

Table des matières

1	Introduction générale	5
I	Particules avec spin en présence de l'effet Aharonov-Bohm	8
2	L'effet Aharonov-Bohm	9
2.1	Introduction	9
2.2	Les équations de Maxwell et les transformations de jauge	11
2.3	Particule chargée dans un champ électromagnétique	13
2.4	L'effet Aharonov-Bohm magnétique : théorie et expérience	14
2.5	Section efficace différentielle de diffusion	17
2.6	L'effet Aharonov-Bohm et la dépendance en spin	20
3	Le potentiel de Hulthén à 2D en présence de l'effet Aharonov-Bohm	24
3.1	Introduction	24
3.2	Solution de l'équation de Pauli à 2D	25
3.3	Le spectre d'énergie	29
II	Systèmes dépendants du temps	32
4	Théorie quantique des invariants	33
4.1	Introduction	33
4.2	L'oscillateur harmonique à 1D avec masse et fréquence variables	36
4.3	L'oscillateur dépendant du temps à 2D dans un champ magnétique constant	39

5	L'équation de Schrödinger dépendante du temps avec des potentiels non centraux	42
5.1	Introduction	42
5.2	Dérivation de l'invariant	43
5.3	L'oscillateur généralisé en forme d'anneau double dépendant du temps	45
5.3.1	Fonctions propres exactes de l'invariant	45
5.3.2	Détermination de la phase et la fonction d'onde totale	46
III	Mécanique quantique déformée	48
6	Mécanique quantique avec une longueur minimale	49
6.1	Introduction	49
6.2	Relation d'incertitude généralisée à une dimension	50
6.3	Représentation dans l'espace des impulsions	52
6.4	Fonctions propres de l'opérateur de position	53
6.5	États à localisation maximale	55
6.6	Généralisation à plusieurs dimensions	58
6.7	Incertainces minimales sur la position et sur l'impulsion	59
6.8	Fonction de partition en présence d'une longueur minimale	61
6.8.1	Application (A) : Particule dans une boîte	61
6.8.2	Application (B) : L'oscillateur harmonique	64
7	Régularisation du potentiel δ avec une longueur minimale	67
7.1	Introduction	67
7.2	Etats liés et renormalisation en mécanique quantique ordinaire	68
7.3	Etats liés et renormalisation en mécanique quantique avec une longueur minimale	70
8	Conclusion générale	75
	Annexe : Articles publiés	83

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DE JIJEL
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Physique



N° d'ordre :

Série :

Thèse

présentée pour obtenir le diplôme de

Doctorat en Sciences

Spécialité : Physique

Option : Physique théorique

par

Ferkous Nourredine

Thème

**Systèmes dépendants du temps et déformations en
mécanique quantique**

Soutenue le : / /

Devant le Jury :

Président :	L. Chetouani	Prof.	Univ. Constantine 1
Rapporteur :	A. Bounames	Prof.	Univ. Jijel
Examineurs :	M. Maamache	Prof.	Univ. Sétif 1
	A. Bouda	Prof.	Univ. Bejaia
	Kh. Nouicer	Prof.	Univ. Jijel
	T. Boudjedaa	Prof.	Univ. Jijel

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur le Professeur Abdelhafid Bounames qui m'a donné la chance de préparer cette thèse sous sa direction. Ses conseils ont été indispensables pour réaliser ce travail. Je tiens particulièrement à le remercier de la liberté d'action qu'il m'a donné et de sa disponibilité, sa gentillesse et son enthousiasme.

Je remercie très sincèrement Monsieur le Professeur Lyazid Chetouani pour avoir accepté d'être président du jury.

Mes remerciements vont également aux honorables professeurs Mustapha Maamache, Ahmed Bouda, Khireddine Nouicer et Tahar Boudjedaa membres du jury de soutenance qui ont accepté d'évaluer ce travail.

Je tiens aussi à mentionner le plaisir que j'ai eu à travailler au sein du laboratoire de physique théorique de Jijel (LPTH), et j'en remercie ici tous les membres.

Enfin, je remercie mon épouse pour son soutien durant la préparation de cette thèse.

Nourredine

Chapitre 1

Introduction générale

Dans l'état actuel des connaissances scientifiques, la mécanique quantique joue un rôle fondamental dans la description et la compréhension des phénomènes naturels. En fait, les phénomènes qui se produisent sur une très petite échelle (atomique ou subatomique) ne peuvent être expliqués que le cadre de la physique quantique. C'est le cas avec les nanotechnologies qui obligeront de plus en plus à manipuler la matière atome par atome. Ces progrès technologiques dépendent d'une compréhension et application des principes fondamentaux de la mécanique quantique.

Comme nous le savons, l'état dynamique d'un système, à un instant donné, est caractérisé par une fonction d'onde, $\psi(\mathbf{r}, t)$, solution de l'équation de Schrödinger. Cette fonction d'onde est extrêmement importante puisqu'elle contient toutes les informations possibles sur ce système. Par conséquent, la tâche principale dans l'application de la mécanique quantique est de résoudre l'équation de Schrödinger. Malheureusement, dans la grande majorité des cas, cette équation est trop compliquée pour admettre une solution analytique exacte. On est donc obligé de faire appel à des méthodes numériques, perturbatives ou approximatives. Par exemple, c'est le cas du potentiel de Hulthén où l'équation de Schrödinger correspondante peut être résolue exactement seulement pour les ondes s (i.e. $\ell = 0$) [1, 2]. Pour le cas $\ell \neq 0$, on doit adopter une méthode d'approximation.

Les conditions aux limites exigent toutefois que la solution de l'équation de Schrödinger doit être régulière à un point donné de l'espace. Hagen [3] a montré, lors de l'étude de la diffusion d'une particule de spin $1/2$ en présence de l'effet Aharonov-Bohm [4], que certaines solutions qui sont singulières à l'origine deviennent dominantes et par conséquent physiquement

acceptables. Dans ce contexte, nous allons nous intéresser, dans cette thèse, au potentiel de Hulthén à deux dimensions en présence de l'effet Aharonov-Bohm en utilisant l'approximation du terme centrifuge [5]. Nous montrons, en premier lieu, que la présence de ce champ lève la dégénérescence des niveaux d'énergie. En outre, l'intervalle du paramètre du flux pour lequel des solutions singulières se présentent est modifié comparé au cas de la diffusion.

Par ailleurs, trouver une solution exacte à un problème donné nécessite que l'Hamiltonien associé soit intégrable. En mécanique classique, l'intégrabilité d'un système à N degré de liberté décrit par un Hamiltonien qui ne dépend pas explicitement du temps signifie que l'équation correspondante d'Hamilton-Jacobi est séparable en N équations indépendantes, une pour chaque degré de liberté [6]. Nous devons garder à l'esprit que les problèmes séparables en mécanique classique sont également séparable en mécanique quantique. En d'autres termes, l'équation de Schrödinger indépendante du temps est séparable si le problème classique correspondant est séparable [7].

Pour des Hamiltoniens dépendants explicitement du temps, la situation est beaucoup plus compliquée, car alors l'énergie n'est plus une quantité conservée. Cela signifie que, même pour des problèmes unidimensionnels, les Hamiltoniens associés ne sont plus, en général, intégrables. Comme il n'y a pas de recette pour découvrir si un système est intégrable ou non, de ce fait, obtenir une solution exacte pour un problème donné, est toujours une tâche importante. Dans cette thèse, nous allons nous intéresser aussi aux solutions de l'équation de Schrödinger dépendante du temps au moyen de la théorie de Lewis et Riesenfeld [8]. Nous allons appliquer cette théorie, en premier lieu, au cas d'une particule soumise à un oscillateur avec des paramètres dépendants du temps en présence d'un champ magnétique constant [9]. Puis, nous montrons que cette technique est également utile pour déterminer les solutions analytiques de l'équation de Schrödinger dépendante du temps pour des potentiels non centraux [10].

D'autre part, beaucoup d'attention a été accordée récemment à l'étude des implications causées par l'introduction d'une relation d'incertitude généralisée en mécanique quantique développée par Kempf et ses collaborateurs [11]. En conséquence, plusieurs problèmes ont été étudiés en connexion avec cette version déformée de la mécanique quantique (voir pour l'instant la référence [12]). Dans cette thèse nous poursuivons l'étude de cette nouvelle algèbre déformée dans le cadre de potentiels exactement solubles en mécanique quantique ordinaire à travers l'étude du potentiel attractif $\alpha\delta(\mathbf{x})$. Nous montrons dans ce contexte que le paramètre de déformation lié à ce formalisme régularise les divergences associées aux états liés de ce

potentiel [13].

Cette thèse est divisée en trois parties, chaque partie est composée de deux chapitres.

Dans la première partie, nous allons donner un résumé assez détaillé sur l'effet Aharonov-Bohm des points de vue théorique et expérimental. Nous présentons également, de manière assez exhaustive, les travaux de Hagen [3, 14] relatifs à la diffusion des particules non relativistes chargées sans spin et des particules relativistes avec spin. Nous considérons ensuite l'effet Aharonov-Bohm en version états liés à travers l'étude du spectre d'énergie pour un système qui peut être présenté comme une combinaison du potentiel de Hulthén à deux dimensions (2D) et le flux de ce champ.

Dans la deuxième partie, nous allons donner en premier lieu un aperçu de la théorie de Lewis et Riesenfeld ainsi que son application sur un système physique simple décrit par un oscillateur harmonique de masse et fréquence variables avec le temps. Puis on va considérer le cas d'une particule soumise à un oscillateur avec des paramètres dépendants du temps en présence d'un champ magnétique constant. Ensuite, nous montrons que cette méthode peut aussi être utilisée pour donner des solutions analytiques de l'équation de Schrödinger dépendante du temps pour des potentiels non centraux.

Dans la troisième partie, nous allons voir comment l'introduction d'une relation d'incertitude généralisée régularise les divergences associées au spectre d'énergie de la fonction δ de Dirac à deux et à trois dimensions en mécanique quantique non relativiste. Nous allons montrer, en particulier, que la longueur élémentaire inclus dans ce formalisme peut être interprétée comme une coupure naturelle qui peut régulariser ce potentiel sans la nécessité d'introduire une coupure arbitraire.

Le dernier chapitre sera consacré à une conclusion des principaux résultats.

Première partie

Particules avec spin en présence de l'effet Aharonov-Bohm

Chapitre 2

L'effet Aharonov-Bohm

2.1 Introduction

Plus d'un siècle plus tôt, James Clerk Maxwell [15] a changé la façon dont nous pensons sur l'action à distance par identifier ce que nous appelons maintenant les champs de Maxwell comme des objets physiques réels qui contiennent l'énergie et l'impulsion et satisfont aux lois de conservation. Ils ne sont donc pas seulement des fonctions mathématiques qui récapitulent les informations nécessaires sur les mouvements des charges. Plus tard, après la formulation de la mécanique quantique, ces champs physiques devaient être quantifiés. Yakir Aharonov et David Bohm [4] ont constaté qu'en mécanique quantique les champs de Maxwell dans une région multiplement connexe ne contiennent pas toute la physique ; le potentiel vecteur doit également être doté de la réalité pour donner un sens aux résultats subtils de la mécanique quantique. Cette découverte est venue à être connue comme l'effet Aharonov-Bohm ou en bref l'effet AB. Sans doute, c'est l'un des résultats les plus spectaculaires émergents de l'étude de la mécanique quantique : le fait qu'une analyse relativement simple basée sur l'équation de Schrödinger pourrait donner des prévisions sur les effets d'interférence des faisceaux de particules qui passaient seulement à travers des régions où aucune force classique pourrait agir étaient en effet très extraordinaires.

Historiquement, la popularité de l'effet AB n'est pas venue au moment où ce phénomène a été prédit. Très peu de physiciens avaient considéré effectivement que les électrons pouvaient être physiquement influencés par des champs électriques ou magnétiques quand ils n'ont pas directement touchés par ces champs. En 1960, une affirmation a été faite en faveur de l'effet AB par Furry et Ramsey [16]. Cette affirmation a été fondée sur le principe de complémentarité

par lequel l'effet AB est un phénomène fondamental de la mécanique quantique sans analogue classique. Mitler [17] (1961) a étudié l'effet des fluctuations du vide sur la mesurabilité de l'effet AB. Il a constaté que l'effet AB était encore observable même lorsque ces fluctuations existaient. Peshkin, Talmi et Tassie [18] (1961) ont affirmé que l'effet AB est nécessaire pour la consistance avec le principe d'incertitude. Feynman, Leighton and Sands [19] (1964) ont pris l'effet AB dans leur manuel "The Feynman Lectures on Physics" où ils ont expliqué cet effet, avec des termes lucides, comme une évidence de la réalité physique du potentiel vecteur. À cette époque, quelques résultats expérimentaux avaient été signalés en accord avec la théorie AB, et les gens semblaient croire en l'existence de l'effet AB. Cependant, comme Aharonov et Bohm ont souligné dans leur papier [20], qu'aucune de ces expériences ne pourrait être considérée comme une confirmation idéale. L'importance des potentiels en mécanique quantique ne pouvait pas encore être considérée comme ayant été démontré expérimentalement. Aharonov and Bohm étaient obligé alors de contester des critiques soulevées pendant plusieurs années (voir la référence [21] pour plus de détails). Il a fallu attendre les expériences remarquables de Tonomura [22, 23, 24] qui sont largement considérées comme la seule preuve expérimentale de l'existence physique de l'effet Aharonov-Bohm.

D'autre part, dans la grande partie de leur papier original, Aharonov et Bohm [4] ont concentré sur le calcul de la diffusion des particules par un solénoïde de rayon infiniment petit en se basant sur l'équation de Schrödinger. Le fait que les particules élémentaires généralement utilisées pour de telles expériences ont des spins $1/2$, il est naturel de se demander comment l'inclusion du spin modifie ces résultats? C'est une préoccupation qui a été de plus en plus abordée dans la littérature. En particulier, Alford and Wilczek [25] ont étudié l'interaction des cordes cosmiques avec la matière où ils ont montré que l'amplitude de diffusion n'est pas affectée par le spin, un résultat qui découle certainement si l'on accepte leur exigence que la composante supérieure du spineur doit être régulière à l'origine. Motivé particulièrement par ce dernier travail, Hagen [3, 14] a proposé un modèle pour le champ magnétique approprié à l'effet AB sous forme d'une fonction delta de Dirac pour étudier la diffusion des particules de spin $1/2$. Il a montré qu'une contribution d'une telle fonction ne peut être négligée lorsque le spin de la particule est pris en considération, il a montré que certaines solutions qui sont singulières à l'origine deviennent dominantes et par conséquent physiquement acceptables. En outre, l'inclusion de ces solutions affecte les déphasages et modifie la section efficace de diffusion.

Les états liés en présence de l'effet Aharonov-Bohm ont été également discutés dans la

littérature [21]. Le principal résultat de ces études est que l'énergie des états stationnaires doit dépendre du flux magnétique. En outre, si le spin est pris en considération, il a été montré que, dans certains cas particuliers où les solutions singulières se produisent, le spectre d'énergie ainsi obtenu dépend de la valeur du spin. C'est le cas, par exemple, lorsqu'on considère le potentiel de Coulomb [26, 27], l'oscillateur de Dirac [28]. Comme il n'y a que quelques travaux concernant ce sujet, et pour examiner en plus les effets physiques causés par la présence de ces solutions singulières, nous nous proposons dans la première partie de cette thèse de considérer le potentiel de Hulthén en présence de l'effet AB. Pour ce faire, nous considérons l'équation de Pauli à deux dimensions en adoptant l'hypothèse de l'approximation du terme centrifuge. Nous montrons, d'une part, que la présence du champ AB lève la dégénérescence des niveaux d'énergie. D'autre part, l'intervalle du paramètre du flux pour lequel des solutions singulières se présentent est modifié comparé au cas de la diffusion. Pour vérifier nos résultats, nous comparons la présente contribution avec celle du problème de Coulomb en présence de l'effet AB [27]. Le spectre donné dans cette référence, à la limite non relativiste, peut être obtenu comme cas particulier à partir du spectre calculé ici lorsque le paramètre qui représente l'effet d'écran est nul.

Outre la présente introduction, ce chapitre contient un rappel assez détaillé sur l'effet Aharonov-Bohm. Nous allons rappeler les propriétés importantes des potentiels électromagnétiques. Puis nous considérons cet effet sous les hypothèses de la théorie quantique standard, nous donnons également un bref aperçu sur l'expérience remarquable réalisée par Tonomura et ses collaborateurs [29]. Nous allons aussi présenter de manière assez détaillée les travaux de Hagen [3, 14] relatifs à la diffusion des particules non relativistes chargées sans spin et des particules relativistes avec spin.

2.2 Les équations de Maxwell et les transformations de jauge

L'électrodynamique classique, comme nous le savons, est une théorie physique basée principalement sur quatre équations, qui décrivent la dynamique du champ électromagnétique,

appelées équations de Maxwell^(*)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad (2.4)$$

Ces équations expriment les relations entre le champ électrique \mathbf{E} et le champ magnétique \mathbf{B} et leurs sources : la densité de courant \mathbf{j} et la densité de charge ρ .

La résolution des équations de Maxwell peut être largement simplifiée en remarquant que les équations (2.3) et (2.4) sont homogènes selon les champs, i.e. ne dépendent pas des termes de sources. En effet, ces deux équations peuvent être résolues en écrivant les champs en fonction d'un potentiel scalaire ϕ et d'un potentiel vecteur \mathbf{A} de la façon suivante

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (2.6)$$

Les potentiels \mathbf{A} et ϕ ne définissent pas univoquement \mathbf{E} et \mathbf{B} , c'est-à-dire les potentiels déterminent d'une façon unique les champs, mais les champs ne déterminent pas d'une façon unique les potentiels. Cela signifie que si nous transformons les potentiels \mathbf{A} et ϕ de la manière suivante

$$\begin{cases} \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi \\ \phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \end{cases}, \quad (2.7)$$

on obtient les mêmes champs électrique et magnétique quelque soit la fonction χ . Comme on peut satisfaire les équations de Maxwell avec des potentiels différents, on dit que ces équations sont invariantes de jauge et la transformation (2.7) est généralement appelée transformation de jauge.

L'invariance de jauge des équations de Maxwell est la principale raison pour laquelle les potentiels étaient généralement considérés comme une construction purement mathématique sans aucune signification physique. Cependant, comme nous allons voir, ce point de vue a changé avec le développement de la mécanique quantique et plus précisément la découverte de l'effet Aharonov-Bohm.

(*) A ces équations, on doit également ajouter la force de Lorentz.

2.3 Particule chargée dans un champ électromagnétique

La théorie quantique repose inévitablement sur la formulation Hamiltonienne ou Lagrangienne de la dynamique, où les champs électromagnétiques disparaissent des équations du mouvement en faveur des potentiels scalaire et vectoriel. En effet, l'Hamiltonien d'une particule de masse m et de charge q dans un champ électromagnétique est donné par

$$H = \frac{[\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)]^2}{2m} + q\phi(\mathbf{r},t). \quad (2.8)$$

Puisque le potentiel vecteur \mathbf{A} est défini seulement à une jauge près, ce qui suggère que la fonction d'onde n'est pas invariante de jauge. Pour bien voir l'effet de cette liberté de jauge, nous considérons la transformation (2.7) pour laquelle l'équation de Schrödinger

$$H(\mathbf{A})\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}, \quad (2.9)$$

se transforme comme

$$H(\mathbf{A}')\psi' = i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t}. \quad (2.10)$$

Sous cette transformation, la fonction d'onde acquiert une phase supplémentaire

$$\psi' = \exp\left(i\frac{q}{\hbar c}\chi(\mathbf{r},t)\right)\psi, \quad (2.11)$$

où $\chi(\mathbf{r},t)$ est une fonction scalaire. En effet, soit une fonction d'onde, $\psi(\mathbf{r},t)$, solution de l'équation de Schrödinger décrite par l'Hamiltonien (2.8), c'est-à-dire, on a

$$\left\{ \frac{[\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)]^2}{2m} + q\phi(\mathbf{r},t) \right\} \psi(\mathbf{r},t) = i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t}, \quad (2.12)$$

et soit $\psi'(\mathbf{r},t)$ une solution de l'équation de Schrödinger pour une transformation de jauge (2.7)

$$\left\{ \frac{[\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}'(\mathbf{r},t)]^2}{2m} + q\phi'(\mathbf{r},t) \right\} \psi'(\mathbf{r},t) = i\hbar\frac{\partial\psi'(\mathbf{r},t)}{\partial t}. \quad (2.13)$$

Pour trouver la relation entre les deux fonctions $\psi(\mathbf{r},t)$ et $\psi'(\mathbf{r},t)$, on pose

$$\psi'(\mathbf{r},t) = u(\mathbf{r},t)\psi(\mathbf{r},t), \quad (2.14)$$

où $u(\mathbf{r},t)$ est une fonction à déterminer. Pour cela, remplaçons (2.14) dans (2.13), on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2m} \left[\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\mathbf{A} - \frac{q}{c}\nabla\chi \right]^2 u\psi + q\phi u\psi - \frac{q}{c} \left(\frac{\partial\chi}{\partial t} \right) u\psi \\ &= i\hbar\frac{\partial u}{\partial t}\psi + i\hbar u\frac{\partial\psi}{\partial t}. \end{aligned}$$

Le fait que ψ est une solution de (2.12), on aboutit à l'équation

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m} \left\{ \frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{q}{c} (\nabla \chi) \right\} u \cdot \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \psi + \frac{1}{2m} (\nabla \chi) \psi \cdot \left\{ \frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{q}{c} (\nabla \chi) \right\} u \\ &= \left[i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{q}{c} u \left(\frac{\partial \chi}{\partial t} \right) \right] \psi. \end{aligned}$$

Pour que $\psi'(\mathbf{r}, t)$ soit une solution de (2.13), il faut choisir la fonction $u(\mathbf{r}, t)$ telle que

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{q}{c} u \left(\frac{\partial \chi}{\partial t} \right) = 0, \\ \text{et } \left\{ \frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{q}{c} (\nabla \chi) \right\} u = 0, \end{cases}$$

la solution de ces deux équations est la fonction

$$u = \exp \left(i \frac{q}{\hbar c} \chi(\mathbf{r}, t) \right), \quad (2.15)$$

d'où le résultat (2.11). La transformation de jauge introduit donc une phase supplémentaire dans la fonction d'onde. Toutefois, étant donné que la densité de probabilité, $|\psi'|^2 = |\psi|^2$, est conservée cette dépendance de phase semble invisible.

2.4 L'effet Aharonov-Bohm magnétique : théorie et expérience

Considérons une particule de charge q se déplaçant le long d'un chemin, C , dans lequel le champ magnétique, \mathbf{B} , est identiquement nul. Cependant, un champ magnétique nul ne veut pas dire que le potentiel vecteur, \mathbf{A} , est aussi égale à zéro.

