation de l'intégrale de chemin pour les oscillateurs de Dirac et Klein-Gordon à deux dimensions dans un espace non-commutatif, en utilisant la procédure produit-star, nous utilisons le changement de Bopp [120], qui est défini dans l'Eq. (2.4.57). Il est connu que l'oscillateur harmonique non-relativiste dans un espace non-commutatif, a un comportement similaire au problème de Landau dans un espace commutatif [121]. Nous généralisons cette idée sur la mécanique quantique relativiste et l'état des oscillateurs de Dirac et Klein-Gordon dans l'espace non-commutatif, a un comportement similaire aux oscillateurs de Dirac et Klein-Gordon dans l'espace commutatif avec la présence d'un champ magnétique constant. Cependant, pour le cas de l'oscillateur de Dirac non-commutatif, un nouveau terme apparaîtra, qui implique qu'un fermion chargé dans un espace non-commutatif a un moment dipolaire électrique.

6.2 La fonction de Green pour l'oscillateur de Klein-Gordon dans une représentation de l'espace non-commutatif

Soit $G(x,y)$ est la fonction de Green habituelle de l'oscillateur de Klein-Gordon pour une particule sans spin, alors le propagateur de la particule scalaire sur l'espace NC est la fonction de Green causale $G^{(\theta)}(x,y)$ de l'équation de l'oscillateur de Klein-Gordon. Il est généralement écrit comme

$$\left[p_0^2 + (p_i + im\omega x_i)\left(p^i - im\omega x^i\right) - m^2\right] * G(x,y) = -\delta^3(x-y), \tag{6.2.1}$$

où le Moyal-Weyl (ou $*$-produit) entre les deux fonctions (6.2.1) est définis dans l'Eq.(2.4.52). Nous avons montré dans le chapitre 2 que la mécanique quantique NC: le produit de Moyal peut être remplacé par un décalage de Bopp [120] et les valeurs des opérateurs $\hat{p}_0^2$ et $\hat{p}^2$ restent inchangeables, mais la fonction scalaire de x va changer, ce qui donne l'équivalent dans un espace commutatif

$$\left[\hat{p}_0^2 + \left(\widehat{\hat{p}}_i + im\omega\widehat{\hat{x}}_i\right)\left(\widehat{\hat{p}}^i - im\omega\widehat{\hat{x}}^i\right) - m^2\right] G^{(\theta)}(x_f,x_i) = -\delta^3(x_f - x_i). \tag{6.2.2}$$

Les opérateurs $\widehat{\hat{x}}_i$ sont des variables non-commutatives obéissant à la relation de commutation (2.4.45). Nous pouvons obtenir (2.4.45) en utilisant la transformation linéaire suivante entre les variables non-commutatives $\left(\widehat{\hat{x}}_i, \widehat{\hat{p}}_i\right)$ et les variables commutatives $(\hat{x}_i, \hat{p}_i)$:

$$\widehat{\hat{x}}_i = \hat{x}_i - \frac{\theta_{ij}}{2}\hat{p}_j,\ \widehat{\hat{p}}_i = \hat{p}_i \quad \text{avec } i,j = 1,2, \tag{6.2.3}$$

où les p_i sont des opérateurs d'impulsions conjugués aux $\hat{x}_i$, qui satisfont la commutation de Heisenberg ordinaire. Il apparaît donc que la dynamique d'un oscillateur de Klein-Gordon dans un espace non-commutatif, a un comportement similaire à la même dynamique d'une particule dans un espace commutatif et dans un champ magnétique constant.

Selon Schwinger [96], nous présentons $G^{(\theta)}(x,y)$ un élément de matrice d'un opérateur $\hat{G}^{(\theta)}$

$$G^{(\theta)}(x_f;y_f,x_i;y_i)=\left\langle x_f\ y_f\left|\hat{G}^{(\theta)}\right|x_i\ y_i\right\rangle. \tag{6.2.4}$$

Ici $|x\rangle$ sont des vecteurs propres de certains opérateurs auto-adjoints des coordonnées $\hat{x}_i$. Les correspondants opérateurs d'implusions canonique-conjugués sont p_i de sorte que

$$\begin{aligned}&[\hat{x}_i,\hat{p}_j]=i\delta_{ij},\ \hat{x}_i|x\rangle=x_i|x\rangle,\quad \langle x\mid x'\rangle=\delta^3(x-x');\quad \int|x\rangle\langle x|\,dx=I\\&\hat{p}_i|p\rangle=p_i|p\rangle,\ \langle p\mid p'\rangle=\delta^3(p-p');\int|p\rangle\langle p|\,dp=I;\langle x\mid p\rangle=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{ipx}.\end{aligned} \tag{6.2.5}$$

Maintenant, on peut utiliser la représentation du modèle de Schwinger (temps-propre) de l'opérateur inverse. Nous obtenons

$$G^{(\theta)}(x_f;y_f,x_i;y_i)=-i\int_0^\infty\langle x_i\ y_i|\exp\left(-i\lambda\left(\hat{H}^{(\theta)}-i\epsilon\right)\right)|x_f\ y_f\rangle\,d\lambda. \tag{6.2.6}$$

Où λ est le temps-propre et l'infinitésimal ϵ doit tendre vers zéro à la fin des calculs afin de réobtenir la fonction de Green (6.2.4). L'hamiltonien $\hat{H}^{(\theta)}$ se compose de deux termes: le premier est l'opérateur hamiltonien du système quantique usuel et l'autre terme dépend de l'espace non-commutatif θ.

$$\begin{aligned}\hat{H}^{(\theta)}&=\hat{p}_0^2-m^2-\left(\hat{p}_x^2+\hat{p}_y^2\right)-(m\omega)^2\left(\hat{x}^2+\hat{y}^2\right)+2m\omega\\&-\tfrac{(m\omega\theta)^2}{4}\left(\hat{p}_x^2+\hat{p}_y^2\right)+(m\omega)^2\theta\left(\hat{x}\hat{p}_y-\hat{y}\hat{p}_x\right).\end{aligned} \tag{6.2.7}$$

Ici et dans ce qui suit, nous incluons le facteur $(-i\epsilon)$ dans m^2. Pour dériver une représentation de l'intégrale de chemin de $G^{(\theta)}$, nous suivons la méthode de discrétisation standard pour le kernel (6.2.6) comme cela se fait dans [44], nous obtenons la réprésentation Lagrangienne de l'intégrale de chemin pour la foncion de Green $G^{(\theta)}$

$$G^{(\theta)}(x_f,y_f,x_i,y_i,t_f,t_i)=-i\int_0^\infty\frac{de_0}{2}\int DeD\pi_e\int DxDyDt\int Dp_0\mathcal{M}^{(\theta)}(e)$$

$$\exp\left\{i\int_0^{\frac{e}{2}}\left[p_0^2-m^2+\tfrac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{4\omega_1}-(m\omega)^2\left(1-\tfrac{(m\omega)^2\theta^2}{4\omega_1}\right)\left(x^2+y^2\right)\right.\right. \tag{6.2.8}$$

$$\left.\left.+\frac{(m\omega)^2}{2\omega_1}\theta\left(\dot{y}x-\dot{x}y\right)+2m\omega+p_0\dot{t}+\pi_e\dot{e}\right]ds\right\}, \tag{6.2.9}$$

où $e(s)=2\lambda(s)$ et $\omega_1=1+\frac{(m\omega\theta)^2}{4}$. L'intégration fonctionnelle dans (6.2.9) va sur des trajectoires $x_\mu(s)$, $p_\mu(s)$, $e(s)$, et $\pi_e(s)$, paramétrable par quelques paramètres variants

$s \in [0,1]$ et en respectant les conditions aux limites $\vec{x}(0) = \vec{x}_i$, $\vec{x}(1) = \vec{x}_f$, $t(0) = t_i$, $t(1) = t_f$, $e(0) = e_0$ et la mesure $M^{(\theta)}(e)$ a la forme

$$\mathcal{M}^{(\theta)}(e) = \int Dp_x Dp_y \exp\left\{-i\int_0^{\frac{e}{2}}\left(1+\frac{(m\omega\theta)^2}{4}\right)\left(p_x^2+p_y^2\right)ds\right\}. \tag{6.2.10}$$

Nous pouvons enlever l'intégration fonctionnelle sur t et e après intégration sur p_0 et π_e ce qui donne δ-fonction de $\dot{e}$ et $\dot{t}$. Il est clair que ce problème sera résolu facilement par les coordonnées polaires, puis, l'expression de la fonction de Green (6.2.9) devient

$$\begin{aligned} G^{(\theta)}\left(r_f,\varphi_f,r_i,\varphi_i,T\right) &= i\int_0^\infty \frac{de_0}{2}\int \frac{dp_0}{2\pi}e^{-ip_0T}\mathcal{M}(e_0,\omega_1)\exp\left\{\frac{ie_0}{2}\left[p_0^2-m^2+2m\omega\right]\right\} \\ &\times \int rDr(t)\,D\varphi(t)\exp\left\{\frac{i}{2}\int_0^{e_0\omega_1}\left[\left[\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2-\frac{(m\omega)^2}{\omega_1}\left(1-\tfrac{(m\omega)^2\theta^2}{4\omega_1}\right)r^2\right.\right.\right. \\ &\qquad \left.\left.+\tfrac{(m\omega)^2\theta}{\omega_1}r^2\dot{\varphi}\right]ds\right\}. \end{aligned} \tag{6.2.11}$$

Après un changement d'angle $\varphi(s) \to \varphi(s) + \frac{(m\omega)^2\theta}{2\omega_1}s$, cette fonction de Green (6.2.11) devient formellement identique à celle de la solution intéférale du chemin radial de l'oscillateur harmonique radial avec la fréquence indépendante du temps [98]. La solution de cette intégrale de chemin peut être écrite comme suit:

$$\begin{aligned} G^{(\theta)}\left(r_f,\varphi_f,r_i,\varphi_i,T\right) &= i\int_0^\infty \tfrac{de_0}{2}\int \tfrac{dp_0}{2\pi}e^{-ip_0T}\exp\left\{i\frac{e_0}{2}\left[p_0^2-m^2+2m\omega\right]\right\} \\ &\tfrac{m\omega}{2\pi i\sqrt{\omega_1}\sin(m\omega\sqrt{\omega_1}e_0)}\exp\left[-\tfrac{m\omega}{2i\sqrt{\omega_1}}\left(r_i^2+r_f^2\right)\cot\left(m\omega\sqrt{\omega_1}e_0\right)\right] \\ &\sum_{m_\ell=0}^{\infty}\exp\left[im_\ell\left(\varphi_f-\varphi_i+\tfrac{(m\omega)^2\theta}{2}e_0\right)\right]I_{m_\ell}\left(\tfrac{m\omega r_ir_f}{i\sqrt{\omega_1}\sin(m\omega\sqrt{\omega_1}e_0)}\right). \end{aligned} \tag{6.2.12}$$

Pour déterminer les niveaux d'énergie des fonctions d'onde, nous devons utiliser la formule de Hille-Hardy et les propriétés de série de Laguerre polynômes [98] dans (6.2.12), puis nous intégrons sur le temps propre $\frac{de_0}{2}$. Nous obtenons finalement

$$G^{(\theta)}\left(r_f,\varphi_f,r_i,\varphi_i,T\right) = -\int \tfrac{dp_0}{2\pi}\tfrac{e^{-ip_0T}}{p_0^2-p_{0n}^2}\sum_{m_\ell}\sum_n \Psi_{n,m_\ell}^{(\theta)}\left(r_f,\varphi_f\right)\Psi_{n,m_\ell}^{*(\theta)}\left(r_i,\varphi_i\right), \tag{6.2.13}$$

avec $\Psi_{n,m_\ell}^{(\theta)}(r,\varphi)$

$$\begin{aligned} \Psi_{n,m_\ell}^{(\theta)}(r,\varphi) &= \left[\tfrac{m\omega}{\pi\sqrt{\omega_1}}\tfrac{n!}{(n+|m_\ell|)!}\right]^{1/2}\left(\tfrac{m\omega}{\sqrt{\omega_1}}r^2\right)^{(m_\ell)/2} \\ &\times \exp\left(im_\ell\varphi-\tfrac{m\omega}{2\sqrt{\omega_1}}r^2\right)L_n^{(|m_\ell|)}\left(\tfrac{m\omega}{\sqrt{\omega_1}}r^2\right), \end{aligned} \tag{6.2.14}$$

où $L_n^{(|m_\ell|)}$ sont des polynômes de Laguerre généralisés. Les pôles de la $G^{(\theta)}\left(r_f,\varphi_f,r_i,\varphi_i,T\right)$ donnent le spectre d'énergie discrète

$$p_{0n} = \pm\sqrt{2m\omega\sqrt{\omega_1}\left[2n+|m_\ell|+1\right]-m_\ell(m\omega)^2\theta+m^2-2m\omega}. \tag{6.2.15}$$

Pour évaluer les fonctions d'onde et le spectre d'énergie, nous allons intégrer la variable p_0, ça peut être converti en une intégration complexe le long du contour spécial C, puis en utilisant le théorème des résidus, on obtient:

$$\oint \frac{dp_0}{2\pi} \frac{e^{-ip_0 T}}{p_0^2 - p_{0n}^2} = -i \left[\Theta(T) \frac{e^{-iE_n^{(\theta)} T}}{2E_n^{(\theta)}} + \Theta(-T) \frac{e^{iE_n^{(\theta)} T}}{2E_n^{(\theta)}} \right], \tag{6.2.16}$$

où les valeurs propres d'énergie sont données par

$$E_n^{(\theta)} = \sqrt{2m\omega \sqrt{1 + \frac{(m\omega\theta)^2}{4}} \left[2n + |m_\ell| + 1\right] - m_\ell (m\omega)^2 \theta + m^2 - 2m\omega}. \tag{6.2.17}$$

Dans (6.2.16), nous avons deux types de propagations, l'une avec l'énergie positive $(+E_n^{(\theta)})$ se propageant vers le futur et l'autre avec une énergie négative $(-E_n^{(\theta)})$ se propageant vers le passé. à partir de ce résultat, on en déduit le spectre d'énergie et les fonctions d'onde correspondantes à partir (6.2.13) en écrivant

$$G^{(\theta)}\left(r_f, \varphi_f, r_i, \varphi_i; T\right) =$$
$$-\sum_n \left[\Theta(T)\, \xi_n^{(\theta)}\left(r_f, \varphi_f\right) \xi_n^{*(\theta)}\left(r_i, \varphi_i\right) e^{-iE_n^{(\theta)} T} + \Theta(-T)\, \xi_n^{(\theta)}\left(r_f, \varphi_f\right) \xi_n^{*(\theta)}\left(r_i, \varphi_i\right) e^{iE_n^{(\theta)} T} \right], \tag{6.2.18}$$

où $E_n^{(\theta)}$ est défini dans Eq.(6.2.17) et $\xi_n^{(\theta)}(r, \varphi)$ est donné par

$$\xi_n^{(\theta)}(r, \varphi) = \sum_{m_\ell} \frac{1}{2E_n^{(\theta)}} \left(\frac{m\omega}{\pi\sqrt{1 + \frac{(m\omega\theta)^2}{4}}} \frac{n!}{(n + |m_\ell|)!} \right)^{1/2} \left(\frac{m\omega}{\sqrt{1 + \frac{(m\omega\theta)^2}{4}}} r^2 \right)^{(m_\ell)/2}$$
$$\times \exp\left(i m_\ell \varphi - \frac{m\omega}{2} \left(1 + \frac{(m\omega\theta)^2}{4}\right)^{-1/2} r^2 \right) L_n^{(|m_\ell|)}\left(m\omega \left(1 + \frac{(m\omega\theta)^2}{4}\right)^{-1/2} r^2 \right), \tag{6.2.19}$$

avec (r, φ) sont des coordonnées polaires dans l'espace ordinaire.

6.3 La fonction de Green de l'oscillateur de Dirac dans un espace non-commutatif

Pour déterminer l'oscillateur de Dirac dans l'espace ordinaire, nous introduisons la substitution non-minimale $p \to p - im\omega x\gamma^0$, qui a été proposée pour la première fois par Moshinsky et Szczepaniak [95] où ω est la fréquence de l'oscillateur, γ^0 est la matrice de Pauli habituelle et m la masse de la particule au repos . Dans cette section, nous avons l'intention de construire l'intégrale de chemin pour le propagateur de l'oscillateur relativiste de Dirac à deux dimensions dans la réprésentation de l'espace non-commutatif, en suivant la méthode Fradkin-Gitman [73]. Le propagateur de l'oscillateur de Dirac est régi par la fonction de Green causale $S^c(x_f, x_i)$:

$$(\gamma^\mu \hat{\pi}_\mu - m) * S^c(x_f, x_i) = -\delta^3(x_f - x_i); \quad m^2 \rightarrow m^2 - i\epsilon. \tag{6.3.1}$$

Dans un traitement similaire à celui appliqué au Eq. (2.4.57) dans la section précédente, Eq.(6.3.1) peut être réécrite comme suit

$$\left(\gamma^\mu \widetilde{\hat{\pi}}_\mu - m\right) S^{(\theta)c}(x_f, x_i) = -\delta^3(x_f - x_i); \quad m^2 \rightarrow m^2 - i\epsilon. \tag{6.3.2}$$

Les composants $\widetilde{\hat{\pi}}$ sont

$$\widetilde{\hat{\pi}}_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad \widetilde{\hat{\pi}}_i = i\frac{\partial}{\partial x_i} - im\omega\gamma^0 \widetilde{\hat{x}}_i, \tag{6.3.3}$$

où $\left(\widetilde{\hat{x}}_i = \hat{x}_i - \frac{\theta^{ij}}{2}\hat{p}_j\right)$ et les coordonnées $(\hat{x}_i, p_i)$ satisfont le crochet de Heisenberg usuel. Les $\gamma-$matrices dans $(2+1)$-dimensionnelle sont les matrices usuelles de Dirac qui satisfont les commutations standards.

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2\eta^{\mu\nu}, \quad \gamma^\mu\gamma^\nu = i\epsilon^{\mu\nu\alpha}\gamma^\alpha. \ \ \mu, \nu, \alpha = 0, 1, 2. \tag{6.3.4}$$

Ces matrices de Dirac concernent les matrices de Pauli et elles obéissent aux relations

$$\gamma^0 = \sigma^3, \gamma^1 = \gamma^0\sigma^1; \gamma^2 = \gamma^0\sigma^2. \tag{6.3.5}$$

Tout d'abord, nous présentons $S^{(\theta)c}(x_f, y_f, x_i, y_i)$ un élément de la matrice d'un opérateur $\hat{S}^{(\theta)c}$

$$S^{(\theta)c}(x_f, y_f, x_i, y_i) = \left\langle x_f \ y_f \left| \hat{S}^{(\theta)c} \right| x_i \ y_i \right\rangle, \tag{6.3.6}$$

où $\hat{S}^{(\theta)c}$ est donnée par

$$\hat{S}^{(\theta)c} = \left(\gamma^\nu \widetilde{\hat{\pi}}_\nu + m\right) \frac{1}{\left(\gamma^\mu \widetilde{\hat{\pi}}_\mu - m\right)\left(\gamma^\nu \widetilde{\hat{\pi}}_\nu + m\right)}. \tag{6.3.7}$$

Maintenant, afin de construire un propagateur de représentation globale, nous utilisons la relation $\int |x_f\rangle \langle x_f| \, dx_f = 1$ entre $\left(\gamma^\nu \widetilde{\hat{\pi}}_\nu + m\right)$ et $\left[\left(\gamma^\mu \widetilde{\hat{\pi}}_\mu - m\right)\left(\gamma^\nu \widetilde{\hat{\pi}}_\nu + m\right)\right]^{-1}$. Nous obtenons,

$$S^{(\theta)c}(x_f, y_f, x_i, y_i) = \left(\gamma^\nu \widetilde{\hat{\pi}}_\nu + m\right)_{out} \tilde{S}^{(\theta)g}(x_f, y_f, x_i, y_i), \tag{6.3.8}$$

avec

$$\tilde{S}^{(\theta)g}(x_f, y_f, x_i, y_i) = \left\langle x_f \ y_f \left| \frac{1}{\left(\gamma^\mu \widetilde{\hat{\pi}}_\mu - m\right)\left(\gamma^\nu \widetilde{\hat{\pi}}_\nu + m\right)} \right| x_i \ y_i \right\rangle. \tag{6.3.9}$$

Grâce à la méthode de temps-propre de Schwinger, le $\tilde{S}^{(\theta)g}(x_f, y_f, x_i, y_i)$ est représenté ci-dessous:

$$\tilde{S}^{(\theta)g}(x_f, y_f, x_i, y_i) = -i\int_0^\infty d\lambda \left\langle x_f\ y_f \left| \exp\left[-i\hat{H}^{(\theta)}(\lambda)\right] \right| x_i\ y_i \right\rangle, \tag{6.3.10}$$

où l'Hamiltonien $\hat{H}^{(\theta)}(\lambda)$ se compose de deux parties: l'une est l'hamiltonienne de l'oscillateur de Dirac dans l'espace commutatif et la seconde partie est considérée comme une correction imposée par la non-commutativité qui dépend de θ

$$\hat{H}^{(\theta)}(\lambda) = -\lambda\left(\gamma^\mu \tilde{\tilde{\pi}}_\mu - m\right)\left(\gamma^\nu \tilde{\tilde{\pi}}_\nu + m\right). \tag{6.3.11}$$

$$= -\lambda\left[\hat{p}_0^2 - m^2 - \left(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2\right) - m^2\omega^2\left(\hat{x}^2 + \hat{y}^2\right) - \frac{i}{2}F_{ij}^{(\theta)}\gamma^i\gamma^j + 2m\omega\left(\hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x\right)\right]$$
$$-\lambda\left(\frac{m\omega\theta}{2}\right)\left[2m\omega\left(\hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x\right) - \left(2 + \frac{m\omega\theta}{2}\right)\left(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2\right)\right]. \tag{6.3.12}$$

Alors, afin de construire une représentation intégrale de chemin pour $S^{(\theta)c}(x_f, y_f, x_i, y_i)$, nous suivons la méthode de discrétisation standard pour le kernel de (6.3.10). Habituellement, nous écrivons $\exp\left(-i\hat{H}^{(\theta)}(\lambda)\right) = \exp\left(-i\frac{\hat{H}^{(\theta)}(\lambda)}{N+1}\right)^{N+1}$ et nous insérons N identités $\int |x\rangle\langle x| dx = 1$, entre tous les opérateurs $\exp\left(-i\frac{\hat{H}^{(\theta)}(\lambda)}{N+1}\right)$. Ensuite, nous introduisons $(N+1)$ intégrations $\int d\lambda_k \delta(\lambda_k - \lambda_{k-1}) = 1$ et $(N+1)$ identités $\int |p\rangle\langle p| dp = 1$. Celui-ci transforme l'expression de $S^{(\theta)c}(x_f, y_f, x_i, y_i)$ à ce qui suit dans la représentation hamiltonienne de l'intégrale de chemin :

$$S^{(\theta)c}(x_f, y_f, x_i, y_i, t_f, t_i) =$$
$$(-i)\left(\gamma^\nu \tilde{\tilde{\pi}}_\nu + m\right)_{out} \mathbb{T}\int_0^\infty d\lambda_0 \int DtDxDy \int Dp_0Dp_xDp_y \int D\lambda D\pi_\lambda$$
$$\exp\left\{i\int_0^1 \left[\lambda\left[p_0^2 - m^2 - \omega_2^2\left(p_x^2 + p_y^2\right) - m^2\omega^2\left(x^2 + y^2\right) - \frac{i}{2}F_{ij}^{(\theta)}\gamma^i\gamma^j\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + 2m\omega\omega_2\left(xp_y - yp_x\right) + p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_0\dot{t} + \pi_\lambda\dot{\lambda}\right] ds\right\}, \tag{6.3.13}$$

où $\omega_2 = 1 + \frac{m\omega\theta}{2}$ et $F^{(\theta)}$ est une matrice anti-symétrique, connue comme:

$$F^{(\theta)} = 2m\omega\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\left(1 + \frac{m\omega\theta}{2}\right) \\ 0 & \left(1 + \frac{m\omega\theta}{2}\right) & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.3.14}$$

$\vec{x}(s)$, $\vec{p}(s)$, $\lambda(s)$, et $\pi_\lambda(s)$ sont des variables de trajectoires bosoniques obéissant à la condition de la limite $\vec{x}(0) = \vec{x}_i$, $\vec{x}(1) = \vec{x}_f$, $\lambda(0) = \lambda_0$. L'opérateur ordonnant $\mathbb{T}$ qui agit sur le γ-matrices qui est supposé dépendre formellement du paramètre de temps s. Via l'intégrale de chemin sur des trajectoires des grassmanniennes impaires [73], la représentation Hamiltonienne de l'intégrale de chemin de (6.3.13), peut être transformée comme suit:

$$S^{(\theta)g}\left(x_f,y_f,x_i,y_i,T\right)=(-i)\,e^{i\gamma^n\frac{\delta_l}{\delta\xi^n}}\int\frac{dp_0}{2\pi}e^{-ip_0T}\int_0^{\infty}d\lambda_0\int DxDy\int Dp_xDp_y\int D\lambda D\pi_\lambda$$
$$e^{i\lambda_0\left(p_0^2-m^2\right)}\int_{\psi(0)+\psi(1)=\xi}\mathcal{D}\psi\exp\left\{i\int_0^1\left[\lambda\left[-\omega_2^2\left(p_x^2+p_y^2\right)-m^2\omega^2\left(x^2+y^2\right)+2iF_{nk}^{(\theta)}\psi^n\psi^k\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.+2m\omega\omega_2\left(xp_y-yp_x\right)\right]+p_x\dot{x}+p_y\dot{y}+\pi_\lambda\dot{\lambda}-i\psi_n\dot{\psi}^n\right]ds+\psi_n\left(1\right)\psi^n\left(0\right)\Big\}_{\xi=0},\tag{6.3.15}$$

où la mesure $\mathcal{D}\psi$ est donnée par

$$\mathcal{D}\psi=D\psi\left[\int_{\psi(0)+\psi(1)=0}D\psi\exp\left(\int_0^1\psi_n\dot{\psi}^n ds\right)\right]^{-1}.\tag{6.3.16}$$

et ξ_n sont les variables auxiliaire de Grassmann (impaires), anti-commutantes par définition avec les γ-matrices; $\psi_n\left(s\right)$, sont des trajectoires impaires de l'intégration. Tout d'abord, on peut intégrer sur $\pi_\lambda\left(s\right)$, puis en utilisant la suite $\delta-$fonctions pour enlever l'intégration fonctionnelle sur λ. Il est important de remplacer l'intégration sur ψ par les vitesses impaires ω, à cause des conditions aux limites $\psi^n\left(0\right)+\psi^n\left(1\right)=\xi^n$. Après le remplacement

$$\psi\left(s\right)=\frac{1}{2}\int_0^1\varepsilon\left(s-s'\right)\omega\left(s'\right)ds'+\frac{\xi}{2},\tag{6.3.17}$$

avec $\varepsilon\left(s\right)$ le signe de s. Alors l'équation (4.2.15) devient

$$S^{(\theta)g}\left(x_f,y_f,x_i,y_i,T\right)=(-i)\exp\left(i\gamma^n\frac{\delta_l}{\delta\xi^n}\right)\int\frac{dp_0}{2\pi}e^{-ip_0T}\int_0^{\infty}d\lambda_0\exp\left(i\lambda_0\left(p_0^2-m^2\right)\right)$$
$$\int DxDy\int Dp_xDp_y\int\mathcal{D}\omega\exp\left\{i\int_0^1\left[\lambda_0\left[-\omega_2^2\left(p_x^2+p_y^2\right)-\left(m\omega\right)^2\left(x^2+y^2\right)\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+2m\omega\omega_2\left(xp_y-yp_x\right)\right]-\frac{i\lambda_0}{2}\left(\omega^n\varepsilon-\xi^n\right)F_{nk}^{(\theta)}\left(\varepsilon\omega^k+\xi^k\right)+\frac{i}{2}\omega_n\varepsilon\omega^n+p_x\dot{x}+p_y\dot{y}\right]ds\right\}_{\xi=0},\tag{6.3.18}$$

où la mesure $\mathcal{D}\omega$ est

$$\mathcal{D}\omega=D\omega\left[\int D\omega\exp\left(-\frac{1}{2}\omega^n\varepsilon\omega_n\right)\right]^{-1}.\tag{6.3.19}$$

Grâce à Eq.(6.3.18), nous pouvons voir que l'intégrale de chemin sur les variables de Grassmann $\omega(s)$ sont gaussienne, ce qui est clairement indiqué dans le troisième chapitre (méthode de Fradkin-Gittman). Suivant les mêmes étapes du compte à la section précédente (comme dans [98]), nous pouvons trouver $S^{(\theta)g}$:

$$S^{(\theta)g}\left(r_f,\varphi_f,r_i,\varphi_i,T\right)=(-i)\sum_n\sum_{m_\ell}\int_0^{\infty}\frac{de_0}{2}\int\frac{dp_0}{2\pi}e^{i\frac{e_0}{2}\left(p_0^2-m^2\right)-ip_0T}$$
$$\times e^{-i\left[e_0m\omega\left(1+\frac{m\omega\theta}{2}\right)\left(\left(2n+|m_\ell|+1\right)-m_\ell\right)\right]}\Psi_{n,m_\ell}^{(\theta)}\left(r_f,\varphi_f\right)\Psi_{n,m_\ell}^{(\theta)*}\left(r_i,\varphi_i\right)$$
$$\times\left[\cos\left(2m\omega\omega_2e_0\right)+\gamma^0\sin\left(2m\omega\omega_2e_0\right)\right],\tag{6.3.20}$$

où $\Psi^{(\theta)}_{n,m_\ell}(r,\varphi)$ est donnée par

$$\Psi^{(\theta)}_{n,m_\ell}(r,\varphi) = \left[\frac{m\omega}{\pi\omega_2}\frac{n!}{(n+|m_\ell|)!}\right]^{1/2}\left(\frac{m\omega}{\omega_2}r^2\right)^{(m_\ell)/2}$$
$$\times\exp\left(im_\ell\varphi - \frac{m\omega}{2\omega_2}r^2\right)L_n^{(|m_\ell|)}\left(\frac{m\omega}{\omega_2}r^2\right). \qquad (6.3.21)$$

$L_n^{(|m_\ell|)}$ est un polynôme de Laguerre généralisé et m_ℓ est un nombre entier. En plus de cela, nous l'intégrons sur $\frac{de_0}{2}$, alors nous agissons grâce à l'opérateur $\left(\gamma^\nu\widetilde{\widetilde{\pi}}_\nu + m\right)_{out}$. Finalement, nous utilisons les propriétés des polynômes de Laguerre de [99], à obtenir:

$$S^{(\theta)c}\left(r_f,\varphi_f,r_i,\varphi_i\right) = \sum_{n\in N}\sum_{m_\ell\in\mathcal{Z}}\frac{1}{z_f^{1/4}z_i^{1/4}}e^{-\frac{\left(z_f+z_i\right)}{2}}\left[\frac{m\omega}{\omega_2}\frac{n!}{(n+|m_\ell|)!}\right]\int\frac{dp_0}{2\pi}\frac{e^{-ip_0T}}{p_0^2-p_n^2}\times$$
$$\begin{bmatrix} \begin{array}{l}(p_0+m)\left(z_f\right)^{\left(m_\ell+\frac{1}{2}\right)/2}\left(z_i\right)^{\left(m_\ell+\frac{1}{2}\right)/2} \\ \times e^{im_\ell\left(\varphi_f-\varphi_i\right)}L_n^{(|m_\ell|)}\left(z_i\right)L_n^{(|m_\ell|)}\left(z_f\right)\end{array} & \begin{array}{l}\left(2i\sqrt{\frac{m\omega}{n\omega_2}}\right)\left(z_f\right)^{\left(m_\ell+\frac{1}{2}\right)/2}e^{im_\ell\varphi_f}L_n^{|m_\ell|}\left(z_f\right) \\ \times\left(z_i\right)^{\left(m_\ell+\frac{3}{2}\right)/2}e^{i(m_\ell+1)\varphi_i}L_{n-1}^{|m_\ell+1|}\left(z_i\right)\end{array} \\ \\ \begin{array}{l}\left(2i\sqrt{\frac{m\omega}{n\omega_2}}\right)e^{i(m_\ell+1)\varphi_f}\left(z_f\right)^{\left(m_\ell+\frac{3}{2}\right)/2}L_{n-1}^{|m_\ell+1|}\left(z_f\right) \\ \times e^{-im_\ell\varphi_i}\left(z_i\right)^{\left(m_\ell+\frac{1}{2}\right)/2}L_n^{|m_\ell|}\left(z_i\right)\end{array} & \begin{array}{l}\frac{1}{n}\left(-p_0+m\right)\left(z_f\right)^{\left(m_\ell+\frac{3}{2}\right)/2}\left(z_i\right)^{\left(m_\ell+\frac{3}{2}\right)/2} \\ \times e^{i(m_\ell+1)\left(\varphi_f-\varphi_i\right)}L_{n-1}^{(|m_\ell+1|)}\left(z_i\right)L_{n-1}^{(|m_\ell+1|)}\left(z_f\right)\end{array}\end{bmatrix}, \qquad (6.3.22)$$

où $z = \frac{m\omega}{\omega_2}r^2$ et

$$p_n^2 = m^2 + 2m\omega\omega_2\left(2n+|m_\ell|+1\right) - m^2\omega^2\theta\left(m_\ell+1\right) - 2m\omega m_\ell - 2m\omega. \qquad (6.3.23)$$

La détermination des fonctions d'ondes est effectuée en appliquant le théorème des résidus. Choisissons un contour spécial C dans le plan complexe. Les pôles de la fonction de Green sont des énergies positives et les énergies négatives sont respectivement données par $p_+^0 = E_n - i\epsilon$, $p_-^0 = -E_n + i\epsilon$. Pour les énergies positives p_+^0, le contour de l'intégration est choisi au-dessous de l'axe réel avec $T>0$. D'autre part, pour les énergies négatives p_-^0, il a été choisi ci-dessus de l'axe réel avec $T<0$. En conclusion, nous avons

$$\oint\frac{dp_0}{2\pi}\frac{e^{-ip_0T}}{p_0^2-p_{0n}^2} = -i\left[\Theta(T)\frac{e^{-iE_n^{(\theta)}T}}{2E_n^{(\theta)}} + \Theta(-T)\frac{e^{iE_n^{(\theta)}T}}{2E_n^{(\theta)}}\right]. \qquad (6.3.24)$$

et

$$\oint\frac{dp_0}{2\pi}\frac{e^{-ip_0T}}{p_0^2-p_{0n}^2}\left(p_0\pm m\right) = -i\left[\Theta(T)\frac{\left(E_n^{(\theta)}\pm m\right)}{2E_n^{(\theta)}}e^{-iE_n^{(\theta)}T} + \Theta(-T)\frac{\left(E_n^{(\theta)}\mp m\right)}{2E_n^{(\theta)}}e^{iE_n^{(\theta)}T}\right], \qquad (6.3.25)$$

où

$$E_n^{(\theta)} = \sqrt{m^2 + 2m\omega\omega_2\left(2n+|m_\ell|+1\right) - m^2\omega^2\theta\left(m_\ell+1\right) - 2m\omega m_\ell - 2m\omega}. \qquad (6.3.26)$$

Dans (6.3.24), nous avons deux types de propagation, l'une avec l'énergie positive $(+E_n^{(\theta)})$ se propageant vers le futur et l'autre avec une énergie négative $(-E_n^{(\theta)})$ propageant vers le passé. Nous obtenons le propagateur dans l'espace NC, mais défini avec des variables commutatives

$$S^{(\theta)}\left(r_f,\varphi_f,r_i,\varphi_i;T\right)=$$
$$\sum_n\sum_{m_\ell}\left[\Theta\left(T\right)\Psi^{(\theta)+}_{n,m_\ell}\left(r_f,\varphi_f\right)\bar{\Psi}^{(\theta)+}_{n,m_\ell}\left(r_i,\varphi_i\right)e^{-iE_n^{(\theta)}T}+\Theta\left(-T\right)\Psi^{(\theta)-}_{n,m_\ell}\left(r_f,\varphi_f\right)\bar{\Psi}^{(\theta)-}_{n,m_\ell}\left(r_i,\varphi_i\right)e^{iE_n^{(\theta)}T}\right]. \tag{6.3.27}$$

