REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOHAMED SEDDIK
BEN YAHIA - JIJEL

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre :
Série :............

MEMOIRE
présenté pour obtenir le diplôme de master
Filière : physique
Spécialité : Physique Théorique

Présentée par

Boudebane Hanane

Intitulé

Solution du problème de l'onde plane gravitationnel par l'approche de la M Q S

Soutenue le : 30/06/2018

Devant le jury:

Président :	DJ bouaziz	Prof.	Uni. MSBY, Jijel
Rapporteur :	C.Nadia	Prof.	Univ. MSBY, Jijel
Examinatrice :	R.Rkioua	Prof.	Univ. MSBY, Jijel

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOHAMED SEDDIK
BEN YAHIA - JIJEL

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre :
Série :...........

MEMOIRE
présenté pour obtenir le diplôme de master
Filière : physique
Spécialité : Physique Théorique

Présentée par

Boudebane Hanane

Intitulé

Solution du problème de l'onde plane gravitationnel par l'approche de la M Q S

Soutenue le : 30/06/2018

Devant le jury:

Président :	DJ bouaziz	Prof.	Uni. MSBY, Jijel
Rapporteur :	C.Nadia	Prof.	Univ. MSBY, Jijel
Examinatrice :	R.Rkioua	Prof.	Univ. MSBY, Jijel

Remerciements

Ce travail a fait l'objet d'un mémoire élaboré physique théorique au Département de physique, faculté des sciences l'université de Jijel.

Au terme de reconnaissance, je remercie tout d'abord, Allah le tout puissant qui m'a donné la force et la patience pour arriver à ce niveau.

Je remercie tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce projet de fin d'étude.

J'exprimerai plus grande gratitude à mon encadreur madame Chine Nadia remercier pour la confiance qu'il m'a accordée et pour ses conseils dans l'orientation et la rédaction de ce mémoire.

Mes remerciements vont ensuite au jury de ma thèse, Mr. Dj. Bouaziz, Professeur à l'université de Jijel, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury, et l'examinateur R . Rekioua ., qui a bien accepté de faire partie du jury pour examiner mon travail.

Je voudrais exprimer ma profonde gratitude envers tous les enseignants de master de physique théorique. En particulier : Prof A. Bounames, prof T. Boudjedaa, prof k. Nouicer, prof S. Haouat, Dr N. Ferkous.

Sans oublier la sympathique Melle Lamri Houria, secrétaire du laboratoire de physique théorique pour son aide et sa disponibilité.

J'adresse mes remerciements à mes parents, mes frères et mes sœurs qui m'ont tout le temps couragé, et toutes mes amies.

Et enfin je remercie tous mes amis de la promotion M2 Physique Théorique.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction générale

une nouvelle approche équivalente à la mécanique quantique standard existe actuelement : il s'agit de la mécanique quantique stochastique (MQS) formulée par G. Parisi et Wu [1]. Basée sur quelques principes simples, cette approche est sourtout appliquée en théorie de champs et plus prticulièrement en théorie de jauge.

Ce formalisme récent-à cheval sur les intégrales de chemins et les équations différentielles stochastiques. Bien que sa formulation soit simple, il n'a pas eu cependant le mérite d'être développé comme le sont actuellement les autres approches. Brièvement le principe sur lequel est bâti la MQS est le suivant : on se donne un système physique qui interagit avec son environnement. Sa variable dynamique devient alors aléatoire et son évolution est décrite par une équation dite de Langevin. C'est ainsi que des quantités physiques s'obtiennent à partir de la solution de cette équation.

A cette formulation, il est ajouté en plus de l'équation de Langevin qui décrit la relation entre la variable et le bruit, une notion plus commode de probabilité (réelle). Cette probabilité est solution d'une équation connue dite de Fokker-Planck (FP). C'est une équation du 1er ordre/temps et qui se ramène à celle de Schrödinger par une simple rotation de Wick.

Par ailleurs dans l'approche de Parisi et Wu la description nécessite l'introduction d'un temps supplémentaire qui est fictif [2]. En prenant la $lim \longrightarrow \infty$, ce temps fictif permet du point de vue statistique de trouver un certain équilibre. En principe, les résultats de la MQ habituelle doivent émerger naturellement puisque à l'équilibre la probabilité prend la forme standard de Feynman de poids en $exp(Action)$.

En mécanique quantique non relativiste, nous connaissons seulement deux articles [3] et [4] où des applications ont été faites pour ce formalisme stochastique.

Il s'agit de la détermination exacte de l'amplitude de transition pour des actions uniquement quadratiques. C'est ainsi que les cas de la particule libre, soumise à une force harmonique et à un champ magnétique constant ont été traités respectivement dans les espaces de phases et de configurations. Le cas relatif à la variable de Grassmann a été en outre considéré.

Pour les cas non exacts nécessitant un traitement perturbatif, Nakazato à donné la méthode.

Dans ce memoire, nous allons refaire les calculs déjà existants dans la littérature [11], il s'agit du problème d'une particule relativiste, sans spin régie donc par l'équation de Klein Gordon en mouvement dans un champ gravitationnel assez faible.

En l'absence de la gravitation, la métrique $\eta_{\mu\nu}$ est euclidienne et lorsque la gravitation est assez faible la métrique est dans ce cas en $1^{ère}$ approximation :

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(nx) \tag{1.1}$$

et

$$g^{\mu\nu}(x) = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}(nx) \tag{1.2}$$

où h considéré comme une petite perturbation par rapport à la métrique plate de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$, les termes d'ordre $h^2_{\mu\nu}$, $h^3_{\mu\nu}$, ... sont négligés ($h_{\mu\nu} \ll 1$).

Cette perturbation est choisie de forme simple. Elle est fonction uniquement du produit nx où n et x sont respectivement des quadri-vecteurs relatifs à l'onde et la position de la particule. Le quadri-vecteur onde n étant tel que

$$n^2 = 0$$

De plus, il est supposé par ailleurs que la forme de h est la suivante

$$h_{\mu\nu}(n.x) = a_{\mu\nu} f(n.x) \tag{1.3}$$

où f est une fonction arbitraire de la variable .En plus les élément de la matrice a $4 * 4$ satisfont à

$$n^{\mu}a_{\mu\nu} = n^{\nu}a_{\mu\nu} = 0, \tag{1.4}$$

c-à-d :

$$n^{\mu}h_{\mu\nu}(n.x) = n^{\nu}h_{\mu\nu}(n.x) = 0, \tag{1.5}$$

nous supposons que le tenseur $h_{\mu\nu}$ est symétrique

$$h_{\mu\nu}(n.x) = h_{\nu\mu}(n.x). \tag{1.6}$$

Ce mémoire est organisé comme suit :

Un premier chapitre contient une introduction sur le travail

Le second chapitre nous donnons la formulation de cette nouvelle approche qu'est la mécanique quantique stochastique (MQS) [3].

Le troisème chapitre 3, nous montrons à partir des équations de Langevin comment calculer la fonction de Green relative à une particule de KG (spin 0) en utilisant la formulation du propagateur par la MQS donnée par [3]. Grâce aux caractéristiques de l'onde gravitationnelle plane, le traitement perturbatif [4] se simplifie énormément. Avec quelques itérations l'action ainsi que le facteur de fluctuation sont déterminés. Le calcul est effectué pour une particule relativiste soumise à l'action du champ d'une onde plane gravitationnelle .

Le dernier chapitre constitue la conclusion générale de ce travail

Chapitre 2

Formalisme de la mécanique stochastique

Dans ce chapitre, nous présentons le fondement statistique de l'approche de la mécanique stochastique

2.1 Les équations de Langevin et Fokker-planck

2.1.1 Equation de Langevin

L'équation de base de la mécanique stochastique est l'équation de Langevin. C'est une équation différentielle au premier ordre par rapport au temps τ

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = f(x(\tau)) + \eta(\tau), \tag{2.1}$$

où $\eta(\tau)$ est une variable aléatoire qu'on appelle bruit.

Le bruit η est choisi blanc pour les deux propriétés suivantes :

a- moyenne nulle

$$\langle \eta(\tau) \rangle = 0, \tag{2.2}$$

b- et le produit de corrélation égal à une fonction de Dirac δ

$$\langle \eta(\tau)\eta(\tau')\rangle = \Omega\delta(\tau-\tau'), \tag{2.3}$$

La solution de l'équation de Langevin (2.1) est simple

$$x(\tau) = x_0 + \int_0^\tau d\tau' f(x(\tau')) + \int_0^\tau d\tau' \eta(\tau'). \tag{2.4}$$

elle est évidement fonction du bruit.

Nous avons choisi comme condition initiale $x(0) = x_0$ à l'instant $\tau = 0$.

La moyenne se réduit à

$$\langle x(\tau)\rangle = x_0 + \int_0^\tau d\tau' \langle f(x(\tau'))\rangle. \tag{2.5}$$

- Rappelons que la moyenne d'une grandeur $F(x(\tau))$ est la suivante :

$$\langle F(x(\tau))\rangle = \int \mathcal{D}\eta F(x(\tau)) \exp\left[\frac{-1}{2\Omega}\int \eta^2 d\tau\right], \tag{2.6}$$

où

$$\mathcal{D}\eta = \prod_{i=1}^{N} d\eta(\tau_i). \tag{2.7}$$

Avec cette définition montrons que $\langle \eta(\tau)\rangle = 0$.