En traversant le chemin, la fonction d'onde de la particule va acquérir une phase, φ , qui s'écrit comme

$$\varphi = \frac{q}{\hbar c} \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}, \quad (2.16)$$

où l'intégrale s'étend le long du chemin. Si nous considérons deux chemins séparés (C) et (C') avec les mêmes points initial et final, la phase relative de la fonction d'onde est alors

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \frac{q}{\hbar c} \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} - \frac{q}{\hbar c} \int_{C'} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \frac{q}{\hbar c} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \frac{q}{\hbar c} \int_S \mathbf{B} \cdot d^2\mathbf{r}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

où la dernière relation découle de l'application du théorème de Stokes, et \int_S s'étend sur la surface fermée délimitée par (C) et (C').

Même si le champ est identiquement nul sur les chemins (C) et (C'), la fonction d'onde va acquérir une phase relative non nulle :

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \frac{q}{\hbar c}\Phi \\ &= \frac{q}{\hbar c} \times \text{flux magnétique à travers une surface.}\end{aligned}\tag{2.18}$$

Ce phénomène, connu comme l'effet Aharonov-Bohm, conduit à des effets physique observables se traduit par le décalage de franges d'interférence.

Comme évoqué dans l'introduction de cette partie, l'effet Aharonov-Bohm a été étudié dans plusieurs contextes expérimentaux. Les plus remarquables parmi ces expériences sont, sans doute, celles qui ont été effectuées par Tonomura et ses collaborateurs [22, 23, 24] (1982 – 1986). Le solénoïde infini supposé dans la théorie d'Aharonov-Bohm est expérimentalement inaccessible. Cependant, une géométrie idéale peut être obtenue en utilisant un solénoïde fini de forme toroïdal comme le montre la figure (1). De plus, comme il ne fallait pas qu'il existe un chevauchement entre l'onde d'électrons et le champ magnétique, Tonomura et ses collaborateurs ont recouvert cet aimant toroïdal par une couche métallique formée par des matériaux supraconducteurs pour empêcher la pénétration d'électrons. En outre, les champs magnétiques ne sont pas autorisés à traverser une couche supraconductrice en raison de l'effet Meissner^(*) et, par conséquent, aucun champ magnétique ne s'échappe en dehors de l'échantillon.

Etant donné que le flux magnétique ne peut pas être modifié, ils ont fabriqué de nombreux échantillons toroïdaux avec différentes valeurs du flux magnétique en unité de $(h/2e)$. Ensuite ils ont mesuré, pour une onde électronique incidente autour d'un échantillon toroïdal refroidi à 4,5 K, le déphasage relatif entre les deux ondes d'électron qui passent à l'intérieur et à l'extérieur de l'échantillon toroïdal.

(*) L'effet Meissner (découvert par Meissner et Ochsenfeld en 1933) est une autre propriété importante des matériaux supraconducteurs. En effet, un matériau supraconducteur placé dans un champ magnétique extérieur exclu toutes les lignes de champ de son intérieur, si le champ extérieur est inférieur à un champ critique. Il devient alors un corps diamagnétique parfait. L'exclusion du flux magnétique est due à des courants électriques qui circulent à la surface du supraconducteur et qui génèrent un champ magnétique qui annule le champ appliqué.

Fig. (1). *Schéma de l'échantillon toroïdal.*

Bien que les échantillons ont été mesurés avec des différentes valeurs du flux magnétique, les déphasages détectés étaient 0 ou π comme indiqué sur la figure (2). La conclusion est maintenant évidente : un déphasage est produit même lorsque les champs magnétiques sont confinés à l'intérieur de la couche supraconductrice et qui sont à l'abri des ondes d'électron. Cela prouve que l'effet AB existe. Ce résultat vient du fait qu'un supraconducteur entoure complètement un flux magnétique, le flux devient quantifié à un multiple entier d'une quantité ($h/2e$). Par conséquent, le déphasage (2.18) devient :

$$\Delta\varphi = \frac{e}{\hbar} \times n \frac{h}{2e} = n\pi. \quad (2.19)$$

Fig. (2). *Franges d'interférences électroniques des échantillons*

toroïdaux à 4,5 K a) $\Delta\varphi = 0$; b) $\Delta\varphi = \pi$.

Pour bien comprendre cette expérience, notons que les déphasages mesurés dépendent de la température : en effet quand la température T est au-dessus d'une valeur critique $T_c = 9,5 K$, le déphasage est déterminé par le flux magnétique circulant à l'intérieur de l'aimant. Quand T diminue au-dessous de T_c , le flux magnétique total est égal à un multiple entier de ($h/2e$). La dépendance en température du déphasage provient du fait que l'aimantation à l'intérieur de l'échantillon augmente en raison de la diminution des fluctuations thermiques des spins comme illustré à la figure (3).

Fig. (3). *La dépendance en température des franges d'interférences*

*des échantillons toroïdaux ; a) $\Delta\varphi = 0, 3\pi$ à $T=300 K$;
b) $\Delta\varphi = 0, 8\pi$ à $T=15 K$; c) $\Delta\varphi = \pi$ à $T=4,5 K$.*

2.5 Section efficace différentielle de diffusion

Par souci de comparaison avec les résultats de la section (2.6), nous allons donner, dans cette section, un résumé sur la diffusion d'un faisceau d'électrons par un champ magnétique à la limite où le rayon de la région R , où ce champ est confiné, tend vers zéro tandis que le flux total Φ reste fixe.

Le champ magnétique est supposé être perpendiculaire au plan et confiné dans un solénoïde de rayon extrêmement faible de telle sorte que le flux

$$\Phi = 2\pi \int_0^\infty B(r) r dr, \quad (2.20)$$

est fini et non nul. Le champ magnétique doit être pris de la forme

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{\delta(r)}{r} \mathbf{e}_z, \quad (2.21)$$

le potentiel vecteur associé est

$$\mathbf{A} = \frac{\Phi}{2\pi r} \Theta(r) \mathbf{e}_\theta, \quad (2.22)$$

où $\Theta(r)$ est la fonction de Heaviside, et les coordonnées cylindriques ($\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$) sont utilisées pour plus de commodité.

Si la forme (2.21) n'est pas prise, alors bien sûr, la structure détaillée du champ magnétique devient pertinente et, par conséquent, un calcul beaucoup plus difficile est nécessaire. Malgré cela, l'expression (2.21) présente une structure très singulière. Pour surmonter ce problème, Hagen [3] a redéfini le champ magnétique (2.21) comme la limite d'un autre plus physique et moins singulier. Ce champ a la forme suivante

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{\delta(r-R)}{R} \mathbf{e}_z, \quad (2.23)$$

avec

$$\mathbf{A} = \frac{\Phi}{2\pi r} \Theta(r-R) \mathbf{e}_\theta. \quad (2.24)$$

L'équation de Schrödinger pour un électron en présence du champ (2.23) s'écrit comme

$$\frac{1}{2m} \left[\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right]^2 \psi = E\psi,$$

plus explicitement on a

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{\hbar e}{2imc} (\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla) + \frac{e^2 \mathbf{A}^2}{2mc^2} \right] \psi = E\psi. \quad (2.25)$$

Le terme paramagnétique $(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla)$ peut se simplifier en utilisant la jauge de Coulomb $(\nabla \cdot \mathbf{A} = 0)$. Donc, (2.25) se réduit à

$$\left[\nabla^2 - i \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \cdot \nabla - \frac{e^2 \mathbf{A}^2}{\hbar^2 c^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \right] \psi = 0. \quad (2.26)$$

En coordonnées cylindriques, l'équation précédente s'écrit

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i\alpha\Theta(r-R) \right)^2 + k^2 \right] \psi = 0, \quad (2.27)$$

où $k^2 = 2ME/\hbar^2$ et $\alpha = -e\Phi/2\pi\hbar c$.

Cherchons la solution de (2.27) au moyen de la décomposition suivante

$$\psi(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\theta} f_m(r), \quad (2.28)$$

ainsi la partie radiale vérifie l'équation

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} [m + \alpha\Theta(r-R)]^2 + k^2 \right] f_m(r) = 0, \quad (2.29)$$

où la solution, en termes de fonctions de Bessel, est

$$f_m(r) = \begin{cases} A_m J_{|m+\alpha|}(kr) + B_m J_{-|m+\alpha|}(kr), & r > R \\ C_m J_{|m|}(kr), & r < R. \end{cases} \quad (2.30)$$

Les coefficients A_m , B_m et C_m sont déterminés par les conditions de continuité suivantes

$$\begin{cases} f_m(R-\varepsilon) = f_m(R+\varepsilon), \\ \frac{d}{dr} f_m(R-\varepsilon) = \frac{d}{dr} f_m(R+\varepsilon). \end{cases} \quad (2.31)$$

A l'aide des solutions (2.30), les conditions (2.31) s'écrivent

$$C_m J_{|m|}(kR) = A_m J_{|m+\alpha|}(kR) + B_m J_{-|m+\alpha|}(kR), \quad (2.32)$$

$$C_m \frac{d}{dR} J_{|m|}(kR) = A_m \frac{d}{dR} J_{|m+\alpha|}(kR) + B_m \frac{d}{dR} J_{-|m+\alpha|}(kR). \quad (2.33)$$

à l'ordre le plus bas en R , les fonctions de Bessel se comportent comme

$$J_\nu(kR) \sim \frac{(kR)^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} + O(R^{\nu+2}), \quad (2.34)$$

$$\frac{d}{dR} J_\nu(kR) \sim \frac{k\nu (kR)^{\nu-1}}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} + O(R^{\nu+1}). \quad (2.35)$$

A partir des équations (2.32) et (2.33), le rapport B_m/A_m , à l'ordre le plus bas en R , est

$$\frac{B_m}{A_m} = \frac{\Gamma(1 - |m + \alpha|)}{2^{2|m+\alpha|}\Gamma(|m + \alpha| + 1)} \left(\frac{|m + \alpha| - |m|}{|m + \alpha| + |m|} \right) (kR)^{2|m+\alpha|} + O(R^{|m+\alpha|+1}) .. \quad (2.36)$$

Le rapport B_m/A_m doit tendre vers zéro aussi rapide que $R^{2|m+\alpha|}$. Par conséquent, la solution $A_m J_{|m+\alpha|}(kR)$ est toujours dominante à la limite $R \rightarrow 0$. Ce résultat nous permet ainsi de remplacer les solutions (2.30) par la solution unique suivante

$$f_m(r) = A_m J_{|m+\alpha|}(kr). \quad (2.37)$$

D'où la fonction d'onde (2.28) s'écrit

$$\psi(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m J_{|m+\alpha|}(kr) e^{im\theta}. \quad (2.38)$$

On peut donc conclure que, pour des particules sans spin, la fonction d'onde doit en effet être régulière à l'origine.

Pour bien voir l'effet du potentiel vecteur sur des particules incidentes dans une expérience de diffusion, Aharonov et Bohm [4] ont calculé la section efficace différentielle de diffusion pour un faisceau d'électrons venant de la droite ($\theta = 0$, $x = +\infty$). Nous donnons ici les résultats principaux de cette étude, pour les détails du calcul on peut consulter la référence originale [4].

Le comportement asymptotique de la fonction d'onde (2.38) doit être de la forme

$$\psi \rightarrow \psi_{inc} + \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} f(\theta), \quad (2.39)$$

où $f(\theta)$ est l'amplitude de diffusion. L'onde incidente ψ_{inc} doit être choisie de manière à satisfaire la condition initiale, à savoir, la densité de courant

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)}{2im} - \frac{e}{mc} \mathbf{A} \psi \psi^*, \quad (2.40)$$

doit être constante et dans la direction x . Pour cette raison, Aharonov et Bohm ont choisi l'onde incidente comme $\psi_{inc} = e^{-ikx - i\alpha\theta}$ au lieu de e^{-ikx} . En effet, nous pouvons voir facilement, au moyen de la jauge (2.24), que la densité de courant est une constante (dans la direction des x) et égale à

$$\mathbf{j} = -\frac{\hbar k}{m} \mathbf{i}. \quad (2.41)$$

Notons que la différence entre l'utilisation de e^{-ikx} et $e^{-ikx - i\alpha\theta}$ est sans importance lorsque nous visualisons la situation physique où la particule incidente doit être décrite par un paquet

d'ondes où, dans ce cas, la variation sur les valeurs possibles de θ est pratiquement nulle ce qui rend $e^{-i\alpha\theta}$ une constante multiplicative. Ainsi, la fonction d'onde a le comportement suivant

$$\psi \rightarrow e^{-i(kr \cos \theta + \alpha\theta)} + \frac{f(\theta)}{\sqrt{r}} e^{ikr}, \quad (2.42)$$

où (voir la référence [4])

$$f(\theta) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{(2\pi ik)^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{-i\frac{\theta}{2}}. \quad (2.43)$$

La section efficace différentielle de diffusion est donc

$$\left(\frac{d\sigma}{d\theta}\right)_{AB} = \frac{\sin^2(\pi\alpha)}{2\pi k \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \quad (2.44)$$

ce résultat n'est valable que pour $|\alpha| < 1$. Comme il est généralement souhaitable d'éviter une telle restriction, Hagen [30] a légèrement modifié l'approche du papier original [4] au moyen de la séparation

$$\alpha = N + \beta, \quad (2.45)$$

où $0 \leq \beta < 1$, et N est le plus grand entier contenu dans α . Ce qui permet de réécrire le comportement (2.42) pour des valeurs arbitraires de α comme [30]

$$\psi(\mathbf{r}) \rightarrow e^{-ikr \cos \theta - i\alpha\theta} + \frac{f_{AB}(\theta)}{\sqrt{r}} e^{ikr}, \quad (2.46)$$

avec

$$f_{AB}(\theta) = -i \frac{e^{-iN(\theta-\pi)} \sin(\pi\alpha)}{(2\pi ik)^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{-i\frac{\theta}{2}}. \quad (2.47)$$

Il est important de noter qu'il y a une différence entre l'amplitude précédente $f_{AB}(\theta)$ et la forme (2.43), en particulier le facteur $e^{-iN(\theta-\pi)}$ qui ne figure pas dans l'expression de $f(\theta)$. Quoique cela n'affecte pas la section efficace.

2.6 L'effet Aharonov-Bohm et la dépendance en spin

Il est naturel de se demander comment l'inclusion du spin modifie les résultats (2.44) et (2.47). Pour répondre à cette question, il est commode de considérer l'équation de Dirac pour une particule de mass M en présence d'un champ magnétique défini par l'expression (2.23). Soit donc l'équation

$$\beta(M + \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\pi}) \psi = E\psi. \quad (2.48)$$

où la quantité $\boldsymbol{\pi}$ est donnée par $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} - e\mathbf{A}$ et on a pris $\hbar = c = 1$. En termes de spineur à deux composantes, les matrices β et $\beta\gamma^i$ sont, dans ce cas, définies en fonction des matrices de Pauli

$$\beta = \sigma_z, \quad \beta\gamma^i = (\sigma_x, s\sigma_y)$$

et s est deux fois la valeur de spin (+1 pour spin haut et -1 pour spin bas). Cette approche diffère de celle habituelle qui sélectionne une valeur particulière pour le spin et a l'avantage de rendre les résultats plus transparent [3].

Appliquons l'opérateur $(M + \beta E - \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\pi})\beta$ aux deux membres de l'équation (2.48), on obtient

$$[E^2 - M^2 + (\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\pi})(\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\pi})] \psi = 0, \quad (2.49)$$

et le terme $(\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\pi})(\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\pi})$ peut être simplifié au moyen de la formule

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{AB} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}),$$

comme suit

$$(\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\pi})(\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\pi}) = -\boldsymbol{\pi}^2 - \alpha s \sigma_z \frac{\delta(r-R)}{R}. \quad (2.50)$$

Alors, l'équation (2.49) peut s'écrire explicitement

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i\alpha \Theta(r-R) \right)^2 + k^2 - \sigma_z \frac{\alpha s}{R} \delta(r-R) \right] \psi = 0, \quad (2.51)$$

où $k^2 = E^2 - M^2$, $\psi = (\psi_1, \psi_2)^T$. Ecrivons maintenant la première composante, ψ_1 , de la façon suivante

$$\psi_1 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m(r) e^{im\theta}, \quad (2.52)$$

il s'ensuit que $f_m(r)$ vérifie l'équation

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{d}{d\theta} + i\alpha \Theta(r-R) \right)^2 + k^2 - \sigma_z \frac{\alpha s}{R} \delta(r-R) \right] f_m(r) = 0. \quad (2.53)$$

La solution de l'équation précédente peut se mettre sous la forme suivante

$$f_m(r) = \begin{cases} A_m J_{|m+\alpha|}(kr) + B_m J_{-|m+\alpha|}(kr), & r > R \\ C_m J_{|m|}(kr), & r < R, \end{cases} \quad (2.54)$$

comme il est bien connu, l'effet de la fonction δ s'introduit dans les conditions de raccordement données par

$$f_m(R - \varepsilon)_{in} = f_m(R + \varepsilon)_{out}, \quad (2.55)$$

$$\left[\frac{df_m(r)}{dr} \right]_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon} = \frac{\alpha s}{R} f_m(R). \quad (2.56)$$

Ce qui revient à écrire simplement

$$\begin{aligned} A_m J_{|m+\alpha|}(kR) + B_m J_{-|m+\alpha|}(kR) &= C_m J_{|m|}(kR), \\ A_m \partial_R J_{|m+\alpha|}(kR) + B_m \partial_R J_{-|m+\alpha|}(kR) - C_m \partial_R J_{|m|}(kR) &= \frac{\alpha s}{R} J_{|m|}(R). \end{aligned} \quad (2.57)$$

A l'ordre le plus bas en R et en tenant compte des comportements (2.34) et (2.35), il est possible d'obtenir le rapport

$$\frac{B_m}{A_m} = \frac{\Gamma(1 - |m + \alpha|)}{\Gamma(|m + \alpha| + 1)} \left(\frac{1}{2} \right)^{2|m+\alpha|} \left(\frac{|m + \alpha| - |m| - \alpha s}{|m + \alpha| + |m| + \alpha s} \right) (kR)^{2|m+\alpha|} + O(R^{|m+\alpha|+1}). \quad (2.58)$$

A la limite $R \rightarrow 0$, ce rapport tend vers zéro aussi rapide que $R^{2|m+\alpha|}$ à moins que

$$|m + \alpha| = -|m| - \alpha s, \quad (2.59)$$

en plus de la relation (2.59), il faut remarquer que l'exposant de kR dans l'équation (2.58) doit vérifier l'inégalité suivante

$$2|m + \alpha| < |m + \alpha| + 1,$$

c'est-à-dire

$$|m + \alpha| < 1. \quad (2.60)$$

La fonction $f_m(r)$ pour $r > R$ peut être mise sous la forme

$$\begin{aligned} f_m(r) &= C_m (kR)^{|m|} \left\{ \frac{2^{|m+\alpha| - |m|} \Gamma(|m+\alpha|+1)}{\Gamma(|m|+1)} \left(\frac{|m+\alpha| + |m| + s\alpha}{2|m+\alpha|} \right) (kR)^{-|m+\alpha|} J_{|m+\alpha|}(kr) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Gamma(1 - |m+\alpha|)}{2^{|m+\alpha| + |m|} \Gamma(|m|+1)} \left(\frac{|m+\alpha| - |m| - s\alpha}{2|m+\alpha|} \right) (kR)^{|m+\alpha|} J_{-|m+\alpha|}(kr) \right\}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Il est important de souligner ici que la solution de l'équation de (2.53) est toujours la solution régulière à moins que (2.59) et (2.60) soient simultanément vérifiées. Dans ce cas, seule la solution irrégulière $J_{-|m+\alpha|}(kr)$ devient physiquement admissible. En outre, on peut s'assurer facilement que ces deux conditions sont vérifiées si

$$\begin{cases} m = -N, & N \geq 0, & s = -1, & \text{ou bien,} \\ m = -N - 1, & N + 1 < 0, & s = +1, \end{cases} \quad (2.62)$$

Notons que la condition (2.59) exige que $\alpha s < 0$. Ce qui rend la fonction delta dans l'équation (2.53) attractive, et par conséquent cela peut rendre la solution $J_{-|m+\alpha|}(kr)$ plus concentrée à l'origine que la solution $J_{|m+\alpha|}(kr)$.

La première composante ψ_1 est donnée par

$$\begin{aligned} \psi_1 = & \sum' e^{-i\frac{\pi}{2}|m+\alpha|} J_{|m+\alpha|}(kr) e^{im\theta} + \Theta(s) \Theta(-\alpha) e^{-i(N+1)\theta} e^{i\frac{\pi}{2}(1-\beta)} J_{\beta-1}(kr) \\ & + \Theta(-s) \Theta(\alpha) e^{-iN\theta} e^{i\frac{\pi}{2}\beta} J_{\beta}(kr), \end{aligned}$$

où le prime indique l'omission des deux termes spécifiés par les conditions (2.62).

Il n'est pas difficile de voir que la fonction d'onde complète peut être donnée par la forme asymptotique suivante

$$\psi \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{k}{E+M} \end{pmatrix} e^{-ikr \cos \theta - i\alpha\theta} + \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{k}{E+M} \end{pmatrix} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} f_s(\theta),$$

où l'amplitude $f_s(\theta)$ est obtenue comme [3]

$$\begin{aligned} f_s(\theta) &= -\frac{\sin(\pi\alpha) e^{-iN(\theta-\pi)}}{(2\pi ik)^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{-i\frac{\theta}{2}} [\epsilon(\alpha s) e^{-i\theta\epsilon(s)\Theta(-\alpha s)}] \\ &= [\epsilon(\alpha s) e^{-i\theta\epsilon(s)\Theta(-\alpha s)}] f_{AB}(\theta), \end{aligned} \quad (2.63)$$

avec $\epsilon(s) = x/|x|$. Il s'ensuit de l'équation (2.63) que la section efficace différentielle de diffusion est modifiée quand les particules sont polarisées suivant une direction \mathbf{n} , on constate que [3]

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\theta}\right) &= \frac{\sin^2(\pi\alpha)}{2\pi k \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left[1 - (\mathbf{n} \times \mathbf{e}_z)^2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \\ &= \left(\frac{d\sigma}{d\theta}\right)_{AB} \left[1 - (\mathbf{n} \times \mathbf{e}_z)^2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right], \end{aligned} \quad (2.64)$$

où \mathbf{e}_z est un vecteur unitaire dirigé suivant le solénoïde.

Il est important de noter que, dans le cas optimal où \mathbf{n} est perpendiculaire à \mathbf{e}_z , la section efficace (2.64) est nulle pour $\theta = 0$. La mesure de ces effets et donc la confirmation de l'existence d'états singuliers pourrait bien être expérimentalement réalisable [3].

Chapitre 3

Le potentiel de Hulthén à 2D en présence de l'effet Aharonov-Bohm

3.1 Introduction

Nous avons exposé essentiellement, dans le chapitre précédent, la diffusion des particules chargées en présence de l'effet Aharonov-Bohm. Le présent chapitre a pour ambition d'étudier cet effet en version états liés à travers l'étude du spectre d'énergie pour un système qui peut être présenté comme une combinaison du potentiel de Hulthén à deux dimensions (2D) et le flux AB.

Le potentiel de Hulthén [1] est un potentiel de courte portée qui se comporte comme un potentiel coulombien pour des petites valeurs de la distance radiale, r , et diminue de façon exponentielle pour les grandes valeurs de r . Ce potentiel est donné par

$$V(r) = -\xi \frac{\eta e^{-\eta r}}{1 - e^{-\eta r}}, \quad (3.1)$$

où η le paramètre d'écran. La constante ξ est identifiée par la quantité Ze^2 si le potentiel est utilisé dans les phénomènes atomiques.