De ce résultat, on en déduit le spectre d'énergie avec $\omega_2=1+\frac{m\omega\theta}{2}$ dans Eq.(6.3.26)

$$E_n^{(\theta)}=\pm\sqrt{m^2+2m\omega\left(1+\tfrac{m\omega\theta}{2}\right)\left(2n+|m_\ell|+1\right)-m^2\omega^2\theta\left(m_\ell+1\right)-2m\omega m_\ell-2m\omega}, \tag{6.3.28}$$

ou autrement

$$E_n^{(\theta)}=\pm\sqrt{m^2+2n\left(2m\omega+m^2\omega^2\theta\right)+|m_\ell|\left(2m\omega+m^2\omega^2\theta\right)\left(1\mp1\right)}. \tag{6.3.29}$$

Les fonctions d'ondes correspondantes sont

$$\Psi^{(\theta)+}_{n,m_\ell}\left(r,\varphi\right)=\frac{1}{\left(\frac{m\omega}{\omega_2}r^2\right)^{1/4}}\begin{pmatrix}e^{im_\ell\varphi}\psi_1^{(\theta)+}\left(r\right)\\ e^{i(m_\ell+1)\varphi}\psi_2^{(\theta)+}\left(r\right)\end{pmatrix},\ \Psi^{(\theta)-}_{n,m_\ell}\left(r,\varphi\right)=\frac{1}{\left(\frac{m\omega}{\omega_2}r^2\right)^{1/4}}\begin{pmatrix}e^{im_\ell\varphi}\psi_1^{(\theta)-}\left(r\right)\\ e^{i(m_\ell+1)\varphi}\psi_2^{(\theta)-}\left(r\right)\end{pmatrix}. \tag{6.3.30}$$

Les composants des fonctions d'ondes $\Psi^{(\theta)+}_{n,m_\ell}\left(r,\varphi\right)$ et $\Psi^{(\theta)-}_{n,m_\ell}$ sont respectivement

$$\psi^{(\theta)+}_{1,n,m_\ell}\left(r\right)=\left[\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\omega_2}\frac{n!}{\pi(n+|m_\ell|)!}}\frac{E_n^{(\theta)}+m}{2E_n^{(\theta)}}\right]^{1/2}\left(\frac{m\omega}{\omega_2}r^2\right)^{(m_\ell+1/2)/2}e^{-\frac{m\omega r^2}{2\omega_2}}L_n^{(|m_\ell|)}\left(\frac{m\omega}{\omega_2}r^2\right), \tag{6.3.31}$$

$$\psi^{(\theta)+}_{2,n,m_\ell}\left(r\right)=i\left[\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\omega_2}\frac{(n-1)!}{\pi(n+|m_\ell|)!}}\frac{E_n^{(\theta)}-m}{E_n^{(\theta)}}\right]^{1/2}\left(\frac{m\omega}{\omega_2}r^2\right)^{(m_\ell+3/2)/2}e^{-\frac{m\omega r^2}{2\omega_2}}L_{n-1}^{(|m_\ell+1|)}\left(\frac{m\omega}{\omega_2}r^2\right), \tag{6.3.32}$$

$$\begin{aligned}\psi^{(\theta)-}_{1,n,m_\ell}\left(r\right)&=\left[\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\omega_2}\frac{n!}{\pi(n+|m_\ell|)!}}\frac{E_n^{(\theta)}-m}{2E_n^{(\theta)}}\right]^{1/2}\left(\frac{m\omega}{\omega_2}r^2\right)^{(m_\ell+1/2)/2}e^{-\frac{m\omega r^2}{2\omega_2}}L_n^{(|m_\ell|)}\left(\frac{m\omega}{\omega_2}r^2\right)\\&=\sqrt{\frac{E_n^{(\theta)}-m}{E_n^{(\theta)}+m}}\psi^{(\theta)+}_{1,n,m_\ell}\left(r\right),\end{aligned} \tag{6.3.33}$$

$$\begin{aligned}\psi^{(\theta)-}_{2,n,m_\ell}\left(r\right)&=i\left[\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\omega_2}\frac{(n-1)!}{\pi(n+|m_\ell|)!}}\frac{E_n^{(\theta)}+m}{E_n^{(\theta)}}\right]^{1/2}\left(\frac{m\omega}{\omega_2}r^2\right)^{(m_\ell+3/2)/2}e^{-\frac{m\omega r^2}{2\omega_2}}L_{n-1}^{(|m_\ell+1|)}\left(\frac{m\omega}{\omega_2}r^2\right)\\&=-\sqrt{\frac{E_n^{(\theta)}+m}{E_n^{(\theta)}-m}}\psi^{(\theta)+}_{2,n,m_\ell}\left(r\right).\end{aligned} \tag{6.3.34}$$

Maintenant, nous allons discuter deux points clés qui nous font avancer. La transformation (6.2.3) n'est pas unitaire et nous emmène à partir d'une représentation réductible en $\widehat{\tilde{x}}_i$ à une autre irréductible dans $\hat{x}_i$, ainsi nous pouvons représenter le $\widehat{\tilde{x}}_i$ opérateurs sur l'espace de Hilbert d'un irréductible par l'action suivante

$$\widehat{\tilde{x}}_i\psi(\mathbf{x}) = (x_i + i\frac{\theta_{ij}}{2}\partial_j)\psi(\mathbf{x}), \quad \text{avec } i, j = 1, 2. \tag{6.3.35}$$

Ce qui indique que la position du non-commutatif est non locale dans cette représentation. Cette difficulté principale peut être détournée en travaillant soit dans la base dynamique p_i ou dans la base mixte de l'espace des phases ($\tilde{x}$, p_y), ou encore par ($\tilde{y}$, p_x) [46], que ce soit dans la représentation holomorphe de l'élévation et l'abaissement des opérateurs en termes de ces coordonnées non-commutatives [47, 48]. Dans [44], il est suggéré que nous pouvons également se déplacer à l'intégration sur des trajectoires où $\tilde{x} = x - \frac{\theta p}{2}$ dans l'intégrale de chemins (6.2.6) et (6.3.10), puis nous avons

$$G^{(\theta)} = -i\int_0^\infty d\lambda \int Dp \int_{\vec{x}_i - \frac{\theta p}{2}}^{\vec{x}_f - \frac{\theta p}{2}} D\tilde{x} \exp\left\{i\int_0^\lambda ds \left[p_i\dot{\tilde{x}}^i - \hat{H}\left(\tilde{x}, p\right) + \frac{\dot{p}_i\theta^{ij}p_j}{2}\right]\right\}. \tag{6.3.36}$$

et

$$S^{(\theta)c} = -i\left(\gamma^\nu\widetilde{\tilde{\pi}}_\nu + m\right)_b\int_0^\infty d\lambda \int Dp \int_{\vec{x}_i - \frac{\theta p}{2}}^{\vec{x}_f - \frac{\theta p}{2}} D\tilde{x} \exp\left\{i\int_0^\lambda ds \left[p_i\dot{\tilde{x}}^i - \hat{H}\left(\tilde{x}, p, \gamma\right) + \frac{\dot{p}_i\theta^{ij}p_j}{2}\right]\right\}, \tag{6.3.37}$$

ces actions dans (6.3.36), (6.3.37) ne sont pas locales et différentes de la case correspondante commutative (à $\theta = 0$) par le terme $\frac{1}{2}p_i\theta^{ij}p_j$. Cette suggestion n'est pas correcte en soi et peut nous conduire à certaines ambiguïtés, car elle ne respecte pas l'esprit de Feynman de la signification des intégrales de chemin. A notre avis, les formulations données dans [48] sont meilleures. Enfin, la représentation commutative nous donne le spectre correct et certaines propriétés physiques du système sont décrites d'une manière plus facile.

En outre, si l'on considère le problème d'une particule chargée sur un plan non-commutatif soumis à un champ magnétique constant $\mathcal{B}$, où le potentiel magnétique vecteur $\vec{A}$ assosié à ce système est écrite dans une jauge symétrique

$$\vec{A} = \frac{\mathcal{B}}{2}\left(-\tilde{y}\vec{i} + \tilde{x}\vec{j}\right). \tag{6.3.38}$$

On peut obtenir dans ce cas, la représentation des fonctions de Green, les énergies et les fonctions d'onde pour l'oscillateurs de Dirac et de Klein-Gordon à (2+1)-dimensionnelle dans l'espace non-commutatif, par la suite de la même manière que dans les calculs précédents et juste de remplacer la fréquence ω par $\varpi \rightarrow \omega + \frac{e\mathcal{B}}{2m}$.

la conclusion fondamentale de ce chapitre est; les deux problèmes des applications (les oscillateurs Klein-Gordon et Dirac) dans l'espace non-commutatif sont similaire aux mêmes systèmes relativistes dans l'espace commutatif et avec la présence d'un champ magnétique constant (L'effet de Zeeman). Elle conduit à $\theta = 0$: l'espace NC qui retourne à l'espace commutatif et nous récupérons les mêmes résultats dans le cas d'espace ordinaire [122, 123].

7

Formalisme d'intégrale de chemin pour l'équation de Feshbach-Villars dans l'espace de phase non-commutatif

7.1 Introduction

Pendant longtemps, et comme il est bien connu en mécanique quantique relativiste, l'équation de Dirac vient pour décrire les particules relativistes qui ont le spin $\frac{1}{2}$ appliqué avec succès pour résoudre les problèmes physiques. Malheureusement, la même approche a été omise pour l'équation de Klein-Gordon, qui décrit les particules sans spin en raison de la présence des dérivés -pour la deuxième fois- qui génèrent les difficultés essentielles de la densité de probabilité négative. L'équation de Feschbach-Villars (F-V) [124, 125, 126] est une tentative pour éviter ces obstacles et de donner en même temps une interprétation précise de la probabilité pour les particules sans spin. Le procédé consiste essentiellement à réduire les dérivés du second ordre par l'utilisation d'une fonction à deux composants d'ondes. Par conséquent, l'équation présenterait la symétrie de charge qui est, en principe, une exigence de la théorie relativiste et donnant ainsi naissance à des solutions d'énergie négative et de leur interprétation comme "anti-particules". En plus de cela, dans le domaine de ce genre d'équation, il y a beaucoup d'applications ont été étudiées soumises sous un champ électromagnétique différent, citant par exemple [128]. Dans tous ces cas, elles ont été traitées par la mécanique quantique habituelle. Où les opérateurs de position et d'impulsion agissant sur l'espace de Hilbert des états satisfaisants aux relations de commutation usuelle. Si on prend en considération la notion de la géométrie non-commutative dans l'espace de phase qui représente une extension naturelle d'algèbre standard d'Heisenberg, dans lequel on permet aux non-commutateurs d'exister aussi entre les coordonnées, et entre les moments. Par conséquent, quelques grands importants papiers consacrés à l'étude des divers aspects de la physique quantique dans l'espace NC et plusieurs méthodes de la résolution analytique et approximative ont été appliquées [33, 34, 35, 36, 37, 38, 40], etc. En même temps, l'approche de Feynman est d'un intérêt particulier dans ce contexte, plusieurs formulations ont été présentés, par exemple, nous trouvons une version de l'action Berezin–Marinov [44]. D'autre part, la difficulté de l'espace des phases non-commutative peut être éviter en travaillant soit dans la base de l'espace des phases mixtes $\{|q_1, p_2\rangle\}$, ou encore dans d'autre base de l'espace de phase mixte $\{|q_2, p_1\rangle\}$ [46]. En outre, les auteurs [47, 48] ont formulé les intégrales du chemin de Feynman sur un plan non-commutatif en utilisant des états cohérents, une formulation qui a conduit à des résultats différents à ceux des traitements mentionnés ci-dessous. Dans cette analyse, nous sommes intéressés à construire la fonction de Green de l'équation de Feshbach-Villars à spin 0 dans l'espace de phase non-commutatif via le formalisme d'intégrale de chemin supersymétrique. Nous notons que cette équation décrit la dynamique relativistes des particules sans spin avec deux composants dont l'origine physique est discutée dans la réf. [124] et qui connaissait certaines applications, par exemple [128]. Pour les matrices de Pauli décrivant la symétrie de charge sont remplacées par les variables de Grassmann impaires. Le produit-star [67] introduit, qui caractérise la géométrie non-commutative est équivalent à un changement de Bopp qui est défini dans la section suivante (équations (7.2.12) et (7.2.13)). Par la suite, pour les calculs effectués, nous diagonalisons l'hamiltonien du système via la transformation de Foldy-Wouthuysen canonique. Le cas libre et l'interaction du champ magnétique constant sont explicitement exposés. Dans chaque cas, les propagateurs sont évalués et le spectre d'énergie et les fonctions d'onde correspondantes sont déduits.

Maintenant, dans le contexte de la mécanique quantique non-commutative, nous suggérons de développer le travail [127], où l'on présente de l'équation de F.V et certaines relations nécessaires dans le calcul de l'espace des phases non-commutatif.

7.2 L'équation de Feshbach-Villars de la géométrie non-commutative

Dans l'espace des phases commutatif, la mécanique quantique est formulée en imposant les relations de la commutation qui génèrent l'algèbre de Heisenberg suivant :

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}, [\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0, \quad \text{et} \ [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0. \tag{7.2.1}$$

D'après ces relations, l'équation relativiste décrivant la dynamique des particules de spin zéro avec la présence d'un champ électro-magnétique, est mise en place via la règle de correspondance et qui est connue par l'équation KG

$$\left[\left(\tfrac{\partial}{\partial t} + igV(\hat{x})\right)^2 - (\nabla - ig\mathbf{A}(\hat{x}))^2 + m^2\right]\Phi(x) = 0. \tag{7.2.2}$$

La difficulté principale de cette équation est la présence des dérivés du temps du second ordre qui génèrent la densité de probabilité non positive. La procédure F.V. est appliquée pour éviter cette difficulté en considérant une équation à deux ondes composantes. La réduction de l'ordre de la dérivée en temps est autorisée conformément à la linéarisation suivante :

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \Phi + \frac{1}{m}\left(i\frac{\partial}{\partial t} - gV\right)\Phi \\ \Phi - \frac{1}{m}\left(i\frac{\partial}{\partial t} - gV\right)\Phi \end{pmatrix}, \tag{7.2.3}$$

où Φ est la fonction d'onde de KG et Ψ est celle de F.V.

Par conséquent, Ψ satisfait l'équation de Schrödinger suivante:

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial t} = H(g)\Psi, \tag{7.2.4}$$

avec

$$H(g) = -\frac{1}{2m}(\nabla - ig\mathbf{A})^2(\sigma_3 + i\sigma_2) + m\sigma_3 + gV, \tag{7.2.5}$$

$V(x)$ et $A(x)$ représentent le potentiel scalaire indépendant du temps et $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ sont les matrices de Pauli décrivant la symétrie de charge. Elles sont habituellement définies comme suit:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{7.2.6}$$

Par conséquent, l'équation présente la symétrie de charge exigée par les principes relativistes et l'énergie négative est interprétée comme l'antiparticule.

Afin de décrire un espace de phase non-commutatif dans le plan (x, y), les relations des commutations ci-dessus seraient changé comme:

$$\left[\widehat{\widehat{x}}_i, \widehat{\widehat{p}}_j\right] = i\delta_{ij}, \quad \left[\widehat{\widehat{x}}_i, \widehat{\widehat{x}}_j\right] = i\theta_{ij}, \quad \left[\widehat{\widehat{p}}_i, \widehat{\widehat{p}}_j\right] = i\eta_{ij} \quad \text{avec } i, j = 1, 2, 3, \tag{7.2.7}$$

θ_{ij} et η_{ij} sont des paramètres de tenseur constants anti-symétriques avec des dimensions de θ_{ij} et η_{ij} qui représentent respectivement (longueur)^2 et (impulsion)^2. Ils représentent la non-commutation de l'espace de phase dans le plan (x, y), à savoir, $\theta^{3i} = 0$ et $\eta^{3i} = 0$.

Dans le contexte de cette déformation, le produit de deux fonctions est équivalent aux crochets de Weyl-Moyal où le produit-star est défini comme:

$$\begin{aligned}(f \star g)(x,p) &= e^{\frac{i}{2}\theta_{ij}\partial_i^x\partial_j^x + \frac{i}{2}\eta_{ij}\partial_i^p\partial_j^p} f(x,p)g(x,p) \\ &= f(x,p)g(x,p) + \frac{i}{2}\theta_{ij}\partial_i^x f \partial_j^x g \mid_{x_i=x_j} + \frac{i}{2}\eta_{ij}\partial_i^p f\partial_j^p g \mid_{p_i=p_j} + O\left(\Theta^2\right),\end{aligned} \tag{7.2.8}$$

Où $O\left(\Theta^2\right)$ représente les termes de second ordre et plus de θ_{ij} et η_{ij}. Les équations (7.2.2) et (7.2.3) dans l'espace des phases NC serront:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + igV(\hat{x})\right)^2 + (\nabla - ig\mathbf{A}(\hat{x}))^2 + m^2\right] \star \Phi(x) = 0. \tag{7.2.9}$$

En utilisant la même technique de linéarisation donnée par

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \Phi + \frac{1}{m}\left(i\frac{\partial}{\partial t} - gV\right) \star \Phi \\ \Phi - \frac{1}{m}\left(i\frac{\partial}{\partial t} - gV\right) \star \Phi \end{pmatrix}. \tag{7.2.10}$$

L'équation de F.V non-commutative devient

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[-\frac{1}{2m}(\nabla - ig\mathbf{A})^2(\sigma_3 + i\sigma_2) + m\sigma_3 + gV\right] \star \Psi. \tag{7.2.11}$$

Le produit-star de l'équation F.V sur l'espace des phases NC peut être transformée en un produit ordinaire par un décalage généralisé de Bopp en déplaçant les coordonnées x_i et les impulsions p_i comme suit:

$$\tilde{x}_i \rightarrow x_i - \frac{1}{2}\theta_{ij}p_j \text{ et } \tilde{p}_i \rightarrow p_i + \frac{1}{2}\eta_{ij}x_j. \tag{7.2.12}$$

Par conséquent, le potentiel électromagnétique d'interaction $\left(V(x),\ \vec{A}(x)\right)$ défini sur un espace de phase non-commutatif, donne le potentiel effectif θ-dépendant de l'espace des phases commutatif comme suit:

$$V^*(x) = V\left(\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{\theta} \times \vec{p}\right) \text{ et } \vec{A}(x) = \vec{A}\left(\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{\theta} \times \vec{p}\right). \tag{7.2.13}$$

Dans la partie suivante, notre intérêt est de calculer la fonction de Green par rapport à l'équation (7.2.11) en suivant le formalisme d'intégrale de chemin.

7.3 Construction de la fonction de Green dans l'espace de phase NC

Dans le cas suivant, nous considérons une particule sans spin de masse m, soumise à l'action d'un champ électromagnétique dans un espace de phase non-commutatif. Nous présentons la dérivation du propagateur F.V via le formalisme supersymétrique proposé par Fradkin et Gitman [73]. Comme on le sait, le propagateur de la particule spin 0 dans un espace de phase non-commutatif est la fonction de Green causale $G^c(x_b, x_a)$ de l'équation de F.V

$$\left[\hat{\pi}_0 - \left[\frac{\hat{\pi}_i{}^2}{2m}(\sigma_3 + i\sigma_2) + m\sigma_3\right]\right] \star G^c(x_b, x_a) = -\delta^4(x_b, x_a). \tag{7.3.1}$$

Nous avons montré dans la section précédente que sur la mécanique quantique non-commutative, le Moyal produit-star peut être remplacé par un changement généralisé de Bopp (7.2.12), ce qui donne l'équivalent dans un espace de phase commutative ($\theta_{ij} = \epsilon_{ijk}\theta_k, \eta_{ij} = \epsilon_{ijk}\eta_k$),

$$\left[\widetilde{\hat{\pi}}_0 - \left[\frac{\widetilde{\hat{\pi}}_i{}^2}{2m}(\sigma_3 + i\sigma_2) + m\sigma_3\right]\right] G^{(\mathrm{NC})}(x_b, x_a) = -\delta^4(x_b, x_a). \tag{7.3.2}$$

Les composantes $\widetilde{\hat{\pi}}_0$ et $\widetilde{\hat{\pi}}_i$

$$\widetilde{\hat{\pi}}_0 = p_0 - gV\left(\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{\theta} \times \vec{p}\right), \tag{7.3.3}$$

$$\overrightarrow{\widetilde{\hat{\pi}}}_i = \left(\vec{p} - \frac{1}{2}\vec{\eta} \times \vec{x}\right) - g\vec{A}\left(\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{\theta} \times \vec{p}\right), \tag{7.3.4}$$

avec $V(x)$ et $\vec{A}(x)$ est le potentiel électromagnétique et les opérateurs x^i, p^i dans un espace commutatif qui satisfait les relations ordinaires de commutation de Heisenberg (7.2.1).

En utilisant les propriétés de matrices de Pauli ($\sigma_i\sigma_j = i\epsilon_{ijk}\sigma_k$), nous pouvons écrire l'équation (7.3.2) comme suit:

$$\left(\widetilde{\hat{\pi}}_0 - \frac{i}{2}\widetilde{F}_{nk}\sigma^n\sigma^k\right) G^{(\mathrm{NC})}(x_b, y_b) = -\delta^4(x_b, y_b), \tag{7.3.5}$$

avec la matrice $\widetilde{F}$ est un anti-symétrique qui est lié aux coordonnées $\vec{x}$ et l'impulsion $\vec{p}$, définie comme:

$$\widetilde{F}_{nk} = \begin{pmatrix} 0 & -\left(\frac{\widetilde{\hat{\pi}}_i{}^2}{2m} + m\right) & i\frac{\widetilde{\hat{\pi}}_i{}^2}{2m} \\ \left(\frac{\widetilde{\hat{\pi}}_i{}^2}{2m} + m\right) & 0 & 0 \\ -i\frac{\widetilde{\hat{\pi}}_i{}^2}{2m} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.3.6}$$

Tout d'abord, nous présentons $G^{(\mathrm{NC})}(x_b, x_a)$ comme un élément de la matrice d'un opérateur $\hat{G}^{(\mathrm{NC})}$

$$G^{(\mathrm{NC})}(x_b, x_a) = \langle x_b | \hat{G}^{(\mathrm{NC})} | x_a \rangle. \tag{7.3.7}$$

$|x_i\rangle$ sont des vecteurs propres de certains opérateurs auto-adjoints de coordonnées $\hat{x}_i$; les correspondants des opérateurs d'impulsions canoniques conjugués sont $\hat{p}_i$, donc:

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij},\ \hat{x}_i |x\rangle = x_i |x\rangle, \quad \langle x \mid x'\rangle = \delta^3(x-x'); \quad \int |x\rangle \langle x| \, dx = I$$
$$\hat{p}_i |p\rangle = p_i |p\rangle, \ \langle p \mid p'\rangle = \delta^3(p-p'); \int |p\rangle \langle p| \, dp = I; \langle x \mid p\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{ipx}. \tag{7.3.8}$$

Où la solution symbolique est écrite comme suit:

$$\hat{G}^{(\mathrm{NC})} = \frac{1}{\left(\widetilde{\hat{\pi}}_0 - \frac{i}{2}\widetilde{F}_{nk}\sigma^n\sigma^k\right)}. \tag{7.3.9}$$

Selon la méthode de Schwinger (nous utilisons un seul temps-propre bosonique), la fonction de Green dans l'espace de configuration est écrite comme

$$G^{(\mathrm{NC})}(x_b, x_a) = (-i) \int_0^\infty d\lambda \, \langle x_b| \exp\left(-i\hat{H}^*(\lambda)\right) |x_a\rangle, \tag{7.3.10}$$

où

$$\hat{H}^*(\lambda) = -\lambda \left(\widetilde{\hat{\pi}}_0 - \frac{i}{2}\widetilde{F}_{nk}\sigma^n\sigma^k\right). \tag{7.3.11}$$

Ainsi, pour construire une représentation de l'intégrale de chemin de $G^{(\mathrm{NC})}(x_b, x_a)$, nous suivons la méthode de discrétisation standard. D'abord, nous écrivons $\exp\left(-i\hat{H}^*(\lambda)\right) = \left[\exp\left(-i\frac{\hat{H}^*(\lambda)}{N+1}\right)\right]^{N+1}$ et nous insérons N identités $\int |x\rangle \langle x| \, dx = 1$, entre tous les opérateurs $\exp\left(-i\frac{\hat{H}^*(\lambda)}{N+1}\right)$. Ensuite, nous introduisons $(N+1)$ intégrations $\int d\lambda_k \delta(\lambda_k - \lambda_{k-1}) = 1$, et $(N+1)$ identités $\int |p\rangle \langle p| \, dp = 1$. Ceci transforme l'expression de $G^{(\mathrm{NC})}(x_b, x_a)$ à la représentation hamiltonienne de l'intégrale de chemin suivante:

$$G^{(\mathrm{NC})}(x_b, x_a) = (-i)\, e^{i\sigma^n \frac{\delta_l}{\delta\xi^n}} \int_0^\infty d\lambda_0 \int DxD\lambda \int DpD\pi_\lambda \int_{\psi^n(0)+\psi^n(1)=\xi^n} \mathcal{D}\psi$$
$$\times \exp\left\{ i\int_0^1 \left[\lambda\left(\widetilde{\pi}_0 + 2i\widetilde{F}_{nk}\psi^n\psi^k\right) + p\dot{x} + \pi_\lambda\dot{\lambda} - i\psi_n\dot{\psi}^n\right] ds + \psi_n(1)\psi^n(0)\right\}_{\xi=0}. \tag{7.3.12}$$

et la mesure $\mathcal{D}\psi$ est donnée par

$$\mathcal{D}\psi = D\psi \left[\int_{\psi(0)+\psi(1)=0} D\psi \exp\left(\int_0^1 \psi_n\dot{\psi}^n ds\right)\right]^{-1}. \tag{7.3.13}$$

avec $x(s), \pi(s), \lambda(s)$, et $\pi_\lambda(s)$ sont des trajectoires bosoniques, obéissants à des conditions aux limites: $x(0) = x_a, x(1) = x_b, \lambda(0) = \lambda_0$. Et θ, $\psi^n(s)$ sont des variables grassmanniennes (impaires), anti-commutes avec les matrices des Pauli σ_i. En plus, ces trajectoires impaires $\psi^n(s)$ se conforment aux conditions des limites anti-périodiques

$$\psi^n(0) + \psi^n(1) = \xi^n. \tag{7.3.14}$$

Cette représentation (7.3.12), peut être traitée comme l'intégrale de chemin du propagateur par rapport aux cas libre et en présence d'un champ magnétique constant, via une transformation canonique analogue à la transformation de F-W.

7.4 Méthode générale via la transformation de Foldy-Wouthuysen (F-W)

La transformation de F-W est un des fondements de la mécanique quantique relativiste qui est appliqué pour transformer l'équation de Dirac libre en une forme facile, à associer les opérateurs avec la dynamique des variables classiques. L'équation de F.V. présente les mêmes propriétés particulières et il est également possible dans ce cas, de trouver une transformation analogue canonique par laquelle les difficultés sont liées à l'interprétation de la théorie disparue [125]. En effet, dans cette représentation Hamiltonienne de F.V devient hermitienne et les solutions de l'énergie positive et négative sont totalement découplées. Ainsi, l'interprétation probabiliste classique a été rétablie.

Dans cette section, nous voulons utiliser cette transformation canonique dans les calculs de l'intégrale de chemin de propagateur de F.V dans un champ magnétique externe, avec les coordonnées de l'espace de phase non-commutatif (NC). En l'absence du champ électrique ($V = 0$), l'expression (7.3.12) s'écrit:

$$G^{(\mathrm{NC})}(x_b, x_a) = (-i)\, e^{i\sigma^n \frac{\delta_l}{\delta \xi^n}} \int d\lambda_0 \int \frac{dp_t}{2\pi} e^{i\lambda_0 p_t} e^{ip_t(t_b - t_a)} \int D\psi$$
$$\times \exp\left\{ i \int_0^1 ds \left[\left[i\lambda_0 m \psi^1 \psi^2 - \psi_n \dot{\psi}^n \right] + \psi_n(1)\, \psi^n(0) \right] \right\} \mathcal{K}_\psi^{(\mathrm{NC})}(x_b, x_a, \lambda_0) \rfloor_{\xi=0}, \qquad (7.4.1)$$

et

$$\mathcal{K}_\psi^{(\mathrm{NC})}(x_b, x_a, \lambda_0) =$$
$$\int D^3x D^3p \exp\left\{ i \int_0^{\lambda_0} ds \left[i \frac{(\tilde{p} - gA(\tilde{x}))^2}{2m} \left(\psi^1\psi^2 - i\psi^1\psi^3 \right) + p\dot{x} \right] \right\}, \qquad (7.4.2)$$

avec les coordonnées $(\tilde{x}, \tilde{p})$ à deux dimensions dans l'espace de phase non-commutatif sont donnés en termes des variables commutatives (x, p),

$$\tilde{x} = x - \frac{\theta}{2} p_y, \quad \tilde{y} = y + \frac{\theta}{2} p_x, \ \tilde{z} = z, \qquad (7.4.3)$$

$$\tilde{p}_x = p_x + \frac{\eta}{2} y, \quad \tilde{p}_y = p_y - \frac{\eta}{2} x, \ \tilde{p}_z = p_z. \qquad (7.4.4)$$

Il est facile de voir que, le propagateur (7.4.2) représente le propagateur de particule chargée non-relativiste dans la présence du champ magnétique, dont la solution générale est donnée par:

$$\mathcal{K}_{\psi}^{(\text{NC})}\left(x_b, x_a, \lambda_0\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n\left(x_b\right) \Psi_n^*\left(x_a\right) e^{-iE_n^{(\eta,\theta)} \int_0^{\lambda_0}\left(\psi^1\psi^2 - i\psi^1\psi^3\right)ds}. \tag{7.4.5}$$

$E_n^{(\eta,\theta)}$ est le spectre d'énergie lié au problème de l'espace des phases non-commutatif et $\Psi_{n_r,m}\left(\mathbf{x}\right)$ sont les fonctions d'onde correspondantes. Maintenant, à ce niveau, nous introduisons la transformation canonique définie par

$$\psi_n \longrightarrow S\left(E_n^{(\eta,\theta)}\right) \tilde{\psi}_n, \tag{7.4.6}$$

avec

$$S\left(E_n^{(\eta,\theta)}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E_n^{(\eta,\theta)}+m}{\sqrt{2mE_n^{(\eta,\theta)}+m^2}} & \frac{-iE_n^{(\eta,\theta)}}{\sqrt{2mE_n^{(\eta,\theta)}+m^2}} \\ 0 & \frac{iE_n^{(\eta,\theta)}}{\sqrt{2mE_n^{(\eta,\theta)}+m^2}} & \frac{E_n^{(\eta,\theta)}+m}{\sqrt{2mE_n^{(\eta,\theta)}+m^2}} \end{pmatrix}. \tag{7.4.7}$$

Insérant toutes les modifications dans l'expression (7.4.1), il peut être transformé comme suit:

$$\begin{aligned} G^{(\text{NC})}\left(x_b, x_a\right) &= (-i) \int d\lambda_0 \sum_n \Psi_n\left(x_b\right) \Psi_n^*\left(x_a\right) \int \frac{dp_t}{2\pi} e^{i\lambda_0 p_t} e^{ip_t(t_b - t_a)} \\ &\times e^{i\sigma^n \frac{\delta_l}{\delta\xi^n}} \int_{\tilde{\psi}^n(0)+\tilde{\psi}^n(1)=\tilde{\xi}^n} \mathcal{D}\tilde{\psi} \exp\left\{ i \int_0^{\lambda_0} \left[\left(2i\mathcal{F}_{nk}\tilde{\psi}^n\tilde{\psi}^k - i\tilde{\psi}_n\dot{\tilde{\psi}}^n\right) + \tilde{\psi}_n\left(1\right)\tilde{\psi}^n\left(0\right)\right]\right\}_{\boldsymbol{\xi}=0}, \end{aligned} \tag{7.4.8}$$

où

$$\mathcal{F}_{nk} = \sqrt{m^2 + 2mE_n^{(\eta,\theta)}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.4.9}$$

Il est important de remplacer l'intégration sur $\tilde{\psi}$ par les vitesses impaires $\tilde{\omega}$, en raison de la condition limitée $\tilde{\psi}^n\left(0\right) + \tilde{\psi}^n\left(1\right) = \tilde{\xi}^n$, après le remplacement [77],

$$\tilde{\psi}\left(s\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 \varepsilon\left(s - s'\right)\tilde{\omega}\left(s'\right)ds' + \frac{\tilde{\xi}}{2}, \tag{7.4.10}$$

$\varepsilon(s)$ est le signe de s. Puis (7.4.8) devient

$$\begin{aligned} G^{(\text{NC})}\left(x_b, x_a\right) &= (-i) \int d\lambda_0 \sum_n \Psi_n\left(x_b\right) \Psi_n^*\left(x_a\right) \int \frac{dp_t}{2\pi} e^{i\lambda_0 p_t} e^{ip_t(t_b - t_a)} \\ &\times e^{i\sigma^n \frac{\delta_l}{\delta\xi^n}} \int \mathcal{D}\tilde{\omega} \exp\left\{ i \int_0^{\lambda_0} \left[\left(-\frac{i}{2}\left(\tilde{\omega}^n\varepsilon - \xi^n\right)\mathcal{F}_{nk}\left(\varepsilon\tilde{\omega}^k + \xi^k\right) + \frac{i}{2}\tilde{\omega}_n\varepsilon\tilde{\omega}^n\right)\right]\right\}_{\boldsymbol{\xi}=0}, \end{aligned} \tag{7.4.11}$$

où la mesure $\mathcal{D}\tilde{\omega}$ est

$$\mathcal{D}\tilde{\omega} = D\tilde{\omega}\left[\int D\tilde{\omega}\exp\left(-\frac{1}{2}\tilde{\omega}^n\varepsilon\tilde{\omega}_n\right)\right]. \tag{7.4.12}$$

A partir de Eq.(7.4.11), nous pouvons voir que l'intégrale de chemin sur les variables grassmanniennes sont gaussienne, ce qui est indiqué dans le chapitre 3. Ensuite, nous utilisons le théorème de résidus, pour trouver le propagateur approprié de la fonction de Green (7.4.11):

$$\mathbb{K}^{(\mathrm{NC})}(x_b, x_a) = \sum_n \Psi_n(x_b)\Psi_n^*(x_a)\left[e^{-i\mathcal{E}_nT}u_n(\mathcal{E}_n)\bar{u}_n(\mathcal{E}_n) - e^{i\mathcal{E}_nT}v_n(\mathcal{E}_n)\bar{v}_n(\mathcal{E}_n)\right], \tag{7.4.13}$$

où

$$\mathcal{E}_n = \sqrt{m^2 + 2mE_n^{(\eta,\theta)}}. \tag{7.4.14}$$

et

$$u_n(\mathcal{E}_n) = \frac{1}{2(m\mathcal{E}_n)^{1/2}}\begin{pmatrix} m+\mathcal{E}_n \\ m-\mathcal{E}_n \end{pmatrix}, v_n(\mathcal{E}_n) = \frac{1}{2(m\mathcal{E}_n)^{1/2}}\begin{pmatrix} m-\mathcal{E}_n \\ m+\mathcal{E}_n \end{pmatrix}. \tag{7.4.15}$$

L'expression (7.4.13) est connue sous le nom d'une décomposition spectrale du propagateur de F.V à partir duquel on peut facilement en déduire une formelle du spectre et des fonctions d'onde correspondantes.