En effet, utilisons la procédure de la source $j(\tau)$ en revenant à la définition de la moyenne

$$\left\langle \exp\left[\int j(\tau)\eta(\tau)d\tau\right]\right\rangle = \int \mathcal{D}\eta \exp\left[\int j(\tau)\eta(\tau)d\tau\right] \exp\left[\frac{-1}{2\Omega}\int \eta^2 d\tau\right]. \tag{2.8}$$

Notons que

$$-\frac{1}{2\Omega}\eta^2 + j\eta = -\frac{1}{2\Omega}(\eta-\Omega j)^2 + \frac{\Omega}{2}j^2, \tag{2.9}$$

et effectuons le changement $\eta' \longrightarrow \eta$ défini par

$$\eta' = \eta - \Omega j. \tag{2.10}$$

Comme la mesure $\mathcal{D}\eta$ reste inchangée

$$\mathcal{D}\eta' = \mathcal{D}\eta, \tag{2.11}$$

la moyenne se calcule (2.8)

$$\left\langle \exp\left[\int j(\tau)\eta(\tau)d\tau\right]\right\rangle = \exp\left[\frac{\Omega}{2}\int j^2(\tau)d\tau\right] \int \mathcal{D}\eta' \exp\left[-\int \frac{1}{2\Omega}\eta'^2 d\tau\right]$$

$$= \exp\left[\frac{\Omega}{2}\int j^2(\tau)d\tau\right] . \tag{2.12}$$

Faisons agir l'opérateur $\frac{\delta}{\delta j(s)}$ sur la dernière équation

$$\left\langle \eta(s)\exp\left[\int j(\tau)\eta(\tau)d\tau\right]\right\rangle = \Omega j(s)\exp\left[\frac{\Omega}{2}\int j^2(\tau)d\tau\right]. \tag{2.13}$$

Fixons $j = 0$, nous avons

$$\langle \eta(s)\rangle = 0. \tag{2.14}$$

Faisons agir une 2ème fois l'opérateur $\frac{\delta}{\delta j(\omega)}$ sur l'égalité ci-dessus, et posons encore $j = 0$, nous aboutissons à

$$\langle \eta(s)\eta(\omega)\rangle = \Omega\delta(s-\omega). \tag{2.15}$$

Un bruit blanc est caractérisé par les deux propriétés(2.14), (2.15).

Montrons maintenant comment obtenir l'équation de Fokker-Planck.

2.1.2 L'équation de Fokker-Planck

Utilisons l'équation de Langevin (2.1) et sa solution (2.4), ainsi que la moyenne de la grandeur $F(x(\tau))$ donnée par l'équation (2.6). Introduisons la probabilité $P(x,\tau)$ de trouver la particule à la position x et à l'instant τ pour définir d'une façon standard la moyenne

$$\langle F(x(\tau))\rangle = \int dx F(x)P(x,\tau) \tag{2.16}$$

avec bien sûr la condition de normalisation

$$\int dx P(x,\tau) = 1. \tag{2.17}$$

Cette représentation a pour principal avantage de manipuler une seule intégrale au lieu de plusieurs (infinité) d'intégrales.

Cette probabilité a une expression égale à

$$P(x,\tau) = \langle \delta(x(\tau)-x)\rangle . \tag{2.18}$$

En effet,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} dx F(x) P(x,\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx F(x) \left\langle \delta(x(\tau)-x)\right\rangle \\ &= \int dx F(x) \int \mathcal{D}\eta \delta(x(\tau)-x) \exp\left[\frac{-1}{2\Omega}\int \eta^2 d\tau\right] \\ &= \iint dx \mathcal{D}\eta F(x)\delta(x(\tau)-x)\exp\left[\frac{-1}{2\Omega}\int \eta^2 d\tau\right]. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Grâce à l'identité suivante

$$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a). \tag{2.20}$$

l'équation précédente (2.19) devient

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} dx F(x) P(x,\tau) &= \iint dx \mathcal{D}\eta F(x(\tau))\delta(x(\tau)-x)\exp\left[\frac{-1}{2\Omega}\int \eta^2 d\tau\right] \\ &= \int \mathcal{D}\eta F(x(\tau)) \exp\left[\frac{-1}{2\Omega}\int \eta^2 d\tau\right] \int dx \delta(x(\tau)-x) \\ &= \int \mathcal{D}\eta F(x(\tau)) \exp\left[\frac{-1}{2\Omega}\int \eta^2 d\tau\right] \\ &= \left\langle F(x(\tau))\right\rangle. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Montrons maintenant que $P(x,\tau)$ obéit à l'équation de Fokker-Planck.

Pour cela calculons d'abord

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial P(x,\tau)}{\partial \tau}\right|_{x\ fix\acute{e}} &= \frac{\partial}{\partial \tau}\left\langle \delta(x(\tau)-x)\ \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial x(\tau)}{d\tau}\frac{\partial}{\partial x(\tau)}\delta(x(\tau)-x)\right\rangle \\ &= \left\langle f\left[x(\tau)\right) + \eta(\tau)\right] \frac{\partial}{\partial x(\tau)}\delta(x(\tau)-x) \right\rangle \\ &= -\frac{\partial}{\partial x}\left\langle f(x(\tau))\delta(x(\tau)-x)\right\rangle - \frac{\partial}{\partial x}\left\langle \eta(\tau)\delta(x(\tau)-x)\right\rangle, \end{aligned} \tag{2.22}$$

où la propriété suivante a été utilisée

$$f(x)\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-a) = -f(x)\frac{\partial}{\partial a}\delta(x-a), \tag{2.23}$$

Le premier terme de l'équation (2.22) est aussi égal

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left\langle f(x(\tau))\delta(x(\tau)-x)\right\rangle = -\frac{\partial}{\partial x} f(x) P(x,\tau), \tag{2.24}$$

où la relation a été utilisée

$$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a). \tag{2.25}$$

Reste à calculer le deuxième terme $\left[-\frac{\partial}{\partial x}\langle\eta(\tau)\delta(x(\tau)-x)\ \rangle\right]$ de l'équation (2.22).

Il faut l'exprimer en fonction de la probabilité $P(x,\tau)$.

Notons que $\delta(x(\tau)-x)$ dépend de $\eta(\tau)$, puisque la solution d'équation de Langevin $x(s)$ est une fonction du bruit.

Si nous changeons $\delta(x(\tau)-x) \longrightarrow G(\eta(\tau))$, et introduisons la procédure de la source

$$\langle \exp\left[j(\tau)\eta(\tau)ds\right] G(\eta(\tau))\rangle = \exp\left[\frac{\Omega}{2}\int j^2(\tau)d\tau\right]\langle G(\eta(\tau)+\Omega j(\tau))\rangle\,. \tag{2.26}$$

et faisons agir l'opérateur $\left.\frac{\delta}{\delta j(\omega)}\right|_{j=0}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\langle\eta(\omega)G(\eta(\tau))\rangle &= \Omega\left\langle\delta(\omega-\tau)\frac{\partial\ G(\eta(\tau))}{\partial\eta(\tau)}\right\rangle \\
&= \Omega\left\langle\frac{\partial\eta(\tau)}{\partial\eta(\omega)}\frac{\partial\ G(\eta(\tau))}{\partial\eta(\tau)}\right\rangle \\
&= \Omega\left\langle\frac{\partial\ G(\eta(\tau))}{\partial\eta(\omega)}\right\rangle,
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\langle\eta(\tau)\delta(x(\tau)-x)\rangle &= \frac{\partial}{\partial x}\Omega\left\langle\frac{\partial x(\tau)}{\partial\eta(\tau)}\frac{\partial\ \delta(x(\tau)-x)}{\partial x(\tau)}\right\rangle \\
&= -\Omega\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\langle\ \delta(x(\tau)-x)\frac{\partial x(\tau)}{\partial\eta(\tau)}\right\rangle.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Or la solution de l'équation de Langevin est

$$x(\tau) = x_0 + \int_0^\tau d\tau' f(x(\tau')) + \int_0^\tau d\tau'\eta(\tau'), \tag{2.29}$$

sa dérivée par rapport au bruit donne

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x(\tau)}{\partial \eta(\tau)} &= \int_0^\tau d\tau' \frac{\partial f(x(\tau'))}{\partial \eta(\tau)} + \int_0^\tau d\tau' \frac{\partial \eta(\tau')}{\partial \eta(\tau)} \\
&= \theta(\tau' - \tau)\Big|_0^\tau \\
&= \theta(0) = 1/2,
\end{aligned} \tag{2.30}$$

le terme $\int_0^\tau d\tau' \frac{\partial f(x(\tau'))}{\partial \eta(\tau)}$ est nul à cause du principe de causalité

Alors il apparaît une dérivée du deuxième ordre dans (2.28)

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle \eta(\tau)\delta(x(\tau) - x)\rangle = -\frac{\Omega}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x,\tau), \tag{2.31}$$

Finalement à partir de (2.22) , (2.24)et (2.31) nous avons

$$\left.\frac{\partial P(x,\tau)}{\partial \tau}\right|_{x\ fix\acute{e}} = -\frac{\partial}{\partial x} f(x) P(x,\tau) + \frac{\Omega}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x,\tau). \tag{2.32}$$

qui est l'équation de Fokker-Planck.

La ressemblance avec l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \tag{2.33}$$

est évidente si on fait subir au temps une rotation de Wick

$$\tau \longrightarrow -i\tau, \tag{2.34}$$

avec les changements

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega = \dfrac{\hbar}{m} \\ f(x) = 0 \end{array} \right. . \tag{2.35}$$

2.2 Mécanique stochastique de Parisi-Wu

Après avoir donné un aperçu comment générer une équation probabiliste de Fokker-Planck à partir d'une équation classique (Langevin) et montrer le lien existant avec l'équation de Schrödinger nous allons étendre le formalisme au cas où nous avons affaire à un champ $\xi(x)$ ou tout simplement une variable $x(\tau)$.

Cette extension ou méthode de quantification est dûe à Parisi et Wu.

Succinctement la formulation consiste à

- associer au temps réel τ un temps u fictif. La variable dynamique devient alors une fonction de deux variables : $x(\tau) \rightarrow x(\tau, u)$.

- régir l'évolution de cette variable au moyen de ce temps fictif u L'évolution est maintenant décrite par l'équation de Langevin

$$\frac{\partial}{\partial u} x(\tau, u) = f(x(\tau, u)) + \eta(\tau, u), \tag{2.36}$$

avec

$$f(x(\tau, u)) = i \frac{\delta S}{\delta x(\tau, u)}, \tag{2.37}$$

où S représente l'action relative au système et $\eta(\tau, u))$ un bruit choisi encore blanc à cause de ses deux propriétés :

a- moyenne nulle

$$\langle \eta(\tau, u) \rangle = 0. \tag{2.38}$$

b- le produit de corrélation égal au produit de deux fonctions δ

$$\langle \eta(\tau, u) \eta(\tau', u') \rangle = \Omega \delta(\tau - \tau^{'}) \delta(u - u'). \tag{2.39}$$

La moyenne $\langle (*) \rangle$ se calcule comme d'habitude : c'est une somme sur tous les bruits possibles que nous affectons d'un poids gaussien

$$\langle (*) \rangle = \int D\eta \ (*) \exp \left[\frac{-1}{2\Omega} \int \eta^2(\tau, u) d\tau du \right], \Omega = 2 \tag{2.40}$$

Sous forme discrète

$$\langle (*) \rangle = \lim_{N \to \infty} \mathcal{N} \int \prod_n^N d\eta \left(\tau_n, u_n \right) \exp \left[\frac{-1}{2\Omega} \sum_n^N \varepsilon \sigma \eta^2(\tau_n, u_n) \right], \tag{2.41}$$

$\mathcal{N}$ étant une constante fixée de façon à avoir $\langle 1 \rangle = 1$.