Ce potentiel est d'une importance considérable pour les applications dans plusieurs branches de la physique telles que la physique nucléaire et la physique des particules [31, 32], en physique atomique [33, 34, 35], physique moléculaire [36, 37] et en chimie physique [38, 39].

D'autre part, l'intérêt aux systèmes à (2D), tels que le graphène [40] et le graphane [41], est en relation avec le développement des techniques modernes de l'obtention des structures à basse dimension. Étant donné que des impuretés chargées interagissent avec un gaz d'électrons

à deux dimensions (2DEG) du graphène par un potentiel de Coulomb écranté [42], Cependant, l'équation de Schrödinger, par exemple, pour que ce potentiel, comme nous le savons, ne peut être résolue exactement. D'autre part, le comportement du potentiel de Hulthén est étroitement lié, pour des petites valeurs de la distance radiale r , au potentiel de Coulomb écranté (ou potentiel de Yukawa) mais il tend vers zéro un peu plus lentement pour les grandes valeurs de r . Par conséquent, le problème de comportement d'un électron dans le potentiel de Hulthén à deux dimensions spatiales semble intéressant.

Même pour le potentiel de Hulthén, malheureusement, les équations de la mécanique quantique peuvent être résolues exactement seulement pour les ondes s (i.e, $\ell = 0$) [1, 2]. Pour le cas $\ell \neq 0$, plusieurs méthodes ont été utilisées pour obtenir des solutions approximatives à ces équations pour ce potentiel [42-50]. Parmi ces méthodes, celle où le terme centrifuge est approximé comme [47-50].

$$\frac{1}{r^2} \approx \eta^2 \frac{e^{-\eta r}}{(1 - e^{-\eta r})^2}. \quad (3.2)$$

À notre connaissance, le problème du potentiel de Hulthén dans un champ magnétique n'a pas été traité dans la littérature. Il est donc intéressant d'examiner ce potentiel en présence de l'effet Aharonov-Bohm. Cela motivera l'étude de l'effet apporté par ce champ sur les niveaux d'énergie du système.

Ainsi, le but de ce chapitre est de montrer, d'une part, que la présence du champ AB lève la dégénérescence des niveaux d'énergie pour le potentiel de Hulthén. D'autre part, l'intervalle du paramètre de flux magnétique pour lesquels des solutions singulières sont autorisés est modifié par rapport au cas de la diffusion traité dans le chapitre précédent. En outre, le spectre donné dans la référence [27] pour le potentiel de Coulomb en présence de l'effet AB, à la limite Galiléenne, peut être obtenu, comme cas particulier, à partir du spectre présenté ici lorsque le paramètre d'écran, η , est nul.

3.2 Solution de l'équation de Pauli à 2D

On va commencer par écrire l'équation de Pauli pour une particule non relativiste de mass M et de spin-1/2 soumise au potentiel $V(r)$ en présence du champ AB, décrit par l'expression (2.23) donnée au chapitre précédent, sous la forme

$$\left(\frac{1}{2M} [\boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla_i - e\mathbf{A})]^2 + V(r) \right) \psi = E\psi, \quad (3.3)$$

où σ_i ($i = 1, 2, 3$) sont les matrices de Pauli et on a pris ($\hbar = c = 1$).

En tenant compte de l'expression (2.24) et en utilisant les coordonnées polaires pour plus de commodité, l'équation (3.3) s'écrit

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + i\alpha\Theta(r-R) \right)^2 - 2MV(r) + k^2 + eH\sigma_z \right] \psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.4)$$

où $k^2 = 2ME$. En écrivant la fonction d'onde, $\psi(\mathbf{r})$, comme

$$\psi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} f_+(r) \\ f_-(r) \end{pmatrix} e^{im\varphi}, \quad (3.5)$$

la partie radiale satisfait l'équation suivante

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{[m + \alpha\theta(r-R)]^2}{r^2} - 2MV(r) + k^2 - \frac{\alpha s}{R} \delta(r-R) \right\} f_s(r) = 0, \quad (3.6)$$

où $s = \pm 1$, (+1 pour spin haut et -1 pour spin bas). Ainsi, on considère l'ensemble d'équations

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + k^2 - 2M \left[V(r) + \frac{(m + \alpha)^2}{2Mr^2} \right] \right) f_s(r) = 0, \quad r > R, \quad (3.7)$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + k^2 - 2M \left[V(r) + \frac{m^2}{2Mr^2} \right] \right) f_s(r) = 0, \quad r < R. \quad (3.8)$$

Afin de trouver la solution de l'équation (3.7), on fait d'abord le changement $f_s(r) = u(r)/\sqrt{r}$, on obtient

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \left(k^2 + 2M\xi \frac{\eta e^{-\eta r}}{1 - e^{-\eta r}} - \frac{4(m + \alpha)^2 - 1}{4r^2} \right) u(r) = 0. \quad (3.9)$$

Cette équation ne peut être résolue analytiquement à cause du terme centrifuge. Par conséquent, nous utilisons l'approximation donnée par l'équation (3.2). Ainsi, l'équation (3.9) devient solvable analytiquement. Pour atteindre cet objectif, nous réécrivons cette équation en utilisant une nouvelle variable : $\rho = 1 - e^{-\eta r}$, ($0 < r < +\infty$, $0 < \rho < 1$), on arrive à l'équation

$$\left\{ \frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{1}{(1-\rho)} \frac{d}{d\rho} - \frac{\varepsilon^2}{(1-\rho)^2} + \frac{\gamma^2}{(1-\rho)\rho} - \frac{4(m + \alpha)^2 - 1}{4(1-\rho)\rho^2} \right\} u(r) = 0, \quad (3.10)$$

où $\frac{2ME}{\eta^2} = -\varepsilon^2$, $\frac{2M\xi}{\eta} = \gamma^2$. Pour écrire cette équation sous forme d'une équation connue, on considère la transformation suivante

$$u(\rho) = \rho^\lambda (1 - \rho)^\mu \chi(\rho), \quad (3.11)$$

où λ et μ sont des constantes arbitraires. Donc, l'équation qui vérifiée $\chi(\rho)$ est

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\chi(\rho)}{d\rho^2} + \left[\frac{(-2\lambda - 2\mu - 1)\rho + 2\lambda}{\rho(1-\rho)} \right] \frac{d\chi(\rho)}{d\rho} \\ & + \left[\frac{\lambda(\lambda-1)}{\rho^2} + \frac{\mu^2 - \varepsilon^2}{(1-\rho)^2} + \frac{\gamma^2 - (2\lambda\mu + \lambda)}{\rho(1-\rho)} - \frac{4(m+\alpha)^2 - 1}{4(1-\rho)\rho^2} \right] \chi(\rho) = 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Pour $\mu = \pm\varepsilon$, l'équation (3.12) se réduit à

$$\begin{aligned} & \rho(1-\rho) \frac{d^2\chi(\rho)}{d\rho^2} + [2\lambda - (2\lambda \pm 2\varepsilon + 1)\rho] \frac{d\chi(\rho)}{d\rho} \\ & + \left(\gamma^2 \pm 2\varepsilon\lambda - \lambda^2 + \frac{4\lambda^2 - 8m\alpha - 4\alpha^2 - 4m^2 - 4\lambda + 1}{4\rho} \right) \chi(\rho) = 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

En vue de simplifier la dernière équation, nous fixons λ en imposant que le coefficient du terme $(1/\rho)$ est nul, on obtient $\lambda = \frac{1}{2} \pm |\alpha + m|$. On note qu'il y a quatre choix possibles pour (μ, λ) donnant toujours la même solution. On choisit, ici, le couple $(\mu = \varepsilon, \lambda = \frac{1}{2} + |\alpha + m|)$. Alors, on a l'équation

$$\rho(1-\rho) \frac{d^2\chi(\rho)}{d\rho^2} + [c - (a+b+1)\rho] \frac{d\chi(\rho)}{d\rho} - ab\chi(\rho) = 0, \quad (3.14)$$

où

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} + |\alpha + m| + \varepsilon + \sqrt{\gamma^2 + \varepsilon^2}, \\ b &= \frac{1}{2} + |\alpha + m| + \varepsilon - \sqrt{\gamma^2 + \varepsilon^2}, \\ c &= 1 + 2|\alpha + m|. \end{aligned}$$

(3.14) est l'équation hypergéométrique habituelle qui admet, au voisinage de $\rho = 0$, la solution complète suivante

$$\chi(\rho) = A {}_2F_1(a, b, c, \rho) + B \rho^{1-c} {}_2F_1(1+a-c, 1+b-c, 2-c, \rho), \quad (3.15)$$

où A, B sont des constantes arbitraires.

La partie radiale, $f_s(r)$, s'écrit donc pour $r > R$ comme

$$\begin{aligned} f(r)_{out} &= A (1 - e^{-\eta r})^{|m+\alpha|} e^{-\eta(\varepsilon+\frac{1}{4})r} {}_2F_1(a, b, c, 1 - e^{-\eta r}) \\ &+ B (1 - e^{-\eta r})^{-|m+\alpha|} e^{-\eta(\varepsilon+\frac{1}{4})r} {}_2F_1(1+a-c, 1+b-c, 2-c, 1 - e^{-\eta r}), \end{aligned} \quad (3.16)$$

tandis que pour la région intérieure ($r < R, \alpha = 0$), est

$$f(r)_{in} = C (1 - e^{-\eta r})^{|m|} e^{-\eta(\varepsilon+\frac{1}{4})r} {}_2F_1(a_0, b_0, c_0, 1 - e^{-\eta r}), \quad (3.17)$$

où $a_0 = a(\alpha = 0)$, $b_0 = b(\alpha = 0)$ et $c_0 = c(\alpha = 0)$. Notons qu'on a utilisé l'approximation $1/\sqrt{r} \approx \eta^{\frac{1}{2}} (1 - \rho)^{\frac{1}{4}} / \rho^{\frac{1}{2}}$ déduite de l'équation (3.2). Les constantes A , B et C seront déterminées à l'aide des conditions aux limites, d'une manière similaire au chapitre précédent

$$f_m(R - \varepsilon)_{in} = f_m(R + \varepsilon)_{out}, \quad (3.18)$$

$$\left[\frac{df_m(r)}{dr} \right]_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon} = \frac{\alpha s}{R} f_m(R). \quad (3.19)$$

Alors, l'équation (3.18) est réécrite comme

$$\begin{aligned} & A (1 - e^{-\eta R})^{2|m+\alpha|} {}_2F_1(a, b, c, 1 - e^{-\eta R}) + B {}_2F_1(1 + a - c, 1 + b - c, 2 - c, 1 - e^{-\eta R}) \\ & = C (1 - e^{-\eta R})^{|m+\alpha|+|m|} {}_2F_1(a_0, b_0, c_0, 1 - e^{-\eta R}), \end{aligned} \quad (3.20)$$

tandis que (3.19) donne

$$\begin{aligned} & A \left\{ \eta |m + \alpha| (1 - e^{-\eta R})^{|m+\alpha|-1} e^{-\eta R} {}_2F_1(a, b, c, 1 - e^{-\eta R}) \right. \\ & \quad - \eta (1 - e^{-\eta R})^{|m+\alpha|} \left(\varepsilon + \frac{1}{4} \right) {}_2F_1(a, b, c, 1 - e^{-\eta R}) + \\ & \quad \left. (1 - e^{-\eta R})^{|m+\alpha|} \frac{d}{dR} [{}_2F_1(a, b, c, 1 - e^{-\eta R})] \right\} \\ & + B \left\{ -|m + \alpha| \eta (1 - e^{-\eta R})^{-|m+\alpha|-1} {}_2F_1(1 + a - c, 1 + b - c, 2 - c, 1 - e^{-\eta R}) \right. \\ & \quad - \eta (1 - e^{-\eta R})^{-|m+\alpha|} \left(\varepsilon + \frac{1}{4} \right) {}_2F_1(1 + a - c, 1 + b - c, 2 - c, 1 - e^{-\eta R}) \\ & \quad \left. + (1 - e^{-\eta R})^{-|m+\alpha|} \frac{d}{dR} [{}_2F_1(1 + a - c, 1 + b - c, 2 - c, 1 - e^{-\eta R})] \right\} \\ & = C \left\{ \frac{\alpha s}{R} (1 - e^{-\eta R})^{|m|} {}_2F_1(a_0, b_0, c_0, 1 - e^{-\eta R}) \right. \\ & \quad + \eta |m| (1 - e^{-\eta R})^{|m|-1} e^{-\eta R} {}_2F_1(a_0, b_0, c_0, 1 - e^{-\eta R}) \\ & \quad - \eta \left(\varepsilon + \frac{1}{4} \right) (1 - e^{-\eta R})^{|m|} {}_2F_1(a_0, b_0, c_0, 1 - e^{-\eta R}) \\ & \quad \left. + (1 - e^{-\eta R})^{|m|} \frac{d}{dR} [{}_2F_1(a_0, b_0, c_0, 1 - e^{-\eta R})] \right\}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Ensuite, écrivons les approximations suivantes à l'ordre le plus bas en R , (puisque $R \rightarrow 0$)

$$1 - e^{-\eta R} \approx \eta R + O(R^2),$$

$${}_2F_1(a, b, c, 1 - e^{-\eta R}) \simeq 1 + \frac{ab}{c} \eta R + O(R^2),$$

$$\frac{d}{dR} [{}_2F_1(a, b, c, 1 - e^{-\eta R})] \simeq \frac{ab}{c} \eta + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \eta^2 R + O(R^2).$$

À l'aide de ces approximations, le rapport B/A peut être obtenu à partir des équations (3.20) et (3.21) comme

$$\frac{B}{A} \simeq \eta^{2|m+\alpha|} \left(\frac{|m+\alpha| - |m| - s\alpha}{|m+\alpha| + |m| + s\alpha} \right) R^{2|m+\alpha|+1} + O(R^2). \quad (3.22)$$

Maintenant, on passe à la limite $R \rightarrow 0$, on constate que B/A s'annule à moins que

$$|m+\alpha| = -|m| - \alpha s, \quad (3.23)$$

dans laquelle $\alpha s < 0$. Le coefficient de $R^{2|m+\alpha|+1}$ dans l'équation (3.22) est indépendant de R , et l'ordre $O(R^2)$ impose que

$$|m+\alpha| < \frac{1}{2}. \quad (3.24)$$

Quand les deux conditions (3.23) et (3.24) ne sont pas simultanément satisfaites, alors, la solution dominante est la solution régulière ;

$$f(r)_s = A (1 - e^{-\eta r})^{|m+\alpha|} e^{-\eta(\varepsilon+\frac{1}{4})r} {}_2F_1(a, b, c, 1 - e^{-\eta r}). \quad (3.25)$$

Cependant, si ces deux conditions sont simultanément satisfaites, la solution singulière domine et devient physiquement acceptable ;

$$f(r)_s \rightarrow B (1 - e^{-\eta r})^{-|m+\alpha|} e^{-\eta(\varepsilon+\frac{1}{4})r} {}_2F_1(1+a-c, 1+b-c, 2-c, 1 - e^{-\eta r}). \quad (3.26)$$

Notons, ici, que l'intervalle du paramètre de flux magnétique, donné par (3.24), pour lequel les solutions singulières interviennent est deux fois moins important que celui du cas de la diffusion traité dans le chapitre précédent. Cet intervalle coïncide avec celui obtenu dans la référence [27], où l'auteur a considéré le potentiel de Coulomb en présence de l'effet AB.

3.3 Le spectre d'énergie

La solution (3.25) doit être nulle quand $r \rightarrow +\infty$. Ainsi, il faut réduire la série hypergéométrique à un polynôme, cette exigence est obtenue si $a = -n$, où $n = 0, 1, 2, \dots, n_{\max}$ à partir de laquelle on écrit le spectre comme suit

$$E_{n,m} = -\frac{\eta^2}{2M} \left[\frac{M\xi}{(n+|m+\alpha|+\frac{1}{2})\eta} - \frac{(n+|m+\alpha|+\frac{1}{2})}{2} \right]^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots, n_{\max} \quad (3.27)$$

où $n_{\max} = \left[\sqrt{2M\xi/\eta} - |m+\alpha| - 1/2 \right]$ correspond à $E_{n,m} \simeq 0$. L'équation (3.27) donne le spectre d'énergie approximé du potentiel de Hulthén en présence du champ AB. En l'absence

de ce champ (i.e, $\alpha = 0$), le résultat est en accord avec des études précédentes [52, 53]. Par ailleurs, il est intéressant de mentionner que l'introduction du champ AB lève la dégénérescence des niveaux d'énergie.

Lorsque la solution singulière (3.26) domine (i.e, lorsque les conditions $|m + \alpha| < \frac{1}{2}$, $\alpha s < 0$, sont simultanément satisfaites). Dans ce cas, le spectre est alors donné par la condition $1 + a - c = -n$ comme

$$E_{n,m} = -\frac{\eta^2}{2M} \left[\frac{M\xi}{(n-|m+\alpha|+\frac{1}{2})\eta} - \frac{(n-|m+\alpha|+\frac{1}{2})}{2} \right]^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots, n_{\max} \quad (3.28)$$

où $n_{\max} = \left[\sqrt{2M\xi/\eta} + |m + \alpha| - 1/2 \right]$ correspond à $E_{n,m}^{\pm} \simeq 0$. Les deux spectres (3.27) et (3.28) sont significativement différents. En effet, contrairement au spectre régulière, le spectre (3.28) n'existe pas pour des particules sans spin.

En écrivant $\alpha = N + \beta$, où N est un entier et $0 \leq \beta < 1$, on peut établir que ces conditions sont remplies dans les cas suivants

$$\begin{aligned} m = -N, \quad N \geq 0, \quad 0 < \beta < \frac{1}{2}, \quad s = -1, \\ m = -N - 1, \quad N + 1 < 0, \quad \frac{1}{2} < \beta < 1, \quad s = +1, \end{aligned}$$

Ceci est différent du cas étudié en premier chapitre, où il n'y a pas d'autres conditions sur β . Ces résultats sont en accord avec ceux obtenus dans la référence [27] où les auteurs ont considéré l'équation de Dirac pour le potentiel de Coulomb en présence de l'effet AB. En effet, lorsque le paramètre d'écran $\eta \rightarrow 0$, on obtient le spectre d'énergie pour le potentiel de Coulomb, à la limite non-relativiste, à savoir,

$$E_{n,m} = -\frac{1}{2} \frac{M\xi^2}{(n-\frac{1}{2} \pm |m+\alpha|)^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.29)$$

où les signes $+$ ($-$) se réfèrent aux solutions qui sont régulières (singulières) à l'origine.

L'expression (3.28) montre clairement que les niveaux d'énergie des états singuliers sont plus attirés par le centre que les niveaux d'états réguliers. Cela est dû au fait que le terme qui contient la fonction delta dans l'équation (3.6) agit comme un potentiel attractif lorsque $\alpha s < 0$.

En conclusion, on peut souligner, d'après les calculs présentés ici, l'importance des solutions qui sont singulières à l'origine. En fait, comme déjà mentionné par de nombreux papiers [3, 14, 26, 27, 54, 28], le rejet de ces fonctions d'onde singulières en se basant sur leurs singularité doit

être revu avec une certaine précaution. Enfin, nous espérons que les résultats obtenus dans ce chapitre peuvent avoir applications, par exemple, dans la spectroscopie moderne des systèmes à basse dimension.

Deuxième partie

Systemes dépendants du temps

Chapitre 4

Théorie quantique des invariants

4.1 Introduction

Les problèmes de mécanique quantique dépendants du temps sont généralement traités en utilisant la théorie des perturbations dépendante du temps, l'approximation adiabatique ou les techniques numériques. Cependant, il est fortement souhaitable d'obtenir des solutions analytiques exactes pour des problèmes donnés, en particulier dans le cas où les méthodes d'approximations peuvent être insuffisantes pour décrire les aspects détaillés des solutions ou lorsque le traitement numérique ne fait pas apparaître explicitement leurs comportements mathématiques à des temps très grands.

Par conséquent, plusieurs méthodes ont été développées pour étudier les systèmes quantiques décrits par des Hamiltoniens dépendants explicitement du temps, à savoir, la méthode des invariants [8], la technique des intégrales de chemins [55], les états cohérents [56] et les transformations canoniques [57]. La méthode des invariants de Lewis et Riesenfeld, qui consiste à trouver un invariant hermitique du système, est une technique très utile pour déterminer les solutions exactes de tels systèmes. En effet, la solution de l'équation de Schrödinger correspondante, selon cette théorie, n'est pas différente de celle des états propres de l'invariant que par un facteur de phase dépendant du temps.

Dans cette partie de thèse, nous allons donner en premier lieu un aperçu de la théorie de Lewis et Riesenfeld ainsi que son application sur un système physique décrit par un oscillateur harmonique de masse et fréquence variables avec le temps. Puis on va considérer le cas d'une particule soumise à un oscillateur avec des paramètres dépendants du temps en présence d'un champ magnétique constant. Enfin, on va montrer que cette technique est également utile pour

donner des solutions analytiques de l'équation de Schrödinger dépendante du temps pour des potentiels non centraux [10].

Nous commençons par supposer l'existence d'un opérateur hermitique non trivial, $I(t)$, qui est un invariant d'un système physique dont l'Hamiltonien, $H(t)$, est une fonction explicite du temps. Ainsi $I(t)$ vérifie la condition

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} - \frac{i}{\hbar} [I, H] = 0. \quad (4.1)$$

L'état du système est déterminé à partir l'équation de Schrödinger dépendante du temps suivante

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle. \quad (4.2)$$

En opérant le côté gauche de (4.1) sur le ket $|\psi(t)\rangle$ et utilisons (4.2), on obtient la relation

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (I |\psi(t)\rangle) = H (I |\psi(t)\rangle), \quad (4.3)$$

ce qui implique que l'action de l'invariant sur un vecteur d'état de Schrödinger est une autre solution de l'équation de Schrödinger.