7.5 Applications

7.5.1 La particule libre

Pour une particule libre, (c.-à-d. $V(x) = 0$ et $\mathbf{A}(x) = 0$), nous utilisons uniquement le passage sur l'impulsion $\left(\text{c.-à-d. } \tilde{p}_x = p_x + \frac{\eta}{2}y,\ \tilde{p}_y = p_y - \frac{\eta}{2}x\right)$. Puis, la représentation hamiltonienne de l'intégrale de chemin de la kernel $\mathcal{K}_\psi^{(\mathrm{NC})}(x_b, x_a, \lambda_0)$ est donnée par,

$$\mathcal{K}_\psi^{(\mathrm{NC})}(x_b, x_a, \lambda_0) = \int \frac{dp_z}{2\pi} e^{ip_z(z_b-z_a)} e^{-\lambda_0\frac{p_z^2}{2m}\left(\psi^1\psi^2 - i\psi^1\psi^3\right)} \int DxDyDp_xDp_y$$
$$\times \exp\left\{i\int_0^{\lambda_0} ds\left[i\frac{\left(p_x + \frac{\eta}{2}y\right)^2 + \left(p_y - \frac{\eta}{2}x\right)^2}{2m}\left(\psi^1\psi^2 - i\psi^1\psi^3\right) + p_x\dot{x} + p_y\dot{y}\right]\right\}. \tag{7.5.1}$$

Il est clair que ce propagateur (7.5.1) est identique à la solution intégrale de chemin pour les particules chargées en présence d'un champ magnétique constant, il sera résolu facilement par les coordonnées polaires [85], ainsi la solution de cette intégrale de chemin écrite comme suit:

$$\mathcal{K}_\psi^{(\mathrm{NC})}(x_b, x_a, \lambda_0) = \sum_n \sum_m \int \frac{dp_z}{2\pi} e^{ip_z(z_b-z_a)} e^{-i\lambda_0 E_n^{(\eta)} \int_0^1 \left(\psi^1\psi^2 - i\psi^1\psi^3\right)ds}$$
$$\times \Psi_{n,\ell}(\rho_b, \varphi_b)\Psi_{n,\ell}^*(\rho_a, \varphi_a), \tag{7.5.2}$$

avec

$$E_n^{(\eta)} = \frac{p_z^2}{2m} + (2n+1)\,\omega_0; \quad \omega_0 = \frac{\eta}{m}. \tag{7.5.3}$$

$\Psi_{n,\ell}(\rho,\varphi)$ est la fonction d'onde de l'oscillateur

$$\Psi_{n,\ell}(\rho,\varphi) = \left(\frac{m\omega_0}{2\pi}\frac{n!}{(n+|\ell|)}\right)^{1/2}\left(\frac{m\omega_0}{2}\rho^2\right)^{|\ell|/2} e^{\left(i\ell\varphi-\frac{m\omega_0}{4}\rho^2\right)} L_n^\ell\left(\frac{m\omega_0}{2}\rho^2\right), \tag{7.5.4}$$

$L_n^m(x)$ sont des polynômes de Laguerre généralisés. En substituant (7.5.2) dans (7.4.1) nous obtenons

$$\begin{aligned} G^{(\mathrm{NC})}(x_b,x_a) &= (-i)\, e^{i\sigma^n \frac{\delta_l}{\delta\xi^n}} \int d\lambda_0 \int \frac{dp_t}{2\pi} e^{i\lambda_0 p_t} e^{ip_t(t_b-t_a)} \int \frac{dp_z}{2\pi} e^{ip_z(z_b-z_a)} \\ &\times \sum_n \sum_\ell \Psi_{n,\ell}(\rho_b,\varphi_b)\,\Psi^*_{n,\ell}(\rho_a,\varphi_a) \int_{\psi^n(0)+\psi^n(1)=\xi^n} \mathcal{D}\psi e^{-i\lambda_0 E_n^{(\eta)}\int_0^1\left(\psi^1\psi^2-i\psi^1\psi^3\right)ds} \\ &\times \exp\left\{ i\int_0^1 ds\left[\left[i\lambda_0 m\psi^1\psi^2 - \psi_n\dot{\psi}^n\right] + \psi_n(1)\,\psi^n(0)\right]\right\} \rfloor_{\xi=0}. \end{aligned} \tag{7.5.5}$$

Suivant les mêmes étapes du compte dans la section précédente (selon la [77]), nous utilisons le théorème des résidus pour trouver le propagateur $\mathbb{K}^{(\mathrm{NC})}(x_b,x_a)$ de la fonction de Green $G^{(\mathrm{NC})}(x_b,x_a)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^{(\mathrm{NC})}(x_b,x_a;T) &= \int \frac{dp_z}{2\pi} e^{ip_z(z_b-z_a)} \sum_n \sum_\ell \Psi_{n,\ell}(\rho_b,\varphi_b)\,\Psi^*_{n,\ell}(\rho_a,\varphi_a) \\ &\times \left[e^{-i\mathcal{E}_n T} u_n(p_z,\eta)\,\bar{u}_n(p_z,\eta) - e^{i\mathcal{E}_n T} v_n(p_z,\eta)\,\bar{v}_n(p_z,\eta)\right], \end{aligned} \tag{7.5.6}$$

dont le spectre d'énergie est donné par

$$\mathcal{E}_n = \sqrt{p_z^2 + m^2 + 2\eta\left(n+\frac{1}{2}\right)}. \tag{7.5.7}$$

et

$$u_n(p_z,\eta) = \frac{1}{2\,(m\mathcal{E}_n)^{1/2}}\begin{pmatrix} m+\mathcal{E}_n \\ m-\mathcal{E}_n \end{pmatrix}, v_n(p_z,\eta) = \frac{1}{2\,(m\mathcal{E}_n)^{1/2}}\begin{pmatrix} m-\mathcal{E}_n \\ m+\mathcal{E}_n \end{pmatrix}. \tag{7.5.8}$$

Nous notons qu'il y a une similitude entre la dynamique de la particule libre (F.V) dans l'espace non-commutatif avec celle de la particule sans spin (F.V) soumise à l'action d'un champ magnétique constant dans l'espace des phases commutatif (effet Zeeman normal).

7.5.2 Champ magnétique constant

Dans ce cas, nous discutons les niveaux d'énergie de ce problème d'une particule chargée sur un plan non-commutatif soumise à un champ magnétique $\mathcal{B}$ constant, dont le potentiel vecteur magnétique associé $\vec{A}$ est écrit dans une jauge symétrique:

$$\vec{A} = \left(-\frac{\mathcal{B}}{2}\tilde{y}, \frac{\mathcal{B}}{2}\tilde{x} \right). \tag{7.5.9}$$

Dans ce cas, nous pouvons obtenir la représentation du propagateur $\mathcal{K}_{\psi}^{(\text{NC})}(x_b, x_a, \lambda_0)$ comme suit :

$$\mathcal{K}_{\psi}^{(\text{NC})}(x_b, x_a, \lambda_0) = \int \frac{dp_z}{2\pi} e^{ip_z(z_b - z_a)} e^{i\lambda_0 \frac{p_z^2}{2m}\left(\psi^1\psi^2 - i\psi^1\psi^3\right)} \int DxDyDp_xDp_y$$
$$\times \exp\left\{ i \int_0^{\lambda_0} ds \left[i \frac{\left[\left(p_x + e\frac{\mathcal{B}^{(\eta,\theta)}}{2} y \right)^2 + \left(p_y - e\frac{\mathcal{B}^{(\eta,\theta)}}{2} x \right)^2 \right]}{2m^{(\theta)}} \left(\psi^1\psi^2 - i\psi^1\psi^3 \right) + p_x\dot{x} + p_y\dot{y} \right] \right\} \tag{7.5.10}$$

avec

$$\mathcal{B}^{(\eta,\theta)} = \left(\mathcal{B} + \frac{\eta}{e} \right) \left(1 + \frac{e\mathcal{B}\theta}{4} \right)^{-1}, \quad m^{(\theta)} = m \left(1 + \frac{e\mathcal{B}\theta}{4} \right)^{-2} \tag{7.5.11}$$

et la même manière que dans les calculs précédents, on obtient la forme finale du propagateur de F.V d'un champ magnétique constant dans l'espace de phase non-commutatif

$$\mathbb{K}^{(\text{NC})}(x_b, x_a; T) = \sum_n \sum_\ell \int \frac{dp_z}{2\pi} e^{ip_z(z_b - z_a)} \Psi_{n,\ell}(\rho_b, \varphi_b) \Psi_{n,\ell}^*(\rho_a, \varphi_a)$$
$$\times \left[e^{-i\mathcal{E}_n T} u_n(p_z, \theta, \eta) \bar{u}_n(p_z, \theta, \eta) - e^{i\mathcal{E}_n T} v_n(p_z, \theta, \eta) \bar{v}_n(p_z, \theta, \eta) \right], \tag{7.5.12}$$

avec

$$\mathcal{E}_n = \sqrt{p_z^2 + m^2 + 2(e\mathcal{B} + \eta) \left(1 + \frac{e\mathcal{B}\theta}{4} \right) \left(n + \frac{1}{2} \right)}. \tag{7.5.13}$$

$\Psi_{n,\ell}(\rho, \varphi)$ est:

$$\Psi_{n,\ell}(\rho, \varphi) = \left(\frac{m^{(\theta)}\omega_0}{2\pi} \frac{n!}{(n + |\ell|)} \right)^{1/2} \left(\frac{m^{(\theta)}\omega_0}{2} \rho^2 \right)^{|\ell|/2} e^{\left(i\ell\varphi - \frac{m\omega_0}{4}\rho^2 \right)} L_n^\ell \left(\frac{m^{(\theta)}\omega_0}{2} \rho^2 \right), \tag{7.5.14}$$

où

$$\omega_0 = \frac{e}{m} \left(\mathcal{B} + \frac{\eta}{e} \right) \left(1 + \frac{e\mathcal{B}\theta}{4} \right), \tag{7.5.15}$$

et

$$u_n(p_z, \theta, \eta) = \frac{1}{2(m\mathcal{E}_n)^{1/2}} \begin{pmatrix} m + \mathcal{E}_n \\ m - \mathcal{E}_n \end{pmatrix}, v_n(p_z, \theta, \eta) = \frac{1}{2(m\mathcal{E}_n)^{1/2}} \begin{pmatrix} m - \mathcal{E}_n \\ m + \mathcal{E}_n \end{pmatrix}. \tag{7.5.16}$$

On peut remarquer que les résultats (7.5.12), (7.5.14), (7.5.13) et (7.5.16) ont un comportement similaire à la dynamique d'une particule dans un espace de phase commutatif et un champ magnétique constant qui a les grandeurs physiques suivantes: la masse $m^{(\theta)} = m\left(1+\frac{e\mathcal{B}\theta}{4}\right)^{-2}$, le champ magnétique constant $\mathcal{B}^{(\eta,\theta)} = \left(\mathcal{B}+\frac{\eta}{e}\right)\left(1+\frac{e\mathcal{B}\theta}{4}\right)^{-1}$ et la fréquence $\omega_0 = \frac{e}{m}\left(\mathcal{B}+\frac{\eta}{e}\right)\left(1+\frac{e\mathcal{B}\theta}{4}\right)$.

En conclusion, de ce chapitre, on notera les résultats obtenus dans cette étude, sont similaires aux particules sans spin soumises à l'action d'un champ magnétique constant dans l'espace commutatif [128]. Elles conduisent à $\theta = 0$ et $\eta = 0$, nous trouvons le résultat de l'affaire ordinaire dans l'espace commutatif.

8

Conclusion générale

Dans cette thèse, nous avons principalement étudié certains problèmes de la mécanique quantique relativiste, suivant les deux différents formalismes de déformation, par l'approche de Feynman.

Dans le deuxième chapitre, nous avons exposé les outils fondamentaux de la construction de la déformation formelle dans le cadre algébrique et leurs applications sur la mécanique classique et la mécanique quantique. Pour simplifier et éviter les difficultés de cette déformation, qui paraît très compliquée dans son cas général, nous nous sommes intéressés aux cas particuliers: les distances minimales et la géométrie non-commutative.

Dans le troisième chapitre, nous avons exposé le formalisme des intégrales de chemin appliqué à la mécanique quantique et statistique pour les systèmes quadratiques avec les deux approches mentionnées, et ce, en utilisant les formalismes standard de Feynman ou Kleinert.

Dans le quatrième et le cinquième chapitre, nous avons traité le cas de l'oscillateur de Dirac à une dimension et celui de la particule de Dirac ayant la masse variable. Pour le cas de l'oscillateur de Dirac, nous avons déterminé la fonction de Green via le modèle de Kempf, les fonctions des ondes et le spectre énergétique sont bien déduits en incluant une correction quantique supplémentaire dépendante du paramètre de déformation en s'appuyant sur la technique standard de Feynman. Pour le cas de la particule de Dirac de masse variable soumise à l'interaction d'un potentiel linéaire a été étudié également dans le même contexte du modèle de Kempf, par la méthode directe dans l'espace de configuration et par le formalisme des intégrales de chemin dans l'espace des moments. Nous notons que le décalage des niveaux d'énergie relativiste a été obtenu selon la méthode d'approximation stationnaire de la mécanique quantique ordinaire et comparé à celui obtenu par la fonction de Green via l'approche de Feynman. Les deux méthodes donnent un même résultat de la quantité des niveaux énergétiques au premier ordre des paramètres de déformation, comme les niveaux d'énergie d'une particule confinée dans un puits de potentiels et contrairement aux cas ordinaires qui dépend de n.

Dans le sixième chapitre et dans le cadre de géométrie non-commutative, nous avons reconstruit les fonctions de Green relative aux oscillateurs relativistes (Klein Gordon et Dirac) à deux dimensions, le calcul a été effectué et comparé aux cas ordinaires. Le cas de l'oscillateur de Klein-Gordon dans l'espace non-commutatif est équivalent au cas ordinaire en présence d'un champ magnétique constant. Alors pour le cas de l'oscillateur de Dirac dans l'espace non-commutatif est équivalent au cas de l'oscillateur de Dirac se mouvant dans un champ magnétique constant en présence d'un terme supplémentaire jouant le rôle d'un moment dipolaire.

Dans le septième chapitre, nous avons déterminé la fonction de Green pour la particule de F-V sans spin dans le cadre de la géométrie non-commutative et via le formalisme de Feynman. Pour diagonaliser l'Hamiltonien du système, la transformation de F-W a été appliquée par un calcul simple et direct nous obtenons les fonctions d'ondes et le spectre énergétique. Il est remarquable, que tous les résultats obtenus concordent exactement à ceux dans la littérature dans le cas où les paramètres de déformation sont nuls.

Les fonctions Spéciales

1. La fonction de Gamma $\Gamma(x)$

i) $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \qquad \mathrm{Re}(x) > 0.$

(A.1)

ii) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)\,;\ \Gamma(1) = 1;\ \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi};\quad \Gamma(n+1) = n!;\quad n =$ nombre entier non-négatif.

(A.2)

2. Polynômes de Laguerre $L_n^\alpha(x)$:

i) $L_n^\alpha(x) = \frac{x^{-\alpha}}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x} x^{n+\alpha}\right) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \Gamma(n+\alpha+1)}{k!(n-k)!\Gamma(k+\alpha+1)} x^k, \quad x \in [0, \infty[\,,\ \alpha > -1, n = 0, 1, 2, ...$

(A.3)

ii) $(1-t)^{-\alpha-1} e^{xt/t-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x)\, t^n.$

(A.4)

iii) $xL_n^\alpha(x)'' + (\alpha + 1 - x) L_n^\alpha(x)' + nL_n^\alpha(x) = 0.$

(A.5)

iv) $\frac{d}{dx} L_n^\alpha(x) = -L_{n-1}^{\alpha+1}(x)\,.$

(A.6)

v) $\times L_n^\alpha(x) = (2n + \alpha + 1) L_n^\alpha(x) - (n+\alpha) L_{n-1}^\alpha(x) - (n+1) L_{n+1}^\alpha(x) \quad (n \geqslant 1)\,.$

(A.7)

vi) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! \frac{L_n^\alpha(x) L_n^\alpha(y) t^n}{\Gamma(n+\alpha+1)} = \frac{(xyt)^{-\frac{1}{2}\alpha}}{1-t} \exp\left(-t\frac{x+y}{1-t}\right) I_\alpha\left(2\frac{\sqrt{xyt}}{1-t}\right) \qquad [|t| < 1]\,.$

(A.8)

vii) $\int_0^\infty e^{-x} x^\alpha L_n^\alpha(x)\, L_m^\alpha(x)\, dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \delta_{nm}.$

(A.9)

3. Polynômes de Gegenbauer $C_n^{\lambda}(x)$:

i) $C_n^{\lambda}(x) = \sum\limits_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k \Gamma(n-k+\lambda)}{k!(n-2k)!\Gamma(\lambda)} (2x)^{n-2k}, \quad x \in [-1,1], \lambda > -1/2, n = 0, 1, 2, ...$

(A.10)

ii) $(1-x^2) C_n^{\lambda}(x)'' - (2\lambda+1) x C_n^{\lambda}(x)' + n(n+2\lambda) C_n^{\lambda}(x) = 0.$

(A.11)

iii) $C_n^{\lambda}(x)' = 2\lambda C_{n-1}^{\lambda+1}(x).$

(A.12)

iv) $x C_n^{\lambda}(x) = \frac{2\lambda+n-1}{2(\lambda+n)} C_{n-1}^{\lambda}(x) + \frac{n+1}{2(\lambda+n)} C_{n+1}^{\lambda}(x) \quad (n \geqslant 1).$

(A.13)

v) $n C_n^{\lambda}(x) = 2\lambda x C_{n-1}^{\lambda+1}(x) - 2\lambda C_{n-2}^{\lambda+1}(x) \quad (n \geqslant 2).$

(A.14)

vi) $(n+2\lambda) C_n^{\lambda}(x) = 2\lambda x C_n^{\lambda+1}(x) - 2\lambda x C_{n-1}^{\lambda+1}(x) \quad (n \geqslant 1).$

(A.15)

vii) $n C_n^{\lambda}(x) = (n-1+2\lambda) x C_{n-1}^{\lambda}(x) - 2\lambda(1-x^2) C_{n-2}^{\lambda-1}(x) \quad (n \geqslant 2).$

(A.16)

viii) $\int_0^{\infty} (1-x^2)^{\lambda-1/2} C_n^{\lambda}(x) C_m^{\lambda}(x)\, dx = 2^{1-2\lambda} \pi \frac{\Gamma(n+2\lambda)}{(n+\lambda)[\Gamma(\lambda)]^2 n!} \delta_{nm}.$

(A.17)

Calcule du propagateur avec le potentiel de Pöschl-Teller

Suivant Feynman, le propagateur relatif à Eq.(3.2.55) s'écrit formellement

$$\mathcal{K}\left(k_b,k_a\right)=\int \mathcal{D}k\left(s\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_0^{\lambda_0}\mathcal{L}\left(k,\dot{k}\right)ds\right), \tag{B.1}$$

avec le lagrangien du système

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(k,\dot{k}\right) &= \frac{\dot{k}^2}{2m\omega^2}-\frac{\beta\hbar^2m\omega^2}{2}\lambda\left(\lambda-1\right)\tan^2\left(\sqrt{\beta}k\right) && \text{(B.2)}\\ &= \frac{\dot{k}^2}{2m\omega^2}-\frac{\beta\hbar^2m\omega^2}{2}\lambda\left(\lambda-1\right)\left[\sec^2\left(\sqrt{\beta}k\right)-1\right], && \text{(B.3)}\end{aligned}$$

et expicitement sous forme discrète

$$\mathcal{K}\left(k_b,k_a\right)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi i\hbar\varepsilon m\omega^2}}\prod_{n=1}^{N}\int\frac{dk_n}{\sqrt{2\pi i\hbar\varepsilon m\omega^2}}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\mathcal{S}\left(n,n-1\right)\right), \tag{B.4}$$

où l'action élémentaire $S\left(n,n-1\right)$ est donnée par

$$\mathcal{S}\left(n,n-1\right)=\frac{\left(\Delta k_n\right)^2}{2m\omega^2\varepsilon}-\frac{\beta\hbar^2m\omega^2}{2}\lambda\left(\lambda-1\right)\varepsilon\left[\sec\left(\sqrt{\beta}k_n\right)\sec\left(\sqrt{\beta}k_{n-1}\right)-1\right]. \tag{B.5}$$

Pour simplifier, nous faisons le changement de variable $\vartheta_n=\sqrt{\beta}k_n$. Les équations $(B.4)$ et $(B.5)$ se transforment en

$$\mathcal{K}\left(\vartheta_b,\vartheta_a\right)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi i\hbar\varepsilon m\omega^2}}\prod_{n=1}^{N}\int\frac{d\vartheta_n}{\sqrt{2\pi i\hbar\varepsilon m\omega^2\beta}}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\mathcal{S}\left(n,n-1\right)\right), \tag{B.6}$$

et

$$\mathcal{S}\left(n,n-1\right)=\frac{\left(\Delta\vartheta_n\right)^2}{2m\omega^2\beta\varepsilon}-\frac{\beta\hbar^2m\omega^2}{2}\lambda\left(\lambda-1\right)\varepsilon\left[\sec\left(\vartheta_n\right)\sec\left(\vartheta_{n-1}\right)-1\right]. \tag{B.7}$$

Afin d'exprimer l'action en fonction de $\cos\Delta\vartheta_n$, nous utilisons le développement limité de la fonction cosinus et retenons les termes d'ordre 4 en $\Delta\vartheta_n$:

$$\cos\Delta\vartheta_n=1-\frac{\left(\Delta\vartheta_n\right)^2}{2!}+\frac{\left(\Delta\vartheta_n\right)^4}{4!}, \tag{B.8}$$

d'où

$$\left(\Delta\vartheta_n\right)^2=2\left(1-\cos\Delta\vartheta_n+\frac{\left(\Delta\vartheta_n\right)^4}{4!}\right). \tag{B.9}$$

Donc, l'expression $(B.7)$ se réécrit

$$\mathcal{S}\left(n,n-1\right)=\frac{\left(1-\cos\Delta\vartheta_n\right)}{m\omega^2\beta\varepsilon}+\frac{\left(\Delta\vartheta_n\right)^4}{24m\omega^2\beta\varepsilon}-\frac{\beta\hbar^2m\omega^2}{2}\lambda\left(\lambda-1\right)\varepsilon\left[\sec\left(\vartheta_n\right)\sec\left(\vartheta_{n-1}\right)-1\right]. \tag{B.10}$$

A l'aide de la formule suivante:

$$\int_{-q}^{q} \exp\left[-\alpha y^2 + \beta y^4 + \beta' y^4 + O\left(y^6\right)\right] dy = \int_{-q}^{q} \exp\left[-\alpha y^2 + \beta y^4 + \frac{3}{4}\beta' \alpha^2 + O\left(\alpha^{-3}\right)\right] dy, \tag{B.11}$$

valable pour α grand et $q \to \infty$, nous pouvons remplacer le terme $(\Delta\vartheta_n)^4$ par son correspondant quantique

$$(\Delta\vartheta_n)^4 \sim -3\left(m\omega^2\beta\varepsilon\hbar\right)^2. \tag{B.12}$$

L'action élémentaire devient

$$\mathcal{S}(n,n-1) = \frac{(1-\cos\Delta\vartheta_n)}{m\omega^2\beta\varepsilon} - \frac{m\omega^2\beta\varepsilon\hbar^2}{8} - \frac{\beta\hbar^2 m\omega^2}{2}\lambda(\lambda-1)\varepsilon\left[\sec(\vartheta_n)\sec(\vartheta_{n-1})-1\right]. \tag{B.13}$$

En utilisant la propriété de la fonction de cosinus

$$\mathcal{S}(n,n-1) = \left(\frac{1}{m\omega^2\beta\varepsilon} - \varepsilon\frac{m\omega^2\beta\hbar^2}{8}\right) - \frac{\cos(\vartheta_n)\cos(\vartheta_{n-1})}{m\omega^2\beta\varepsilon}$$
$$-\left(\frac{\sin(\vartheta_n)\sin(\vartheta_{n-1})}{m\omega^2\beta\varepsilon}\right) - \frac{\beta\hbar^2 m\omega^2}{2}\lambda(\lambda-1)\varepsilon\left[\sec(\vartheta_n)\sec(\vartheta_{n-1})-1\right]. \tag{B.14}$$

Alors, nous aboutissons à l'exponentielle de l'action élémentaire

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}(n,n-1)\right) = \exp\left(\frac{i}{\beta\hbar m\omega^2\varepsilon} - i\varepsilon\frac{\beta\hbar m\omega^2}{8}\right)\exp\left(\frac{\sin(\vartheta_n)\sin(\vartheta_{n-1})}{i\beta\hbar m\omega^2\varepsilon}\right)$$
$$\times\exp\left[\frac{\cos(\vartheta_n)\cos(\vartheta_{n-1})}{i\beta\hbar m\omega^2\varepsilon} - i\frac{\beta\hbar m\omega^2}{2}\lambda(\lambda-1)\varepsilon\left[\sec(\vartheta_n)\sec(\vartheta_{n-1})-1\right]\right]. \tag{B.15}$$

Utilisons maitenant la formule asymptotique suivante [98]

$$I_{|\gamma|}(z) \underset{|z|\to\infty}{=} (2\pi z)^{-1/2}\exp\left[z - \frac{1}{2z}\left(\gamma^2 - \frac{1}{4}\right)\right], \qquad |\arg z| < \frac{\pi}{2}. \tag{B.16}$$

où $I_{|\gamma|}(z)$ sont les fonctions de Bessel modifiées, l'équation $(B.15)$ devient:

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}(n,n-1)\right) = e^{\left[\frac{i}{\beta\hbar m\omega^2\varepsilon} - i\varepsilon\frac{\beta\hbar m\omega^2}{8} + i\frac{\beta\hbar m\omega^2}{2}\lambda(\lambda-1)\varepsilon\right]}\exp\left(\frac{\sin(\vartheta_n)\sin(\vartheta_{n-1})}{i\beta\hbar m\omega^2\varepsilon}\right)$$
$$\times\left[2\pi\frac{\cos(\vartheta_n)\cos(\vartheta_{n-1})}{i\beta\hbar m\omega^2\varepsilon}\right]^{1/2} I_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{\cos(\vartheta_n)\cos(\vartheta_{n-1})}{i\beta\hbar m\omega^2\varepsilon}\right). \tag{B.17}$$

Substituons le résultat $(B.17)$ dans l'expression $(B.6)$ du propagateur, nous obtenons

$$\mathcal{K}(\vartheta_b,\vartheta_a) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\sqrt{i\hbar\varepsilon m\omega^2}}\prod_{n=1}^{N}\int\frac{d\vartheta_n}{\sqrt{i\beta\hbar m\omega^2\varepsilon}}\prod_{n=1}^{N+1} e^{\left[\frac{i}{\beta\hbar m\omega^2\varepsilon} - i\varepsilon\frac{\beta\hbar m\omega^2}{8} + i\frac{\beta\hbar m\omega^2}{2}\lambda(\lambda-1)\varepsilon\right]}$$
$$\times\exp\left(\frac{\sin(\vartheta_n)\sin(\vartheta_{n-1})}{i\beta\hbar m\omega^2\varepsilon}\right)\left[\frac{\cos(\vartheta_n)\cos(\vartheta_{n-1})}{i\beta\hbar m\omega^2\varepsilon}\right]^{1/2} I_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{\cos(\vartheta_n)\cos(\vartheta_{n-1})}{i\beta\hbar m\omega^2\varepsilon}\right). \tag{B.18}$$

A ce niveau, insérons la relation suivante [87]

$$\begin{aligned} & [\cos\alpha\cos\beta]^{1/2-\lambda} I_{\lambda-1/2}(z\cos\alpha\cos\beta)\exp(z\sin\alpha\sin\beta) \\ = & \frac{2^{2\lambda}[\Gamma(\lambda)]^2}{\sqrt{2\pi z}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda+n)(\Gamma(n+1))}{\Gamma(2\lambda+n)} I_{\lambda+n}(z) C_n^{\lambda}(\sin\alpha) C_n^{\lambda}(\sin\beta), \end{aligned} \tag{B.19}$$

où C_n^{λ} sont les polynômes de Gegenbauer, dans l'équation $(B.18)$, pour l'intégration par rapport à la variable ϑ_n, utilisons la relation d'orthogonalité des polynômes de Gegenbauer [87]

$$\int_{-1}^{1} C_n^{\lambda}(t) C_m^{\lambda}(t)\left(1-t^2\right)^{\lambda-1/2} dt = \frac{\pi 2^{1-2\lambda}\Gamma(2\lambda+n)}{n!(n+\lambda)[\Gamma(\lambda)]^2}\delta_{n,m}. \tag{B.20}$$

Ainsi, après avoir effectué toutes les intégrations sur les variables angulaires, nous aboutissons à l'expression du propagateur suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\vartheta_b,\vartheta_a) = & \sqrt{\beta}\lim_{N\to\infty} 2^{2\lambda}(2\pi)^{\frac{N-1}{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{i\hbar\varepsilon m\omega^2\beta}}\right]^{N+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda+n)n!}{\Gamma(2\lambda+n)[\Gamma(\lambda)]^{-2}} \\ & \left\{\prod_{n=1}^{N+1} e^{\left[\frac{i}{\beta\hbar m\omega^2\varepsilon}-i\varepsilon\frac{\beta\hbar m\omega^2}{8}+i\frac{\beta\hbar m\omega^2}{2}\lambda(\lambda-1)\varepsilon\right]} I_{\lambda+n}\left(\frac{1}{i\beta\hbar m\omega^2\varepsilon}\right)\right\}\cos^{\lambda}(\vartheta_b)\cos^{\lambda}(\vartheta_a) \\ & \times C_n^{\lambda}(\sin(\vartheta_b)) C_n^{\lambda}(\sin(\vartheta_b)). \end{aligned} \tag{B.21}$$

Finalement, en remplaçant $I_{\lambda+n}\left((i\beta\hbar m\omega^2\varepsilon)^{-1}\right)$ par la relation $(B.16)$, le propagateur peut être alors écrit sous la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(k_b,k_a) = & \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2\lambda-1}(\lambda+n)n!\sqrt{\beta}}{\pi\Gamma(2\lambda+n)[\Gamma(\lambda)]^{-2}}\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\frac{\beta\hbar^2 m\omega^2}{2}\left(n^2+2(n+1)\lambda\right)(t_b-t_a)\right] \\ & \cos^{\lambda}\left(\sqrt{\beta}k_b\right)\cos^{\lambda}\left(\sqrt{\beta}k_a\right) C_n^{\lambda}\left(\sin\left(\sqrt{\beta}k_b\right)\right) C_n^{\lambda}\left(\sin\left(\sqrt{\beta}k_b\right)\right). \end{aligned} \tag{B.22}$$

Certaines définitions fondamentales de l'algèbre de Grassmann

Soit $\xi_1, ..., \xi_n$ sont n générateurs d'une algèbre de Grassmann G_n, qui vérifient les relations d'anti-commutations suivantes:

$$\xi_j \xi_k + \xi_k \xi_j = 0; \quad \text{pour tout} \quad j, k = 1, ..., n, \tag{C.1}$$

et n est la dimension de l'algèbre et en particulier le carré de chaque variable de Grassman est égal zéro; $\xi_k^2 = 0$. tout les éléments de $g \in G_n$ peuvent être représentés comme un ensemble fini des monômes homogènes

$$g(\xi) = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{k} g_\nu^{k_1 \ldots k_\nu} \xi_{k_1} \ldots \xi_{k_\nu}, \tag{C.2}$$

où $g_\nu^{(k)}$ sont des nombres (réels ou complexes) et il est supposé qu'ils sont anti-symétrique dans les indices $\{k\}$. L'ensemble des éléments, pour lesquels seuls les termes avec ν paire sont présents dans la somme (les éléments pairs) est un sous-algèbre $G_n^{(+)}$. L'ensemble des éléments impairs, définis d'une façon analogue, $G_n^{(-)}$, ne sont pas une sous-algèbre. Les éléments pairs commutent avec tous les éléments de G_n; éléments impairs commutent avec les éléments pairs et anticommute avec les éléments impairs

L'évolution (une analogie de conjugaison complexe). Définie une par une les étapes de l'algèbre sur elle même; $g \leftrightarrow g^*$, satifaisante les conditions suivantes:

$$(g^*)^* = g. \tag{C.3}$$

$$(g_1 g_2)^* = g_2^* g_1^*. \tag{C.4}$$

$$(\alpha g)^* = \alpha^* g^*, \tag{C.5}$$

où α est un nombre complexe. Un élément g est réel si $g^* = g$. L'algèbre G_n est réelle si tous ses éléments sont réels, en particulier, $\xi_k^* = \xi_k$.

Les dérivés. Les opérateurs linéaires suivants sont introduits dans G_n :

$$\frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_l} \xi_{k_1} \ldots \xi_{k_\nu} = \delta_{k_1 l} \xi_{k_2} \ldots \xi_{k_\nu} - \delta_{k_2 l} \xi_{k_1} \ldots \xi_{k_\nu} + \ldots + (-)^\nu \delta_{k_\nu l} \xi_{k_1} \ldots \xi_{k_{\nu-1}}, \tag{C.6}$$

$$\xi_{k_1} \ldots \xi_{k_\nu} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_l} = \delta_{k_\nu l} \xi_{k_1} \ldots \xi_{k_{\nu-1}} - \ldots + (-)^\nu \delta_{k_1 l} \xi_{k_2} \ldots \xi_{k_\nu}. \tag{C.7}$$

Leur action sur tout $g \in G_n$ est déterminée au moyen de Eq.$(C.2)$. Les opérateurs $\left(\vec{\partial}/\partial \xi_l\right)$ et $\left(\overleftarrow{\partial}/\partial \xi_l\right)$ sont appelés le dérivé gauche et dérivé droit. Simplement, pour trouver le dérivé à gauche $\vec{\partial}/\partial \xi_l$ d'un monôme il faut permuter ξ_l à la première place et puis l'annuler; et vice versa pour le dérivé à droite. Si ξ_l est absent, le dérivé de la monôme s'annule. Il est facile de voir que

$$\frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_j}\left(\frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_k} g\right) = -\frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_k}\left(\frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_j} g\right) \tag{C.8}$$

$$\frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_j}\left(g \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_k}\right) = \left(\frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_j} g\right) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_k}. \tag{C.9}$$

les intégrales axées sur les variables de grassmenn dans l'expression suivante:

$$\int 1 d\xi_l = 0, \qquad \int \xi_l d\xi_l = 1. \tag{C.10}$$

L'intégrale multiple est définie au moyen d'itération des intégrales seules. De toute évidence,

$$\int \xi_{k_1} ... \xi_{k_\nu} d\xi_{k_\nu} ... \xi_{k_1} = \epsilon_{k_1 ... k_\nu}, \tag{C.11}$$

$$\int g\left(\xi\right) d\xi_n ... d\xi_1 = \epsilon_{k_1 ... k_n} g_n^{\epsilon_{k_1 ... k_n}}, \tag{C.12}$$

Où $\epsilon_{\{k\}}$ est le tenseur Levi-Civita . L'intégrale Gaussienne est importante pour les applications physiques, et elle peut être démontrée comme suite:

$$\int \exp\left(\sum_{ij} a_{ij} \xi_i \xi_j\right) d\xi_n ... \xi_1 = \left(\det \|2a_{jk}\|\right)^{1/2}, \quad a_{jk} = -a_{kj}. \tag{C.13}$$

Notez que la racine carrée du déterminant d'une matrice anti-symétrique est un polynôme de ses éléments.