- pour $u \longrightarrow \infty$, nous obtenons alors les quantités physiques de la mécanique quantique.

- La moyenne en mécanique quantique se définit par

$$\langle x(\tau_1)x(\tau_2)\rangle = \frac{\langle x_f, \tau_f \mid T(x(\tau_1)x(\tau_2)) \mid x_i, \tau_i\rangle}{\langle x_f, \tau_f \mid x_i, \tau_i\rangle}, \tag{2.42}$$

qui est exactement la moyenne en mécanique stochastique à l'équilibre

$$\lim_{u \longrightarrow \infty} \langle x(\tau_1, u)x(\tau_2, u)\rangle = \frac{\langle x_f, \tau_f \mid T(x(\tau_1)x(\tau_2)) \mid x_i, \tau_i\rangle}{\langle x_f, \tau_f \mid x_i, \tau_i\rangle} \tag{2.43}$$

Cette moyenne peut être encore définie via l'introduction d'une probabilité $P[x, u]$,

$$\langle x(\tau_1, u)x(\tau_2, u)\rangle = \int_{x_i, x_f} Dx x(\tau_1)x(\tau_2)P[x, u], \tag{2.44}$$

$$x(\tau_f) = x_f, \quad x(\tau_i) = x_i, \tag{2.45}$$

et cette probabilité P est solution de l'équation habituelle de Fokker- Plank, mais cette fois ci généralisée.

$$\frac{\partial}{\partial u} P(x, u) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \frac{\delta}{\delta x(\tau)} \left(\frac{\delta}{\delta x(\tau)} - i \frac{\delta S}{\delta x(\tau)} \right) P(x, u), \tag{2.46}$$

Comme auparavant la normalisation est maintenant

$$\langle 1 \rangle = \int_{\tau_a}^{\tau_b} Dx P(x, u) = 1. \tag{2.47}$$

Il est clair que à la limite $u \to \infty$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} P(x, u) &= 0 \\ P &= e^{iS} \end{aligned} \tag{2.48}$$

A la limite d'équilibre ($u \to \infty$), la fonction de corrélation (2.44) devient exactement le propagateur de Feynman

$$\begin{aligned} \lim_{u \longrightarrow \infty} \langle x(\tau_1, u)x(\tau_2, u)\rangle &= \frac{\displaystyle\int Dx x(\tau_1)x(\tau_2)e^{iS}}{\displaystyle\int D_x e^{iS}} \\ &= \langle 0 | T x(\tau_1)x(\tau_2) | 0 \rangle . \end{aligned} \tag{2.49}$$

Pour utiliser le formalisme de la mécanique stochastique en mécanique quantique standard, nous devons l'adapter. Montrons comment déterminer par exemple le propagateur.

2.3 Formulation stochastique du propagateur

Nous savons qu'en mécanique quantique, l'amplitude de transition ou propagateur contient toutes les informations sur la dynamique d'un système. Sa détermination est donc essentielle.

Le but de ce chapitre est de voir comment le détérminer par la mécanique quantique stochastique (SQM) de Parisi et Wu.

Donnons la formulation stochastique pour calculer le propagateur.

Relions d'abord l'amplitude de transition $\langle x_f, \tau_f | x_i, \tau_i \rangle$ à la valeur moyenne de l'hamiltonien H [3].

Considérons d'abord un vecteur d'état de Heisenberg vérifiant

$$|x_i, \tau_i\rangle = T \exp\left[i \int_{\tau_0}^{\tau_i} H(\tau) d\tau\right] |x_i, \tau_0\rangle , \tag{2.50}$$

ou $H(\tau)$ est l'hamiltonien. qui régit la dynamique du système.

Dérivons par rapport au temps τ, nous obtenons l'équation d'évolution

$$\frac{\partial}{\partial \tau_i} |x_i, \tau_i\rangle = iH(\tau_i) |x_i, \tau_i\rangle . \tag{2.51}$$

En multipliant à gauche par le bra $\langle x_f, \tau_f|$

$$\frac{\partial}{\partial \tau_i} \ln \langle x_f, \tau_f \mid x_i, \tau_i\rangle = i \frac{\langle x_f, \tau_f| H(\tau_i) |x_i, \tau_i\rangle}{\langle x_f, \tau_f \mid x_i, \tau_i\rangle}, \tag{2.52}$$

et en intégrant, l'amplitude se calcule

$$\langle x_f, \tau_f \mid x_i, \tau_i\rangle = c \exp\left[i \int^{\tau} \lim_{u \longrightarrow \infty} \langle H(\tau_i, u)\rangle \, d\tau_i\right] . \tag{2.53}$$

Nous voyons qu'elle se calcule en déterminant la moyenne stochastique $\langle H(\tau_i, u)\rangle$. La constante c étant indépendante de τ_i que nous fixons par la condition

$$\lim_{\lambda \longrightarrow 0} \langle x_f, \tau_f \mid x_i, \tau_i\rangle = \delta(x_f - x_i), \qquad \lambda = (\tau_f - \tau_i) . \tag{2.54}$$

Résumons la procédure :

Associons maintenant à l'opérateur hamiltonien $\hat{H}$ un hamiltonien classique. Effectuons d'abord la séparation suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_{cl} + x_Q \\ p = p_{cl} + p_Q \end{array} \right. , \tag{2.55}$$

L'hamiltonien $H(\tau, u)$ suivant [3] se décompose de deus parties

$$H(\tau, u) = H_{cl}(\tau, u) + H_Q(\tau, u). \tag{2.56}$$

-l'une classique (indépendant du bruit) fonction uniquement du chemin classique

- et l'autre qui s'exprime en fonction des chemins non classique (déviation) à cause des bruits.

Alors la moyenne de l'hamiltonien $H(s, u)$ est comme suit

$$\langle H(\tau, u)\rangle = \langle H_{cl}(\tau)\rangle + \langle H_Q(\tau, u)\rangle . \tag{2.57}$$

- le premier terme est une partie classique indépendante du temps fictif u est reliée à l'action classique (calculée suivant le chemin classique)

$$\frac{\partial S_{cl}}{\partial \tau_i} = H_{cl}(\tau_i). \tag{2.58}$$

- et le deuxième terme contient des déviations à cause des bruits qui ont dévier la particule de sa trajectoire classique. En principe ce terme donne un facteur dit de fluctuation.

Le propagateur est alors égal à

$$\langle x_f, \tau_f \mid x_i, \tau_i\rangle = c \exp\left[iS_{cl}\right] \exp\left[i \int^{\tau_i} \lim_{u \longrightarrow \infty} \langle H_Q(\tau_i, u)\rangle \, d\tau_i\right]. \tag{2.59}$$

En conclusion, la détermination du propagateur passe par le calcul

- de la partie classique en utilisant uniquement le chemin classique

- et de la partie relative aux fluctuations quantiques $\langle H_Q(\tau_i, u)\rangle$ nécessite la connaissance des chemins (dépendants des bruits) solution des équation de Langevin.

Pour des actions quadratiques, cette moyenne $\langle H_Q(\tau_i, u)\rangle$ a été calculée [3]. C'est ainsi que les cas relatifs à la particule libre, soumise à une force harmonique ou à un champ magnétique ont été considérés exactement en utilisant l'espace des configurations et l'espace des phases. Le cas où la variable est de type Grassmman a été considéré pour calculer le facteur de fluctuation.

Chapitre 3

Propagateur d'une particule de Klein Gordon dans le champ d'une onde gravitationnelle plane

Notre but dans ce chapitre, est de calculer la fonction de Green pour une particule scalaire (spin 0) relativiste chargée soumise à l'action du champ de l'onde gravitationnelle plane par l'utilisation de la méthode de quantification stochastique de Parisi-Wu (SQM) [1] [2], en suivant la référence [11]

Pour une particule de KG, en présence d'un champ gravitationnel faible, la fonction de Green $\Delta(x_b, x_a)$ doit être solution de l'équation

$$\left[\left(i\partial_\mu - i\frac{1}{2}h_{\mu\nu}(k.x)\partial^\nu\right)^2 - m^2\right] G(x_b, x_a) = \delta^4(x_b - x_a). \tag{3.1}$$

Avec un temps propre λ, $\Delta(x_b, x_a)$ peut être représentée sous la forme d'une intégrale

$$\Delta(x_b, x_a) = -i\int_0^\infty d\lambda \exp\left[-im^2\lambda\right] K(x_b, x_a; \lambda), \tag{3.2}$$

faisant intervenir un noyau K ou propagateur dont nous proposons de le calculer içi.

Au chapitre 2, il a été montré que l'expression du propagateur à calculer

$$\langle x_f, \tau_f \mid x_i, \tau_i\rangle = c\exp\left[iS_{cl}\right]\exp\left[i\int_0^\tau \lim_{u\longrightarrow\infty}\langle H_Q(\tau_i, u)\rangle\, d\tau_i\right], \tag{3.3}$$

passe par la détermination de la partie classique et de la partie relative aux fluctuations quantiques $\langle H_Q(\tau_i, u)\rangle$.

Commençons par la partie classique.