Nous supposons que l'opérateur invariant fait partie d'un ensemble complet d'observables qui commutent, de sorte qu'il existe un ensemble complet d'états propres de I . On note les valeurs propres de I par λ , et les états propres associés par $|\phi_{\lambda,\kappa}(t)\rangle$, où l'indice κ représente tous les autres nombres quantiques nécessaire pour spécifier ces états propres. L'équation aux valeurs propres s'écrit

$$I |\phi_{\lambda,\kappa}(t)\rangle = \lambda |\phi_{\lambda,\kappa}(t)\rangle, \quad (4.4)$$

avec

$$\langle \phi_{\lambda',\kappa'}(t) | \phi_{\lambda,\kappa}(t) \rangle = \delta_{\lambda,\lambda'} \delta_{\kappa,\kappa'}.$$

Dérivons l'équation (4.4) par rapport au temps, on obtient

$$\frac{\partial I}{\partial t} |\phi_{\lambda,\kappa}(t)\rangle + I \frac{\partial}{\partial t} |\phi_{\lambda,\kappa}(t)\rangle = \frac{\partial \lambda}{\partial t} |\phi_{\lambda,\kappa}(t)\rangle + \lambda \frac{\partial}{\partial t} |\phi_{\lambda,\kappa}(t)\rangle, \quad (4.5)$$

En opérant le côté gauche de (4.1) sur le ket $|\phi_{\lambda,\kappa}(t)\rangle$ et utilisons (4.4), on a l'équation

$$i\hbar \frac{\partial I}{\partial t} |\phi_{\lambda,\kappa}(t)\rangle + IH |\phi_{\lambda,\kappa}(t)\rangle - \lambda H |\phi_{\lambda,\kappa}(t)\rangle = 0,$$

puis, multiplions la dernière équation par le bra $\langle \phi_{\lambda',\kappa'}(t) |$, on obtient

$$i\hbar \langle \phi_{\lambda',\kappa'}(t) | \frac{\partial I}{\partial t} |\phi_{\lambda,\kappa}(t)\rangle + (\lambda' - \lambda) \langle \phi_{\lambda',\kappa'}(t) | H |\phi_{\lambda,\kappa}(t)\rangle = 0. \quad (4.6)$$

Pour $\lambda' = \lambda$, l'équation (4.6) se réduit à

$$\langle \phi_{\lambda, \kappa'}(t) | \frac{\partial I}{\partial t} | \phi_{\lambda, \kappa}(t) \rangle = 0. \quad (4.7)$$

Multiplions (4.5) par le bra $\langle \phi_{\lambda, \kappa}(t) |$ et utilisons (4.7), on a l'équation

$$\langle \phi_{\lambda, \kappa}(t) | I \frac{\partial}{\partial t} | \phi_{\lambda, \kappa}(t) \rangle = \langle \phi_{\lambda, \kappa}(t) | \frac{\partial \lambda}{\partial t} | \phi_{\lambda, \kappa}(t) \rangle + \langle \phi_{\lambda, \kappa}(t) | \lambda \frac{\partial}{\partial t} | \phi_{\lambda, \kappa}(t) \rangle \quad (4.8)$$

comme

$$\langle \phi_{\lambda, \kappa}(t) | I \frac{\partial}{\partial t} | \phi_{\lambda, \kappa}(t) \rangle = \langle \phi_{\lambda, \kappa}(t) | \lambda \frac{\partial}{\partial t} | \phi_{\lambda, \kappa}(t) \rangle \quad (4.9)$$

Alors, on a le résultat suivant

$$\langle \phi_{\lambda, \kappa}(t) | \frac{\partial I}{\partial t} | \phi_{\lambda, \kappa}(t) \rangle = \frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0, \quad (4.10)$$

c'est-à-dire que les valeurs propres de l'invariant sont indépendantes du temps. Par conséquent, l'équation (4.5) s'écrit

$$(\lambda - I) \frac{\partial}{\partial t} | \phi_{\lambda, \kappa}(t) \rangle = \frac{\partial I}{\partial t} | \phi_{\lambda, \kappa}(t) \rangle, \quad (4.11)$$

multiplions la dernière équation par le bra $\langle \phi_{\lambda', \kappa'}(t) |$, on obtient

$$(\lambda - \lambda') \langle \phi_{\lambda', \kappa'}(t) | \frac{\partial}{\partial t} | \phi_{\lambda, \kappa}(t) \rangle = \langle \phi_{\lambda', \kappa'}(t) | \frac{\partial I}{\partial t} | \phi_{\lambda, \kappa}(t) \rangle, \quad (4.12)$$

en tenant compte de l'équation (4.6), on a

$$i\hbar(\lambda - \lambda') \langle \phi_{\lambda', \kappa'}(t) | \frac{\partial}{\partial t} | \phi_{\lambda, \kappa}(t) \rangle = (\lambda - \lambda') \langle \phi_{\lambda', \kappa'}(t) | H | \phi_{\lambda, \kappa}(t) \rangle, \quad (4.13)$$

pour $\lambda \neq \lambda'$, nous en déduisons la relation

$$\langle \phi_{\lambda', \kappa'}(t) | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \phi_{\lambda, \kappa}(t) \rangle = \langle \phi_{\lambda', \kappa'}(t) | H | \phi_{\lambda, \kappa}(t) \rangle. \quad (4.14)$$

Pour $\lambda = \lambda'$, on peut vérifier que $| \phi_{\lambda, \kappa}(t) \rangle$ est une solution de l'équation de Schrödinger, on va supposer qu'on a choisit un certain facteur de phase dépendante du temps. Autrement dit, nous pouvons définir un nouvel ensemble de vecteurs propres de I lié à notre premier ensemble par une transformation de jauge dépendante du temps

$$| \phi_{\lambda, \kappa}(t) \rangle_s = e^{i\varepsilon_{\lambda, \kappa}(t)} | \phi_{\lambda, \kappa}(t) \rangle, \quad (4.15)$$

où $\varepsilon_{\lambda, \kappa}(t)$ des fonctions arbitraires réelles du temps. Ces nouveaux états propres doivent satisfaire l'équation de Schrödinger si nous choisissons les phases $\varepsilon_{\lambda, \kappa}(t)$ tel que l'équation (4.14) est vérifiée pour $\lambda = \lambda'$. Cette exigence est équivalente au résultat

$$\hbar \delta_{\kappa, \kappa'} \frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \langle \phi_{\lambda, \kappa'}(t) | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H | \phi_{\lambda, \kappa}(t) \rangle.$$

les phases sont choisis de manière à satisfaire à l'équation simple suivante

$$\hbar \frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \langle \phi_{\lambda,\kappa}(t) | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H | \phi_{\lambda,\kappa}(t) \rangle. \quad (4.16)$$

La solution générale de l'équation de Schrödinger est alors

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{\lambda,\kappa} c_{\lambda,\kappa} e^{i\varepsilon(t)} |\phi_{\lambda,\kappa}(t)\rangle. \quad (4.17)$$

4.2 L'oscillateur harmonique à 1D avec masse et fréquence variables

Dans cette section, nous allons appliquer la technique de Lewis et Riesenfeld pour résoudre l'équation de Schrödinger d'un oscillateur harmonique dont l'Hamiltonien est donné par [58]

$$H(t) = \frac{p^2}{2M(t)} + \frac{1}{2}M(t)\omega^2(t)q^2, \quad (4.18)$$

où p et q sont des grandeurs canoniquement conjuguées. $M(t)$ et $\omega(t)$ sont, respectivement, la masse et la fréquence associées à cet oscillateur et qui sont des fonctions arbitraires du temps. Le point clé de la méthode de Lewis et Riesenfeld est la construction de l'opérateur invariant I , nous allons chercher cet invariant sous la forme.

$$I = \frac{1}{2} [\alpha(t) T_1 + \beta(t) T_2 + \gamma(t) T_3], \quad (4.19)$$

où l'ensemble $\{T_1, T_2, T_3\}$ constitué les générateurs du groupe $SU(1,1)$, et explicitement donné par

$$T_1 = p^2, \quad T_2 = q^2, \quad T_3 = \{q, p\}_+. \quad (4.20)$$

En outre, il est facile d'avoir les commutateurs suivants

$$[T_1, T_2] = -2i\hbar T_3, \quad [T_2, T_3] = 4i\hbar T_2, \quad [T_1, T_3] = -4i\hbar T_1. \quad (4.21)$$

Remplaçons l'équation (4.19) dans (4.1), on obtient

$$\left(\dot{\alpha} + \frac{2\gamma}{M} \right) T_1 + \left(\dot{\beta} - 2M\omega^2\gamma \right) T_2 + \left(\dot{\gamma} + \frac{\beta}{M} - M\omega^2\alpha \right) T_3 = 0.$$

D'où, on tire le système suivant

$$\dot{\alpha} = -\frac{2\gamma}{M}, \quad (4.22)$$

$$\dot{\beta} = 2M\omega^2\gamma, \quad (4.23)$$

$$\dot{\gamma} = M\omega^2\alpha - \frac{\beta}{M}. \quad (4.24)$$

Pour trouver une solution à ce système, on pose

$$\alpha = \sigma^2, \quad (4.25)$$

alors l'équation (4.22) donne

$$\gamma = -M\sigma\dot{\sigma}, \quad (4.26)$$

la fonction β est obtenue à partir de l'équation (4.24) comme

$$\beta = M^2 \left(\dot{\sigma}^2 + \sigma\ddot{\sigma} + \omega^2\sigma^2 + \frac{\dot{M}}{M}\sigma\dot{\sigma} \right), \quad (4.27)$$

remplaçons l'expression de β dans (4.23), on obtient l'équation différentielle suivante

$$\sigma \frac{d}{dt} \left[M^2\ddot{\sigma} + M\dot{M}\dot{\sigma} + M^2\omega^2\sigma \right] + 3\dot{\sigma} \left[M^2\ddot{\sigma} + M\dot{M}\dot{\sigma} + M^2\omega^2\sigma \right] = 0, \quad (4.28)$$

l'intégration de (4.28) donne

$$\ddot{\sigma} + \frac{\dot{M}}{M}\dot{\sigma} + \omega^2\sigma = \frac{c}{M^2\sigma^3} \quad (4.29)$$

où c est une constante d'intégration. Posons $\sigma = c^{\frac{1}{4}}\rho$, on obtient l'équation auxiliaire suivante

$$\ddot{\rho} + \frac{\dot{M}}{M}\dot{\rho} + \omega^2\rho = \frac{1}{M^2\rho^3}. \quad (4.30)$$

Après avoir écarté $c^{\frac{1}{2}}$, l'invariant (4.19) peut s'écrire, en tenant compte des équations (4.25), (4.26), (4.27) et (4.30) comme

$$I = \frac{1}{2} \left[\rho^2 p^2 + \left(M^2 \dot{\rho}^2 + \frac{1}{\rho^2} \right) q^2 - M\rho\dot{\rho} \{q, p\}_+ \right]. \quad (4.31)$$

Après avoir déterminé l'invariant, on doit chercher ses fonctions propres, à partir de l'équation aux valeurs propres suivante

$$I\phi(q, t) = \lambda\phi(q, t). \quad (4.32)$$

Pour simplifier encore la dernière équation, on introduit la transformation unitaire

$$\begin{aligned} \varphi &= S\phi' \\ &= \exp\left(\frac{iM\dot{\rho}}{2\hbar\rho}q^2\right)\phi', \end{aligned} \quad (4.33)$$

l'opérateur I est alors transformé en I' , selon $I' = S^+IS$, comme

$$I' = \frac{1}{2} \left(\rho^2 p^2 + \frac{q^2}{\rho^2} \right). \quad (4.34)$$

Alors, l'équation (4.32) devient

$$I' \phi' = \lambda \phi'. \quad (4.35)$$

Maintenant, soit $Q = \frac{q}{\rho}$. L'équation aux valeurs propres (4.35) se simplifier à

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial}{\partial Q^2} + \frac{1}{2} Q^2 - \lambda \right) \phi' = 0, \quad (4.36)$$

qui est l'équation d'un oscillateur harmonique de masse et fréquence égaux à l'unité où la solution, en termes de fonctions d'Hermite, est

$$\phi'_n = A \exp\left(-\frac{Q^2}{2\hbar}\right) H_n\left(\frac{Q}{\sqrt{\hbar}}\right),$$

avec

$$\lambda = \lambda_n = \hbar \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

Donc les états propres de l'invariant (4.31), compte tenus de (4.33), sont

$$\phi_n = A \exp\left[\frac{M}{2\hbar} (iM\rho\dot{\rho} - 1) \frac{q^2}{M\rho^2}\right] H_n\left(\frac{q}{\sqrt{\hbar\rho}}\right). \quad (4.37)$$

La phase est obtenue à partir de l'équation (4.16). En effet, introduisons la transformation unitaire (4.33), il vient

$$\hbar \dot{\epsilon}(t) = \langle \phi'_n | i\hbar S^+ \frac{\partial}{\partial t} S | \phi'_n \rangle - \langle \phi'_n | S^+ H S | \phi'_n \rangle. \quad (4.38)$$

Le premier terme du second membre peut se simplifier comme

$$\langle \phi'_n | i\hbar S^+ \frac{\partial}{\partial t} S | \phi'_n \rangle = \langle \phi'_n | -\frac{1}{2} \left(\frac{\dot{M}}{\rho} \dot{\rho} + M \frac{\ddot{\rho}}{\rho} - M \frac{\dot{\rho}^2}{\rho^2} \right) q^2 + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \phi'_n \rangle,$$

et le deuxième terme donne

$$\begin{aligned} \langle \phi'_n | S^+ H S | \phi'_n \rangle &= \langle \phi'_n | -\frac{i\hbar\dot{\rho}}{2\rho} - \frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{1}{2} M \omega^2 q^2 \\ &\quad + \frac{M\dot{\rho}^2}{2\rho^2} q^2 - \frac{i\hbar\dot{\rho}}{\rho} q \frac{\partial}{\partial q} | \phi'_n \rangle, \end{aligned}$$

donc l'équation (4.38) s'écrit

$$\begin{aligned} \hbar \dot{\epsilon}(t) &= \langle \phi'_n | -\frac{M}{2\rho} \left[\ddot{\rho} + \frac{\dot{M}}{M} \dot{\rho} + \omega^2 \rho \right] q^2 - \frac{p^2}{2M} \\ &\quad + \frac{i\hbar\dot{\rho}}{2\rho} - \frac{\dot{\rho}}{\rho} qp + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \phi'_n \rangle, \end{aligned}$$

4.3 L'oscillateur dépendant du temps à 2D dans un champ magnétique constant 39

en tenant compte des équations (4.30) et (4.34), on obtient

$$\hbar \dot{\varepsilon}(t) = \langle \phi'_n | -\frac{I'}{M\rho^2} + \frac{i\hbar\dot{\rho}}{2\rho} - \frac{\dot{\rho}}{\rho}qp + i\hbar\frac{\partial}{\partial t} | \phi'_n \rangle,$$

or, on peut montrer l'identité suivante

$$\langle \phi'_n | \frac{i\hbar\dot{\rho}}{2\rho} - \frac{\dot{\rho}}{\rho}qp + i\hbar\frac{\partial}{\partial t} | \phi'_n \rangle = 0.$$

Alors, suivant l'équation (4.35), on a le résultat suivant

$$\varepsilon(t) = -\left(n + \frac{1}{2}\right) \int^t \frac{dt}{M\rho^2}.$$

La fonction d'onde normalisée solution de l'équation de Schrödinger associée à l'Hamiltonien (4.18), peut maintenant être écrite, selon l'équation (4.15), comme

$$\begin{aligned} \psi(q, t) &= \frac{1}{\sqrt{n!2^n (\hbar\pi)^{\frac{1}{2}} \rho}} \exp\left(-i\left(n + \frac{1}{2}\right) \int^t \frac{dt}{M\rho^2}\right) \\ &\times \exp\left[\frac{M}{2\hbar}(iM\rho\dot{\rho} - 1) \frac{q^2}{M\rho^2}\right] H_n\left(\frac{q}{\sqrt{\hbar\rho}}\right), \end{aligned}$$

où on a utilisé la formule [59]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} H_n(z) H_n(z) dz = \sqrt{\pi} 2^n n!.$$

4.3 L'oscillateur dépendant du temps à 2D dans un champ magnétique constant

La technique précédente peut être appliquée aussi à un oscillateur harmonique à 2D de masse et fréquence variables et en présence d'un champ magnétique constant, $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{k}$ [9], l'Hamiltonien associé est

$$H(t) = \frac{(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2}{2M(t)} + \frac{1}{2}M(t)\omega^2(t)\mathbf{r}^2. \quad (4.39)$$

On choisit ici de se placer dans la jauge de Coulomb $[(\nabla \cdot \mathbf{A}) = 0]$, ainsi, on prend le potentiel vecteur de la forme $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}$. L'équation de Schrödinger associée à l'Hamiltonien (4.39) est

$$\left[\frac{\mathbf{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}M(t)\Omega^2(t)\mathbf{r}^2 - \frac{\omega_c(t)}{2}L_z \right] \psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}, \quad (4.40)$$

où $\Omega^2(t) = \frac{\omega_c^2(t)}{4} + \omega^2(t)$, $\omega_c(t) = \frac{eB_0}{M(t)c}$ est la fréquence, L_z est le moment angulaire.

4.3 L'oscillateur dépendant du temps à 2D dans un champ magnétique constant 40

Comme L_z commute avec l'Hamiltonien $H(t)$, il est commode d'introduire la transformation unitaire suivante

$$\psi = e^{i\frac{L_z}{2\hbar} \int^t \omega_c(t) dt} \chi, \quad (4.41)$$

pour laquelle l'équation (4.40) se réduit à

$$\left[\frac{\mathbf{p}^2}{2M} + \frac{1}{2} M(t) \Omega^2(t) \mathbf{r}^2 \right] \chi = i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t}. \quad (4.42)$$

Cette équation n'est en fait rien d'autre qu'une équation d'un oscillateur harmonique, similaire à celle étudiée dans la section précédente. Nous allons procéder alors d'une manière presque analogue, la seule différence réside dans le choix des générateurs. Cherchons alors un invariant pour l'équation (4.42) de même forme que (4.19), mais maintenant les générateurs sont

$$T_1 = p^2, \quad T_2 = r^2, \quad T_3 = \{r, p_r\}_+, \quad (4.43)$$

où $p_r = -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2r} \right)$, avec $[r, p_r] = i\hbar$. L'ensemble $\{T_1, T_2, T_3\}$ vérifié les mêmes relations de commutation (4.21). L'invariant du problème est alors donné par

$$I = \frac{1}{2} \left[\rho^2 p^2 + \left(\frac{1}{\rho^2} + M^2 \dot{\rho}^2 \right) r^2 - M \rho \dot{\rho} \{r, p_r\}_+ \right], \quad (4.44)$$

où la fonction ρ doit satisfaire à l'équation auxiliaire suivante

$$\ddot{\rho} + \frac{\dot{M}}{M} \dot{\rho} + \Omega^2 \rho = \frac{1}{M^2 \rho^3}. \quad (4.45)$$

Introduisons la transformation unitaire suivante

$$\phi = V \phi' = \exp \left(\frac{iM\dot{\rho}}{2\hbar\rho} r^2 \right) \phi', \quad (4.46)$$

l'équation aux valeurs propres vérifiée par ϕ' est

$$\frac{1}{2} \left[\rho^2 p^2 + \frac{1}{\rho^2} r^2 \right] \phi' = \lambda \phi'. \quad (4.47)$$

Ensuite, soit $X_i = \frac{x_i}{\rho}$, ($i = 1, 2$). L'équation (4.47) s'écrit

$$\left[\partial_R^2 + R^{-1} \partial_R + \frac{1}{\hbar^2} \left(2\lambda - \frac{l_z^2}{R^2} - R^2 \right) \right] \phi' = \phi'. \quad (4.48)$$

où $R^2 = r^2/\rho^2$, $\varphi = \tan^{-1}(X_2/X_1) = \tan^{-1}(x_2/x_1)$ et $l_z = (-i\hbar) \partial_\varphi$. La solution, en termes de fonctions de Laguerre généralisées, est

$$\phi'_{n,m} = N R^{|m|} \exp \left(-\frac{R^2}{2\hbar} \right) L_n^{|m|} \left(\frac{R^2}{\hbar} \right) \exp(im\varphi), \quad (4.49)$$

4.3 L'oscillateur dépendant du temps à 2D dans un champ magnétique constant 41

avec

$$\lambda = \lambda_{n,m} = \hbar (2n + |m| + 1).$$

La phase se calcule d'une manière similaire à celle de la section précédente, on obtient le résultat suivant

$$\varepsilon_{n,m}(t) = - (2n + |m| + 1) \int^t \frac{dt'}{M(t') \rho^2(t')}. \quad (4.50)$$

En combinant les équations (4.49) et (4.46), la fonction d'onde normalisée solution de l'équation de Schrödinger associée à l'Hamiltonien (4.39), peut être écrite sous la forme

$$\begin{aligned} \Psi_{n,m}(r, \theta, t) = & \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{\pi \hbar^{\frac{1}{2}(1+\mu)} [\Gamma(|m|+1+n)]^{\frac{1}{2}}}} \frac{r^{|m|}}{\rho^{|m|+1}} \times \exp \left[-i (2n + |m| + 1) \int^t \frac{dt}{M \rho^2} + i \frac{m}{2} \int^t \omega_c dt \right] \\ & \times \exp \left[(iM\rho\dot{\rho} - 1) \frac{r^2}{2\hbar\rho^2} \right] L_n^{|m|} \left(\frac{r^2}{\hbar\rho^2} \right) \exp(im\theta), \end{aligned} \quad (4.51)$$

où on a utilisé la formule [59]

$$\int_0^{+\infty} z^\mu \exp(-z) L_n^\mu(z) L_m^\mu(z) dz = \frac{\Gamma(|m|+1+n)}{n!} \delta_{n,m}.$$

Chapitre 5

L'équation de Schrödinger dépendante du temps avec des potentiels non centraux

5.1 Introduction

La solutions exacte de l'équation de Schrödinger pour certains potentiels non centraux est l'un des problèmes intéressants de la mécanique quantique [61-72]. Ces potentiels ont joué un rôle important dans l'histoire des structures et des interactions moléculaires [72, 73].

Comme nous le savons, l'oscillateur harmonique comme un modèle idéal décrivant l'interaction entre les atomes en molécules est avéré anharmonique dans la pratique, de telle manière qu'un terme dépendant de l'angle doit être ajouté au terme principale de l'oscillateur harmonique [60]. En conséquence, plusieurs modèles d'oscillateurs anharmoniques ont été présentés et étudiés, à savoir, le potentiel non sphérique en forme d'anneau [63], l'oscillateur en forme d'anneau double [64, 65], l'oscillateur non harmonique généralisé avec une partie angulaire [66].

D'autre part, l'oscillateur harmonique avec des paramètres dépendants du temps a attiré beaucoup d'attention en raison de son utilité pour décrire la dynamique de nombreux phénomènes dans des différents domaines de la physique, comme l'optique quantique [74], la dynamique quantiques des fluides [75], la gravitation [76], le comportement des ions dans les pièges de Paul [77] et en dynamique moléculaire lors du traitement de deux atomes en interaction comme des oscillateurs harmoniques couplés. Les fréquences changent lorsque les atomes se rapprochent [78].

Comme les problèmes dépendants du temps qui peuvent être résolus exactement sont très limités, il est tout à fait naturel de se demander s'il est également possible d'étudier des potentiels non centraux avec des paramètres dépendants du temps décrits par l'Hamiltonien suivant

$$H(t) = \frac{p^2}{2M(t)} + \frac{1}{2}M(t)\omega^2(t)r^2 + \frac{u(\theta)}{M(t)r^2}, \quad (5.1)$$

où $u(\theta)$ est fonction arbitraire de θ . À nos connaissances, la réponse à cette question ou la faisabilité d'application des potentiels non centraux dépendants du temps n'a pas été examinée auparavant dans la littérature. À cet égard, une telle tentative sera intéressante.

À travers ce chapitre, nous montrons que le problème posé est analytiquement soluble. Pour ce faire, il est commode d'employer la méthode des invariants vue dans le chapitre précédent, qui est très utile pour générer des solutions exactes de l'équation de Schrödinger lorsque l'Hamiltonien du système dépend explicitement du temps [80-85].