Calculer l'expectation Δz_{n1}

La fonction $\xi^{\beta=0}(z)$ qui est définie dans l'équation (5.2.18), satisfait les conditions d'orthogonalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi_m^{\beta=0}(z)\,\xi_n^{\beta=0}(z)\,dz = \delta_{mn}, \tag{D.1}$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi_m^{\beta=0}(z)\,z\xi_n^{\beta=0}(z)\,dz = \begin{cases} \sqrt{\frac{n+1}{2}} & m = n+1 \\ \sqrt{\frac{n}{2}} & m = n-1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}, \tag{D.2}$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi_m^{\beta=0}(z)\,z^2\xi_n^{\beta=0}(z)\,dz = \begin{cases} \frac{\sqrt{n(n-1)}}{2}, & m = n-2 \\ \frac{2n+1}{2}, & m = n \\ \frac{\sqrt{(n+1)(n+2)}}{2}, & m = n+2 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}, \tag{D.3}$$

Et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi_n^{\beta=0}(z)\,z^r\xi_m^{\beta=0}(z)\,dz = \begin{cases} 0 & \text{si } r-m-n \text{ est impair} \\ \frac{r!}{2^r}\sqrt{\frac{2^{m+n}}{m!n!}} \sum\limits_{p=\max(0,-s)}^{\min(m,n)} \binom{n}{p}\binom{m}{p}\frac{p!}{2^p(s+p)!} & \text{autrement} \end{cases}, \tag{D.4}$$

où $s = (r-n-m)/2$ et $\binom{n}{p}$ est un coefficient binomial.

De ce qui précède, nous pouvons calculer l'expectation Δz_{n1} de l'ordre β. Nous avons en Eq.(5.2.21),

$$\Delta z_{n1} = \frac{\left\langle \xi^{\beta=0}(z)\left|H^{pert}\right|\xi^{\beta=0}(z)\right\rangle}{\left\langle \xi^{\beta=0}(z)\,|\xi^{\beta=0}(z)\right\rangle}. \tag{D.5}$$

Avec le $H^{pert} = \beta\alpha\left[-\frac{2}{3}\partial_z^4 + \varepsilon\partial_z^2\right]$, nous utilisons l'équivalence de l'équation oscillateur harmonique à une dimension (à savoir, $\partial_z^2\xi_n^{\beta=0}(z) = (z^2 - z_1)\,\xi_n^{\beta=0}(z)$) et avec l'aide des Eqs. (D.1), (D.2), (D.3) et (D.4), nous pouvons obtenir ce résultat

$$\begin{aligned} \Delta z_{n1} &= \frac{\beta\alpha \int \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) H_n(z)\left[-\frac{2}{3}\partial_z^4 + \varepsilon\partial_z^2\right] \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) H_n(z)\,dz}{\int \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) H_n(z) \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) H_n(z)\,dz} \\ &= -\frac{\beta\alpha}{2}\left(n^2\right). \end{aligned} \tag{D.6}$$

Bibliographie

[1] A. Kempf, J. Math. Phys. 35, (1994) 4483.

[2] A. Kempf, G. Mangano and R. B. Mann, Phys. Rev. D 52, (1995) 1108.

[3] H. Hinrichsen and A. Kempf, J. Math. Phys. 37, (1996) 2121.

[4] A. Kempf, J. Phys. A: Math. Gen. 30, (1997) 2093.

[5] A. Kempf and G. Mangano, Phys. Rev. D 55, (1997) 7909.

[6] R. Brout, C. Gabriel, M. Lubo and P. Spindel, Phys. Rev. D 59, (1999) 044005.

[7] L. J. Garay, Int. J. Mod. Phys. A 10, (1995) 145.

[8] M. T. Jaekel and S. Reynaud, Phys. Lett. A 185, (1994) 143.

[9] C. A. Mead, Phys. Rev. 135, (1964) 849.

[10] D J. Gross and P F Mende, Nucl. Phys. B 303, (1988) 407.

[11] K. Konishi, G. Paffuti and P. Provero, Phys. Lett. B 234 (1990) 276.

[12] D. Amati, M. Cialfaloni and G. Veneziano, Phys. Lett. B 216 (1989) 41.

[13] C. Rovelli, Living Rev. Rel. 1 1 (1998).

[14] T. Thiemann, Lect. Notes Phys. 631, (2003) 41.

[15] A. Perez, Class. Quantum Grav. 20 (2003) 43.

[16] M R. Douglas and N A. Nekrasov, Rev. Mod. Phys. 73, (2001) 977.

[17] F. Girelli, E R. Livine and D. Oriti, Nucl. Phys. B 708, (2005) 411.

[18] T. Padmanabhan, T R. Seshadri and T P. Singh, Int. J. Mod. Phys. A 1, (1986) 491.

[19] F. Scardigli, Phys. Lett. B 452, (1999) 39.

[20] L. Susskind and E. Witten; The Holographic Bound in Anti-de Sitter Space, (1998) arXiv:hep-th/9805114.

[21] L.N. Chang, D. Minic, N. Okamura, T. Takeuchi, Phys. Rev. D 65 (2002) 125027.

[22] A.W. Pet, J. Polchinski, Phys. Rev. D 59 (1999) 065011.

[23] F. Brau, J. Phys. A 32 (1999) 7691.

[24] R. Akhoury, Y.-P. Yao, Phys. Lett. B 572 (2003) 37.

[25] K.Nozari and T. Azizi, Gen. Rel. Grav. 38, (2006) 735.

[26] M. Merad and M. Falek, Phys. Scr. 79, (2009) 015010.

[27] K. Nouicer, J. Phys. A: Math. Gen. 39, (2006) 5125.

[28] K. Nozari and M. Karami, Mod. Phys. Lett. A 20, (2005) 3095.

[29] C. Quesne and V. M. Tkachuk, J. Phys. A 38, (2005) 1747.

[30] M. Falek, M. Merad, J. Math. Phys. 50, (2009) 023508.

[31] M. Falek and M. Merad, J. Math. Phys. 51, (2010) 033516.

[32] H. S. Snyder, Phys. Rev. 71 (1947) 38.

[33] K. Li and J. Wang, Eur. Phys. J. C 50, (2007) 1007.

[34] M. Rosenbaum, J. David Vergara and L. Roman Juarez, Phys. Letts. A 367, (2007) 1.

[35] Jian Jing, Shi-Hua Zhao, Jian-Feng Chen and Zheng-Wen Long. Eur. Phys. J. C 54, (2008) 685.

[36] M. Falek and M. Merad, Commun. Theor. Phys. 50, (2008) 587.

[37] Agnieszka Kijanka and Piotr Kosiński . Phys. Rev. D 70, (2004) 127702.

[38] M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari, and A. Tureanu. Phys. Rev. Lett. 86, 2716 (2001).

[39] J. Gamboa, M. Loewe and J. C. Rojas. Noncommutative quantum mechanics, Phys. Rev. D 64, (2001) 067901.]

[40] S. Bellucci, A. Nersessian and C. Sochichiu, Phys. Lett. B 522, (2001) 345.

[41] K. Nouicer, Phys. Letts A 354, (2006) 399.

[42] K. Nouicer, J. Math. Phys. 48, (2007) 112104.

[43] M. Merad, F. Zeroual, and H. Benzair, EJTP 7, NO. 23, (2010) 41.

[44] D.M. Gitman and V.G. Kupriyanov, Eur. Phys. J. C 54, (2008) 325.

[45] A. Jahan. Brazilian Journal of Physics. 37, (2007) 4; I. Jabbari, A. Jahan, and Z. Riazi, Turk J Phys. 33, (2009) 149.

[46] C. Acatrinei, JHEP 0109, (2001) 007.

[47] A. Smailagic, E. Spalucci, Feynman Path integral on the noncommutative plane, J. Phys. A 36, (2003) 467.

[48] Sunandan Gangopadhyay and Frederik G. Scholtz, Phys. Rev. Lett 102, (2009) 241602.

[49] François Bayen, Moshé Flato, Christian Fronsdal, André Lichnerowicz, et Daniel Sternheimer. Deformation theory and quantization. I. Deformations of symplectic structures. Ann Physics, 111 (1) (1978) 61.

[50] G. Hochschild, On the cohomology groups of an associative algebra, Ann. of Math. (2) 46, (1945), 58–67.

[51] Masoud Khalkhali, Basic Noncommutative Geometry. European Mathematical Society (2009).

[52] S. D. Poisson, Sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de mécanique. Mémoire lu le 16 octobre 1809 à l'Institut de France.

[53] C. G. Jacobi, Vorlesungen uber Dynamik. Verlag G. Reimer, Berlin, (1884).

[54] A. Lichnerowicz, Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées, J. Differential geometry 12, (1977) 253.

[55] A. Kirillov, Local Lie algebras, Russian Math Surveys 31, (1976) 55.

[56] A.Weinstein, The local structure of Poisson manifolds, J. Diff. Geom 18, (1983) 523.

[57] M. Kuranishi, On deformations of compact complex structures, Proc. International Congress Math. (Stockholm 1962), Inst. Mittag-Leffler, Djarsholm (1963) 357.

[58] M. Artin, "On the solutions of analytic equations," Inventiones Mathematicae, vol. 5, (1968) 277.

[59] M. Schlessinger, "Functors of Artin rings," Transactions of the American Mathematical Society, 130, (1968) 208.

[60] A. Nijenhuis and R.W. Richardson Jr., "Cohomology and deformations in graded Lie algebras," Bulletin of the American Mathematical Society, 72, (1966) 1.

[61] M. Gerstenhaber, "On the deformation of rings and algebras," Annals of Mathematics, 79 (1964) 59.

[62] E. Inonu and E. P.Wigner, "On the contraction of groups and their representations," Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 39, (1953) 510.

[63] M.Bordemann. A. Makhlouf. T.Petit. Déformation par quantification et rigidité des algèbres enveloppantes, Journal of Algebra, 285, (2005) 623.

[64] A. Makhlouf. Comparison of deformations and geometric study of varieties of associative algebras, International Journal of Mathematics and Mathematical Science (2007).

[65] M. Bordemann, African Journal Of Mathematical Physics 2, (2005) 21.

[66] G. Veneziano, Europhys. Lett. 2, (1986) 199; M. Maggiore, Phys. Lett. B 304, (1993) 63.

[67] H. Weyl. Quanten mechanik und Gruppen theorie. Z. Physik, 46, (1927) 1.

[68] F. Bopp and Werner Heisenberg und die Physik unserer Zeit (Vieweg, Braunschweig), 128 (1961).

[69] L. Mezincescu. Star product in quantum mechanics (2000). arXiv: hep-th/0007046.

[70] J. Gamboa, M. Loewe, F. Mendez, J. C. Rojas, Int. J. Mod. Phys. A17, (1999) 2555, hep-th/0106125.

[71] R.H. Cameron and W.T. Martin, Evaluation of various Wiener integrals by use of certain Sturm-Liouville differential equations, Bull. An. Math. Soc. S1 N°2, (1945) 73; R.H. Cameron and W.T. Martin, Transformations of Wiener integrals under a general class of linear transformations, Trans. An. Math. Soc. 58, (1945) 184; R.H. Cameron and W.T. Martin, Transformations of Wiener integrals under translations, Ann. of. Math. 45, (1944) 386.

[72] R.P. Feynman, Rev. Mod. Phys. 20 (1948) 367; R.P. Feynman, Phys. Rev. 80 (1950) 440; R.P. Feynman, Phys. Rev. 84 (1951) 108.

[73] E.S. Fradkin, D.M. Gitman, Phys. Rev. D 44, (1991) 3230.

[74] A. Lecheheb, M. Merad, T. Boudjedaa, Annals of Physics, 322, (2007) 1233.

[75] T. Boudjedaa, L. Chetouani and M. Merad, Chinese Journal of Physics 38, (2000).

[76] M. Merad, T. Boudjedaa and L. Chetouani, Journal of the Korean Physical Society, 38, No. (2001) 69.

[77] D. M. Gitman, A. V. Saa, Mod. Phys. Lett. A 8, (1993) 463; D .M . Gitman and A. V . Saa, Class. Quantum 10, (1993) 1447; D. M. Gitman and Sh. M. Shvartsman, Phys. lett. B 318, (1993) 122; Errata, Phys. Lett. B 331, (1994) 449.

[78] D. M. Gitman, S. I. Zlatev, W. D. Cruz, Brazil. J. Phys. 26, (1996) 419; D. M. Gitman, S. I. Zlatev, Phys. Rev.D 55, (1997) 7701.

[79] S. Zeggari, T. Boudjedaa, L. Chetouani, Czech. J. Phys. 51, (2001) 185; S. Zeggari, T. Boudjedaa, L. Chetouani, Phys. Scripta. 64, (2001) 285.

[80] N. Boudiaf, T. Boudjedaa, L. Chetouani, Eur. Phys. J. 20, (2001) 585; N. Boudiaf, T. Boudjedaa, L. Chetouani, Eur. Phys. J. 22, (2001) 593.

[81] T. Boudjedaa, L. Chetouani, J. Phys. A 35, (2002) 1651.

[82] A. Barducci and R. Giachetti, J. Phys. A: Math. Theor. 41, (2008) 215301.

[83] A. Barducci, R. Giachettia and G. Pettini, Eur. Phys. J. C. 70, (2010) 445.

[84] R. Rekioua, T. Boudjedaa. Eur. Phys. J. C 49, (2007) 1091.

[85] D. C. Khandekar, S. V. Lawande, Phys. Rep 137, (1986) 115.

[86] H. Kleinert, Path Integral in quantum mechanics, statistics and polymer physics,World Scientific, Singapore (1990).

[87] I. S. Gradshtein and I. M. Ryzhik, Tables of Integrals, Series and Products Academic, New York, 1965.

[88] E.S. Fradkin, Nucl. Phys. 76, (1966) 588.

[89] F.A. Berezin, M.S. Marinov, JETP Lett. 21, (1975) 320; F.A. Berezin, M.S. Marinov, Ann. Phys. 104, (1977) 336.

[90] C. Alexandrou, R. Rosenfelder, A. W. Shreiber, Phys. Rev. A 59, (1998) 3.

[91] D. Amati, M. Ciafaloni, and G. Veneziano, Phys. Lett. B 197, (1987) 81; K. Konishi, G. Pauti, and P. Provero, Phys. Lett. B 234, 276 (1990); M. Kato, Phys. Lett. B 245, 43 (1990); R. Guida, K. Konishi, and P. Provero, Mod. Phys. Lett. A 6, (1991) 1487.

[92] DJ. Gross, PF Mende. Nucl. Phys. B 303, (1988) 407.

[93] S. Capozziello, G. Lambiase, G. Scarpetta, Int. J. Theor. Phys. 39, (2000) 15.

[94] H. Benzair, T. Boudjedaa and M. Merad, J. Math. Phys. 53, 123516 (2012).

[95] M. Moshinsky, A. Szczepaniak, J. Phys. A 22, L817 (1989).

[96] J. Schwinger, Phys. Rev. 82, (1951) 664.

[97] L.S. Schulman, Techniques and Applications of Path Integration (Wiley, New York, 1981)

[98] C. Grosche, F. Steiner, Handbook of Feynman Path Integrals, Springer Tracts in Modern Physics, vol. 145 (Springer, Berlin, Heidelberg, 1998).

[99] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, Table of Integrals Series and Products, Academic Press, New York, 2000.

[100] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn, and V. F. Weisskopf , Phys. Rev. D 9, 3471 (1974).

[101] R. K. Su and Y. H. Zhang, J. Phys. A: Math. Gen. 17 (1984) 851.

[102] F. Dominguez-Adame and M. A. Conzalez, Euro.lett, 13 (1990) 193.

[103] G. F. Wei and S.-H. Dong, Phys Lett. A, 373 (2009) 2428; EPL 87 (2009) 40004; Euro. Phys. J. A 43 (2010) 185; Euro. Jour.Phys, A 46 (2010) 207.

[104] X. Zou, L.-Z. Yi and C.-S. Jia, Phys. Lett A, 346 (2005) 54.

[105] W. A. Yahya, K. J. Oyewumi, C. O. Akoshile, and T. T. Ibrahim, JVR. 5 (2010) 27.

[106] X. C. Zhang, Q. W. Liu, C. S. Jia, and L. Z. Wang, Phys. Lett A, 340 (2005) 59.

[107] G. F. Wei and S.-H. Dong, Phys Lett. A, 373 (2008) 49; G. F. Wei and S.-H. Dong, Phys. Lett. B 686 (2010) 288.

[108] C.-Y. Chen, Phys. Lett A, 339 (2005) 283.

[109] S.-H Dong, Z.-Q Ma, Phys Lett. A 312, (2003) 78; S.-H Dong, G.-H Sun, and D. Popov, J. Math. Phys. 44 (2003) 4467; S.-H Dong, M. Lozada-Cassou, Phys. Lett. A 330 (2004) 168; S.-H Dong, G.-H Sun and M. Lozada-Cassou, Inter. Jour. Quan. Chem, 102 (2005) 147.

[110] H. Benzair, M. Merad and T. Boudjedaa, submitted in the review: Chin. Phys. B.

[111] S. Hossenfelder, M. Bleicher, S.Hofmann, J.Rappert, S. Scherer and H. Stocker phys. lett B 575 (2003) 85.

[112] R. W. Robinett, Am. J. Phys. 64 (1996) 805.

[113] A. del Campo and J. G. Muga, J. Phys. A: Math. Gen. 39 (2006) 5897.

[114] H.C. Pauli, arXiv:hep-ph/0312299v1.

[115] M. Dubois Violette, R. Kerner, J. Madore, J. Math. Phys. 31, (1990) 323; A. Connes, Noncommutative Geometry, New York, London, 1994.

[116] H. Figueroa, J. M. Gracia-Bondia, F. Lizzi, J. C. Varilly and J. Geom. Phys. 26, (1998) 329.

[117] E. Witten Nucl. Phys. B 460, (1996) 33; A. Connes, M. R. Douglas and A. Schwarz, JHEP 9802 (1998), 003; N. Seiberg and E. Witten, JHEP 09, (1999) 1126.

[118] H. Benzair, M. Merad, T. Boudjedaa, and A. Makhlouf, Zeitschrift für Naturforschung A. 67a, (2012) 11013.

[119] B. Mirza and M. Mohadesi. Theor. Phys. 42, (2004) 664.

[120] T. Curtright, D. Fairlie and C. Zachos, Phys. Rev. D 58, (1998) 025002.

[121] G. Magro (2003) arXiv:quant-ph/0302001v1.

[122] V. M. Villalba and Rincon Maggiolo, Eur. Phys. J. B 22, (2001) 31.

[123] Victor. M. Villalba, Rev. A 49, (1994) 586.

[124] H.Feshbach.and F.Villars.,Rev, Mod.Phys, 30, (1958) 24.

[125] J.D. Bjorken and S.D. Relativistic Quantum Mechanics.(New York,1964) .

[126] E. Durand "Mecanique Quantique; tome II: Spin et Relativité" Ed. Masson (1976).

[127] H. Benzair, M. Merad and T. Boudjedaa, submitted in the review: Annals Physics.

[128] M.Merad, T.Boudjdaa and L. Chetouani, Journal of the Korean Physical Society, Vol. 38, (2001) 69.

Annexe

EJTP **7, No. 23** (2010) 41–56 *Electronic Journal of Theoretical Physics*

Spinless Relativistic Particle in the Presence of A Minimal Length

M. Merad*, F. Zeroual, and H. Benzair

Département de Physique, Université de Oum-El-Bouaghi, 04000 Oum-El-Bouaghi, Algeria

Received 5 March 2010, Accepted 15 March 2010, Published 20 March 2010

Abstract: In this paper, we propose to study the (1+1)-dimensional Klein-Gordon equation in the presence of a minimal length by two approaches: a method direct in the position space representation and a path integral formalism in energy-momentum space, where a particle is subjected to a mixing of linear vector plus scalar potentials. For a first method, a suitable approximation technique of a non-relativistic quantum mechanics has been applied and the shifts of the relativistic energy levels is determined. For a second method, the Green function is obtained, the energy spectrum together with the normalized wave functions of the bound states are deduced and the limiting case is considered. The results of both methods are compared and we find the same dominant quantities to order 1 on parameter of deformation.

Keywords: Relativistic Wave Equations;Klein-Gordon Equation; Minimal Length
PACS (2008): 03.65.Pm; 03.65.Ca; 03.65.Db; 03.65.Ge

1. Introduction

The study of the relativistic particle under the action of vector plus scalar potentials raised considerable interest in various domains of physics in order to guarantee the existence of bound states, such as the confining problem in the bag model[1] and hadrons models etc... In addition, it can be considered as an effective mass term in solid state physics for describe impurities in crystals[2], in quantum well and quantum dots. However, to its practical application, the quantum study of this problem requires some precautions relative to the order of operator [3][4].

For this purpose, within the framework, the relativistic Klein Gordon (K-G) equation has been developed and applied to several mixing of vector and scalar potentials,

* meradm@gmail.com

for example, the K-G equation is exactly solved, with vector and scalar Hulthen-type potential[5][6], with Coulomb like scalar-plus-vector potentials[7], with vector and scalar exponential type potentials[8], with scalar and vector Rosen-Morse-type potential[9], with the generalized Hulthen potential [10], with linear and exponential potentials [11], some classes of exactly-solvable KG equations are discussed by[12] and the non Hermitian scalar and vector potentials cases in[13].

However, we note that these problems are treated under the usual quantum mechanics, where the position and momentum operators acting on the Hilbert space of states verify the standard Heisenberg algebra. In contrast, if we take into account the effects of quantum fluctuations of the gravitational field in order to incorporate into quantum mechanics, a significant consequence deduced from this unification is the existence of a minimal observable distance on the order of the Planck length[14][15]. This minimal length uncertainty is related to a modification of the Heisenberg algebra by adding small corrections to the canonical commutation relations.

Motivations for the occurrence of a minimal length are multiple, in a string theory [16][17], in a quantum gravity[18], in a Non-commutative geometry[19] and in a black hole physics[20], which yielded correction terms to the uncertainty relations and imply a finite minimal uncertainty in position measurements, e.g. at the Planck scale. In consequence, a study in detail of this minimal length through several areas of modern physics has been exposed, it connects to large extra dimensions, to the running coupling constant, to the physics of black holes production and its acts as a natural regulator for infinities in quantum field theories[21]. In addition, it is remarkable that the presence of the minimal length causes the presence of the UV/IR mode mixing[17] phenomenon connecting the UV and IR scales, which is one of the new features of in non-commutative gauge theories[22] and implies the modification of the dispersion relation.

Recently, various topics were studied in connection with this formalism and a good number of articles were published. Among them let us quote: for example, the Schrodinger equation was exactly solved with the harmonic oscillator[23], the Coulomb potential[24], a one-dimensional box[15], the time-dependent linear potential[25] etc. The relativistic extension of this problem is also of interests within this framework, we found the case of the generalized Dirac equation which was recently considered in[26], the Dirac oscillator in[27], the Bosonic oscillator case of (spin 0 and 1) in one dimension[28] and the $(1+1)$-dimensional Dirac equation with linear potential[29] etc...

In this analysis, we are interested to study the $(1+1)$-dimensional K-G equation in the presence of a minimal length by two approaches, where a particle is subjected to a mixing of linear vector plus scalar potentials. In the first stage, we consider a modified K-G equation with the new form of momentum operator includes higher derivatives in the position space representation. We obtain a differential equation of fourth order, which its analytic solution is complicated in the presence of external fields .In a suitable approximation technique of a non-relativistic quantum mechanics, we find the shifts of the relativistic energy levels, the dominant quantities to order 1 on a parameter of deformation. In the second stage, we introduced Feynman's path-integral formalism in momentum space, which is an alternative formulation of quantum mechanics. The exact form of the Green function is determined, the energy spectrum together with the normalized wave functions of the bound states are deduced and coincide exactly with those of literature[30]. In addition, the limiting cases are also deduced for a small parameter of deformation and compared with the first method from perturbation theory. Although the two methods give the same results shift of the energy levels for a small parameter of deformation. The Feynman one remains more attractive because of its intuitive way of interpreting the basic equations of ordinary quantum mechanics using classical trajectories.

This paper is organized as follows: in section 2, we give a review of minimal length relations. In section 3, we treat the (1+1)-dimensional K-G equation relative to particles under the action of linear vector plus scalar potentials, in the position space representation and in the modified Heisenberg uncertainty relation. In section 4, by following the Feynman approach, we construct the path integral in energy-momentum space representation of the same problem in question. Some concluding remarks are given in the last section.

2. Brief Review of A Minimal Length Relation

The deformed Heisenberg algebra is defined by the following commutation relation with natural units in which $\hbar = 1$[23],

$$[X, P] = i\left(1 + \beta P^2\right), \tag{1}$$

where X, P are position and momentum in one dimension and $\beta \geq 0$ is a parameter of deformation.

This commutation relation (1) implements the minimal length,

$$\Delta X \Delta P \geq \frac{1}{2}\left[1 + \beta\left(\Delta P\right)^2\right], \tag{2}$$

which appears in perturbative string theory and in line with the proposed UV/IR mixing [17]. The relation (2) implies the appearance of a nonzero minimal length in positions $\Delta X_{\min} = \sqrt{\beta}$.

Since, from (1), the X and P are realized in momentum space by[23]

$$\begin{aligned} X &= i\left[\left(1 + \beta P^2\right)\partial_P + \gamma P\right] \\ P &= P, \end{aligned} \tag{3}$$

and in the position space acts as[15][31]

$$\begin{aligned} X &= X, \\ P &= -i\partial_x\left(1 - \frac{\beta}{3}\partial_x^2\right). \end{aligned} \tag{4}$$

The deformed completeness relation and the scalar product of P and P_0 in the relativistic case are given by,

$$\int \frac{dP}{(1+\beta P^2)^{1-\alpha}} \left|P\right\rangle \left\langle P\right| = 1$$
$$\int dP_0 \left|P_0\right\rangle \left\langle P_0\right| = 1, \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\left\langle P_j\right| P_{j-1}\rangle &= \left(1+\beta P_j^2\right)^{-\frac{\alpha}{2}} \left(1+\beta P_{j-1}^2\right)^{-\frac{\alpha}{2}} \delta\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} arctg\sqrt{\beta}P_j - \frac{1}{\sqrt{\beta}} arctg\sqrt{\beta}P_{j-1}\right)\\ &= \left(1+\beta P_j^2\right)^{\frac{1-\alpha}{2}} \left(1+\beta P_{j-1}^2\right)^{\frac{1-\alpha}{2}} \delta\left(P_j - P_{j-1}\right) \end{aligned}\tag{6}$$

$$\left\langle P_{0j}\right| P_{0j-1}\rangle = \delta\left(P_{0j} - P_{0j-1}\right), \tag{7}$$

where it was assumed that the deformation does not affect on the time component P_0.

3. Resolution of the Klein-Gordon Equation in the Position Space Representation

The K-G equation under the action of vector plus scalar potentials in $(1+1)$ dimension is given by

$$\left[(P_\mu - eA_\mu)(P^\mu - eA^\mu) - (S+M)^2\right]\Psi(x,t) = 0, \tag{8}$$

where $eA_\mu = (V(x), 0)$ is the Lorentz vector and $S(x)$ denotes the Lorentz scalar potential with the Minkowski tensor is $g_{\mu\nu} = diag(1,-1)$.

As the potential are independent from the time, we have then to find the stationary states of this equation. Accordingly, let us choose for $\Psi(x,t)$ the following form $\exp(-iEt)\,\Phi(x)$ and then get the following eigenvalue equation

$$\left[P^2 + (E - V(x))^2 - (M + S(x))^2\right]\Phi(x) = 0. \tag{9}$$

In order to treat the problem in question (1+1)-dimensional K-G equation in the context of minimal lengths in the position space representation, we replace P by (4) and we propose that the effects of quantum fluctuations of the gravitational field is at order 1 in β. Than, the following modified K-G equation can be written as,

$$\left[-\frac{2}{3}\beta\partial_x^4 + \partial_x^2 + (E - V(x))^2 - (M + S(x))^2\right]\Phi(x) = 0, \tag{10}$$

which is a differential equation of fourth order whose solution is very complicated in the presence of potentials.

Now, we are proposed that the system subjected to the action of linear vector plus scalar potentials,

$$V(x) = V_0 x \quad (11)$$
$$S(x) = S_0 x,$$

with S_0 and V_0 being arbitrary constants.

We note that this linear potential is interesting, it envisaged as a quark-confining potential and it describes motion in an uniform gravitational or electrical field[32][33], in Matter-wave diffraction in time[34] and in a light cone QCD inspired model[35].

By replacing $V(x)$ and $S(x)$, the modified Klein-Gordon equation (10) becomes,

$$\left[-\frac{2}{3}\beta\partial_x^4 + \partial_x^2 - \left(S_0^2 - V_0^2\right)x^2 - 2\left(MS_0 + EV_0\right)x + \left(E^2 - M^2\right)\right]\Phi\left(x\right) = 0. \quad (12)$$

Before applying the approximation method for this equation(12) to determine the energy correction, it is preferable to study the particular case $V\left(x\right) = 0$ and $S\left(x\right) = 0$, it's just for how the physical results are manifested in presence of minimal length, by a direct calculation, it is easy to obtain the following solution

$$\Phi\left(x\right)_{1,2} = C_{\pm}^{\pm}\exp\left(\pm k^{\pm}x\right), \quad (13)$$

where $C_{\pm}^{\pm}$ are normalization constants, and

$$k^{\pm} = \frac{\sqrt{1 \pm \sqrt{1 + \frac{8}{3}\beta\left(E^2 - M^2\right)}}}{2\sqrt{\frac{\beta}{3}}}. \quad (14)$$

We remark that the quantities k^- is a pure imaginary number which is equal $i\sqrt{(E^2 - M^2)}$ when $\beta \to 0$ and k^+ is real diverges when $\beta \to 0$, and we can be grouped by this relation

$$\left(E^2 - M^2\right) = \pm\left(k^{\pm}\right)^2 + \frac{2}{3}\beta\left(k^{\pm}\right)^4, \quad (15)$$

which is nothing but the modified dispersion relation in the presence of the minimal length[36].

Now, returning to the modified Klein-Gordon equation(12), as it is has been said previously that the solution is complicated, we try to find via the usual perturbation method of mechanic quantum the first energy correction at order 1 in β and out how the the introduction of the modified Heisenberg algebra affects the physical results. To do this, let us first suppose in this case that $(S_0^2 - V_0^2) > 0$ so as to avoid complex eigenvalues and we arrange the equation(12) to a sum of two terms, whose one is the perturbative as follows,

$$\left[H^0\left(z, \partial_z\right) + H^{pert}\left(\partial_z\right)\right]\Phi\left(z\right) = 0, \quad (16)$$

where we have used this transformation

$$z = \left(S_0^2 - V_0^2\right)^{1/4}\left(x + \frac{\left(MS_0 + EV_0\right)}{\left(S_0^2 - V_0^2\right)}\right), \quad (17)$$

with

$$H^0 = \partial_z^2 - z^2 + z_1 \tag{18}$$

$$H^{pert} = -\frac{2}{3}\beta\sqrt{(S_0^2 - V_0^2)}\partial_z^4, \tag{19}$$

and

$$z_1 = \frac{(MS_0 + EV_0)^2}{(S_0^2 - V_0^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(E^2 - M^2)}{\sqrt{(S_0^2 - V_0^2)}}. \tag{20}$$

Now, in case where $H^{pert}(\partial_z)$ is vanish, (otherwise when $\beta \to 0$), the equation(16) becomes the problem of the harmonic oscillator whose solution is known

$$\Phi(z) = C\exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right)H_n(z), \tag{21}$$

with z_1 verify,

$$z_1 = 2n + 1. \tag{22}$$

Applying Eqs.(22) into the relation of (20), it is straightforward to show that the energy spectrum $E_{n,\pm}^{\beta=0}$ is

$$E_{n,\pm}^{\beta=0} = -\frac{MV_0}{S_0} \pm \frac{\sqrt{(2n+1)}\,(S_0^2 - V_0^2)^{3/4}}{S_0}. \tag{23}$$

We note, the existence of the two signs in (23) is a characteristic property of energies in relativistic quantum mechanics.

Now, to find the first correction in the energy levels, we take the expectation value of the perturbation operator by using eigenfunctions(21),

$$\Delta z_{n1} = \frac{\langle\Phi(z)|H^{pert}|\Phi(z)\rangle}{\langle\Phi(z)|\Phi(z)\rangle}, \tag{24}$$

consequently, we obtain this result

$$\begin{aligned}\Delta z_{n1} &= \frac{-\frac{2}{3}\sqrt{(S_0^2 - V_0^2)}\int\exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right)H_n(z)\,\partial_z^4\exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right)H_n(z)\,dz}{\int\exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right)H_n(z)\exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right)H_n(z)\,dz}\\ &= -\frac{\beta\sqrt{(S_0^2 - V_0^2)}}{2}\left(2n^2 + 2n + 1\right),\end{aligned} \tag{25}$$

where we have used some properties of Hermite polynomials.

From the relation (20), we derive the expression of ΔE_{n1} in function of Δz_{n1}, we obtain

$$\Delta E_{n1} = \frac{(S_0^2 - V_0^2)^{3/2}}{2\left(MS_0V_0 + E_{n,\pm}^{\beta=0}S_0^2\right)}\Delta z_{n1}, \tag{26}$$

and by substituting (23) and (25) in (26), we find

$$\Delta E_{n1} = \pm \frac{\beta}{4S_0} \frac{\left(S_0^2 - V_0^2\right)^{5/4}\left(2n^2 + 2n + 1\right)}{\sqrt{(2n+1)}}, \tag{27}$$

than, the energy spectrum of the system at order 1 in β can be rewritten as

$$E_{n,\pm}^{\beta} = E_{n,\pm}^{\beta=0} + \Delta E_{n1} + O\left(\beta^2\right), \tag{28}$$

which is equal to

$$E_{n,\pm}^{\beta} = -\frac{MV_0}{S_0} \pm \frac{\sqrt{(2n+1)}\left(S_0^2 - V_0^2\right)^{3/4}}{S_0} \pm \frac{\beta}{4S_0} \frac{\left(S_0^2 - V_0^2\right)^{5/4}\left(2n^2 + 2n + 1\right)}{\sqrt{(2n+1)}} + O\left(\beta^2\right). \tag{29}$$

4. The Klein-Gordon Green Function in Momentum Space Representation

In this section, we are interested in solving exactly the same problem the (1+1)-dimensional K-G particle under the action of linear vector plus scalar potentials in energy-momentum space representation and in the presence of the minimal length by introducing the so called Green's function, which is the most important quantity of the path integral formulation.