3.0.1 Calcul de l'action classique $\mathbf{S}_{cl}$.

L'hamiltonien qui régit le mouvement de la particule de spin 0 est

$$H = -p^2(\tau_i, u) + p(\tau_i, u)\, ap(\tau_i, u)\, F(nx). \tag{3.4}$$

et l'action est la suivante

$$S_{cl} = -\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[p_{cl}(\tau)\frac{dx(\tau)}{d\tau} - p_{cl}^2(\tau_i, u) + p_{cl}(\tau_i, u)\, ap_{cl}(\tau_i, u)\, F(nx_{cl})\right] \tag{3.5}$$

Dans toute la suite nous designons par nx par ξ

Soit maintenaut la trajectoire classique d'équation x_d. Cette équation se détermine par la deux équations d'Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{p}_{cl}^{\mu} &= \frac{\partial H}{\partial x^{\mu}} = n^{\mu}\frac{dF(nx)}{d(nx)}(p_{cl}.a.p_{cl}), & (3.6)\\ \dot{x}_{cl}^{\mu} &= -\frac{\partial H}{\partial p^{\mu}} = 2p_{cl}^{\mu} - 2F(nx)(a.p_{cl})^{\mu}. & (3.7) \end{aligned}$$

En éliminant l'impulsion, respectivement

- Alors, l'équation qui donne la trajectoire classique est

$$-2\ddot{x}_{cl} - (a\ddot{x}_{cl} + \ddot{x}_{cl}a)\left[F(nx)\right]_{\xi=nx_{cl}} - (a\dot{x}_{cl} - \dot{x}_{cl}a)(n\dot{x}_{cl})\frac{\partial\left[F(nx)\right]_{\xi=nx_{cl}}}{\partial\xi}$$

$$+(\dot{x}_{cl}a\dot{x}_{cl})\, n\frac{\partial\left[F(nx)\right]_{\xi=nx_{cl}}}{\partial\xi} = 0, \tag{3.8}$$

Avec les conditions aux limites $x(\tau_f) = x_f$, $x(\tau_i) = x_i$.

Multiplions par n^{μ} les deux équations (3.6) et (3.7), alors

$$\left\{\begin{array}{l} n\dfrac{dx_{cl}}{d\tau} = 2np_{cl}(\tau) \\ \\ \dfrac{d}{d\tau}(np_{cl}(\tau)) = 0 \end{array}\right. , \tag{3.9}$$

à partir de ces deux dernières équations on peut trouver la relation suivante

$$np_{cl}(\tau) = \frac{\xi(\tau) - \xi(0)}{2\tau}, \tag{3.10}$$

avec $\xi(\tau) = nx(\tau)$ *et* $\xi(0) = nx(0)$

Multiplions par P^μ l'équation (3.6)

$$\begin{aligned} \dot{p}^{\mu}_{cl} P_{\mu cl} &= n^\mu p_\mu \frac{dF(nx)}{d(nx)} (p_{cl} a p_{cl}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d(nx_{cl})}{d\tau} \frac{dF(nx)}{d(nx_{cl})} (p_{cl} a p_{cl}), \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\dot{p}^{\mu}_{cl} P_{\mu cl} = \frac{1}{2} \frac{dF(nx)}{d\tau} (p_{cl} a p_{cl}), \tag{3.12}$$

de (3.6) et (3.7), on a

$$\frac{d}{d\tau} (p_{cl}(\tau) a p_{cl}(\tau)) = 0 \tag{3.13}$$

$$p_{cl}(\tau) a p_{cl}(\tau) = D, \tag{3.14}$$

où D est une constante. Alors, nous trouvons un résultat simple pour l'équation (3.12)

$$2pdp = dF(nx)(p_{cl} a p_{cl}). \tag{3.15}$$

Integrons cette dernière équation nous arrivons à

$$p^2 - F(nx) p_{cl} a p_{cl} = C$$

où C est encore un autre constant.

Integrons encore cette dernière équation entre τ_i et τ, et utilisons les relation (3.6) et (3.7) ainsi que les propriétés de l'onde gravitationnelle plane $n^2 = 0$ et $na = 0$, alors, nous pouvons trouver pour p_{cl} l'expréssion suivante

$$p_{cl} = p_i + n \frac{p_i a p_i}{2np_i} (F(nx(\tau)) - F(nx(\tau_i))) \tag{3.16}$$

avec $P_i = p(\tau_i)$

Remplacons ce résultat dans (3.7), il vient successivement

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_{cl}^{\mu} &= 2p_{cl}^{\mu} - 2F(nx)(ap_{cl})^{\mu} \\
&= 2p_i + 2n\frac{p_i a p_i}{2np_i}\left(F(nx(\tau)) - F(nx(\tau_i))\right) \\
&\quad -2F(nx)(ap_{cl})^{u} \\
&= 2p_i + 2n\frac{p_i a p_i}{2np_i}\left(\frac{dA(nx_{cl}(\tau))}{d(nx)} - \frac{dA(nx_{cl}(\tau_i))}{d(nx(\tau_i))}\right) \\
&\quad -2\frac{dA(nx_{cl}(\tau))}{d(nx)}(ap_{cl})^{\mu}
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

avec $F(nx(\tau)) = \dfrac{dA(nx(\tau))}{d(nx)}$, utilisons la relation (3.7), il vient

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_{cl}^{\mu} &= 2p_i + 2n\frac{p_i a p_i}{2np_i}\left(\frac{dA(nx_{cl}(\tau))}{2npd\tau} - \frac{dA(nx_{cl}(\tau_i))}{d(nx(\tau_i))}\right) \\
&\quad -\frac{dA(nx_{cl}(\tau))}{npd\tau}(ap_{cl})^{\mu},
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

integrons cette dernière équation nous arrivons à

$$
\begin{aligned}
x_{cl}^{\mu}(\tau) &= x_{cl}^{\mu}(\tau_i) + 2p_i(\tau - \tau_i) \\
&\quad +2n\frac{(p_i a p_i)}{(2np)^2}\left(A(nx_{cl}(\tau)) - A(nx_{cl}(\tau_i)) - 2np\frac{dA(nx_{cl}(\tau_i))}{d(nx(\tau_i))}(\tau - \tau_i)\right) \\
&\quad -\frac{(ap_i)}{np}\left(A(nx_{cl}(\tau)) - A(nx_{cl}(\tau_i))\right).
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

Nous avons pour $\tau = \tau_f$

$$
\begin{aligned}
x_{cl}^{\mu}(\tau_f) &= x_{cl}^{\mu}(\tau_i) + 2p_i(\tau_f - \tau_i) \\
&\quad +2n\frac{(p_i a p_i)}{(2np)^2}\left(A(nx_{cl}(\tau_f)) - A(nx_{cl}(\tau_i)) - 2np\frac{dA(nx_{cl}(\tau_i))}{d(nx(\tau_i))}(\tau_f - \tau_i)\right) \\
&\quad -\frac{(ap_i)}{np}\left(A(nx_{cl}(\tau_f)) - A(nx_{cl}(\tau_i))\right),
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

ou encore

$$\begin{aligned}\Delta x &= x_{cl}^{\mu}(\tau_f) - x_{cl}^{\mu}(\tau_i) \\ &= 2p_i\Delta\tau + 2n\frac{(p_i a p_i)}{(2np)^2}\left(A(nx_{cl}(\tau_f)) - A(nx_{cl}(\tau_i)) - 2np\frac{dA(nx_{cl}(\tau_i))}{d(nx(\tau_i))}\Delta\tau\right) \\ &\quad -\frac{(ap_i)}{np}\left(A(nx_{cl}(\tau_f)) - A(nx_{cl}(\tau_i))\right) \end{aligned} \tag{3.21}$$

Alors

$$p_i = \frac{\Delta x}{2\Delta\tau} \qquad -2n\frac{p_i a p_i}{2\Delta\tau\,(2np_i)^2}\left(A(nx_{cl}(\tau_f)) - A(nx_{cl}(\tau_i)) - 2np\frac{dA(nx_{cl}(\tau_i))}{d(nx(\tau_i))}\Delta\tau\right)$$

$$+\frac{(ap_i)}{2np}\frac{\left(A(nx_{cl}(\tau)) - A(nx_{cl}(\tau_i))\right)}{\Delta\tau} \tag{3.22}$$

avec $\Delta x = x_{cl}^{\mu}(\tau_f) - x_{cl}^{\mu}(\tau_i)$ et $\Delta\tau = (\tau_f - \tau_i)$

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\Delta x}{2\Delta\tau} \\ &\quad -n\frac{p_i a p_i}{4(np_i)^2\Delta\tau}\left(A(\xi_f)) - A(\xi_i)) - 2np\frac{dA(\xi_i)}{d(\xi_i)}\Delta\tau\right) \\ &\quad +\frac{(ap_i)}{2np}\frac{\Delta A}{\Delta\tau}, \end{aligned} \tag{3.23}$$

comme $na = 0$ et $a \ll 1$, alors $p_i a = \dfrac{\Delta x}{2\Delta\tau}.a$

Nous pouvons encore écrire le 4-impulsion comme suit

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\Delta x}{2\Delta\tau} - n\frac{\frac{\Delta x}{2\Delta\tau}a\frac{\Delta x}{2\Delta\tau}}{4(np_i)^2}\left(\frac{A(\xi_f) - A(\xi_i)}{\Delta\tau} - 2np\frac{dA(\xi_i)}{d(\xi_i)}\right) \\ &\quad +\frac{\left(a\frac{\Delta x}{2\Delta\tau}\right)}{2np}\frac{\Delta A}{\Delta\tau} \end{aligned} \tag{3.24}$$