5.2 Dérivation de l'invariant

Considérons l'équation de Schrödinger dépendante du temps

$$H(t)\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad (5.2)$$

dans laquelle l'Hamiltonien est défini par l'expression (5.1). Evidemment, le point clé de la méthode de Lewis et Riesenfeld, comme nous l'avons déjà vu au chapitre précédent, est la construction de l'opérateur invariant I . Nous allons supposer qu'il est de la forme suivante

$$I = \frac{1}{2}(\alpha T_1 + \beta T_2 + \gamma T_3), \quad (5.3)$$

où α , β , et γ sont des fonctions réelles du temps, et les générateurs $\{T_1, T_2, T_3\}$ sont donnés explicitement par

$$T_1 = p^2 + \frac{2u(\theta)}{r^2}, \quad T_2 = r^2, \quad T_3 = rp_r + p_r r, \quad (5.4)$$

où l'opérateur $p_r = -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right)$. En outre, il est facile de vérifier les relations de commutations suivantes

$$[T_1, T_2] = -2i\hbar T_3, \quad [T_2, T_3] = 4i\hbar T_2, \quad [T_1, T_3] = -4i\hbar T_1. \quad (5.5)$$

Selon la démarche discutée au chapitre précédent, il n'est pas difficile de montrer que l'invariant (5.3) est explicitement donné par l'expression

$$I = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{\rho^2} + M^2 \dot{\rho}^2 \right) r^2 + \rho^2 \left(p^2 + \frac{2u(\theta)}{r^2} \right) - \rho \dot{\rho} M (rp_r + p_r r) \right], \quad (5.6)$$

où la fonction ρ vérifie l'équation de Ermakov-Pinney (équation auxiliaire)

$$\ddot{\rho} + \frac{\dot{M}}{M}\dot{\rho} + \omega^2\rho = \frac{1}{M^2\rho^3}. \quad (5.7)$$

Pour résoudre l'équation aux valeurs propres, $I\phi = \lambda\phi$, où l'invariant est donné par (5.6), il est utile d'introduire la transformation unitaire suivante

$$\begin{aligned} \phi &= U\phi' \\ &= \exp\left(\frac{iM\dot{\rho}}{2\hbar\rho}r^2\right)\phi', \end{aligned} \quad (5.8)$$

l'opérateur I est alors transformé en I' , selon $I' = S^+IS$, comme

$$I' = \frac{1}{2}\left[\rho^2\left(p^2 + \frac{2u(\theta)}{r^2}\right) + \frac{1}{\rho^2}r^2\right]. \quad (5.9)$$

Alors, l'équation aux valeurs propres, $I\phi = \lambda\phi$, se transforme en

$$I'\phi' = \lambda\phi'. \quad (5.10)$$

Maintenant, on définit les nouvelles variables $X_i = \frac{x_i}{\rho}$, ($i = 1, 2, 3$). L'équation aux valeurs propres (5.10) se simplifie à

$$\left\{R^{-2}\partial_R(R^2\partial_R) + \frac{1}{\hbar^2}\left[2\lambda - \frac{L^2 + 2u(\theta)}{R^2} - R^2\right]\right\}\phi' = 0, \quad (5.11)$$

dans laquelle $R^2 = r^2/\rho^2$, $\varphi = \tan^{-1}(X_2/X_1) = \tan^{-1}(x_2/x_1)$, $\theta = \cos^{-1}(X_3/R) = \cos^{-1}(x_3/r)$, et l'opérateur L^2 est donné en coordonnées sphériques par

$$L^2 = -\hbar^2(\partial_\theta^2 + \cot(\theta)\partial_\theta + \sin^{-2}\theta\partial_\varphi^2).$$

En prenant la fonction ϕ' comme

$$\phi'(R, \theta, \varphi) = \frac{1}{R}f(R)\Theta(\theta)\Phi(\varphi), \quad (5.12)$$

et remplaçant dans (5.11), les équations différentielles pour les parties radiales et angulaires sont séparées de la façon suivante

$$\frac{d^2f(R)}{dR^2} + \frac{1}{\hbar^2}\left(2\lambda - R^2 - \frac{\hbar^2\nu}{R^2}\right)f(R) = 0, \quad (5.13)$$

$$\left(\frac{d^2}{d\theta^2} + \cot(\theta)\frac{d}{d\theta} - \frac{2}{\hbar^2}u(\theta) + \nu - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta(\theta) = 0, \quad (5.14)$$

où ν est une constante de séparation, avec la solution azimutal

$$\Phi(\varphi) = \text{Const} \times \exp(im\varphi), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (5.15)$$

On note, ici, que l'équation radiale (5.13) est indépendante de la fonction $u(\theta)$. Sa solution est donnée en termes de polynômes de Laguerre généralisés par

$$f(R) = R^{\frac{1}{2}+\mu} L_n^\mu \left(\frac{R^2}{\hbar} \right) \exp \left(-\frac{R^2}{2\hbar} \right), \quad (5.16)$$

avec $\mu = \sqrt{\frac{1}{4} + \nu}$, et la valeur propre λ de l'invariant est exprimée par

$$\lambda = \hbar \left(2n + 1 + \sqrt{\frac{1}{4} + \nu} \right), \quad n = 0, 1, \dots \quad (5.17)$$

La constante de séparation ν peut être éliminée de l'équation (5.17) en résolvant explicitement l'équation angulaire (5.14) pour des expressions spécifiques de la fonction $u(\theta)$.

5.3 L'oscillateur généralisé en forme d'anneau double dépendant du temps

C'est le cas où la fonction angulaire est donnée par

$$u(\theta) = A + \frac{B}{\sin^2 \theta} + \frac{C}{\cos^2 \theta}, \quad (5.18)$$

où A , B et C sont des paramètres réels positifs. Dans ce cas, l'Hamiltonien (5.1) est connue comme l'oscillateur non central généralisé en forme d'anneau double, avec masse et fréquence dépendantes du temps. Ce potentiel est d'une importance particulière en raison de son connexion avec des systèmes liés à l'effet Aharonov-Bohm [85].

5.3.1 Fonctions propres exactes de l'invariant

La solution de (5.14) quand la fonction $u(\theta)$ est donnée par l'expression (5.18) peut être obtenue, en termes de polynômes de Jacobi, w_l , comme

$$\Theta(\theta) = (\cos \theta)^\delta (\sin \theta)^{2\kappa - \frac{1}{2}} w_l \left(2\kappa + \delta, \delta + \frac{1}{2}, \cos^2 \theta \right), \quad (5.19)$$

où $\kappa = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sqrt{m^2 + \frac{2B}{\hbar^2}}$ et $\delta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{8C}{\hbar^2}}$, avec la condition

$$\kappa + \frac{\delta}{2} - \frac{1}{4} \sqrt{1 + 4\nu - \frac{8A}{\hbar^2}} = -l, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (5.20)$$

Éliminant la constante de séparation à partir des équations (5.17) et (5.20), la valeur propre λ de l'invariant (5.6) s'écrit alors

$$\lambda_{n,l,m} = \hbar \left(2n + 1 + \sqrt{\frac{2A}{\hbar^2} + (2l + 2\kappa + \delta)^2} \right). \quad (5.21)$$

Tenant compte des relations suivantes [59];

$$\int_0^1 z^{b-1} (1-z)^{a-b} [w_l(z)]^2 dz = \frac{(a+l)_l \Gamma(b) \Gamma(a+l-b+1) (l!)}{(b)_l \Gamma(a+2l+1)}, \quad (5.22)$$

$$\int_0^{+\infty} z^\mu \exp(-z) [L_n^\mu(z)]^2 dz = \frac{\Gamma(\mu+1+n)}{n!}, \quad (5.23)$$

la fonction propre normalisée complète de l'invariant (5.6) peut être construite en suivant (5.12) et regroupant les équations (5.8), (5.16), (5.19) et (5.15), on obtient

$$\begin{aligned} \phi_{n,l,m}(r, \theta, \varphi) &= \left[\frac{\Gamma(2\kappa+\delta+2l+1) (\delta+\frac{1}{2})_l (n!)}{\pi \hbar^{\mu+1} \Gamma(\mu+1+n) \Gamma(\delta+\frac{1}{2}) \Gamma(l+2\kappa+\frac{1}{2}) (2\kappa+\delta+l)_l (l!)} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{r^{\mu-\frac{1}{2}}}{\rho^{\mu+1}} L_n^\mu \left(\frac{r^2}{\hbar \rho^2} \right) \\ &\times \exp \left[(iM\rho\dot{\rho} - 1) \frac{r^2}{2\hbar\rho^2} \right] \times (\cos \theta)^\delta (\sin \theta)^{(2\kappa-\frac{1}{2})} w_l(\cos^2 \theta) e^{im\varphi}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

5.3.2 Détermination de la phase et la fonction d'onde totale

Nous passons maintenant à trouver la phase $\varepsilon(t)$ qui vérifie l'équation (4.16) donnée au chapitre précédent. En insérant la transformation unitaire (5.8), on peut trouver après un calcul direct

$$\hbar \dot{\varepsilon}(t) = -\frac{\lambda_{n,l,m}}{M\rho^2} + \langle \phi'_{n,l,m} | -\frac{\dot{\rho}}{2\rho} (rp_r + p_r r) + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \phi'_{n,l,m} \rangle. \quad (5.25)$$

Puis, à l'aide de la relation de dérivation suivante [59]

$$\frac{d L_n^\mu(z)}{dz} = \frac{n L_n^\mu(z) - (n+\mu) L_{n-1}^\mu(z)}{z}, \quad (5.26)$$

on peut obtenir l'identité

$$\langle \phi'_{n,l,m} | -\frac{\dot{\rho}}{2\rho} (rp_r + p_r r) + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \phi'_{n,l,m} \rangle = 0. \quad (5.27)$$

Ainsi, la phase $\varepsilon(t)$ s'écrit simplement comme

$$\varepsilon_{n,l,m}(t) = - \left(2n + 1 + \sqrt{\frac{2A}{\hbar^2} + (2l + 2\kappa + \delta)^2} \right) \int^t \frac{dt}{M\rho^2}. \quad (5.28)$$

Par conséquent, la solution exacte de l'équation de Schrödinger (5.2) associée à l'Hamiltonien (5.1), peut maintenant être écrite en regroupant les résultats ci-dessus

$$\begin{aligned} \Psi_{n,l,m}(r, \theta, \varphi, t) &= \left[\frac{\Gamma(2\kappa+\delta+2l+1)(\delta+\frac{1}{2})_l (n!)}{\pi \hbar^{\mu+1} \Gamma(\mu+1+n) \Gamma(\delta+\frac{1}{2}) \Gamma(l+2\kappa+\frac{1}{2}) (2\kappa+\delta+l)_l (l!)} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\times \exp \left[-i \left(2n+1 + \sqrt{(2l+2\kappa+\delta)^2 + \frac{2A}{\hbar^2}} \right) \int^t \frac{dt}{M\rho^2} \right] \\ &\times \frac{r^{\mu-\frac{1}{2}}}{\rho^{\mu+1}} L_n^\mu \left(\frac{r^2}{\hbar\rho^2} \right) \exp \left[(iM\rho\dot{\rho} - 1) \frac{r^2}{2\hbar\rho^2} \right] \\ &\times (\cos \theta)^\delta (\sin \theta)^{(2\kappa-\frac{1}{2})} w_l(\cos^2 \theta) e^{im\varphi}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

On peut remarquer que, dans le cas indépendant du temps, i.e., $\rho^2 = \frac{1}{M\omega} = C^{\text{st}}$, le résultat donné par (5.28) peut être réduit au spectre d'énergie, $E_{n,l,m}$, de l'équation de Schrödinger stationnaire correspondante

$$\varepsilon_{n,l,m}(t) = -\frac{E_{n,l,m}}{\hbar} t, \quad (5.30)$$

dans laquelle

$$E_{n,l,m} = \hbar\omega \left(2n+1 + \sqrt{(2l+2\kappa+\delta)^2 + \frac{2A}{\hbar^2}} \right). \quad (5.31)$$

Les équations (5.31) et (5.29) sont similaires à celles trouvées dans la littérature [67, 86, 87] pour le cas indépendant du temps. On note également que si $A = B = C = 0$, l'expression (5.28) se simplifie à la phase correspondante à l'oscillateur harmonique sphérique

$$\varepsilon_{n,l,m}(t) = -\left(2n + \ell + \frac{3}{2} \right) \int^t \frac{dt}{M\rho^2}, \quad (5.32)$$

with $\ell = 2l + |m|$.

Enfin, signalons que la présente méthode est également utile pour tous les potentiels de la forme

$$V(r, \theta, \varphi, t) = \frac{1}{2} M(t) \omega^2(t) r^2 + \frac{1}{M(t) r^2} \left(u(\theta) + \frac{w(\varphi)}{\sin^2 \theta} \right), \quad (5.33)$$

au fait que le problème correspondant est séparable. Au vu de ce qui a été présenté dans cette partie, nous concluons que la théorie de Lewis et Riesenfeld basée sur la recherche d'un opérateur invariant est une méthode puissante pour étudier la dynamique quantique dépendante du temps d'une particule non relativiste.

Troisième partie

Mécanique quantique déformée

Chapitre 6

Mécanique quantique avec une longueur minimale

6.1 Introduction

Avec l'avènement de la théorie quantique des champs dans les années 1930, il a été largement admis qu'une longueur élémentaire était nécessaire pour traiter des divergences indésirables. La régularisation la plus couramment utilisée était une coupure "cut-off " ou une autre quantité avec dimensions pour rendre certaines intégrales finies. Il semblait naturel de penser à cette coupure comme ayant une importance fondamentale [88, 89]. Heisenberg a tenté, sans succès, de donner un sens à cette longueur fondamentale en supposant que les composantes de l'opérateur de position ne commutent pas. En 1936, un papier très remarquable a été publié par Bronstein [90], où il a fait valoir que la quantification de la gravité conduit à une limite pour la précision de la mesure, et par conséquent l'existence d'une longueur minimale en dessous de laquelle la physique est inaccessible. Mais, ce n'est qu'en 1947, que Snyder [91] a proposé une algèbre covariante de Lorentz des opérateurs position et impulsion dans laquelle les composantes de l'opérateur de position ne commutent pas. La proposition de Snyder mène à un espace-temps non continu et, de cette façon, une longueur minimale est introduite dans la théorie.

La notion d'une longueur élémentaire est également apparu dans le contexte de la théorie des cordes [92, 93]. Dans cette théorie, il a été montré qu'il est impossible de résoudre des distances inférieures à la longueur caractéristique des cordes. En effet, alors que dans la théorie quantique des champs la résolution d'une longueur est inversement proportionnelle à l'impulsion transférée dans un processus de diffusion. Ce qui permet de résoudre des distances arbitrairement petites

en augmentant la quantité de mouvement des particules incidentes. En théorie des cordes il ya un point critique pour cette dynamique de transfert au-dessus duquel la distance résolue par la corde commence à augmenter, plutôt que de diminuer. C'est comme si la relation d'incertitude entre la position et l'impulsion avait la forme

$$(\Delta X) (\Delta P) \geq \frac{\hbar}{2} [1 + \beta (\Delta P)^2], \quad (6.1)$$

où β est lié à la longueur caractéristique des cordes. Cette nouvelle relation d'incertitude a comme conséquence, la modification de la relation de commutation entre l'opérateur de position et l'opérateur d'impulsion qui devient :

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar (1 + \beta \hat{P}^2). \quad (6.2)$$

Récemment, Kempf et ces collaborateurs [11] ont développé un cadre théorique pour cette nouvelle algèbre, qui implique l'existence d'une longueur minimale $(\Delta X)_{\min}$, dans le contexte de la mécanique quantique non relativiste. En conséquence, plusieurs problèmes ont été étudiés en connexion avec cette version déformée de la mécanique quantique, à savoir, l'atome d'hydrogène [94, 95], l'oscillateur harmonique [96], l'oscillateur de Dirac [97, 98], l'effet Casimir [99, 100], l'effet de la longueur élémentaire sur la thermodynamique des trous noirs [101, 102, 103] et le potentiel singulier $-\alpha/r^2$ [104]. Pour une étude historique et bibliographique assez exhaustive sur ce sujet, il est préférable de consulter la référence [12].

Cette dernière partie est organisée comme suit : la suite de ce chapitre sera consacrée à l'étude de la mécanique quantique avec une longueur élémentaire développée par Kempf et ses collaborateurs en se basant principalement sur la référence [11]. Nous calculons aussi, dans ce contexte, la fonction de partition pour une particule dans une boîte et pour un oscillateur harmonique ainsi que quelques fonctions thermodynamiques. Dans le prochain chapitre, nous allons étudier en détail le potentiel attractif $\alpha\delta(\mathbf{x})$ dans le cadre de cette nouvelle algèbre déformée. Nous allons montrer, en particulier, que le paramètre de déformation lié à ce formalisme régularise ce potentiel.

6.2 Relation d'incertitude généralisée à une dimension

A une dimension, la relation d'incertitude généralisée la plus simple qui implique l'existence d'une incertitude minimale non nulle sur la position, $(\Delta X)_{\min}$, a la forme :

$$(\Delta X) (\Delta P) \geq \frac{\hbar}{2} (1 + \beta (\Delta P)^2 + \gamma), \quad (6.3)$$

où β et γ sont des paramètres positifs. Le paramètre γ dépend, en général, des valeurs moyennes de \hat{X} et \hat{P} .

En mécanique quantique ordinaire ($\beta = \gamma = 0$), ΔX peut être arbitrairement petit si ΔP est suffisamment grand. Puisque, dans ce cas, l'incertitude sur ΔX est donnée simplement par

$$(\Delta X) \geq \frac{\hbar}{2(\Delta P)}. \quad (6.4)$$

Par contre, si $\beta \neq 0$, ΔX est toujours supérieur à une valeur minimale $(\Delta X)_{\min}$ non nulle même pour de grandes valeurs de ΔP . En effet, la relation (6.3) peut s'écrire aussi comme

$$(\Delta X) \geq \frac{\hbar(1 + \beta(\Delta P)^2 + \gamma)}{2(\Delta P)} = f(\Delta P), \quad (6.5)$$

il est facile d'avoir la valeur minimale de la fonction $f(\Delta P)$, par rapport à la variable ΔP , comme

$$f(\Delta P)_{\min} = \hbar\sqrt{\beta(\gamma + 1)},$$

donc on a bien $\Delta X \geq \hbar\sqrt{\beta(\gamma + 1)}$ quelque soit la valeur de ΔP . Ainsi, la valeur minimale $(\Delta X)_{\min}$ correspond à $\gamma = 0$ est

$$(\Delta X)_{\min} = \hbar\sqrt{\beta}. \quad (6.6)$$

La courbe représentant la relation d'incertitude (6.3) est illustrée sur la figure (1).

Fig. (1). Représentation de la relation d'incertitude généralisée.

Comme évoqué dans l'introduction, cette nouvelle relation d'incertitude a comme conséquence la modification de la relation de commutation entre l'opérateur de position et l'opérateur d'impulsion. En effet, pour récupérer la relation d'incertitude (6.3) les auteurs de la référence [11] ont proposé une relation de commutation de la forme

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar(1 + \beta\hat{P}^2), \quad \beta > 0. \quad (6.7)$$

En mécanique quantique, la relation de commutation entre deux opérateurs \hat{A} et \hat{B} est reliée directement à la relation d'incertitude à travers la formule [105]

$$(\Delta A) \cdot (\Delta B) \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|,$$

dans les cas des opérateurs \hat{X} et \hat{P} , vérifiant la relation (6.7), on obtient

$$(\Delta X) \cdot (\Delta P) \geq \frac{\hbar}{2} \left(1 + \beta \langle \hat{P}^2 \rangle \right). \quad (6.8)$$

Puis, on utilise la définition de l'écart quadratique moyen : $(\Delta P)^2 = \langle \hat{P}^2 \rangle - \langle \hat{P} \rangle^2$, on obtient

$$\begin{aligned} (\Delta X) \cdot (\Delta P) &\geq \frac{\hbar}{2} (1 + \beta (\Delta P)^2 + \gamma), \\ \gamma &= \beta \langle \hat{P} \rangle^2, \end{aligned} \quad (6.9)$$

qui est la relation d'incertitude (6.3).

6.3 Représentation dans l'espace des impulsions

Pour représenter l'opérateur de position \hat{X} et l'opérateur d'impulsion \hat{P} , vérifiant la relation de commutation (6.7), il est souvent commode d'exprimer ces opérateurs en fonction des anciens opérateurs \hat{x} et \hat{p} , satisfaisant la relation de commutation canonique : $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$. La réalisation la plus simple s'écrit

$$\begin{cases} \hat{X} = (1 + \beta \hat{p}^2) \hat{x}, \\ \hat{P} = \hat{p}. \end{cases} \quad (6.10)$$

Dans l'espace des impulsions, ces opérateurs agissent sur une fonction d'onde $\psi(p)$ comme suit

$$\begin{aligned} \hat{P}\psi(p) &= p\psi(p), \\ \hat{X}\psi(p) &= i\hbar(1 + \beta p^2) \frac{d}{dp} \psi(p). \end{aligned}$$

Il est nécessaire que les opérateurs \hat{X} et \hat{P} définis ci-dessus soient symétriques, pour que leurs valeurs propres soient réelles. La symétrie de l'opérateur \hat{P} est évidente. Tandis que pour l'opérateur \hat{X} , on doit modifier le produit scalaire de la façon suivante

$$\langle \psi | \varphi \rangle_\beta = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \psi^*(p) \varphi(p). \quad (6.11)$$

En effet,

$$\begin{aligned} \langle \psi | (\hat{X} | \varphi \rangle) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \psi^*(p) \left[i\hbar(1 + \beta p^2) \frac{d}{dp} \varphi(p) \right] \\ &= i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(p) d\varphi(p), \end{aligned}$$

par une intégration par partie, on obtient

$$\langle \psi | (\hat{X} |\varphi\rangle) = -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(p) d\psi^*(p),$$

où on a supposé que $\psi(\infty) = \varphi(\infty) = 0$. D'autre part, on a

$$\begin{aligned} (\langle \psi | \hat{X}) |\varphi\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \left[i\hbar(1 + \beta p^2) \frac{d}{dp} \psi(p) \right]^* \varphi(p) \\ &= -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} (d\psi^*(p)) \varphi(p) = -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(p) d\psi^*(p). \end{aligned}$$

C'est-à-dire,

$$\langle \psi | (\hat{X} |\varphi\rangle) = (\langle \psi | \hat{X}) |\varphi\rangle.$$

Donc l'opérateur \hat{X} est bien symétrique par rapport au produit scalaire (6.11). Vu le produit scalaire (6.11), on peut définir alors une nouvelle relation de fermeture

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} |p\rangle \langle p| = 1. \quad (6.12)$$

où $|p\rangle$ est le vecteur propre de l'opérateur impulsion. Compte tenu de (6.12), on peut écrire

$$\langle p'' | p'\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \langle p'' | p\rangle \langle p | p'\rangle,$$

on en déduit, la relation d'orthonormalisation

$$\langle p | p'\rangle = (1 + \beta p^2) \delta(p - p'). \quad (6.13)$$

6.4 Fonctions propres de l'opérateur de position

L'équation aux valeurs propres de l'opérateur \hat{X} s'écrit

$$\hat{X} |X\rangle = X |X\rangle, \quad (6.14)$$

où $|X\rangle$ est un vecteur propre de \hat{X} . Multiplions par le bra $\langle p|$,

$$\langle p | \hat{X} |X\rangle = X \langle p | X\rangle, \quad (6.15)$$

soit $\langle p | X\rangle = \psi_X(p)$ et au moyen de la réalisation (6.10) de l'opérateur \hat{X} , l'équation précédente peut s'écrire aussi comme

$$i\hbar(1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p} \psi_X(p) = X \psi_X(p). \quad (6.16)$$

L'intégration de l'équation (6.16) donne

$$\psi_X(p) = c \exp\left(-i \frac{X}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan \sqrt{\beta} p\right),$$

où c est une constante de normalisation qui se calcule en utilisant la relation (6.11) comme suit

$$1 = cc^* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2}, \quad (6.17)$$

c'est-à-dire

$$c = \sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{\pi}}.$$

Donc la fonction propre, $\psi_X(p)$, de l'opérateur \hat{X} est

$$\psi_X(p) = \sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{\pi}} \exp\left(-i \frac{X}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan \sqrt{\beta} p\right). \quad (6.18)$$

Il est à noter ici que l'intégrale (6.17) diverge lorsque $\beta \rightarrow 0$. Donc le résultat (6.18) à uniquement à un sens lorsque $\beta \neq 0$.