Let us consider the formal Green function corresponding to the K-G equation for a spinless particle of rest mass M and charge e,

$$G = -\frac{I}{(P_\mu - eA_\mu)(P^\mu - eA^\mu) - (M+S)^2}, \tag{30}$$

Let us first note that, to solve this problem, we can use the relativistic spinless particle path integral formulation [37]. According to the Schwinger proper-time method, the Green's function in energy-momentum space (P_0, P) is expressed as,

$$G\left(P_f, P_i, P_{0f}, P_{0i}\right) = i\int_0^\infty d\tau \left\langle P_a, P_{0a}\right| \exp\left(-iH\left(\tau\right)\right)\left|P_b, P_{0b}\right\rangle, \tag{31}$$

where

$$H\left(\tau\right) = -\tau\left[P_0^2 - P^2 - M^2 + V^2\left(x\right) - S^2\left(x\right) - 2P_0V\left(x\right) - 2MS\left(x\right)\right]. \tag{32}$$

In order to derive a path integral representation for $G\left(P_f, P_i, P_{0f}, P_{0i}\right)$, the standard method is adopted where we discretize time interval τ to $N+1$ infinitesimal equal parts $\varepsilon = \frac{\tau}{N+1}$, and applied the Trotter's formula,

$$\left\langle P_j, P_{0j}\right| \exp\left(-iH\left(\tau\right)\right)\left|P_{j-1}, P_{0j-1}\right\rangle = \lim_{N\longrightarrow\infty}\left\langle P_j, P_{0j}\right|\left[e^{-i\varepsilon H}\right]^{N+1}\left|P_{j-1}, P_{0j-1}\right\rangle. \tag{33}$$

The completeness relations (5) relative to P and P_0 are inserted between each pair of infinitesimal evolution operator and taking at the end the limit $N \to \infty$, we obtain the following expression,

$$G\left(P_f, P_i, P_{0f}, P_{0i}\right) = i\int_0^{\infty} d\tau \lim_{N\to\infty}\prod_{j=1}^{N}\int \frac{dP_j}{\left(1+\beta P_j^2\right)^{1-\alpha}} dP_{0j}\prod_{j=1}^{N+1}$$

$$\langle P_{j,}P_{0j}|\exp\left\{-i\varepsilon\left[P_{0j}^2 - P_j^2 - M^2 + V^2\left(x_j\right) - S^2\left(x_j\right) - 2P_{0j}V\left(x_j\right) - 2MS\left(x_j\right)\right]\right\}|P_{j-1,}P_{0j-1}\rangle, \tag{34}$$

or under this form,

$$G\left(P_f, P_i, P_{0f}, P_{0i}\right) = i\lim_{N\to\infty}\int_0^{\infty} d\tau\prod_{j=1}^{N}\int \frac{dP_j}{\left(1+\beta P_j^2\right)^{1-\alpha}} dP_{0j}\prod_{j=1}^{N+1}\exp\left(-i\varepsilon\left[P_{0j}^2 - P_j^2 - M^2\right]\right)$$

$$\langle P_{j,}P_{0j}|\exp\left\{-i\varepsilon\left[\left(-S^2\left(x_j\right) + V^2\left(x_j\right)\right) - 2\left(MS\left(x_j\right) + P_{0j}V\left(x_j\right)\right)\right]\right\}|P_{j-1,}P_{0j-1}\rangle. \tag{35}$$

Now, we use the form of the vector and scalar potentials(11), than, the expression of the Green function (35) becomes as follows,

$$G\left(P_f, P_i, P_{0f}, P_{0i}\right) = i\lim_{N\to\infty}\int_0^{\infty} d\tau\prod_{j=1}^{N}\int \frac{dP_j}{\left(1+\beta P_j^2\right)^{1-\alpha}} dP_{0j}$$

$$\prod_{j=1}^{N+1}\exp\left(-i\varepsilon\left[P_{0j}^2 - P_j^2 - M^2\right]\right)\langle P_{j,}P_{0j}|\exp\left\{-i\varepsilon\left[\left(V_0^2 - S_0^2\right)x_j^2 - 2\left(MS_0 + P_{0j}V_0\right)x_j\right]\right\}|P_{j-1,}P_{0j-1}\rangle, \tag{36}$$

or under this form,

$$G\left(P_f, P_i, P_{0f}, P_{0i}\right) = i\lim_{N\to\infty}\int_0^{\infty} d\tau\prod_{j=1}^{N}\int \frac{dP_j}{\left(1+\beta P_j^2\right)^{1-\alpha}} dP_{0j}\prod_{j=1}^{N+1}\exp\left(-i\varepsilon\left[P_{0j}^2 - P_j^2 - M^2\right]\right)$$

$$\langle P_{j,}P_{0j}|\exp\left\{-i\varepsilon\left(\left(V_0^2 - S_0^2\right)\left[i\left(\left(1+\beta P_j^2\right)\frac{\partial}{\partial P_j} + \gamma P\right)\right]^2 - \right.\right.$$

$$\left.\left.-2i\left(MS_0 + P_{0j}V_0\right)\left[\left(1+\beta P_j^2\right)\frac{\partial}{\partial P_j} + \gamma P\right]\right)\right\}|P_{j-1,}P_{0j-1}\rangle, \tag{37}$$

where it was used (3).

At this level, we should evaluate this expression (37), it's -easy to demonstrate that the evolution of last term at order 1 in ε is written,

$$\langle P_{j,}P_{0j}|\exp\left\{-i\varepsilon\left(\left(V_0^2 - S_0^2\right)\left[i\left(\left(1+\beta P_j^2\right)\frac{\partial}{\partial P_j} + \gamma P\right)\right]^2 - \right.\right.$$

$$\left.\left.-2i\left(MS_0 + P_{0j}V_0\right)\left[\left(1+\beta P_j^2\right)\frac{\partial}{\partial P_j} + \gamma P\right]\right)\right\}|P_{j-1,}P_{0j-1}\rangle \tag{38}$$

$$\simeq \langle P_{j,}P_{0j}| \left\{ 1 - i\varepsilon \left(\left(V_0^2 - S_0^2\right) \left[i \left(\left(1+\beta P_j^2\right) \frac{\partial}{\partial P_j} + \gamma P \right) \right]^2 - \right.\right.$$

$$\left.\left. -2i\left(MS_0 + P_{0j}V_0\right) \left[\left(1+\beta P_j^2\right) \frac{\partial}{\partial P_j} + \gamma P \right] \right) \right\} |P_{j-1,}P_{0j-1}\rangle, \tag{39}$$

and let's introduce the integral representation of $\langle P_{j,}P_{0j}|P_{j-1,}P_{0j-1}\rangle$ given by,

$$\langle P_{j,}P_{0j}|P_{j-1,}P_{0j-1}\rangle = \int\int \frac{dt_j}{2\pi}\frac{d\rho_j}{2\pi} \frac{\exp it_j\left(P_{0j} - P_{0j-1}\right)}{\left(1+\beta P_j^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} \left(1+\beta P_{j-1}^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}} \times$$

$$\exp i\rho_j \left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} arctg\sqrt{\beta}P_j - \frac{1}{\sqrt{\beta}} arctg\sqrt{\beta}P_{j-1} \right), \tag{40}$$

where it was used (6), the expression of (37) becomes as follows

$$G\left(P_j, P_{j-1}, P_{0j}, P_{0j-1}\right) = i\int_0^\infty d\tau \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \int \frac{dP_j dP_{0j}}{\left(1+\beta P_j^2\right)^{1-\alpha}} \times$$

$$\prod_{n=1}^{N+1} \int\int \frac{dt_j}{2\pi}\frac{d\rho_j}{2\pi} \frac{\exp it_j\left(P_{0j} - P_{0j-1}\right)}{\left(1+\beta P_j^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} \left(1+\beta P_{j-1}^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}} \tag{41}$$

$$\exp\left\{-i\varepsilon\left(P_{0j}^2 + \left[\left(S_0^2 - V_0^2\right)\left(\beta\gamma + \gamma^2\right) - 1\right] P_j^2 - 2i\gamma\left(MS_0 + P_{0j}V_0\right)P_j - M^2 + \left(S_0^2 - V_0^2\right)\gamma\right)\right\}$$

$$\exp i(\left[\frac{1}{\sqrt{\beta}} \left(arctg\sqrt{\beta}P_j - arctg\sqrt{\beta}P_{j-1} \right) + 2\varepsilon\gamma\left(S_0^2 - V_0^2\right)P_j - 2\varepsilon\left(MS_0 + P_{0j}V_0\right) \right] \rho_j$$
$$+\varepsilon\left(S_0^2 - V_0^2\right)\rho_j^2). \tag{42}$$

The Gaussian integrations over $\{\rho_j\}$ is immediate and the integration over $\{t_j\}$ gives a delta functional, than we obtain the new result

$$G\left(P_f, P_i, P_{0f}, P_{0i}\right) =$$

$$i\left(1+\beta P_f^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} \left(1+\beta P_i^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^\infty d\tau \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \int \frac{dP_j}{\left(1+\beta P_j^2\right)} dP_{0j} \prod_{n=1}^{N+1} \frac{\delta\left(P_{0j} - P_{0j-1}\right)}{\sqrt{4\pi i\varepsilon\left(S_0^2 - V_0^2\right)}}$$

$$\exp -i\varepsilon\left\{ P_{0j}^2 + \left(S_0^2 - V_0^2\right)\gamma + \left[-1 + \left(S_0^2 - V_0^2\right)\beta\gamma\right] P_j^2 - M^2 + \frac{\left(mS_0 + P_{0j}V_0\right)^2}{\left(S_0^2 - V_0^2\right)} \right\}$$

$$\exp i\left[\frac{\left(arctg\sqrt{\beta}P_j - arctg\sqrt{\beta}P_{j-1}\right)^2}{4\varepsilon\beta\left(S_0^2 - V_0^2\right)} + \frac{\gamma}{\sqrt{\beta}} \left(arctg\sqrt{\beta}P_j - arctg\sqrt{\beta}P_{j-1} \right) P_j \right], \tag{43}$$

and by the following transformation,

$$k_j = \frac{1}{\sqrt{\beta}} arctg\sqrt{\beta}P_j$$
$$k_{0j} = P_{0j}, \tag{44}$$

where the value of k change in the interval $\left]-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}},+\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}\right[$ according to values of p in the interval $]-\infty,+\infty[$, than, it is easy to obtain that,

$$G\left(k_j,k_{j-1},k_{0j},k_{0j-1}\right)=i\left(1+\tan^2\sqrt{\beta}k_f\right)^{\frac{\alpha}{2}}\left(1+\tan^2\sqrt{\beta}k_i\right)^{\frac{\alpha}{2}}\int_0^\infty d\tau$$

$$\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\int dk_{0j}\prod_{n=1}^{N+1}\delta\left(k_{0j}-k_{0j-1}\right)\times$$
$$\exp -i\varepsilon\left\{k_{0j}^2-M^2+\left(S_0^2-V_0^2\right)\gamma+\frac{\left(mS_0+k_{0j}V_0\right)^2}{\left(S_0^2-V_0^2\right)}\right\}\widetilde{G}\left(k_j,k_{j-1},\tau\right), \tag{45}$$

where

$$\widetilde{G}\left(k_j,k_{j-1},\tau\right)=\prod_{n=1}^{N}\int dk_j\prod_{n=1}^{N+1}\frac{1}{\sqrt{4\pi i\varepsilon\left(S_0^2-V_0^2\right)}}$$
$$\exp i\left[\frac{\left(\Delta k_j\right)^2}{4\varepsilon\left(S_0^2-V_0^2\right)}-\frac{\left(MS_0+k_{0j}V_0\right)}{\left(S_0^2-V_0^2\right)}\Delta k_j+\frac{\gamma\Delta k_j}{\sqrt{\beta}}\tan\sqrt{\beta}k_j+\varepsilon\left[-1+\beta\gamma\left(S_0^2-V_0^2\right)\right]\frac{\tan^2\sqrt{\beta}k_j}{\beta}\right], \tag{46}$$

and $\Delta k_j=k_j-k_{j-1}$.

Now, we develop the terms in the infinitesimal action of $\widetilde{G}\left(k_f,k_i,\tau\right)$ (**??**) to the order ε in the vicinity of the mid-point

$$\Delta k_j\tan\sqrt{\beta}k_j\simeq\Delta k_j\tan\sqrt{\beta}\left(\overline{k}_j\right)+\frac{\left(\Delta k_j\right)^2\sqrt{\beta}}{2}\left(1+\tan^2\sqrt{\beta}\overline{k}_j\right), \tag{47}$$

where $\overline{k}_j=\frac{k_j+k_{j+1}}{2}$and we retain only the terms contributing [38]

$$\left\langle\left(\Delta k_j\right)^2\right\rangle=2i\varepsilon\left(S_0^2-V_0^2\right), \tag{48}$$

than the Green function (**??**) takes the following form:

$$G\left(k_f,k_i,k_{0f},k_{0i}\right)=i\left(1+\tan^2\sqrt{\beta}k_f\right)^{\frac{\alpha}{2}}\left(1+\tan^2\sqrt{\beta}k_i\right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\int_0^\infty d\tau\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\int dk_{0j}\prod_{n=1}^{N+1}\delta\left(k_{0j}-k_{0j-1}\right)\exp -i\varepsilon\left\{k_{0j}^2-M^2+\frac{\left(MS_0+k_{0j}V_0\right)^2}{\left(S_0^2-V_0^2\right)}\right\}\widetilde{G}\left(k_j,k_{j-1},\tau\right), \tag{49}$$

where

$$\widetilde{G}\left(k_f,k_i,\tau\right)=\prod_{n=1}^{N}\int dk_j\prod_{n=1}^{N+1}\frac{1}{\sqrt{4\pi i\varepsilon\left(S_0^2-V_0^2\right)}}\exp i\left\{\frac{\left(\Delta k_j\right)^2}{4\varepsilon\left(S_0^2-V_0^2\right)}-\varepsilon\frac{\tan^2\sqrt{\beta}k_j}{\beta}\right\}. \tag{50}$$

This expression(50) is formally identical with that of the Poschl–Teller potential studied [39], which also written in this form

$$\widetilde{G}\left(k_j,k_{j-1},\tau\right)=\prod_{n=1}^{N}\int dk_j\prod_{n=1}^{N+1}\frac{1}{\sqrt{4\pi i\varepsilon\left(S_0^2-V_0^2\right)}}\times$$
$$\exp i\left\{\frac{\left(\Delta k_j\right)^2}{4\varepsilon\left(S_0^2-V_0^2\right)}-\varepsilon\beta\left(S_0^2-V_0^2\right)\lambda\left(\lambda-1\right)\tan^2\sqrt{\beta}k_j\right\},\tag{51}$$

with

$$\lambda=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{4}{\beta^2\left(S_0^2-V_0^2\right)}}\right).\tag{52}$$

The solution of this path integral (**??**) can be written as,

$$\widetilde{G}\left(k_f,k_i,\tau\right)=$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}N_n\exp\left[i\tau\beta\left(S_0^2-V_0^2\right)\left(n^2+\left(2n+1\right)\lambda\right)\right]\left(\cos\sqrt{\beta}k_f\cos\sqrt{\beta}k_i\right)^{\lambda}C_n^{\lambda}\left(\sin\sqrt{\beta}k_f\right)C_n^{\lambda}\left(\sin\sqrt{\beta}k_i\right),\tag{53}$$

where C_n^{λ} are Gegenbauer polynomials and the normalization constant N_n is given by

$$N_n=\Gamma\left(\lambda\right)^2\left[\frac{2^{2\lambda-1}n!\left(n+\lambda\right)\sqrt{\beta}}{\pi\Gamma\left(n+2\lambda\right)}\right].\tag{54}$$

Performing the integrations over k_{0j},in this case, the Green function (49) reduces to

$$G\left(k_f,k_i,k_{0f},k_{0i}\right)=i\left(1+\tan^2\sqrt{\beta}k_f\right)^{\frac{\alpha}{2}}\left(1+\tan^2\sqrt{\beta}k_i\right)^{\frac{\alpha}{2}}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}N_n\int_0^{\infty}d\tau\delta\left(k_{0f}-k_{0i}\right)\exp-i\tau\left\{k_{0f}^2-M^2+\frac{\left(MS_0+k_{0f}V_0\right)^2}{\left(S_0^2-V_0^2\right)}-\beta\left(S_0^2-V_0^2\right)\left(n^2+\left(2n+1\right)\lambda\right)\right\}$$
$$\left(\cos\sqrt{\beta}k_f\cos\sqrt{\beta}k_i\right)^{\lambda}C_n^{\lambda}\left(\sin\sqrt{\beta}k_f\right)C_n^{\lambda}\left(\sin\sqrt{\beta}k_i\right),\tag{55}$$

or under this form after integration on τ

$$G\left(k_f,k_i,k_{0f},k_{0i}\right)=i\left(1+\tan^2\sqrt{\beta}k_f\right)^{\frac{\alpha}{2}}\left(1+\tan^2\sqrt{\beta}k_i\right)^{\frac{\alpha}{2}}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}N_n\frac{\delta\left(k_{0f}-k_{0i}\right)\left(\cos\sqrt{\beta}k_f\cos\sqrt{\beta}k_i\right)^{\lambda}C_n^{\lambda}\left(\sin\sqrt{\beta}k_f\right)C_n^{\lambda}\left(\sin\sqrt{\beta}k_i\right)}{k_{0f}^2-M^2+\frac{\left(MS_0+k_{0f}V_0\right)^2}{\left(S_0^2-V_0^2\right)}-\beta\left(S_0^2-V_0^2\right)\left(n^2+\left(2n+1\right)\lambda\right)},\tag{56}$$

we note that the presence of δ reflects the conservation of energy.

In order to evaluate exactly the propagator expression, it is convenient to write the Fourier transformation of (55) for k_{0f} and k_{0i} variables. The first integral on delta is immediate, we obtain

$$G\left(k_f,k_i,t_f,t_i\right)=i\left(1+\tan^2\sqrt{\beta}k_f\right)^{\frac{\alpha}{2}}\left(1+\tan^2\sqrt{\beta}k_i\right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} N_n \int \frac{dE}{2\pi} e^{-iE(t_f-t_i)} \frac{\left(\cos\sqrt{\beta}k_f \cos\sqrt{\beta}k_i\right)^{\lambda} C_n^{\lambda}\left(\sin\sqrt{\beta}k_f\right) C_n^{\lambda}\left(\sin\sqrt{\beta}k_i\right)}{E^2 - M^2 + \frac{\left(MS_0+EV_0\right)^2}{\left(S_0^2-V_0^2\right)} - \beta\left(S_0^2-V_0^2\right)\left(n^2+(2n+1)\lambda\right)}. \tag{57}$$

The poles of the $G(k_f, k_i, t_f, t_i)$ yield the discrete energy spectrum

$$E_{n,\pm}^{\beta} = -\frac{MV_0}{S_0} \pm \omega_n^{\beta}, \tag{58}$$

with ω_n^{β} defined,

$$\omega_n^{\beta} = \frac{\left(S_0^2-V_0^2\right)}{S_0} \sqrt{\beta\left(n^2+n+\frac{1}{2}\right) + \beta\left(n+\frac{1}{2}\right)\sqrt{1+\frac{4}{\beta^2\left(S_0^2-V_0^2\right)}}}. \tag{59}$$

We note that this result coincides exactly with those obtained by[30].

Now, to evaluate the wave functions and energy spectrum, the expression(56) is written in this form,

$$G(k_f, k_i, t_f, t_i) = i\left(1+\tan^2\sqrt{\beta}k_f\right)^{\frac{\alpha}{2}}\left(1+\tan^2\sqrt{\beta}k_i\right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} N_n \int \frac{dE}{2\pi} e^{-iE(t_f-t_i)} \frac{\left(\cos\sqrt{\beta}k_f \cos\sqrt{\beta}k_i\right)^{\lambda} C_n^{\lambda}\left(\sin\sqrt{\beta}k_f\right) C_n^{\lambda}\left(\sin\sqrt{\beta}k_i\right)}{\left(E+\frac{MV_0}{S_0}-\omega_n^{\beta}\right)\left(E+\frac{MV_0}{S_0}+\omega_n^{\beta}\right)}, \tag{60}$$

and we use a complex integral along the special contour C, and then using the residue theorem,

$$\oint \frac{dE}{2\pi} \frac{e^{-iE(t_f-t_i)}}{\left(E+\frac{MV_0}{S_0}-\omega_n^{\beta}\right)\left(E+\frac{MV_0}{S_0}+\omega_n^{\beta}\right)} =$$

$$\frac{-i}{2\omega_n^{\beta}}\left[\theta(t_f-t_i)e^{-i\left(\omega_n^{\beta}-\frac{MV_0}{S_0}\right)(t_f-t_i)} + \theta(t_i-t_f)e^{i\left(\omega_n^{\beta}+\frac{MV_0}{S_0}\right)(t_f-t_i)}\right]. \tag{61}$$

Consequently, we obtain this result in the former variable,

$$G(P_f, P_i, t_f, t_i) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\theta(t_f-t_i)\frac{N_n}{2\omega_n^{\beta}}\left(1+\beta P_f^2\right)^{\frac{\alpha-\lambda}{2}}\left(1+\beta P_i^2\right)^{\frac{\alpha-\lambda}{2}} C_n^{\lambda}\left(\frac{\sqrt{\beta}P_f}{\sqrt{1+\beta P_f^2}}\right) C_n^{\lambda}\left(\frac{\sqrt{\beta}P_i}{\sqrt{1+\beta P_i^2}}\right) e^{-i\left(\omega_n^{\beta}-\frac{MV_0}{S_0}\right)(t_f-t_i)}\right.$$

$$\left.+\theta(t_i-t_f)\frac{N_n}{2\omega_n^{\beta}}\left(1+\beta P_f^2\right)^{\frac{\alpha-\lambda}{2}}\left(1+\beta P_i^2\right)^{\frac{\alpha-\lambda}{2}} C_n^{\lambda}\left(\frac{\sqrt{\beta}P_f}{\sqrt{1+\beta P_f^2}}\right) C_n^{\lambda}\left(\frac{\sqrt{\beta}P_i}{\sqrt{1+\beta P_i^2}}\right) e^{i\left(\omega_n^{\beta}+\frac{MV_0}{S_0}\right)(t_f-t_i)}\right], \tag{62}$$

where we have used the following relation,

$$\cos\sqrt{\beta}k = \frac{1}{\sqrt{1+\beta P^2}}, \tag{63}$$
$$\sin\sqrt{\beta}k = \frac{\sqrt{\beta}P}{\sqrt{1+\beta P^2}}.$$

Finally, we obtain the spectral decomposition of propagator for the (1+1)-dimensional K-G particle under the action of linear vector plus scalar potentials in the presence of minimal length uncertainty,

$$G\left(P_f, P_i, t_f, t_i\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\theta(t_f - t_i)\xi\left(P_f\right)_n \xi\left(P_i\right)_n^* e^{-i\left(\omega_n^\beta - \frac{MV_0}{S_0}\right)(t_f - t_i)} + \theta(t_i - t_f)\xi\left(P_f\right)_n^* \xi\left(P_i\right)_n e^{i\left(\omega_n^\beta + \frac{MV_0}{S_0}\right)(t_f - t_i)}\right], \tag{64}$$

where $\xi\left(P\right)_n$ are given by,

$$\xi\left(P\right)_n = \sqrt{\frac{2^{2\lambda-1} n! \left(n+\lambda\right)\Gamma\left(\lambda\right)^2\sqrt{\beta}}{2\pi\Gamma\left(n+2\lambda\right)\left(1+\beta P^2\right)^{\lambda-\alpha}\omega_n^\beta}} C_n^\lambda\left(\frac{\sqrt{\beta}P}{\sqrt{1+\beta P^2}}\right). \tag{65}$$

In (64), we have two types of propagation, one with positive energy $+\left(\omega_n^\beta - \frac{MV_0}{S_0}\right)$ propagating to the future and the other with negative energy $-\left(\omega_n^\beta + \frac{MV_0}{S_0}\right)$ propagating to the past.

In the end, it is remarkable if we consider a very small β, the form of (59) can easily be written as

$$\omega_n^{\beta\ll} = \frac{\sqrt{(2n+1)}\left(S_0^2 - V_0^2\right)^{3/4}}{S_0} + \frac{\beta}{4S_0}\frac{\left(S_0^2 - V_0^2\right)^{\frac{5}{4}}\left(2n^2+2n+1\right)}{\sqrt{(2n+1)}} + O\left(\beta^2\right), \tag{66}$$

than we get

$$E_{n,\pm}^\beta = -\frac{MV_0}{S_0} \pm \frac{\sqrt{(2n+1)}\left(S_0^2 - V_0^2\right)^{3/4}}{S_0} \pm \frac{\beta}{4S_0}\frac{\left(S_0^2 - V_0^2\right)^{5/4}\left(2n^2+2n+1\right)}{\sqrt{(2n+1)}} + O\left(\beta^2\right). \tag{67}$$

We can now compare this result (67)with that obtained in the previous section (29) from perturbation theory, though both methods give the same shift of the energy levels.

Conclusion

We have evaluated a (1+1)-dimensional Klein-Gordon particle subjected to the action of linear vector plus scalar potentials in modified Heisenberg uncertainty relation via two methods: by a method direct in the position space representation and by a Feynman formalism in energy-momentum space. For a first method, via a new form of momentum operator, our system converted to a modified K-G equation, a differential equation of fourth order, which its analytic solution is complicated. by using a usual approximation technique of a quantum mechanics, we find the shifts of the relativistic energy levels to order 1 on a parameter of deformation. In contrast, the second method, the Green function is obtained, the energy spectrum together with the normalized wave functions of the bound states are deduced and depend an the deformation parameter β as in noncommutative theory case. The limiting case is then determined and is compared with that obtained in the from perturbation theory, though both methods give the same shift of the energy levels. The merit of Feynman formulation is its intuitive way of interpreting the basic equations of ordinary quantum mechanics using classical trajectories. Furthermore, for pedagogical reasons, it is suitable to treat this problem via these equivalent methods. Finally, let us remark that the same problems in the case of the Dirac equation for spin $\frac{1}{2}$ are under consideration.

References

[1] Chodos A, Jaffe R L. Johnson K, Thorn C B and Weisskopf V F 1974 Phys. Rev. D 9 3471.

[2] G. H. Wannier, Phys. Rev. 52, 191 (1937)

[3] A de Souza Dutra, J. Phys. A: Math. Gen. 39, (2006)203, A. de Souza Dutra and C. A. S. de Almeida , Phys. Lett. A 275, (2000)25; I. O.Vakarchuk J. Phys. A: Math. Gen. 38, (2005) 4727; S. K. Moayedi and F. Darabi, Phys. Lett. A 322(2004) 173; 5) A. de Souza Dutra , M. B. Hott and C. A. S. de Almeida, Europhys. Lett. 62 (2003)8.

[4] Einevoll, G. T. and Hemmer, P. C. (1988). Journal of Physics C (Solid State Physics) 21, L1193.; L´evy-Leblond, J.-M. (1995). Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics) 52, 1845.

[5] F. Dominguez-Adame, Phys. Lett. A 136 (1989).

[6] L. Chetouani , L. Guechi , A. Lecheheb, T.F. Hammann and A. Messouber, Physica A 234 (1996) 529.

[7] C. Y.Chen, D. S. Sun, and F. L Lu, Phys.Lett A 330, (2004)424.

[8] Y. F. Diao, L. Z.Yi and C. S.Jia,.Phys. Lett A 332, (2004)157.

[9] Yi, L. Z., Diao, Y. F., Liu, J. Y., and Jia, C. S. Phys.Lett A 333, (2004)212.

[10] G. Chen, Z. D Chen,, and Z. D.Louy, Phys. Lett A 331, (2004)374.

[11] G.Chen ,Z.D.Chen and P.C.Xuan, Phys. Lett A 352 (2006) 317.

[12] A. de Souza Dutra and G. Chenc, Phys Lett A 349 (2006) 297.

[13] T. Jana, P. Roy, Phys.Lett. A 361 (2007) 55.

[14] X. Calmet, M. Graesser and S.D.H. Hsu, Phys.Rev.Lett. 93, 211101 (2004), X. Calmet, Mod.Phys.Lett.A22, 2027 (2007).

[15] K.Nozari and T.Azizi, Gen.Rel.Grav. 38, 735 (2006).

[16] G. Veneziano, Europhys. Lett. 2 (1986) 199; D. Amati, M. Ciafaloni, and G. Veneziano, Phys. Lett. B197 (1987) 81; K. Konishi, G. Paffuti, and P. Provero, Phys.

Lett. B234 (1990) 276; M. Kato, Phys. Lett. B245 (1990) 43; R. Guida, K. Konishi, and P. Provero, Mod. Phys. Lett. A6 (1991) 1487.

[17] D.J. Gross, PF Mende. Nucl. Phys. B 303, 407 (1988).

[18] L. J. Garay, Int. J. Mod. Phys. A10 (1995) 145.

[19] S. Capozziello, G. Lambiase, G. Scarpetta, Int.J.Theor.Phys. 39 (2000) 15.

[20] F. Scardigli, Phys. Lett. B452 (1999) 39; F. Scardigli and R. Casadio, Class. Quant. Grav. 20 (2003) 3915.

[21] S. Hossenfelder, Mod. Phys. Lett. A 19, 2727 (2004); Phys. Rev. D 70, 1054003 (2004); Phys. Lett. B 598, 92 (2004); Class.Quant.Grav.25:038003,2008.

[22] A. Matusis, L. Susskind and N. Toumbas, JHEP 0012 (2000) 002

[23] A. Kempf, J. Math. Phys. 35 (1994) 4483; A. Kempf, G. Mangano, R.B. Mann, Phys. Rev. D 52 (1995) 1108; A. Kempf, J. Phys. A: Math. Gen. 30 (1997) 2093, H. Hinrichsen, A. Kempf, J. Math. Phys. 37 (1996) 2121; L.N. Chang, D. Minic, N. Okamura, T. Takeuchi, Phys. Rev. D 65 (2002) 125027; L.N. Chang, D. Minic, N. Okamura, T. Takeuchi, Phys. Rev. D 65 (2002) 125028; S. Benczik, L.N. Chang, D. Minic, N. Okamura, S. Rayyan, T. Takeuchi, Phys. Rev. D 66 (2002) 026003.

[24] J. Slawny, J. Math. Phys. 48 (2007)053515; F. Brau, J. Phys. A32 (1999) 7691; R. Akhoury and Y-P Yao, Phys. Lett.B.37, (2003)572; S.Benczik, L. N. Chang, D. Minic and T. Takeuchi, Phys. Rev. A72 (2005), 012104.

[25] M. Merad and M. Falek, Phys. Scr. 79 (2009) 015010.

[26] K. Nozari and M. Karami, Mod.Phys.Lett. A20 (2005) 3095.

[27] C.Quesne and V. M. Tkachuk, J. Phys. A : Math. Gen. 38, 1747 (2005).

[28] M. Falek and M. Merad,J. Math. Phys, 50, (2009)023508.

[29] Md Sakhawat Hossain and S B Faruque, Phys. Scr. 78 (2008) 035006.

[30] T.K. Jana, P. Roy, Phys. Lett A, 373, (2009)1239.

[31] S. Hossenfelder, M. Bleicher, S.Hofmann, J.Rappert, S. Scherer and H. Stocker Phys. Lett B 575 (2003) 85.

[32] R. W. Robinett, Am. J. Phys. 64 (1996)805.

[33] S. R.keng and Z.Yuhong, Phys. A: Math. Gen. 17 (1984) 851

[34] A. del Campo and J. G. Muga, J. Phys. A: Math. Gen. 39 (2006)5897.

[35] H.C. Pauli, arXiv:hep-ph/0312299v1.

[36] M. Rinaldi, Phys. Rev. D76, (2007) 104027.

[37] E.S. Fradkin, D.M. Gitman, Phys. Rev. D 44, (1991)3230 ; D.M. Gitman, S.I. Zlatev, W.D. Cruz, Brazil. J. Phys. 26, (1996)419 ; D.M. Gitman, S.I. Zlatev, Phys. Rev.D 55, (1997)7701 .

[38] D.W. Mc Laughlin, L.S. Schulman, J. Math. Phys. 12, (1971)2520.

[39] D.C. Khandekar and S.V. Lawande, Phys.Rep137,(1986) 115.

Relativistic Oscillators in a Noncommutative Space: a Path Integral Approach

H. Benzair[a,b,d], M. Merad[c], T. Boudjedaa[d,e], and A. Makhlouf[b]

[a] Laboratoire LRPPS, Université de Kasdi Merbah-Ouargla, BP 511, Route Ghardaïa, 30000 Ouargla, Algérie (permanent address)
[b] Laboratoire de Mathématiques, Informatique et Applications, Université de Haute-Alsace, 4 rue des Frères Lumière F-68093 Mulhouse, France
[c] Laboratoire (L.S.D.C), Département des Sciences de la Matière, Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Vie, Université de Oum El Bouaghi, 04000 Oum El Bouaghi, Algérie
[d] Laboratoire de Physique Théorique, Université de Jijel BP98 Ouled Aissa, 18000 Jijel, Algérie (permanent address)
[e] Laboratoire de Physique Théorique, Université Paris-Sud 11, Bâtiment 210, Orsay Cedex France (visitor address)

Reprint requests to M. M.; E-mail: meradm@gmail.com

Z. Naturforsch. **67a,** 77 – 88 (2012) / DOI: 10.5560/ZNA.2011-0060
Received January 11, 2011 / revised October 3, 2011

In this paper, we consider the dynamics of Klein–Gordon and Dirac oscillators in $(2+1)$ dimensions with noncommutativity of the spatial coordinates using the supersymmetric path integral formalism. The propagator is calculated and the energy eigenvalues with their corresponding eigenfunctions are deduced.

Key words: Noncommutative Geometry; Path Integral; Klein–Gordon and Dirac Oscillators.
PACS numbers: 03.65.Pm; 03.65.Ca; 03.65.Db; 03.65.Ge

1. Introduction

Recently, the noncommutative (NC) geometry received a great welcome by the researchers in the field of physics and mathematics. Its roots lie in quantum mechanics, describing at microscopic level the laws of nature. Quantum mechanics motivated also in the first half of the twentieth century an important development in the theory of operator algebras, like the study of C^*-algebra and Von Neumann algebras. We know that from classical mechanics to quantum mechanics, one changes the commutative algebra of functions on the phase space to a noncommutative operator algebra on a Hilbert space. A similar procedure can be realized in geometry where the classical notions loose their applicability and pertinence and can be replaced by a new idea of space, represented by noncommutative algebras [1, 2].

The noncommutative space representation can be realized by the coordinate operators $\tilde{x}^\mu, \mu = 0,1,2$, satisfying the commutation relations (throughout the paper we adopt the natural units $\hbar = c = 1$):

$$[\tilde{x}^\mu, \tilde{x}^\nu] = \mathrm{i}\theta^{\mu\nu}, \tag{1}$$

where $\theta^{\mu\nu}$ is a $(2+1)$-dimensional anti-symmetric matrix with constant elements, where the antisymmetric matrix can be simply chosen as $\theta^{\mu\nu} = \theta\varepsilon^{\mu\nu}$ and $\theta^{\mu 0} = \theta^{0\mu} = 0$, where $\varepsilon^{\mu\nu}$ is the Levi-Civita symbol and θ is a parameter that measures the noncommutativity of coordinates, (see, e.g., [3] for a review on noncommutative geometry). The framework of Weyl's quantization procedure [4] provides a formalism that associates to the algebra of noncommuting coordinates $(\hat{A}, \bullet)$ an algebra of functions of commuting variables with deformed product $(A, *)$. We define a map $W : A \to \hat{A}$ such that an element from $\hat{A}$ is assigned to a function $f(x_0, x_1, x_2) = f(x)$ from A

$$W(f) = \hat{f} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \mathrm{d}^3k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\nu \tilde{x}^\nu} \tilde{f}(k), \tag{2}$$

where $\tilde{f}(k)$ is the Fourier transform of $f(x)$,

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_\nu x^\nu} f(x). \tag{3}$$

The multiplication of two operators $W(f)$ and $W(g)$ obtained from (2) yields another operator $W(f*g)$:

$$W(f) \bullet W(g) = \hat{f} \bullet \hat{g} = W(f*g) \tag{4}$$

with $f*g \in (A,*)$, a classical function which is well defined, as shown in sequel. Substituting (2) in (4) we obtain:

$$\begin{aligned} W(f*g) &= W(f) \bullet W(g) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathrm{d}^3k\, \mathrm{d}^3p\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\mu \tilde{x}^\mu}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_\nu \tilde{x}^\nu}\, \tilde{f}(k)\tilde{g}(p). \end{aligned} \tag{5}$$

In the case of canonical noncommutativity as given by (1), the product of the two exponentials in the above formula will give an exponential of a linear combination of the $\tilde{x}_\mu$ after applying the Baker-Campbell-Hausdorff formula

$$\mathrm{e}^{\hat{A}}\, \mathrm{e}^{\hat{B}} = \mathrm{e}^{\hat{A}+\hat{B}+\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]+\frac{1}{12}([\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]]+[[\hat{A},\hat{B}],\hat{B}]+\ldots)} \tag{6}$$

and considering the commutator relation $[[\tilde{x}^\mu, \tilde{x}^\nu], \tilde{x}^\rho] = 0$ thus makes all terms including more than one commutator in (6) vanish:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\mu \tilde{x}^\mu}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_\nu \tilde{x}^\nu} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_\nu+p_\nu)\tilde{x}^\nu - \frac{\mathrm{i}}{2}k_\mu p_\nu \theta^{\mu\nu}}. \tag{7}$$

We obtain $f*g$ by comparing (5) with (2) and replacing the operator $\tilde{x}$ by the coordinate x:

$$\begin{aligned} f*g = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathrm{d}^3k\, \mathrm{d}^3p\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_\nu+p_\nu)\tilde{x}^\nu - \frac{\mathrm{i}}{2}k_\mu p_\nu \theta^{\mu\nu}} \\ \cdot \tilde{f}(k)\tilde{g}(p). \end{aligned} \tag{8}$$

Thus, the Moyal–Weyl $*$-product is defined by:

$$f(x)*g(x) = \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_{x_\mu}\partial_{y_\nu}\right] f(x)g(y)_{|x=y}, \tag{9}$$

where ∂_{x_μ} is the partial derivative operator. Let us show that the star product inducing the noncommutativity is replaced by the usual product plus a nonlocal correction in the scalar function $f(x)$. Indeed, it is easy to show that

$$\begin{aligned} f(x)*g(x) = f(x)\cdot g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^n \partial_{\mu_1}\ldots\partial_{\mu_n} f(x) \\ \cdot \theta^{\mu_1\nu_1}\ldots\theta^{\mu_n\nu_n}\partial_{\nu_1}\ldots\partial_{\nu_n} g(x). \end{aligned} \tag{10}$$

Now, we replace ∂_{j_k} by $\mathrm{i}p_{j_k} = \frac{\partial}{\partial x^{j_k}}$ and introduce $\mathcal{P}_{i_k} = \theta^{i_k j_k} p_{j_k}$. We take the Fourier transform of $f(x)$, then

$$\begin{aligned} &\partial_{\mu_1}\ldots\partial_{\mu_n} f(x)\, \mathcal{P}_{\mu_1}\ldots\mathcal{P}_{\mu_n} g(x) \\ &\quad = \mathrm{i}^n \int \mathrm{d}^3k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} f(k)\, (k\mathcal{P})^n g(x). \end{aligned} \tag{11}$$

Summing over n in (10), we get:

$$f(x)*g(x) = \int \mathrm{d}^3k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\, \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\mathcal{P}k} f(k)\, g(x). \tag{12}$$

Now using $[p_i, x_j] = -\mathrm{i}\delta_{ij}$, we obtain

$$f(x)*g(x) = f\left(x - \frac{\mathcal{P}}{2}\right).g(x). \tag{13}$$

This result (13) is a crossing point from the noncommutative case to the commutative case, (i.e. the $*$-product may be changed into an ordinary product by shifting $\tilde{x}$ by $x - \frac{\mathcal{P}}{2}$).

One of the greatest successes of noncommutative geometry has been the unification of the forces of nature into a single gravitational action [5, 6]. Furthermore, the noncommutative geometry plays an important role in string theory and M-theory [7–9]. In addition, the noncommutative spaces have been included in quantum field theory by a great number of scientific researchers, see for example [10–17]. At the same time, we find less interest in studying these issues from the Feynman point of view. The main difficulty for applying this formalism (Feynman technique) is in the discrete nature of the spin, as discussed in many papers [18–21]. The first treatment was given by Fradkin and Berzin based on the idea of replacing Dirac-Pauli matrices by the magic number (Grassmann variables ψ^μ). Their fundamental idea is to write the formal equation of the causal Green function like the inverse of an operator and express this inverse as a standard evolution operator by using an integral representation. Generally, in the Dirac oscillator equation, we find a supersymmetric proper time having two parts: one fermionic and the other bosonic. In our work, we focus on the bosonic time, whose treatment is analogous to the so-called global projection [22]. This formalism was used in the noncommutative and commutative space-time in a few applications of quantum field theory [23–28].

The aim of this paper is to use supersymmetry formalism to calculate the Green function for the two-dimensional relativistic Dirac and Klein–Gordon oscillators in a noncommutative space with and without the presence of a constant magnetic field $\mathcal{B}$ perpendicular to the noncommutative plane $(\tilde{x},\tilde{y})$. Our results will be compared to those obtained by the Schrödinger formalism as determined by [29].

Instead of solving the path integral representation for the two-dimensional Dirac and Klein–Gordon oscillators in a noncommutative space by using the star-product procedure, we use Bopp's shift [30], which is defined in (13). It is known that the nonrelativistic harmonic oscillator in a noncommutative space has a similar behaviour to the Landau problem in a commutative space [31]. We generalize this relation to relativistic quantum mechanics and state that the Dirac and Klein–Gordon oscillators in noncommutative space has a similar behaviour to the Dirac and Klein–Gordon oscillators in commutative space with the presence of a constant magnetic field. However, for the Dirac oscillator noncommutative case, a new term will appear which implies that a charged fermion in a noncommutative space has an electric dipole moment.

This paper is outlined as follows. In Section 2, we show, via the path integral representation, an explicit calculation of the Klein–Gordon oscillator in noncommutative space relative to a 0-spin particle. The exact solution is obtained and the wave functions are expressed in terms of generalized Laguerre polynomials, as well as the energy spectra. In Section 3, and following the same steps, we treat the spin $1/2$ case in a noncommutative space with the help of the Fradkin and Gitman technique [23]. In addition, we also find some information on this physical system in the presence of a constant magnetic field just by replacing ω by $\varpi = \omega + \frac{e\mathcal{B}}{2m}$, and we could also take the commutative space case when $\theta \to 0$. We obtain similar results than previous studies. A conclusion is given in Section 4. We provide at the end of the paper an appendix reviewing the Grassmann integration technique.

2. The Green Function of a Klein–Gordon Oscillator in a Noncommutative Space Representation

Let $G(x,y)$ be the Green function of the usual Klein–Gordon oscillator for a spinless particle, then the propagator of the scalar particle on NC space is the causal Green function $G^{(\theta)}(x,y)$ of the Klein–Gordon oscillator equation. It is usually written as

$$\left[p_0^2 + (p_i + \mathrm{i}m\omega x_i)\left(p^i - \mathrm{i}m\omega x^i\right) - m^2\right] * G(x,y) = -\delta^3(x-y), \tag{14}$$

where the Moyal–Weyl (or star) product between the two functions (14) is defined in (8). We have shown in the preceding section that on NC quantum mechanics the Moyal $*$-product can be replaced by a Bopp's shift [30], and the operators terms $\hat{p}_0^2$ and $\hat{p}^2$ are unchanged, however the scalar function of x will change, yielding the equivalent in a commutative space

$$\left[\hat{p}_0^2 + \left(\widehat{\tilde{p}}_i + \mathrm{i}m\omega\widehat{\tilde{x}}_i\right)\left(\widehat{\tilde{p}}^i - \mathrm{i}m\omega\widehat{\tilde{x}}^i\right) - m^2\right] G^{(\theta)}\left(x_f,x_i\right) = -\delta^3\left(x_f - x_i\right). \tag{15}$$

The operators $\widehat{\tilde{x}}_i$ are noncommutative variables obeying the commutation relation (1). We can obtain (1) by using the following linear transformation between noncommutative variables $\left(\widehat{\tilde{x}}_i, \widehat{\tilde{p}}_i\right)$ and commutative variables $(\hat{x}_i, \hat{p}_i)$:

$$\begin{aligned} \widehat{\tilde{x}}_i &= \hat{x}_i - \frac{\theta_{ij}}{2}\hat{p}_j, \quad \text{with } i,j = 1,2, \\ \widehat{\tilde{p}}_i &= \hat{p}_i, \end{aligned} \tag{16}$$

where $\hat{p}_i$ are momentum operators conjugated to $\hat{x}_i$, which satisfy ordinary Heisenberg commutation. It appears therefore that the dynamics of a Klein–Gordon oscillator in a noncommutative space has similar behaviour to the same dynamics of a particle in a commutative space and in a constant magnetic field.

Following Schwinger [32], we present $G^{(\theta)}(x,y)$ as a matrix element of an operator $\hat{G}^{(\theta)}$,

$$G^{(\theta)}\left(x_f;y_f,x_i;y_i\right) = \langle x_f y_f|\hat{G}^{(\theta)}|x_i y_i\rangle, \tag{17}$$

Here $|x\rangle$ are eigenvectors of some self-adjoint operators of coordinates $\hat{x}_i$. The corresponding canonical-conjugated operators of momenta are $\hat{p}_i$ so that

$$\begin{aligned} &[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = \mathrm{i}\delta_{ij}, \quad \hat{x}_i|x\rangle = x_i|x\rangle, \\ &\langle x \mid x'\rangle = \delta^3(x-x'); \quad \int |x\rangle\langle x|\,\mathrm{d}x = I; \\ &\hat{p}_i|p\rangle = p_i|p\rangle, \quad \langle p \mid p'\rangle = \delta^3(p-p'); \\ &\int |p\rangle\langle p|\,\mathrm{d}p = I; \quad \langle x \mid p\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}. \end{aligned} \tag{18}$$

Now one can use the Schwinger proper-time representation for the inverse operator. We get

$$G^{(\theta)}\left(x_f;y_f,x_i;y_i\right) = -\mathrm{i}\int_0^\infty \langle x_i y_i|\exp\left(-\mathrm{i}\lambda\left(\hat{H}^{(\theta)} - \mathrm{i}\varepsilon\right)\right)|x_f y_f\rangle\,\mathrm{d}\lambda, \tag{19}$$

where λ is the proper-time and the infinitesimal ε has to be sent to zero at the end of the calculations in order to reobtain the Green function (17). The Hamiltonian $\hat{H}^{(\theta)}$ consists of two terms: the first is the Hamiltonian operator of the usual quantum system and the other term depends on the noncommutative space θ:

$$\hat{H}^{(\theta)} = \hat{p}_0^2 - m^2 - \left(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2\right) - (m\omega)^2\left(\hat{x}^2 + \hat{y}^2\right) + 2m\omega - \frac{(m\omega\theta)^2}{4}\left(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2\right) + (m\omega)^2\,\theta\left(\hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x\right). \tag{20}$$

Here and in what follows, we include the factor $(-\mathrm{i}\varepsilon)$ in m^2. In order to derive a path integral representation for $G^{(\theta)}$, we follow the standard discretization method for the kernel (19) as done in [23]. Then we get the Lagrangian path integral representation for the Green function $G^{(\theta)}$,

$$\begin{aligned} &G^{(\theta)}\left(x_f, y_f, x_i, y_i, t_f, t_i\right) \\ &= -\mathrm{i}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}e_0}{2}\int DeD\pi_e \int DxDyDt \int Dp_0 \mathcal{M}^{(\theta)}(e) \\ &\cdot \exp\left\{\mathrm{i}\int_0^{\frac{e}{2}}\left[p_0^2 - m^2 + \frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{4\omega_1}\right.\right. \\ &- (m\omega)^2\left(1 - \frac{(m\omega)^2\theta^2}{4\omega_1}\right)\left(x^2+y^2\right) \\ &\left.\left. + \frac{(m\omega)^2}{2\omega_1}\theta\left(\dot{y}x - \dot{x}y\right) + 2m\omega + p_0\dot{t} + \pi_e\dot{e}\right]\mathrm{d}s\right\}, \end{aligned} \tag{21}$$

where $e(s) = 2\lambda(s)$ and $\omega_1 = 1 + \frac{(m\omega\theta)^2}{4}$. The functional integration in (21) goes over trajectories $x_\mu(s)$, $p_\mu(s)$, $e(s)$, and $\pi_e(s)$, parameterized by some invariant parameter $s \in [0,1]$ and obeying the boundary conditions $\vec{x}(0) = \vec{x}_i$, $\vec{x}(1) = \vec{x}_f$, $t(0) = t_i$, $t(1) = t_f$, $e(0) = e_0$; the measure $\mathcal{M}^{(\theta)}(e)$ has the form

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{(\theta)}(e) &= \int Dp_x Dp_y \\ &\cdot \exp\left\{-\mathrm{i}\int_0^{\frac{e}{2}}\left(1 + \frac{(m\omega\theta)^2}{4}\right)\left(p_x^2 + p_y^2\right)\mathrm{d}s\right\}. \end{aligned} \tag{22}$$

We can remove the functional integration over t and e after integrating over p_0 and π_e which gives δ-functions for $\dot{e}$ and $\dot{t}$. It is clear that this problem will be solved easily by the polar coordinates; then, the expression of the Green function (21) becomes

$$\begin{aligned} &G^{(\theta)}\left(r_f, \varphi_f, r_i, \varphi_i, T\right) = \mathrm{i}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}e_0}{2}\int \frac{\mathrm{d}p_0}{2\pi}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_0T} \\ &\cdot \mathcal{M}\left(e_0, \omega_1\right)\exp\left\{\frac{\mathrm{i}e_0}{2}\left[p_0^2 - m^2 + 2m\omega\right]\right\} \\ &\cdot \int rDr(t)\,D\varphi(t)\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{2}\int_0^{e_0\omega_1}\left[\left[\dot{r}^2\right.\right.\right. \\ &\left. + r^2\dot{\varphi}^2 - \frac{(m\omega)^2}{\omega_1}\left(1 - \frac{(m\omega)^2\theta^2}{4\omega_1}\right)r^2 \right. \\ &\left.\left. + \frac{(m\omega)^2\theta}{\omega_1}r^2\dot{\varphi}\right]\mathrm{d}s\right\}. \end{aligned} \tag{23}$$

After a shift on the angle $\varphi(s) \to \varphi(s) + \frac{(m\omega)^2\theta}{2\omega_1}s$, this Green function (23) becomes formally identical with that of the radial path integral solution for the radial harmonic oscillator with time-independent frequency [33]. The solution of this path integral can be written as

$$\begin{aligned} &G^{(\theta)}\left(r_f, \varphi_f, r_i, \varphi_i, T\right) = \mathrm{i}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}e_0}{2}\int \frac{\mathrm{d}p_0}{2\pi}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_0T} \\ &\cdot \exp\left\{\mathrm{i}\frac{e_0}{2}\left[p_0^2 - m^2 + 2m\omega\right]\right\} \\ &\cdot \frac{m\omega}{2\pi\mathrm{i}\sqrt{\omega_1}\sin\left(m\omega\sqrt{\omega_1}e_0\right)} \\ &\cdot \exp\left[-\frac{m\omega}{2\mathrm{i}\sqrt{\omega_1}}\left(r_i^2 + r_f^2\right)\cot\left(m\omega\sqrt{\omega_1}e_0\right)\right] \\ &\cdot \sum_{m_\ell=0}^{\infty}\exp\left[\mathrm{i}m_\ell\left(\varphi_f - \varphi_i + \frac{(m\omega)^2\theta}{2}e_0\right)\right] \\ &\cdot I_{m_\ell}\left(\frac{m\omega r_i r_f}{\mathrm{i}\sqrt{\omega_1}\sin\left(m\omega\sqrt{\omega_1}e_0\right)}\right). \end{aligned} \tag{24}$$

For determining the energy-levels and wave functions, we must use the Hille-Hardy formula and the properties of Laguerre polynomials series [33] in (24), then we integrate over the proper time $\frac{\mathrm{d}e_0}{2}$. We get finally

$$\begin{aligned} &G^{(\theta)}\left(r_f, \varphi_f, r_i, \varphi_i, T\right) = -\int \frac{\mathrm{d}p_0}{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_0T}}{p_0^2 - p_{0n}^2} \\ &\cdot \sum_{m_\ell}\sum_n \Psi_{n,m_\ell}^{(\theta)}\left(r_f, \varphi_f\right)\Psi_{n,m_\ell}^{*(\theta)}\left(r_i, \varphi_i\right), \end{aligned} \tag{25}$$

with $\Psi_{n,m_\ell}^{(\theta)}(r,\varphi)$

$$\Psi_{n,m_\ell}^{(\theta)}(r,\varphi)=\left[\frac{m\omega}{\pi\sqrt{\omega_1}}\frac{n!}{(n+|m_\ell|)!}\right]^{1/2}\left(\frac{m\omega}{\sqrt{\omega_1}}r^2\right)^{(m_\ell)/2}\exp\left(\mathrm{i}m_\ell\varphi-\frac{m\omega}{2\sqrt{\omega_1}}r^2\right)L_n^{(|m_\ell|)}\left(\frac{m\omega}{\sqrt{\omega_1}}r^2\right), \tag{26}$$

where $L_n^{(|m_\ell|)}$ are generalized Laguerre polynomials. The poles of $G^{(\theta)}\left(r_f,\varphi_f,r_i,\varphi_i,T\right)$ yield the discrete energy spectrum

$$p_{0n}=\pm\sqrt{2m\omega\sqrt{\omega_1}\,[2n+|m_\ell|+1]-m_\ell\,(m\omega)^2\,\theta+m^2-2m\omega}. \tag{27}$$

To evaluate the wave functions and energy spectrum, let us integrate over the p_0 variable. This can be converted to a complex integration along the special contour C, and then using the residue theorem, we get

$$\oint\frac{\mathrm{d}p_0}{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_0T}}{p_0^2-p_{0n}^2}=-\mathrm{i}\left[\Theta(T)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_n^{(\theta)}T}}{2E_n^{(\theta)}}+\Theta(-T)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_n^{(\theta)}T}}{2E_n^{(\theta)}}\right], \tag{28}$$

where the energy eigenvalues are given by

$$E_n^{(\theta)}=\sqrt{2m\omega\sqrt{1+\frac{(m\omega\theta)^2}{4}}\,[2n+|m_\ell|+1]-m_\ell\,(m\omega)^2\,\theta+m^2-2m\omega}. \tag{29}$$

In (28), we have two types of propagation, one with positive energy $(+E_n^{(\theta)})$ propagating to the future and the other with negative energy $(-E_n^{(\theta)})$ propagating to the past. From this result, we deduce the energy spectrum and the corresponding wave functions from (25) by writing

$$\begin{aligned}&G^{(\theta)}\left(r_f,\varphi_f,r_i,\varphi_i;T\right)=\\&-\sum_n\left[\Theta(T)\,\xi_n^{(\theta)}\left(r_f,\varphi_f\right)\xi_n^{*(\theta)}\left(r_i,\varphi_i\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_n^{(\theta)}T}\right.\\&\left.+\Theta(-T)\,\xi_n^{(\theta)}\left(r_f,\varphi_f\right)\xi_n^{*(\theta)}\left(r_i,\varphi_i\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_n^{(\theta)}T}\right],\end{aligned} \tag{30}$$

where $E_n^{(\theta)}$ is defined in (29), and the $\xi_n^{(\theta)}(r,\varphi)$ are given by

$$\begin{aligned}\xi_n^{(\theta)}(r,\varphi)=&\sum_{m_\ell}\frac{1}{2E_n^{(\theta)}}\left(\frac{m\omega}{\pi\sqrt{1+\frac{(m\omega\theta)^2}{4}}}\frac{n!}{(n+|m_\ell|)!}\right)^{1/2}\\&\cdot\left(\frac{m\omega}{\sqrt{1+\frac{(m\omega\theta)^2}{4}}}r^2\right)^{(m_\ell)/2}\\&\cdot\exp\left(\mathrm{i}m_\ell\varphi-\frac{m\omega}{2}\left(1+\frac{(m\omega\theta)^2}{4}\right)^{-1/2}r^2\right)L_n^{(|m_\ell|)}\\&\cdot\left(m\omega\left(1+\frac{(m\omega\theta)^2}{4}\right)^{-1/2}r^2\right)\end{aligned} \tag{31}$$

with (r,φ) commutative space coordinates.

3. The Green Function of a Dirac Oscillator in a Noncommutative Space Representation

In order to determine the Dirac oscillator in commutative space, we introduce the nonminimal substitution $p\to p-\mathrm{i}m\omega x\gamma^0$, which was proposed for the first time by Moshinsky and Szczepaniak [34], where ω is the oscillator frequency, γ^0 the usual Pauli matrices, and m the rest mass of the particle. In this section, we intend to construct the path integral for a two-dimensional relativistic Dirac oscillator propagator in a noncommutative space representation following the Fradkin–Gitman method [18, 19]. The propagator of the Dirac oscillator is governed by the causal Green function $S^c\left(x_f,x_i\right)$,

$$\begin{aligned}&\left(\gamma^\mu\hat{\pi}_\mu-m\right)*S^c\left(x_f,x_i\right)=-\delta^3\left(x_f-x_i\right);\\&m^2\to m^2-\mathrm{i}\varepsilon.\end{aligned} \tag{32}$$

In a treatment similar to that applied to (13) in Section 2, (32) can be rewritten as

$$\begin{aligned}&\left(\gamma^\mu\tilde{\hat{\pi}}_\mu-m\right)S^{(\theta)c}\left(x_f,x_i\right)=-\delta^3\left(x_f-x_i\right);\\&m^2\to m^2-\mathrm{i}\varepsilon.\end{aligned} \tag{33}$$

The components $\tilde{\hat{\pi}}$ are

$$\tilde{\hat{\pi}}_0=\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t},\quad\tilde{\hat{\pi}}_i=\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_i}-\mathrm{i}m\omega\gamma^0\tilde{\hat{x}}_i, \tag{34}$$

where $\tilde{\hat{x}}_i=\hat{x}_i-\frac{\theta^{ij}}{2}\hat{p}_j$ and the coordinates $(\hat{x}_i,\hat{p}_i)$ satisfy the usual Heisenberg bracket. The γ-matrices in

$(2+1)$ dimensions are usual Dirac matrices which satisfy the standard commutations

$$[\gamma^\mu,\gamma^\nu]_+ = 2\eta^{\mu\nu},\ \ \gamma^\mu\gamma^\nu = \mathrm{i}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}\gamma^\alpha,\quad \mu,\nu,\alpha = 0,1,2. \tag{35}$$

Those Dirac matrices relate to the Pauli matrices, and they obey the relations

$$\gamma^0 = \sigma^3,\ \ \gamma^1 = \gamma^0\sigma^1;\ \ \gamma^2 = \gamma^0\sigma^2. \tag{36}$$

First, we present $S^{(\theta)c}\left(x_f,y_f,x_i,y_i\right)$ as a matrix element of an operator $\hat{S}^{(\theta)c}$,

$$S^{(\theta)c}\left(x_f,y_f,x_i,y_i\right) = \langle x_f y_f|\hat{S}^{(\theta)c}|x_i y_i\rangle, \tag{37}$$

where $\hat{S}^{(\theta)c}$ is given by

$$\hat{S}^{(\theta)c} = \left(\gamma^\nu\widetilde{\pi}_\nu + m\right)\cdot\frac{1}{\left(\gamma^\mu\widetilde{\pi}_\mu - m\right)\left(\gamma^\nu\widetilde{\pi}_\nu + m\right)}. \tag{38}$$

Now, in order to build a global representation propagator, we use the relation $\int|x_f\rangle\langle x_f|\,\mathrm{d}x_f = 1$ between $(\gamma^\nu\widetilde{\pi}_\nu + m)$ and $[(\gamma^\mu\widetilde{\pi}_\mu - m)(\gamma^\nu\widetilde{\pi}_\nu + m)]^{-1}$. We get

$$S^{(\theta)c}\left(x_f,y_f,x_i,y_i\right) = \left(\gamma^\nu\widetilde{\pi}_\nu + m\right)_{\mathrm{out}}\cdot\tilde{S}^{(\theta)g}\left(x_f,y_f,x_i,y_i\right), \tag{39}$$

with

$$\tilde{S}^{(\theta)g}\left(x_f,y_f,x_i,y_i\right) = \langle x_f y_f|\frac{1}{\left(\gamma^\mu\widetilde{\pi}_\mu - m\right)\left(\gamma^\nu\widetilde{\pi}_\nu + m\right)}|x_i y_i\rangle. \tag{40}$$

Through the Schwinger proper-time method, $\tilde{S}^{(\theta)g}\left(x_f,y_f,x_i,y_i\right)$ is represented as below:

$$\tilde{S}^{(\theta)g}\left(x_f,y_f,x_i,y_i\right) = -\mathrm{i}\int_0^\infty \mathrm{d}\lambda\,\langle x_f y_f|\exp\left[-\mathrm{i}\hat{H}^{(\theta)}(\lambda)\right]|x_i y_i\rangle, \tag{41}$$

where the Hamiltonian $\hat{H}^{(\theta)}(\lambda)$ consists of two parts: one is the Hamiltonian of the Dirac oscillator in the commutative space and the second term is considered to be a correction imposed by noncommutativity which depends on θ,

$$\hat{H}^{(\theta)}(\lambda) = -\lambda\left(\gamma^\mu\widetilde{\pi}_\mu - m\right)\left(\gamma^\nu\widetilde{\pi}_\nu + m\right) \tag{42}$$

$$\begin{aligned}
&= -\lambda\Big[\hat{p}_0^2 - m^2 - \left(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2\right) - m^2\omega^2\left(\hat{x}^2 + \hat{y}^2\right) \\
&\quad -\frac{\mathrm{i}}{2}F_{ij}^{(\theta)}\gamma^i\gamma^j + 2m\omega\left(\hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x\right)\Big] - \lambda\left(\frac{m\omega\theta}{2}\right) \\
&\quad \cdot\left[2m\omega\left(\hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x\right) - \left(2 + \frac{m\omega\theta}{2}\right)\left(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2\right)\right].
\end{aligned} \tag{43}$$

So, in order to build a path integral representation for $S^{(\theta)c}(x_f,y_f,x_i,y_i)$, we follow the standard discretization method for the kernel of (41). Usually, we write $\exp(-\mathrm{i}\hat{H}^{(\theta)}(\lambda)) = \exp(-\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(\theta)}(\lambda)}{N+1})^{N+1}$, and we insert N identities $\int|x\rangle\langle x|\,\mathrm{d}x = 1$, between all the operators $\exp(-\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(\theta)}(\lambda)}{N+1})$. Next, we introduce $(N+1)$ integrations $\int\mathrm{d}\lambda_k\delta\left(\lambda_k - \lambda_{k-1}\right) = 1$ and $(N+1)$ identities $\int|p\rangle\langle p|\,\mathrm{d}p = 1$. This transforms the expression of $S^{(\theta)c}\left(x_f,y_f,x_i,y_i\right)$ into the following Hamiltonian path integral representation:

$$\begin{aligned}
&S^{(\theta)c}\left(x_f,y_f,x_i,y_i,t_f,t_i\right) = (-\mathrm{i})\left(\gamma^\nu\widetilde{\pi}_\nu + m\right)_{\mathrm{out}}\mathbb{T} \\
&\cdot\int_0^\infty\mathrm{d}\lambda_0\int DtDxDy\int Dp_0Dp_xDp_y\int D\lambda D\pi_\lambda \\
&\cdot\exp\Big\{\mathrm{i}\int_0^1\Big[\lambda\Big[p_0^2 - m^2 - \omega_2^2\left(p_x^2 + p_y^2\right) \\
&-m^2\omega^2\ \left(x^2 + y^2\right) - \frac{\mathrm{i}}{2}F_{ij}^{(\theta)}\gamma^i\gamma^j \\
&+2m\omega\omega_2\left(xp_y - yp_x\right) + p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_0\dot{t} + \pi_\lambda\dot{\lambda}\Big]\Big]\,\mathrm{d}s\Big\},
\end{aligned} \tag{44}$$

where $\omega_2 = 1 + \frac{m\omega\theta}{2}$ and $F^{(\theta)}$ is an antisymmetric matrix, known as

$$F^{(\theta)} = 2m\omega\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\left(1 + \frac{m\omega\theta}{2}\right) \\ 0 & \left(1 + \frac{m\omega\theta}{2}\right) & 0 \end{pmatrix}, \tag{45}$$

and $\vec{x}(s)$, $\vec{p}(s)$, $\lambda(s)$, and $\pi_\lambda(s)$ are bosonic trajectory variables obeying the boundary condition $\vec{x}(0) = \vec{x}_i$, $\vec{x}(1) = \vec{x}_f$, $\lambda(0) = \lambda_0$. The ordering operator $\mathbb{T}$ acts on the γ-matrices which are supposed to depend formally on the time parameter s. Via a path integral over Grassmannian odd trajectories [18, 19] , the Hamiltonian path integral representation for (44), can be transformed as follows:

$$
\begin{aligned}
&S^{(\theta)g}\left(x_f,y_f,x_i,y_i,T\right)=(-\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma^n\frac{\delta_l}{\delta\xi^n}}\\
&\cdot\int\frac{\mathrm{d}p_0}{2\pi}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_0T}\int_0^\infty\mathrm{d}\lambda_0\int DxDy\int Dp_xDp_y\int D\lambda D\pi_\lambda\\
&\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_0\left(p_0^2-m^2\right)}\int_{\psi(0)+\psi(1)=\xi}\mathcal{D}\psi\\
&\cdot\exp\left\{\mathrm{i}\int_0^1\left[\lambda\left[-\omega_2^2\left(p_x^2+p_y^2\right)-m^2\omega^2\left(x^2+y^2\right)\right.\right.\right.\\
&\left.+2\mathrm{i}F_{nk}^{(\theta)}\psi^n\psi^k+2m\omega\omega_2\left(xp_y-yp_x\right)\right]+p_x\dot{x}+p_y\dot{y}\\
&\left.\left.+\pi_\lambda\dot{\lambda}-\mathrm{i}\psi_n\dot{\psi}^n\right]\mathrm{d}s+\psi_n(1)\,\psi^n(0)\right\}_{\xi=0},
\end{aligned}
\tag{46}
$$

where the measure $\mathcal{D}\psi$ is given by

$$
\mathcal{D}\psi=D\psi\cdot\left[\int_{\psi(0)+\psi(1)=0}D\psi\exp\left(\int_0^1\psi_n\dot{\psi}^n\,\mathrm{d}s\right)\right]^{-1}
\tag{47}
$$

and ξ_n are auxiliary Grassmann (odd) variables, anticommuting by definition with the γ-matrices; $\psi_n(s)$ are odd trajectories of integration. First, one can integrate over $\pi_\lambda(s)$, and then using the arising δ-functions to remove the functional integration over λ. It is important to replace the integration over ψ by the odd velocities ω, because of the boundary conditions $\psi^n(0)+\psi^n(1)=\xi^n$. Following the replacement,

$$
\psi(s)=\frac{1}{2}\int_0^1\varepsilon\left(s-s'\right)\omega\left(s'\right)\mathrm{d}s'+\frac{\xi}{2},
\tag{48}
$$

with $\varepsilon(s)$ the sign of s. Then (46) becomes

$$
\begin{aligned}
&S^{(\theta)g}\left(x_f,y_f,x_i,y_i,T\right)=(-\mathrm{i})\exp\left(\mathrm{i}\gamma^n\frac{\delta_l}{\delta\xi^n}\right)\\
&\cdot\int\frac{\mathrm{d}p_0}{2\pi}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_0T}\int_0^\infty\mathrm{d}\lambda_0\exp\left(\mathrm{i}\lambda_0\left(p_0^2-m^2\right)\right)\\
&\cdot\int DxDy\int Dp_xDp_y\int\mathcal{D}\omega
\end{aligned}
\tag{49}
$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot\exp\left\{\mathrm{i}\int_0^1\left[\lambda_0\left[-\omega_2^2\left(p_x^2+p_y^2\right)-(m\omega)^2\left(x^2+y^2\right)\right.\right.\right.\\
&\left.+2m\omega\omega_2\left(xp_y-yp_x\right)\right]-\frac{\mathrm{i}\lambda_0}{2}\left(\omega^n\varepsilon-\xi^n\right)\\
&\left.\left.\cdot F_{nk}^{(\theta)}\left(\varepsilon\omega^k+\xi^k\right)+\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_n\varepsilon\omega^n+p_x\dot{x}+p_y\dot{y}\right]\mathrm{d}s\right\}_{\xi=0},
\end{aligned}
$$

where the measure $\mathcal{D}\omega$ is

$$
\mathcal{D}\omega=D\omega\left[\int D\omega\exp\left(-\frac{1}{2}\omega^n\varepsilon\omega_n\right)\right]^{-1}.
\tag{50}
$$

Through (49), we can see that the path integral in Grassmann variables is Gaussian, which is clearly shown in the appendix. Following the same steps of the account in the previous Section 2 (as in [33]), we can find $S^{(\theta)g}$:

$$
\begin{aligned}
&S^{(\theta)g}\left(r_f,\varphi_f,r_i,\varphi_i,T\right)=\\
&(-\mathrm{i})\sum_n\sum_{m_\ell}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}e_0}{2}\int\frac{\mathrm{d}p_0}{2\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{e_0}{2}\left(p_0^2-m^2\right)-\mathrm{i}p_0T}\\
&\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left[e_0m\omega\left(1+\frac{m\omega\theta}{2}\right)\left((2n+|m_\ell|+1)-m_\ell\right)\right]}\\
&\cdot\Psi_{n,m_\ell}^{(\theta)}\left(r_f,\varphi_f\right)\Psi_{n,m_\ell}^{(\theta)*}\left(r_i,\varphi_i\right)\\
&\cdot\left[\cos\left(2m\omega\omega_2e_0\right)+\gamma^0\sin\left(2m\omega\omega_2e_0\right)\right],
\end{aligned}
\tag{51}
$$

where $\Psi_{n,m_\ell}^{(\theta)}(r,\varphi)$ is given by

$$
\begin{aligned}
&\Psi_{n,m_\ell}^{(\theta)}(r,\varphi)=\left[\frac{m\omega}{\pi\omega_2}\frac{n!}{(n+|m_\ell|)!}\right]^{1/2}\left(\frac{m\omega}{\omega_2}r^2\right)^{(m_\ell)/2}\\
&\cdot\exp\left(\mathrm{i}m_\ell\varphi-\frac{m\omega}{2\omega_2}r^2\right)L_n^{(|m_\ell|)}\left(\frac{m\omega}{\omega_2}r^2\right).
\end{aligned}
\tag{52}
$$

$L_n^{(|m_\ell|)}$ is a generalized Laguerre polynomial, and m_ℓ is an integer number. In addition to that, we integrate over $\frac{\mathrm{d}e_0}{2}$, then we act through the operator $(\gamma^\nu\widetilde{\hat{\pi}}_\nu+m)_{\text{out}}$. Finally, we use the properties of Laguerre's polynomials [35] to obtain:

$$
\begin{aligned}
&S^{(\theta)c}\left(r_f,\varphi_f,r_i,\varphi_i\right)=\sum_{n\in N}\sum_{m_\ell\in\mathcal{Z}}\frac{1}{z_f^{1/4}z_i^{1/4}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(z_f+z_i)}{2}}\left[\frac{m\omega}{\omega_2}\frac{n!}{(n+|m_\ell|)!}\right]\int\frac{\mathrm{d}p_0}{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_0T}}{p_0^2-p_n^2}\\
&\cdot\begin{bmatrix}
\begin{gathered}(p_0+m)\left(z_f\right)^{\left(m_\ell+\frac{1}{2}\right)/2}\left(z_i\right)^{\left(m_\ell+\frac{1}{2}\right)/2}\\ \cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}m_\ell\left(\varphi_f-\varphi_i\right)}L_n^{(|m_\ell|)}\left(z_i\right)L_n^{(|m_\ell|)}\left(z_f\right)\end{gathered} &
\begin{gathered}\left(2\mathrm{i}\sqrt{\frac{m\omega}{n\omega_2}}\right)\left(z_f\right)^{\left(m_\ell+\frac{1}{2}\right)/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m_\ell\varphi_f}L_n^{|m_\ell|}\left(z_f\right)\\ \cdot\left(z_i\right)^{\left(m_\ell+\frac{3}{2}\right)/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m_\ell+1)\varphi_i}L_{n-1}^{|m_\ell+1|}\left(z_i\right)\end{gathered}\\[2ex]
\begin{gathered}\left(2\mathrm{i}\sqrt{\frac{m\omega}{n\omega_2}}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m_\ell+1)\varphi_f}\left(z_f\right)^{\left(m_\ell+\frac{3}{2}\right)/2}L_{n-1}^{|m_\ell+1|}\left(z_f\right)\\ \cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m_\ell\varphi_i}\left(z_i\right)^{\left(m_\ell+\frac{1}{2}\right)/2}L_n^{|m_\ell|}\left(z_i\right)\end{gathered} &
\begin{gathered}\frac{1}{n}\left(-p_0+m\right)\left(z_f\right)^{\left(m_\ell+\frac{3}{2}\right)/2}\left(z_i\right)^{\left(m_\ell+\frac{3}{2}\right)/2}\\ \cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m_\ell+1)\left(\varphi_f-\varphi_i\right)}L_{n-1}^{(|m_\ell+1|)}\left(z_i\right)L_{n-1}^{(|m_\ell+1|)}\left(z_f\right)\end{gathered}
\end{bmatrix},
\end{aligned}
\tag{53}
$$

where $z=\frac{m\omega}{\omega_2}r^2$ and

$$p_n^2 = m^2 + 2m\omega\omega_2\left(2n+|m_\ell|+1\right) - m^2\omega^2\theta\left(m_\ell+1\right) - 2m\omega m_\ell - 2m\omega. \tag{54}$$

The determination of the wave functions is performed by applying the residue theorem. Let's choose a special contour C in the complex plane. The poles of the Green function are positive energies and negative energies are given respectively by $p_+^0 = E_n - \mathrm{i}\varepsilon$, $p_-^0 = -E_n + \mathrm{i}\varepsilon$. For positive energies p_+^0, the contour of integration is chosen below the real axis with $T>0$. On the other hand, for negative energies p_-^0, it is chosen above the real axis with $T<0$. In conclusion, we have

$$\oint \frac{\mathrm{d}p_0}{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_0T}}{p_0^2-p_{0n}^2} = -\mathrm{i}\left[\Theta(T)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_n^{(\theta)}T}}{2E_n^{(\theta)}} + \Theta(-T)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_n^{(\theta)}T}}{2E_n^{(\theta)}}\right] \tag{55}$$

and

$$\oint \frac{\mathrm{d}p_0}{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_0T}}{p_0^2-p_{0n}^2}\left(p_0\pm m\right) = -\mathrm{i}\left[\Theta(T)\frac{\left(E_n^{(\theta)}\pm m\right)}{2E_n^{(\theta)}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_n^{(\theta)}T} + \Theta(-T)\frac{\left(E_n^{(\theta)}\mp m\right)}{2E_n^{(\theta)}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_n^{(\theta)}T}\right], \tag{56}$$

where

$$E_n^{(\theta)} = \sqrt{m^2 + 2m\omega\omega_2\left(2n+|m_\ell|+1\right) - m^2\omega^2\theta\left(m_\ell+1\right) - 2m\omega m_\ell - 2m\omega}. \tag{57}$$

In (55), we have two types of propagation, one with positive energy $+E_n^{(\theta)}$ propagating to the future and the other with negative energy $-E_n^{(\theta)}$ propagating to the past. We get the propagator in NC space but defined with commutative variables:

$$S^{(\theta)}\left(r_f,\varphi_f,r_i,\varphi_i;T\right) = \sum_n\sum_{m_\ell}\left[\Theta(T)\,\Psi_{n,m_\ell}^{(\theta)+}\left(r_f,\varphi_f\right)\bar{\Psi}_{n,m_\ell}^{(\theta)+}\left(r_i,\varphi_i\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_n^{(\theta)}T} + \Theta(-T)\,\Psi_{n,m_\ell}^{(\theta)-}\left(r_f,\varphi_f\right)\bar{\Psi}_{n,m_\ell}^{(\theta)-}\left(r_i,\varphi_i\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_n^{(\theta)}T}\right]. \tag{58}$$

From this result, we deduce the energy spectrum with $\omega_2 = 1+\frac{m\omega\theta}{2}$ in (57),

$$E_n^{(\theta)} = \pm\sqrt{m^2 + 2m\omega\left(1+\frac{m\omega\theta}{2}\right)\left(2n+|m_\ell|+1\right) - m^2\omega^2\theta\left(m_\ell+1\right) - 2m\omega m_\ell - 2m\omega} \tag{59}$$

or otherwise

$$E_n^{(\theta)} = \pm\sqrt{m^2 + 2n\left(2m\omega+m^2\omega^2\theta\right) + |m_\ell|\left(2m\omega+m^2\omega^2\theta\right)\left(1\mp 1\right)}. \tag{60}$$

The corresponding wave functions are

$$\Psi_{n,m_\ell}^{(\theta)+}(r,\varphi) = \frac{1}{\left(\frac{m\omega}{\omega_2}r^2\right)^{1/4}}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m_\ell\varphi}\,\psi_1^{(\theta)+}(r)\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m_\ell+1)\varphi}\,\psi_2^{(\theta)+}(r)\end{pmatrix},$$
$$\Psi_{n,m_\ell}^{(\theta)-}(r,\varphi) = \frac{1}{\left(\frac{m\omega}{\omega_2}r^2\right)^{1/4}}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m_\ell\varphi}\,\psi_1^{(\theta)-}(r)\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m_\ell+1)\varphi}\,\psi_2^{(\theta)-}(r)\end{pmatrix}. \tag{61}$$

The components of the wave functions $\Psi_{n,m_\ell}^{(\theta)+}(r,\varphi)$ and $\Psi_{n,m_\ell}^{(\theta)-}$ are respectively

$$\psi_{1,n,m_\ell}^{(\theta)+}(r) = \left[\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\omega_2}}\,\frac{n!}{\pi\left(n+|m_\ell|\right)!}\,\frac{E_n^{(\theta)}+m}{2E_n^{(\theta)}}\right]^{1/2} \cdot\left(\frac{m\omega}{\omega_2}r^2\right)^{(m_\ell+1/2)/2}\mathrm{e}^{-\frac{m\omega r^2}{2\omega_2}}\,L_n^{(|m_\ell|)}\left(\frac{m\omega}{\omega_2}r^2\right), \tag{62}$$

$$\psi_{2,n,m_\ell}^{(\theta)+}(r) = \mathrm{i}\left[\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\omega_2}}\,\frac{(n-1)!}{\pi\left(n+|m_\ell|\right)!}\,\frac{E_n^{(\cdot\theta)}-m}{E_n^{(\theta)}}\right]^{1/2} \cdot\left(\frac{m\omega}{\omega_2}r^2\right)^{(m_\ell+3/2)/2}\mathrm{e}^{-\frac{m\omega r^2}{2\omega_2}}\,L_{n-1}^{(|m_\ell+1|)}\left(\frac{m\omega}{\omega_2}r^2\right), \tag{63}$$

$$\psi^{(\theta)-}_{1,n,m_\ell}(r)=\left[\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\omega_2}}\frac{n!}{\pi\left(n+|m_\ell|\right)!}\frac{E^{(\theta)}_n-m}{2E^{(\theta)}_n}\right]^{1/2}\cdot\left(\frac{m\omega}{\omega_2}r^2\right)^{(m_\ell+1/2)/2}\mathrm{e}^{-\frac{m\omega r^2}{2\omega_2}}L^{(|m_\ell|)}_n\left(\frac{m\omega}{\omega_2}r^2\right)=\sqrt{\frac{E^{(\theta)}_n-m}{E^{(\theta)}_n+m}}\psi^{(\theta)+}_{1,n,m_\ell}(r), \tag{64}$$

$$\psi^{(\theta)-}_{2,n,m_\ell}(r)=\mathrm{i}\left[\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\omega_2}}\frac{(n-1)!}{\pi\left(n+|m_\ell|\right)!}\frac{E^{(\theta)}_n+m}{E^{(\theta)}_n}\right]^{1/2}\cdot\left(\frac{m\omega}{\omega_2}r^2\right)^{(m_\ell+3/2)/2}\mathrm{e}^{-\frac{m\omega r^2}{2\omega_2}}L^{(|m_\ell+1|)}_{n-1}\left(\frac{m\omega}{\omega_2}r^2\right)=-\sqrt{\frac{E^{(\theta)}_n+m}{E^{(\theta)}_n-m}}\psi^{(\theta)+}_{2,n,m_\ell}(r). \tag{65}$$

Now let us discuss two key points which we jumped before. The transformation (16) is not unitary and takes us from a reducible representation in $\widehat{\tilde{x}}_i$ to an irreducible one in $\hat{x}_i$, so we can represent the operators $\widehat{\tilde{x}}_i$ on the Hilbert space of an irreducible one by the following action:

$$\widehat{\tilde{x}}_i\psi(\mathbf{x})=\left(x_i+\mathrm{i}\frac{\theta_{ij}}{2}\partial_j\right)\psi(\mathbf{x}),\quad\text{with } i,j=1,2, \tag{66}$$

which indicates that the noncommutative position is nonlocal in this representation. This main difficulty can be turned away by working whether in the momentum basis p_i or in the mixed basis of phase space $(\tilde{x},\ p_y)$, or alternatively by $(\tilde{y},\ p_x)$ [24], whether in the holomorphic representation of raising-lowering operators in terms of this noncommutative coordinates [36, 37]. In [23], it is suggested that we can also move to integration over trajectories as $\tilde{x}=x-\frac{\theta p}{2}$ in the path integrals (19) and (41); then we have

$$G^{(\theta)}=-\mathrm{i}\int_0^\infty\mathrm{d}\lambda\int Dp\int_{\vec{x}_i-\frac{\theta p}{2}}^{\vec{x}_f-\frac{\theta p}{2}}D\tilde{x}\cdot\exp\left\{\mathrm{i}\int_0^\lambda\mathrm{d}s\left[p_i\dot{\tilde{x}}^i-\hat{H}(\tilde{x},p)+\frac{\dot{p}_i\theta^{ij}p_j}{2}\right]\right\} \tag{67}$$

and

$$S^{(\theta)c}=-\mathrm{i}\left(\gamma^\nu\widetilde{\pi}_\nu+m\right)_{\text{out}}\int_0^\infty\mathrm{d}\lambda\int Dp\int_{\vec{x}_i-\frac{\theta p}{2}}^{\vec{x}_f-\frac{\theta p}{2}}D\tilde{x}\cdot\exp\left\{\mathrm{i}\int_0^\lambda\mathrm{d}s\left[p_i\dot{\tilde{x}}^i-\hat{H}(\tilde{x},p,\gamma)+\frac{\dot{p}_i\theta^{ij}p_j}{2}\right]\right\}. \tag{68}$$

These actions in (67) and (68) are no local and differ from the corresponding commutative case (at $\theta=0$) by the term $\frac{1}{2}\dot{p}_i\theta^{ij}p_j$. This suggestion is not correct in itself and can lead us to some ambiguities because it does not respect the Feynman spirit of the meaning of path integrals. In our opinion, the formulation given in [37] is better. Finally, the commutative representation give us the correct spectrum and some physics properties of the system in the easier and direct manner.

Moreover, if we consider the problem of a charged particle on a noncommutative plane subjected to a constant magnetic field $\mathcal{B}$, where the associated magnetic vector potential $\vec{A}$ is written in a symmetric gauge,

$$\vec{A}=\frac{\mathcal{B}}{2}\left(-\tilde{y}\vec{i}+\tilde{x}\vec{j}\right). \tag{69}$$

One can obtain in this case, the Green function representation, the energy and wave functions for the $(2+1)$-dimension Dirac and Klein–Gordon oscillators in a noncommutative space representation by following the same way as in previous calculations and just replacing the frequency ω by $\varpi\to\omega+\frac{e\mathcal{B}}{2m}$.

It leads to $\theta=0$: the NC space returns to the commutative space, and we recover the same results as for the commutative space case [38, 39].

4. Conclusion

In this paper, we have shown explicit calculations of Dirac and Klein–Gordon oscillators in noncommutative space by means of supersymmetric path integrals. Exact solutions are obtained and compared with the Dirac and Klein–Gordon oscillator particles subjected to the interaction of a constant magnetic field. The explicit calculation of the Green function in fermionic case became possible and the wave functions were easily determined by following a detailed demonstration of the Fradkin–Gitman method. The propagator calculation has been performed through a representation named global projection. For this case a new term in the action will appear which can be interpreted as a self-interaction for a charged particle with dipole electric and magnetic moments. We could study those systems in the presence of a constant magnetic field $\mathcal{B}$. The exact expression of the energy spectrum and corresponding eigenfunctions expressed in terms of generalized Laguerre polynomials are then deduced with the presence and the absence of the field. Our results coincide with those obtained in [29]. In the limit $\theta \to 0$, we recover the same results as in [38, 39] (in commutative space).

Appendix A: The Integration over the Spin Variables

For (49), the Polykov spin factor will be given by

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\text{spin}}^{(\theta)} &= \mathrm{e}^{\left(-\frac{\lambda_0}{2}F^{(\theta)}(\theta)_{nk}\xi^n\xi^k\right)}\\ &\cdot\int\mathcal{D}\omega\exp\left[-\frac{1}{2}\omega^n T_{nk}^{(\theta)}\omega^k + I_n^{(\theta)}\omega^n\right]_{\xi=0},\\ I_k^{(\theta)} &= -\lambda_0\xi^n F_{nk}^{(\theta)}\varepsilon,\\ T_{nk}^{(\theta)} &= \eta_{nk}\varepsilon - \lambda_0\varepsilon F_{nk}^{(\theta)}\varepsilon.\end{aligned} \tag{A1}$$

The integration over ω has a Gaussian form and gives

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\text{spin}}^{(\theta)} &= \mathrm{e}^{\left(-\frac{\lambda_0}{2}F_{nk}^{(\theta)}\xi^n\xi^k\right)}\sqrt{\frac{\det T^{(\theta)}}{\det\varepsilon}}\\ &\cdot\exp\left[-\frac{1}{2}I_n^{(\theta)}\left[\left(T^{(\theta)}\right)^{-1}\right]^{nk}I_k^{(\theta)}\right]_{\xi=0}.\end{aligned} \tag{A2}$$

And $\left(T^{(\theta)}\right)^{-1}$ is the inverse of $T^{(\theta)}$, taking into account its original definition[18–26],

$$\begin{aligned}&I_n^{(\theta)}\left[\left(T^{(\theta)}\right)^{-1}\right]^{nk}I_k^{(\theta)}\\ &= 2\lambda_0^2\left(F^{(\theta)}\mathcal{G}^{(\theta)}F^{(\theta)}\right)_{ml}\xi^m\xi^l.\end{aligned} \tag{A3}$$

One can demonstrate that

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\det T^{(\theta)}(\lambda_0)}{\det\varepsilon}\right]\\ &= \exp\left[-\int_0^{\lambda_0}\mathrm{d}\lambda_0'\operatorname{Tr}\mathcal{G}^{(\theta)}\left(\lambda_0'\right)F^{(\theta)}(x)\right].\end{aligned} \tag{A4}$$

So, we are going to calculate the inverse matrix $T_{nk}^{(\theta)}$, we have

$$\begin{aligned}T_{nk}^{(\theta)}\left(s,s'\right) &= \varepsilon\left(s-s'\right)\eta_{nk}\\ &-\lambda_0\int_0^1\varepsilon\left(s-\tau\right)F_{nk}^{(\theta)}\varepsilon\left(\tau-s'\right)\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{A5}$$

To get the function

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta}^{(\theta)}\left(s,s'\right) = \frac{1}{2}\int_0^1\Omega_{\alpha\beta}^{(\theta)}\left(s,s'\right)\varepsilon\left(\tau-s'\right)\mathrm{d}\tau, \tag{A6}$$

it is convenient to first define the function $\Omega_{\alpha\beta}^{(\theta)}(s,s')$ by

$$\Omega_{\alpha\beta}^{(\theta)}\left(s,s'\right) = \int_0^1\varepsilon\left(s-\tau\right)\left(T^{(\theta)}\right)_{\alpha\beta}^{-1}\left(\tau,s'\right)\mathrm{d}\tau. \tag{A7}$$

Now, we have

$$\int_0^1 T_{nk}^{(\theta)}\left(s,\tau\right)\left(T^{(\theta)}\right)_{k\beta}^{-1}\left(\tau,s'\right)\mathrm{d}\tau = \delta_n^\beta\,\delta\left(s-s'\right). \tag{A8}$$

And substituting (A5) into (A8), we can easily obtain

$$\begin{aligned}&\Omega_{n\beta}^{(\theta)}\left(s,s'\right) - \lambda_0\int_0^1\varepsilon\left(s-\tau\right)F_{nk}^{(\theta)}\,\Omega_\beta^{(\theta)k}\left(\tau,s'\right)\mathrm{d}\tau\\ &= \eta_{n\beta}\,\delta\left(s-s'\right).\end{aligned} \tag{A9}$$

This equation is equivalent to the differential equation

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}\Omega_{n\beta}^{(\theta)}\left(s,s'\right)}{\mathrm{d}s} - 2\lambda_0 F_{nk}^{(\theta)}\,\Omega_\beta^{(\theta)k}\left(s,s'\right)\\ &= \eta_{n\beta}\frac{\mathrm{d}\delta\left(s-s'\right)}{\mathrm{d}s},\end{aligned} \tag{A10}$$

with the initial condition

$$\begin{aligned}&\Omega_{n\beta}^{(\theta)}\left(0,s'\right) + \lambda_0\int_0^1 F_{nk}^{(\theta)}\,\Omega_\beta^{(\theta)k}\left(\tau,s'\right)\mathrm{d}\tau\\ &= \eta_{n\beta}\,\delta\left(s'\right).\end{aligned} \tag{A11}$$

For (A10) and (A11), we find the solution

$$\begin{aligned}\Omega^{(\theta)}\left(s,s'\right) &= \delta\left(s-s'\right) + \lambda_0 F^{(\theta)}\,\mathrm{e}^{2\lambda_0 F^{(\theta)}\left(s-s'\right)}\\ &\cdot\left[\varepsilon\left(s-s'\right) - \tanh\lambda_0 F^{(\theta)}\right].\end{aligned} \tag{A12}$$

Inserting (A12) into (A6), we obtain

$$\begin{aligned}\mathcal{G}^{(\theta)}\left(s,s'\right) &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\lambda_0 F^{(\theta)}\left(s-s'\right)}\\ &\cdot\left[\varepsilon\left(s-s'\right) - \tanh\lambda_0 F^{(\theta)}\right].\end{aligned} \tag{A13}$$

According to (A7), we get

$$\begin{aligned}&\left(T^{(\theta)}\right)^{-1}\left(\tau-\tau'\right) = \varepsilon^{-1}\left(\tau,\tau'\right)\\ &+\left(\lambda_0 F^{(\theta)}\right)^2\mathrm{e}^{2\lambda_0 F^{(\theta)}\left(\tau-\tau'\right)}\\ &\cdot\left[\varepsilon\left(\tau-\tau'\right) - \tanh\left(\lambda_0 F^{(\theta)}\right)\right]\\ &+\lambda_0 F^{(\theta)}\,\mathrm{e}^{2\lambda_0 F^{(\theta)}\left(\tau-\tau'\right)}\delta\left(\tau-\tau'\right).\end{aligned} \tag{A14}$$

Substituting (A3) and (A4) into (A2), we obtain

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\text{spin}}^{(\theta)} &= \exp\left(\mathrm{i}\gamma^n \frac{\delta_l}{\delta\xi^n}\right) \\ &\cdot \exp\left\{\mathrm{i}\int_0^1 \left[2\mathrm{i}\int_0^{\lambda_0} \mathrm{d}\lambda_0' \mathrm{Tr}\,\mathcal{G}^{(\theta)}\left(\lambda_0'\right) F^{(\theta)}\right.\right. \\ &\left.\left. +\mathrm{i}\frac{\lambda_0}{2}\left(F^{(\theta)}\mathcal{K}^{(\theta)}\right)_{nk}\xi^n\xi^k\right]\mathrm{d}s\right\}\Big|_{\xi=0}\,,\end{aligned} \tag{A15}$$

where

$$\mathcal{K}_{nk}^{(\theta)} = \eta_{nk} + 2\lambda_0\left(\mathcal{G}^{(\theta)}F^{(\theta)}\right)_{nk}, \tag{A16}$$

$$\left(F^{(\theta)}\mathcal{K}^{(\theta)}\right)_{nk} = \frac{2}{\lambda_0}\tanh\left(\lambda_0 F^{(\theta)}\right). \tag{A17}$$

And after a straightforward calculation, we get

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\text{spin}}^{(\theta)} &= \exp\left(\mathrm{i}\gamma^n \frac{\delta_l}{\delta\xi^n}\right)\cos\left(\lambda_0 F^{(\theta)}\right) \\ &\cdot\left[1+\tanh\left(\lambda_0 F^{(\theta)}\right)_{nk}\xi^n\xi^k\right]_{\xi=0}.\end{aligned} \tag{A18}$$

In addition to that, we use the Grassmann algebra by the following identity:

$$\begin{aligned}&\exp\left[\mathrm{i}\gamma^n\frac{\partial_l}{\partial\xi^n}\right] f(\xi)\,|_{\xi=0} \\ &= f\left(\frac{\delta}{\delta\zeta^n}\right)\exp\left(\mathrm{i}\zeta_n\gamma^n\right)|_{\zeta=0}\end{aligned} \tag{A19}$$

$$\begin{aligned}&= \sum_{k=0}^{2}\sum_{n_1\ldots n_k} f_{n_1\ldots n_2} \\ &\cdot\frac{\partial}{\partial\zeta_{n_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial\zeta_{n_k}}\sum_{l=0}^{2}\frac{i^l}{l!}\left(\zeta_n\gamma^n\right)^l|_{\zeta=0}\,.\end{aligned} \tag{A20}$$

Therefore,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\text{spin}}^{(\theta)} = \Bigg[&\cos\left(m\omega\left(1+\frac{m\omega\theta}{2}\right)e_0\right) \\ &+\gamma^0\sin\left(m\omega\left(1+\frac{m\omega\theta}{2}\right)e_0\right)\Bigg]\end{aligned} \tag{A21}$$

with $\lambda_0 = e_0/2$.

[1] M. Dubois Violette, R. Kerner, and J. Madore, J. Math. Phys. **31**, 323 (1990).
[2] A. Connes, Noncommutative Geometry, New York, London 1994.
[3] M. R. Douglas and N. A. Nekrasov, Rev. Mod. Phys. **73**, 977 (2001).
[4] H. Weyl, Z. Phys. **46**, 1 (1927).
[5] A. H. Chamseddine and A. Connes, Commun. Math. Phys. **186**, 731 (1997).
[6] H. Figueroa, J. M. Gracia-Bondia, F. Lizzi, and J. C. Varilly, J. Geom. Phys. **26**, 329 (1998).
[7] E. Witten, Nucl. Phys. B **460**, 33 (1996).
[8] A. Connes, M. R. Douglas, and A. Schwarz, J. High Energy Phys. **02**, 003 (1998).
[9] N. Seiberg and E. Witten, J. High Energy Phys. **09**, 032 (1999).
[10] K. Li and J. Wang, Eur. Phys. J. C **50**, 1007 (2007).
[11] M. Rosenbaum, J. David Vergara, and L. Roman Juarez, Phys. Lett. A **367**, 1 (2007).
[12] J. Jing, S.-H. Zhao, J.-F. Chen, and Z.-W. Long, Eur. Phys. J. C **54**, 685 (2008).
[13] M. Falek and M. Merad, Commun. Theor. Phys. **50**, 587 (2008).
[14] A. Kijanka and P. Kosiński, Phys. Rev. D **70**, 127702 (2004).
[15] M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari, and A. Tureanu, Phys. Rev. Lett. **86**, 2716 (2001). 26, 2001.
[16] J. Gamboa, M. Loewe, and J. C. Rojas, Phys. Rev. D. **64**, 067901 (2001).
[17] S. Bellucci, A. Nersessian, and C. Sochichiu, Phys. Lett. B **522**, 345 (2001).
[18] E. S. Fradkin, Nucl. Phys. **76**, 588 (1966).
[19] F. A. Berezin and M. S. Marinov, JETP Lett. **21**, 320 (1975).
[20] F. A. Berezin and M. S. Marinov, Ann. Phys. **104**, 336 (1977).
[21] E. S. Fradkin and D. M. Gitman, Phys. Rev. D **44**, 3230 (1991).
[22] C. Alexandrou, R. Rosenfelder, and A. W. Schreiber, Phys. Rev. A **59**, 1762 (1999).
[23] D. M. Gitman and V. G. Kupriyanov, Eur. Phys. J. C **54**, 325 (2008).
[24] C. Acatrinei, J. High Energy Phys. **0109**, 007 (2001).
[25] D. M. Gitman, S. I. Zlatev, and W. D. Cruz, J. Phys. **26**, 419 (1996).
[26] D. M. Gitman and S. I. Zlatev, Phys. Rev. D **55**, 7701 (1997).
[27] A. Jahan, Braz. J. Phys. **37**, 144 (2007).
[28] R. Rekioua and T. Boudjedaa, Eur. Phys. J. C **49**, 1091 (2007).
[29] B. Mirza and M. Mohadesi, Theor. Phys. **42**, 664 (2004).
[30] T. Curtright, D. Fairlie, and C. Zachos, Phys. Rev. D **58**, 025002 (1998).

[31] G. Magro, arXiv:quant-ph/0302001.
[32] J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).
[33] C. Grosche and F. Steiner, Handbook of Feynman Path Integrals, Springer Tracts in Modern Physics, Vol. 145 Springer, Berlin, Heidelberg 1998.
[34] M. Moshinsky and A. Szczepaniak, J. Phys. A **22**, L817 (1989).
[35] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products, Academic Press, NewYork 1979.
[36] A. Smailagic and E. Spalucci, J. Phys. A **36**, 467 (2003).
[37] S. Gangopadhyay and F. G. Scholtz, Phys. Rev. Lett. **102**, 241602 (2009).
[38] V. M. Villalba and R. Maggiolo, Eur. Phys. J. B **22**, 31 (2001).
[39] V. M. Villalba, Phys. Rev. A **49**, 586 (1994).

AIP Journal of Mathematical Physics

Path Integral for Dirac oscillator with generalized uncertainty principle

H. Benzair, T. Boudjedaa, and M. Merad

Citation: J. Math. Phys. **53**, 123516 (2012); doi: 10.1063/1.4768709
View online: http://dx.doi.org/10.1063/1.4768709
View Table of Contents: http://jmp.aip.org/resource/1/JMAPAQ/v53/i12
Published by the American Institute of Physics.

JOURNAL OF MATHEMATICAL PHYSICS **53**, 123516 (2012)

Path Integral for Dirac oscillator with generalized uncertainty principle

H. Benzair,[1,2] T. Boudjedaa,[2] and M. Merad[3]
[1]*Laboratoire LRPPS, Université de Kasdi Merbah-Ouargla, BP 511, Route Ghardaia, 30000 Ouargla, Algérie*
[2]*Laboratoire de Physique Théorique, Université de Jijel BP98 Ouled Aissa, 18000 Jijel, Algérie*
[3]*Laboratoire (L.S.D.C), Université de Oum El Bouaghi, 04000 Oum El Bouaghi, Algérie*

(Received 5 July 2012; accepted 5 November 2012; published online 30 November 2012)

The propagator for Dirac oscillator in $(1+1)$ dimension, with deformed commutation relation of the Heisenberg principle, is calculated using path integral in quadri-momentum representation. As the mass is related to momentum, we then adapt the space-time transformation method to evaluate quantum corrections and this latter is dependent from the point discretization interval. © *2012 American Institute of Physics*. [http://dx.doi.org/10.1063/1.4768709]

I. INTRODUCTION

The 20th century had been characterized by three revolutions in theoretical physics. Two of them had begun simultaneously; the quantum physics and the theory of relativity and the third one non-commutative (NC) geometry came lately after the middle of the century. Recently, the NC geometry received a great welcome by the researchers in the field of physics and mathematics. The motivation for the occurrence of these theories are multiple, in a string theory,[1,2] in a quantum gravity,[3] in a non-commutative geometry,[4] and in a black hole physics.[5]

There are many physical applications for this type of study, among them, series of Kempf papers are one of the simplest examples in deformed quantum mechanics.[6] Mathematically, its idea is based on generalizing Heisenberg principle in one dimension (1D) as follows:

$$\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}\left(1+\beta\left(\Delta P\right)^{2}\right), \tag{1}$$

and their corresponding canonical commutation relation between the position and momentum operators is given by

$$\left[\hat{X},\hat{P}\right] = \imath\hbar\left(1+\beta\hat{p}^{2}\right). \tag{2}$$

This deformation leads to a new short-distance structure characterized by a nonzero minimal uncertainty $(\Delta X)_{\min} = \hbar\sqrt{\beta}$ in position measurements. These yielded correction terms to the uncertainty relations and imply a finite minimal uncertainty in position measurements, e.g., at the Planck scale. A first consequence of the minimal length is the appearance of a natural cutoff which prevents the usual UV divergencies. Another consequence of such a generalized Heisenberg uncertainty is the appearance of an intriguing UV/IR mixing. This type of UV/IR relation has appeared in several other contexts: the Anti de Sitter/Conformal Field Theory before (AdS/CFT) correspondence,[7] non-commutative field theory.[8]

Many works have studied in the presence of minimal length uncertainty in both cases, non-relativistic and relativistic quantum mechanics. As some of these issues have been treated by equation method; for example, the harmonic oscillator in arbitrary dimensions has been solved by Ref. 6, the cosmological constant problem and the classical limit of the physics have also been investigated,[9,10] the effect of the minimal length on the energy spectrum of the 3D Coulomb potential has been studied in Refs. 11, 12, and 13, the one-dimensional box,[14] the time-dependent linear potential,[15] etc. The relativistic extension is also important in this framework, we found the case of the generalized Dirac equation which was recently considered in Ref. 16, and the Bosonic oscillator in one-dimension case of spin (0 and 1) in Ref. 17 and in $(1+3)$ dimension in Ref. 18. Others used a path integral formalism, for example, the harmonic oscillator in one dimension in Ref. 19, the Coulomb potential,[20] in the second section for the time-dependent linear potential[15] and the spinless relativistic particle.[21]

The purpose of this paper is to use the path integral formalism in the energy-momentum space representation to adapt this type of deformation in the case of the $(1+1)$-dimensional Dirac oscillator system. This same approach has already been used in 1D space to treat the spinless relativistic particle[21] and we extend this study to include the relativistic 1/2 spinning particle. It is remarkable that in this case, the mass is related to momentum and then we adapt the space-time transformation method to evaluate quantum corrections of the order $\hbar^2$. It is shown that this latter is dependent from the point discretization interval.

According to (2), the $\hat{X}$ and $\hat{P}$ operators in this representation can be realized by operators $\hat{x}$ and $\hat{p}$ satisfying the usual canonical commutation relation (throughout the paper we adopt the natural units $\hbar = c = 1$), as following:

$$\hat{X} = \left(1+\beta p^2\right)\hat{x}, \quad \hat{P} = \hat{p} \tag{3}$$

with

$$\hat{x} = \imath\frac{\partial}{\partial p}, \quad \hat{p} = p, \quad \text{and} \quad [\hat{x}, \hat{p}] = \imath. \tag{4}$$

As the operator $\hat{P}$ remains a self-adjoint operator then it is better to use the momentum representation $|p\rangle$. In addition, the operator $\hat{X}$ is not symmetric in all Hilbert space $L^2(\mathbb{R}, dp)$, for this we need to change this space to subspace $L^2\left(\mathbb{R}, \frac{dp}{(1+\beta p^2)}\right)$, where the scalar product is given by

$$\langle\psi \mid \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{\left(1+\beta p^2\right)}\psi^*(p)\varphi(p) \tag{5}$$

and which leads to the following writing for the closure relation:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{\left(1+\beta p^2\right)}\left|p\right\rangle\left\langle p\right| = 1, \tag{6}$$

and the projection relation is written as

$$\langle p|\, p'\rangle = \left(1+\beta p^2\right)\delta\left(p-p'\right), \tag{7}$$

otherwise

$$\begin{aligned}\langle p|\, p'\rangle &= \delta\left(\frac{\arctan\sqrt{\beta}p}{\sqrt{\beta}} - \frac{\arctan\sqrt{\beta}p'}{\sqrt{\beta}}\right)\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{2\pi}e^{\imath x\left(\frac{\arctan\sqrt{\beta}p}{\sqrt{\beta}} - \frac{\arctan\sqrt{\beta}p'}{\sqrt{\beta}}\right)}\end{aligned} \tag{8}$$

and

$$\begin{aligned}\left\langle p\left|\hat{X}\right| p'\right\rangle &= \left(1+\beta p^2\right)\imath\frac{\partial}{\partial p}\left\langle p\right|\left. p'\right\rangle\\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{\imath x\left(\frac{\arctan\sqrt{\beta}p}{\sqrt{\beta}} - \frac{\arctan\sqrt{\beta}p'}{\sqrt{\beta}}\right)}\frac{dx}{2\pi}.\end{aligned} \tag{9}$$

For the time component of the quadri-momentum, we assume that there is no deformation

$$\langle p_0|\, p_0'\rangle = \delta\left(p_0 - p_0'\right), \quad \int_{-\infty}^{+\infty}dp_0\left|p_0\right\rangle\left\langle p_0\right| = 1. \tag{10}$$

In Sec. II, we calculate the propagator for Dirac oscillator with this modified Heisenberg uncertainty relation using the path integral formalism in momentum space. The same problem without deformed uncertainty relation has been done in Ref. 22 and this paper represents a generalization in which we show that the space-time transformation method is not independent from the point discretization interval in contrast to what is claimed in Ref. 23.

II. PATH INTEGRAL FORMULATION IN THE PRESENCE OF A MINIMAL LENGTH

Let us construct the path integral for a $(1+1)$-dimensional relativistic Dirac oscillator propagator in the presence of a minimal length which is defined as the inverse of the Dirac operator

$$\left(\gamma^{\mu}\hat{\Pi}_{\mu}-m+\imath\epsilon\right)\hat{S}^{(\beta)}=I, \tag{11}$$

where $\mu=0,1$, γ_{μ} are the Dirac matrices in the two-dimensional Minkowski space and satisfy the commutation relation $\{\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\}=2\eta^{\mu\nu}$ with $\eta^{\mu\nu}=\text{diag}(1,-1)$ and are related to the Pauli matrices, and our choice is $\gamma^{0}=\sigma^{3}$, $\gamma^{1}=-i\sigma^{1}$, $\hat{\Pi}_{0}=\hat{P}_{0}$, $\hat{\Pi}_{1}=\hat{P}-\imath m\omega\gamma^{0}\hat{X}$ and $0<\epsilon\ll 1$. Then

$$\hat{S}^{(\beta)}=\left(\gamma^{\mu}\hat{\Pi}_{\mu}-m+\imath\epsilon\right)^{-1}=\left(\gamma^{\mu}\hat{\Pi}_{\mu}+m+\imath\epsilon\right)G(\beta), \tag{12}$$

where

$$\begin{aligned}G(\beta)&=\left(\gamma^{\mu}\hat{\Pi}_{\mu}\gamma^{\nu}\hat{\Pi}_{\nu}-m^{2}+\imath\epsilon\right)^{-1}\\&=\left[\hat{p}_{0}^{2}-\hat{p}^{2}-m^{2}+\imath\epsilon-m^{2}\omega^{2}\hat{X}^{2}+m\omega\left(1+\beta\hat{p}^{2}\right)\sigma_{3}\right]^{-1}.\end{aligned} \tag{13}$$

So, according to the habitual construction procedure of the path integral, we express the Green function $S^{(\beta)}(p_b,p_a)$ in the so-called global projection,[24]

$$S^{(\beta)}(p_b,p_a)=\left(\gamma^{\nu}\hat{\Pi}_{\nu}+m\right)_{b}G^{(\beta)}(p_b,p_a). \tag{14}$$

The Green function $G^{(\beta)}(p_b,p_a)$ is a diagonal 2×2 matrix in a momentum space representation and is written as

$$G^{(\beta)}(p_b,p_a)=\left\langle p_b,p_{0b}\left|\hat{G}^{(\beta)}\right|p_a,p_{0a}\right\rangle=\begin{bmatrix}G^{(\beta)}_{(+)}(p_b,p_a) & 0\\ 0 & G^{(\beta)}_{(-)}(p_b,p_a)\end{bmatrix}. \tag{15}$$

Using the Schwinger proper-time method, the elements matrix $G^{(\beta)}(p_b,p_a)$ are, respectively, defined in the same expression

$$G^{(\beta)}_{(\pm)}(p_b,p_a)=(-\imath)\int_{0}^{+\infty}d\lambda\left\langle p_b,p_{0b}\left|\exp\left(-\imath\lambda\hat{H}^{(\pm)}\right)\right|p_a,p_{0a}\right\rangle, \tag{16}$$

where the Hamiltonian $\hat{H}^{(\pm)}$ is given by

$$\hat{H}^{(\pm)}=\lambda\left[-\hat{p}_{0}^{2}+\hat{p}^{2}+m^{2}-\imath\epsilon+m^{2}\omega^{2}\hat{X}^{2}\mp m\omega\left(1+\beta\hat{p}^{2}\right)\right] \tag{17}$$

and the path integral can be constructed for each diagonal element (differing only in the sign of ω). In order to build a path integral representation for $G^{(\beta)}(p_b,p_a)$, we follow the standard discretization method for the kernel of Eq. (16). As it is known, usually, we write $\exp\left(-\imath\hat{H}^{(\pm)}\right)$ $=\left[\exp\left(-\imath\hat{H}^{(\pm)}/(N+1)\right)\right]^{N+1}$ and we insert N times, the identities of Eqs. (6) and (10) between each pair of infinitesimal operators $\exp\left(-\imath\hat{H}^{(\pm)}/(N+1)\right)$ and taking, at the end, the limit $N\to\infty$, this transforms the expression of $G^{(\beta)}_{(\pm)}(p_b,p_a)$ into the following path integral:

$$\begin{aligned}G^{(\beta)}_{(\pm)}(p_b,p_a)&=(-\imath)\lim_{N\to\infty}\int_{0}^{\infty}d\lambda\prod_{j=1}^{N}\int\frac{dp_j}{\left(1+\beta p_j^{2}\right)}dp_{0j}\prod_{j=1}^{N+1}\\&\times\left\langle p_j,p_{0j}\right|\exp\left[\imath\varepsilon\lambda\left[\hat{p}_{0}^{2}-\hat{p}^{2}-m^{2}-(m\omega)^{2}\hat{X}^{2}\pm m\omega\left(1+\beta\hat{p}^{2}\right)\right]\right]\left|p_{j-1}p_{0j-1}\right\rangle,\end{aligned} \tag{18}$$

where $\varepsilon = 1/N + 1$. Using the relations (3) and (9) into (18) and introducing the integral representation follow:

$$\left\langle p_j, p_{0j} \mid p_{j-1}, p_{0j-1} \right\rangle = \int \frac{dx_j}{2\pi} \frac{dt_j}{2\pi} e^{\imath t_j \Delta P_{0j}} \exp\left[\imath x_j \left(\frac{\left(\Delta \arctan \sqrt{\beta} p_j\right)}{\sqrt{\beta}}\right)\right]. \tag{19}$$

Then, the Green function (18) takes the following form:

$$G^{(\beta)}_{(\pm)}(p_b, p_a) = (-\imath) \int_0^\infty d\lambda \lim_{N\to\infty} \prod_{j=1}^{N} \int \frac{dp_j}{\left(1+\beta p_j^2\right)} dp_{0j} \prod_{j=1}^{N+1} \int \frac{dx_j}{2\pi} \frac{dt_j}{2\pi}$$

$$\times e^{\imath t_j \Delta p_{0j}} \exp\left[\imath \left(\varepsilon\lambda \left[p_{0j}^2 - p_j^2 - m^2 \pm m\omega \left(1 + \beta p_j^2\right)\right]\right)\right]$$

$$\times \exp\left\{\imath \left[\left(\frac{\left(\Delta \arctan \sqrt{\beta} p_j\right)}{\sqrt{\beta}}\right) x_j - \varepsilon\lambda x_j^2 (m\omega)^2\right]\right\}. \tag{20}$$

Performing the multiple Gaussian integrations over x_j and t_j in (20) we obtain

$$G^{(\beta)}_{(\pm)}(p_b, p_a) = (-\imath) \int_0^\infty d\lambda \lim_{N\to\infty} \prod_{j=1}^{N} \int \frac{dp_j}{\left(1+\beta p_j^2\right)} dp_{0j} \prod_{j=1}^{N+1} \frac{\delta\left(p_{0j} - p_{0(j-1)}\right)}{\sqrt{4\pi \imath \lambda \varepsilon (m\omega)^2}}$$

$$\times \exp\left\{\imath \sum_{j=1}^{N+1} \left[\frac{\left(\Delta \arctan \sqrt{\beta} p_j\right)^2}{4\lambda (m\omega)^2 \beta\varepsilon} + \varepsilon\lambda \left(p_{0j}^2 - p_j^2 - m^2\right) \pm \varepsilon\lambda m\omega \left(1 + \beta p_j^2\right)\right]\right\}. \tag{21}$$

In the above path integral expression, $\frac{\left(\Delta \arctan \sqrt{\beta} p_j\right)^2}{4\lambda (m\omega)^2 \beta\varepsilon}$ represents the kinetic term of the action where it is obvious that the "mass" is dependent from the momentum p. In order to convert this expression to the usual form of Feynman path integral, we will use the point transformation method where the α-point discretization interval is defined as

$$\bar{p}_j^{(\alpha)} = \alpha p_j + (1-\alpha)\, p_{j-1}. \tag{22}$$

Let us first use the method proposed in Ref. 23.

There are two corrections:

- The first related to the action $C^{(1)}_{act}$,
- and the second correction related to the measure $C^{(1)}_{m}$.

The α-point expansion of a function $f(p_j)$ is defined by

$$\Delta f\left(p_j\right) = \Delta p_j \bar{f}_j^{(\alpha)\prime} \left(1 + \frac{(1-2\alpha)}{2!} \frac{\bar{f}_j^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{f}_j^{(\alpha)\prime}} \Delta p_j + \frac{(1-\alpha)^3 + \alpha^3}{3!} \frac{\bar{f}_j^{(\alpha)\prime\prime\prime}}{\bar{f}_j^{(\alpha)\prime}} \Delta p_j^2 + \cdots\right). \tag{23}$$

In our case, we choose $f\left(p_j\right) = \frac{\arctan \sqrt{\beta} p_j}{\sqrt{\beta}}$, thus the exponential of kinetic term will be developed as

$$\exp\left\{\imath \left[\frac{\left(\Delta \arctan \sqrt{\beta} p_j\right)^2}{4\lambda\varepsilon (m\omega)^2 \beta}\right]\right\} = \exp\left\{\imath \left[\frac{\left(\bar{f}_j^{(\alpha)\prime}\right)^2 \Delta p_j^2}{4\lambda\varepsilon (m\omega)^2}\right]\right\} \left[1 + C^{(1)}_{act}\right], \tag{24}$$

where

$$C^{(1)}_{act} = \frac{\imath}{4\lambda\varepsilon (m\omega)^2} \left\{(1-2\alpha) \frac{\bar{f}_j^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{f}_j^{(\alpha)\prime}} \left(\bar{f}_j^{(\alpha)\prime}\right)^2 \Delta p_j^3 + \left[\frac{(1-2\alpha)^2}{4} \left(\frac{\bar{f}_j^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{f}_j^{(\alpha)\prime}}\right)^2\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{(1-\alpha)^3 + \alpha^3}{3} \frac{\bar{f}_j^{(\alpha)\prime\prime\prime}}{\bar{f}_j^{(\alpha)\prime}}\right] \left(\bar{f}_j^{(\alpha)\prime}\right)^2 \Delta p_j^4\right\} - \frac{(1-2\alpha)^2}{2\left(4\lambda\varepsilon (m\omega)^2\right)^2} \left(\frac{\bar{f}_j^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{f}_j^{(\alpha)\prime}}\right)^2 \left(\bar{f}_j^{(\alpha)\prime}\right)^4 \Delta p_j^6, \tag{25}$$

and the measure term will be developed as

$$\frac{1}{\left(1+\beta p_j^2\right)} = \bar{f}_j^{(\alpha)\prime} \left(1 + C^{(1)}_{m}\right), \tag{26}$$

where $C_m^{(1)}$

$$C_m^{(1)} = (1-\alpha)\,\tfrac{\bar{f}_j^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{f}_j^{(\alpha)\prime}}\,\Delta p_j + \tfrac{(1-\alpha)^2}{2}\,\tfrac{\bar{f}_j^{(\alpha)\prime\prime\prime}}{\bar{f}_j^{(\alpha)\prime}}\,\Delta p_j^2. \tag{27}$$

Let us bring the kinetic term to the conventional form by using the following coordinate transformation $p_j = g(k_j)$, this transformation generates two corrections:

- the first related to the action $C_{act}^{(2)}$,
- and an other correction related to the measure $C_m^{(2)}$.

The α-point expansion of Δp_j reads at each (j)

$$\Delta p_j = g(k_j) - g(k_{j-1}) = \Delta k_j\,\bar{g}_j^{(\alpha)\prime}\left(1 + \tfrac{(1-2\alpha)}{2!}\,\tfrac{\bar{g}_j^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{g}_j^{(\alpha)\prime}}\,\Delta k_j + \tfrac{(1-\alpha)^3+\alpha^3}{3!}\,\tfrac{\bar{g}_j^{(\alpha)\prime\prime\prime}}{\bar{g}_j^{(\alpha)\prime}}\,\Delta k_j^2\right). \tag{28}$$

The choice of g is fixed by the following condition:

$$\frac{\partial g}{\partial k} = \left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)^{-1}, \text{ or alternatively } g(k_j) = \tfrac{\tan\sqrt{\beta}k_j}{\sqrt{\beta}}, \tag{29}$$

where $k_{0j} = p_{0j}$ and the region $p \in [-\infty, +\infty]$ is mapped to $k \in \left[-\pi/2\sqrt{\beta}, \pi/2\sqrt{\beta}\right]$. Thereafter, we develop the exponential of the kinetic term as

$$\exp\left\{\imath\left[\tfrac{\left(\Delta\arctan\sqrt{\beta}p_j\right)^2}{4\lambda\varepsilon(m\omega)^2\beta}\right]\right\} = \exp\left\{\imath\left[\tfrac{\Delta k_j^2}{4\lambda\varepsilon(m\omega)^2}\right]\right\}\left[1 + C_{act}^{(1)}\right]\left[1 + C_{act}^{(2)}\right], \tag{30}$$

where $C_{act}^{(1)}$ is given by (25) and

$$\begin{aligned} C_{act}^{(2)} = \Bigg\{ & \tfrac{\imath}{4\lambda\varepsilon(m\omega)^2}\left[(1-2\alpha)\,\tfrac{\bar{g}_j^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{g}_j^{(\alpha)\prime}}\left(\bar{g}_j^{(\alpha)\prime}\right)^2\left(\bar{f}_j^{(\alpha)\prime}\right)^2\Delta k_j^3\right.\\ & \left.+\left[\tfrac{(1-2\alpha)^2}{4}\left(\tfrac{\bar{g}_j^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{g}_j^{(\alpha)\prime}}\right)^2 + \tfrac{(1-\alpha)^3+\alpha^3}{3}\,\tfrac{\bar{g}_j^{(\alpha)\prime\prime\prime}}{\bar{g}_j^{(\alpha)\prime}}\right]\left(\bar{f}_j^{(\alpha)\prime}\right)^2\left(\bar{g}_j^{(\alpha)\prime}\right)^2\Delta k_j^4\right]\\ & - \tfrac{(1-2\alpha)^2}{2\left(4\lambda\varepsilon(m\omega)^2\right)^2}\left(\tfrac{\bar{g}_j^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{g}_j^{(\alpha)\prime}}\right)^2\left(\bar{g}_j^{(\alpha)\prime}\right)^4\left(\bar{f}_j^{(\alpha)\prime}\right)^4\Delta k_j^6 + \cdots\Bigg\}. \end{aligned} \tag{31}$$

The measure induce also a correction

$$\prod_{j=1}^{N}\int dp_j = \prod_{j=2}^{N+1}\int d\left(\Delta p_j\right) = \prod_{j=2}^{N+1}\int J\,d\left(\Delta k_j\right), \tag{32}$$

where J is the Jacobian of the transformation

$$J = \frac{\partial\Delta p}{\partial\Delta k} = \bar{g}_j^{(\alpha)\prime}\left(1 + C_m^{(2)}\right), \tag{33}$$

with $C_m^{(2)}$

$$C_m^{(2)} = (1-2\alpha)\,\frac{\bar{g}_j^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{g}_j^{(\alpha)\prime}}\,\Delta k_j + \tfrac{(1-\alpha)^3+\alpha^3}{2}\,\frac{\bar{g}_j^{(\alpha)\prime\prime\prime}}{\bar{g}_j^{(\alpha)\prime}}\,\Delta k_j^2, \tag{34}$$

is the second correction on the measure.

By combining all these corrections, we obtain the total correction C_T

$$1 + C_T = \left(1 + C_{act}^{(1)}\right)\left(1 + C_{act}^{(2)}\right)\left(1 + C_m^{(1)}\right)\left(1 + C_m^{(2)}\right). \tag{35}$$

The corrections terms are evaluated perturbatively using the expectation values

$$\left\langle(\Delta k)^{2n}\right\rangle = \left(2\imath\lambda\varepsilon(m\omega)^2\right)^n(2n-1). \tag{36}$$

We then obtain the final correction C_T dependant on the α-point discretization interval

$$1 + C_T = 1 + 2\imath\lambda\varepsilon(m\omega)^2\left(\beta + \beta\tan^2\sqrt{\beta}k_j\right)\alpha\,(2\alpha - 1)\,. \tag{37}$$

In addition to this, when we use the standard method,[27,28] the difference in correction between the two methods is generated by the measure term and then we have in this case

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{N}\int\frac{dp_j}{1+\beta p_j^2} &= \sqrt{\left(1+\beta p_b^2\right)\left(1+\beta p_a^2\right)}\prod_{j=1}^{N}\int dp_j\prod_{j=1}^{N+1}\frac{1}{\sqrt{\left(1+\beta p_j^2\right)\left(1+\beta p_{j-1}^2\right)}}\\ &= \left[\frac{1}{f_b' f_a'}\right]\prod_{j=1}^{N}\int dp_j\prod_{j=1}^{N+1}\bar{f}_j^{(\alpha)\prime}\left(1+C_m^{(1)}\right)\end{aligned} \tag{38}$$

with

$$C_m^{(1)} = \frac{(1-2\alpha)}{2}\frac{\bar{f}_j^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{f}_j^{(\alpha)\prime}}\Delta p_j + \left(\frac{(1-\alpha)^2+\alpha^2}{4}\frac{\bar{f}_j^{(\alpha)\prime\prime\prime}}{\bar{f}_j^{(\alpha)\prime}} - \frac{\alpha(1-\alpha)}{2}\left(\frac{\bar{f}_j^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{f}_j^{(\alpha)\prime}}\right)^2\right)\Delta p_j^2. \tag{39}$$

After the transformation $p_j = \frac{\tan\sqrt{\beta}k_j}{\sqrt{\beta}} = g\left(k_j\right)$, Eq. (38) becomes

$$\prod_{j=1}^{N}\int\frac{dp_j}{1+\beta p_j^2} = \sqrt{\frac{1}{f_b' f_a' g_b' g_a'}}\prod_{j=1}^{N}\int dx_j\prod_{j=1}^{N+1}\bar{f}_j^{(\alpha)\prime}\bar{g}_j^{(\alpha)\prime}\left(1+C_m^{(2)}\right)\left(1+C_m^{(1)}\right) \tag{40}$$

$$= \prod_{j=1}^{N}\int dk_j\prod_{j=1}^{N+1}\left(1+C_m^{(1)}\right)\left(1+C_m^{(2)}\right) \tag{41}$$

with $C_m^{(2)}$ given by

$$C_m^{(2)} = \frac{(1-2\alpha)}{2}\frac{\bar{g}_j^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{g}_j^{(\alpha)\prime}}\Delta k_j + \left[-\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}\left(\frac{\bar{g}_j^{(\alpha)\prime\prime}}{\bar{g}_j^{(\alpha)\prime}}\right)^2 + \frac{(1-\alpha)^2+\alpha^2}{4}\frac{\bar{g}_j^{(\alpha)\prime\prime\prime}}{\bar{g}_j^{(\alpha)\prime}}\right]\Delta k_j^2. \tag{42}$$

Therefore, the total correction will be by the use of the relation (36)

$$\begin{aligned}1 + C_T &= \left(1+C_{act}^{(1)}\right)\left(1+C_{act}^{(2)}\right)\left(1+C_m^{(1)}\right)\left(1+C_m^{(2)}\right)\\ &= 1 + 2\imath\lambda\varepsilon(m\omega)^2\beta\tan^2\sqrt{\beta}k_j\left[8\alpha^2 - 8\alpha + 1\right].\end{aligned} \tag{43}$$

Let us emphasize that the correction C_T depends on the α-point discretization interval for the two methods and therefore the problem of discretization is not definitively settled and asked for clarification of the path integral method in this problem. This resembles the case of curved spaces in which the mid-point was privileged. The development in Ref. 23 treats this problem of curved space and gives an outcome that considers all points of the interval as equivalent. Unfortunately, with minimal length deformation the problem is raised and we will say that it is more like that of the quantization with constraint.[25] Furthermore, a judicious choice of the discretization parameter is indicated by the order of operators and in Ref. 26 which use the equation method, the result coincides with path integral approach when $C_T = 0$ and this corresponds to $\alpha = 0$ and $\alpha = 1/2$ for method in Ref. 23 and to $\alpha = \frac{1}{2}\left(1 \pm 1/\sqrt{2}\right)$ for the standard method and finally we get

$$\begin{aligned}G_{(\pm)}^{(\beta)}\left(p_b, p_a\right) &= (-\imath)\int_0^\infty d\lambda\lim_{N\to\infty}\prod_{j=1}^{N}\int dk_{0j}\prod_{j=1}^{N+1}\delta\left(k_{0j} - k_{0j-1}\right)\,e^{\imath\left(\varepsilon\lambda\left[k_{0j}^2 - m^2 \pm (m\omega)\right]\right)}\\ &\times\prod_{j=1}^{N}\int dk_j\prod_{j=1}^{N+1}\frac{1}{\sqrt{4\pi\imath\lambda\varepsilon\,(m\omega)^2}}e^{\imath\left[\left[\frac{\left(\Delta k_j\right)^2}{4\lambda\varepsilon(m\omega)^2} - \varepsilon\lambda\tan^2\left(\sqrt{\beta}k_j\right)\left(\frac{1}{\beta}\mp(m\omega)\right)\right]\right]}.\end{aligned} \tag{44}$$

These expressions are formally identical to the standard problem of the Poschl–Teller potential[23,27,29] and the solutions of these path integrals can be written as

$$G^{(\beta)}_{(\pm)}(p_b, p_a) = (-\imath)\sum_{n=0}^{\infty} N_n^{\eta_\pm}\int_0^{\infty} d\lambda\,\delta(k_{0b}-k_{0a})\; e^{\imath\lambda\left[k_0^2-m^2\pm m\omega\right]} e^{-\imath\lambda\beta(m\omega)^2\left(n^2+(2n+1)\eta_\pm\right)}$$
$$\times C_n^{\eta_\pm}\left(\sin\left(\sqrt{\beta}k_a\right)\right)C_n^{\eta_\pm}\left(\sin\left(\sqrt{\beta}k_b\right)\right)\left(\cos\left(\sqrt{\beta}k_a\right)\cos\left(\sqrt{\beta}k_b\right)\right)^{\eta_\pm}, \tag{45}$$

where $\eta_\pm$ are positives parameter and $C_n^{\eta_\pm}$ are Gegenbauer polynomials and the normalization constant $N_n^{\eta_\pm}$ is given by

$$N_n^{\eta_\pm} = \Gamma(\eta_\pm)^2\,\frac{2^{2\eta-1}n!\,(n+\eta_\pm)\sqrt{\beta}}{\pi\Gamma(n+2\eta_\pm)} \tag{46}$$

and

$$\eta_+ = \frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{1+4\frac{(1-\beta(m\omega))}{\beta^2(m\omega)^2}}\right),\ \eta_- = \frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{1+4\frac{(1+\beta(m\omega))}{\beta^2(m\omega)^2}}\right). \tag{47}$$

Through the condition of the generalized uncertainty principle given in the Introduction, the values $\eta_+ = \frac{1}{\beta m\omega}$, $\eta_- = 1+\frac{1}{\beta m\omega}$ are accepted, and the other negatives values are rejected. So it will be $\eta_- = \eta_+ + 1 = \eta + 1$. Integrating over the proper time λ, and acting by the operator $\left(\gamma^\nu\hat{\Pi}_\nu + \mathrm{m}\right)_b$ on Eq. (45) and with the help of properties of Gegenbauer polynomials[30] $\frac{d}{du}C_n^{\eta}(u) = 2\eta C_{n-1}^{\eta+1}(u)$, we find

$$S^{(\beta)}(k_b, k_{0b}, k_a, k_{0a},) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\delta(k_{0b}-k_{0a})}{k_{0b}^2-m^2-\beta(m\omega)^2n^2-2n(m\omega)}\Gamma(\eta)^2\,\frac{2^{2\eta-1}n!\,(n+\eta)\sqrt{\beta}}{\pi\Gamma(n+2\eta)}$$
$$\times\begin{pmatrix}(k_{0b}+m)\,v_b^{\eta}C_n^{\eta}(u_b)\,v_a^{\eta}C_n^{\eta}(u_a) & -\frac{2\imath}{\sqrt{\beta}}v_b^{\eta}C_n^{\eta}(u_b)\,v_a^{\eta+1}C_{n-1}^{\eta+1}(u_a)\\ -\frac{2\imath}{\sqrt{\beta}}v_b^{\eta+1}C_{n-1}^{\eta+1}(u_b)\,v_a^{\eta}C_n^{\eta}(u_a) & \left[\frac{4\eta^2(-k_{0b}+m)}{n(n+2\eta)}\right]v_b^{\eta+1}C_{n-1}^{\eta+1}(u_b)\,v_a^{\eta+1}C_{n-1}^{\eta+1}(u_a)\end{pmatrix}, \tag{48}$$

where

$$u = \sin\left(\sqrt{\beta}k\right),\ v = \cos\left(\sqrt{\beta}k\right). \tag{49}$$

The presence of delta function reflects the conservation of energy.

In order to evaluate exactly the propagator expression, we write the Fourier transformation (48) with respect to k_{0b} and k_{0a} variables. The result is given as

$$S^{(\beta)}(k_b, k_a; t_b-t_a) = -\sum_{n=0}^{\infty}\int dE\,\frac{e^{-\imath E(t_b-t_a)}}{E^2-E_n^2}\Gamma(\eta)^2\,\frac{2^{2\eta-1}n!\,(n+\eta)\sqrt{\beta}}{\pi\Gamma(n+2\eta)}$$
$$\times\begin{pmatrix}(E+m)\,v_b^{\eta}C_n^{\eta}(u_b)\,v_a^{\eta}C_n^{\eta}(u_a) & -\frac{2\imath}{\sqrt{\beta}}v_b^{\eta}C_n^{\eta}(u_b)\,v_a^{\eta+1}C_{n-1}^{\eta+1}(u_a)\\ -\frac{2\imath}{\sqrt{\beta}}v_b^{\eta+1}C_{n-1}^{\eta+1}(u_b)\,v_a^{\eta}C_n^{\eta}(u_a) & \left[\frac{4\eta^2(-E+m)}{n(n+2\eta)}\right]v_b^{\eta+1}C_{n-1}^{\eta+1}(u_b)\,v_a^{\eta+1}C_{n-1}^{\eta+1}(u_a)\end{pmatrix}. \tag{50}$$

This last relation (50) expresses the causal Green function corresponding to one-dimensional Dirac oscillator in the momentum space representation with the presence of minimal length uncertainty. To evaluate the wave functions and energy spectrum, let us integrate over the E variable. This can be done using a complex integral along the special contour C via the residue theorem and therefore we get the following standard result where there are two types of propagation, one with positive energy $(+E_n^{(\beta)})$ propagation and the other with negative energy $(-E_n^{(\beta)})$ propagation:

$$S^{(\beta)}(p_b, p_a, t_b-t_a) = -\sum_{n=0}^{\infty}\left[\begin{matrix}\Theta(t_b-t_a)\,\Psi_n^{(\beta)+}(p_b)\,\bar{\Psi}_n^{(\beta)+}(p_a)\,e^{-\imath E_n^{(\beta)}(t_b-t_a)}+\\ \Theta(-(t_b-t_a))\,\Psi_n^{(\beta)-}(p_b)\,\bar{\Psi}_n^{(\beta)-}(p_a)\,e^{\imath E_n^{(\beta)}(t_b-t_a)}\end{matrix}\right], \tag{51}$$

with the energy spectrum

$$E_{n,\pm}^{(\beta)} = \pm\sqrt{m^2 + \beta\,(m\omega)^2\,n^2 + 2n\,(m\omega)} \tag{52}$$

and the corresponding wave functions

$$\Psi_n^{(\beta)+}(p) = \begin{pmatrix} f_n^{(\beta)+}(p) \\ g_n^{(\beta)+}(p) \end{pmatrix}, \text{ and } \Psi_n^{(\beta)-}(p) = \begin{pmatrix} f_n^{(\beta)-}(p) \\ g_n^{(\beta)-}(p) \end{pmatrix}, \tag{53}$$

where the components of the wave functions $f_n^{(\beta)\pm}(p)$ and $g_n^{(\beta)\pm}(p)$ are, respectively,

$$f_n^{(\beta)+}(p) = \sqrt{\Gamma(\eta)^2\,\frac{2^{2\eta-1}n+1!\,(n+\eta)\sqrt{\beta}\left(E_n^{(\beta)}+m\right)}{\pi\,\Gamma(n+2\eta)\,2E_n^{(\beta)}}}\left(\frac{1}{1+\beta p^2}\right)^{\eta} C_n^{\eta}\left(\frac{\sqrt{\beta}p}{1+\beta p^2}\right). \tag{54}$$

$$g_n^{(\beta)+}(p) = \frac{2\imath}{\sqrt{\beta}}\sqrt{\Gamma(\eta)^2\,\frac{2^{2\eta-1}n!\,(n+\eta)\sqrt{\beta}}{\pi\,\Gamma(n+2\eta)\,2E_n^{(\beta)}\left(E_n^{(\beta)}+m\right)}}\left(\frac{1}{1+\beta p^2}\right)^{\eta+1} C_{n-1}^{\eta+1}\left(\frac{\sqrt{\beta}p}{1+\beta p^2}\right) \tag{55}$$

and

$$f_n^{(\beta)-}(p) = \sqrt{\Gamma(\eta)^2\,\frac{2^{2\eta-1}n!\,(n+\eta)\sqrt{\beta}\left(E_n^{(\beta)}-m\right)}{\pi\,\Gamma(n+2\eta)\,2E_n^{(\beta)}}}\left(\frac{1}{1+\beta p^2}\right)^{\eta} C_n^{\eta}\left(\frac{\sqrt{\beta}p}{1+\beta p^2}\right). \tag{56}$$

$$g_n^{(\beta)-}(p) = \frac{2\imath}{\sqrt{\beta}}\sqrt{\Gamma(\eta)^2\,\frac{2^{2\eta-1}n!\,(n+\eta)\sqrt{\beta}}{\pi\,\Gamma(n+2\eta)\,2E_n^{(\beta)}\left(E_n^{(\beta)}-m\right)}}\left(\frac{1}{1+\beta p^2}\right)^{\eta+1} C_{n-1}^{\eta+1}\left(\frac{\sqrt{\beta}p}{1+\beta p^2}\right). \tag{57}$$

This is the exact result of the energy spectrum together with the normalized wave functions of the bound states. In the limit $\beta \to 0$, the Dirac oscillator without the presence of the minimal length is found. One insists on the fact that the exact result depends on the α-point discretization interval.

III. CONCLUSION

In this paper, using the energy-momentum space representation, we have constructed the path integral representation for the Green function for Dirac oscillator in $(1+1)$ dimension with nonzero minimum position uncertainty. We obtained the spectrum energy and corresponding eigenfunctions expressed in terms of Gegenbauer polynomials. The energy levels show a dependence on n^2 corresponding to β effect of the minimal length correction. The main result is that the calculation depends on the α-point discretization interval and we conclude that the problem of discretization is not definitively settled in the path integral framework. This situation resembles to that of the quantization with constraint in which the mid-point is privileged. It would be interesting to look for a method which is independent of the way to discretize the path integral relative to the quantum dynamics with minimal length. This problem is under consideration.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors thank the Associate Editor for his enriching comments.

[1] G. Veneziano, Europhys. Lett. **2**, 199 (1986); D. Amati, M. Ciafaloni, and G. Veneziano, Phys. Lett. B **197**, 81 (1987); K. Konishi, G. Pauti, and P. Provero, *ibid.* **234**, 276 (1990); M. Kato, *ibid.* **245**, 43 (1990); R. Guida, K. Konishi, and P. Provero, Mod. Phys. Lett. A **6**, 1487 (1991).
[2] D. J. Gross, P. F. Mende, Nucl. Phys. B **303**, 407 (1988).
[3] L. J. Garay, Int. J. Mod. Phys. A **10**, 145 (1995).
[4] S. Capozziello, G. Lambiase, and G. Scarpetta, Int. J. Theor. Phys. **39**, 15 (2000).
[5] F. Scardigli, Phys. Lett. B **452**, 39 (1999); F. Scardigli and R. Casadio, Class. Quantum Grav. **20**, 3915 (2003).

[6] A. Kempf, J. Math. Phys. **35**, 4483 (1994); A. Kempf, G. Mangano, and R. B. Mann, Phys. Rev. D **52**, 1108 (1995); A. Kempf, J. Phys. A **30**, 2093 (1997); H. Hinrichsen and A. Kempf, J. Math. Phys. **37**, 2121 (1996).
[7] L. Susskind and E. Witten, The Holographic bound in anti-de Sitter space, e-print arXiv:hep-th/9805114; A. W. Peet and J. Polchinski, Phys. Rev. D **59**, 065011 (1999).
[8] M. R. Douglas and N. A. Nekrasov, e-print arXiv:hep-th/0106048.
[9] L. N. Chang, D. Minic, N. Okamura, and T. Takeuchi, Phys. Rev. D **65**, 125028 (2002).
[10] S. Benczik, L. N. Chang, D. Minic, N. Okamura, S. Rayyan, and T. Takeuchi, Phys. Rev. D **66**, 026003 (2002).
[11] F. Brau, J. Phys. A **32**, 7691 (1999).
[12] R. Akhoury and Y.-P. Yao, Phys. Lett. B **572**, 37 (2003).
[13] S. Benczik, L. N. Chang, D. Minic, and T. Takeuchi, Phys. Rev. A **72**, 012104 (2005).
[14] K. Nozari and T. Azizi, Gen. Relativ. Grav. **38**, 735 (2006).
[15] M. Merad and M. Falek, Phys. Scr. **79**, 015010 (2009).
[16] K. Nozari and M. Karami, Mod. Phys. Lett. A **20**, 3095 (2005).
[17] M. Falek and M. Merad, J. Math. Phys. **50**, 023508 (2009).
[18] M. Falek and M. Merad, J. Math. Phys. **51**, 033516 (2010).
[19] K. Nouicer, J. Phys. Lett. A. **354**, 399 (2006).
[20] K. Nouicer, J. Math. Phys. **48**, 112104 (2007).
[21] M. Merad, F. Zeroual, and H. Benzair, Electron J. Theor. Phys. **7**(23), 41 (2010).
[22] R. Rekioua and T. Boudjedaa, Eur. Phys. J. C **49**, 1091 (2007).
[23] H. Kleinert, *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, and Polymer Physics* (World Scientific, Singapore, 1990).
[24] C. Alexandrou, R. Rosenfelder, and A. W. Schreiber, Phys. Rev. A **59**, 1762 (1999).
[25] A. Lecheheb, M. Merad, and T. Boudjedaa, Annals of Physics **322**(5), 1233–1246 (2007).
[26] K. Nouicer, J. Phys. A: Math. Gen. **39**, 5125 (2006).
[27] D. C. Khandekar, S. V. Lawande, and K. V. Bhagwat, *Path Integral Methods and their Applications* (World Scientific, Singapore, 1993).
[28] L. S. Schulman, *Techniques and Applications of Path Integration* (Wiley, New York, 1981).
[29] C. Grosche and F. Steiner, *Handbook of Feynman Path Integrals* (Springer, Berlin, 1998).
[30] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic, New York, 1980) (Corrected and enlarged edition).

ملـــــخص

قدمنا في أطروحتنا هذه الأدوات الأساسية لبناء نظرية التشوه الرسمي في الحالة العامة. وهذا لتوضيح كيفية حل بعض المسائل النسبية لميكانيكا الكم عن طريق استخدام تكامل المسالك للمسقط الشمولي لـ "فينمان"، حيث أخذنا، على وجه الخصوص، نهجي في حالة التشوه. الأول متعلق بالمسافات الصغرى (GUP) والآخر بالهندسة غير التبديلية (GNC).
اقترحنا في النهج الأول علاج ديناميكية هزاز "ديراك" وحيد البعد في تمثيل الزخم (العزم)، عن طريق تقنيات Kleinert وتقنيات "فينمان" المعيارية. وفي السياق ذاته، درسنا أيضا ديناميكية الجسيمة التي تملك سبين ½ وتخضع لتفاعل كتلة سكونية وكمون سلمي متعلق بموضع الإحداثيات، متبعين تقنيتان مختلفتان الأولى: معادلة "ديراك" وحيدة البعد في فضاء الإحداثيات و تكامل المسالك في فضاء الزخم (العزم). وقمنا بحل المعادلة، عن طريق المنهجية المباشرة، متبعين في ذلك تقنية الاضطرابات لميكانيكا الكم العادي، فحصلنا على إزاحة مستويات الطاقة النسبية. وفي التقنية الثانية: تم بناء دالة غرين باستعمال نهج فينمان متبعين طريقة Fradkin-Gitman. في كلتي الحالتين تم الحصول على نفس كمية الإزاحة لمستويات الطاقة في الرتبة الأولى لعنصر التشوه β.
كما اقترحنا في النهج الثاني المتعلق بإدخال هندسة غير تبادلية في فضاء الطور. حيث عالجنا حالة الهزاز النسبي لـ (Klein-Gordon et Dirac) في وجود حقل مغناطيسي ثابت. إضافة إلى ذلك، ومن خلال نفس النهج قمنا بإعادة بناء دالة غرين لمعادلة Feschbach-Villars منعدمة السبين، ولتسهيل الحسابات أدخلنا تحويلات Foldy-Wouthuysen.
يتم تقييم، في كل تطبيق، معامل الانتشار، وتستنتج دوال الموجة وأطياف الطاقة المقابلة لها.

كلمات المفاتيـــــــــــــح: التشوه الرسمي، تكامل المسالك، دالة غرين، معامل الانتشار، هزاز ديراك، هزاز Klein-Gordon، مسقط شمولي، غير تبادلي (GNC)، الطول الاصغري (GUP)، معادلة Feshbach-Villars ، تحويلات Foldy-Wouthuysen.

Abstract

In our thesis, we presented the basic tools of the construction of the formal deformation theory in the general case. Then we illustrated how we can solve some problems of deformed relativistic quantum mechanics, through the path integral supersymmetric formalism, where we considered two approaches in the deformed case.

The first approach is related to the presence of a minimal length and its effect on spin relativistic systems. Hence we suggest the dynamic study of the Dirac oscillator in one dimension in the momentum by the Feynman standard techniques and Kleinert as well. In the same context, we also studied the dynamics of a variable particle mass that has half-spin, subject to the interaction of linear potential, following two different techniques, namely the Dirac equation in one dimension and in the configurations space and the path integrals formalism in momentum space. By the direct method, we solved the equation using the approximation technique of the ordinary quantum mechanics; we obtained the shift of relativistic energy levels. Concerning the second method, the Green function was constructed by Feynman approach. In both methods, we found the same energetic levels quantity at the first order of deformation parameter.

Now, we deal with the second approach which is the introduction of non-commutative geometry in phase space. We treated the relativistic oscillator case (Klein-Gordon and Dirac) in the presence of a magnetic field. In addition, we also applied the same formalism to the Fashbach-Villars equation for spin zero case. When we introduced the Foldy-Wouthuysen (F-W) transformation to diagonalise the Hamiltonian.

In each application, the propagators are calculated; the wave function and corresponding energy spectra are derived.

Key words: Formal Deformation, Path integral, Green function, Propagators, Dirac Oscillator, Klein-Gorden Oscillator (KGO), Supersymmetric, Grassmann, non-commutative (NC), Minimal length (GUP), Feshbach-Villars (F-V) Equation, Foldy-Wouthuysen (F-W) transformation.