Remplaçons (3.24) dans (3.20)

$$
\begin{aligned}
x_{cl}^{\mu}(\tau) &= x_{cl}^{u}(\tau_i) + 2\left[\frac{\Delta x}{2\Delta\tau} - n\frac{\frac{\Delta x}{2\Delta\tau}a\frac{\Delta x}{2\Delta\tau}}{4(np_i)^2}\left(\frac{\Delta A}{\Delta\tau} - 2np\frac{dA(\xi_i)}{d(\xi_i)}\right) - \frac{\left(a\frac{\Delta x}{2\Delta\tau}\right)}{2np}\frac{\Delta A}{\Delta\tau}\right]\times \\
&\quad (\tau-\tau_i) + 2n\frac{\frac{\Delta x}{2\Delta\tau}a\frac{\Delta x}{2\Delta\tau}}{(2np_i)^2}\left(A(\xi(\tau)) - A(\xi(\tau_i)) - 2np\frac{dA(nx_{cl}(\tau_i))}{d(nx(\tau_i))}(\tau-\tau_i)\right) \\
&\quad -\frac{\left(a\frac{\Delta x}{2\Delta\tau}\right)}{np}\left(A(nx_{cl}(\tau)) - A(nx_{cl}(\tau_i))\right), \qquad (3.25)
\end{aligned}
$$

et après quelque simplifications,nous trouvons l'équation de la trajectoire classique

$$
\begin{aligned}
x_{cl}^{\mu}(\tau) &= x_{cl}^{\mu}(\tau_i) + \frac{\Delta x}{\Delta\tau}(\tau-\tau_i) \\
&\quad -n\frac{\left(\frac{\Delta x}{2\Delta\tau}a\frac{\Delta x}{2\Delta\tau}\right)}{2(np)^2\Delta\tau}\left[(\tau-\tau_i)A(nx_{cl}(\tau_f)) - (\tau_f-\tau_i)A(nx_{cl}(\tau)) - (\tau_f-\tau)A(nx_{cl}(\tau_i))\right] \\
&\quad +\frac{\left(a\frac{\Delta x}{2\Delta\tau}\right)}{np\Delta\tau}\left((\tau-\tau_i)A(nx_{cl}(\tau_f)) - (\tau_f-\tau_i)A(nx_{cl}(\tau)) - (\tau_f-\tau)A(nx_{cl}(\tau_i))\right) \qquad (3.26)
\end{aligned}
$$

le 4-vecteur $\dot{x}^{\mu}$ s'écrit aussi

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{d\tau} &= \frac{\Delta x}{\Delta\tau} - n\frac{\left(\frac{\Delta x}{2\Delta\tau}a\frac{\Delta x}{2\Delta\tau}\right)}{2(np)^2}\left(\frac{\Delta A}{\Delta\tau} - 2np\frac{dA(nx_{cl}(\tau))}{d(nx_{cl}(\tau))}\right) \\
&\quad +\frac{\left(a\frac{\Delta x}{2\Delta\tau}\right)}{np}\left(\frac{\Delta A}{\Delta x} - 2np\frac{dA(nx_{cl}(\tau))}{d(nx_{cl}(\tau))}\right) \qquad (3.27)
\end{aligned}
$$

Utilisons les propriétés du champ gravitationnel faible $n^2 = 0, na = 0$ et $(a^2 << 1)$, et raportons les résultats suivants (3.16), (3.27) ,(3.10) et (3.6) dans l'éxprèssion de l'action classique (3.5). Nous obtenons finalement

$$
S_{cl} = -\frac{1}{4}\frac{(x_f-x_i)^{\mu}}{(\tau_f-\tau_i)}\left[\eta_{\mu\nu} + a_{\mu\nu}\frac{A(\xi_f)-A(\xi_i)}{(\xi_f-\xi_i)}\right](x_f-x_i)^{\nu} \qquad (3.28)
$$

ou $x_f = x(\tau_f), x_i = x(\tau_i)$et $\xi(\tau_f) = \xi_f, \xi(\tau_i) = \xi_i$ et $\Delta\xi = \xi_f - \xi_i$

- Recalculons l'action classique dans l'espace de configuration. Dans ce cas ; le lagrangien qui régit le mouvement de la particule dans le système de coordonnées

$$x^{\mu} = x^{\mu}(\tau) \tag{3.29}$$

est

$$L[x(\tau), \dot{x}(\tau)] = -\frac{dx}{d\tau}\left(\frac{\eta + aF(nx)}{4}\right)\frac{dx}{d\tau}. \tag{3.30}$$

L'équation de la trajectoire dans ce cas se détermine à partir de l'équation d'Euler-Lagrange :

$$-2\ddot{x}_{cl} - (a\ddot{x}_{cl} + \ddot{x}_{cl}a)[F(nx)]_{\xi=nx_{cl}} - (a\dot{x}_{cl} + \dot{x}_{cl}a)(n\dot{x}_{cl})\frac{\partial[F(nx)]_{\xi=nx_{cl}}}{\partial\xi}$$

$$+(\dot{x}_{cl}a\dot{x}_{cl})\,n\frac{\partial[F(nx)]_{\xi=nx_{cl}}}{\partial\xi} = 0, \tag{3.31}$$

Nous voyons que

- l'équation de la trajectoire

- ainsi que l'action classique

sont les mêmes que celles déjà trouvées au chapitre précédent

Par conséquent, il est inutile de refaire les calculs qui se trouvent dans l'espace des phases

L'action classique est

$$S_{cl} = -\frac{1}{4}\frac{(x_f - x_i)^{\mu}}{(\tau_f - \tau_i)}\left[\eta_{\mu\nu} + a_{\mu\nu}\frac{A(\xi_f) - A(\xi_i)}{(\xi_f - \xi_i)}\right](x_f - x_i)^{\nu}. \tag{3.32}$$

3.0.2 Calcul du facteur de fluctuation

Il est plus avantageux de calculer le propagateur dans l'espace de configuration et donc d'utiliser le formalisme lagrangien au lieu du formalisme hamiltonien qui nécessite deux variables stochastiques (x_Q, p_Q) au lieu d'une seule qui est x_Q .

Notons d'abord qu'en terme de moyenne, nous avons en général

$$\langle H_Q(\tau_i, u)\rangle = -\left\langle p_Q(\tau_i, u)\frac{\partial x_Q(\tau_i, u)}{\partial \tau}\right\rangle + \langle L_Q(\tau_i, u)\rangle\,, \tag{3.33}$$

avec

$$\langle L_Q(s_i, u)\rangle = -\frac{1}{4}\lim_{\tau_1,\tau_2 \longrightarrow \tau_i}\frac{\partial}{\partial\tau_1}\frac{\partial}{\partial\tau_2}\langle x_Q(\tau_1, u)x_Q(\tau_2, u)\rangle \tag{3.34}$$

et la moyenne de $H_Q(s_i, u)$ est égale dans ce cas

$$\lim_{u\longrightarrow\infty} \langle H_Q(s_i, u)\rangle = -\lim_{u\longrightarrow\infty} \left\langle p_Q(s_i, u)\frac{\partial x_Q(s_i, u)}{\partial s}\right\rangle - \frac{1}{4}\lim_{\tau_1,\tau_2\longrightarrow\tau_i}\frac{\partial}{\partial\tau_1}\frac{\partial}{\partial\tau_2}\langle x_Q(\tau_1, u)x_Q(\tau_2, u)\rangle \tag{3.35}$$

pour l'impulsion, nous avons son mouvement qui est régi par l'équation de Langevin

$$\frac{\partial p_Q(\tau, u)}{\partial u} = i\frac{\delta S_Q}{\delta p_Q(\tau, u)} + \eta_Q(\tau, u), \tag{3.36}$$

avec

$$S_Q = \int_{s_a}^{s_b} ds\left(p_Q\frac{\partial x_Q}{\partial s} + H_Q\right), \tag{3.37}$$

$$H_Q = -p_Q^2 - 2p_{cl}p_Q + (p_{cl}ap_{cl})(F - F_{cl}) + [(p_{cl}ap_Q) + (p_Qap_{cl}) + (p_Qap_Q)]F. \tag{3.38}$$

Alors

$$\frac{\partial p_Q(\tau, u)}{\partial u} = i\left(\frac{\partial x_Q}{\partial s} + \frac{\partial\, H_Q}{\delta p_Q(\tau, u)}\right) + \eta_Q(\tau, u), \tag{3.39}$$

A la limite $u \longrightarrow \infty$,il est facile de s'assurer que dans le produit$\left\langle \frac{\partial x_Q(\tau', u)}{\partial\tau}\frac{\partial p_Q(\tau, u)}{\partial u}\right\rangle$ et grâce aux propriétés des bruits et l'onde gravitationnelle plane, nous obtenons

$$\lim_{u\longrightarrow\infty}\left[2\left\langle\frac{\partial x_Q(\tau', u)}{\partial\tau}p_Q(\tau, u)\right\rangle + \left\langle\frac{\partial x_Q(\tau', u)}{\partial\tau}\frac{\partial x_Q(\tau, u)}{\partial\tau}\right\rangle\right] = 0$$

Autrement dit la substitution de p_Q par $\frac{\partial x_Q(\tau', u)}{\partial\tau}$ est permise uniquement à l'équilibre $(\lim_{u\longrightarrow\infty})$.

Ainsi donc (3.35)

$$\lim_{u\longrightarrow\infty}\langle H_Q(\tau_i, u)\rangle = \frac{1}{4}\lim_{\tau_1,\tau_2\longrightarrow\tau_i}\frac{\partial}{\partial\tau_1}\frac{\partial}{\partial\tau_2}\lim_{u\longrightarrow\infty}\langle x_Q(\tau_1, u)x_Q(\tau_2, u)\rangle\,, \tag{3.40}$$

et le propagateur dans ce cas est égale à[3]

$$\langle x_f, \tau_f \mid x_i, \tau_i\rangle = c\exp\left[iS_{cl}\right]\exp\left[i\frac{1}{4}\int_0^{\tau}\lim_{\tau_1,\tau_2\longrightarrow\tau_i}\frac{\partial}{\partial\tau_1}\frac{\partial}{\partial\tau_2}\lim_{u\longrightarrow\infty}\langle x_Q(\tau_1, u)x_Q(\tau_2, u)\rangle\, d\tau_i\right]. \tag{3.41}$$

Passons au calcul du facteur de fluctuation.