Calculons maintenant le produit scalaire de deux vecteurs propres de l'opérateur \hat{X} comme

$$\langle X' | X \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \psi_{X'}^*(p) \psi_X(p), \quad (6.19)$$

où on a introduit la relation de fermeture (6.12). Utilisons (6.18), on obtient

$$\langle X' | X \rangle = \frac{2\hbar\sqrt{\beta}}{\pi(X - X')} \sin\left(\frac{X - X'}{2\hbar\sqrt{\beta}} \pi\right). \quad (6.20)$$

Le résultat (6.20) montre que les états de l'opérateur de position ne sont pas, en général, orthogonaux. Ceci est dû au fait que \hat{X} n'est pas auto-adjoint. Cependant, si :

$$X - X' = 2n\hbar\sqrt{\beta}, \quad n \in \mathbb{Z}^* \quad (6.21)$$

Dans ce cas on a bien

$$\langle X' | X \rangle = 0$$

c'est-à-dire

$$\langle X | X + 2n\hbar\sqrt{\beta} \rangle = \delta_{n,0}. \quad (6.22)$$

d'une façon générale

$$\langle X + 2n'\hbar\sqrt{\beta} | X + 2n\hbar\sqrt{\beta} \rangle = \delta_{n,n'}, \quad (n, n') \in \mathbb{Z}^2$$

On peut diagonaliser alors l'opérateur \hat{X} dans la base complète et orthogonale $\{|X + 2n\hbar\sqrt{\beta}\rangle\}$.

La courbe représentant le produit scalaire (6.20) est illustrée sur la figure (2).

Fig. (2). Le produit scalaire des états formels $\langle X' | X \rangle$ en fonction de $(X - X')$ en unité de $\hbar\sqrt{\beta}$.

Il est important de mentionner que la valeur moyenne de l'énergie dans les états $|X\rangle$ est infinie, malgré que ces états sont normalisables. En effet, on a :

$$\langle X | \frac{p^2}{2m} | X \rangle = \frac{\sqrt{\beta}}{2\pi m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p^2}{1 + \beta p^2} dp \rightarrow \infty. \quad (6.23)$$

Ce problème se produit également en mécanique quantique ordinaire.

6.5 États à localisation maximale

L'écart quadratique moyen dans les états $|X\rangle$ pour l'opérateur de position, \hat{X} , est

$$(\Delta X)_{|X\rangle} = \sqrt{\langle (\hat{X} - \langle \hat{X} \rangle)^2 \rangle} \quad (6.24)$$

$$= \sqrt{\langle X | \hat{X}^2 | X \rangle - \langle X | \hat{X} | X \rangle^2}, \quad (6.25)$$

compte tenu de (6.14), on a bien

$$(\Delta X)_{|X\rangle} = 0. \quad (6.26)$$

Cependant, la nouvelle relation d'incertitude (6.3) exige l'existence d'une incertitude minimale non nulle sur la position, $(\Delta X)_{\min} = \hbar\sqrt{\beta}$, si on accepte ce point de vue, on est obligé de considérer les états $|X\rangle$, traités dans la section précédente, comme étant des états formels "non physiques". Puisqu'un état physique devrait avoir une incertitude non nulle sur la position. Pour cette raison, on va définir ce qu'on appelle les états à localisation maximale autour de la position X , ces états sont définis comme [11]

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle X^{lm} | \hat{X} | X^{lm} \rangle = X, \\ \text{avec } (\Delta X)_{|X^{lm}\rangle} = (\Delta X)_{\min}. \end{array} \right. \quad (6.27)$$

Contrairement au résultat (6.23), nous allons voir que, pour ces états à localisation maximale, l'énergie est finie.

La dérivation standard de la relation d'incertitude suivante

$$(\Delta X) \cdot (\Delta P) \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{X}, \hat{P}] \rangle \right|, \quad (6.28)$$

peut être établie en considérant que la norme d'un vecteur est positive, on peut alors écrire

$$\left\| \left\{ \hat{X} - \langle \hat{X} \rangle + \frac{\langle [\hat{X}, \hat{P}] \rangle}{2(\Delta P)^2} (\hat{P} - \langle \hat{P} \rangle) \right\} |X\rangle \right\| \geq 0, \quad (6.29)$$

comme $\langle [\hat{X}, \hat{P}] \rangle$ est imaginaire, l'expression (6.29) s'écrit aussi

$$\langle X | \left\{ (\hat{X} - \langle \hat{X} \rangle)^2 - \left(\frac{|\langle [\hat{X}, \hat{P}] \rangle|}{2(\Delta P)^2} \right)^2 (\hat{P} - \langle \hat{P} \rangle)^2 \right\} |X\rangle \geq 0,$$

à partir de laquelle on a la relation d'incertitude

$$(\Delta X) \cdot (\Delta P) \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{X}, \hat{P}] \rangle \right|. \quad (6.30)$$

Réécrivons l'expression (6.29) dans le cas où la relation de commutation entre l'opérateur position et impulsion vérifie la relation (6.7), c'est-à-dire

$$\left\| \left\{ \hat{X} - \langle \hat{X} \rangle + i\hbar \frac{1 + \beta \langle \hat{P}^2 \rangle}{2(\Delta P)^2} (\hat{P} - \langle \hat{P} \rangle) \right\} |X\rangle \right\| \geq 0. \quad (6.31)$$

À ce stade, mettons-nous dans les conditions où la position d'incertitude minimale est atteinte. Dans ce cas, on a

$$\left\{ \hat{X} - \langle \hat{X} \rangle + i\hbar \frac{1 + \beta \langle \hat{P}^2 \rangle}{2(\Delta P)^2} (\hat{P} - \langle \hat{P} \rangle) \right\} |X\rangle = 0,$$

Considérons la réalisation (6.10), cette dernière équation prend, dans l'espace des impulsions, la forme suivante :

$$\left\{ i\hbar(1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p} - \langle \hat{X} \rangle + i\hbar \frac{1 + \beta(\Delta P)^2 + \beta \langle \hat{P} \rangle^2}{2(\Delta P)^2} (p - \langle \hat{P} \rangle) \right\} \psi_X(p) = 0.$$

qui peut être résolue comme

$$\begin{aligned} \psi_X(p) &= N(1 + \beta p^2)^{-\frac{1 + \beta(\Delta P)^2 + \beta\langle\hat{P}\rangle^2}{4\beta(\Delta P)^2}} \\ &\quad \times \exp \left[\left(\frac{\langle\hat{X}\rangle}{i\hbar\sqrt{\beta}} - \frac{(1 + \beta(\Delta P)^2 + \beta\langle\hat{P}\rangle^2)\langle\hat{P}\rangle}{2(\Delta P)^2\sqrt{\beta}} \right) \arctan \sqrt{\beta} p \right]. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Les états à localisation absolument maximale, $\psi_X^{lm}(p) = \langle p | X^{lm} \rangle$, sont obtenus pour $\langle\hat{P}\rangle = 0$. Puisque, dans ce cas, $(\Delta X)_{\min} = \hbar\sqrt{\beta}$. Ce qui implique, suivant (6.3), que $\Delta P = 1/\sqrt{\beta}$. L'expression (6.32) se réduit à

$$\psi_X^{lm}(p) = N(1 + \beta p^2)^{-1/2} \exp \left(-i \frac{X}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan \left(\sqrt{\beta} p \right) \right), \quad (6.33)$$

où N est une constante de normalisation. Cette fonction peut être normalisée suivant (6.11) comme

$$\psi_X^{lm}(p) = \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}} (1 + \beta p^2)^{-1/2} \exp \left(-i \frac{X}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan \left(\sqrt{\beta} p \right) \right), \quad (6.34)$$

Notons que, tous comme les états formels, les états à localisation maximale, $|X^{lm}\rangle$, ne sont pas en général orthogonaux. En effet, on peut avoir le résultat

$$\langle X'^{lm} | X^{lm} \rangle = \frac{1}{\pi} \left[\frac{X - X'}{2\hbar\sqrt{\beta}} - \left(\frac{X - X'}{2\hbar\sqrt{\beta}} \right)^3 \right]^{-1} \sin \left(\frac{X - X'}{2\hbar\sqrt{\beta}} \pi \right). \quad (6.35)$$

La courbe représentant le produit scalaire (6.35) est illustrée sur la figure (3).

Avant de terminer cette section, il est important de mentionner que, contrairement aux états formels, $|X\rangle$, les états $|X^{lm}\rangle$ sont des états "physiques", pour lesquels la valeur moyenne de l'énergie ne diverge pas. En effet :

$$\begin{aligned} \left\langle X^{lm} \left| \frac{\hat{P}^2}{2m} \right| X^{lm} \right\rangle &= \frac{2\sqrt{\beta}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)^2} \frac{p^2}{2m} \\ &= \frac{1}{2m\beta}. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Fig. (3). *Le produit scalaire des états des à localisation maximale $\langle X'^{lm} | X^{lm} \rangle$ en fonction de $(X - X')$ en unité de $\hbar\sqrt{\beta}$.*

6.6 Généralisation à plusieurs dimensions

Nous passons maintenant à donner l'extension du formalisme développé dans les sections précédentes à D dimensions spatiales. La relation de commutation (6.7) a été généralisée pour avoir non seulement une incertitude minimale non nulle sur la position, mais aussi, pour assurer que les opérateurs \hat{X}_i et \hat{P}_i , composantes des opérateurs $\hat{\mathbf{X}}$ et $\hat{\mathbf{P}}$ successivement, soient auto-adjoints [106]. Cette généralisation est donnée dans les références [94, 96, 106] comme

$$\left[\hat{X}_i, \hat{P}_j \right] = i\hbar \left[\delta_{ij} \left(1 + \beta \hat{\mathbf{P}}^2 \right) + \beta'_i \hat{P}_i \hat{P}_j \right], \quad (\beta, \beta') > 0, \quad (6.37)$$

le paramètre supplémentaire β' est supposé positif. Notons que les relations de commutation (6.37) préservent la symétrie rotationnelle.

Avec de telles relations de commutation, nous ne pouvons plus supposer que les opérateurs de position, d'une part, et les opérateurs d'impulsion, de l'autre, commutent entre eux. La raison pour cela est que ces opérateurs doivent satisfaire à l'identité de Jacobi.

$$[[A, B], C] + [[C, A], B] + [[B, C], A] = 0, \quad \forall A, B, C \in \left\{ \hat{X}_i, \hat{P}_j \right\}_{i,j} \quad (6.38)$$

qui est nécessaire pour l'existence d'une représentation des observables comme opérateurs différentiels linéaires.

Comme le côté droit de (6.37) dépend explicitement des opérateurs d'impulsions, il est commode de supposer que

$$\left[\hat{P}_i, \hat{P}_j \right] = 0, \quad (6.39)$$

alors, il est possible d'obtenir, au moyen de l'identité de Jacobi (6.38), la non commutativité suivante :

$$\left[\hat{X}_i, \hat{X}_j \right] = i\hbar \frac{(2\beta - \beta') + \beta(2\beta + \beta')\hat{\mathbf{P}}^2}{1 + \beta\hat{\mathbf{P}}^2} \left(\hat{P}_i \hat{X}_j - \hat{P}_j \hat{X}_i \right). \quad (6.40)$$

La relation d'incertitude correspondante à la relation de commutation (6.37), peut être déduite, en supposant que les ΔP_j ne dépend pas de j , comme

$$\begin{aligned} (\Delta X_i) (\Delta P_j) &\geq \frac{\hbar}{2} \delta_{ij} \left[1 + (D\beta + \beta') (\Delta P_j)^2 + \gamma \right], \\ \text{avec } \gamma &= \beta \sum_{k=1}^D \langle P_k \rangle^2 + \beta' \langle P_i \rangle^2. \end{aligned} \quad (6.41)$$

D'où nous pouvons avoir, par une méthode similaire au cas $D = 1$, l'incertitude minimale

$$(\Delta X_i)_{\min} = \hbar \sqrt{(D\beta + \beta')}. \quad \forall i \quad (6.42)$$

Tout comme le cas unidimensionnel, le choix de la représentation des opérateurs \hat{X}_i et \hat{P}_j , satisfaisant les relations de commutation (6.37), se fait toujours en exprimant ces opérateurs comme fonctions des opérateurs habituels \hat{x}_i et \hat{p}_j satisfaisant les relations de commutation canoniques de la mécanique quantique ordinaire.

Différentes représentations de l'algèbre (6.37) ont été utilisées dans la littérature, pour étudier l'effet apporté par l'introduction de cette longueur minimale dans les problèmes de la mécanique quantique [94, 96, 106, 107, 108, 109]. On se limite ici à donner deux représentations intéressantes. La première a été donnée dans les références [96, 106] comme

$$\begin{cases} \hat{X}_i = (1 + \beta \hat{p}^2) \hat{x}_i + \beta' \hat{p}_i \hat{p}_j \hat{x}_j + \gamma \hat{p}_i, \\ \hat{P}_i = \hat{p}_i, \end{cases} \quad (6.43)$$

où γ est un paramètre positif qui n'a pas d'effet sur les observables physiques : son choix assure l'hermiticité de l'opérateur de position, \hat{X}_i , par rapport au produit scalaire modifié définit comme suit [96]

$$\begin{aligned} \langle \psi | \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^D \mathbf{p}}{[1 + (\beta + \beta') p^2]^{1-\alpha}} \psi^*(p) \varphi(p), \\ \text{avec } \alpha &= \frac{\gamma - \beta' \left(\frac{D-1}{2}\right)}{\beta + \beta'}. \end{aligned} \quad (6.44)$$

La représentation (6.43) a été utilisée, en particulier, pour traiter exactement l'équation de Schrödinger pour un oscillateur harmonique à D dimensions dans l'espace des impulsions.

La deuxième représentation est donnée dans la référence [94] pour traiter perturbativement l'atome d'hydrogène. L'auteur a considéré le cas spécial $\beta' = 2\beta$ et les opérateurs \hat{X}_i et \hat{P}_i satisfaisant au premier ordre en β à l'algèbre de Heisenberg déformée (6.37). Cette représentation est

$$\begin{cases} \hat{X}_i = \hat{x}_i, \\ \hat{P}_i = \hat{p}_i(1 + \beta \mathbf{p}^2). \end{cases} \quad (6.45)$$

L'avantage de cette représentation est que les commutateurs entre les opérateurs de position (6.40) s'annulent au premier ordre de β . Ce cas présente un intérêt particulier puisque, en plus de l'invariance rotationnelle, le formalisme devient invariant par rapport aux translations [106].

6.7 Incertitudes minimales sur la position et sur l'impulsion

Comme il a été mentionné dans la référence [11], une mécanique quantique avec une incertitude minimale finie sur la position peut être utile pour décrire efficacement des particules

non ponctuelles comme, par exemple, les nucléons, les quasi-particules dans les solides ou les noyaux dans les potentiels moléculaires. De façon analogue, sur de grandes échelles une incertitude minimale sur l'impulsion, $(\Delta p)_{\min}$, peut offrir de nouvelles possibilités pour décrire des situations où l'impulsion ne peut être déterminée avec précision, en particulier sur un espace courbe [110]. Soit la relation de commutation

$$[X, P] = i\hbar (1 + \alpha X^2 + \beta P^2). \quad (6.46)$$

où α et β sont des paramètres positifs. La relation d'incertitude associée à (6.46) peut être écrite comme

$$(\Delta X) (\Delta P) \geq \frac{\hbar}{2} (1 + \alpha (\Delta X)^2 + \beta (\Delta P)^2 + \gamma), \quad (6.47)$$

Pour calculer les incertitudes minimales sur la position et sur l'impulsion, on définit

$$f(\Delta X, \Delta P) = (\Delta X) (\Delta P) - \frac{\hbar (1 + \alpha (\Delta X)^2 + \beta (\Delta P)^2 + \gamma)}{2 \Delta P} \geq 0, \quad (6.48)$$

on cherche la valeur critique (ΔX) qui satisfait aux conditions

$$f(\Delta X, \Delta P) \geq 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f(\Delta X, \Delta P)}{\partial \Delta P} = 0,$$

on obtient l'inégalité

$$(\Delta X) \geq \hbar \sqrt{\frac{\beta (1 + \gamma)}{1 - \hbar^2 \alpha \beta}},$$

De même, pour la valeur (ΔP) , on obtient

$$(\Delta P) \geq \hbar \sqrt{\frac{\alpha (1 + \gamma)}{1 - \hbar^2 \alpha \beta}},$$

à condition que

$$\hbar^2 \beta < \frac{1}{\alpha}. \quad (6.49)$$

Les valeurs minimales $(\Delta X)_{\min}$ et $(\Delta P)_{\min}$ correspondantes à $\gamma = 0$ sont

$$(\Delta X)_{\min} = \hbar \sqrt{\frac{\beta}{1 - \hbar^2 \alpha \beta}}, \quad (\Delta P)_{\min} = \hbar \sqrt{\frac{\alpha}{1 - \hbar^2 \alpha \beta}}, \quad (6.50)$$

une relation directe entre ces valeurs minimales est donc donnée par

$$(\Delta X)_{\min} = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} (\Delta P)_{\min}. \quad (6.51)$$

6.8 Fonction de partition en présence d'une longueur minimale

L'Hamiltonien d'une particule de masse M soumise à un potentiel $V(\hat{X})$ s'écrit

$$H = \frac{\hat{P}^2}{2m} + V(\hat{X}), \quad (6.52)$$

Sans perte de généralité, on se limite dans cette section au cas unidimensionnel.

En présence d'une longueur minimale, les opérateurs \hat{X} et \hat{P} vérifient la relation de commutation (6.7). Pour obtenir le spectre d'énergie à partir de l'Hamiltonien (6.52), on doit, en premier lieu, exprimer ces opérateurs en fonction des anciens opérateurs \hat{x} et \hat{p} , satisfaisant la relation de commutation canonique : $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$. C'est-à-dire :

$$H(X, P) \rightarrow H_\beta(\hat{x}, \hat{p})$$

Puis, on cherche les solutions de l'équation aux valeurs propres suivante

$$H_\beta(\hat{x}, \hat{p})\psi = E\psi. \quad (6.53)$$

Pour un spectre discret, E_n , la fonction de partition s'écrit

$$Z_q = \sum_n e^{-\bar{\beta}E_n}, \quad (6.54)$$

où nous avons écrit $\bar{\beta} = \frac{1}{KT}$ pour éviter toute confusion avec le paramètre de déformation β . T est la température et K est la constante de Boltzmann.

En plus, on peut définir une fonction de partition classique associée comme

$$Z_c = \frac{1}{h} \int \int \exp[-\bar{\beta}H_\beta(x, p)] dx dp, \quad (6.55)$$

6.8.1 Application (A) : Particule dans une boîte

Considérons une particule de masse m dans une boîte à une dimension de taille L . L'Hamiltonien associé est

$$H = \frac{\hat{P}^2}{2m}. \quad (6.56)$$

Comme le potentiel est nul, il est commode de choisir une représentation des opérateurs \hat{X} et \hat{P} où on peut introduire l'effet de la longueur minimale. Au premier ordre en β , une telle représentation est [94]

$$\begin{cases} \hat{P} = (1 + \frac{\beta}{3}\hat{p}^2)\hat{p} \\ \hat{X} = \hat{x}, \end{cases} \quad (6.57)$$

donc (6.56) devient

$$H_\beta(\hat{x}, \hat{p}) = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{\beta}{3m}\hat{p}^4. \quad (6.58)$$

Dans l'espace des impulsions, l'équation aux valeurs propres (6.53) est

$$\left(\frac{\beta}{3m}p^4 + \frac{p^2}{2m} - E \right) \psi(p) = 0.$$

la solution de cette dernière équation est

$$\psi(p) = A\delta(p - p_E), \quad (6.59)$$

où p_E est la racine de l'équation

$$\frac{\beta}{3m}p^4 + \frac{p^2}{2m} = E. \quad (6.60)$$

et A est une constante. Soit $p = \hbar k$ où le vecteur d'onde associé à la particule $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Une particule dans une boîte crée une onde stationnaire où la taille de la boîte est exprimée par

$$L = n\frac{\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.61)$$

D'où l'énergie (6.60) s'écrit

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2L^2 m} + \frac{\pi^4 \hbar^4 n^4}{3L^4 m} \beta. \quad (6.62)$$

Le premier terme représente les niveaux d'énergie d'une particule dans une boîte en mécanique quantique ordinaire, tandis que le deuxième terme est la correction apportée par l'existence d'une longueur minimale.

Ainsi, la fonction de partition (6.54) est

$$Z_q = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\bar{\beta} \left[\frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2L^2 m} + \frac{\pi^4 \hbar^4 n^4}{3L^4 m} \beta \right]}, \quad (6.63)$$

A l'équilibre, la fonction de partition donnée par (6.63) peut être évaluée en utilisant la formule d'Euler-Maclaurin

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \frac{1}{2}f(0) + \int_0^{\infty} f(n)dn - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p)!} B_{2p} f^{(2p-1)}(0), \quad (6.64)$$

où B_{2p} sont les nombres de Bernoulli $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$, ...

Nous analysons ici le cas hautes températures ($\bar{\beta} \ll$). Il est facile de vérifier que tous les termes de la somme de l'expression précédente ainsi que le premier terme ont une puissance

positive en $\bar{\beta}$, qui sont donc très petits par rapport au deuxième terme. Ainsi, pour ($\bar{\beta} \ll$), la fonction de partition (6.63) se réduit à

$$Z_q \simeq \int_0^{+\infty} e^{-\bar{\beta} \left(\frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2mL^2} + \beta \frac{\pi^4 \hbar^4}{3mL^4} n^4 \right)} dn,$$

ce qui donne

$$Z_q \simeq \frac{\sqrt{3}L\sqrt{m}}{4\pi\hbar\sqrt{\bar{\beta}}} \sigma e^{\frac{3}{16}\sigma^2} K_{\frac{1}{4}} \left(\frac{3}{16}\sigma^2 \right), \quad (6.65)$$

où $\sigma = (\bar{\beta}/2M\beta)^{\frac{1}{2}}$ et K est la fonction de Bessel de deuxième espèce. Si on suppose que la longueur minimale doit être très inférieure à la longueur d'onde thermique de De Broglie, $\lambda_T = h/\sqrt{2mKT}$, c'est-à-dire

$$\hbar\sqrt{\bar{\beta}} \ll \frac{h}{2\pi\sqrt{2mKT}} \sim \lambda_T.$$

Dans ce cas, nous pouvons considérer le comportement asymptotique de la fonction de Bessel pour des grandes valeurs de son argument comme

$$K_{\frac{1}{4}} \left(\frac{3}{16}\sigma \right) \sim \frac{\sqrt{6}}{3} \sqrt{\pi} e^{-\frac{3}{16}\sigma^2} \left(\frac{2}{\sigma} - \frac{1}{\sigma^3} \right) + O \left(\frac{1}{\sigma^5} \right). \quad (6.66)$$

Cela nous permet d'écrire

$$Z_q \simeq \frac{L\sqrt{m}}{\sqrt{2\pi}\hbar\sqrt{\bar{\beta}}} \left(1 - \frac{1}{2\sigma^2} \right) + O \left(\frac{1}{\sigma^4} \right) \quad (6.67)$$

où $O \left(\frac{1}{\sigma^4} \right) \sim O(\beta^2)$, Ainsi, on a le résultat

$$Z_q \simeq \frac{L\sqrt{m}}{\hbar\sqrt{2\pi\bar{\beta}}} - \beta \frac{Lm^{\frac{3}{2}}}{\hbar\sqrt{2\pi}(\bar{\beta})^{\frac{3}{2}}} + O(\beta^2). \quad (6.68)$$

Calculons maintenant la fonction de partition classique d'après (6.55), on a

$$Z_c = \frac{1}{h} \int_0^L \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\bar{\beta} \left(\frac{1}{2m} p^2 + \frac{\beta}{3m} p^4 \right) \right] dx dp, \quad (6.69)$$

par une méthode similaire, on obtient

$$Z_c \simeq \frac{L\sqrt{m}}{\hbar\sqrt{2\pi\bar{\beta}}} - \frac{Lm^{\frac{3}{2}}}{\hbar\sqrt{2\pi}(\bar{\beta})^{\frac{3}{2}}} \beta + O(\beta^2), \quad (6.70)$$

qui coïncide avec le résultat (6.68) à hautes températures.

6.8.2 Application (B) : L'oscillateur harmonique

Considérons maintenant le cas d'une particule de m soumise à un oscillateur harmonique de fréquence ω , l'Hamiltonien associé est

$$H = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{X}^2, \quad (6.71)$$

où les opérateurs \hat{X} et \hat{P} vérifient l'algèbre déformée (6.7). Le problème aux valeurs propres de l'oscillateur harmonique décrit par l'Hamiltonien (6.71) en présence d'une longueur minimale a été résolu exactement (voir la référence [96]) dans l'espace des impulsions au moyen de la représentation suivante

$$\begin{cases} \hat{X} = (1 + \beta\hat{p}^2)\hat{x}, \\ \hat{P} = \hat{p}. \end{cases} \quad (6.72)$$

Ainsi, l'Hamiltonien (6.71) s'écrit

$$H_\beta(\hat{p}, \hat{x}) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(1 + \beta\hat{p}^2)\hat{x}(1 + \beta\hat{p}^2)\hat{x}.$$

Le spectre d'énergie est donné par l'expression [96]

$$E_n = \hbar\omega \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \sqrt{1 + \frac{\beta^2 m^2 \hbar^2 \omega^2}{4}} + \left(n^2 + n + \frac{1}{2}\right) \frac{\beta m \hbar \omega}{2} \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

La fonction de partition (6.54) s'écrit

$$Z_q = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\bar{\beta}\hbar\omega \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \sqrt{1 + \frac{\beta^2 m^2 \hbar^2 \omega^2}{4}} + \left(n^2 + n + \frac{1}{2}\right) \frac{\beta m \hbar \omega}{2} \right]\right).$$

Analysons, aussi, le cas hautes températures ($\bar{\beta} \ll 1$), nous considérons encore une fois la formule (6.64). Ainsi, nous pouvons écrire

$$Z_q = \int_0^{+\infty} \exp\left(-\bar{\beta}\hbar\omega \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \sqrt{1 + \frac{\beta^2 m^2 \hbar^2 \omega^2}{4}} + \left(n^2 + n + \frac{1}{2}\right) \frac{\beta m \hbar \omega}{2} \right]\right) dn + O(\beta^2),$$

d'où le résultat

$$Z_q = \sqrt{\pi} \frac{\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2\bar{\beta}}(\beta m \hbar \omega + \sqrt{4 + \beta^2 m^2 \hbar^2 \omega^2})}{4\sqrt{\beta m}}\right)\right]}{\hbar\omega\sqrt{2\bar{\beta}m\beta}} e^{\sigma^2}. \quad (6.73)$$

où $\sigma = \sqrt{\frac{\bar{\beta}}{2m\beta}}$. Supposons que β est un très petit paramètre. Ainsi, la fonction d'erreur ne subit presque pas de changement pour les grandes valeurs de son argument, nous pouvons écrire avec

une bonne approximation

$$\begin{aligned} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2\bar{\beta}}(\beta m\hbar\omega + \sqrt{4 + \beta^2 m^2 \hbar^2 \omega^2})}{4\sqrt{\bar{\beta}m}}\right) &\simeq \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\bar{\beta}}}{\sqrt{2m\bar{\beta}}} + \frac{\sqrt{2}}{4}\hbar\omega\sqrt{m\bar{\beta}}\beta + O\left(\beta^{\frac{3}{2}}\right)\right) \\ &\simeq \operatorname{erf}(\sigma). \end{aligned}$$

$\operatorname{erf}(\sigma)$ est la fonction d'erreur de Gauss définie par

$$\operatorname{erf}(\sigma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\sigma e^{-t^2} dt.$$

Alors la fonction de partition (6.73) se réduit à

$$Z_q = \sqrt{\pi}\sigma \frac{[1 - \operatorname{erf}(\sigma)]}{\hbar\omega\bar{\beta}} e^{\sigma^2}. \quad (6.74)$$

où on a supposé que la longueur minimale doit être très inférieure à la longueur d'onde thermique de De Broglie.

Considérons maintenant la fonction de partition classique correspondante

$$Z_c = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\bar{\beta}\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(1 + \beta p^2)^2 x^2\right)\right] dx dp, \quad (6.75)$$

ce qui donne

$$Z_c = \frac{\sqrt{\pi}\sigma [1 - \operatorname{erf}(\sigma)] e^{\sigma^2}}{\hbar\omega\bar{\beta}}, \quad (6.76)$$

ce résultat coïncide avec (6.74). Afin de bien montrer l'effet de la longueur minimale sur la fonction de partition, nous considérons le comportement asymptotique de la fonction d'erreur pour des grandes valeurs de son argument comme

$$\operatorname{erf}(\sigma) \sim 1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma^3} - \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma}\right) e^{-\sigma^2} + O\left(\frac{1}{\sigma^5}\right), \quad (6.77)$$

Ainsi, l'équation (6.76) donne

$$Z_c \simeq \frac{1}{\hbar\omega\bar{\beta}} - \frac{1}{2\hbar\omega\bar{\beta}\sigma^2} + O\left(\frac{1}{\sigma^4}\right), \quad (6.78)$$

avec $O\left(\frac{1}{\sigma^4}\right) \sim O(\beta^2)$, à cet ordre d'approximation, nous avons

$$Z_c \simeq \frac{1}{\hbar\omega\bar{\beta}} - \beta \frac{m}{\hbar\omega\bar{\beta}^2} + O(\beta^2). \quad (6.79)$$

D'après ces deux exemples, la fonction de partition en présence d'une longueur minimale diminue par rapport au cas $\beta = 0$. On peut tenter aussi d'expliquer cette diminution de la façon suivante :

Le produit $(\Delta x) \cdot (\Delta p)$ est l'élément de volume de l'espace des phases qui est à l'ordre de \hbar ;

$$(\Delta x) \cdot (\Delta p) \sim \hbar, \quad (6.80)$$

cet élément de volume représente la taille de la cellule élémentaire de l'espace des phases.

En présence d'une longueur minimale ce produit est maintenant à l'ordre de

$$(\Delta x) \cdot (\Delta p) \sim \hbar \left(1 + \beta \langle \hat{P}^2 \rangle \right), \quad (6.81)$$

la taille de la cellule que chaque état occupe dans l'espace des phases est donc devient plus grande que la précédente et la fonction de partition diminue en conséquence.

Les fonctions thermodynamiques peuvent alors être exprimées d'une manière habituelle. Par exemple, pour l'oscillateur harmonique, l'énergie interne du système, à haute température, est exprimée comme suit :

$$\begin{aligned} U &= -\partial \ln(Z_c) / \partial \bar{\beta}. \\ &\simeq U^{\beta=0} - MK^2 T^2 \beta + O(\beta^2). \end{aligned} \quad (6.82)$$

où $U^{\beta=0} = KT$. La capacité calorifique, $c = (\partial U / \partial T)$, est donc

$$c(T) \simeq K - 2MK^2 T \beta + O(\beta^2). \quad (6.83)$$

De même, l'entropie du système, $S = -\partial F / \partial T$, où $F = -KT \ln Z_c$ est

$$S \simeq S^{\beta=0} - \frac{1}{2} MK^2 T \beta + O(\beta^2), \quad (6.84)$$

avec $S^{\beta=0} = K(1 + \ln(KT/\hbar\omega))$ est l'entropie pour le cas non déformé. Comme on peut le voir, ces fonctions thermodynamiques, comparées au cas $\beta = 0$, diminuent. Cela est dû à la réduction des degrés de liberté induite par la nouvelle taille de la cellule élémentaire de l'espace des phases déformé.

Chapitre 7

Régularisation du potentiel δ avec une longueur minimale

7.1 Introduction

La présence des divergences ultraviolettes en théorie quantique des champs étaient à l'origine du développement de nombreuses méthodes de régularisation, telles que la régularisation par une coupure "cutoff" [88], la régularisation de Pauli-Villars [111], la régularisation du temps propre de Schwinger [112] et la régularisation dimensionnelle [113]. Tous ces régularisations ont leurs avantages et leurs inconvénients. La méthode de la régularisation par une coupure est la technique la plus connue pour faire face aux infinis. Cette approche de régularisation est simplement basée sur deux étapes : (i) le comportement à haute énergie est modifié par l'introduction d'une coupure, ce qui donne lieu à des quantités finies, et (ii) les paramètres de la théorie sont redéfinis afin d'absorber les divergences qui se produisent lorsque la coupure est supprimée. Ces étapes sont la régularisation et la renormalisation de cette théorie.

Les divergences ultraviolettes et le besoin de renormalisation se produisent non seulement dans la théorie des champs, mais aussi dans les modèles physiques de la mécanique quantique ordinaire si le potentiel est assez singulier. Dans la référence [104], les auteurs ont étudié le potentiel singulier $(-\alpha/r^2)$ en mécanique quantique avec une relation d'incertitude généralisée, et ont montré que ce potentiel devient régulier dans ce formalisme.

Les infinis sont associés aussi avec les états liés du potentiel δ de Dirac à deux et à trois dimensions. Ce potentiel a été récemment inclus dans une plus grande classe de potentiels singuliers dont l'utilité phénoménologique remonte aux premiers temps de la mécanique quan-

tique [115], et les applications ultérieures en physique nucléaire [116], physique atomique [117], physique de la matière condensée [118, 119], physique statistique [120], et la physique des particules [121]. Cependant, il faut adopter une méthode de régularisation afin d'extraire un résultat significatif pour le spectre d'énergie du potentiel δ de Dirac [122, 123, 124].

Le but de ce chapitre est de montrer comment l'introduction d'une relation d'incertitude généralisée régularise les intégrales divergentes associées au spectre d'énergie de la fonction δ de Dirac à deux et à trois dimensions en mécanique quantique non relativiste. Nous allons montrer, en particulier, que la longueur élémentaire inclus dans ces relations peut être interprétée comme une coupure naturelle qui peut régulariser ce potentiel sans la nécessité d'introduire une coupure arbitraire.

7.2 Etats liés et renormalisation en mécanique quantique ordinaire

Par souci de comparaison avec les résultats de la section (3), nous présentons dans cette section un bref aperçu sur la solution de l'équation de Schrödinger à D dimensions pour une particule de masse m en présence du potentiel δ de Dirac

$$\left(\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} - \alpha \delta^D(\hat{\mathbf{x}}) \right) \psi = E\psi, \quad (7.1)$$

où $\delta^D(\hat{\mathbf{x}}) = \prod_{i=1}^D \delta(\hat{x}_i)$, et α est un paramètre positif. Pour transformer l'équation (7.1) à une équation intégrale, nous introduisons l'ensemble complet de vecteurs propres suivant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{p}' |\mathbf{p}'\rangle \langle \mathbf{p}'| = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{x} |\mathbf{x}\rangle \langle \mathbf{x}| = 1,$$

Ainsi, l'équation (7.1) s'écrit

$$\langle \mathbf{p} | \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} | \psi \rangle - \alpha \langle \mathbf{p} | \delta^D(\hat{\mathbf{x}}) \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{x} |\mathbf{x}\rangle \langle \mathbf{x}| \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{p}' |\mathbf{p}'\rangle \langle \mathbf{p}'| \psi \rangle = E \langle \mathbf{p} | \psi \rangle, \quad (7.2)$$

avec $\psi(\mathbf{p}) = \langle \mathbf{p} | \psi \rangle$ et

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{x} \rangle = (2\pi\hbar)^{-\frac{D}{2}} e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{x} \cdot \mathbf{p}},$$

on peut écrire (7.2) de la façon suivante

$$\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - E \right) \psi(\mathbf{p}) - \frac{\alpha}{(2\pi\hbar)^D} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{p}' \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{x} \delta^D(\mathbf{x}) e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{x} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}')} \psi(\mathbf{p}') = 0$$

qui se réduit en

$$(\mathbf{p}^2 + k^2) \psi(\mathbf{p}) - \frac{2m\alpha}{(2\pi\hbar)^D} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\mathbf{p}') d\mathbf{p}' = 0, \quad (7.3)$$

où $k^2 = -2mE$. Pour donner la solution de (7.3), on définit le nombre c comme

$$c = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\mathbf{p}') d\mathbf{p}'. \quad (7.4)$$

Alors, la fonction d'onde, $\psi(\mathbf{p})$, écrite dans l'espace des impulsions, est

$$\psi(\mathbf{p}) = c \frac{2m\alpha}{(2\pi\hbar)^D (\mathbf{p}^2 + k^2)}. \quad (7.5)$$

En insérant l'équation (7.5) dans (7.4), on obtient l'intégrale suivante

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^D} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathbf{p}}{(\mathbf{p}^2 + k^2)} = \frac{1}{\alpha_0}, \quad (7.6)$$

où $\alpha_0 = 2m\alpha$. En coordonnées sphériques, la dernière intégrale s'écrit

$$\frac{\Omega_D}{(2\pi\hbar)^D} \int_0^{+\infty} \frac{p^{D-1} dp}{(p^2 + k^2)} = \frac{1}{\alpha_0}, \quad (7.7)$$

avec $\Omega_D = 2\pi^{\frac{D}{2}}/\Gamma(\frac{D}{2})$. Maintenant, nous allons étudier l'équation (7.7) pour différentes valeurs de D .

Pour $D = 1$, le système quantique n'a pas besoin de régularisation. En effet, en effectuant l'intégrale dans l'équation (2.48), on peut obtenir l'énergie de liaison suivant

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}. \quad (7.8)$$

Pour $D = 2$, on a un problème de divergence. En effet, l'intégrale dans (7.7) diverge quand $p \rightarrow +\infty$. Pour faire face à ce problème, on introduit, pour des grandes valeurs de l'impulsion, une coupure Λ , qui agit comme un régulateur, alors on obtient

$$\frac{1}{4\pi\hbar^2} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{k^2}\right) \simeq \frac{1}{\alpha_0}, \quad (7.9)$$

ce qui donne l'expression de l'énergie

$$E \simeq -\frac{\Lambda^2}{2m} \exp\left(-\frac{4\pi\hbar^2}{\alpha_0}\right). \quad (7.10)$$

Comme l'énergie, E , est une observable physique, alors elle doit être indépendante de Λ . La dépendance de la coupure peut être absorbée dans une redéfinition des paramètres de la théorie, on écrit

$$\frac{1}{\alpha_R} = \frac{1}{\alpha_0} - \frac{1}{4\pi\hbar^2} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right), \quad (7.11)$$

où μ est une échelle de renormalisation arbitraire introduite afin de maintenir l'argument du logarithme sans dimensions. La constante α_R est définie comme une quantité finie lorsque $\Lambda \rightarrow \infty$. Donc, d'après (7.9) et (7.11), on a

$$\frac{1}{4\pi\hbar^2} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{k^2} \right) \simeq \frac{1}{\alpha_R} + \frac{1}{4\pi\hbar^2} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right). \quad (7.12)$$

Maintenant à partir de (7.12) l'énergie de l'état lié est donnée par

$$E \simeq -\frac{\mu^2}{2m} \exp \left(-\frac{4\pi\hbar^2}{\alpha_R} \right). \quad (7.13)$$

Pour $D = 3$, l'intégrale dans (7.7) diverge aussi. On procède donc comme dans le cas $D = 2$. Tout d'abord, on régularise l'intégrale dans (7.7), on obtient l'expression

$$\frac{1}{2\pi^2\hbar^3} \left[\Lambda - k \arctan \left(\frac{\Lambda}{k} \right) \right] = \frac{1}{\alpha_0}, \quad (7.14)$$

puis, on redéfinit le paramètre α_0 comme

$$\frac{1}{\alpha_R} = \frac{1}{\alpha_0} - \frac{\Lambda}{2\pi^2\hbar^3}. \quad (7.15)$$

Passons à la limite $\Lambda \rightarrow \infty$ dans l'équation (7.14) et utilisons (7.15), on obtient l'expression de l'énergie suivante

$$E = -\frac{1}{2m} \left(\frac{4\pi\hbar^3}{\alpha_R} \right)^2. \quad (7.16)$$

Pour $D = 4$, à nouveau l'intégrale (7.7) diverge. La forme régularisée de l'intégrale dans (7.7) donne

$$\frac{1}{16\pi^2\hbar^4} \left[\Lambda^2 - k^2 \ln \left(\frac{\Lambda^2 + k^2}{k^2} \right) \right] = \frac{1}{\alpha_0}. \quad (7.17)$$

Le terme $\Lambda^2/16\pi^2\hbar^4$ dans (7.17) peut être absorbé dans une redéfinition de la constante de couplage. Toutefois, le terme logarithmique ne peut être éliminé de cette manière puisque il dépend intrinsèquement de k . Pour $D > 4$, le même problème se produit.

7.3 Etats liés et renormalisation en mécanique quantique avec une longueur minimale

L'équation de Schrödinger pour une particule de mass m soumise à un potentiel, $V(\mathbf{X})$, en présence d'une longueur élémentaire est

$$\left[\frac{\mathbf{P}^2}{2m} + V(\mathbf{X}) \right] \psi = E\psi, \quad (7.18)$$

dans laquelle les composantes de l'opérateur de position, \mathbf{X} , et d'impulsion, \mathbf{P} , vérifient les relations de commutation (6.37), à savoir ;

$$[\hat{X}_i, \hat{P}_j] = i\hbar \left[\delta_{ij} (1 + \beta \hat{\mathbf{P}}^2) + \beta'_i \hat{P}_i \hat{P}_j \right], \quad (\beta, \beta') > 0. \quad (7.19)$$

Dans la suite de cette section, les paramètres β, β' sont considérés comme des petites quantités de premier ordre, en outre, on va se limiter au cas spécial $\beta' = 2\beta$, discuté dans le chapitre précédent.

Au premier ordre de β , une représentation des opérateurs X_i et P_i satisfaisant l'algèbre de Heisenberg déformée (7.19) en fonction des opérateurs habituels \hat{x}_i et \hat{p}_j , satisfaisant les relations de commutation canoniques de la mécanique quantique ordinaire, est donnée par [94]

$$X_i = x_i, \quad P_i = (1 + \beta \mathbf{p}^2) p_i. \quad (7.20)$$

Notons que seulement lorsque $D = 1$, on doit effectuer la substitution $\beta \rightarrow \frac{\beta}{3}$ dans (7.20) pour satisfaire la relation de commutation

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar (1 + \beta \hat{P}^2). \quad (7.21)$$

Avec la représentation (7.20), l'équation de Schrödinger (7.18) prend la forme suivante

$$\left[\frac{\mathbf{p}^2 + 2\beta \mathbf{p}^4}{2m} + V(\mathbf{x}) \right] \psi = E\psi, \quad (7.22)$$

où on a négligé le terme d'ordre β^2 .

On est maintenant prêts à donner une équation intégrale pour l'équation de Schrödinger déformée (7.22) pour le potentiel $V(X) = -\alpha \delta^D(\mathbf{X})$. Au moyen de la représentation (7.20) et suivant le traitement donné dans la section précédente, on arrive a

$$\psi(\mathbf{p}) = \frac{2m\alpha}{(2\pi\hbar)^D (2\beta \mathbf{p}^4 + \mathbf{p}^2 + k^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\mathbf{p}') d\mathbf{p}'.$$

Ainsi, la fonction d'onde est donnée par

$$\psi(\mathbf{p}) = c \frac{2m\alpha}{(2\pi\hbar)^D (2\beta \mathbf{p}^4 + \mathbf{p}^2 + k^2)}, \quad (7.23)$$

où $c = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\mathbf{p}') d\mathbf{p}'$. L'énergie de l'état lié est extraite de l'expression

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathbf{p}}{(2\beta \mathbf{p}^4 + \mathbf{p}^2 + k^2)} = \frac{(2\pi\hbar)^D}{2m\alpha}. \quad (7.24)$$

Pour $D = 1$, la dernière équation prend la forme

$$\frac{3}{\beta} \int_0^{+\infty} \frac{dp}{p^4 + \frac{3}{2\beta}p^2 + \frac{3}{2\beta}k^2} = \frac{\pi\hbar}{m\alpha}, \quad (7.25)$$

où on a pris en compte la substitution $\beta \rightarrow \frac{\beta}{3}$. Ensuite, utilisons le Résultat [59]

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a)(x^2 + b)} = \frac{\pi}{2(a\sqrt{b} + b\sqrt{a})},$$

où

$$a = \frac{3}{4\beta} \left(\sqrt{1 - \frac{8}{3}\beta k^2} + 1 \right), \quad b = -\frac{3}{4\beta} \left(\sqrt{1 - \frac{8}{3}\beta k^2} - 1 \right),$$

l'équation (7.25) se réduit à

$$\beta k^2 - \left(\sqrt{\frac{2\beta}{3}} + \frac{\hbar}{m\alpha} \right) k + 1 = 0. \quad (7.26)$$

à l'ordre le plus bas en β , l'énergie de l'état lié est donnée par

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2} + \frac{\sqrt{2}m^2\alpha^3}{\sqrt{3}\hbar^3}\sqrt{\beta} - \frac{m^3\alpha^4}{3\hbar^4}\beta + O(\beta^2). \quad (7.27)$$

Le premier terme représente l'énergie de l'état lié de la mécanique quantique ordinaire, tandis que le deuxième et la troisième termes sont les corrections apportées par l'existence d'une longueur minimale.

Pour $D = 2$, on utilise le changement $p^2 = \xi$, donc (7.24) s'écrit

$$\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{d\xi}{k^2 + \xi + 2\beta\xi^2} = \frac{\pi\hbar^2}{m\alpha}. \quad (7.28)$$

Par un calcul élémentaire, l'intégrale dans (7.28) donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{d\xi}{k^2 + \xi + 2\beta\xi^2} &= -\frac{1}{4\sqrt{\frac{1}{4} - 2k^2\beta}} \ln \left(\frac{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - 2k^2\beta}}{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - 2k^2\beta}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2k^2\beta} + O(\beta). \end{aligned} \quad (7.29)$$

La substitution de (7.29) dans l'expression (7.28) conduit au résultat suivant

$$E \simeq -\frac{1}{4m\beta} \exp \left(-\frac{4\pi\hbar^2}{\alpha_0} \right). \quad (7.30)$$

L'énergie (7.30) est similaire à celle obtenue par une coupure, introduite à la main, donnée par (7.10). La coupure ultraviolette, Λ , est simplement inversement proportionnelle à $(\Delta X)_{\min}$.

Pour $D = 3$, on utilise encore le changement $p^2 = \xi$, donc (7.24) s'écrit

$$\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{\xi} d\xi}{2\beta\xi^2 + \xi + k^2} = \frac{\pi^2 \hbar^3}{m\alpha}. \quad (7.31)$$

Au moyen du résultat suivant [59]

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{\xi} d\xi}{a\xi^2 + 2b\xi + c} = \frac{\pi}{\sqrt{2}(b + \sqrt{ac})\sqrt{a}}, \quad (7.32)$$

et à l'ordre dominant du paramètre de déformation β , l'énergie de l'état lié peut être obtenue à partir de (7.31) et (7.32) comme

$$E \simeq - \left(\frac{\sqrt{m\alpha}}{8\pi\hbar^3\beta} \right)^2. \quad (7.33)$$

En comparant avec l'expression (7.16), l'énergie (7.33) ne dépend que des paramètres de l'équation de Schrödinger (7.22) comme il se doit.

Pour $D \geq 4$, l'intégrale dans (7.24) diverge à notre approximation.

Le point principal qui caractérise les expressions (7.30) et (7.33), c'est qu'ils n'ont pas besoin de paramètres arbitraire. En fait, le paramètre de déformation β est inclus initialement dans le formalisme et représente une coupure naturelle de sorte que l'énergie de l'état lié est calculée sans imposer aucune condition supplémentaire.

En conclusion, nous avons considéré le problème du potentiel δ de Dirac à D dimensions dans le cadre de la mécanique quantique avec une relation d'incertitude généralisée impliquant l'existence d'une longueur minimale, en utilisant la technique des équations intégrales. Nous avons utilisé dans les calculs précédents des approximations au premier ordre en β et nous avons considéré le cas particulier $\beta' = 2\beta$. Nos résultats sont en accord avec ceux qui ont été obtenus dans les références [122, 123, 124], où le même problème a été résolu en utilisant la technique de régularisation par une coupure, pour des grandes valeurs de l'impulsion, introduite à la main pour $D \geq 2$.

Les résultats ci-dessus nous amènent à conclure, avec les travaux [106, 114, 104, 125], que la longueur minimale apparaît comme un régulateur naturel pour des potentiels singuliers.

Enfin, rappelons que nous avons utilisé la représentation (7.20) où le paramètre β est pris comme une quantité très petite pour faire face au problème du potentiel δ de Dirac. Il serait

donc intéressant de reconsidérer ce problème avec de nouvelles représentations pour des ordres arbitraires des paramètres β et β' . Cette tâche ne sera pas facile en raison du caractère particulier du potentiel de Dirac en plus des difficultés mathématiques liées à l'introduction de cette algèbre déformée.

Chapitre 8

Conclusion générale

Dans cette thèse, nous avons traité en premier lieu le potentiel de Hulthén à 2D en présence de l'effet Aharonov-Bohm décrit par un champ magnétique sous forme d'une fonction δ de Dirac. On a montré, d'une part, que la présence du champ AB lève la dégénérescence des niveaux d'énergie pour le potentiel de Hulthén. D'autre part, l'intervalle du paramètre de flux magnétique pour lesquels des solutions singulières sont autorisés est modifié par rapport au cas de la diffusion. En outre, le spectre donné dans la référence [27] pour le potentiel de Coulomb en présence de l'effet AB, à la limite Galiléenne, peut être obtenu, comme cas particulier, à partir du spectre présenté ici lorsque le paramètre d'écran est nul. Cette étude est importante vue le développement moderne de la spectroscopie des systèmes à basse dimension.

Dans une deuxième contribution, on a montré que les solutions de l'équation de Schrödinger dépendante du temps pour des potentiels non centraux peuvent être trouvées analytiquement au moyen de la technique des invariants de Lewis et Reisenfeld.

Dans la dernière partie de cette thèse, on a étudié en détail le potentiel attractif $\alpha\delta(\mathbf{x})$ dans le cadre de la mécanique quantique avec une longueur élémentaire développée par Kempf et ses collaborateurs. On a montré que l'introduction d'une relation d'incertitude généralisée régularise les intégrales divergentes associées au spectre d'énergie du potentiel δ de Dirac à deux et à trois dimensions. On a montré, en particulier, que la longueur élémentaire inclus dans ces relations peut être interprétée comme une coupure naturelle qui peut régulariser ce potentiel sans la nécessité d'introduire une coupure arbitraire.

Bibliographie

- [1] L. Hulthén, Ark. Mat. Astron, Fys. **A 28**, 5 (1942).
- [2] S. Flügge, *Practical Quantum Mechanics*, 2nd Ed., Springer, Berlin, 1994, p. 107, vol. I.
- [3] C. R. Hagen, Phys. Rev. Lett. **64**, 503 (1990).
- [4] Y. Aharonov and D. Bohm, Phys. Rev. **115**, 485 (1959).
- [5] N. Ferkous and A. Bounames, Commun. Theor. Phys. **59**, 679 (2013).
- [6] A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman, *Regular and Stochastic Motion*, (Springer, New York, 1981).
- [7] M. C. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*, (Springer, Berlin, 1990).
- [8] H. R. Lewis and W. B. Riesenfeld, J. Math. Phys. **10**, 1458 (1969).
- [9] M. Maamache, A. Bounames, and N. Ferkous, Phys. Rev. A **73**, 016101 (2006).
- [10] N. Ferkous, A. Bounames and M. Maamache, Phys. Scr. **88**, 035001 (2013).
- [11] A. Kempf, G. Mangano and R. B. Mann, Phys. Rev. D **52**, 1108 (1995).
- [12] S. Hossenfelder, Living. Rev. Rel. **16**, 2 (2013).
- [13] N. Ferkous, Phys. Rev. A **88**, 064101 (2013).
- [14] C. R. Hagen, Int. J. Mod. Phys. **A 6**, 3119 (1991).
- [15] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd Ed. J. Wiley & Sons. (1999).
- [16] W. H. Furry and N. F. Ramsey, Phys. Rev. **118**, 623 (1960).
- [17] H. E. Mitler, Phys. Rev. **124**, 940 (1961).
- [18] M. Peshkin, I. Talmi and L. J. Tassie, Ann. Phys. **16**, 426 (1961).
- [19] R. P. Feynman, R. B. Leighton and M. Sands, "*The Feynman Lectures in Physics*" (Addison-Wesley, Reading MA, 1964) Vol. 2, p.15.

- [20] Y. Aharonov and D. Bohm, Phys. Rev. **123**, 1511 (1961).
- [21] M. Peshkin and A. Tonomura, "*The Aharonov-Bohm Effect, Lecture Notes in Physics*". 340, Springer, Berlin, 1989.
- [22] A. Tonomura, T. Matsuda, R. Suzuki, A. Fukuhara, N. Osakabe, H. Umezaki, J. Endo, K. Shinagawa, Y. Sugita and H. Fujiwara, Phys. Rev. Lett. **48**, 1443 (1982).
- [23] A. Tonomura, N. Osakabe, T. Matsuda, T. Kawasaki, J. Endo, S. Yano and H. Yamada, Phys. Rev. Lett. **56**, 792 (1986).
- [24] N. Osakabe, T. Matsuda, T. Kawasaki, J. Endo, A. Tonomura, S. Yano and H. Yamada, Phys. Rev. **A 34**, 815 (1986).
- [25] M. G. Alford and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **62**, 1071 (1989).
- [26] C. R. Hagen, Phys. Rev. **D 48**, 5935 (1993).
- [27] C. R. Hagen and D. K. Park, Ann. Phys. **251**, 45 (1996).
- [28] N. Ferkous and A. Bounames, Phys. Lett. **A 325**, 21 (2004).
- [29] A. Tonomura, Nuovo Cimento B **110**, 571 (1995).
- [30] C. R. Hagen, Phys. Rev. **D 41**, 2015 (1990).
- [31] C. S. Lam, Y. P. Varshni, Phys. Rev. **A 4**, 1874 (1971).
- [32] B. Durand and L. Durand, Phys. Rev. **D 23**, 1092 (1981).
- [33] T. Tietz, J. Chem. Phys. **35**, 1917 (1961).
- [34] K. Szalczewicz, H. J. Mokhorst, J. Chem. Phys. **75**, 5785 (1981).
- [35] G. Malli, Chem. Phys. Lett. **26**, 578 (1981) .
- [36] I. S. Bitensky, V. K. Ferleger, and I. A. Wojciechowski, Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. **B 125**, 201 (1997).
- [37] C. S. Jia, J. Y. Wang, S. He, and L. T. Sun, J. Phys. **A 33**, 6993 (2000).
- [38] P. Pyykko, J. Jokisaari, Chem. Phys. **10**, 293 (1975).
- [39] J. A. Olson and D. A. Micha, J. Chem. Phys. **68**, 4252 (1978).
- [40] A. H. Castro Neto, F. Guinea, N. M. R. Peres, K. S. Novoselov, A. K. Geim, Rev. Mod. Phys. **81**, 109 (2009).
- [41] J. O. Sofo, A.S. Chaudhari, G.D. Barber, Phys. Rev. **B 75**, 153401 (2007) .

- [42] S. Sonde, F. Giannazzo, C. Vecchio, R. Yakimova, E. Rimini, and V. Raineri, *Appl. Phys. Lett.* **97**, 132101 (2010).
- [43] U. Myhrman, *J. Phys. A : Math. Gen.* **16**, 263 (1983).
- [44] E. D. Filho and R.M. Ricotta, *Mod. Phys. Lett. A* **10**, 1613 (1995).
- [45] L. Chetouani, L. Guechi, A. Lecheheb, T. F. Hammann and A. Messouber, *Nuovo Cimento B* **113**, 81 (1998).
- [46] B. Gonul, O. Ozer, Y. Cancelik and M. Kocak, *Phys. Lett. A* **275**, 238 (2000).
- [47] S-W Qian, B-W Huang and Z-Y Gu, *New J. Phys.* **4**, 131 (2002).
- [48] O. Bayrak, G. Kocak and I. Boztosun, *J. Phys. A : Math. Gen.* **39**, 11521 (2006).
- [49] R. L. Greene, C. Aldrich, *Phys. Rev. A* **14**, 2363 (1976).
- [50] S. Haouat and L. Chetouani, *J. Phys. A : Math. Theor.* **40**, 10541 (2007).
- [51] S. M. Ikhdair, *Eur. Phys. J. A* **39**, 307 (2009).
- [52] S. M. Ikhdair and J. Abu-Hasna, *Phys. Scr.* **83**, 025002 (2011).
- [53] D. Agboola, *Phys. Scr.* **80**, 065304 (2009).
- [54] T. Blum, C. R. Hagen and S. Ramaswamy, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 709 (1990).
- [55] D. C. Khandekar and S. V. Lawande, *J. Math. Phys.* **16**, 384 (1975).
- [56] J. G. Hartley and J. R. Ray, *Phys. Rev. D* **25**, 382 (1982).
- [57] P. G. L. Leach , *J. Math. Phys.* **18**, 1608 (1977).
- [58] C. M. A. Dantas , I. A. Pedrosa, and B. Baseia, *Phys. Rev. A* **45**, 1320 (1992).
- [59] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, (Elsevier Inc. 2007, pages : 326, 330).
- [60] H. Hartmann and D. Schuch, *Int. J. Quant. Chem.* **18**, 125 (1980).
- [61] C. Quesne, *J. Phys. A, Math. Gen.* **21**, 3093 (1988).
- [62] S. H. Dong, G. H. Sun, and M. Lozada-Cassou, *Phys. Lett. A* **328**, 299 (2004).
- [63] X. A. Zhang, K. Chen, and Z. L. Duan, *Chin. Phys.* **14**, 42 (2005).
- [64] H. B. Filho and A. N. Vaidya, *Phys. Lett. A* **145**, 69 (1990).
- [65] F. L. Lu, C. Y. Chen, and D. S. Sun, *Chin. Phys.* **14**, 463 (2005).
- [66] M. C. Zhang, G. Q. Huang-Fu, and B. An, *Phys. Scr.* **80**, 065018 (2009).

- [67] M. Aktas, *Int. J. Theor. Phys.* **48**, 2154 (2009).
- [68] A. D. Alhaidari, *J. Phys. A : Math. Gen.* **38**, 3409 (2005).
- [69] F. Yaşuk, C. Berkdemir, and A. Berkdemir, *J. Phys. A : Math. Gen.* **38**, 6579 (2005).
- [70] L. Chetouani, L. Guechi, and T. F. Hammann, *J. Math. Phys.* **33**, 3410 (1992).
- [71] N. Barnea, W. Leidemann, and G. Orlandini, *Nucl. Phys.* **A 693**, 565 (2001).
- [72] H. Hartmann, *Theor. Chim. Acta* **24**, 201 (1972).
- [73] M. C. Zhnag and Z. B. Wang, *Chem. Phys.* **16**, 1863 (2007).
- [74] R. K. Colegrave and M. S. Abdalla, *Opt. Act.* **28**, 495 (1981).
- [75] A. B. Nassar, *Phys. Lett.* **A 106**, 43 (1984).
- [76] N. A. Lemos and C. P. Natividade, *Nuovo Cimento* **B 99**, 211 (1987).
- [77] W. Paul, *Rev. Mod. Phys.* **62**, (1990) 531.
- [78] A. D. Mclachlan, R. D. Gregory and M. A. Ball, *Mol. Phys.* **7**, 119 (1963).
- [79] J. G. Hartley and J. R. Ray, *Phys. Rev.* **A 25**, 382 (1982).
- [80] I. A. Pedrosa, *Phys. Rev.* **D 36**, 1279 (1987) .
- [81] P. G. L. Leach, *J. Phys.* **A 16**, 3261 (1983) .
- [82] R. K. Colegrave and M. S. Abdalla, *J. Phys.* **A 14**, 2269 (1981).
- [83] B. Baseia and D. Brito, *Phys. Rev.* **A 45**, 5308 (1992).
- [84] M. Maamache, *Phys. Rev. A* **52**, 936 (1995) ; M. Maamache, *J. Phys. A : Math. Gen.* **29**, 2883 (1996) ; M. Maamache, *J. Math. Phys* **39**, 161 (1998) ; M. Maamache, *J. Phys. A : Math. Gen.* **31**, (1998) 6849.
- [85] A. A. Makarov, Y. A. Smorodinsky, K. Valiev, and P. Winternitz, *Nuovo Cim.* **A 52**, (1967) 1061.
- [86] S. Haouat, *Commun. Theor. Phys.* **58**, 12 (2012).
- [87] M. Kibler and C. Campiogotto, *Phys. Lett.* **A 181**, 1 (1993).
- [88] Heisenberg, *Ann. d. Phys.* **32**, 20 (1938).
- [89] H. Kragh, *Am. J. Phys.* **63**, 595 (1995).
- [90] M. Bronstein, *Phys. Z. Sowjetunion*, **9**, 140 (1936).
- [91] H. S. Snyder, *Phys. Rev.*, **71**, 38 (1947).

- [92] D. Amati, M. Ciafaloni, and G. Veneziano, Phys. Lett. **B 216**, 41 (1989).
- [93] K. Konishi, G. Paffuti, and P. Provero, Phys. Lett. **B 234**, 276 (1990).
- [94] F. Brau, J. Phys. **A 32**, 7691 (1999).
- [95] D. Bouaziz and N. Ferkous, Phys. Rev. **A 82**, 022105 (2010).
- [96] L. N. Chang, D. Minic, N. Okamura, and T. Takeuchi, Phys. Rev. **D 65**, 125028 (2002) .
- [97] Kh. Nouicer, J. Phys. A : Math. Gen. **39**, 5125 (2006).
- [98] C. Quesne et al, J. Phys. A : Math. Gen. **38**, 1747 (2005).
- [99] Kh. Nouicer, J. Phys. A : Math. Gen. **38**, 10027 (2005).
- [100] U. Harbach and S. Hossenfelder, Phys. Lett. **B 632**, 379 (2006).
- [101] K. Nouicer, Phys. Lett. **B 646**, 63 (2007).
- [102] K. Nouicer, Class. Quantum. Grav. **25**, 075010 (2008).
- [103] Y-W. Kim and Y-J Park, Phys. Lett. **B 655**, 172 (2007).
- [104] D. Bouaziz and M. Bawin, Phys. Rev. **A 76**, 032112 (2007) ; D. Bouaziz, *Mécanique quantique avec un principe d'incertitude généralisé. Application à l'interaction $1/r^2$* , Thèse de Doctorat (2009).
- [105] K. Gottfried, Quantum Mechanics, Vol. 1 : *Fundamentals*, (Academic Press, Inc, New York, 1966), p. 213.
- [106] A. Kempf, J. Phys. **A 30**, 2093 (1997).
- [107] R. Akhoury and Y. P. Yao, Phys. Lett. **B 572**, 37 (2003).
- [108] M. M. Stetsko and V. M. Tkachuk, Phys. Rev. **A 74**, 012101 (2006).
- [109] S. Z. Benczik, *Investigations on the minimal-length uncertainty relation*, PhD Thesis submitted to the Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University (2007).
- [110] A. Kempf, Czech. J. Phys. (Proc. Suppl.) **44**, 11-12, 1041 (1994).
- [111] W. Pauli and F. Villars, Rev. Mod. Phys. **21**, 434 (1949).
- [112] J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).
- [113] G.'t Hooft and M. Veltman, Nucl. Phys. **B 44**, 189 (1972) ; J. Ashmore, Lett. Nuovo Cimento **4**, 289 (1972) ; C.G. Bollini and J. J Giambiagi, Phys. Lett. **B 40**, 566 (1972).
- [114] A. Kempf, J. Math. Phys. **38**, 1347 (1997).

-
- [115] H. Bethe and R. Peierls, Proc. R. Soc. London, Ser. **A** **148**, 146 (1935).
- [116] A. T. Kruppa, K. Varga, and J. Révai, Phys. Rev. C **63**, 064301 (2001), and references therein.
- [117] Yu. Demkov and V. N. Ostrovskii, *Zero-Range Potentials and Their Applications in Atomic Physics* (Plenum, New York, 1989).
- [118] G. F. Koster and J. C. Slater, Phys. Rev. **96**, 1208 (1954).
- [119] S. Doniach and E. H. Sondheimer, *Green's Functions for Solid State Physicists* (Benjamin, Reading, MA, 1974).
- [120] E. H. Lieb and W. Liniger, Phys. Rev. **130**, 1605 (1963).
- [121] C. Thorn, Phys. Rev. **D** **19**, 639 (1979).
- [122] R. M. Cavalcanti, Rev. Bras. Ens. Fis. **21**, 336 (1999).
- [123] S. L. Nyeo, Am. J. Phys. **68**, 571 (2000).
- [124] H. E. Camblong and C. R. Ordóñez, Phys. Rev. **A** **65**, 052123 (2002).
- [125] D. Bouaziz and M. Bawin, Phys. Rev. **A** **78**, 032110 (2008).

Annexe : Articles publiés

Résumé

Ce travail est constitué de trois parties :

Dans la première partie, on a présenté un résumé assez détaillé sur l'effet Aharonov-Bohm du point de vue théorique et expérimental. Ensuite on a considéré l'équation de Pauli pour le potentiel de Hulthén à 2 dimensions en adoptant l'hypothèse d'approximation de terme centrifuge. On a montré, d'une part, que la présence du champ AB lève la dégénérescence des niveaux d'énergie. D'autre part, l'intervalle du paramètre du flux pour lequel des solutions singulière se présentent est modifié comparé au cas de la diffusion.

Dans la deuxième partie, on a donné en premier lieu un aperçu de la théorie de Lewis et Riesenfeld ainsi que son application sur un système physique simple décrit par un oscillateur harmonique de masse et fréquence variables avec le temps. Puis, on a considéré le cas d'une particule soumise à un oscillateur harmonique avec des paramètres dépendants du temps en présence d'un champ magnétique constant. Enfin, on a montré que cette technique est également utile pour donner des solutions analytiques de l'équation de Schrödinger dépendante du temps pour des potentiels non centraux.

Dans la troisième partie, on a commencé par une introduction à la mécanique quantique avec une longueur élémentaire développée par Kempf et ses collaborateurs. Ensuite, on a étudié en détail le potentiel attractif $\alpha\delta(\mathbf{x})$ dans le cadre de cette nouvelle algèbre déformée. On a montré, en particulier, que le paramètre de déformation lié à ce formalisme régularise ce potentiel.

Mots clés : Effet Aharonov-Bohm, systèmes dépendants du temps, longueur minimale.

Abstract

This work is composed of three parts :

In the first part, we have presented a fairly detailed review on the Aharonov-Bohm effect from the theoretical and experimental point of view. Then, we have considered the two dimensional Pauli equation for the Hulthén potential, on the assumption that an effective approximation is used for centrifugal term. We have shown, on the one hand, that the presence of the AB field lifts the degeneracy of the energy levels. On the other hand, the range of the parameter for which the singular solutions are allowed is modified compared to the diffusion case.

In the second part, we first gave an overview of the theory of Lewis et Riesenfeld and its application on a simple physical system described by an harmonic oscillator with time-dependent mass and frequency. Then, we have considered the case of a particle subjected to a harmonic oscillator with time-dependent parameters in the presence of a constant magnetic field. In the end, we have shown that this technique is also useful to give analytical solutions of the time-dependent Schrödinger equation for non central potentials.

In the third part, we have started with an introduction to quantum mechanics with generalized uncertainty relation developed by Kempf and his collaborators. Then, we have studied in detail the attractive potential $\alpha\delta(\mathbf{x})$ in the framework of this new deformed algebra. We have shown, in particular, that the deformation parameter related to this formalism regularises this potential.

Key words : Aharonov-Bohm effect, time-dependent systems, minimal length.