

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Seddik Benyahia- Jijel
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Physique



N° d'ordre :

Série :

Mémoire

présenté pour obtenir le diplôme de

MASTER

Filière : Physique

Spécialité : Physique Théorique

par

Nassira Boussadia

Thème

**Statistique quantique q-déformée d'un gaz parfait de
Bose**

Soutenu le : 26/06/2018

Devant le Jury :

Présidente :	N. Chine	MCB.	Univ. Jijel
Rapporteur :	A. Bounames	Prof.	Univ. Jijel
Examineur :	M.S. Zidi	MCB.	Univ. Jijel

REPUBLICQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Seddik Benyahia- Jijel
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Physique



N° d'ordre :
Série :

Mémoire
présenté pour obtenir le diplôme de
MASTER
Filière : Physique
Spécialité : Physique Théorique

par

Nassira Boussadia

Thème

Statistique quantique q -déformée d'un gaz parfait de Bose

Soutenu le : 26/06/2018

Devant le Jury :

Présidente :	N. Chine	MCB.	Univ. Jijel
Rapporteur :	A. Bounames	Prof.	Univ. Jijel
Examineur :	M.S. Zidi	MCB.	Univ. Jijel



Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier Dieu pour m'avoir donné la volonté et la patience tout au long de mes études.

Je voudrais exprimer ma reconnaissance à mon encadreur Pr. A. Bounames, Professeur à l'université de Jijel, que je remercie pour ses conseils durant la préparation et la rédaction de ce mémoire.

Mes remerciements vont ensuite au jury de ce mémoire : Dr. N. Chine, Maitre de conférence B à l'université de Jijel, qui m'a fait l'honneur de présider le jury, et Dr. M. S. Zidi Maitre de conférences B à l'université de Jijel, qui a accepté de juger ce travail en sa qualité d'examinateur.

Un grand merci pour mes parents qui m'ont aidé beaucoup.

Je tiens à remercier mes soeurs Hanane et Amina et je n'oublie pas mon seul frère Adel et mes amies pour l'encouragement et pour leur soutien moral.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Mr. A. Abida enseignant au Lycée de 08 Mai pour m'avoir appris à aimer la physique.

J'adresse mes plus sincères remerciements à H. Lamri la secrétaire du laboratoire de physique théorique, et à L. Zebila et S. M'hamdioua secrétaires à la faculté des sciences exactes et informatique.

Enfin, je tiens également à remercier tous mes enseignants de physique théorique.

N. Boussadia

Table des matières

Introduction générale	5
1 Statistique quantique du gaz parfait de Bose	7
1.1 Introduction	7
1.2 Fonction de partition	7
1.3 Propriétés des fonctions $g_n(z)$	11
1.4 Propriétés physiques du gaz de Bose	12
1.5 Température critique	15
1.6 Potentiel grand canonique	16
1.7 Energie interne	18
1.8 Capacité calorifique	19
2 Introduction à l'algèbre q-déformée	22
2.1 Introduction	22
2.2 Algèbre q-déformée	22
2.3 Nombre q-déformée	25
2.4 Quelques fonctions élémentaires q-déformées	27
2.5 q-dérivées	27
3 Physique statistique quantique q-déformée	28
3.1 Introduction	28
3.2 Distribution statistique des q-bosons et moyennes thermiques	28
3.3 Dérivée de Jackson	31
3.4 Entropie du gaz des q-bosons	33
3.5 Fonction de partition grand canonique q-déformée	35
3.6 Quelques propriétés des $g_n(z, q)$	37
3.7 Propriétés physiques des q-bosons	39
3.8 Température critique des q-bosons	40
3.9 Le potentiel grand canonique	41

3.10	Energie interne q-déformée	42
3.11	Entropie en fonction des $g_n(z, q)$	43
3.12	Capacité calorifique q-déformée	43
	Conclusion	48

Introduction générale

Historiquement, l'étude quantique des gaz parfait a connu un grand développement d'un point de vue théorique et expérimental depuis la découverte de Planck de la loi de répartition spectrale du rayonnement du corps noir en 1900. En effet, Satyendranath Nath Bose a pu retrouver en 1924 la formule de répartition spectrale de Planck en considérant le rayonnement comme des particules identiques. En 1925, Albert Einstein a généralisé le résultat de Bose aux particules identiques d'un gaz parfait de bosons monoatomiques, et a obtenu la distribution statistique connue actuellement sous le nom de la distribution de Bose-Einstein. Ensuite, Einstein a montré aussi que si la longueur d'onde thermique de Broglie $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}$ est du même ordre que la distance interatomique alors les atomes s'accumulent au même niveau d'énergie qui est le niveau fondamental du système, ce phénomène est connu sous le nom de la condensation de Bose-Einstein. Cependant, la température critique associée à la condensation prédite par la théorie était très basse et les corps sont à l'état liquide ou solide à cette température alors que la condensation prédite par Einstein était pour un gaz parfait [1].

Depuis, les techniques de piégeage magnétique et de refroidissement par laser ont permis d'atteindre expérimentalement les températures de la condensation. Ces développements expérimentaux ont été couronnés en 1997 par le prix Nobel de physique attribué à Claude Cohen-Tannoudji, Steve Chu et William Phillips. La réalisation expérimentale des premiers condensats de Bose-Einstein était en 1995 sur les atomes de rubidium et sur les atomes de sodium en phase diluée où la théorie d'Einstein s'applique. Comme récompense à cette découverte majeure, en 2001 le prix Nobel de physique a été attribué à Eric Cornell, Carl Wieman et Wolfgang Ketterle. Notons qu'il est possible de réaliser actuellement des nuages d'atomes dilués, proche des hypothèses d'Einstein, de densité environ 10^{12} atomes/m³ et qui lui correspond une température critique de condensation $T_c = 0.4 \mu K$ pour des atomes de rubidium. Tandis que pour l'Hélium 4 (⁴He) liquide, la densité d'atomes est élevée $\rho = 1.88 \times 10^{28}$ atomes/m³ et qui lui correspond une température critique théorique de condensation $T_c^{theo} = 2.8 K$ alors que la température mesurée expérimentalement vaut $T_c^{exp} = 5.2 K$.

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude d'un gaz parfait non-relativiste de Bose en utilisant la physique statistique quantique q-déformée. Nous allons refaire les calculs déjà existants dans la littérature [2] pour calculer les grandeurs thermodynamiques et en particulier la condensation de Bose-Einstein en fonction du paramètre de déformation q. Enfin, nous comparons les résultats expérimentaux avec les résultats théoriques obtenus pour des valeurs particulières de q. Nous montrons aussi qu'à la limite $q \rightarrow 1$, nous retrouvons les résultats déjà connus en physique statistique quantique non-déformée.

Ce mémoire est organisé comme suit. Dans le premier chapitre, à titre de rappel nous présentons la théorie de la physique statistique quantique du gaz parfait non-relativiste de Bose.

Nous montrons comment calculer les grandeurs thermodynamiques et on abordera la condensation de Bose-Einstein. Dans le deuxième chapitre, on introduit les notions mathématiques essentielles de l'algèbre q -déformée comme la dérivée de Jackson. Dans le troisième chapitre, on utilise la physique statistique quantique q -déformée pour étudier les propriétés du gaz parfait non-relativiste de Bose. Le mémoire se termine par une conclusion.

Chapitre 1

Statistique quantique du gaz parfait de Bose

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter à titre de rappel le calcul détaillé des grandeurs thermodynamiques d'un gaz parfait non relativiste de Bose. Pour la rédaction de ce chapitre, nous avons utilisés les références suivantes [3, 4, 5].

1.2 Fonction de partition

En représentation du nombre d'occupation, la fonction de partition grand canonique est définie par

$$Z(T, V, \mu) = \sum_{\{n_k\}} g \{n_k\} \exp \left\{ -\beta \sum_{k=1}^{\infty} (\varepsilon_k - \mu) n_k \right\}, \quad (1.1)$$

où $\beta = \frac{1}{kT}$ est la constante de Boltzmann, ε_k sont les énergies d'une particule quantique libre dans une boîte de volume V et μ le potentiel chimique. Pour les bosons $g \{n_k\} = 1$, alors

$$\begin{aligned} Z(T, V, \mu) &= \sum_{n_1 n_2 \dots = 0}^{\infty} \exp \left\{ -\beta \sum_{k=1}^{\infty} (\varepsilon_k - \mu) n_k \right\} \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n_k=0}^{\infty} (\exp \{ -\beta(\varepsilon_k - \mu) \})^{n_k}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

cette somme est une série géométrique, on écrit donc

$$Z(T, V, \mu) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \exp(-\beta(\varepsilon_k - \mu))} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - z \exp(-\beta\varepsilon_k)},$$

où $z = \exp(\beta\epsilon)$ est la fugacité.

Le logarithme de la fonction de partition grand canonique est

$$\log Z(T, V, \mu) = - \sum_k \log \{1 - z \exp(-\beta\epsilon_k)\}. \quad (1.3)$$

On peut calculer z à partir du nombre de particule N fixé

$$N = - \frac{\partial \phi}{\partial \mu} \Big|_{T, V}, \quad (1.4)$$

où $\phi = -kT \log Z(T, V, \mu)$ est le potentiel grand canonique, donc

$$N = kT \frac{\partial \log Z(T, V, \mu)}{\partial \mu} = \sum_k \frac{kT \beta z \exp(-\beta\epsilon_k)}{1 - z \exp(-\beta\epsilon_k)},$$

et après simplification

$$N = \sum_k \frac{1}{z^{-1} \exp(\beta\epsilon_k) - 1}. \quad (1.5)$$

– Pour tous les états à une particule $|k\rangle$, il faut que $0 \leq \langle n_k \rangle \leq N$, c'est-à-dire $z^{-1} \exp(\beta\epsilon_k) = \exp(\beta(\epsilon_k - \mu)) > 1$, donc $\epsilon_k > \mu$ pour tout k .

– Le potentiel chimique d'un gaz de Bose doit être plus petit que l'énergie du niveau à une particule le plus bas ($\epsilon = 0$), c'est-à-dire $\mu \leq 0$ et $0 \leq z \leq 1$, cette restriction de la fugacité est très importante pour la suite [3].

Pour un grand volume la somme \sum_k est remplacée par l'intégrale $\frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k$, et on travaillera dans l'espace des impulsions, alors

$$\frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k = \frac{V}{(2\pi)^3} \int k^2 dk \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int d\varphi = \frac{4\pi V}{(2\pi)^3} \int k^2 dk. \quad (1.6)$$

Pour un gaz parfait de Bose non relativiste : $\epsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$, $k^2 = \frac{2m\epsilon_k}{\hbar^2} \Rightarrow k = \sqrt{\frac{2m\epsilon_k}{\hbar}}$ et $dk = \frac{m d\epsilon_k}{\hbar \sqrt{2m\epsilon_k}}$.

On remplace dans (1.6), on trouve

$$\begin{aligned} \frac{4\pi V}{(2\pi)^3} \int k^2 dk &= \frac{V 2\pi}{(2\pi)^3} \int \frac{2m\epsilon_k 2m d\epsilon_k}{\hbar^3 \sqrt{2m\epsilon_k}} = \frac{V 2\pi 2m}{(2\pi)^3} \int \frac{(2m\epsilon_k)^{\frac{1}{2}} d\epsilon_k}{\hbar^3} \\ &= \frac{V (2\pi)^3}{(2\pi)^3} 2\pi \frac{(2m)^{\frac{3}{2}}}{\hbar^3} \int \epsilon_k^{\frac{1}{2}} d\epsilon_k : \end{aligned}$$

après simplification on obtient

$$\frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k = \frac{2\pi V}{\hbar^3} (2m)^{\frac{3}{2}} \int \epsilon^{\frac{1}{2}} d\epsilon, \quad (1.7)$$

et souvent on utilise la substitution $\sum_k \rightarrow \int g(\varepsilon) d\varepsilon$ où $g(\varepsilon)$ est la densité d'états à une particule :

$$g(\varepsilon) = \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{\frac{3}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

• Pour les énergie faibles $\varepsilon \rightarrow 0$, l'approximation de la somme \sum_k par une intégrale est très mauvaise [3].

Appliquons maintenant la substitution $\sum_k \rightarrow \int g(\varepsilon) d\varepsilon$ aux deux équations (1.3) et (1.5), on obtient

• Pour la fonction grand canonique :

$$\begin{aligned} \log Z(T, V, \mu) &= -\sum_{k=0} \log \{1 - z \exp(-\beta\varepsilon_k)\} \\ &= \log(1 - z) - \sum_{k \neq 0} \log \{1 - z \exp(-\beta\varepsilon_k)\}. \end{aligned}$$

Ecrivons la somme sous la forme d'une intégrale

$$\begin{aligned} \log Z(T, V, \mu) &= -\int g(\varepsilon) \log(1 - z \exp(-\beta\varepsilon)) d\varepsilon - \log(1 - z) \\ &= -\frac{2\pi(2m)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \underbrace{\int_0^{\infty} \varepsilon^{\frac{1}{2}} \log(1 - z \exp(-\beta\varepsilon)) d\varepsilon}_I - \log(1 - z). \end{aligned}$$

En intégrant I par partie

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} \varepsilon^{\frac{1}{2}} \log(1 - z \exp(-\beta\varepsilon)) d\varepsilon \\ &= \frac{2}{3} \varepsilon^{\frac{3}{2}} \log(1 - z \exp(-\beta\varepsilon)) \Big|_0^{\infty} - \frac{2}{3} \int_0^{\infty} \varepsilon^{\frac{3}{2}} \frac{\beta z \exp(-\beta\varepsilon)}{1 - z \exp(-\beta\varepsilon)} d\varepsilon, \end{aligned} \quad (1.8)$$

le premier terme s'annule, on trouve donc

$$I = -\frac{2}{3} \int_0^{\infty} \varepsilon^{\frac{3}{2}} \frac{\beta z \exp(-\beta\varepsilon)}{1 - z \exp(-\beta\varepsilon)} d\varepsilon,$$

en remplaçant dans (1.8), on obtient

$$\log Z(T, V, \mu) = \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3} \beta \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{\frac{3}{2}} z \exp(-\beta\varepsilon)}{1 - z \exp(-\beta\varepsilon)} d\varepsilon - \log(1 - z),$$

et qui peut aussi s'écrire sous la forme

$$\log Z(T, V, \mu) = \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3} \beta \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{z^{-1} \exp(\beta\varepsilon_k) - 1} d\varepsilon_k - \log(1 - z), \quad (1.9)$$



le dernier terme correspond au niveau d'énergie fondamental $\varepsilon = 0$.

- Pour le nombre de particule :

$$N(T, V, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{-1} \exp(\beta \varepsilon_k) - 1} = \sum_{k \neq 0} \frac{1}{z^{-1} \exp(\beta \varepsilon_k) - 1} + \frac{z}{1 - z},$$

de la même manière

$$N(T, V, \mu) = \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon_k^{\frac{1}{2}}}{z^{-1} \exp(\beta \varepsilon_k) - 1} d\varepsilon_k + \frac{z}{1 - z}, \quad (1.10)$$

où $\frac{z}{1-z} = N_0$ représente le nombre de particule au niveau $\varepsilon = 0$.

Les intégrales définies dans les équations (1.9) et (1.10) sont des intégrales standard de physique mathématique. La forme générale de ces intégrales est obtenu en posant $x = \beta \varepsilon$.

$$g_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}}{z^{-1} \exp(x) - 1} dx, \quad \text{avec } 0 \leq z \leq 1, \text{ et } n \in \mathbb{R}, \quad (1.11)$$

où $\Gamma(n)$ est la fonction Gamma $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} t^{n-1} \exp(-t) dt$.

Alors l'eq.(1.9) s'écrit en fonction de $g_n(z)$ en posant $x = \beta \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{x}{\beta}$ et $d\varepsilon = \frac{dx}{\beta}$, donc

$$\begin{aligned} \log Z(T, V, \mu) &= \frac{2\pi V}{h^3} \frac{2(2m)^{\frac{3}{2}}}{3(\beta)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{z^{-1} \exp(x) - 1} dx - \log(1 - z) \\ &= \frac{2\pi V}{h^3} (2mkT)^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3} \int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{z^{-1} \exp(x) - 1} dx - \log(1 - z). \end{aligned}$$

En utilisant la définition (1.11), on remarque que $n = \frac{5}{2}$, donc

$$\log Z(T, V, \mu) = \frac{2\pi V}{h^3} (2mkT)^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) g_{\frac{5}{2}}(z) - \log(1 - z). \quad (1.12)$$

En utilisant $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ et $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, on trouve $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$. Finalement l'expression finale est

$$\log Z(T, V, \mu) = \frac{V}{\lambda^3} g_{\frac{5}{2}}(z) - \log(1 - z), \quad (1.13)$$

où $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}$ est la longueur d'onde thermique moyenne de de Broglie.

De la même manière, on calcule l'expression du nombre de particules

$$N(T, V, \mu) = \frac{V}{\lambda^3} g_{\frac{3}{2}}(z) - N_0(z). \quad (1.14)$$

1.3 Propriétés des fonctions $g_n(z)$

Dans l'éq (1.11), développons la fonction $\frac{1}{z^{-1} \exp(x) - 1}$ sous forme d'une série

$$\frac{1}{z^{-1} \exp(x) - 1} = z \exp(-x) \frac{1}{1 - z \exp(-x)} = z \exp(-x) \sum_{k=0}^{\infty} \{z \exp(-x)\}^k,$$

car $\frac{1}{1 - z \exp(-x)} = 1 + z \exp(-x) + (z \exp(-x))^2 + \dots$, est une série géométrique de raison $z \exp(-x) < 1$, alors

$$\frac{1}{z^{-1} \exp(x) - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \{z \exp(-x)\}^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \{z \exp(-x)\}^k,$$

on remplace dans l'expression de $g_n(z)$

$$g_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} x^{n-1} \{z \exp(-x)\}^k dx = \frac{1}{\Gamma(n)} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} z^k x^{n-1} \exp(-kx) dx,$$

en utilisant le changement de variable suivant $x = \frac{y}{k} \Rightarrow dx = \frac{dy}{k}$, donc

$$g_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} z^k \frac{y^{n-1}}{k^{n-1}} \exp(-y) \frac{dy}{k} = \frac{1}{\Gamma(n)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n} \int_0^{\infty} y^{n-1} \exp(-y) dy,$$

l'intégrale $\int_0^{\infty} y^{n-1} \exp(-y) dy = \Gamma(n)$, alors l'expression finale de $g_n(z)$ est

$$g_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n}, \quad \text{pour } 0 \leq z \leq 1. \quad (1.15)$$

Pour $n \leq 1$ et $z \rightarrow 1$, $g_n(z) \rightarrow \infty$.

Pour $n > 1$ et $0 \leq z \leq 1$, $g_n(z)$ est finie.

Pour $z = 1$, on a $\mu = 0$, $g_n(z = 1)$ est la fonction de Zêta de Riemann

$$g_n(z = 1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} = \zeta(n), \quad n > 1. \quad (1.16)$$

La série $\zeta(n)$ converge pour $n > 1$.

Quelques valeurs particulières de $\zeta(n)$

$\zeta(1) \rightarrow \infty$	$\zeta\left(\frac{3}{2}\right) \approx 2,612$	$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,645$
$\zeta\left(\frac{5}{2}\right) \approx 1,341$	$\zeta(3) \approx 1,202$	$\zeta\left(\frac{7}{2}\right) \approx 1,127$
$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \approx 1,082$	$\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945} \approx 1,017$	$\zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450} \approx 1,004$

a) Représentation graphique

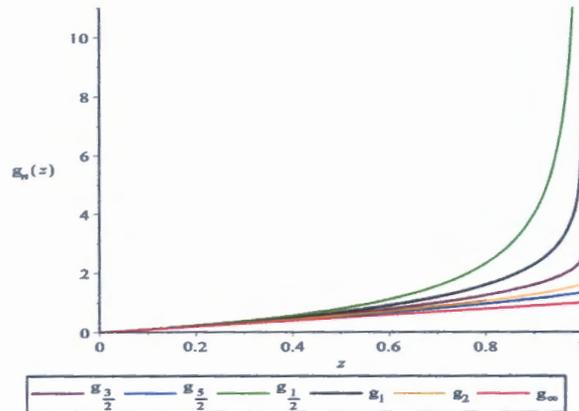


Figure 1. 1. Variation des fonctions $g_n(z)$ en fonction de z .

b) Analyse graphique

- On observe que toutes les fonctions de $g_n(z)$ partent de l'origine $z = 0$.
- On distingue deux cas sur les courbes :
 - Pour $n < 1$, on remarque que $g_n(z)$ tendent vers l'infini lorsque $z \rightarrow 1$.
 - Pour $n > 1$, elles ont une valeur finie en $z = 1$, qui décroît régulièrement lorsque n croît.
- Si $n \rightarrow \infty$, $g_n(z) \approx z$.
- On remarque aussi que pour $n \leq 1$, la fonction $\zeta(n)$ diverge (voir la série (1.16), si $z = 1$), $g_n(z) \rightarrow \infty$.

1.4 Propriétés physiques du gaz de Bose

A l'aide de l'Eq (1.14), on peut déterminer z à partir de N (pour V et T donnés)

$$N = \frac{V}{\lambda^3} g_{\frac{3}{2}}(z) + N_0 = N_\epsilon + N_0, \quad (1.17)$$

où N_ϵ représente le nombre de particules dans les états excités et N_0 le nombre de particules dans l'état fondamental ($\epsilon = 0$).

L'ordre de grandeur de N_ϵ et N_0

Pour $N \gg 1$ et pour des température pas trop faibles, en général $V\lambda^3 \gg 1$ [3], (puisque λ dépend de T), $0 \leq g_{\frac{3}{2}}(z) \leq \zeta\left(\frac{3}{2}\right)$.

On peut écrire N_ϵ^{\max} comme suit

$$N_\epsilon^{\max} = \frac{V}{\lambda^3} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow N_\epsilon^{\max} = V \left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} \zeta\left(\frac{3}{2}\right),$$

où $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}$ et N_ϵ^{\max} est le nombre maximum de particules dans les états excités, c'est-à-dire

$$N_\epsilon^{\max} \propto VT^{\frac{3}{2}},$$

si N_0 doit contribuer notablement au nombre de particules, il faut que [3].

$$N \approx N_0 = \frac{z}{1-z} \quad \text{ou} \quad z = \frac{N}{N+1} \approx 1.$$

Limite thermodynamique

En physique statistique, la limite thermodynamique est définie par : " lorsque le volume V du système tend vers l'infini et le nombre de particule N du système tend vers l'infini, cependant la densité de particules $\rho = \frac{N}{V}$ du système reste constante".

Pour cela écrivons l'Eq (1.17) sous la forme

$$\frac{N}{N} = \frac{N_\epsilon}{N} + \frac{N_0}{N} \Rightarrow 1 = \frac{N_\epsilon}{N} + \frac{N_0}{N},$$

où $N_\epsilon = \frac{V}{\lambda^3} \zeta\left(\frac{3}{2}\right)$, et $N_0 = \frac{z}{1-z}$.

Donc, à la limite thermodynamique, on distingue deux cas

$$\frac{N_\epsilon}{N} + \frac{N_0}{N} = 1, \lim_{N \rightarrow \infty} \begin{cases} z < 1 \Rightarrow \frac{N_0}{N} = 0 \Rightarrow \frac{N_\epsilon}{N} = 1 \\ \text{(Le nombre de particules dans les états excités } N_\epsilon = N) \\ z = 1 \Rightarrow \frac{N_0}{N} = \frac{N_\epsilon}{N} = 1 \Rightarrow N_0 = N - N_\epsilon \\ \text{(toutes les particules ne sont pas dans les états excités)} \end{cases} \quad (1.18)$$

Condensation de Bose-Einstein

a) Le phénomène de condensation de Bose-Einstein

Einstein a montré aussi que si la longueur d'onde thermique de de Broglie $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}$ est du même ordre que la distance interatomique alors les atomes s'accumulent au même niveau d'énergie qui est le niveau fondamental du système, ce phénomène est connu sous le nom de la condensation de Bose-Einstein [1]. La première réalisation expérimentale de la condensation de Bose-Einstein d'un gaz atomique a eu lieu en 1995 par *Eric Cornell, Carl Wieman et Wolfgang Ketterle* réalisée sur des nuages d'atomes dilués, proche des hypothèses d'Einstein, de densité environ 10^{12} atomes/m³ et qui lui correspond une température critique de condensation $T_c = 0.4 \mu K$ pour des atomes de rubidium.

b) Etude du phénomène

Si l'on a

$$N < N_\epsilon^{\max},$$

où N_ε^{\max} est le nombre maximum de particules dans les états excités, alors

$$\frac{N\lambda^3}{V} < \zeta\left(\frac{3}{2}\right). \quad (1.19)$$

Alors, toutes les particules peut-être placées dans des états excités, dans ce cas N_0 peut être négligé dans les équations (1.14) et (1.17).

Mais si on a

$$N > N_\varepsilon^{\max} \Rightarrow N > \frac{V}{\lambda^3} \zeta\left(\frac{3}{2}\right), \quad (1.20)$$

dans ce cas les particules ne sont pas toutes dans les états excités.

Pour $z = 1$, on a

$$N = N_0 + N_\varepsilon^{\max} \Rightarrow N_0 = N - N_\varepsilon^{\max},$$

donc

$$N_0 = N - \frac{V}{\lambda^3} \zeta\left(\frac{3}{2}\right),$$

où N_0 est le nombre de particules dans l'état fondamental $\varepsilon = 0$.

Le passage entre les équations (1.19) et (1.20) se produit juste quand

$$\frac{N\lambda^3}{V} = \zeta\left(\frac{3}{2}\right). \quad (1.21)$$

Remarques :

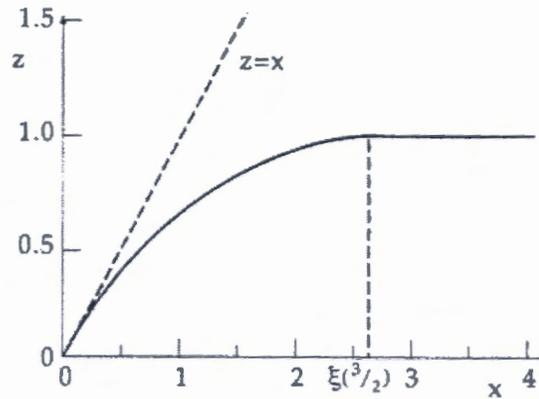
-Pour des températures élevées et des densités faibles, dans ce cas on est dans la situation de l'Eq (1.19), c'est-à-dire l'énergie thermique est suffisamment élevée pour exciter toutes les particules dans des niveaux $\varepsilon > 0$ [3].

-Pour des températures très basses et des densités élevées, les bosons ont tendance à se rassembler dans l'état fondamental $\varepsilon = 0$.

Maintenant à partir de l'Eq (1.18), on pose $x = \frac{N\lambda^3}{V}$, alors la fugacité s'écrit

$$z(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \\ x = g_{\frac{3}{2}}(z) & \text{si } x < \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \end{cases} \quad (1.22)$$

c) Représentation graphique

Figure 1. 2. La variation de z en fonction de x

- La courbe $z(x)$ possède un point anguleux pour $x = \zeta\left(\frac{3}{2}\right)$, donc la condensation de Bose n'apparaît pas [3].

- Notons que $g_{\frac{3}{2}}(z)$ converge pour les valeurs petites de $x = g_{\frac{3}{2}}(z)$, et la série suivante

$$g_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n} \text{ s'écrit comme}$$

$$x = z + \frac{z^2}{2^{\frac{3}{2}}} + \frac{z^3}{3^{\frac{3}{2}}} + \dots, \text{ si } x \ll 1,$$

où $z \approx x = \frac{N\lambda^3}{V}$, c'est la limite du gaz parfait classique (si la courbe $z = x$).

Les expressions de N_ϵ et N_0 sont données par

$$N_\epsilon = \begin{cases} N, & \text{pour } x < \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \text{ donc, } N < N_\epsilon^{\max} \\ N_\epsilon, & \text{pour } x \geq \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \text{ donc, } N \geq N_\epsilon^{\max} \end{cases} \quad (1.23)$$

$$N_0 = \begin{cases} 0, & \text{pour } x < \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \text{ donc, } N = N_\epsilon^{\max} \\ N - N_\epsilon, & \text{pour } x \geq \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \end{cases} \quad (1.24)$$

1.5 Température critique

Pour un nombre de particules N fixés, l'équation (1.21) donne la valeur de la température critique T_c [5], on a d'après (1.21)

$$\frac{Nh^3}{V(2m\pi kT)^{\frac{3}{2}}} = \zeta\left(\frac{3}{2}\right).$$

Donc

$$\left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{2m\pi kT \left\{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\right\}^{\frac{2}{3}}}{h^2},$$

alors, l'expression de la température critique est donnée par

$$kT_c = \left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{h^2}{2m\pi \left\{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\right\}^{\frac{2}{3}}}, \quad (1.25)$$

et à partir des équations (1.23) et (1.24), on obtient

$$\frac{N_\epsilon}{N} = \begin{cases} 1 & T \geq T_c \\ \left(\frac{T}{T_c}\right)^{\frac{3}{2}} & T < T_c \end{cases} \quad (1.26)$$

$$\frac{N_0}{N} = \begin{cases} 0 & T \geq T_c \\ 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{\frac{3}{2}} & T < T_c \end{cases} \quad (1.27)$$

Représentation graphique

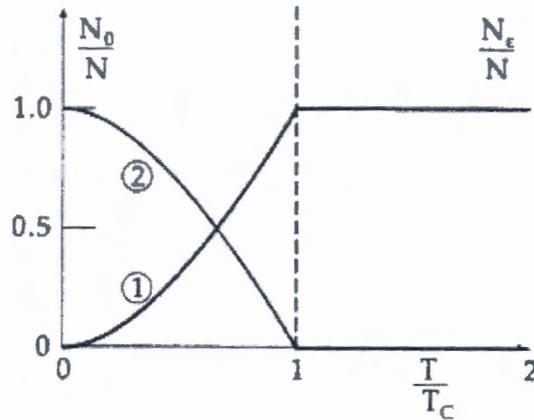


Figure 1. 3. Variation de $\frac{N_\epsilon(T)}{N}$ et $\frac{N_0}{N}$ en fonction de $\frac{T}{T_c}$.

A partir de figure ci-dessus, on remarque que

- La courbe 1 représente l'équation (1.26), et la deuxième courbe représente l'équation (1.27).

- Pour $T \geq T_c$, notons que toutes les particules sont dans des états excités, le nombre de particules dans l'état fondamental est négligeable c'est-à-dire $N_\epsilon \approx N$ et $N_0 \approx 0$.

- Si $T < T_c$, on remarque que les particules sont dans l'état fondamental.

1.6 Potentiel grand canonique

Le potentiel grand canonique est défini par

$$\Phi(T, V, \mu) = -kT \log Z(T, V, \mu) = U - TS - \mu N = -PV,$$

donc

$$kT \log Z(T, V, \mu) = PV,$$

où $Z(T, V, \mu)$ est la fonction de partition grand canonique.

D'après l'équation (1.13), nous trouvons

$$PV = \frac{VkT}{\lambda^3} g_{\frac{5}{2}}(z) - kT \log(1 - z),$$

donc la pression est

$$P = \frac{kT}{\lambda^3} g_{\frac{5}{2}}(z) - \frac{kT}{V} \log(1 - z),$$

à la limite thermodynamique, on peut négliger le dernier terme dans cette équation car $\log(1 - z)$ est fini, et ce terme tend vers zéro pour $V \rightarrow \infty$, donc

$$P = \frac{kT}{\lambda^3} g_{\frac{5}{2}}(z).$$

Pour $T < T_c$, $z = 1$, donc la pression est une fonction de Zêta de Riemann

$$P = \frac{kT}{\lambda^3} \zeta\left(\frac{5}{2}\right). \quad (1.28)$$

On remarque que P est indépendante du volume V et du nombre de particules N , c'est-à-dire P est une fonction de la température T , par conséquent le nombre de particules ne contribue pas à la pression. Ceci est observé via les équations (1.26) et (1.27), si la température du système $T < T_c$.

Pour les faibles valeurs de z ($z \ll 1 \Rightarrow x \ll 1$), nous pouvons utiliser le développement en séries de l'équation suivante

$$P = \frac{kT}{\lambda^3} g_{\frac{5}{2}}(z), \quad \text{et} \quad g_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n},$$

donc

$$P = \frac{kT}{\lambda^3} \left(z + \frac{z^2}{2^{\frac{5}{2}}} + \frac{z^3}{3^{\frac{5}{2}}} + \dots \right), \quad (1.29)$$

et pour $z \approx x \ll 1$, on obtient

$$P = \frac{kT}{\lambda^3} z = \frac{kT}{\lambda^3} x, \quad x = \frac{N\lambda^3}{V},$$

donc

$$P = \frac{NkT}{V},$$

qui est l'équation d'état du gaz parfait classique.

Si on tient compte des termes d'ordre supérieure, l'élimination de z dans les relations de p et N conduit à un développement systématique de la pression en fonction du paramètre x [3].

$$\frac{PV}{NkT} = \sum_{l=1}^{\infty} a_l x^{l-1},$$

et les coefficients a_l sont tels que

$$a_1 = 1, \quad a_2 = -\frac{1}{4\sqrt{2}} = -0,177, \quad a_3 = -\frac{2}{9\sqrt{3}} = -0,003, \quad \dots\dots\dots$$

1.7 Energie interne

L'énergie interne est définie par

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z(T, V, \mu), \quad (1.30)$$

et en utilisant l'expression de $\log Z(T, V, \mu)$ donnée par l'Eq (1.9), on a

$$\log Z(T, V, \mu) = \frac{V}{\lambda^3} g_{\frac{5}{2}}(z) - \log(1 - z).$$

Pour $z < 1$, on néglige le dernier terme

$$\log Z(T, V, \mu) = \frac{V}{\lambda^3} g_{\frac{5}{2}}(z),$$

alors l'expression de l'énergie interne est

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{V}{\lambda^3} g_{\frac{5}{2}}(z) \right),$$

et $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}} \Rightarrow \frac{1}{\lambda^3} = \frac{(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}}}{h^3} = \frac{(2\pi m)^{\frac{3}{2}}}{h^3 \beta^{\frac{3}{2}}}$, donc

$$U = -V g_{\frac{5}{2}}(z) \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{\lambda^3} \right) = \frac{3}{2} V g_{\frac{5}{2}}(z) \frac{(2\pi m)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \left(\frac{1}{\beta^{\frac{5}{2}}} \right) = \frac{3}{2} V g_{\frac{5}{2}}(z) \frac{(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}}}{h^3} kT,$$

et qui s'écrit en fonction de λ comme

$$U = \frac{3kT}{2V\lambda^3} g_{\frac{5}{2}}(z).$$

Pour $T < T_c$, dans le cas de $z = 1$ et $g_{\frac{5}{2}}(z) = \zeta(\frac{5}{2})$, alors

$$U = \frac{3kT}{2V\lambda^3} \zeta\left(\frac{5}{2}\right).$$

Pour $T > T_c$, dans ce cas z n'est pas indépendant de T , mais comme $N_0 \approx 0$ éliminons le terme $\frac{V}{\lambda^3}$

$$U = \frac{3kT}{2V\lambda^3} g_{\frac{5}{2}}(z), \quad (1.31)$$

d'autre part

$$\frac{N\lambda^3}{V} = g_{\frac{3}{2}}(z) \Rightarrow V = \frac{N\lambda^3}{g_{\frac{3}{2}}(z)}.$$

On obtient alors

$$U = \frac{3}{2} NkT \frac{g_{\frac{5}{2}}(z)}{g_{\frac{3}{2}}(z)}. \quad (1.32)$$

A la limite classique $z \ll 1$ pour $n > 1$, $g_n(z)$ est fini et $g_n(z) \approx z$, alors l'énergie interne du gaz parfait classique est

$$U = \frac{3}{2} NkT.$$

1.8 Capacité calorifique

La capacité calorifique est définie par

$$\frac{C_v}{Nk} = \frac{1}{Nk} \frac{\partial U}{\partial T} \Big|_{N,V},$$

en utilisant l'expression de U donnée l'Eq (1.32) on a

$$\begin{aligned} \frac{C_v}{Nk} &= \frac{1}{Nk} \frac{3}{2} Nk \frac{\partial}{\partial T} \left[T \frac{g_{\frac{5}{2}}(z)}{g_{\frac{3}{2}}(z)} \right] \\ &= \frac{3}{2} \frac{g_{\frac{5}{2}}(z)}{g_{\frac{3}{2}}(z)} + \frac{3}{2} T \frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{g_{\frac{5}{2}}(z)}{g_{\frac{3}{2}}(z)} \right]. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Calculons $\frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{g_{\frac{5}{2}}(z)}{g_{\frac{3}{2}}(z)} \right]$ en utilisant la propriété

$$\frac{\partial}{\partial T} g_n(z) = \frac{\partial z}{\partial T} \frac{\partial g_n(z)}{\partial z},$$

et en utilisant $g_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n}$, on trouve la relation de récurrence

$$g'_n(z) = \frac{1}{z} g_{n-1}(z),$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{g_{\frac{5}{2}}(z)}{g_{\frac{3}{2}}(z)} \right] = \frac{\partial z}{\partial T} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{g_{\frac{5}{2}}(z)}{g_{\frac{3}{2}}(z)} \right] = \frac{\partial z}{\partial T} \frac{1}{z} \left[1 - \frac{g_{\frac{5}{2}}(z)g_{\frac{1}{2}}(z)}{\left[g_{\frac{3}{2}}(z) \right]^2} \right]. \quad (1.34)$$

Pour calculer $\frac{\partial z}{\partial T}$, nous utilisons l'expression de N suivante

$$N = \frac{V}{\lambda^3} g_{\frac{3}{2}}(z) \Rightarrow g_{\frac{3}{2}}(z) = \frac{N\lambda^3}{V}, \text{ pour } z < 1$$

alors

$$\frac{\partial}{\partial T} \left[g_{\frac{3}{2}}(z) \right] = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{N\lambda^3}{V} \right), \quad (1.35)$$

et on a

$$\frac{\partial}{\partial T} \left[g_{\frac{3}{2}}(z) \right] = \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial T} g_{\frac{1}{2}}(z), \quad (1.36)$$

alors

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{N\lambda^3}{V} \right) = \frac{N}{V} \frac{\partial}{\partial T} (\lambda^3) = -\frac{3N}{2V} \frac{h^3}{(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}} T},$$

qui s'écrit sous la forme suivante

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{N\lambda^3}{V} \right) = -\frac{3N\lambda^3}{2V T}. \quad (1.37)$$

En remplaçant les deux Eqs. (1.36) et (1.37) dans l'Eq (1.35), on obtient

$$\frac{\partial z}{\partial T} = -\frac{3z}{2T} \frac{g_{\frac{3}{2}}(z)}{g_{\frac{1}{2}}(z)}.$$

A partir de l'Eq (1.34), on a aussi

$$\frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{g_{\frac{5}{2}}(z)}{g_{\frac{3}{2}}(z)} \right] = -\frac{3}{2T} \frac{z g_{\frac{3}{2}}(z)}{z g_{\frac{1}{2}}(z)} \left[1 - \frac{g_{\frac{5}{2}}(z) g_{\frac{1}{2}}(z)}{\left[g_{\frac{3}{2}}(z) \right]^2} \right] = -\frac{3}{2T} \left[\frac{g_{\frac{3}{2}}(z)}{g_{\frac{1}{2}}(z)} - \frac{g_{\frac{5}{2}}(z)}{g_{\frac{3}{2}}(z)} \right],$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{C_v}{Nk} &= \frac{3}{2} \frac{g_{\frac{5}{2}}(z)}{g_{\frac{3}{2}}(z)} - \frac{3}{2T} \frac{3T}{2} \left[\frac{g_{\frac{3}{2}}(z)}{g_{\frac{1}{2}}(z)} - \frac{g_{\frac{5}{2}}(z)}{g_{\frac{3}{2}}(z)} \right] \\ &= \frac{3}{2} \frac{g_{\frac{5}{2}}(z)}{g_{\frac{3}{2}}(z)} - \frac{9}{4} \frac{g_{\frac{3}{2}}(z)}{g_{\frac{1}{2}}(z)} + \frac{g_{\frac{5}{2}}(z)}{g_{\frac{3}{2}}(z)}. \end{aligned}$$

Finalement, l'expression de C_v est

$$\frac{C_v}{Nk} = \frac{15}{4} \frac{g_{\frac{5}{2}}(z)}{g_{\frac{3}{2}}(z)} - \frac{9}{4} \frac{g_{\frac{3}{2}}(z)}{g_{\frac{1}{2}}(z)}, \quad (1.38)$$

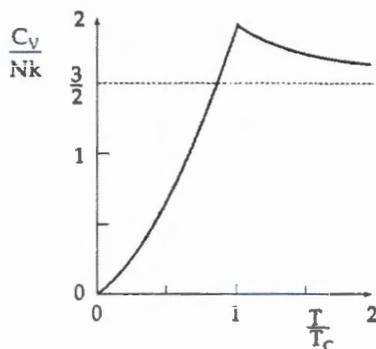


Figure 1. 4. Variation de $\frac{C_v}{Nk}$ en fonction de $\frac{T}{T_c}$.

D'après la figure (1. 4) et l'Eq (1.38), notons que

- Pour $T < T_c$ nous avons dans la région de la condensation de Bose ($z \rightarrow 1$) dans ce cas les particules se condensent dans l'état fondamental, donc à la limite classique $g_{\frac{1}{2}}(z)$ tend vers l'infini pour $n < 1$, donc l'Eq (1.38) s'écrit sous la forme suivante

$$\frac{C_v}{Nk} = \frac{15 \zeta(\frac{5}{2})}{4 \zeta(\frac{3}{2})}.$$

- Pour $T = T_c$, il y a un pic c'est-à-dire C_v discontinue, l'application du pic dans C_v est typique pour une transition de phase du second ordre [3], à partir de tableau (3.15), on obtient

$$\frac{C_v}{Nk} = 1,925.$$

- Pour $T > T_c$, à la limite classique $z \rightarrow 0$ alors nous avons le cas classique

$$\frac{C_v}{Nk} = \frac{15}{4} - \frac{9}{4} = \frac{3}{2},$$

donc les particules sont dans les état excité.

Chapitre 2

Introduction à l'algèbre q-déformée

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous introduisons quelques notions élémentaires sur l'algèbre q-déformée définie par la relation de commutation [6, 7, 8].

$$[a, a^+]_q = aa^+ - qa^+a = 1, \quad q > 0,$$

où q est le paramètre de déformation.

Cette algèbre est liée aux groupes quantiques et à la limite $q \rightarrow 1$, on retrouve les résultats classiques du système non déformé.

Par ailleurs, l'espace q-Fock est défini par l'action de l'opérateur de création a^+ sur le vide, et par l'action l'opérateur d'annihilation a sur le vide

$$a|0\rangle = 0 \quad \text{et} \quad |n\rangle = \frac{(a^+)^n}{\sqrt{[N]!}}|0\rangle,$$

où $N = a^+a$ l'opérateur nombre d'occupation.

2.2 Algèbre q-déformée

L'algèbre q-déformée est définie par les relations de commutation suivantes

$$aa^+ - qa^+a = 1, \quad q > 0 \tag{2.1}$$

$$[N, a] = -a \tag{2.2}$$

$$[N, a^+] = a^+, \tag{2.3}$$

et on a aussi

$$[a, a] = [a^+, a^+] = 0, \tag{2.4}$$

où a^+ l'opérateur création, a l'opérateur d'annihilation.

On observe que toutes les équations ci-dessus ont la même forme que dans le cas d'un système non déformé sauf la relation (2.1).

Les adjoints de a^+ et N sont

$$a^+ = (a^+)^+ = a \quad \text{et} \quad N^+ = (a^+a)^+ = a^+a = N,$$

ce qui implique que N est un opérateur *hermitien*.

Pour démontrer les relations (2.2) et (2.3), on démarre de

$$[N, a] = [a^+a, a] = a^+[a, a] + [a^+, a]a,$$

ce qui correspond à la relation de commutation

$$[N, a] = -a.$$

De la même manière on montre que $[N, a^+] = a^+$.

Pour construire l'"Espace de Fock", engendré par les états propres orthonormés $|n\rangle$

$$\begin{cases} N|n\rangle = n|n\rangle \\ \langle n|n'\rangle = \delta_{n,n'} \\ \sum_n |n\rangle\langle n| = 1 \end{cases}$$

Pour $n = 0$, on a $N|0\rangle = 0$, où $|0\rangle$ est l'état du vide.

Maintenant, appliquons les actions a^+ et a sur le vecteur $|n\rangle$

$$N|n\rangle = n|n\rangle,$$

et

$$N(a|n\rangle) = a(N-1)|n\rangle = a[n-1]|n\rangle,$$

donc

$$N(a|n\rangle) = [n-1]a|n\rangle, \tag{2.5}$$

alors $a|n\rangle$ est un vecteur propre de N avec la valeur propre $[n-1]$.

Nous avons

$$N|n-1\rangle = [n-1]|n-1\rangle, \tag{2.6}$$

comparons (2.5) et (2.6), on obtient

$$a|n\rangle = \alpha|n-1\rangle,$$

dans l'espace de q-Fock, on a $\langle n | n' \rangle = \delta_{n,n'}$, $a^+ a = [N]$ et $aa^+ = [N + 1]$, donc

$$\begin{aligned} \langle n | [N] | n' \rangle &= \langle n | a^+ a | n' \rangle \\ &= \langle n - 1 | \alpha^* \alpha | n' - 1 \rangle \\ &= \| \alpha^2 \| \geq 0, \end{aligned}$$

et on a aussi

$$n = \| a | n \rangle \| \geq 0,$$

donc

$$\alpha = \sqrt{[n]}.$$

Par remplacement on a

$$a | n \rangle = \sqrt{[n]} | n - 1 \rangle.$$

Appliquons maintenant l'opérateur de création a^+ sur l'état $(a^+ | n \rangle)$

$$\begin{aligned} N (a^+ | n \rangle) &= a^+ (N + 1) | n \rangle \\ &= [n + 1] a^+ | n \rangle, \end{aligned} \tag{2.7}$$

d'autre part

$$N | n + 1 \rangle = [n + 1] | n + 1 \rangle, \tag{2.8}$$

donc, à partir de (2.7) et (2.8), il vient

$$a^+ | n \rangle = \gamma | n + 1 \rangle. \tag{2.9}$$

Mais

$$\begin{aligned} \langle n | [N] | n' \rangle &= \frac{1}{q} \langle n | aa^+ - 1 | n' \rangle \\ &= \frac{1}{q} \langle n | aa^+ | n' \rangle - \frac{1}{q} \langle n | n' \rangle \\ &= \frac{1}{q} \langle n + 1 | \gamma^* \gamma | n' + 1 \rangle - \frac{1}{q} \langle n | n' \rangle \\ &= \frac{1}{q} (\gamma^2 - 1), \end{aligned}$$

donc

$$\gamma = \sqrt{[n + 1]}.$$

En remplaçant dans (2.9), on obtient

$$a^+ | n \rangle = \sqrt{[n + 1]} | n + 1 \rangle.$$

Finalement, les actions a et a^+ sur l'espace de q-Fock sont données par

$$\begin{cases} a^+ |n\rangle = \sqrt{[n+1]} |n+1\rangle \\ a |n\rangle = \sqrt{[n]} |n-1\rangle \end{cases}$$

On va voir que

$$\begin{aligned} a |0\rangle &= 0 \\ a^+ |0\rangle &= |1\rangle \quad \Rightarrow |1\rangle = a^+ |0\rangle \\ a^+ |1\rangle &= \sqrt{[2]} |2\rangle \Rightarrow |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{[2]}} (a^+)^2 |0\rangle \\ a^+ |2\rangle &= \sqrt{[3]} |3\rangle \Rightarrow |3\rangle = \frac{1}{\sqrt{[3]}} (a^+)^3 |0\rangle \\ &\vdots \end{aligned}$$

Et ainsi, nous obtenons

$$a |0\rangle = 0 \quad \text{et} \quad |n\rangle = \frac{(a^+)^n}{\sqrt{[n]!}} |0\rangle.$$

2.3 Nombre q-déformée

Le nombre q-basique $[x]$ est défini par

$$[x] = \frac{q^x - 1}{q - 1}, \quad (2.10)$$

où x est un nombre ou un opérateur.

Le nombre q-basique $[x]$ a les propriétés suivantes :

- i) Pour la limite $q \rightarrow 1$, le nombre q-basique se déduit au le nombre normal x ($\lim_{q \rightarrow 1} [x] = x$).
- ii) $[1] = 1$ et $[0] = 0$
- iii) $[-x] = -[x]$

Remarque

Le nombre q-basique satisfait la propriété de la non additivité, c'est-à-dire

$$[x + y] = [x] + [y] + (q - 1) [x] [y].$$

Lorsque $q \rightarrow 1$, on a $[x + y] = [x] + [y]$, alors dans ce cas il tend vers les nombres ordinaires.

D'ailleurs, l'opérateur nombre de particule dans le cas déformé est déterminé à partir de l'équation (2.10)

$$[N] = \frac{q^N - 1}{q - 1}, \quad \text{où} \quad [N] = a^+ a,$$

donc

$$a^+a = \frac{q^N - 1}{q - 1}$$

$$q^N = 1 + (q - 1)a^+a,$$

qui s'écrit sous la forme du logarithme

$$N = \frac{1}{\log q} \log\{1 + (q - 1)a^+a\}.$$

Alors, le nombre de particule est une relation fonctionnelle non linéaire $N = f(a^+a)$.

On définit aussi la q-factorielle de $[n]$ comme

$$[n]_q! = [n]_q [n - 1]_q \dots [2]_q [1]_q.$$

où

$$[n - 1]_q = q^{-1} [n] - q^{-1}$$

$$[n - 2]_q = q^{-2} [n] - q^{-2} - q^{-1}$$

$$[n - 3]_q = q^{-3} [n] - q^{-3} - q^{-2} - q^{-1}$$

$$\vdots$$

$$[n - k]_q = q^{-k} [n] - q^{-k} - q^{-k+1} - \dots - q^{-1}$$

Démonstration :

$$[n - 1]_q = \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1}$$

$$= \frac{q^{-1}(q^n - q)}{q - 1}$$

$$= \frac{q^{-1}(q^n - q + 1 - 1)}{q - 1}$$

$$= q^{-1} \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} \right) - q^{-1} \left(\frac{q - 1}{q - 1} \right)$$

$$= q^{-1} [n] - q^{-1},$$

à partir des relations ci-dessus, on obtient

$$[2] = q + 1, \quad [3] = q^2 + q + 1.$$

Les coefficients q-binomiaux ([6]) sont définis par

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_q = \frac{[m]_q!}{[m - n]_q! [n]_q!},$$

à la limite $q \rightarrow 1$, on obtient les coefficients binomiaux ordinaires.

2.4 Quelques fonctions élémentaires q-déformées

La fonction q-exponentielle [6] est définie par

$$\exp_q(ax) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{[n]_q!} x^n,$$

il s'ensuit que les fonctions q-trigonométrique [6], sont définies comme

$$\begin{aligned} \sin_q(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{[2n+1]_q!} \\ \cos_q(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{[2n]_q!}. \end{aligned}$$

2.5 q-dérivées

La transformation des observables de l'espace de q-Fock vers l'espace de configuration (représentation holomorphe de Bargmann), peut-être obtenue en choisissant [2]

$$a^+ = x, \quad a = \partial_x^{(q)},$$

où $\partial_x^{(q)}$ est la dérivée de Jackson (JK) [2], définie comme

$$\partial_x^{(q)} = \frac{f(qx) - f(x)}{x(q-1)}. \quad (2.11)$$

Par exemple

$$\begin{aligned} \partial_x^{(q)}(ax^n) &= \frac{aq^n x^n - ax^n}{x(q-1)} \\ &= \frac{a(q^n - 1)x^n}{x(q-1)} \\ &= a[n] x^{n-1}, \end{aligned}$$

donc

$$\partial_x^{(q)}(ax^n) = a[n] x^{n-1}.$$

La dérivée q-déformée de la somme de deux fonctions est

$$\partial_x^{(q)}(f(x) + g(x)) = \partial_x^{(q)}f(x) + \partial_x^{(q)}g(x). \quad (2.12)$$

La dérivée q-déformée de produit de deux fonctions est donnée par les relations de Leibnitz suivantes

$$\begin{aligned} \partial_x^{(q)} \{f(x)g(x)\} &= \{\partial_x^{(q)}f(x)\}g(x) + f(qx)\{\partial_x^{(q)}g(x)\} \\ \partial_x^{(q)} \{f(x)g(x)\} &= \{\partial_x^{(q)}g(x)\}f(x) + g(qx)\{\partial_x^{(q)}f(x)\}. \end{aligned}$$

Chapitre 3

Physique statistique quantique q-déformée

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous étudions les propriétés thermodynamique d'un gaz parfait de Bose en utlisant la physique statistique quantique q-déformée. Nous allons refaire les calculs déjà existants dans la littérature [2] pour calculer les grandeurs thermodynamiques et déduire les propriétés physiques du gaz parfait de Bose en particulier la condensation de Bose-Einstein en fonction du paramètre de déformation q. Nous commençons par donner les définitions des grandeurs physiques q-déformées puis nous calculons leurs expressions explicites.

3.2 Distribution statistique des q-bosons et moyennes thermiques

Plusieurs chercheurs ont étudié la mécanique statistique en équilibre d'un gaz parfait de bosons dans le cadre de l'algèbre q-déformée [2, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13]. Dans l'ensemble grand canonique l'hamiltonien du gaz de bosons s'écrit sous la forme

$$H = \sum_k (\varepsilon_k - \mu) N_k, \quad (3.1)$$

où k est l'indice d'état, μ est le potentiel chimique et ε_k est l'énergie cinétique dans l'état k et N_k est le nombre de particules.

La moyenne thermique d'un opérateur est défini par la formule

$$\langle O \rangle = \frac{Tr \{ O \exp(-\beta H) \}}{Z},$$



où Z est la fonction de partition grand canonique définie par

$$Z = \text{Tr} \exp(-\beta H). \quad (3.2)$$

Notons que la forme de la fonction de partition est la même que dans cas non déformé.

Le nombre d'occupation moyen n_k correspondant à N_k est défini par l'Eq (2.10) du nombre q-bassique

$$[n_k] = \frac{q^{n_k} - 1}{q - 1}, \quad (3.3)$$

en utilisant les deux relations [10] suivantes

$$1 = \frac{\text{Tr} \{ \exp(-\beta H) \}}{Z},$$

$$q^{n_k} = \frac{\text{Tr} \{ \exp(-\beta H) q^{N_k} \}}{Z},$$

on obtient

$$[n_k] = \frac{\frac{\text{Tr} \{ \exp(-\beta H) q^{N_k} \}}{Z} - \frac{\text{Tr} \{ \exp(-\beta H) \}}{Z}}{q - 1} = \frac{\text{Tr} \{ \exp(-\beta H) (q^{N_k} - 1) \}}{Z(q - 1)}$$

$$= \frac{\text{Tr} \left\{ \exp(-\beta H) \left(\frac{q^{N_k} - 1}{q - 1} \right) \right\}}{Z},$$

et l'expression finale de $[n_k]$ est

$$[n_k] = \frac{\text{Tr} \{ \exp(-\beta H) [N_k] \}}{Z}.$$

D'autre part, comme $[N_k] = a_k^+ a_k$, alors la valeur moyenne du nombre d'occupation n_k s'écrit

$$[n_k] = \frac{\text{Tr} \{ \exp(-\beta H) a_k^+ a_k \}}{Z}, \quad (3.4)$$

en appliquant la propriété cyclique de la trace, on obtient

$$[n_k] = \frac{\text{Tr} \{ a_k \exp(-\beta H) a_k^+ \}}{Z},$$

et en utilisant la propriété [9] $a_k \exp(-\beta H) = \exp \{ -\beta (\varepsilon_k - \mu) \} \exp(-\beta H) a_k$, l'expression de $[n_k]$ devient

$$[n_k] = \frac{\text{Tr} \{ \exp \{ -\beta (\varepsilon_k - \mu) \} \exp(-\beta H) a_k a_k^+ \}}{Z},$$

sachant que $\exp \{ -\beta (\varepsilon_k - \mu) \}$ est une constante, en utilisant l'algèbre des q-bosons, on a

$$[n_k] = \exp \{ -\beta (\varepsilon_k - \mu) \} \frac{\text{Tr} \{ \exp(-\beta H) (q a_k^+ a_k + 1) \}}{Z}$$

$$= \exp \{ -\beta (\varepsilon_k - \mu) \} \left\{ q \frac{\text{Tr} \{ \exp(-\beta H) a_k^+ a_k \}}{Z} + 1 \right\}.$$

L'expression explicite de l'équation précédente peut-être obtenue, en utilisant la propriété suivante

$$[n_k + 1] = q [n_k] + 1,$$

alors, il est facile de montrer que

$$\frac{[n_k]}{[n_k + 1]} = \exp \{-\beta (\varepsilon_k - \mu)\}. \quad (3.5)$$

Pour calculer l'expression du nombre d'occupation n_k , d'après (3.3) on a

$$q^{n_k} = q [n_k] + 1 - [n_k], \quad (3.6)$$

et on a aussi

$$[n_k + 1] = q [n_k] + 1, \quad (3.7)$$

en remplaçant l'Eq (3.7) dans l'Eq (3.6), on obtient

$$\begin{aligned} q^{n_k} &= [n_k + 1] - [n_k] \\ \log(q^{n_k}) &= \log([n_k + 1] - [n_k]). \end{aligned}$$

alors

$$n_k = \frac{1}{\log q} \log([n_k + 1] - [n_k]). \quad (3.8)$$

D'autre part l'Eq (3.5) s'écrit

$$\frac{[n_k]}{q [n_k] + 1} = z \exp(-\beta \varepsilon_k),$$

alors

$$[n_k] = q [n_k] z \exp(-\beta \varepsilon_k) + z \exp(-\beta \varepsilon_k),$$

et

$$[n_k] \{1 - qz \exp(-\beta \varepsilon_k)\} = z \exp(-\beta \varepsilon_k),$$

donc

$$\begin{aligned} [n_k] &= \frac{z \exp(-\beta \varepsilon_k)}{1 - qz \exp(-\beta \varepsilon_k)} \\ [n_k] &= \frac{1}{z^{-1} \exp(-\beta \varepsilon_k) - q}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

En remplaçant (3.9) dans (3.8)

$$n_k = \frac{1}{\log q} \log \left([n_k + 1] - \frac{1}{z^{-1} \exp(-\beta \varepsilon_k) - q} \right). \quad (3.10)$$

D'autre part l'équation (3.5) donne

$$\begin{aligned} [n_k + 1] &= z^{-1} \exp(-\beta \varepsilon_k) [n_k] \\ [n_k + 1] &= z^{-1} \exp(-\beta \varepsilon_k) \frac{1}{z^{-1} \exp(-\beta \varepsilon_k) - q}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

on remplace $[n_k + 1]$ dans l'équation (3.10), on trouve

$$n_k = \frac{1}{\log q} \log \left(z^{-1} \exp(-\beta \varepsilon_k) \frac{1}{z^{-1} \exp(-\beta \varepsilon_k) - q} - \frac{1}{z^{-1} \exp(-\beta \varepsilon_k) - q} \right),$$

qui s'écrit sous la forme suivante

$$n_k = \frac{1}{\log q} \log \left\{ \frac{z^{-1} \exp(-\beta \varepsilon_k) - 1}{z^{-1} \exp(-\beta \varepsilon_k) - q} \right\}. \quad (3.12)$$

Il est facile de voir que l'équation ci-dessus se réduit à la distribution de Bose-Einstein standard lorsque $q \rightarrow 1$.

Le nombre total de particules est donné par $N = \sum_k n_k$.

3.3 Dérivée de Jackson

En utilisant l'expression de l'hamiltonien (3.1), l'expression de la fonction de partition (3.2) peut s'écrire sous la forme

$$Z(T, V, \mu) = \prod_{k=1} \frac{1}{1 - z \exp(-\beta \varepsilon_k)},$$

et le logarithme de la fonction de partition est donné par

$$\log Z(T, V, \mu) = - \sum_k \log \{1 - z \exp(-\beta \varepsilon_k)\}. \quad (3.13)$$

On va voir qu'on a la même structure comme dans le cas des bosons non déformés, ceci est dû au fait que l'hamiltonien du système est une fonction linéaire du nombre d'occupation.

La dérivée de Jackson

La dérivée de Jackson (JD) a été introduit au chapitre 2, et dans ce chapitre nous utilisons ses propriétés pour dériver les fonctions thermodynamiques. Pour cela la dérivée $\frac{\partial}{\partial z}$ doit être remplacé par la dérivée de Jackson, où $D_z^{(q)}$ est définie par

$$D_z^{(q)} = \frac{q-1}{\log q} \partial_z^{(q)},$$

et l'utilisation de JD en thermodynamique doivent-être modifiée selon la prescription suivante :

1) D'abord, notons que la JD s'applique aux variables dont la forme est une exponentielle, par exemple

$$z = \exp(\beta\mu) \quad \text{ou bien} \quad y_k = z \exp(-\beta\varepsilon_k).$$

2) Pour le cas q-déformé, toute dérivée d'une fonction thermodynamique qui dépend de z ou y_k doit-être transformé en dérivée dans l'une de ces variables.

3) Puis, en utilisant la règle de chaîne ordinaire.

4) Enfin, on applique JD par rapport à la variable exponentielle.

Nombre de particules dans le cas q-déformé

Le nombre de particules dans le cas q-déformée est défini par

$$N = kT \frac{\partial}{\partial \mu} \log Z(T, V, \mu),$$

et la dérivée de la fonction de partition grand canonique par rapport à μ (le potentiel chimique), se transforme par une variable de la forme exponentielle

$$N = kT \frac{\partial z}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial z} \log Z(T, V, \mu),$$

où $z = \exp(\beta\mu)$ est la fugacité.

Alors

$$N = z D_z^{(q)} \log Z(T, V, \mu). \quad (3.14)$$

En utilisant les propriétés de cette dérivée, on obtient

$$\begin{aligned} N &= z \frac{q-1}{\log q} \partial_z^{(q)} \log Z(T, V, \mu) \\ &= z \frac{q-1}{\log q} \left\{ \frac{-\sum_k \log \{1 - qz \exp(-\beta\varepsilon_k)\} + \sum_k \log \{1 - z \exp(-\beta\varepsilon_k)\}}{z(q-1)} \right\} \\ &= \sum_k \frac{1}{\log q} \log \left\{ \frac{1 - z \exp(-\beta\varepsilon_k)}{1 - qz \exp(-\beta\varepsilon_k)} \right\} \\ &= \sum_k n_k, \end{aligned}$$

où n_k est le nombre d'occupation donné par l'équation (3.12).

Energie interne q-déformée

L'énergie interne est définie par

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z(T, V, \mu) |_z,$$

pour la dérivée de JD, nous remplaçons la variable de dérivation de la manière suivante

$$U = -\frac{\partial y_k}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial y_k} \log Z(T, V, \mu) |_z,$$

donc, l'énergie interne dans le cas q-déformé peut s'écrire

$$U = \sum_k \frac{\partial y_k}{\partial \beta} D_{y_k}^{(q)} \log \{1 - zy_k\}, \quad (3.15)$$

où $y_k = \exp(-\beta \varepsilon_k)$.

Mainenant, calculons l'expression (3.15)

$$\begin{aligned} U &= -\sum_k \varepsilon_k y_k \frac{q-1}{\log q} \partial_{y_k}^{(q)} \log \{1 - y_k\} = \sum_k \varepsilon_k y_k \frac{q-1}{\log q} \left\{ \frac{\log \{1 - qy_k\} - \log \{1 - y_k\}}{y_k(q-1)} \right\} \\ &= \sum_k \varepsilon_k n_k. \end{aligned}$$

3.4 Entropie du gaz des q-bosons

L'entropie S des q-bosons est définie

$$S = -\frac{\partial \phi}{\partial T} \Big|_{\mu},$$

où $\phi = -T \log Z$ est le potentiel thermodynamique, on prend $\beta = \frac{1}{T}$.

donc

$$S = \frac{\partial}{\partial T} (T \log Z) = \log Z + T \frac{\partial}{\partial T} \log Z.$$

De la même manière, on introduit la dérivée de Jackson (JD) dans l'expression de l'entropie

$$\begin{aligned} S &= \log Z - \beta \frac{\partial \alpha_k}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \log Z \\ S &= \log Z - \beta \frac{\partial \alpha_k}{\partial \beta} D_{\alpha_k}^{(q)} \log Z, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_k} = D_{\alpha_k}^{(q)}, \end{aligned}$$

où $\log Z = -\sum_k \{1 - z \exp(-\beta \varepsilon_k)\}$.

Alors

$$S = \log Z + \beta \sum_k \frac{\partial \alpha_k}{\partial \beta} D_{\alpha_k}^{(q)} (1 - \alpha_k),$$

où $\alpha_k = z \exp(-\beta \varepsilon_k) = \exp(\beta \mu) \exp(-\beta \varepsilon_k)$.

Calculons les dérivées par rapport à β , on obtient

$$S = \log Z + \beta \sum_k \left(\{ \mu z \exp(-\beta \varepsilon_k) - \varepsilon_k z \exp(-\beta \varepsilon_k) \} \frac{q-1}{\log q} \partial_{\alpha_k}^{(q)} \log(1 - \alpha_k) \right), \quad (3.16)$$

et on a $\partial_{\alpha_k}^{(q)} \log(1 - \alpha_k) = \frac{\log(1 - q\alpha_k) - \log(1 - \alpha_k)}{\alpha_k(q-1)}$, alors l'expression de S devient

$$\begin{aligned} S &= \log Z + \beta \sum_k \left(\{\mu - \varepsilon_k\} \alpha_k \frac{1}{\log q} \frac{\log(1 - q\alpha_k) - \log(1 - \alpha_k)}{\alpha_k} \right) \\ S &= \log Z + \beta \sum_k \left(\{\mu - \varepsilon_k\} \frac{1}{\log q} \log \left(\frac{1 - q\alpha_k}{1 - \alpha_k} \right) \right) \\ S &= \log Z - \beta \sum_k \left(\{\mu - \varepsilon_k\} \frac{1}{\log q} \log \left(\frac{1 - \alpha_k}{1 - q\alpha_k} \right) \right), \end{aligned}$$

et en utilisant l'Eq. (3.12), l'expression de S se réduit à

$$\begin{aligned} S &= \log Z - \beta \sum_k (\mu - \varepsilon_k) n_k \\ S &= \log Z - \beta \mu \sum_k n_k + \beta \sum_k \varepsilon_k n_k. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Finalement, l'entropie S s'écrit sous la forme suivante

$$S = \log Z - \beta \mu N + \beta U, \quad (3.18)$$

où $U = \sum_k \varepsilon_k n_k$ c'est l'énergie interne et $N = \sum_k n_k$ le nombre de particules.

En écrivant (3.17) en fonction du nombre q-basique $[n_k]$ et $[n_k + 1]$, S s'écrit

$$S = - \sum_k \log \{1 - z \exp(-\beta \varepsilon_k)\} - \beta \mu \sum_k n_k + \beta \sum_k \varepsilon_k n_k \quad (3.19)$$

$$S = - \sum_k \log \left\{ \frac{z^{-1} \exp(\beta \varepsilon_k - 1)}{z^{-1} \exp(\beta \varepsilon_k)} \right\} + \beta \sum_k n_k (\varepsilon_k - \mu), \quad (3.20)$$

de l'équation (3.12) on a

$$\beta (\varepsilon_k - \mu) = \log [n_k + 1] - \log [n_k], \quad (3.21)$$

et

$$\log \left\{ \frac{z^{-1} \exp(\beta \varepsilon_k - 1)}{z^{-1} \exp(\beta \varepsilon_k)} \right\} = - \log \{z^{-1} \exp(\beta \varepsilon_k) - 1\} + \beta (\varepsilon_k - \mu). \quad (3.22)$$

L'équation (3.12), donne aussi

$$n_k \log q = \log \{z^{-1} \exp(\beta \varepsilon_k) - 1\} - \log \{z^{-1} \exp(\beta \varepsilon_k) - q\}, \quad (3.23)$$

et le q-nombre basique $[n_k]$ est

$$\begin{aligned} [n_k] &= \frac{1}{z^{-1} \exp(\beta \varepsilon_k) - q}, \\ \log [n_k] &= - \log \{z^{-1} \exp(\beta \varepsilon_k) - 1\}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Remplaçons l'Eq (3.24) dans l'Eq (3.23)

$$n_k \log q = \log \{z^{-1} \exp(\beta \varepsilon_k) - 1\} + \log [n_k],$$

donc

$$\log \{z^{-1} \exp(\beta \varepsilon_k) - 1\} = n_k \log q - \log [n_k],$$

remplaçons ce resultat dans l'Eq (3.22)

$$\begin{aligned} \log \left\{ \frac{z^{-1} \exp(\beta \varepsilon_k - 1)}{z^{-1} \exp(\beta \varepsilon_k)} \right\} &= n_k \log q - \log [n_k] - \beta(\varepsilon_k - \mu) \\ &= n_k \log q - \log [n_k] - \log [n_k + 1] + \log [n_k]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

En remplaçant le dernier resultat dans l'Eq (3.20), on obtient

$$S = - \sum_k n_k \log q + \sum_k \log [n_k] + \sum_k \log [n_k + 1] - \sum_k \log [n_k] + \sum_k n_k \log [n_k + 1] - \sum_k n_k \log [n_k],$$

donc, l'expression de l'entropie en fonction du nombre q-basique est

$$S = \sum_k \{-n_k \log [n_k] + (n_k + 1) \log [n_k + 1] - n_k \log q\}. \quad (3.26)$$

3.5 Fonction de partition grand canonique q-déformée

La fonction de partition grand canonique des q-bosons a la même forme celle des bosons standard

$$\log Z(T, V, \mu) = - \sum_{k=0} \log \{1 - z \exp(-\beta \varepsilon_k)\}.$$

On peut calculer z à partir du nombre de particule N fixé

$$N = - \frac{\partial \phi}{\partial \mu} \Big|_{T, V},$$

où $\phi = -kT \log Z(T, V, \mu)$.

Alors

$$N = kT \frac{\partial z}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial z} \log Z.$$

Comme $z = \exp(\beta \mu) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial \mu} = \beta z$, donc

$$\begin{aligned} N &= kT \beta z D_z^{(q)} \log Z(T, V, \mu) = z D_z^{(q)} \log Z(T, V, \mu) \\ &= z \frac{q-1}{\log q} \partial_z^{(q)} \sum_k \log \{1 - z \exp(-\beta \varepsilon_k)\} \\ &= z \frac{q-1}{\log q} \sum_k \left\{ \frac{\log \{1 - qz \exp(-\beta \varepsilon_k)\} - \log \{1 - z \exp(-\beta \varepsilon_k)\}}{z(q-1)} \right\}. \end{aligned}$$



Finalement on peut montrer que

$$N = \sum_k \frac{1}{\log q} \log \left\{ \frac{z^{-1} \exp(\beta \varepsilon_k) - 1}{z^{-1} \exp(\beta \varepsilon_k) - q} \right\} = \sum_k n_k.$$

Pour un très grand volume V et un grand nombre de particules N , la somme peut-être transformée en intégrale comme dans le chapitre 1, sauf que dans le cas déformée, l'intégrale s'écrit

$$\sum_k f(x) \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{V}{\lambda^3} \int_0^\infty dx x^{\frac{1}{2}} f(x), \quad (3.27)$$

où $\varepsilon_k = \frac{p^2}{2m}$ est l'énergie cinétique des bosons et $x = \beta \varepsilon_k$.

Ecrivons la fonction de partition grand canonique sous la forme d'intégrale et isolons le terme correspondant à l'état fondamental

$$\begin{aligned} \log Z(T, V, \mu) &= - \sum_{k \neq 0} \log \{1 - z \exp(-\beta \varepsilon_k)\} - \log(1 - z) \\ &= - \underbrace{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{V}{\lambda^3} \int_0^\infty dx x^{\frac{1}{2}} \log \{1 - z \exp(-x)\}}_I - \log(1 - z), \end{aligned}$$

où $\log(1 - z)$ est le nombre de particule dans l'état fondamental ($\varepsilon = 0$).

En intégrant I par partie et appliquant la description de la JD

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \log \{1 - z \exp(-x)\} \Big|_0^\infty - \frac{2}{3} \int_0^\infty dx x^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\log q} \log \left\{ \frac{1 - z \exp(-x)}{1 - qz \exp(-x)} \right\} \\ &= - \frac{2}{3} \int_0^\infty dx x^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\log q} \log \left\{ \frac{1 - z \exp(-x)}{1 - qz \exp(-x)} \right\}, \end{aligned}$$

donc

$$\log Z(T, V, \mu) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{V}{\lambda^3} \int_0^\infty dx x^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\log q} \log \left\{ \frac{1 - z \exp(-x)}{1 - qz \exp(-x)} \right\} - \log(1 - z),$$

qui s'écrit sous la forme

$$\log Z(T, V, \mu) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{V}{\lambda^3} \int_0^\infty dx x^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\log q} \log \left\{ \frac{z^{-1} \exp(x) - 1}{z^{-1} \exp(x) - q} \right\} - \log(1 - z). \quad (3.28)$$

De la même manière, on calcule le nombre

$$\begin{aligned} N &= \sum_{k=0} n_k = \sum_{k \neq 0} n_k + n_0 \\ &= \sum_{k \neq 0} \frac{1}{\log q} \log \left\{ \frac{1 - z \exp(-x)}{1 - qz \exp(-x)} \right\} + \frac{1}{\log q} \log \left\{ \frac{1 - z}{1 - qz} \right\}, \end{aligned}$$

où le nombre $n_0 = \frac{1}{\log q} \log \left\{ \frac{1-z}{1-qz} \right\}$ correspond au niveau de l'état fondamental.

Remplaçons la somme $\sum_{k \neq 0}$ par l'intégrale, alors N s'écrit sous la forme

$$N = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{V}{\lambda^3} \int_0^{\infty} dx x^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\log q} \log \left\{ \frac{z^{-1} \exp(x) - 1}{z^{-1} \exp(x) - q} \right\} + \frac{1}{\log q} \log \left\{ \frac{1-z}{1-qz} \right\}. \quad (3.29)$$

A partir des équations (3.28) et (3.29), définit les fonctions $g_n(z, q)$ q-déformées comme

$$\begin{aligned} g_n(z, q) &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} dx x^{n-1} \frac{1}{\log q} \log \left\{ \frac{z^{-1} \exp(x) - 1}{z^{-1} \exp(x) - q} \right\} \\ &\equiv \frac{1}{\log q} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(zq)^k}{k^{n+1}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^{n+1}} \right\}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

où $\Gamma(n)$ c'est la fonction Gamma.

A la limite $q \rightarrow 1$, les fonctions q-déformées $g_n(z, q)$ devient les fonctions $g_n(z)$ standard.

En comparant (3.28) et (3.30), on remarque que $n = \frac{5}{2}$, donc

$$\log Z(T, V, \mu) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{V}{\lambda^3} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) g_{\frac{5}{2}}(z, q) - \log(1-z),$$

et on utilisant les propriétés de la fonction Gamma, l'expression précédente se simplifie

$$\log Z(T, V, \mu) = \frac{V}{\lambda^3} g_{\frac{5}{2}}(z, q) - \log(1-z). \quad (3.31)$$

De même pour le nombre de particule, on obtient $n = \frac{3}{2}$ et on obtient l'expression de N

$$N = \frac{V}{\lambda^3} g_{\frac{3}{2}}(z, q) + \frac{1}{\log q} \log \left\{ \frac{1-z}{1-qz} \right\}. \quad (3.32)$$

3.6 Quelques propriétés des $g_n(z, q)$

Comme dans le chapitre 1, étudions quelques propriétés des fonctions q-déformées $g_n(z, q)$

$$\begin{aligned} \log \left\{ \frac{z^{-1} \exp(x) - 1}{z^{-1} \exp(x) - q} \right\} &= \log \left\{ \frac{1 - z \exp(-x)}{1 - qz \exp(-x)} \right\} \\ &= \log \{1 - z \exp(-x)\} - \log \{1 - qz \exp(-x)\}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Quand $z \exp(-x) \ll 1$

$$\begin{aligned} \log \{1 - z \exp(-x)\} &= -z \exp(-x) - \frac{\{z \exp(-x)\}^2}{2} - \frac{\{z \exp(-x)\}^3}{3} - \dots - \frac{\{z \exp(-x)\}^k}{k} \\ &= \frac{-z \exp(-x)}{k} \frac{1}{1 - z \exp(-x)} = \frac{-z \exp(-x)}{k} \sum_{k=0}^{\infty} \{z \exp(-x)\}^k \\ &= \frac{-1}{k} \sum_{k=1}^{\infty} \{z \exp(-x)\}^k, \end{aligned} \quad (3.34)$$

et

$$\log \{1 - qz \exp(-x)\} = -\frac{1}{k} \sum_{k=1}^{\infty} \{qz \exp(-x)\}^k. \quad (3.35)$$

En remplaçant l'Eq (3.30) et l'Eq (3.35) dans l'Eq (3.33)

$$\log \left\{ \frac{z^{-1} \exp(x) - 1}{z^{-1} \exp(x) - q} \right\} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \{z \exp(-x)\}^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \{qz \exp(-x)\}^k, \quad (3.36)$$

et remplaçons dans l'expression de $g_n(z, q)$, alors

$$\begin{aligned} g_n(z, q) &= \frac{1}{\Gamma(n)} \frac{1}{\log q} \int_0^{\infty} dx x^{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[\{qz \exp(-x)\}^k - \{z \exp(-x)\}^k \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} \frac{1}{\log q} \int_0^{\infty} dx x^{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[(qz)^k \exp(-kx) - z^k \exp(-kx) \right]. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Faisons le changement de variable suivant : $x = \frac{y}{k} \Rightarrow dx = \frac{dy}{k}$, alors

$$g_n(z, q) = \frac{1}{\Gamma(n)} \frac{1}{\log q} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{n+1}} (qz)^k \int_0^{\infty} dy y^{n-1} \exp(-y) - \frac{1}{\Gamma(n)} \frac{1}{\log q} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{n+1}} z^k \int_0^{\infty} dy y^{n-1} \exp(-y)$$

Cette dernière intégrale est la fonction Gamma, alors $g_n(z, q)$ devient

$$g_n(z, q) = \frac{1}{\log q} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(qz)^k}{k^{n+1}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^{n+1}} \right\}, \quad 0 \leq z \leq 1 \text{ et } q > 0. \quad (3.38)$$

Pour $z = z_q$, on a

$$g_n(z_q, q) = \frac{1}{\log q} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(qz_q)^k}{k^{n+1}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z_q)^k}{k^{n+1}} \right\}, \quad n > 1.$$

On définit la fonction Zêta de Riemann q -déformée pour le cas $z_q = \frac{1}{q}$ par relation

$$\zeta(n, q) = g_n\left(\frac{1}{q}, q\right) = \frac{1}{\log q} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - q^{-k}}{k^{n+1}} \right\}.$$

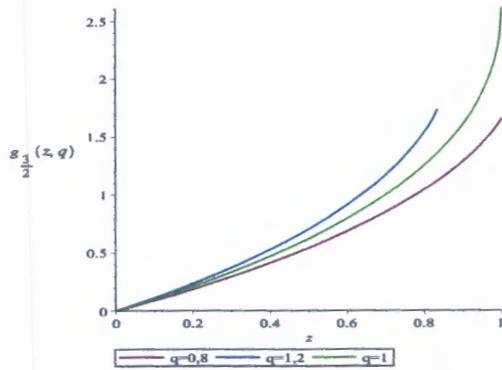


Figure 3. 1. Le comportement de $g_{\frac{3}{2}}(z, q)$ en fonction de z .

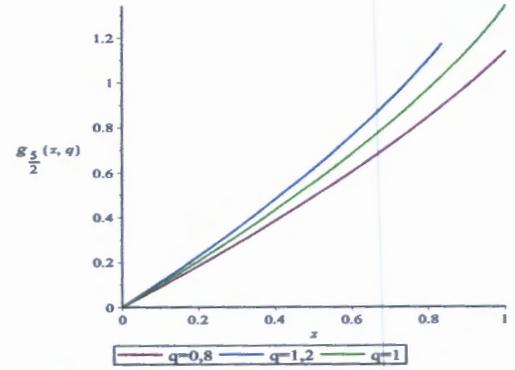


Figure 3. 2. Le comportement de $g_{\frac{5}{2}}(z, q)$ en fonction de z .

Dans les figures (3.1) et (3.2), nous présentons le comportement de $g_{\frac{3}{2}}(z, q)$ et $g_{\frac{5}{2}}(z, q)$ en fonction de z pour différentes valeurs du paramètre q :

- 1) Pour $q = 1$, les fonctions $g_{\frac{3}{2}}(z, q)$ et $g_{\frac{5}{2}}(z, q)$ correspondent aux fonctions standards $g_{\frac{3}{2}}(z)$ et $g_{\frac{5}{2}}(z)$ respectivement.
- 2) Pour $q > 1$, les fonctions q-déformées $g_{\frac{3}{2}}(z, q)$ et $g_{\frac{5}{2}}(z, q)$, augmentent avec la valeur de paramètre de déformation q .
- 3) Pour $q < 1$, les valeurs de la fonction $g_{\frac{3}{2}}(z, q)$ sont plus grandes que celles de la fonction $g_{\frac{5}{2}}(z, q)$, par contre aux comportements des fonctions standard $g_{\frac{3}{2}}(z)$ et $g_{\frac{5}{2}}(z)$.

3.7 Propriétés physiques des q-bosons

A Partir de l'équation (3.32), on peut calculer z pour T et V donnés

$$N = N_\epsilon + N_0,$$

où $N_\epsilon = \frac{V}{\lambda^3} g_{\frac{3}{2}}(z, q)$ représente le nombre de particules dans l'état excité. $N_0 = \frac{1}{\log q} \log \left\{ \frac{1-z}{1-qz} \right\}$ c'est le nombre de particules dans l'état fondamental.

Comme le cas des bosons standard, la fugacité z correspond au nombre d'occupations non négatif.

Dans le cas des q-bosons [2], nous remarquons que

$$\begin{cases} z < \frac{1}{q} & \text{pour } q > 1 \\ z < 1 & \text{pour } q < 1 \end{cases} \quad (3.39)$$

Donc, pour T et V donnés, l'expression de N_ϵ^{\max} est

$$N_\epsilon^{\max} = \frac{V}{\lambda^3} \zeta\left(\frac{3}{2}, q\right) = V \left(\frac{2\pi m k T}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} \zeta\left(\frac{3}{2}, q\right),$$

car $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k T}}$.

Alors

$$N_\epsilon^{\max} \propto VT^{\frac{3}{2}},$$

dans ce cas le nombre maximum de particules N_ϵ^{\max} dans l'état excité est donné en fonction de Zêta de Riemann q-déformée.

Si toutes les particules sont au niveau fondamental, alors

$$N \approx N_0 = \frac{1}{\log q} \log\left(\frac{1 - z_q}{1 - qz_q}\right) \quad \text{où} \quad z_q = \frac{q^N - 1}{q^N q - 1} \approx \frac{1}{q}.$$

Condensation de Bose-Einstein

A partir de (3.39), nous trouvons la condition correcte pour $z < z_q$, où z_q est définie par

$$z_q = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{pour } q > 1 \\ 1 & \text{pour } q < 1 \end{cases}.$$

Nous avons une condensation des q-bosons lorsque la combinaison critique de densité, et de température se produira de sorte que la fugacité atteindra sa valeur maximale $z = z_q$.

Pour le nombre de particules, quand $q > 1$ le dernier terme dans l'équation (3.32) tend vers à zéro donc

$$N = \frac{V}{\lambda^3} g_{\frac{3}{2}}(z, q), \quad (3.40)$$

et pour $q < 1$, on a

$$N = \frac{V}{\lambda^3} g_{\frac{3}{2}}(z_q, q) + n_0.$$

3.8 Température critique des q-bosons

Procédons de la même manière que dans le cas de Bose non déformée, calculons la température critique $T_c^{(q)}$ du gaz q-déformée en fonction du nombre de particules N fixés

$$N = \frac{V}{\lambda^3} g_{\frac{3}{2}}(z_q, q) k T_c^{(q)} = \left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{h^2}{2\pi m \left(g_{\frac{3}{2}}(z_q, q)\right)^{\frac{2}{3}}},$$

où $N = \frac{V}{\lambda^3} g_{\frac{3}{2}}(z_q, q)$.



Le rapport de la température critique $T_c^{(q)}$ du gaz q -déformée à T_c standard, donnée par la relation (1.25), est donné par

$$\frac{T_c^{(q)}}{T_c} = \left\{ \frac{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}{g_{\frac{3}{2}}(z_q, q)} \right\}^{\frac{2}{3}} = \left\{ \frac{2,612}{g_{\frac{3}{2}}(z_q, q)} \right\}^{\frac{2}{3}}, \quad (3.41)$$

où $\zeta\left(\frac{3}{2}\right) = 2,612$ est la valeur de la fonction de Zêta de Riemann dans le cas non déformée pour $z = 1$.

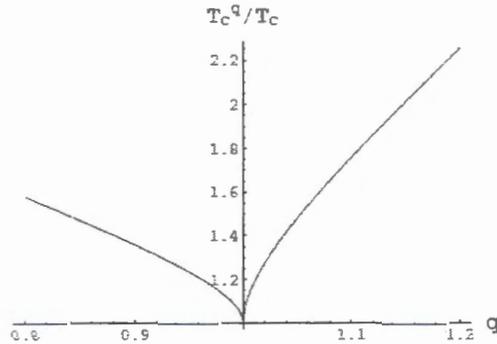


Figure 3. 3. Le rapport $\frac{T_c^{(q)}}{T_c}$ en fonction de q .

Figure (3.3) représente le rapport de $\frac{T_c^{(q)}}{T_c}$ en fonction du paramètre de déformation q .

i) La température $T_c^{(q)}$ critique du q -boson est toujours supérieure à T_c , mais cette augmentation dépend de q .

ii) Pour $q > 1$, il y a une augmentation rapide de la température critique $T_c^{(q)}$, pour les petites valeurs de q , par exemple pour $q = 1,01$, $T_c^{(q)}$ augmente de 18%, et pour $q = 1,1$ $T_c^{(q)}$ augmente de 75% par rapport à la valeur standard [2].

iii) Pour $q < 1$, il y a aussi une augmentation, mais cette augmentation est lente par rapport à situation $q > 1$.

3.9 Le potentiel grand canonique

Le potentiel grand canonique du q -boson est défini par

$$\Phi(T, V, \mu) = -kT \log(T, V, \mu) = -PV,$$

alors

$$PV = kT \log(T, V, \mu). \quad (3.42)$$

et d'après (3.31), on a

$$PV = kT \frac{V}{\lambda^3} g_{\frac{3}{2}}(z, q) - kT \log(1 - z),$$

en déduit l'expression de la pression

$$P = \frac{kT}{\lambda^3} g_{\frac{5}{2}}(z, q) - \frac{kT}{V} \log(1 - z).$$

Pour $q > 1$, on peut négliger le dernière terme, et on obtient

$$P = \frac{kT}{\lambda^3} g_{\frac{5}{2}}(z, q),$$

et pour $q < 1$, $\log(1 - z)$ est fini (puisque $z = z_q = 1$), mais à la limite thermodynamique ce terme tend vers zéro donc

$$P = \frac{kT}{\lambda^3} g_{\frac{5}{2}}(z_q, q) = \frac{k}{\lambda^3} \zeta\left(\frac{5}{2}, q\right),$$

c'est le cas de $T_c^{(q)} > T_c$, on remarque que la pression est une fonction de température, qui obéit de changer les valeurs de q , nous prévoyons que l'augmentation de la pression sera associée à le paramètre de déformation qui supérieure à 1.

3.10 Energie interne q-déformée

L'énergie interne est définie par

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \{\log Z(T, V, \mu)\},$$

où $\log Z(T, V, \mu) = \frac{V}{\lambda^3} g_{\frac{5}{2}}(z, q)$ et $Z(T, V, \mu)$ est la fonction de partition grand canonique.

$$\begin{aligned} U &= -V g_{\frac{5}{2}}(z, q) \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{\lambda^3} \right) \\ &= \frac{3}{2} \frac{V}{\lambda^3} kT g_{\frac{5}{2}}(z, q). \end{aligned} \quad (3.43)$$

En utilisant l'Eq. (3.42), l'expression de P est donnée par

$$\frac{P}{kT} = \frac{g_{\frac{5}{2}}(z, q)}{\lambda^3}. \quad (3.44)$$

En remplaçant (3.44) dans (3.43), on obtient l'expression de U en fonction de PV

$$U = \frac{3}{2} PV \quad (3.45)$$

La forme de l'expression de l'énergie interne en fonction de PV reste la même que dans le cas non déformé.

3.11 Entropie en fonction des $g_n(z, q)$

D'après l'équation (3.17), on a

$$S = \frac{PV}{T} + \beta U - \beta \mu N, \quad (3.46)$$

où $\log Z(T, V, \mu) = \frac{PV}{T} = \frac{V}{\lambda^3} g_{\frac{5}{2}}(z, q) - \log(1-z)$ et $N = \frac{V}{\lambda^3} g_{\frac{3}{2}}(z, q) + \frac{1}{\log q} \log \left\{ \frac{1-z}{1-qz} \right\}$.

A la limite thermodynamique, nous avons

$$\frac{PV}{T} = \frac{V}{\lambda^3} g_{\frac{5}{2}}(z, q), \quad N = \frac{V}{\lambda^3} g_{\frac{3}{2}}(z, q) \quad \text{et} \quad U = \frac{3}{2} \frac{V}{\lambda^3} kT g_{\frac{5}{2}}(z, q).$$

Et en remplaçant dans l'Eq. (3.46)

$$S = \frac{V}{\lambda^3} g_{\frac{5}{2}}(z, q) + \beta \frac{3}{2} \frac{V}{\lambda^3} kT g_{\frac{5}{2}}(z, q) - \beta \mu \frac{V}{\lambda^3} g_{\frac{3}{2}}(z, q).$$

D'autre part, $z = \exp(\beta \mu) \Rightarrow \mu = \frac{1}{\beta} \log z$, alors

$$S = \frac{V}{\lambda^3} g_{\frac{5}{2}}(z, q) + \frac{3}{2} \frac{V}{\lambda^3} g_{\frac{5}{2}}(z, q) - \frac{V}{\lambda^3} g_{\frac{3}{2}}(z, q) \log z,$$

après simplification, l'expression finale de S est donnée par

$$S = \frac{V}{\lambda^3} \left(\frac{5}{2} g_{\frac{5}{2}}(z, q) - g_{\frac{3}{2}}(z, q) \log z \right). \quad (3.47)$$

Et en dessous du point critique

$$\frac{S}{V} |_{<} = \frac{5}{2\lambda^3} g_{\frac{5}{2}}(z, q). \quad (3.48)$$

Notons que l'entropie généralisée des q -bosons obéit à la troisième loi de la thermodynamique [2]. En effet, dans l'équation (3.48), $g_{\frac{5}{2}}(z, q)$ prend une valeur finie dépendante de q et l'entropie tend vers zéro lorsque $T \rightarrow 0$.

3.12 Capacité calorifique q -déformée

La capacité calorifique q - boson, est définie par

$$C_\nu = \frac{\partial U}{\partial T} |_{V, N}, \quad U = \sum_k \varepsilon_k n_k.$$

Donc

$$C_\nu = \frac{\partial}{\partial T} \left(\sum_k \varepsilon_k n_k \right) = \sum_k \varepsilon_k \frac{\partial \beta}{\partial T} \frac{\partial}{\partial \beta} n_k = \sum_k \varepsilon_k \left(-\frac{1}{T^2} \right) \frac{\partial}{\partial \beta} n_k.$$

En appliquant la prescription JD

$$C_\nu = -\beta^2 \sum_k \varepsilon_k \frac{\partial \alpha_k}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial \alpha_k} n_k = -\beta^2 \sum_k \varepsilon_k \frac{\partial \alpha_k}{\partial \beta} D_{\alpha_k}^{(q)} n_k. \quad (3.49)$$

où $n_k = \frac{1}{\log q} \log \left\{ \frac{1-\alpha_k}{1-q\alpha_k} \right\}$, et $\alpha_k = z \exp(-x)$ cette identité peut-être réécrite via la recette de JD en posant $x = \beta \varepsilon_k$.

Alors l'Eq (3.49) s'écrit

$$C_\nu = -\beta^2 \sum_k \varepsilon_k \frac{\partial \alpha_k}{\partial \beta} \frac{1}{\log q} D_{\alpha_k}^{(q)} \log \left\{ \frac{1-\alpha_k}{1-q\alpha_k} \right\}. \quad (3.50)$$

Calcul de $\frac{\partial \alpha_k}{\partial \beta}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_k}{\partial \beta} &= \frac{\partial}{\partial \beta} \{z \exp(-\beta \varepsilon_k)\} = \left(\frac{\partial z}{\partial \beta} \right) \exp(-\beta \varepsilon_k) + z \frac{\partial}{\partial \beta} \exp(-\beta \varepsilon_k) \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial \beta} \right) \exp(-\beta \varepsilon_k) - z \varepsilon_k \exp(-\beta \varepsilon_k) \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial \beta} \right) \frac{\alpha_k}{z} - \varepsilon_k \alpha_k. \end{aligned} \quad (3.51)$$

En remplaçant dans (3.50), on obtient

$$\begin{aligned} C_\nu &= -\beta^2 \sum_k \varepsilon_k \left(\frac{\partial z}{\partial \beta} \right) \frac{\alpha_k}{z} \frac{1}{\log q} D_{\alpha_k}^{(q)} \log \left\{ \frac{1-\alpha_k}{1-q\alpha_k} \right\} + \beta^2 \sum_k \varepsilon_k^2 \alpha_k \frac{1}{\log q} D_{\alpha_k}^{(q)} \log \left\{ \frac{1-\alpha_k}{1-q\alpha_k} \right\} \\ &= -\beta^2 \sum_k \varepsilon_k \left(\frac{\partial z}{\partial \beta} \right) \frac{\alpha_k}{z} \frac{1}{\log q} \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \log \left\{ \frac{1-\alpha_k}{1-q\alpha_k} \right\} + \beta^2 \sum_k \varepsilon_k^2 \alpha_k \frac{1}{\log q} \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \log \left\{ \frac{1-\alpha_k}{1-q\alpha_k} \right\} \\ &= -\beta^2 \sum_k \varepsilon_k \left(\frac{\partial z}{\partial \beta} \right) \frac{\alpha_k}{z} \frac{1}{\log q} \frac{\partial z}{\partial \alpha_k} \frac{\partial}{\partial z} \log \left\{ \frac{1-\alpha_k}{1-q\alpha_k} \right\} + \beta^2 \sum_k \varepsilon_k^2 \alpha_k \frac{1}{\log q} \frac{\partial z}{\partial \alpha_k} \frac{\partial}{\partial z} \log \left\{ \frac{1-\alpha_k}{1-q\alpha_k} \right\} \\ &= -\beta^2 \sum_k \varepsilon_k \left(\frac{\partial z}{\partial \beta} \right) \frac{\alpha_k}{z} \frac{1}{\log q} \frac{\partial z}{\partial \alpha_k} D_z^{(q)} \log \left\{ \frac{1-\alpha_k}{1-q\alpha_k} \right\} + \beta^2 \sum_k \varepsilon_k^2 \alpha_k \frac{1}{\log q} \frac{\partial z}{\partial \alpha_k} D_z^{(q)} \log \left\{ \frac{1-\alpha_k}{1-q\alpha_k} \right\}. \end{aligned}$$

Calcul de $\frac{\partial z}{\partial \alpha_k}$

On a

$$\alpha_k = z \exp(-\beta \varepsilon_k) \Rightarrow z = \alpha_k \exp(\beta \varepsilon_k),$$

donc

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \{ \alpha_k \exp(\beta \varepsilon_k) \} = \exp(\beta \varepsilon_k) = \frac{z}{\alpha_k}.$$

Alors

$$\begin{aligned} C_\nu &= -\beta^2 \sum_k \varepsilon_k \left(\frac{\partial z}{\partial \beta} \right) \frac{\alpha_k}{z} \frac{1}{\log q} \frac{z}{\alpha_k} D_z^{(q)} \log \left\{ \frac{1-\alpha_k}{1-q\alpha_k} \right\} + \beta^2 \sum_k \varepsilon_k^2 \alpha_k \frac{1}{\log q} \frac{z}{\alpha_k} D_z^{(q)} \log \left\{ \frac{1-\alpha_k}{1-q\alpha_k} \right\} \\ &= -\beta^2 \sum_k \varepsilon_k \left(\frac{\partial z}{\partial \beta} \right) \frac{1}{\log q} D_z^{(q)} \log \left\{ \frac{1-\alpha_k}{1-q\alpha_k} \right\} + \beta^2 \sum_k \varepsilon_k^2 \frac{1}{\log q} z D_z^{(q)} \log \left\{ \frac{1-\alpha_k}{1-q\alpha_k} \right\}. \end{aligned}$$

En remplaçant la somme par l'intégrale et posons $x = \beta \varepsilon_k$, on trouve

$$\begin{aligned} C_\nu &= -\beta \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{V}{\lambda^3} \left(\frac{\partial z}{\partial \beta} \right) \frac{1}{\log q} \int_0^\infty x^{\frac{3}{2}} D_z^{(q)} \log \left\{ \frac{1 - \alpha_k}{1 - q\alpha_k} \right\} dx + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{V}{\lambda^3} \frac{1}{\log q} \int_0^\infty x^{\frac{5}{2}} z D_z^{(q)} \log \left\{ \frac{1 - \alpha_k}{1 - q\alpha_k} \right\} dx \\ &= -\beta \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{V}{\lambda^3} \left(\frac{\partial z}{\partial \beta} \right) D_z^{(q)} \int_0^\infty x^{\frac{3}{2}} \log \frac{1}{\log q} \left\{ \frac{1 - \alpha_k}{1 - q\alpha_k} \right\} dx + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{V}{\lambda^3} z D_z^{(q)} \int_0^\infty x^{\frac{5}{2}} \log \frac{1}{\log q} \left\{ \frac{1 - \alpha_k}{1 - q\alpha_k} \right\} dx. \end{aligned}$$

D'après l'Eq (3.30), on trouve

$$C_\nu = -\beta \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{V}{\lambda^3} \left(\frac{\partial z}{\partial \beta} \right) \Gamma \left(\frac{5}{2} \right) D_z^{(q)} g_{\frac{5}{2}}(z, q) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{V}{\lambda^3} z \Gamma \left(\frac{7}{2} \right) D_z^{(q)} g_{\frac{7}{2}}(z, q),$$

on a $\Gamma \left(\frac{5}{2} \right) = \frac{3}{4} \sqrt{\pi}$ et $\Gamma \left(\frac{7}{2} \right) = \frac{15}{8} \sqrt{\pi}$, donc

$$C_\nu = -\frac{3}{2} \beta \frac{V}{\lambda^3} \left(\frac{\partial z}{\partial \beta} \right) D_z^{(q)} g_{\frac{5}{2}}(z, q) + \frac{15}{4} \frac{V}{\lambda^3} z D_z^{(q)} g_{\frac{7}{2}}(z, q). \quad (3.52)$$

Pour un nombre de particule constante $N = \sum_k n_k = \sum_k \frac{1}{\log q} \log \left\{ \frac{1 - \alpha_k}{1 - q\alpha_k} \right\} = \text{constant}$, alors

$$\begin{aligned} \sum_k \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{\log q} \log \left\{ \frac{1 - \alpha_k}{1 - q\alpha_k} \right\} &= 0 \\ \sum_k \frac{\partial \alpha_k}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \frac{1}{\log q} \log \left\{ \frac{1 - \alpha_k}{1 - q\alpha_k} \right\} &= 0 \\ \sum_k \frac{\partial \alpha_k}{\partial \beta} D_{\alpha_k}^{(q)} \frac{1}{\log q} \log \left\{ \frac{1 - \alpha_k}{1 - q\alpha_k} \right\} &= 0. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Puis remplaçons l'Eq (3.51) dans l'Eq (3.53), on obtient

$$\sum_k \left(\frac{\partial z}{\partial \beta} \right) \frac{\alpha_k}{z} D_{\alpha_k}^{(q)} \frac{1}{\log q} \log \left\{ \frac{1 - \alpha_k}{1 - q\alpha_k} \right\} - \sum_k \varepsilon_k \alpha_k D_{\alpha_k}^{(q)} \frac{1}{\log q} \log \left\{ \frac{1 - \alpha_k}{1 - q\alpha_k} \right\} = 0,$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_k \left(\frac{\partial z}{\partial \beta} \right) \frac{\alpha_k}{z} \frac{\partial z}{\partial \alpha_k} D_z^{(q)} \frac{1}{\log q} \log \left\{ \frac{1 - \alpha_k}{1 - q\alpha_k} \right\} &= \sum_k \varepsilon_k \alpha_k \frac{\partial z}{\partial \alpha_k} D_z^{(q)} \frac{1}{\log q} \log \left\{ \frac{1 - \alpha_k}{1 - q\alpha_k} \right\} \\ \sum_k \left(\frac{\partial z}{\partial \beta} \right) \frac{\alpha_k}{z} \frac{z}{\alpha_k} D_z^{(q)} \frac{1}{\log q} \log \left\{ \frac{1 - \alpha_k}{1 - q\alpha_k} \right\} &= \sum_k \varepsilon_k \alpha_k \frac{z}{\alpha_k} D_z^{(q)} \frac{1}{\log q} \log \left\{ \frac{1 - \alpha_k}{1 - q\alpha_k} \right\} \\ \sum_k \left(\frac{\partial z}{\partial \beta} \right) D_z^{(q)} \frac{1}{\log q} \log \left\{ \frac{1 - \alpha_k}{1 - q\alpha_k} \right\} &= \sum_k \varepsilon_k z D_z^{(q)} \frac{1}{\log q} \log \left\{ \frac{1 - \alpha_k}{1 - q\alpha_k} \right\}, \end{aligned}$$

et remplaçons la somme par l'intégrale

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{V}{\lambda^3} \frac{\partial z}{\partial \beta} D_z^{(q)} \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\log q} \log \left\{ \frac{1 - \alpha_k}{1 - q\alpha_k} \right\} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{V}{\lambda^3} \frac{z}{\beta} D_z^{(q)} \int_0^\infty x^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\log q} \log \left\{ \frac{1 - \alpha_k}{1 - q\alpha_k} \right\} dx,$$

qui s'écrit

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{V}{\lambda^3} \frac{\partial z}{\partial \beta} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) D_z^{(q)} g_{\frac{3}{2}}(z, q) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{V}{\lambda^3} \frac{z}{\beta} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) D_z^{(q)} g_{\frac{5}{2}}(z, q).$$

Par simplification on obtient

$$\frac{\partial z}{\partial \beta} D_z^{(q)} g_{\frac{3}{2}}(z, q) = \frac{3}{2} \frac{1}{\beta} z D_z^{(q)} g_{\frac{5}{2}}(z, q),$$

alors

$$\frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial \beta} \Big|_{V, N} = \frac{3}{2} \frac{1}{\beta} \frac{D_z^{(q)} g_{\frac{5}{2}}(z, q)}{D_z^{(q)} g_{\frac{3}{2}}(z, q)}. \quad (3.54)$$

En remplaçant dans (3.52), et on obtient

$$\begin{aligned} C_\nu &= -\frac{9}{4} \frac{V}{\lambda^3} \frac{z D_z^{(q)} g_{\frac{5}{2}}(z, q)}{D_z^{(q)} g_{\frac{3}{2}}(z, q)} D_z^{(q)} g_{\frac{5}{2}}(z, q) + \frac{15}{4} \frac{V}{\lambda^3} z D_z^{(q)} g_{\frac{7}{2}}(z, q) \\ &= \frac{V}{\lambda^3} \left\{ \frac{15}{4} z D_z^{(q)} g_{\frac{7}{2}}(z, q) - \frac{9}{4} \frac{z \left[D_z^{(q)} g_{\frac{5}{2}}(z, q) \right]^2}{D_z^{(q)} g_{\frac{3}{2}}(z, q)} \right\}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Pour $q > 1$, c'est-à-dire pour $T_c^{(q)} > T_c$, en effectuant la limite thermodynamique et en utilisant l'équation (3.40), on obtient l'expression finale de la capacité calorifique

$$\frac{C_\nu}{N} = \frac{15}{4} \frac{z D_z^{(q)} g_{\frac{7}{2}}(z, q)}{g_{\frac{3}{2}}(z, q)} - \frac{9}{4} \frac{z \left[D_z^{(q)} g_{\frac{5}{2}}(z, q) \right]^2}{g_{\frac{3}{2}}(z, q) D_z^{(q)} g_{\frac{3}{2}}(z, q)}, \quad (3.56)$$

et pour $q < 1$, $z = z_q = 1$, donc $T_c^{(q)} < T_c$, dans ce cas le dernier terme tend vers zéro car la fonction g_n a une valeur finie, donc on trouve

$$\frac{C_\nu}{N} = \frac{15}{4} \frac{z D_z^{(q)} g_{\frac{7}{2}}(z_q, q)}{g_{\frac{3}{2}}(z_q, q)} = \frac{15}{4} \frac{z D_z^{(q)} g_{\frac{7}{2}}(z_q, q)}{\frac{\lambda^3}{v}}, \quad (3.57)$$

où

$$\frac{\lambda^3}{v} = \frac{1}{g_{\frac{3}{2}}(z_q, q)} \left(\frac{T}{T_c^{(q)}} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (3.58)$$

Remarque : Dans le cas déformé $zD_z^{(q)} g_n(z, q) \neq g_{n-1}(z, q)$, l'égalité est valable uniquement pour les dérivées ordinaires.

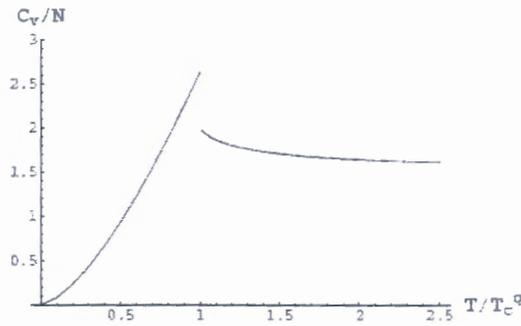


Figure 3. 4. $\frac{C_v}{N}$ en fonction de $\frac{T}{T_c^{(q)}}$ pour $q = 1.05$.

La figure (3. 4) représente la capacité calorifique $\frac{C_v}{N}$ en fonction de $\frac{T}{T_c^{(q)}}$ pour la valeur $q = 1.05$. On choisit de la valeur de q dans l'intervalle $q > 1$ car cette région est particulièrement intéressante du fait qu'il lui correspond une température critique plus élevée pour des petites valeurs de q [11].

- Pour $T < T_c^{(q)}$ et $q = 1.05$, $\frac{C_v}{N}$ augmente en fonction de la température critique $T_c^{(q)}$ [2].
- Pour $T > T_c^{(q)}$, $\frac{C_v}{Nk}$ diminue lorsque la température T augmente.
- La limite classique est obtenu pour $z \rightarrow 0$, les fonctions $g_n(z, q)$ se réduisent à

$$g_n(z, q) \rightarrow \frac{q-1}{\log q} z,$$

par conséquent la limite classique de la capacité calorifique par nombre de particules se réduit à

$$\frac{C_v}{N} |_{cl} = \frac{3q-1}{2 \log q},$$

ce qui signifie que la déformation persiste à la limite classique.

Enfin, notons que saut de $\Delta(\frac{C_v}{N})$ à la température critique est une fonction du paramètre q , et ce saut coincide avec la valeur expérimentale pour le cas de condensation de Bose pour ^{87}Rb [2].

Conclusion

Ce mémoire traite les propriétés du gaz parfait non-relativiste de Bose en utilisant la physique statistique quantique. Dans un premier temps, nous avons présenté la physique statistique quantique pour étudier les propriétés de ce gaz en particulier la condensation de Bose-Einstein. Ensuite, nous avons introduit l'essentiel de l'algèbre q -déformée. Cette algèbre a été utilisée pour calculer les propriétés du gaz parfait de Bose dans le cadre de la physique statistique quantique q -déformée. A la limite $q \rightarrow 1$, on retrouve les résultats obtenus à l'aide de la physique statistique quantique non-déformée. Enfin, nous avons étudié l'effet de l'algèbre q -déformée sur la condensation de Bose, et nous avons comparé les résultats obtenus avec les résultats expérimentaux pour différentes valeurs du paramètre de déformation de q .

Bibliographie

- [1] C. Claude-Tannoudji, J. Dalibard, F. Laloe, *La condensation de Bose-Einstein dans les gaz*, in Einstein Aujourd'hui, EDP Science/CNRS Editions (2005).
- [2] A. Lavagno, P. Narayana Swamy, Phys. Rev. E **61**, 1218 (2000).
- [3] W. Greiner, L. Neise, H. Stöcker : *Thermodynamique et mécanique statistique*, Springer (1999).
- [4] B. Diu, C. Guthmann, D. Lederer, B. Roulet : *Eléments de physique statistique*, Hermann (1997).
- [5] S. Vauclair, *Eléments de physique statistique*, InterEditions (1993).
- [6] H. Guennoun, Mémoire Magister, Université, Constantine 1.
- [7] L. