REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOHAMED SEDDIK BEN YAHIA - JIJEL

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DEPARTEMEN DE PHYSIQUE

N^{0} d'ordre :
Série :

Mémoire
Présenté pour obtenir le diplôme de

Master en physique
Option : Physique théorique

Par
Bouchebtoul Meriem

Thème

Création des particules dans un espace de de-Sitter statique

Soutenue le : 22/06/2017

Devant le Jury :

Président :	K.Nouicer	Prof.	Univ. de Jijel
Rapporteur :	S.Haouat	Prof	Univ. de Jijel
Examinateurs:	T.Boudjedaa	Prof	Univ. de Jijel

Remerciements

Ce travail a été réalisé au **Laboratoire de Physique Théorique (LPTh)** du département de Physique de la Faculté des Sciences Exactes et Informatique de **l'Université Mohamed Seddik Ben Yahia Jijel**.

Au terme de mon travail je tiens à exprimer mes remerciements les plus profonds tout d'abord à **"Dieu"** le tout puissant qui m'a donné le courage et la volonté, la santé et la patience pour accomplir ce travail.

Je tiens à exprimer ma gratitude et mes grands remerciements à mon encadreur **Mr. Saleh Haouat**, Professeur à l'université de Jijel, pour toute l'aide qu'il m'a apportée au cours de la réalisation de ce travail, mes discussions avec lui et sa disponibilité ont constitué un apport très important pour moi.

Mes sincères remerciements vont également à **M. Khireddine Nouicer**, Professeur à l'université de Jijel, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de mon mémoire

Je remercie également **M. Taher Boudjedaa**, Professeur à l'université de Jijel, pour avoir accepté de juger ce travail.

Je voudrais exprimer ma reconnaissance à tous **les enseignants du Master de physique théorique** qui ont contribué à ma formation scientifique et je remercie fortement tous mes collègues de la promotion **2016/2017**, qui étaient toujours prêts à m'aider.

Enfin j'adresse mes plus sincères remerciements à tous les membres de **ma famille**, qui ont fait beaucoup de sacrifices pour que je réussisse dans mes études.

Dédicace

Après un long trajet, enfin je suis en train de présenter ce travail comme Un projet de fin d'Étude et tout cela Grace à

Mon Dieu qui m'indique le chemin de succès.

A ma très chère Mère : Naima.

A mon très cher père : Youcef qui consacre ses efforts et ses conseils pour moi.

A mes chères sœurs: Sara, Zina, Widad, Monia, Haoua

A mes chers frères : Ishek et Yaakoub

A mon cher grande père: Ali

Atouts mes familles: Bouchebtoul et Boulemzaoud

A toutes mes chères amies de la promotion 2017: Sara, Faiza, Amel, Iman, Asma et Ilhem

A toutes mes autres amies surtout Sabrin, Hayat, Sabiha, Luiza, Sara, Meriem, Hadjer, Iman, Karima et Horia.

Meriem

Table des matières

Chapitre 1

Introduction générale

Comme on le sait, en mécanique quantique relativiste, les équations d'onde de Klein Gordon et de Dirac peuvent être considérées comme une première approximation de la théorie quantique des champs [1][2][3]. Si les corrections qu'on doit ajouter à cette approximation ne sont susceptibles que dans le cas où le champ d'interaction est fort, ces équations nous permettent une meilleure description de certains phénomènes physiques. Ça explique le plus grand intérêt de ces équations et en particulier l'importance de trouver leurs solutions exactes et analytiques [4]. Il est évident que de telles solutions nous fournissent beaucoup d'informations sur le système physique en question et nous permettent de satisfaire au besoin profond de comprendre la nature quantique des particules relativistes.

Lors de l'avènement de la mécanique quantique relativiste, il a été constaté que les effets relativistes influent sur le comportement quantique des particules et peuvent modifier considérablement les résultats de la mécanique quantique nonrelativiste. Le résultat le plus surprenant de la mécanique quantique relativiste est le fameux paradoxe de Klein [5]. Brièvement ce paradoxe s'observe dans la diffusion des particules relativistes par une barrière du potentiel où le flux de l'onde réfléchie par la barrière peut être supérieur à celui de l'onde incidente [6]. Ce résultat a trouvé une justification théorique après l'introduction de la théorie trous de Dirac qui a prédit l'existence des antiparticules associées aux particules. Selon cette théorie le vide n'est pas vraiment "vide" mais une "mer de Dirac" qui contient des particules virtuelles ayant une énergie négative. Alors, la diffusion des particules est accompagnée par la transition des particules virtuelles de la mer de Dirac en particules réelles par l'effet tunnel. Cette transition produit des paires particule-antiparticule au voisinage de la barrière. Bien sûr cette transition ne peut y avoir lieu que pour une barrière du potentiel supérieur au double de la masse de la particule (i.e. $eV_0 > 2mc^2$).

Aujourd'hui, il bien connu que tout champ électrique peut créer des paires des particules chargées à partir du vide [7]. L'effet de la création des particules a été étudié pour la première fois par Schwinger [8]. Au début des années 50, Schwinger a montré dans le cadre de la théorie quantique des champs que l'amplitude de transition vide-vide pour un champ spinoriel peut être exprimée par l'intermédiaire d'une action effective

$$\mathcal{A}(vac - vac) = \exp(iS_{eff}) = \exp\left(i\int d^4x\ L_{eff}\right), \tag{1.1}$$

où L_{eff} est dit le lagrangien effectif de Schwinger. La probabilité de création des particules peut être donc extraite de la partie imaginaire de S_{eff}

$$\int d^4x \mathcal{P}_{Creat.} = 1 - |\mathcal{A}(vac - vac)|^2 \simeq 2\,\mathrm{Im}\,S_{eff}. \tag{1.2}$$

où $\mathcal{P}_{Creat.}$ est la probabilité de création des particules à partir du vide par unité de temps par unité de volume

$$\mathcal{P}_{Creat.} \simeq 2\,\mathrm{Im}\,L_{eff}. \tag{1.3}$$

Pour un champ électrique constant L_{eff} a été exactement calculé [8, 9]. Le résultat est que la probabilité de création des paires des particules par un champ électrique constant d'intensité E est donnée par

$$\mathcal{P}_{Creat.} = \frac{e^2E^2}{4\pi^3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\exp\left(-n\pi\frac{m^2}{eE}\right). \tag{1.4}$$

Notons que la généralisation au cas de spin quelconque montre la manifestation des effets statistiques. Si nous considérons par exemple les particules de spin 0, où la probabilité $\mathcal{P}_{Creat.}$ est donnée par [12]

$$\mathcal{P}_{Creat.} = \frac{e^2E^2}{8\pi^3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\exp\left(-n\pi\frac{m^2}{eE}\right) \tag{1.5}$$

nous pouvons voir qu'un facteur $(-1)^{n+1}$ est apparu à cause de la statistique de Bose-Einstein et un facteur $\frac{1}{2}$ due à la minimisation des degrés de liberté par rapport aux particules spinorielles.

Depuis la publication du papier de Schwinger, le problème de la création des paires des particules a attiré beaucoup d'attention. Du point de vue théorique, l'importance de cet effet vient de sa nature nonperturbative et sa relation avec d'autres problèmes comme le rayonnement des trous noirs et l'effet Casimir.

En physique expérimentale, la création des particule par un champ intense est devenue à l'heure actuelle un effet d'une grande importance. L'intensité néccssaire pour observer l'effet est de l'ordre de la valeur critique $E_c = \frac{m^2}{e} = 10^{16}\mathtt{V}\mathtt{cm}^{-1}$ (pour les electrons), qui semble d'être loin des laboratoires. Cependant, recemment, des techniques expérimentales [13, 14, 15] est proposée pour observer l'effet de Schwinger pour la première fois dans le laboratoire. Le principe de base de ces techniques est l'amplification de l'effet par la superposition d'un champ laser faible de pulsations rapides avec un champ laser intense de pulsations lentes. Il a été montré dans [13] que le laser de pulsations rapides donne une contribution qui réduit la barrière à travers laquelle les particules vertuelles pénètrent et cause une grande amplification de la création des particules. Donc, ce phénomène va s'observer dans le plus proche future.

Comme dans le cas des champs électromagnétiques, les champs gravitationnels peuvent aussi créer de paires particule-antiparticule à partir du vide [16][17] [18]. Ce phénomène est prédit dans le cadre de la théorie quantique des champs dans un espace courbe [19]. L'étude de ce phénomène nécessite une définition de l'état du vide pour les champs quantiques de la matière. Cependant il est bien connu que dans un espace courbe, il n'y a pas de définition absolue de l'état du vide et la notion de particules n'est pas complètement claire. Du point de vue physique, c'est à cause du fait qu'en théorie quantique une particule ne peut être localisée dans une région plus petite que sa longueur d'onde de de-Broglie. Quand cette longueur d'onde devient suffisamment large, la notion de particule perd sa signification. On dit, alors, que la matière se comporte comme des ondes. Dans un univers en expansion, la création spontanée des particules aura lieu quand le vide devient instable ; l'état du vide défini dans le passé diffère de l'état du vide dans le futur. Dans ce cas l'amplitude de transition vide-vide porte une phase complexe, dont la partie imaginaire s'interprète comme la probabilité de création des particules.

L'effet de la création de particules a de nombreuses applications en physique moderne des noyaux lourds aux trous noirs [7]. En cosmologie contemporaine, la création de particules a une influencc sur l'évolution de notre univers ct peut jouer un rôle très important dans la sortie de la phase d'inflation. Pour les trous noirs, le rayonnement de Hawking peut jouer en théorie quantique de la gravitation le même rôle que le rayonnement du corps noir joue en mécanique quantique.

L'ojectif de ce travail est d'étudier la création des particules par un champ gravitationnel en considérant un espace-temps courbe mais statique. Nous choisissons un modèle simple à une dimension dont l'équation d'onde admet des solutions analytiques et exactes afin de pouvoir comparer les résultats de différentes méthodes. L'espace-temps choisi est celui de de-Sitter décrit par la métrique

$$dS^2 = g(x)dt^2 - \frac{1}{g(x)}dx^2$$

Même si ce modèle n'a pas une motivation importante, les méthodes que nous allons employer peuvent être utiles dans les cas des trous noirs.

Pour étudier le phénomène de création de paires de particules à partir du vide par un champ électrique nous pouvons utiliser plusieurs méthodes comme par exemple la technique des intégrales de chemins [20, 21], la méthode semi-classique complexe [22, 23, 24], la technique de la transformation de Bogoliubov reliant les états "in" avec les états "out" [11, 25], la méthode de projection basée sur le calcul de la fonction de Green [26, 27, 28]. Dans ce travail nous allons utiliser la méthode canonique basée sur la transformation de Bogoliubov et la methode de la fonction de Green.

Chapitre 2

Paradoxe de Klein

2.1 Introduction

Brièvement le paradoxe de Klein s'observe dans la diffusion des particules relativistes par une barrière du potentiel où le flux de l'onde réfléchie par la barrière peut être supérieur à celui de l'onde incidente [6].

Dans ce chapitre, nous nous proposons de discuter l'apparition de ce paradoxe en présence d'une barrière de potentiel. Nous considérons des particules de spin 1/2. Le cas des particules de spin 0 est étudié dans [34].

Afin d'éviter beaucoup de calculs nous supposons que la particule se meut le long de l'axe (OX) et nous considérons l'équation de Dirac à (1+1) dimensions où les matrices γ peuvent être exprimées en fonction des matrices de Pauli.

2.2 L'équation de Dirac à deux dimensions

En général, l'équation stationnaire de Dirac dans un espace-temps de Minkowski à deux dimensions peut être écrite sous la forme

$$E\Psi(x) = H\Psi(x) = [\alpha P + \beta m + V(x)]\Psi(x), \tag{2.1}$$

où $P = -i\frac{\partial}{\partial x}$ et le potentiel $V(x)$ est donné par

$$V(x) = \frac{V_0}{2}\left(1 + \tanh\frac{x}{2\sigma}\right). \tag{2.2}$$

Ici nous considérons le système des unités naturelles où $\hbar = c = 1$. Les matrices α, β et γ^5 sont données en terme des matrices de Pauli

$$\beta = \sigma_z\ ,\ \beta\alpha = i\sigma_y\ ,\ \gamma^5 = i\sigma_x. \tag{2.3}$$

Il est bien connu que l'équation de Dirac est exactement soluble pour ce potentiel.

Posant $\Psi = \binom{\psi_1}{\psi_2}$, nous obtenons pour les deux composantes du spineur de Dirac ψ_1 et ψ_2, les deux équations suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi_1 = i(E + m - V_0(x))\psi_2 \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi_2 = i(E - m - V_0(x))\psi_1. \tag{2.5}$$

Pour résoudre ce système d'équations nous posons

$$\psi_+ = \psi_1 + \psi_2 \tag{2.6}$$

$$\psi_- = \psi_1 - \psi_2. \tag{2.7}$$

Les nouvelles composantes ψ_+ et ψ_- vérifient alors le système d'équations suivant :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} - i\left(E - V(x)\right)\right]\psi_+ = -im\psi_- \tag{2.8}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} + i\left(E - V(x)\right)\right]\psi_- = im\psi_+. \tag{2.9}$$

Par itération nous obtenons pour chaque composante une équation différentielle du second ordre

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(E - V(x)\right)^2 + iV'(x) - m^2\right]\psi_+ = 0 \tag{2.10}$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(E - V(x)\right)^2 - iV'(x) - m^2\right]\psi_- = 0, \tag{2.11}$$

où $V'(x) = \frac{\partial}{\partial x}V(x)$.

Chacune des équations (2.10) et (2.11) est exactement soluble (Voir le mémoire de Master de Benzekka [34]). Afin de trouver des solutions exactes pour l'équation (2.1), faisons le changement de variable $x \rightarrow \xi$, avec

$$\xi = \frac{1}{2}\left(1 + \tanh\frac{x}{2\sigma}\right). \tag{2.12}$$

Dans ce cas, comme $d\xi = \frac{1}{4\sigma}\left(1 - \tanh^2\frac{1}{2}\frac{x}{\sigma}\right)dx$, nous pouvons écrire

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\sigma}\xi\left(1-\xi\right)\frac{\partial}{\partial \xi}. \tag{2.13}$$

Pour la dérivée seconde, nous avons

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \sigma^{-2}\xi^2\left(1-\xi\right)^2\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \sigma^{-2}\xi\left(1-\xi\right)\left(1-2\xi\right)\frac{\partial}{\partial \xi}. \tag{2.14}$$

Nous arrivons, alors, à l'équation suivante

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{1-\xi}\right)\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi\left(1-\xi\right)}\left(\frac{\alpha\alpha'}{\xi} + \frac{\gamma\gamma'}{1-\xi} - \beta\beta'\right)\right]\psi_s = 0, \tag{2.15}$$

où

$$\begin{aligned} \alpha &= -\alpha' = i\sigma k && (2.16)\\ \gamma &= -\gamma' = i\sigma k' && (2.17)\\ \beta &= 1-\beta' = 1+isV_0\sigma, && (2.18)\end{aligned}$$

avec $s = \pm 1$ et

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{E^2-m^2} && (2.19)\\ k' &= \sqrt{(E-V_0)^2-m^2}. && (2.20)\end{aligned}$$

Les paramètres α, α', β, β', γ et γ' vérifient la condition $\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma'=1$.

Dans ce cas, les deux solutions linéairement indépendantes peuvent être données par

$$\begin{aligned} \psi_{s,1} &= \xi^{\alpha}(1-\xi)^{\gamma} F(\alpha+\beta+\gamma, \alpha+\beta'+\gamma; 1+\alpha-\alpha'; \xi) && (2.21)\\ \psi_{s,2} &= \xi^{\alpha'}(1-\xi)^{\gamma} F(\alpha'+\beta+\gamma, \alpha'+\beta'+\gamma; 1+\alpha'-\alpha; \xi) && (2.22)\end{aligned}$$

ou bien par

$$\begin{aligned} \psi_{s,3} &= \xi^{\alpha}(1-\xi)^{\gamma} F(\gamma+\beta+\alpha, \gamma+\beta'+\alpha; 1+\gamma-\gamma'; 1-\xi) && (2.23)\\ \psi_{s,4} &= \xi^{\alpha}(1-\xi)^{\gamma'} F(\gamma'+\beta+\alpha, \gamma'+\beta'+\alpha; 1+\gamma'-\gamma; 1-\xi), && (2.24)\end{aligned}$$

où $F(a,b,c,z)$ est la fonction hypergéometrique de Gauss.

Ayant déterminée les solutions exactes de l'équation (2.15), considérons maintenant la diffusion de la particule de Dirac par une barrière du potentiel.

2.3 Etude de la diffusion

Pour étudier la diffusion de la particule de Dirac par la barrière du potentiel donnée par (2.2), il faut tout d'abord étudier le comportement asymptotique des solutions obtenues, quand $x \to +\infty$ et $x \to -\infty$, pour avoir la bonne définition de la fonction d'onde se propageant à gauche ainsi que la fonction d'onde se propageant à droite. C'est ainsi que nous fassions encore une fois le changement de variable $\xi \to y$, avec

$$y = \frac{1}{1+\exp(x/\sigma)}, \qquad (2.25)$$

pour réécrire les solutions de l'équation (2.15), pour $s = +1$, comme suit

$$\begin{aligned}\psi_{+,1} &= y^{i\sigma k\prime}(1-y)^{i\sigma k} \\ &\quad F\left(i\sigma\left(k+k'\right)+l+1, i\sigma\left(k-k'\right)-l; 1+2i\sigma k; 1-y\right),\end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned}\psi_{+,2} &= y^{i\sigma k\prime}(1-y)^{-ik} \\ &\quad F\left(i\sigma\left(k'-k\right)+1+l; i\sigma\left(k'-k\right)-l; 1-2i\sigma k; 1-y\right),\end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned}\psi_{+,3} &= y^{i\sigma k\prime}(1-y)^{i\sigma k} \\ &\quad F\left(i\sigma\left(k+k'\right)+l+1, i\sigma\left(k'-k\right)-l, 1+2i\sigma k', y\right)\end{aligned} \tag{2.28}$$

et

$$\begin{aligned}\psi_{+,4} &= y^{-i\sigma k\prime}(1-y)^{i\sigma k} \\ &\quad F\left(i\sigma\left(k-k'\right)+l+1, i\sigma\left(k-k'\right)-l, 1-2i\sigma k', y\right).\end{aligned} \tag{2.29}$$

Comme nous allons le voir, cette écriture est plus commode pour processus de la diffusion. Elle nous permet d'en déduire rapidement le comportement asymptotique des solutions. En effet, nous pouvons voir que $1-y \to \exp(x/\sigma)$ quand $x \to -\infty$ et $y \to \exp(-x/\sigma)$ quand $x \to +\infty$ et, par conséquent, compte tenu de la propriété $F(a,b;c;0)=1$, les fonctions $\psi_{+,1}$ et $\psi_{+,2}$ se comportent à $(-\infty)$ comme

$$\psi_{+,1} \sim \exp(ikx) \tag{2.30}$$

$$\psi_{+,2} \sim \exp(-ikx). \tag{2.31}$$

De l'autre coté quand $x \to +\infty$, nous obtenons

$$\psi_{+,3} \sim \exp(-ik'x) \tag{2.32}$$

$$\psi_{+,4} \sim \exp(ik'x). \tag{2.33}$$

Maintenant, pour voir le comportement asymptotique des solutions $\psi_{+,1}$ et $\psi_{+,2}$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ et $\psi_{+,3}$ et $\psi_{+,4}$ à $-\infty$, nous utilisons la transformation des fonctions hypergéométriques

$$\begin{aligned} F(u,v;w;y) = {} & \frac{\Gamma(w)\,\Gamma(w-v-u)}{\Gamma(w-u)\,\Gamma(w-v)} F(u,v;u+v-w+1;1-y) \\ & + (1-y)^{w-u-v} \frac{\Gamma(w)\,\Gamma(u+v-w)}{\Gamma(u)\,\Gamma(v)} \\ & F(w-u,w-v;w-v-u+1;1-y)\,. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Cela nous conduit directement aux approximations suivantes : 1) Pour $x \rightarrow -\infty$, nous avons

$$\psi_{+,3} \sim C_1 \exp(ikx) + C_2 \exp(-ikx) \tag{2.35}$$

$$\psi_{+,4} \sim C_3 \exp(ikx) + C_4 \exp(-ikx)\,. \tag{2.36}$$

2) Pour $x \rightarrow +\infty$, nous avons

$$\psi_{+,1} \sim C_1' \exp(ik'x) + C_2' \exp(-ik'x) \tag{2.37}$$

$$\psi_{+,2} \sim C_3' \exp(ik'x) + C_4' \exp(-ik'x) \tag{2.38}$$

où C_i et C_i', avec $i = \overline{1,4}$, sont des constantes.

Nous distinguons, 3 situations différentes.

2.3.1 Premier cas : $E > m + V_0$; k, k' réels

Cette situation est bien schématisée par la figure suivante

Dans ce cas, nous pouvons voir que k et k' sont des réels positifs et la solution de l'équation de Dirac a le comportement asymptotique suivant :

Pour $x \rightarrow +\infty$, elle est sous la forme

$$\Psi_{\rightarrow} = \sqrt{\frac{E - V_0 + m}{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} \exp(ik'x) \tag{2.39}$$

où la constante μ_1 est donnée par

$$\mu_1 = \frac{k'}{E - V_0 + m}. \tag{2.40}$$

Pour $x \to -\infty$, nous avons

$$\Psi_{\to} = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} A \exp(ikx) + \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mu_2 \end{pmatrix} B \exp(-ikx) \tag{2.41}$$

où

$$\mu_2 = \frac{k}{E+m} \tag{2.42}$$

et

$$A = \frac{\Gamma(1-2i\sigma k')\Gamma(2i\sigma k)}{\Gamma(-i\sigma(k+k')-l)\Gamma(-i\sigma(k+k')+l+1)} \tag{2.43}$$

$$B = \frac{\Gamma(1-2i\sigma k')\Gamma(2i\sigma k)}{\Gamma(i\sigma(k-k')+l+1)\Gamma(i\sigma(k-k')-l)}. \tag{2.44}$$

Ce qui nous donne les coefficients de transmission $\mathbf{T}$ et de réflexion $\mathbf{R}$

$$\mathbf{R} = \left|\frac{\Gamma(l+1-i\sigma k-i\sigma k')\Gamma(-i\sigma k-i\sigma k'-l)}{\Gamma(i\sigma(k-k')-l)\Gamma(i\sigma(k-k')+l+1)}\right|^2 \tag{2.45}$$

$$= \frac{\cosh(2\pi\sigma(k-k'))-\cosh(2\pi\sigma V_0)}{\cosh(2\pi\sigma(k+k'))-\cosh(2\pi\sigma V_0)} \tag{2.46}$$

et

$$\mathbf{T} = \frac{k'}{k}\left|\frac{\Gamma(l+1-i\sigma k-i\sigma k')\Gamma(-i\sigma k-i\sigma k'-l)}{\Gamma(2i\sigma k)\Gamma(-2i\sigma k'+1)}\right|^2 \tag{2.47}$$

$$= \frac{2\sinh(2\pi\sigma k)\sinh(2\pi\sigma k')}{\cosh(2\pi\sigma(k+k'))-\cosh(2\pi\sigma V_0)} \tag{2.48}$$

Ici, nous remarquons que

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}+\mathbf{R} &= \frac{\cosh(2\pi\sigma(k-k'))-\cosh(2\pi\sigma V_0)+2\sinh(2\pi\sigma k)\sinh(2\pi\sigma k')}{\cosh(2\pi\sigma(k+k'))-\cosh(2\pi\sigma V_0)} \\
&= \frac{\cosh(2\pi\sigma(k-k'))-\cosh(2\pi\sigma V_0)+\cosh(2\pi\sigma(k+k'))-\cosh(2\pi\sigma(k-k'))}{\cosh(2\pi\sigma(k+k'))-\cosh(2\pi\sigma V_0)} \\
&= 1.
\end{aligned} \tag{2.49}$$

2.3.2 Deuxieme cas : $E < m + V_0$ et $V_0 < 2m$

Cette situation est schématisée par la figure suivante :

Dans ce cas nous pouvons voir que k' est imaginaire ($k' = i\,|k'|$) et la solution de l'équation de Dirac au voisinage de $+\infty$ est de la forme

$$\psi(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} N'U \exp\left(-|k'|\,x\right) \to 0, \tag{2.50}$$

où N' est une constante de normalisation et U est un spineur. Il vient donc que $\mathbf{R} = 1$ et $\mathbf{T} = 0$. Il y a donc une réflexion totale. Ce résultat est bien en accord avec les prédictions de la mécanique quantique nonrelativiste.

2.3.3 Troisiéme cas : $V_0 > 2m$ et $E < -m + V_0$ (Paradoxe de Klein)

Cette situation est schématisée sur la figure suivante :

Dans ce cas, la solution de l'équation de Dirac a le comportement suivant :

$$\Psi_{\rightarrow} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{E - V_0 + m}{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} \exp\left(-ik'x\right), \tag{2.51}$$

où la constante μ_1 est donnée par :

$$\mu_1 = \frac{-k'}{E - V_0 + m}, \tag{2.52}$$

et

$$\begin{aligned} \Psi_{\rightarrow} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} & \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} A" \exp\left(ikx\right) \\ & + \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mu_2 \end{pmatrix} B" \exp\left(-ikx\right), \end{aligned} \tag{2.53}$$

avec

$$\mu_2 = \frac{k}{E+m} \tag{2.54}$$

et

$$A'' = \frac{\Gamma(1+2i\sigma k')\,\Gamma(2i\sigma k)}{\Gamma(-i\sigma(k-k')-l)\,\Gamma(-i\sigma(k-k')+l+1)} \tag{2.55}$$

$$B'' = \frac{\Gamma(1+2i\sigma k')\,\Gamma(2i\sigma k)}{\Gamma(i\sigma(k+k')+l+1)\,\Gamma(i\sigma(k+k')-l)}. \tag{2.56}$$

Ce qui nous donne

$$\mathbf{R} = \frac{\cosh(2\pi\sigma(k+k')) - \cosh(2\pi\sigma V_0)}{\cosh(2\pi\sigma(k-k')) - \cosh(2\pi\sigma V_0)} \tag{2.57}$$

et

$$\mathbf{T} = \frac{2\sinh(2\pi\sigma k)\sinh(2\pi\sigma k')}{\cosh(2\pi\sigma(k-k')) - \cosh(2\pi\sigma V_0)}. \tag{2.58}$$

Ici, nous remarquons que $\mathbf{R} > 1$ et

$$\mathbf{R} - \mathbf{T} = \frac{\cosh(2\pi\sigma(k+k')) - \cosh(2\pi\sigma V_0) - 2\sinh(2\pi\sigma k)\sinh(2\pi\sigma k')}{\cosh(2\pi\sigma(k-k')) - \cosh(2\pi\sigma V_0)} = 1. \tag{2.59}$$

2.3.4 Discussion

Nous constatons ici que le flux de l'onde réfléchie par la barrière du potentiel est supérieur à celui de l'onde incidente. Ce résultat extraordinaire, connu sous le nom "Paradoxe de Klein", peut avoir une justification théorique en faisant intervenir la notion de trous de Dirac qui a modifié la notion du vide en mécanique quantique. Selon cette théorie le vide n'est pas vraiment "vide" mais une "mer de Dirac" qui contient des particules virtuelles ayant une énergie négative. Alors, compte tenu du principe de Pauli, la solution $\Psi_{\rightarrow} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(-ik'x)$ ne peut décrire la particule transmise puisque les états d'énergies négatives sont occupés. Suivant l'interprétation de Feynman, les antiparticules sont des états des particules se déplaçant dans le sens inverse du temps, ce qui implique que pour l'antiparticule [29]

$$\tilde{p} = \frac{dx}{d(-t)} = -\frac{dx}{d(t)} = -p. \tag{2.60}$$

La fonction $\Psi_{\rightarrow} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(-ik'x)$ décrit donc une antiparticule qui se déplace vers la droite avec un vecteur d'onde k'. On dit alors que des paires particule-antiparticule sont créées au voisinage de la barrière. De plus, si nous considérons qu'il y a une réflexion totale, la probabilité de création d'une paire sera donnée par

$$\mathcal{P}_{Cr.} = \frac{\mathbf{T}}{\mathbf{R}} = \frac{2\sinh(2\pi\sigma k)\sinh(2\pi\sigma k')}{\cosh(2\pi\sigma(k+k')) - \cosh(2\pi\sigma V_0)}. \tag{2.61}$$

Etudions à la fin de ce chapitre deux cas particuliers, à savoir, la limite $\sigma \to 0$ et la limite $\sigma \to \infty$ avec $V_0 = 4eE_0\sigma$.

A limite $\sigma \to 0$, la barrière devient une marche de potentiel "Step". C'est facile de montrer qu'à cette limite, on obtient les expressions

$$\mathbf{R} = \frac{(k+k')^2 - V_0^2}{(k-k')^2 - V_0^2}, \tag{2.62}$$

$$\mathbf{T} = \frac{4kk'}{(k-k')^2 - V_0^2} \tag{2.63}$$

qui coincident exactement avec le résultat obtenu à partir de l'équation de Dirac [29] ainsi que celui obtenu par Bounames et Chetouani en utilisant l'équation de Feshbach-Villars à 8 composantes [30].

La deuxième limite reproduit un champ électrique constant et homogène. Dans ce cas, en utilisant le développement

$$k = 2eE_0\sigma + E - \frac{1}{4}\frac{m^2}{eE_0\sigma} + ...$$

$$k' = 2eE_0\sigma - E - \frac{1}{4}\frac{m^2}{eE_0\sigma} + ...$$

nous obtenons

$$\mathcal{P}_{Cr.} = \frac{\exp\left(-\pi\frac{m^2}{eE_0}\right)}{1-\exp\left(-\pi\frac{m^2}{eE_0}\right)}. \tag{2.64}$$

Ce résultat est aussi en accord avec les résultats obtenus dans le cadre de la théorie quantique des champs [11][31].

2.4 Particules de Spin 0

Pour les particules de Spin 0 nous avons dans la region de Klein (i.e. $V_0 > 2m$ et $E < -m + V_0$) [34]

$$\mathbf{R} = \frac{\cosh\left(2\pi\sigma\left(k+k'\right)\right) - \cos\left(2\pi l\right)}{\cosh\left(2\pi\sigma\left(k-k'\right)\right) - \cos\left(2\pi l\right)} \tag{2.65}$$

et

$$\mathbf{T} = \frac{2\sinh\left(2\pi\sigma k\right)\sinh\left(2\pi\sigma k'\right)}{\cosh\left(2\pi\sigma\left(k-k'\right)\right) - \cos\left(2\pi l\right)}. \tag{2.66}$$

avec

$$l = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \sqrt{4V_0^2 \sigma^2 - 1}. \tag{2.67}$$

Nous remarquons que $\mathbf{R} > \mathbf{1}$ et que $\mathbf{R} - \mathbf{T} = \mathbf{1}.$ Nous pouvons conclure que le paradoxe de Klein éxiste même pour une particule scalaire (de Klein Gordon).

A la limite $\sigma \to 0$ qui est le cas du potentiel "step", nous obtenons

$$\mathbf{R} = \left(\frac{k + k'}{k - k'} \right)^2 \tag{2.68}$$

$$\mathbf{T} = \frac{4kk'}{(k - k')^2} \tag{2.69}$$

Pour un champ constant ($\sigma \to \infty$) nous avons

$$\mathcal{P}_{Cr.} = \frac{\exp\left(-\pi \frac{m^2}{eE_0}\right)}{1 + \exp\left(-\pi \frac{m^2}{eE_0}\right)}. \tag{2.70}$$

Ce résultat est aussi en accord avec les résultats obtenus dans le cadre de la théorie quantique des champs [11][31].

Remarque

Certain physiciens définissent, dans le cas où $V_0 > 2m$ et $E < -m + V_0$, le coefficient $\mathbf{T}$ avec un signe $(-)$ de sorte que $\mathbf{R} + \mathbf{T} = \mathbf{1}$. Cela n'influe pas sur l'éxistence du paradoxe de Klein. Le signe $(-)$ est expliqué comme suit : Dans le cas où $V_0 > 2m$, le potentiel est suffisamment fort pour créer une paire particule-antiparticule. Les antiparticules sont attirées par le potentiel et génèrent un courant négatif se déplaçant vers la droite, ce qui explique le coefficient de transmission négatif.

Chapitre 3

Création de particules scalaires par un champs éléctrique

3.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'introduire la méthode canonique de Bogoliubov et de montrer comment obtenir la probabilité de création d'une paire de particules à partir du vide ainsi que la densité des particules créées. Nous considérons le cas d'un champ scalaire complexe en présence d'un champ électrique extérieur. Dans ce cas, comme nous allons le voir, la théorie n'a pas un vide bien déterminé et la notion de particule n'est pas toute à fait claire. On dit alors que le vide est perturbé par le champ extérieur et donc instable [32, 33]. Ils existent cependant des instants pour lesquels l'interprétation en terme des particules est possible. Généralement ces instants sont le passé et le future lointains. Il est bien évident que les états de particules engendrés à partir de ces deux vides sont dits les états "in" et "out". Ces états ne sont rien d'autres que les solutions de l'équation de Klein Gordon en présence du champ électrique qui peut s'écrire sous la forme

$$\left[\left(\hat{p}_\mu - eA_\mu\left(x\right)\right)^2 - m^2\right]\psi\left(t,x\right) = 0, \tag{3.1}$$

où $\psi\left(t,x\right)$ est le champ de la matière de masse m et de charge e et A_μ est 2- vecteur potentiel qui décrit le champ éléctrique.

Nous remarquons que le champ éléctrique constant peut être décrit par deux jauges ; la jauge spatiale $A_\mu = (-Ex, 0)$ et la jauge temporelle $A_\mu = (0, Et)$.

Nous effectuons les calculs dans les deux jauges en montrant ainsi l'invariance de jauge du problème. Ensuite nous considérons la jauge spatiale mais dans la représentation des impulsions qui est trés utile en présence d'une longueur minimale.

3.2 La jauge spatiale

Considérons maintenant la jauge suivante

$$A^\mu \equiv \left(-Ex, 0\right). \tag{3.2}$$

Pour ce potentiel vecteur l'équation de Klein Gordon est exactement soluble. L'identification des états "in" et "out" est cependant ne pas tout à fait claire. Il existe en littérature deux choix pour ces états, à savoir, le choix de Hansen et Ravandal [36] et celui de Nikishov [25]. Dans ce mémoire nous prenons le choix de Hansen et Ravandal. Commençons d'abord par la solution de l'équation de Klein Gordon.

3.2.1 Solutions exactes de l'équation de Klein Gordon

Pour résoudre l'équation de Klein Gordon, nous écrivons la solution sous la forme

$$\psi(t,x)=\exp(i\omega t)\,\varphi(x)\,. \tag{3.3}$$

L'équation résultante est

$$\left[(\omega+eEx)^2+\frac{\partial^2}{\partial x^2}-m^2\right]\varphi(x)=0, \tag{3.4}$$

en faisant le changement de variable

$$\xi=\sqrt{2ieE}\left(x+\frac{\omega}{eE}\right), \tag{3.5}$$

nous obtenons l'équation différentielle

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}-\frac{1}{4}\xi^2+\gamma+\frac{1}{2}\right]\tilde{\varphi}(\xi)=0, \tag{3.6}$$

où $\tilde{\varphi}(\xi)\equiv\varphi(x)$ et

$$\gamma=-\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\frac{m^2}{eE}. \tag{3.7}$$

L'équation (3.6) admet deux ensembles de solutions exactes qui peuvent être écrites en termes de fonctions de Weber (PCF_s) [35]. Selon [36] et [3] la classification de ces solutions en états "in" et "out" est comme suit :

$$\begin{aligned}
\varphi_{in}^{-}(x) &= D_{\gamma^*}\left[(1-i)\sqrt{eE}\left(x+\frac{\omega}{eE}\right)\right], && (3.8)\\
\varphi_{in}^{+}(x) &= D_{\gamma}\left[-(1+i)\sqrt{eE}\left(x+\frac{\omega}{eE}\right)\right], && (3.9)\\
\varphi_{out}^{-}(x) &= D_{\gamma}\left[(1+i)\sqrt{eE}\left(x+\frac{\omega}{eE}\right)\right], && (3.10)\\
\varphi_{out}^{+}(x) &= D_{\gamma^*}\left[-(1-i)\sqrt{eE}\left(x+\frac{\omega}{eE}\right)\right]. && (3.11)
\end{aligned}$$

3.2.2 Création des particules

Nous utilisons la transformation de Bogoliubov reliant les états "in" et "out" pour déterminer la probabilité de création de particules et la densité des particules créées. Comme l'ensemble $\left\{\varphi_{out}^{+}(x), \varphi_{out}^{-}(x)\right\}$ forme une base pour l'espace des solutions de l'équation (3.6) , nous pouvons écrire l'ensemble $\left\{\varphi_{in}^{+}(x), \varphi_{in}^{-}(x)\right\}$ comme une combinaison linéaire des fonctions $\varphi_{out}^{+}(x)$ et $\varphi_{out}^{-}(x)$. En tenant compte du fait que $\gamma^{*}=-\gamma-1$ et en utilisant la formule suivante [35] :

$$D_{\gamma}(\xi)=\exp\{i\pi\gamma\} D_{\gamma}(-\xi)-\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\gamma)}\exp\left\{\frac{i\pi\gamma}{2}\right\} D_{-\gamma-1}(-i\xi) \tag{3.12}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \varphi_{in}^{+}(x) &= c_1\varphi_{out}^{+}(x)+c_2\varphi_{out}^{-}(x) &(3.13)\\ \varphi_{in}^{-}(x) &= c_2^{*}\varphi_{out}^{+}(x)+c_1^{*}\varphi_{out}^{-}(x). &(3.14)\end{aligned}$$

Cette écriture est dite transformation de Bogoliubov où les coefficients (de Bogoliubov) c_1 et c_2, donnés par

$$c_1=\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu^{*})}e^{\frac{i\pi}{2}(\nu^{*}+\frac{1}{2})} \tag{3.15}$$

et

$$c_2= e^{i\pi\nu^{*}}, \tag{3.16}$$

et vérifient la condition

$$|c_1|^2-|c_2|^2=1. \tag{3.17}$$

La relation entre les modes "in" et "out" (3.13) et (3.14) peut être convertie selon la théorie quantique des champs en une relation entre les opérateurs de création et d'annihilation

$$\begin{aligned} a_{\omega,out} &= c_1 a_{\omega,in}+c_2^{*}b_{\omega,in}^{+}, &(3.18)\\ b_{\omega,out}^{+} &= c_2 a_{\omega,in}+c_1^{*}b_{\omega,in}^{+}. &(3.19)\end{aligned}$$

En utilisant ces deux dernières relations nous arrivons au résultat suivant

$$\langle 0_{in}|\,\hat{a}_{k,out}^{+}\,\hat{a}_{k,out}\,|0_{in}\rangle=\langle 0_{in}|\,b_{k,out}^{+}\,b_{k,out}\,|0_{in}\rangle=|c_2|^2, \tag{3.20}$$

ce qui montre que le vide $|0_{in}\rangle$ contient des particules "out". L'explication de ce résultat est que la présence du champ électrique perturbe le vide $|0_{in}\rangle$ et produit des paires de particules.

Selon les principes généraux de la théorie quantique des champs, l'amplitude de transition de l'état $|0_{in}\rangle$ à l'état $a^{+}_{k,out} b^{+}_{k,out} |0_{out}\rangle$ est donnée par

$$A = \langle 0_{out}| \hat{b}_{k,out} \ \hat{a}_{k,out} |0_{in}\rangle . \tag{3.21}$$

Compte tenu des équations (3.62) et (3.63), $b_{k,out}$ peut s'écrire en fonction de $b_{k,in}$ et $a^{+}_{k,out}$

$$b_{k,out} = \frac{1}{c_1^*} b_{k,in} + \frac{c_2^*}{c_1^*} a^{+}_{k,out} \tag{3.22}$$

et l'amplitude A se réduit à

$$A = \left| \frac{c_2^*}{c_1^*} \right|^2 \langle 0_{out}| \, 0_{in}\rangle . \tag{3.23}$$

La probabilité de création d'une paire dans l'état $\vec{k}$ est alors donné par

$$P_{\vec{k}} = \left| \frac{c_2^*}{c_1^*} \right|^2 \tag{3.24}$$

$$= \left| \frac{\Gamma(-\nu)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{i\pi}{2}\nu} \right|^2 . \tag{3.25}$$

En utilisant la formule

$$\left| \Gamma(\frac{1}{2} + ix) \right|^2 = \frac{\pi}{\cosh \pi x} \tag{3.26}$$

nous obtenons

$$P_{\vec{k}} = \frac{e^{-\pi \frac{m^2}{2e\,E}}}{2 \cosh \pi \left(\frac{m^2}{2eE} \right)} = \frac{\exp\left(-\pi \frac{m^2}{eE}\right)}{1 + \exp\left(-\pi \frac{m^2}{eE}\right)} . \tag{3.27}$$

La densité des particules créées dans l'état $\vec{k}$ est

$$n\left(\vec{k}\right) = \left| e^{i\pi\nu^*} \right|^2 = \exp\left(-\pi \frac{m^2}{eE} \right) . \tag{3.28}$$

3.3 La jauge temporelle

En présence d'un champ électrique constant et homogène E, décrit par la jauge

$$A_z(t) = -Et, \tag{3.29}$$

l'équation de Klein Gordon se réduit à

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + (k + eEt)^2 + m^2 \right] \chi(t) = 0 \tag{3.30}$$

avec $\psi(t, x) = e^{ikx} \ \chi(t)$.

3.3.1 Solutions exactes de l'équation de Klein Gordon

Pour résoudre cette équation nous faisons le changement de variable

$$Z = \sqrt{eE}\left(t + \frac{k_z}{eE}\right). \tag{3.31}$$

Dans ce cas nous avons

$$\frac{d^2}{dt^2} = eE\frac{d^2}{dZ^2} \tag{3.32}$$

l'équation résultante de ce changement prend la forme

$$\left[\frac{d^2}{dZ^2} + Z^2 + \lambda\right]\chi(t) = 0 \tag{3.33}$$

avec

$$\lambda = \frac{m^2}{eE}. \tag{3.34}$$

Suivant [35] l'équation (3.33) a deux ensembles de solutions. Le premier ensemble est donné par

$$\chi_1(t) = D_\nu((1+i)\,Z) \tag{3.35}$$

$$\chi_2(t) = D_\nu(-(1+i)\,Z) \tag{3.36}$$

où $D_\nu(x)$ sont les fonctions de Weber et

$$\nu = -\frac{1+i\,\lambda}{2}. \tag{3.37}$$

Pour le deuxième ensemble nous avons

$$\chi_3(t) = D_{\nu^*}((1-i)\,Z) \tag{3.38}$$

$$\chi_4(t) = D_{\nu^*}(-(1-i)\,Z). \tag{3.39}$$

3.3.2 Equation d'Hamilton-Jacobi et états "in" et "out"

Pour un champ constant qui ne s'annule pas a l'nfini, la définition des états "in" et "out" n'est pas triviale. Ces états, cependant, peuvent être définies à l'aide de la solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi, en admettant que les états d'énergie négative et positive se comporte a $\pm\infty$ comme les solutions semi-classiques. Ainsi, nous commençons d'abord par résoudre l'équation semi-classique d'Hamilton-Jacobi. Puis, nous comparons ces solutions avec les solutions semi-classiques $\varphi(t,x) \sim e^{\pm iS}$. Cela nous permet de classer nos solutions en états "in" et "out".

Ensuite nous utilisons la transformation de Bogoliubov pour calculer la probabilité de création d'une paire de particules et la densité des particules créées.

L'équation relativiste de Hamilton-Jacobi s'écrit

$$(\partial_u S - eA_u)((\partial^u S - eA^u) + m^2 = 0 \tag{3.40}$$

En séparant la partie dependante de x,

$$S = kx + G(t), \tag{3.41}$$

nous obtenons pour $G(t)$ l'équation suivante

$$\left(\frac{dG}{dt}\right)^2 = m^2 + (k - eA_x(t))^2, \tag{3.42}$$

dont la solution formelle est

$$G(t) = \pm \int \sqrt{m^2 + (k - eA_x(t))^2} dt. \tag{3.43}$$

Pour un champ constant cette dernière équation est intégrable (voir l'annaxe A). Quand $|t| \to \infty$, nous pouvons voir que la solution $G(t)$ se comporte comme :

$$G(t) = \pm\frac{1}{2}eEt^2. \tag{3.44}$$

Par conséquent, les états $\chi_{in}^{\pm}(t)$ et $\chi_{out}^{\pm}(t)$ doivent se comporter comme suit

$$\lim_{t\to -\infty} \chi_{in}^{\pm}(t) \simeq e^{\mp i\frac{1}{2}eEt^2} \tag{3.45}$$

et

$$\lim_{t\to +\infty} \chi_{out}^{\pm}(t) \simeq e^{\mp i\frac{1}{2}eEt^2}. \tag{3.46}$$

D'autre part, en tenant compte du comportement des fonctions $D_\nu(Z)$, [35]

$$D_\nu(Z) \underset{|Z|>>|\nu|}{\simeq} Z^\nu e^{-\frac{z^2}{4}} \qquad \text{avec} \qquad |\arg(Z)| < \frac{3\pi}{4} \tag{3.47}$$

nous obtenons

$$\chi_1(t)_{t\to +\infty} \simeq e^{-i\frac{1}{2}eEt^2} \tag{3.48}$$

$$\chi_2(t)_{t\to -\infty} \simeq e^{+i\frac{1}{2}eEt^2} \tag{3.49}$$

$$\chi_3(t)_{t\to +\infty} \simeq e^{+i\frac{1}{2}eEt^2} \tag{3.50}$$

$$\chi_4(t)_{t\to -\infty} \simeq e^{-i\frac{1}{2}eEt^2}. \tag{3.51}$$

En faisant une comparaison de (3.45) et (3.46) d'une part et (3.48)-(3.51) de l'autre part, nous déduisons que les états $\chi_{in}^{\pm}(t)$ et $\chi_{out}^{\pm}(t)$ sont donnés par

$$\begin{aligned}
\chi_{out}^{+}(t) &= \frac{1}{(2eE)^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{i\pi}{4}\nu} D_{\nu}((1+i)\,Z) && (3.52)\\
\chi_{out}^{-}(t) &= \frac{1}{(2eE)^{\frac{1}{4}}} e^{\frac{i\pi}{4}\nu^*} D_{\nu^*}((1-i)\,Z) && (3.53)\\
\chi_{in}^{+}(t) &= \frac{1}{(2eE)^{\frac{1}{4}}} e^{\frac{i\pi}{4}\nu^*} D_{\nu^*}(-(1-i)\,Z) && (3.54)\\
\chi_{in}^{-}(t) &= \frac{1}{(2eE)^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{i\pi}{4}\nu} D_{\nu}(-(1+i)\,Z), && (3.55)
\end{aligned}$$

où les constantes de normalisation $(2eE)^{-\frac{1}{4}}\, e^{\pm\frac{i\pi}{4}\nu}$ et $(2eE)^{-\frac{1}{4}}\, e^{\pm\frac{i\pi}{4}\nu^*}$ sont déterminés à partir de la condition

$$\chi^*\dot{\chi} - \chi\dot{\chi}^* = 2i. \tag{3.56}$$

3.3.3 Création de particules

Pour obtenir la probabilité de création d'une paire de particules et la densité des particules créées nous utilisons la transformation [35]

$$D_{\nu}(z) = e^{-i\pi\,\nu} D_{\nu}(-Z) + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)} e^{-i\frac{\pi}{2}(\nu+1)} D_{-\nu-1}(iZ) \tag{3.57}$$

qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\chi_{in}^{+}(t) &= c_1\, \chi_{out}^{+}(t) + c_2\, \chi_{out}^{-}(t), && (3.58)\\
\chi_{in}^{-}(t) &= c_2^*\, \chi_{out}^{+}(t) + c_1^*\, \chi_{out}^{-}(t), && (3.59)
\end{aligned}$$

où les coefficients de Bogoliubov c_1 et c_2 , sont cette fois ci donnés par

$$\begin{aligned}
c_1 &= -\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\gamma)} \exp\left\{\frac{i\pi\gamma}{2}\right\}, && (3.60)\\
c_2 &= \exp\{i\pi\gamma\}. && (3.61)
\end{aligned}$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}
a_{k,out} &= c_1\, a_{k,in} + c_2\, b_{k,in}^{+}, && (3.62)\\
b_{k,out}^{+} &= c_2^*\, a_{k,in} + c_1^*\, b_{k,in}^{+}. && (3.63)
\end{aligned}$$

Par conséquent la probabilité pour créer une paire de particules à partir du vide est donnée par :

$$p_k = \left|\frac{c_2^*}{c_1^*}\right|^2. \tag{3.64}$$

En utilisant la formule (3.26) nous obtenons :

$$p_k = \frac{\exp\left(-\pi\frac{m^2}{eE}\right)}{1+\exp\left(-\pi\frac{m^2}{eE}\right)}. \tag{3.65}$$

La densité des particules créées dans un état k (le nombre moyen de particules créées par état) est donnée par

$$n(k) = |c_2|^2 = \exp\left(-\pi\frac{m^2}{eE}\right). \tag{3.66}$$

Les équations (3.65) et (3.66) prouvent en premier lieu l'invariance de jauge de la théorie et montre que le présent choix des modes "in" et "out" mène aux résultats exacts de la création de particules.

Remarque :

A $(3+1)$ dimensions la probabilité de création d'une paire dans l'état $\vec{k}$ s'obtient à partir de (3.65) en faisant le changement $m^2 \to m^2 + k_\perp^2$, avec $k_\perp^2 = k_x^2 + k_y^2$,

$$P_{\vec{k}} = \frac{\exp\left(-\pi\frac{m^2+k_\perp^2}{eE}\right)}{1+\exp\left(-\pi\frac{m^2+k_\perp^2}{eE}\right)} \tag{3.67}$$

3.4 Action effective de Schwinger

Soit $C_{\vec{k}}$ la probabilité pour qu'il n'y ait pas de création de paires dans l'état $\vec{k}$. La quantité $C_{\vec{k}}\left(P_{\vec{k}}\right)^n$ est donc la probabilité de créer seulement n paires dans l'état $\vec{k}$. Il s'en suit que

$$\sum_n C_{\vec{k}}\left(P_{\vec{k}}\right)^n = 1, \tag{3.68}$$

ce qui nous donne

$$C_{\vec{k}} = 1 - P_{\vec{k}} = \frac{1}{1+\sigma} \tag{3.69}$$

où

$$\sigma = \exp\left(-\pi\frac{m^2+k_\perp^2}{eE}\right). \tag{3.70}$$

La probabilité de transition vide-vide est donc

$$\begin{aligned}\exp\left(-\int d^4x\, 2\,\mathrm{Im}\, L_{eff}\right) &= \prod_k C_{\vec{k}} \\ &= \prod_k \exp\left[-\ln\left(1+\sigma\right)\right] \\ &= \exp\left[-\sum_k \ln\left(1+\sigma\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.71}$$

Par conséquent la partie imaginaire de l'action effective de Schwinger est

$$\int d^4x\; 2\,\mathrm{Im}\, L_{eff} = \sum_k \ln\left(1+\sigma\right). \tag{3.72}$$

Utilisons le developpement de Taylor

$$\ln\left(1+\sigma\right) = \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sigma^n$$

et remplaçons la sommation sur k par l'intégrale $\int \frac{Vd^3k}{(2\pi)^3}$. Ici la mésure $\frac{Vd^3k}{(2\pi)^3}$ représente le nombre d'états dans l'intervale $\left[\vec{k}, \vec{k}+d\vec{k}\right]$ dans le volume V. L'action effective de Schwinger devient

$$\int d^4x\; 2\,\mathrm{Im}\, L_{eff} = \int \frac{Vd^3k}{(2\pi)^3} \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \exp\left(-n\pi \frac{m^2+k_\perp^2}{eE}\right). \tag{3.73}$$

Dans (3.73) le facteur V compense l'intégrale $\int d^3x$ étant donné que L_{eff} ne dépend pas de x. Nous avons alors

$$\int dt\; 2\,\mathrm{Im}\, L_{eff} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \exp\left(-n\pi \frac{m^2+k_\perp^2}{eE}\right). \tag{3.74}$$

En effectuant l'integration sur k_x et k_y nous obtenons

$$\int dt\; 2\,\mathrm{Im}\, L_{eff} = \int dk_z \frac{eE}{(2\pi)^3} \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \exp\left(-n\pi \frac{m^2}{eE}\right). \tag{3.75}$$

A ce niveau, nous remarquons dans (3.75) que le terme à gauche ne depend pas de t et le terme à droite ne depend pas de k_z et, par conséquent, les deux intégrations dans (3.75) divergent. Pour contourner ce problème nous utilisons la propriété [37]

$$dk_z = eEdt \tag{3.76}$$

qui sigifie que les particules ayant le vecteur d'onde k_z sont au moyenne créées à l'instant $t = \frac{k_z}{eE}$ [38]. De l'équation (3.75) et (3.76) nous obtenons la partie imaginaire de L_{eff} qui exprime la probabilité de création des particules par unité du temps par unité de volume

$$\mathcal{P}_{Creat.} = 2\,\mathrm{Im}\,L_{eff} = \frac{e^2E^2}{(2\pi)^3}\sum_{n=1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\exp\left(-n\pi\frac{m^2}{eE}\right). \tag{3.77}$$

Ce résultat est le même que celui obtenu par l'approche des intégrales de chemins.

Chapitre 4

Création de particules dans l'espace dS_2 par l'approche des intégrales de chemins

4.1 Introduction

Nous allons maintenant étudier le phénomène de création de paires de particules dans l'espace de de-Sitter décrit par la métrique :

$$ds^2 = g(x)\,dt^2 - \frac{1}{g(x)}dx^2 \tag{4.1}$$

oú

$$g(x) = 1 - H^2x^2 \tag{4.2}$$

où H est une constante.

Dans ce chapitre nous nous proposons d'utiliser la méthode de la fonction de Green. La formulation du calcul sera faite au moyen des intégrales de chemins de Feynman.

4.2 Fonctions d'onde

L'équation de Klein-Gordon dont on se propose de résoudre est

$$\left[\frac{1}{g(x)}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(g(x)\frac{\partial}{\partial x}\right) + m^2\right]\psi(t,x) = 0. \tag{4.3}$$

En posant, pour résoudre cette équation, $\psi(t,x) = e^{-i\omega\ t}\varphi(x)$ et changeant $y = \frac{1+Hx}{2}$ elle se ramène à une équation assez familière de type riemmannienne :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{1-y}\right)\frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{\omega^2}{4H^2}\frac{1}{y} - \frac{m^2}{H^2} + \frac{\omega^2}{4H^2}\frac{1}{1-y}\right)\frac{1}{y(1-y)}\right]\tilde{\varphi}(y) = 0 \tag{4.4}$$

où nous avons utilisé la notation $\tilde{\varphi}(y) \equiv \varphi(x)$.

En posant

$$\begin{aligned} \alpha &= \gamma = i\tfrac{\omega}{2H} \\ \beta &= \tfrac{1-\delta}{2} \\ \acute{\beta} &= \tfrac{1+\delta}{2} \\ \delta &= i\sqrt{4\tfrac{m^2}{H^2} - 1}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

nous obtenons une équation de type Riemannm dont la solution est donnée par :

$$\tilde{\varphi}(y) = \mathcal{N}\ y^{\alpha}(1-y)^{\gamma}\ F(a,b,c;y) \tag{4.6}$$

avec $\mathcal{N}$ une constante de normalisation et les coefficients a , b et c sont donnés par :

$$\begin{aligned} a &= \alpha + \beta + \gamma, \\ b &= \alpha + \acute{\beta} + \gamma, \\ c &= 2\alpha + 1. \end{aligned} \tag{4.7}$$

4.3 Fonction de Green

Calculons la fonction de Green relative à cette particule. Elle est solution de l'équation

$$\left[\frac{1}{g(x)}\hat{P}_0^2 - g(x)\hat{P}_1^2 + \frac{H^2}{g(x)} - m^2\right] G(x_b, t_b; x_a, t_a) = i\delta(x_b - x_a)\,\delta(t_b - t_a)\,. \tag{4.8}$$

Sa représentation à l'aide du paramètre de Schwinger

$$G(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int_0^{+\infty} dT\ \langle x_b, t_b| \exp\left(i\hat{O}T\right)|x_a, t_a\rangle \tag{4.9}$$

nous permet d'avoir l'élément de matrice $\langle x_b, t_b| \exp\left(i\hat{O}T\right)|x_a, t_a\rangle$ qui est le propagateur de Feynman relatif au système décrit par l'hamiltonien

$$\hat{O} = \frac{1}{g(x)}\hat{P}_0^2 - g(x)\hat{P}_1^2 + \frac{H^2}{g(x)} - m^2$$

A cause des singularité à $\frac{-1}{H}$ et à $\frac{1}{H}$ il est imposé d'introduire une transformation de Duru-Kleinert (DK) $T \to S$ de sorte que la fonction de Green devient [39]

$$G(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int_0^{+\infty} dS\ P(x_b, t_b; x_a, t_a; S) \tag{4.10}$$

où

$$P(x_b, t_b; x_a, t_a; S) = f_R(x_b)\, f_L(x_a)\, \langle x_b, t_b| \exp\left\{i f_L(x)\,\hat{O} f_R(x)\, S\right\}|x_a, t_a\rangle \tag{4.11}$$

et les fonction $f_L(x)$ et $f_R(x)$ sont introduites pour élever les singularités.

Le nouveau élément de matrice $\langle x_b, t_b| \exp\left\{i f_L(x)\,\hat{O} f_R(x)\, S\right\}|x_a, t_a\rangle$ représenté par

$$\begin{aligned} \langle x_b, t_b| \exp\left\{i f_L(x)\,\hat{O} f_R(x)\, S\right\}|x_a, t_a\rangle &= \int \mathcal{D}t\mathcal{D}x \int \mathcal{D}p_0\mathcal{D}p_1 \exp\left\{i\int_0^T \left[\hat{p}_0\dot{t} - \hat{p}_1\dot{x}\right.\right. \\ &\quad + f_L(x)\left[\frac{1}{g(x)}\hat{P_0}^2 - g(x)\,\hat{p}_1^2\right. \\ &\quad \left.\left.\left. + \frac{H^2}{g(x)} - m^2\right] f_R(x)\right] d\tau\right\}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

se calcule en le discrétisant le temps propre S $\left(S=(N+1)\,\varepsilon_s\right)$:

$$\langle x_b,t_b|\exp\left\{if_L(x)\,\hat{O}f_R(x)\,S\right\}|x_a,t_a\rangle =$$
$$\int\prod_{n=1}^{N}dx_n\int\prod_{n=1}^{N}dt_n\int\prod_{n=1}^{N+1}\frac{d(p_1)_n}{2\pi}\int\prod_{n=1}^{N+1}\frac{d(p_0)_n}{2\pi}\exp\left(i\sum_{n=1}^{N+1}A_1^{\varepsilon}\right) \tag{4.13}$$

où A_n^{ε} est l'action infinitésimale donneé par :

$$\begin{aligned} A_1^{\varepsilon} &= (p_0)_n\,\Delta t_n-(p_1)_n\,\Delta x_n+\varepsilon_s f_L(x_n)\left[\frac{1}{g(x_n)}(p_0)_n^2\right. \\ &\quad \left.-g(x_n)\,(p_1)_n^2+\frac{H^2}{g(x)}-m^2\right]f_R(x_{n-1})\,. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Intégrons sur les t_n puis sur $(p_0)_n$, pour obtenir

$$G(x_b,t_b;x_a,t_a)=\int_0^{+\infty}dS\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi}e^{-i(\omega t_b-\omega t_a)}P_{\omega}(x_b,x_a;S) \tag{4.15}$$

où le noyau $P_{\omega}(x_b,x_a;S)$ est donné par

$$P_{\omega}(x_b,x_a;S)=f_R(x_b)\,f_L(x_a)\lim_{N\to+\infty}\int\prod_{n=1}^{N}dx_n\int\prod_{n=1}^{N+1}\frac{d(p_1)_n}{2\pi}\exp\left(i\sum_{n=1}^{N+1}A_2^{\varepsilon}\right) \tag{4.16}$$

avec

$$\begin{aligned} A_2^{\varepsilon} &= -(p_1)_n\,\Delta x_n+\varepsilon_s f_L(x_n)\left[\frac{1}{g(x_n)}\omega^2-g(x_n)\,(p_1)_n^2\right. \\ &\quad \left.+\frac{H^2}{g(x)}-m^2\right]f_R(x_{n-1})\,. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Par integrations sur les impulsions $(p_1)_n$ nous obtenons

$$P_{\omega}(x_b,x_a;S)=\left[\frac{f(x_b)\,f(x_a)}{g(x_b)\,g(x_a)}\right]^{\frac{1}{4}}\int\prod_{n=1}^{N}\frac{dx_n}{\sqrt{g(x_n)\,f(x_n)}}\exp\left(i\sum_{n=1}^{N+1}A_3^{\varepsilon}\right) \tag{4.18}$$

où

$$A_3^{\varepsilon}=\frac{(\Delta x_n)^2}{4\varepsilon g(x_n)\,f(x_n)}+\varepsilon_s f(x_n)\left[\frac{1}{g(x_n)}\omega^2+\frac{H^2}{g(x)}-m^2\right]. \tag{4.19}$$

Ici les fonction $f_R(x_b)$ et $f_L(x_a)$ ont été choisies de façon que $f_R(x)=f_L(x)=\sqrt{f(x)}$ (choix du mid-point).

Comme $x \in \left]-\frac{1}{H}, +\frac{1}{H}\right[$ on doit encore effectuer la transformation $x \to u$ définie par :

$$x = h(u) = \frac{1}{H}\tanh u \tag{4.20}$$

où $u \in \left]-\infty, +\infty\right[$.

La forme choisie pour la fonction $f(x)$ est

$$f(x(u)) = \frac{1}{H^2}\frac{1}{\cosh^2 u} \tag{4.21}$$

de manière à rejeter les singularités à l'∞.

A cause de cette transformation un potentiel effectif apparait dans l'action

$$V_{eff} = -\frac{1}{2}\left[\frac{h'''}{h'} - \frac{3}{2}\left(\frac{h''}{h'}\right)^2\right] = 1. \tag{4.22}$$

La nouvelle fonction de Green est alors

$$G(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i(\omega t_b - \omega t_a)} G_\omega(x_b, x_a) \tag{4.23}$$

où

$$\begin{aligned} G_\omega(x_b, x_a) &= \int_0^{+\infty} dS \int Du \exp\left\{ i\int_0^S d\sigma \left[\frac{\dot{u}^2}{4} - \frac{m_1^2}{H^2} + \right.\right. \\ &\left.\left. \frac{l(l+1)}{\cosh^2 u}\right]\right\} \end{aligned} \tag{4.24}$$

est celle de Rosen-Morse avec

$$m_1 = i\frac{\omega}{H} \tag{4.25}$$

et

$$l = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4\frac{m^2}{H^2}}.$$

Cette expression est intégrable. Le résultat est alors [40] :

$$\begin{aligned} G_\omega(x_b, x_a) &= \frac{1}{2H}\frac{\Gamma(m_1 - l)\Gamma(m_1 + l + 1)}{\Gamma(m_1 + 1)\Gamma(m_1 + 1)} \\ &\times \left(\frac{1 + Hx_b}{2}\right)^{\frac{m_1}{2}} \left(\frac{1 - Hx_b}{2}\right)^{\frac{m_1}{2}} \left(\frac{1 - Hx_a}{2}\right)^{\frac{m_1}{2}} \left(\frac{1 + Hx_a}{2}\right)^{\frac{m_1}{2}} \\ &\times F\left(m_1 - l, m_1 + l + 1, m_1 + 1; \frac{1 + Hx_a}{2}\right) \\ &\times F\left(m_1 - l, m_1 + l + 1, m_1 + 1; \frac{1 - Hx_b}{2}\right) \quad . \qquad \text{avec } x_b > x_a \end{aligned} \tag{4.26}$$

4.4 Probabilité de création d'une paire de particules

L'amplitude de probabilité de création d'une paire est donnée par

$$A(\omega_2 - \omega_1) = \int d\sigma_a d\sigma_b \psi(t_a, x_a)\, \bar{\partial}_n^a G(x_b, t_b; x_a, t_a)\, \bar{\partial}_n^b \psi^*(t_b, x_b) \tag{4.27}$$

où les éléments de surface sont

$$d\sigma_{a,b} \equiv g(x_{a.b})\, dt_{a,b}. \tag{4.28}$$

Les comportements asymptotiques de $\psi(t_a, x_a)$ et $\psi^*(t_b, x_b)$ sont

$$\psi(t_a, x_a) = \mathcal{N} e^{-i\omega_1 t_a} \left(\frac{1 + Hx_a}{2}\right)^{\frac{m_1}{2}} \tag{4.29}$$

et

$$\psi^*(t_b, x_b) = \mathcal{N} e^{i\omega_2 t_b} \left(\frac{1 - Hx_b}{2}\right)^{-\frac{m_1}{2}} \tag{4.30}$$

où la constante $\mathcal{N}$ est déterminée de la condition :

$$\int d\sigma_a \psi^*(t_a, x_a)\, \bar{\partial}_n^a \psi(t_a, x_a) = \delta(\omega_2 - \omega_1) \tag{4.31}$$

L'amplitude est donc

$$A(\omega_2 - \omega_1) = \frac{m_1 \Gamma(m_1 - l)\, \Gamma(m_1 + l + 1)}{\Gamma(m_1 + 1)\, \Gamma(m_1 + 1)} \delta(\omega_2 - \omega_1). \tag{4.32}$$

Comme

$$\mathcal{P}_\omega = \int \left| A\left(\omega - \omega'\right)\right|^2 d\omega' \tag{4.33}$$

aprés avoir intégré sur ω'nous obtenons la probabilité de création par unité de temps et par unité de volume

$$\mathcal{P}_\omega = \frac{2\sinh^2\left(\pi\frac{\omega}{H}\right)}{\cosh\left(2\pi\frac{\omega}{H}\right) + \cosh\left(\pi\sqrt{4\frac{m^2}{H^2} - 1}\right)}, \tag{4.34}$$

qui s'écrit aussi

$$\mathcal{P}_\omega = \frac{\eta}{1 + \eta} \tag{4.35}$$

où

$$\eta = \left[\frac{\sinh\left(\pi\frac{\omega}{H}\right)}{\cosh\left(\pi\sqrt{\frac{m^2}{H^2} - \frac{1}{4}}\right)}\right]^2. \tag{4.36}$$

Pour $H << 1$,on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_\omega &= \exp\left[-2\pi\left(\sqrt{\frac{m^2}{H^2}-\frac{1}{4}}-\frac{\omega}{H}\right)\right] \\
&= \exp\left[-\frac{2\pi}{H}(m-\omega)\right].
\end{aligned}$$

Cette dernière expression montre la nature thermique du phénomène avec la température de Hawking

$$\beta^{-1} = \frac{2\pi}{H}. \tag{4.37}$$

Chapitre 5

Création des particules par la méthode de Bogoliubov

5.1 Introduction

Dans ce chapitre nous nous proposons d'appliquer la méthode canonique de la transformation de Bogoliubov pour réobtenir la probabilité de création d'une paire de particule dans l'espace de de-Sitter.

Pour définir les états "in" et "out", nous introduisons un champ électrique E et nous étudions la limite $H \rightarrow 0$.

5.2 Equation de Klein Gordon

En présence d'un champ électrique l'équation de Klein Gordon s'écrit

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(i\partial_{\mu}-eA_{\mu}\right)\left[g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\left(i\partial_{\nu}-eA_{\nu}\right)\psi\right]-m^{2}\psi=0. \tag{5.1}$$

Pour un potentiel linéaire

$$A_{0}=-Ex \tag{5.2}$$

l'équation d'onde devient

$$\left[\frac{1}{g\left(x\right)}\left(\frac{\partial}{\partial t}-ieEx\right)^{2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(g\left(x\right)\frac{\partial}{\partial x}\right)+m^{2}\right]\psi\left(t,x\right)=0. \tag{5.3}$$

Maintenant afin de résouder (5.3) nous posons

$$\psi\left(t,x\right)=e^{-i\omega\ t}\varphi\left(x\right),$$

pour obtenir

$$\left[\left(1-H^{2}x^{2}\right)^{2}\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}-2H^{2}\left(1-H^{2}x^{2}\right)x\frac{\partial}{\partial x}+\left(\omega+eEx\right)^{2}-g\left(x\right)m^{2}\right]\psi\left(x\right)=0 \tag{5.4}$$

et nous faisons le changement $x\rightarrow\xi$, avec

$$\xi=\frac{1-Hx}{2}. \tag{5.5}$$

L'équation résultante est :

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial^{2}}{\partial\xi^{2}}+\left(\frac{1}{\xi}-\frac{1}{1-\xi}\right)\frac{\partial}{\partial\xi}-\left(\left(\frac{\omega}{2H}-\frac{eE}{2H^{2}}\right)^{2}\frac{1}{\xi}-\frac{1}{H^{4}}\left(H^{2}m^{2}+e^{2}E^{2}\right)\right.\right.\\&\left.\left.+\left(\frac{\omega}{2H}+\frac{eE}{2H^{2}}\right)^{2}\frac{1}{\left(1-\xi\right)}\right)\frac{1}{\xi\left(1-\xi\right)}\right]\tilde{\varphi}\left(\xi\right)=0,\end{aligned} \tag{5.6}$$

qu'est une équation de type Riemann [35] :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\left(\frac{1-\alpha_1-\alpha_1'}{\xi}-\frac{1-\alpha_3-\alpha_3'}{1-\xi}\right)\frac{\partial}{\partial\xi}+\left(\frac{\alpha_1\alpha_1'}{\xi}-\alpha_2\alpha_2'+\frac{\alpha_3\alpha_3'}{1-\xi}\right)\frac{1}{\xi\left(1-\xi\right)}\right]\tilde{\varphi}\left(\xi\right)=0 \tag{5.7}$$

où

$$\begin{aligned}\alpha_1&=-\alpha_1'=i\tfrac{\omega H+eE}{2H^2}\\ \alpha_3&=-\alpha_3'=i\tfrac{\omega H-eE}{2H^2}\\ \alpha_2&=1-\alpha_2'=\tfrac{1}{2}+i\sqrt{\tfrac{m^2}{H^2}+\tfrac{e^2E^2}{H^4}-\tfrac{1}{4}},\end{aligned} \tag{5.8}$$

avec la condition $\alpha_1+\alpha_1'+\alpha_2+\alpha_2'+\alpha_3+\alpha_3'=1$.

Suivant [35] un ensemble de solutions linéairements indépendantes de cette équation peut être écrit en termes des fonctions hypergéometriques :

$$\varphi_1\left(x\right)=z^{i\frac{\omega H+eE}{2H^2}}\left(1-z\right)^{i\frac{\omega H-eE}{2H^2}} F\left\{\frac{1}{2}+i\frac{\omega}{H}+\frac{\delta}{2},\frac{1}{2}+i\frac{\omega}{H}-\frac{\delta}{2};1+i\frac{\omega H+eE}{H^2};z\right\} \tag{5.9}$$

$$\varphi_2\left(x\right)=z^{-i\frac{\omega H+eE}{2H^2}}\left(1-z\right)^{i\frac{\omega H-eE}{2H^2}} F\left\{\frac{1}{2}-i\frac{eE}{H^2}+\frac{\delta}{2},\frac{1}{2}-i\frac{eE}{H^2}-\frac{\delta}{2};1-i\frac{\omega H+eE}{H^2};z\right\} \tag{5.10}$$

Nous pouvons voir que l'équation (5.6) est invariante sous le changement $e\to-e$ et $\xi\to1-\xi$, ce qui nous permet d'écrire un autre ensemble des solutions [35] :

$$\varphi_3\left(x\right)=z^{i\frac{\omega H+eE}{2H^2}}\left(1-z\right)^{i\frac{\omega H-eE}{2H^2}} F\left\{\frac{1}{2}+i\frac{\omega}{H}+\frac{\delta}{2},\frac{1}{2}+i\frac{\omega}{H}-\frac{\delta}{2};1+i\frac{\omega H-eE}{H^2};1-z\right\} \tag{5.11}$$

$$\varphi_4\left(x\right)=z^{i\frac{\omega H+eE}{2H^2}}\left(1-z\right)^{-i\frac{\omega H-eE}{2H^2}} F\left\{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}+i\frac{eE}{H^2},\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2}+i\frac{eE}{H^2};1-i\frac{\omega H-eE}{2H^2};1-z\right\} \tag{5.12}$$

5.3 Le choix des états "in" et "out"

Pour trouver le bon choix des états "in" et "out" étudions la limite $H \to 0$ qui mène à l'espace de Minkowski. En premier lieu nous considérons le cas $\omega = 0$ et nous utilisant la propriété

$$F(u,v;w;\xi) = (1-\xi)^{w-u-v} F(w-u, w-v; w; \xi) \tag{5.13}$$

pour écrire $\varphi_1(x)$ sous la forme suivante

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= z^{i\frac{\omega H+eE}{2H^2}} (1-z)^{-i\frac{\omega H-eE}{2H^2}} \\ &F\left(\frac{1}{2}+i\frac{eE}{H^2}-i\sqrt{\left(\frac{m^2}{H^2}+\frac{e^2E^2}{H^4}\right)-\frac{1}{4}}, \frac{1}{2}+i\frac{eE}{H^2}+i\sqrt{\left(\frac{m^2}{H^2}+\frac{e^2E^2}{H^4}\right)-\frac{1}{4}};\right. \\ &\left. 1+i\frac{eE}{H^2}; \frac{1-Hx}{2}\right).\end{aligned} \tag{5.14}$$

Ensuite nous utilisons la transformation

$$\begin{aligned}F\left(2a, 2b; a+b+\frac{1}{2}; \frac{1-z}{2}\right) &= A\, F\left(a, b; \frac{1}{2}; z^2\right) \\ &+ B\, z\, F\left(a+\frac{1}{2}, b+\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z^2\right)\end{aligned} \tag{5.15}$$

avec

$$A = \frac{\Gamma\left(a+b+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(b+\frac{1}{2}\right)}, \tag{5.16}$$

$$B = \frac{\Gamma\left(a+b+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}, \tag{5.17}$$

pour écrire

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= \left(1-H^2x^2\right)^{i\frac{eE}{2H^2}} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{i}{4}\frac{m^2}{eE}\right)} \right. \\ &F\left(\frac{1}{4}+i\frac{eE}{2H^2}-\frac{i}{2}\sqrt{\frac{m^2}{H^2}+\frac{e^2E^2}{H^4}-\frac{1}{4}}, \frac{1}{4}+i\frac{eE}{2H^2}+\frac{i}{2}\sqrt{\frac{m^2}{H^2}+\frac{e^2E^2}{H^4}-\frac{1}{4}}; \frac{1}{2}; H^2x^2\right) \\ &+ \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{i}{4}\frac{m^2}{eE}\right)}\,\eta\, x \\ &\left. F\left(\frac{3}{4}+i\frac{eE}{2H^2}-\frac{i}{2}\sqrt{\frac{m^2}{H^2}+\frac{e^2E^2}{H^4}-\frac{1}{4}}, \frac{3}{4}+i\frac{eE}{2H^2}+\frac{i}{2}\sqrt{\frac{m^2}{H^2}+\frac{e^2E^2}{H^4}-\frac{1}{4}}; \frac{3}{2}; H^2x^2\right)\right\}\end{aligned} \tag{5.18}$$

avec

$$\eta = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4} + i\frac{eE}{2H^2} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{m^2}{H^2} + \frac{e^2E^2}{H^4} - \frac{1}{4}}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4} + i\frac{eE}{2H^2} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{m^2}{H^2} + \frac{e^2E^2}{H^4} - \frac{1}{4}}\right)} H. \tag{5.19}$$

Maintenant en tenant compte des limites

$$\lim_{H\to 0}\left(i\frac{eE}{2H^2} - \frac{i}{2}\sqrt{\frac{m^2}{H^2} + \frac{e^2E^2}{H^4} - \frac{1}{4}}\right) = -\frac{i}{4}\frac{m^2}{eE}, \tag{5.20}$$

et

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}+ibx\right)}{\Gamma\left(a+ibx\right)\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{b}{2}}(1+i), \tag{5.21}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &\propto \exp\left(-\frac{1}{2}ieEx^2\right)\\ &\lim_{H\to 0}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{i}{4}\frac{m^2}{eE}\right)} F\left(\frac{1}{4}-\frac{i}{4}\frac{m^2}{eE}, \sigma; \frac{1}{2}; \frac{ieEx^2}{\sigma}\right)\right.\\ &\left. + \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{i}{4}\frac{m^2}{eE}\right)}\sqrt{\frac{eE}{2}}(1+i)\ x\ F\left(\frac{3}{4}-\frac{i}{4}\frac{m^2}{eE}, \frac{1}{2}+\sigma; \frac{3}{2}; \frac{ieEx^2}{\frac{1}{2}+\sigma}\right)\right\}\end{aligned} \tag{5.22}$$

avec

$$\sigma = \frac{1}{4} + i\frac{eE}{2H^2} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{m^2}{H^2} + \frac{e^2E^2}{H^4} - \frac{1}{4}}. \tag{5.23}$$

Nous utilisons maintenant la limite

$$\lim_{v\to\infty}\ {}_2F_1\left(u, v; w; \frac{z}{v}\right) = {}_1F_1\left(u; w; z\right), \tag{5.24}$$

pour avoir

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= \exp\left(-\frac{1}{2}ieEx^2\right)\\ &\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{i}{4}\frac{m^2}{eE}\right)} F\left(\frac{1}{4}-\frac{i}{4}\frac{m^2}{eE}; \frac{1}{2}; ieEx^2\right)\right.\\ &\left. - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{i}{4}\frac{m^2}{eE}\right)}\sqrt{eE}(1+i)\ x\ F\left(\frac{3}{4}-\frac{i}{4}\frac{m^2}{eE}; \frac{3}{2}; ieEx^2\right)\right\}.\end{aligned} \tag{5.25}$$

Finalement à partir de la définition des fonction de Weber

$$D_\gamma(z) = 2^{\frac{\gamma}{2}}e^{-\frac{z^2}{4}}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-\gamma}{2}\right)}F\left(-\frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2}; \frac{z^2}{2}\right) - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(-\frac{\gamma}{2}\right)}zF\left(\frac{1-\gamma}{2}, \frac{3}{2}; \frac{z^2}{2}\right)\right\} \tag{5.26}$$

nous obtenons

$$\varphi_1(x) = D_\gamma\left[(1+i)\sqrt{eE}x\right] = \tilde{\varphi}^-_{out}.$$

De la même manière nous montrons que

$$\varphi^+_{in} = \varphi_4(x), \tag{5.27}$$

$$\varphi^-_{in} = \varphi_2(x), \tag{5.28}$$

$$\varphi^+_{out} = \varphi_3(x). \tag{5.29}$$

Nous avons alors (pour $E = 0$)

$$\varphi^+_{in}(x) = z^{i\frac{\omega}{2H}}(1-z)^{-i\frac{\omega}{2H}} F\left(\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2},\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2};1-i\frac{\omega}{H};1-z\right)$$

$$\varphi^-_{in}(x) = z^{-i\frac{\omega}{2H}}(1-z)^{i\frac{\omega}{2H}} F\left(\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2},\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2};1-i\frac{\omega}{H};z\right) \tag{5.30}$$

$$\varphi^+_{out}(x) = z^{-i\frac{\omega}{2H}}(1-z)^{i\frac{\omega}{2H}} F\left(\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2},\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2};1+i\frac{\omega}{H};1-z\right) \tag{5.31}$$

$$\varphi^-_{out}(x) = z^{i\frac{\omega}{2H}}(1-z)^{-i\frac{\omega}{2H}} F\left(\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2},\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2};1+i\frac{\omega}{H};z\right). \tag{5.32}$$

5.4 La probabilité de création d'une paire

Pour établir la transformation de Bogoliubov entre les modes "in" et "out" nous utilisons la relation entre les fonction hypergeometrique [35]

$$\begin{aligned}F(u,v;w;\xi) &= \frac{\Gamma(w)\Gamma(w-v-u)}{\Gamma(w-u)\Gamma(w-v)}F(u,v;u+v-w+1;1-\xi)\\ &+(1-\xi)^{w-u-v}\frac{\Gamma(w)\Gamma(u+v-w)}{\Gamma(u)\Gamma(v)}\\ &F(w-u,w-v;w-v-u+1;1-\xi).\end{aligned} \tag{5.33}$$

Nous obtenons alors

$$\varphi^+_{out} = \alpha\,\varphi^+_{in} + \beta\,\varphi^-_{in}, \tag{5.34}$$

où les coefficients de Bogoliubov α et β sont donnés par

$$\alpha = \frac{\Gamma\left(1-i\frac{\omega}{H}\right)\Gamma\left(-i\frac{\omega}{H}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\frac{\omega H}{H^2}-\frac{\delta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\frac{\omega H}{H^2}+\frac{\delta}{2}\right)}, \tag{5.35}$$

$$\beta = \frac{\Gamma\left(1-i\frac{\omega}{H}\right)\Gamma\left(i\frac{\omega}{H}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2}\right)}. \tag{5.36}$$

nous avons dans ce cas

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\Gamma\left(i\frac{\omega}{H}\right)}{\Gamma\left(-i\frac{\omega}{H}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\frac{\omega H}{H^2}-\frac{\delta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\frac{\omega H}{H^2}+\frac{\delta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2}\right)}. \tag{5.37}$$

La probabilité pour créer une paire est donc

$$\mathcal{P}_\omega = \left|\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\frac{\omega H}{H^2}-\frac{\delta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\frac{\omega H}{H^2}+\frac{\delta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2}\right)}\right|^2 \tag{5.38}$$

$$= \frac{2\sinh^2\left(\pi\frac{\omega}{H}\right)}{\cosh\left(2\pi\frac{\omega}{H}\right)+\cosh\left(\pi\sqrt{4\frac{m^2}{H^2}-1}\right)}. \tag{5.39}$$

Pour le nombre des particule créées nous avons la relation

$$n(\omega)=|\beta|^2=\left(\frac{\sinh\left(\pi\frac{\omega}{H}\right)}{\cosh\left(\pi\sqrt{\frac{m^2}{H^2}-\frac{1}{4}}\right)}\right)^2 \approx \exp\left[-\frac{2\pi}{H}\left(\sqrt{m^2-\frac{1}{4}H^2}-\omega\right)\right]. \tag{5.40}$$

qui est une distribution de Boltzmann.

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons calculé la probabilité de création des particules dans l'espace de de-Sitter en utilisant la méthode de Bogoliubov. Nous avons vu que les résultats de cette méthode sont identiques à ceux obtenus par l'approche des integrales de chemins.

Chapitre 6

Approximation semi-classique

6.1 Introduction

Plusieurs problèmes en physique quantique n'ont pas de solutions exactes. Le recours aux approximations est alors inévitable. Cependant, pour le processus de création de particules des champs forts, la théorie des perturbations n'est pas valide. L'approximation la plus utile pour ce genre de problème est l'approximation semi-classique. Dans ce chapitre, nous nous proposons de dériver la probabilité de création des particules en utilisant une approximation semi-classique.

6.2 Approximation semi-classique pour l'effet tunnel

L'effet tunnel est la possibilité de franchir une barrière de potentiel par une particule même si son énergie est inferieure à la barrière. C'est un effet purement quantique et ne peut pas s'expliquer que dans le cadre quantique.

L'étude de l'effet tunnel consiste à calculer le coefficient de transmission T à partir de l'équation de Schrödinger

$$E\psi(x) = \left[\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]\psi(x), \tag{6.1}$$

qui peut se mettre sous la forme

$$\left[\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + p^2(x)\right]\psi(x) = 0$$

où

$$p^2(x) = 2m\left[E - V(x)\right].$$

Si nous écrivons la fonction d'onde sous la forme

$$\psi(x) = A(x)\exp\left[\frac{i}{\hbar}S(x)\right] \tag{6.2}$$

nous obtenons, pour $\hbar << 1$, les équations suivantes :

$$A(x)S''(x) + 2A'(x)S'(x) + A''(x) = 0 \tag{6.3}$$

$$\left(p^2(x) - \frac{1}{\hbar^2}\left(S'(x)\right)^2\right)A(x) = 0. \tag{6.4}$$

La solution de ce système d'équation est

$$S(x) = \int^x |p(x')|\,dx' \tag{6.5}$$

et

$$A(x) = \frac{1}{\sqrt{|p(x)|}}. \tag{6.6}$$

La solution semi-classique s'écrit alors

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{|p(x)|}} \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int^x p(x')\,dx'\right].$$

Considérons maintenant une barrière de potentiel qui divise l'espace en trois parties dont les parties gauche et droite ont des potentiels constants (notés V_0 et V_1) et la partie intermédiaire constitue la barrière. Dans ces trois parties les solutions sont données par

$$\psi_I(x) = A\exp\left(\frac{i}{\hbar}p_0 x\right) + B\exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_0 x\right) \tag{6.7}$$

$$\psi_{II}(x) = C\exp\left[-\frac{1}{\hbar}\int_{x_1}^x |p(x')|\,dx'\right] + D\exp\left[\frac{1}{\hbar}\int_{x_1}^x |p(x')|\,dx'\right], \tag{6.8}$$

et

$$\psi_{III}(x) = F\exp\left(\frac{i}{\hbar}p_1 x\right), \tag{6.9}$$

où p_0 et p_1 sont donnés par

$$p_0 = \sqrt{2m(E - V_0)}, \tag{6.10}$$

$$p_1 = \sqrt{2m(E - V_1)}. \tag{6.11}$$

A partir de la condition de continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée, nous obtenons pour le coefficient de transmission

$$T = \left|\frac{F}{A}\right|^2 = \exp(-2\gamma), \tag{6.12}$$

où γ est donné par

$$\gamma = \int_{x_1}^{x_2} |p(x')|\,dx'. \tag{6.13}$$

Les positions x_1 et x_2 sont les points tournants solutions de l'équation $p(x) = 0$

6.3 Création des particules par un champ électrique constant

L'équation classique d'une particule relativiste de masse m et de charge e s'écrit

$$(\omega - e\phi)^2 - p^2 = m^2 \tag{6.14}$$

où p est l'impulsion de la particule et ω est son énergie. Pour un potentiel linéaire

$$\phi = -eEx \tag{6.15}$$

nous avons

$$\mid p(x) \mid = \sqrt{m^2 - (\omega + eEx)^2} \tag{6.16}$$

Dans ce cas les points tournants sont donnés par

$$x_1 = -\frac{1}{eE}(m+\omega), \tag{6.17}$$

$$x_2 = \frac{1}{eE}(m-\omega), \tag{6.18}$$

et le facteur γ est

$$\gamma = \int_{\frac{-1}{eE}(m+\omega)}^{\frac{1}{eE}(m-\omega)} \sqrt{m^2 - (\omega + eEx)^2}dx. \tag{6.19}$$

Pour calculer cette intégrale nous faisons le changement

$$x = \frac{m}{eE}y - \frac{\omega}{eE}.$$

Il vient

$$\gamma = \frac{m^2}{eE}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}dy = \pi\frac{m^2}{2eE}. \tag{6.20}$$

Le facteur T est dans ce cas

$$T = \exp\left(-\pi\frac{m^2}{eE}\right). \tag{6.21}$$

6.4 Création des particules par un champ gravitationnel

Dans l'espace de de-Sitter statique l'équation classique est donnée par

$$\frac{1}{g(x)}\omega^2 - g(x)p^2(x) - m^2 = 0 \tag{6.22}$$

d'où nous obtenons

$$p^2(x) = \frac{\omega^2}{(1-H^2x^2)^2} - \frac{m^2}{1-H^2x^2}. \tag{6.23}$$

A l'interieur de la barrière, $p^2(x) < 0$ et

$$|p(x)| = \sqrt{\frac{m^2}{1-H^2x^2} - \frac{\omega^2}{(1-H^2x^2)^2}} \tag{6.24}$$

Le coefficient γ est alors

$$\gamma = \int_{-\frac{1}{Hm}\sqrt{-\omega^2+m^2}}^{\frac{1}{Hm}\sqrt{-\omega^2+m^2}} \sqrt{\frac{m^2}{1-H^2x^2} - \frac{\omega^2}{(1-H^2x^2)^2}}dx. \tag{6.25}$$

En faisant le changement

$$x = \frac{1}{Hm}\sqrt{-\omega^2+m^2}y \tag{6.26}$$

nous pouvons écrire

$$\gamma = \frac{1}{Hm}\left(-\omega^2+m^2\right) I_0 \tag{6.27}$$

où I_0 est donné par

$$I_0 = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-y^2}}{1-\alpha^2 y^2} dy \tag{6.28}$$

avec

$$\alpha^2 = \left(1 - \frac{\omega^2}{m^2}\right). \tag{6.29}$$

Pour calculer I_0 nous faisons le developpement

$$\frac{1}{1-\alpha^2 y^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{2n} y^{2n} \tag{6.30}$$

et nous utilisons l'integrale

$$\int_{-1}^{1} y^{2n}\sqrt{1-y^2}dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+2\right)}. \tag{6.31}$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_n \alpha^{2n}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+2\right)} \\ &= \frac{\pi}{1+\sqrt{1-\alpha^2}} \\ &= \pi\frac{m}{m+\omega}. \end{aligned} \tag{6.32}$$

Finalement nous obtenons

$$\gamma = \frac{\pi}{H}\left(-\omega+m\right)$$

et

$$T = \exp\left[-\frac{2\pi}{H}\left(m-\omega\right)\right] \tag{6.33}$$

6.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons calculer la probabilité de création des particules en utilisant l'approximation semi-classique où nous avons considéré deux cas ; le champ électrique constant et l'espace de de-Sitter.

Le calcul semi-classique donne un résultat exacte pour champ électrique et une bonne approximation dans le cas de l'espace de de-Sitter.

Chapitre 7

Conclusion générale

Dans ce mémoire il a été principalement question de calculer la probabilité de création de particules dans un espace dS statique.

En premier lieu nous avons montré le lien entre la création de particules et le paradoxe de Klein et nous obtenir la probabilité de création des particules pour un champ constant.

Ensuite nous avons utilisé la méthode de la fonction de Green pour calculer la probabilité de création de particules dans l'espace de de-Sitter. Le calcul a été faite au moyen des intégrales de chemins de Feynman.

Dans un autre chapitre nous avons calculé en utilisant la méthode de Bogoliubov. Nous avons vu que les résultats de cette méthode sont identiques à ceux obtenus par l'approche des intégrales de chemins.

Dans le dernier chapitre, nous avons calculé la probabilité de création de particules en utilisant l'approximation semi-classique où nous avons considéré deux cas ; le champ électrique constant et l'espace de de-Sitter.

Le calcul semi-classique donne un résultat exacte pour champ électrique et une bonne approximation dans le cas de l'espace de de-Sitter.

Bibliographie

[1] F. Gross, Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory (Wiley-Interscience, New York, 1993).

[2] J. D. Bjorken and S. D. Drell, Relativistic Quantum Fields (Mc Graw Hill, New York, 1965).

[3] W. Greiner, Field Quntization (Springer, Berlin, 1990).

[4] V. G. Bagrov and D. M. Gitman, Exact Solutions of Relativistic Wave Equations, (Kluwer, Dordrecht 1990)

[5] O. Klein, Z. Phys. **53**, 157 (1929).

[6] A. Calogeracos and N. Dombey, Contemp. Phys. **40**,313 (1999).

[7] R. Ruffini and G. Vereshchagin, S-S. Xue, Phys. Rep. **487** (2010)

[8] J. Schwinger, Phys. Rev. **82**,664 (1951).

[9] E. Brezin and C. Itzykson, Phys. Rev. D **2**,1191(1970).

[10] Q. G. Lin, J. Phys. G : Nucl. Part. Phys. **25**,17 (1999).

[11] S.P. Gavrilov and D.M. Gitman, Phys.Rev. D **53**,7162(1996).

[12] S. P. Kim and D. N. Page, Phys. Rev. D **73**,065020 (2006).

[13] R. Schuetzhold, H. Gies and G. Dunne, Phys. Rev. Lett. **101**,130404 (2008).

[14] A. Di Piazza, E. Lotstedt, A. I. Milstein and C.H. Keitel, Phys. Rev. Lett. **103**, 170403(2009).

[15] M. J. A. Jansen and C. Müller, Phys. Rev. **A 88**,052125(2013).

[16] L. Parker Phys. Rev . Lett. **21**, 562 (1968)

[17] Ya. Zeldovich and A. A. Starobinskii, Sov. Phys. JETP **34**, 1159 (1971).

[18] S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975)

[19] A. A. Grib, S. G. Mamaev and V. M. Mostepanenko, Quantum Vacuum effects in strong fields (Moscow : Energoatomizdat, 1988)

[20] S. Haouat and L. Chetouani, Phys. Scr. **75** (2007) 759

[21] G.V. Dunne and C. Schubert, Phys. Rev. D **72** (2005) 105004

[22] S. Biswas, J. Guha and N. G. Sarkar, Class. Quantum Grav. **12,** 1591 (1995)

[23] S. Biswas, A. Shaw and P. Misra, Gen. Rel. Grav. **34,** 665 (2002)

[24] S. Biswas and I. Chowdhury, Int. J. Mod. Phys. D **15,** 937 (2006)

[25] N. B. Narozhny and A. I. Nikishov, Sov. J. Nucl. Phys. **11,** 596 (1970).

[26] H. Aoyama and M. Kobayashi, Prog. Theor. Phys. **64**, 1045 (1980).

[27] S. A. Baran and I. H. Duru, J. Sov. Laser Res. **13**, 241 (1992).

[28] I. H. Duru, J. Phys. A : Math. Gen. **28**, 5883 (1995).

[29] B. R. Holstein, Am. J. Phys. **66**, 507 (1998).

[30] A. Bounamès and L. Chetouani, Phys. Lett. A ,267,225(2000).

[31] B. R. Holstein, Am. J. Phys. **67**, 499 (1999)

[32] E. S. Fradkin, D.M. Gitman and S.M. Shvartsman, Quantum Electrodynamics with Unstable Vacuum (Springer-Verlag, Berlin 1991)

[33] A. A.Grib, S. G. Mamayev, and V.M.Mostepanenko,Vacuum Quantum Effects in Strong Fields (Friedmann Lab. Publ.,St. Petersburg 1994).

[34] M. Benzekka, Comportement quantique des particules relativistes, mémoire de Master, université de Jijel (2012)

[35] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products, Academic Press, New York, 1979.

[36] A. Hansen and F. Ravndal, Physica Scripta **23,** 1036 (1981) 1036.

[37] M.B. Fröb et al., Schwinger effect in de Sitter space, JCAP **04**, 009 (2014)

[38] N. Tanji, Annals Phys. 324, 1691 (2009)

[39] H. Kleinert, Path Integral in quantum mechanics, statistics and polymer physics (World Scientific, Singapore 1990).

[40] H. Kleinert and I. Mustapic, J. Math. Phys. **33** (1992) 643.