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} ds L\left[x(\tau), \dot{x}(\tau)\right]$$

$$S = -\frac{1}{4}\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[\frac{dx}{d\tau}\left(\eta + aF(nx)\right)\frac{dx}{d\tau}\right] \tag{3.42}$$

Désignons par x_Q^μ la déviation de x^μ par rapport à la trajectoire classique x_{cl}^μ

$$x^\mu = x_{cl}^\mu + x_Q^\mu. \tag{3.43}$$

Avec cette décomposition l'action S

$$S = -\frac{1}{4}\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[\frac{dx}{d\tau}\left(\eta + aF(nx)\right)\frac{dx}{d\tau}\right] \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{4}\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left\{\frac{dx_{cl}}{d\tau}\eta\frac{dx_{cl}}{d\tau} + \frac{dx_{cl}}{d\tau}\eta\frac{dx_Q}{d\tau} + \frac{dx_{cl}}{d\tau}aF(nx)\frac{dx_{cl}}{d\tau} + \frac{dx_{cl}}{d\tau}aF(nx)\frac{dx_Q}{d\tau}\right. \\ &\left. + \frac{dx_Q}{d\tau}\eta\frac{dx_{cl}}{d\tau} + \frac{dx_Q}{d\tau}\eta\frac{dx_Q}{d\tau} + \frac{dx_Q}{d\tau}aF(nx)\frac{dx_{cl}}{d\tau} + \frac{dx_Q}{d\tau}aF(nx)\frac{dx_Q}{d\tau}\right\} \\ &= S_{cl} + S_Q \end{aligned} \tag{3.45}$$

est donc la somme de deux actions : l'une classique

$$S_{cl} = -\frac{1}{4}\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[\frac{dx_{cl}}{d\tau}\left(\eta + aF(nx)\right)\frac{dx_{cl}}{d\tau}\right] \tag{3.46}$$

et d'une autre S_Q

$$\begin{aligned} S_Q = &-\frac{1}{4}\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left\{\left(\frac{dx_Q}{dt}\right)^2 + 2\left(\frac{dx_{cl}}{d\tau}a\frac{dx_Q}{d\tau}\right)\right. \\ &+ \left(\frac{dx_{cl}}{d\tau}a\frac{dx_{cl}}{d\tau}\right)\left(F(nx) -\right)F(nx_{cl}) \\ &\left. + \left[\left(\frac{dx_{cl}}{d\tau}a\frac{dx_Q}{d\tau}\right) + \left(\frac{dx_Q}{d\tau}a\frac{dx_{cl}}{d\tau}\right) + \left(\frac{dx_Q}{d\tau}a\frac{dx_Q}{d\tau}\right)\right] F(nx)\right\} d\tau \end{aligned} \tag{3.47}$$

avec évidemment les conditions aux bords

$$x_Q\left(\tau_i\right) = x_Q\left(\tau_f\right) = 0 \tag{3.48}$$

Nous notons par $y_\mu = x_{\mu Q}$

$$\xi_{cl} = nx_{cl} \tag{3.49}$$

et par

$$\xi = n\left(x_{cl} + x_Q\right), \quad \xi_{cl} = nx_{cl} \tag{3.50}$$

A ce niveau nous ajautons au temps réel τ, le temps fictif u :

$$y^\mu(\tau) \to y^\mu(\tau, u) \;\; avec \; y^\mu(\tau_i, u) = y^\mu(\tau_f, u) = 0 \tag{3.51}$$

L'équation de Langevin qui régit le mouvement $y^u(\tau, u)$ est la suivante

$$\frac{\partial y^\mu(\tau, u)}{\partial u} = i\frac{\delta S_Q}{\delta y^\mu(\tau, u)} + \eta^\mu(\tau, u) \tag{3.52}$$

avec comme proprietés pour les bruit

$$\begin{aligned} \langle \eta^\mu(\tau, u)\rangle &= 0 \\ \langle \eta^\mu(\tau, u)\langle \eta^\nu(\tau', u')\rangle\rangle &= 2g^{\mu\nu}\delta(\tau - \tau')\,\delta(u - u') \end{aligned}$$

développons l'équation de Langevin

$$\begin{aligned} \frac{\partial y^\mu(\tau, u)}{\partial u} &= i\frac{\delta S_Q}{\delta y^\mu(\tau, u)} + \eta^\mu(\tau, u) \\ &= -\frac{i}{4}\frac{\delta}{\delta y^\mu(\tau, u)}\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau' \left\{\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + 2\left(\frac{dx_{c_l}}{d\tau}\right)\left(\frac{dy}{d\tau}\right) + \left(\frac{dx_{c_l}}{d\tau}a\frac{dx_{c_l}}{d\tau}\right)\left(F(nx) - F(nx_{cl})\right)\right. \\ &\quad \left. + \left[\left(\frac{dx_{c_l}}{d\tau}a\frac{dy}{d\tau}\right) + \left(\frac{dy}{d\tau}a\frac{dx_{c_l}}{d\tau}\right) + \left(\frac{dy}{d\tau}a\frac{dy}{d\tau}\right)\right]F(nx)\right\} + \eta^\mu(\tau, u) \end{aligned} \tag{3.53}$$

en utilisant les dérivations suivantes

$$\frac{\delta}{\delta y^\mu(\tau, u)}F(nx_{cl})\,\dot{x}_{cl} = 0, \tag{3.54}$$

et

$$\frac{\delta}{\delta y(\tau, u)}F(nx) = \frac{dF}{d\xi}n\delta(\tau - \tau') \tag{3.55}$$

et la régle d'intéragration

$$\int dx f(x)\delta'(x - a) = -f'(a)$$

l'équation de Langevin est la suivante

$$\frac{\partial y(\tau,u)}{\partial u} = \frac{i}{2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}(y+x_{cl}) + \frac{i}{4}\left(a\frac{\partial^2 y}{\partial\tau^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial\tau^2}a\right)F(nx)$$
$$-\frac{i}{4}\left\{\left(\frac{dx_{c_l}}{d\tau}a\frac{dy}{d\tau}\right)n + \left(\frac{dy}{d\tau}a\frac{dx_{cl}}{d\tau}\right)n + \left(\frac{dy}{d\tau}a\frac{dy}{d\tau}\right)n\right.$$
$$-\left(a\frac{dy}{d\tau}\right)\left(n\frac{dx_{c_l}}{d\tau}\right) - \left(a\frac{dy}{d\tau}\right)\left(n\frac{dy}{d\tau}\right) - \left(\frac{dy}{d\tau}a\right)\left(n\frac{dx_{c_l}}{d\tau}\right) - \left(\frac{dy}{d\tau}a\right)\left(n\frac{dy}{d\tau}\right)$$
$$\left.-\left(\frac{dx_{c_l}}{d\tau}a\right)\left(n\frac{dy}{d\tau}\right) - \left(a\frac{dx_{c_l}}{d\tau}\right)\left(n\frac{dy}{d\tau}\right)\right\}\left(\left.\frac{dF(\xi)}{d\xi}\right|_{n(x_{cl}+y)}\right) + \eta^{\mu}(\tau,u) \quad (3.56)$$

supposons que la solution y est la superposition de la solution sans la présence du F_μ c'est à dire

- libre : $y^0_\mu(\tau,u)$

- plus la partie restante $y'_\mu(\tau,u)$:

$$y_\mu(\tau,u) = y^0_\mu(\tau,u) + y\prime_\mu(\tau,u): \quad (3.57)$$

Décomposons la solutions libre $y^0(\tau,u)$ encore en deux terme

$$y^0_\mu(\tau,u) = y^0_{\mu cl}(\tau,u) + y^0_{\mu Q}(\tau,u), \quad (3.58)$$

où le 1er terme désigne $y^0_{\mu cl}(\tau)$ la solution de l'équation classique .

$$\frac{d^2}{d\tau^2}y^0_{cl}(\tau) = 0 \quad (3.59)$$

il est clair que

$$y^0_{cl}(\tau) = 0.$$

En effet par intégration nous avons

$$y^0_{cl}(\tau) = a\tau + b \quad (3.60)$$

et comme il y a une deuxiéme condition aux limites

$$\begin{cases} y^0_{cl}(\tau) = a\tau_i + b = 0 \\ y^0_{cl}(\tau) = a\tau_f + b = 0 \end{cases}, \quad (3.61)$$

alors

$$a = b = 0 \quad (3.62)$$

et par conséquent

$$y^0_{cl}(\tau) = 0 \tag{3.63}$$

La déviations $y^0_{\mu Q}(\tau, u)$ par rapport au libre est régie par l'équation de Langevin suivante

$$\frac{\partial}{\partial u} y^0_Q(\tau, u) = \frac{i}{2}\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} y^0_{\mu Q}(\tau, u) + \eta_\mu(\tau, u) \tag{3.64}$$

avec toujours les conditions aux limites

$$y^0_{\mu Q}(\tau_i, u) = y^0_{\mu Q}(\tau_f, u) = 0 \tag{3.65}$$

Désignons par $G^0(\tau, \tau', u - u')$ la fonction de Green libre. Elle est solution de

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{i}{2}\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right) G^0(\tau, \tau', u - u') = \delta(\tau - \tau')\,\delta(u - u') \tag{3.66}$$

les conditions aux limites

$$G^0(\tau, \tau', u - u') = 0, \quad \text{pour} \quad \tau\,(ou\ \tau') \ = \tau_i\,, \tau_f \ \text{ ou } u \prec u'. \tag{3.67}$$

il est facile trouver l'expression de $G^0(\tau, \tau', u - u')$

$$G^0(\tau, \tau', u - u') = \vartheta(u - u')\,\frac{2}{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{k\pi}{\lambda}(\tau - \tau_i)\sin\frac{k\pi}{\lambda}(\tau' - \tau_i)\exp\left[\frac{ik^2\pi^2}{2\lambda^2}(u - u')\right] \tag{3.68}$$

D'où la solutions de l'équation Langevin est

$$y^0_Q(\tau, u) = \int_{\tau_i}^{\tau f} d\tau' \int_{-\infty}^{+\infty} du' G^0(\tau, \tau', u - u')\eta^\mu(\tau, u) \tag{3.69}$$

et finalement la solution de Langevin en présence du champ est la suivante

$$\begin{aligned}
y_{\mu Q}(\tau, u) \ &= \ y^0_{\mu Q}(\tau, u) - \frac{i}{4}\int_{\tau_i}^{\tau f} d\tau' \int_{-\infty}^{+\infty} du' G^0(\tau, \tau', u - u')\left[-\left(a\frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2}a\right)F(nx_{cl} + y)\right.\\
&+ \left\{\left(\frac{\partial x_{c_l}}{\partial \tau}a\frac{\partial y_Q}{\partial \tau}\right)n + \left(\frac{\partial y_Q}{\partial \tau}a\frac{\partial x_{cl}}{\partial \tau}\right)n + \left(\frac{\partial y_Q}{\partial \tau}a\frac{\partial y_Q}{\partial \tau}\right)k\right.\\
&- \left(a\frac{\partial y_Q}{\partial \tau}\right)\left(k\frac{\partial x_{c_l}}{\partial \tau}\right) - \left(a\frac{\partial y_Q}{\partial \tau}\right)\left(n\frac{\partial y_Q}{\partial \tau}\right)\\
&- \left(\frac{\partial y_Q}{\partial \tau}a\right)\left(n\frac{\partial x_{c_l}}{\partial \tau}\right) - \left(\frac{\partial y_Q}{\partial \tau}a\right)\left(n\frac{\partial y_Q}{\partial \tau}\right)\\
&\left.\left.- \left(a\frac{\partial x_{c_l}}{\partial \tau}\right)\left(n\frac{\partial y_Q}{\partial \tau}\right) - \left(\frac{\partial x_{c_l}}{\partial \tau}a\right)\left(n\frac{\partial y_Q}{\partial \tau}\right)\right\}\left(\left.\frac{dF(\xi)}{d\xi}\right|_{\xi = n(x_{cl}+y)}\right)\right]
\end{aligned} \tag{3.70}$$

Nous constantons que y_μ aux instans réel τ et fictif u dépend encore de y aux instants réel τ' et fictif $u\prime$.

Grâce aux propriétés $n^2 = 0$, $na = 0$,nous pouvons trouver la solution par une Simple intéraction.

Noton d'abord

$$n\ddot{x}_{cl} = 0, \tag{3.71}$$

et

$$n^\mu \dot{y}_\mu(\tau, u) = n^\mu \dot{y}^0_{\mu Q}(\tau, u) \tag{3.72}$$

que la dérivée

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_\mu}{\partial \tau} &= \frac{dF_\mu}{d\xi}\frac{d\xi}{\partial \tau}\,|_{\xi=n(x+y)} & (3.73)\\ &= \frac{dF_\mu}{d\xi}\,|_{\xi=n(x+y)}\, n^\mu\left(\dot{x}_{cl} + \dot{y}(\tau, u)\right) \\ &= \frac{dF_\mu}{d\xi}\,|_{\xi=k(x+y)}\, n^\mu\left(\dot{x}_{cl} + \dot{y}^0_{\mu Q}(\tau', u')\right) & (3.74) \end{aligned}$$

Enfin nous obtenous la solution de l'equation de Langevin est

$$\begin{aligned} y_u(\tau, u) &= y^0_Q(\tau, u) - \frac{i}{4}\int_{\tau_i}^{\tau f} d\tau'_1 \int_{-\infty}^{+\infty} du'_1 G^0(\tau, \tau', u - u\prime) \\ &\Big\{ -\left(a\ddot{y}^0_{uQ}(\tau', u') + \ddot{y}^0_{uQ}(\tau', u')a\right) F(nx) + \\ &\left(\dot{x}_{cl} a \dot{y}^0_{uQ}(\tau', u')\right) n + \left(\dot{y}^0_{uQ}(\tau', u') a \dot{x}_{cl}\right) n + \left(\dot{y}^0_{uQ}(\tau', u') a \dot{y}^0_{uQ}(\tau', u')\right) n \\ &- \left(a\dot{y}^0_{uQ}(\tau', u')\right)\left(n\dot{x}_{cl}\right) - \left(a\dot{y}^0_{uQ}(\tau', u')\right)\left(n\dot{y}^0_{uQ}(\tau', u')\right) \\ &- \left(a\dot{y}^0_{uQ}(\tau', u')\right)\left(n\dot{x}_{cl}\right) - \left(\dot{y}^0_{uQ}(\tau', u')a\right)\left(n\dot{y}^0_{uQ}(\tau', u')\right) \\ &- \left(a\dot{x}_{cl}\right)\left(n\dot{y}^0_{uQ}(\tau', u')\right) - \left(\dot{x}_{cl} a\right)\left(n\dot{y}^0_{uQ}(\tau', u')\right)\Big\} \frac{dF}{d\xi}\Big\} \end{aligned}$$

Donc ,utilisant cette derniere expression ,nous pouvons facilement calculer la fonction de corrélation a deux points

$$\begin{aligned}
\langle y(\tau_1,u_1)y(\tau_2,u_2)\rangle &= \Bigg\langle\Bigg\{y_Q^0(\tau_1,u_1)-\frac{i}{4}\int_{\tau_i}^{\tau f}d\tau_1'\int_{-\infty}^{+\infty}du_1'G^0(\tau_1,\tau_1',u_1-u_1\prime)\\
&\Big[-\left(a\ddot{y}_{uQ}^0(\tau_1',u_1')+\ddot{y}_{uQ}^0(\tau_1',u_1')a\right)F(nx)+\\
+&\Big\{\left(\dot{x}_{cl}(\tau_1)a\dot{y}_{uQ}^0(\tau_1',u_1')\right)n+\left(\dot{y}_{uQ}^0((\tau_1',u_1')a\dot{x}_{cl}(\tau_1)\right)n\\
&+\left(\dot{y}_{uQ}^0(\tau_1',u_1')a\dot{y}_{uQ}^0(\tau_1',u_1')\right)n-\left(a\dot{y}_{uQ}^0(\tau_1',u_1')\right)\left(n\dot{x}_{cl}(\tau_1)\right)\\
&-\left(a\dot{y}_{uQ}^0(\tau_1',u_1')\right)\left(n\dot{y}_{uQ}^0(\tau_1',u_1')\right)-\left(\dot{y}_{uQ}^0(\tau_1',u_1')a\right)\left(n\dot{y}_{uQ}^0(\tau_1',u_1')\right)\\
&-\left(a\dot{x}_{cl}(\tau_1)\right)n\dot{y}_{uQ}^0(\tau_1',u_1')-\left(\dot{y}_{uQ}^0(\tau_1',u_1')a\right)\left(n\dot{x}_{cl}(\tau_1)\right)+\\
&\left(\dot{x}_{cl}(\tau_1)a\right)\left(n\dot{y}_{uQ}^0(\tau_1',u_1')\right)\Big\}\left(\left.\frac{dF(\xi)}{d\xi}\right|_{n(x_{cl}+y)}\right)\Bigg\}\\
&\Bigg\{y_Q^0(\tau_2,u_2)-\frac{i}{4}\int_{\tau_i}^{\tau f}d\tau_1'\int_{-\infty}^{+\infty}du_1'G^0(\tau_2,\tau_2',u_2-u_2')\\
&\Big[-\left(a\ddot{y}_{uQ}^0(\tau_2,u_2)+\ddot{y}_{uQ}^0(\tau_2,u_2)a\right)F(nx)+\\
+&\Big\{\left(\dot{x}_{cl}(\tau_2)a\dot{y}_{uQ}^0(\tau_2,u_2)\right)n+\left(\dot{y}_{uQ}^0(\tau_2,u_2)a\dot{x}_{cl}(\tau_2)\right)n\\
&+\left(\dot{y}_{uQ}^0(\tau_2,u_2)a\dot{y}_{uQ}^0(\tau_2,u_2)\right)n-\left(a\dot{y}_{uQ}^0(\tau_2,u_2)\right)\left(n\dot{x}_{cl}(\tau_2)\right)\\
&-\left(a\dot{y}_{uQ}^0(\tau_2,u_2)\right)\left(n\dot{y}_{uQ}^0(\tau_2,u_2)\right)-\left(\dot{y}_{uQ}^0(\tau_2,u_2)a\right)\left(n\dot{y}_{uQ}^0(\tau_2,u_2)\right)\\
&-\left(a\dot{x}_{cl}(\tau_2)\right)\left(n\dot{y}_{uQ}^0(\tau_2,u_2)\right)-\left(\dot{y}_{uQ}^0(\tau_2,u_2)a\right)\left(n\dot{x}_{cl}(\tau_2)\right)+\\
&\left(\dot{x}_{cl}(\tau_2)a\right)\left(n\dot{y}_{uQ}^0(\tau_2,u_2)\right)\Big\}\left(\left.\frac{dF(\xi)}{d\xi}\right|_{n(x_{cl}+y)}\right)\Bigg\}\Bigg\rangle
\end{aligned} \tag{3.75}$$

Après un calcul très long, nous obtenons le résultat suivant

$$\langle y(\tau_1,u_1)y(\tau_2,u_2)\rangle = \langle y_Q^0(\tau_1,u_1y_Q^0(\tau_2,u_2)\rangle \tag{3.76}$$

$$\begin{aligned}
\langle y_Q^0(\tau_1,u_1)y_Q^0(\tau_2,u_2)\rangle &= \Bigg\{\int_{\tau_i}^{\tau f}d\tau_1'\int_{-\infty}^{+\infty}du_1'G^{(0)}(\tau_1,\tau_1',u_1-u_1\prime)\\
&\int_{\tau_i}^{\tau f}d\tau_2'\int_{-\infty}^{+\infty}du_2'G^{(0)}(\tau_2,\tau_2',u_2-u_2\prime)\left\langle\eta\left(\tau_1',u_1'\right)\eta\left(\tau_2',u_2'\right)\right\rangle\Bigg\} \qquad (3.77)\\
&= 8\int_{\tau_i}^{\tau f}d\tau_1'\int_{-\infty}^{+\infty}du_1'G^{(0)}(\tau_1,\tau_1',u_1-u_1\prime)G^{(0)}(\tau_2,\tau_1',u_2-u_1\prime)
\end{aligned}$$

(La contraction sur les indeces μ conduit à un facteur 4 en plus) .

Reportons les expressions des fonctions de Green $G^{(0)}$

$$\begin{aligned}\langle y_Q^0(\tau_1,u_1 y_Q^0(\tau_2,u_2)\rangle &= \frac{32}{\lambda^2}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{k\pi}{\lambda}(\tau_1-\tau_i)\sin\frac{l\pi}{\lambda}(\tau_2-\tau_i)\right.\\ &\left.\int_{-\infty}^{+\infty}du_1'\theta(u_1-u_1')\,\theta(u_2-u_1')\right\}\\ &\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}d\tau_1'\sin\frac{k\pi}{\lambda}(\tau_1'-\tau_i)\sin\frac{l\pi}{\lambda}(\tau_2'-\tau_i)\right.\\ &\left.\exp\left[\frac{ik^2\pi^2}{2\lambda^2}(u_1-u_1')\right]\exp\left[\frac{il^2\pi^2}{2\lambda^2}(u_2-u_1')\right]\right\}\end{aligned} \tag{3.78}$$

et calculons l'intégrale sur τ_1'

Comme

$$\int_0^{\lambda}d\tau\cos\frac{l\pi}{\lambda}\tau=\lambda\delta_{l,0} \tag{3.79}$$

alors

$$\int_{\tau_i}^{\tau f}d\tau_1'\sin\frac{k\pi}{\lambda}(\tau_1'-\tau_i)\sin\frac{l\pi}{\lambda}(\tau_1'-\tau_i)=\frac{\lambda}{2}\delta_{k;l} \tag{3.80}$$

En remplaçant dans la dernière expression, il vient

$$\begin{aligned}y(\tau_1,u_1)y(\tau_2,u_2) &= \frac{16}{\lambda^2}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{k\pi}{\lambda}(\tau_1-\tau i)\sin\frac{k\pi}{\lambda}(\tau_2-\tau i)\right.\\ &\left.\int_{-\infty}^{+\infty}du'\theta(u_1-u')\,\theta(u_2-u')\exp\left[\frac{ik^2\pi^2}{2\lambda^2}(u_1+u_2-2u')\right]\right\}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{16i\lambda}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{\lambda}(\tau_1-\tau_i)\sin\frac{k\pi}{\lambda}(\tau_2-\tau_i)\exp\left[\frac{ik^2\pi^2}{2\lambda^2}|u_1-u_2|\right]\end{aligned} \tag{3.81}$$

et à limite $u_1=u_2\to\infty$ l'exponentielle disparait .

Il reste à calculer la serie $\sum_k$

Transformons $\sin\frac{k\pi}{\lambda}(\tau_1-\tau_i)\sin\frac{k\pi}{\lambda}(\tau_2-\tau_i)$ en $\frac{1}{2}\cos\frac{k\pi}{\lambda}(\tau_1-\tau_2)-\cos\frac{k\pi}{\lambda}(\tau_1+\tau_2-2\tau_i)$ et utilisons l'identité suivante [?]

$$\sum\cos\frac{k\pi}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi x}{2}+\frac{x^2}{4},\qquad [0\le x\le 2\pi] \tag{3.82}$$

posons

$$\left\{\begin{array}{c} x_1=\frac{\pi}{\lambda}(\tau_1-\tau_2)\\ et\\ x_2=\frac{\pi}{\lambda}(\tau_1+\tau_2-2\tau_i)\end{array}\right. . \tag{3.83}$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\frac{8i\lambda}{\pi^2}\sum_k \frac{\cos kx_1 - \cos kx_2}{k^2} \\
&= \frac{8i\lambda}{\pi^2}\left[\frac{\pi^2}{6} - \frac{x_1\pi}{2} + \frac{x_1^2}{4} - \frac{\pi^2}{6} + \frac{x_2\pi}{2} - \frac{x_2^2}{4}\right] \qquad (3.84)\\
&= \frac{8i\lambda}{\pi^2}\left[-\pi\frac{x_1}{2} + \frac{x_1^2}{4} + \pi\frac{x_2}{2} - \frac{x_2^2}{4}\right] \\
&= \frac{8i}{\lambda}\left[(\tau_2 - \tau_i)\lambda - \left(\tau_1\tau_2 - \tau_i(\tau_1+\tau_2) + \tau_i^2\right)\right]. \qquad (3.85)
\end{aligned}$$

Remplaçons λ par $(\tau_f - \tau_i)$, nous obtenons le produit de corrélation cherché

$$\begin{aligned}
&= \frac{8i}{\lambda}\left[(\tau_2 - \tau_i)(\tau_f - \tau_i) - \left(\tau_1\tau_2 - \tau_i(\tau_1+\tau_2) + \tau_i^2\right)\right] \\
&= \frac{8i}{\lambda}(\tau_2 - \tau_i)(\tau_f - \tau_1)
\end{aligned}$$

$$\lim_{u_1=u_2\longrightarrow\infty} \langle y(\tau_1,u_1).y(\tau_2,u_2)\rangle = \frac{8i}{\lambda}(\tau_2 - \tau_i)(\tau_f - \tau_1)$$

nous obtenous le résultat simple pour le produit de corrélation

$$\lim_{u\longrightarrow\infty} \langle y(\tau_1,u_1)y(\tau_2,u_2)\rangle = \frac{8i}{\lambda}(\tau_2 - \tau_i)(\tau_f - \tau_1) \qquad (3.86)$$

En dérivant deux fois par rapport a τ_1 et τ_2 et a l'équilibre

$$\lim_{u\longrightarrow\infty} \langle H(\tau_i,u)\rangle = \frac{1}{4}\lim_{\tau_1,\tau_2\longrightarrow\tau_i} \frac{\partial}{\partial\tau_1}\frac{\partial}{\partial\tau_2}\lim_{u\longrightarrow\infty} \langle y(\tau_1,u_1)y(\tau_2,u_2)\rangle \qquad (3.87)$$

$$\lim_{u\longrightarrow\infty} \langle H(\tau_i,u)\rangle = -\frac{2i}{\lambda} \qquad (3.88)$$

nous obtenous pour le propagateur $K(x_f, x_i; \lambda)$ l'expression

$$\begin{aligned}
K(x_f,x_i;\lambda) &= c\exp[iS_{cl}]\exp\left[i\int_0^{\tau_i} -\frac{2i}{\lambda}d\tau_i\right] \qquad (3.89)\\
&= c\exp[iS_{cl}]\exp[-2\log\lambda] \\
&= \frac{c}{\lambda^2}\exp[iS_{cl}]
\end{aligned}$$

Fixons la constante c. Comme elle est indépendante de τ_i et τ_f.

A la limite $\lambda = (\tau_f - \tau_i) \longrightarrow 0$

$$\lim_{\lambda\to 0} K(x_f, x_i; \lambda) = \lim_{\lambda\to 0}\frac{c}{\lambda^2}\exp\left[\frac{-i}{4}\frac{(x_f-x_i)^\mu}{\lambda}\left[\eta_{\mu\nu}+a_{\mu\nu}\frac{A(\xi_f)-A(\xi_i)}{\xi_f-\xi_i}\right](x_f-x_i)^\nu\right] = \delta^4(x_b-x_a). \tag{3.90}$$

Par intégration sur x_f sur la gaussienne et de la fonction δ, nous pouvons voir que

$$c = \frac{i}{(4\pi)^2}. \tag{3.91}$$

D'où le propagateur

$$K(x_f, x_i; \lambda) = \frac{i}{16\pi^2\lambda^2}\exp\left\{\frac{-i}{4}\frac{(x_f-x_i)^\mu}{\lambda}\left[\eta + a\frac{A(\xi_f)-A(\xi_i)}{\xi_f-\xi_i}\right](x_f-x_i)^\nu\right\} \tag{3.92}$$

et finalement la fonction de Green relative à la particule de Klein-Gordon soumise à l'onde gravitationnelle plane

$$\begin{aligned}\triangle(x_f, x_i) &= -i\int_0^\infty d\lambda \exp\left[-im^2\lambda\right]\; K(x_f, x_i; \lambda)\\ &= \frac{1}{16\pi^2}\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2}\exp\left\{\frac{-i}{4}\frac{(x_f-x_i)^\mu}{\lambda}\left[\eta_{\mu\nu}+a_{\mu\nu}\frac{A(\xi_f)-A(\xi_i)}{\xi_f-\xi_i}\right](x_f-x_i)^\nu\right\}\end{aligned} \tag{3.93}$$

Le résultat obtenu correspond bien à ce lui dans la littérateure [15] et [?]

Chapitre 4

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons présenté les notions fondamentales du formalisme de la mécanique quantique stochastique de Parisi et Wu ; ensuite nous avons considéré le problème d'une particule relativiste, sans spin et soumise à l'action d'une onde gravitationnelle plane [11]. La fonction de Green relative à ce système a été déterminée dans l'espace de configuration suivant cette approche. L'action classique pour une particule de KG a été d'abord extraite et le facteur de fluctuation a été ensuite déterminé exactement grâce à un calcul itératif, nous avons utilisé une seule équation de Langevin pour x_Q. Les solutions sont obtenues d'une manière analytique et exacte grâce aux propriétés de l'onde gravitationnelle plane. Nous avons pu montré tous les résultats obtenus la référence [11], qui sont identiques à ceux obtenus par différentes approches [14] [15] [16].

Bibliographie

[1] G.Parisi et Y.-S. Wu, Sci. Sin. 24 (1981), 483.

[2] Namiki M, *Stochastic Quantization* (Springer-Verlag, Heidelberg, 1992).

[3] H. Hüffel et H. Nakazato, Mod. Phys. Lett. A9 (1994), 2953.

[4] K. Yuasa et H. Nakazato, lanl.arXiv.org :hep-th-9610209.

[5] N. Chine and L. Chetouani, Czech. J. Phys. 56 (2006) 565 ; Turk. J. Phys. 31 (2007) 1.

[6] Z. Lehtihet and L. Chetouani, Eur. Phys. J. C42 (2005) 243.

[7] Weinberg S., Gravitation and Cosmology (John Wiley and Sons, New York 1972)

[8] Fukuda R. and Higurashi H., Phys. Lett. B 202 (1988) 541.

[9] Nakazato H. and Yamanaka Y., Phys. Rev. D **34** (1986) 492.

[10] Nakazato H., Prog. Theor. Phys. **77** (1987) 20.

[11] Lehtihet Z and Chetouani L 2008 Cent. Eur. J. Phys. 6 372

[12] T. Boudjedaa, L. Chetouani, L. Guechi et T. F. Hammann Physica Scripta. 46 289 (1992).

[13] Taleb-Hacine Skander, Thèse de Magister, Université Mentouri, Constantine (2007).

[14] Barducci A. and Giachetti R., J. Phys. A 38 (2005) 1615.

[15] Vaidya A.N., Farina C., Guimaraes M.S. and Neves M., J. Phys. A : Math. Theor. **40** (2007) 9149.

[16] Haouat S. and Chetouani L., Eur. Phys. J. C **53** (2008) 289.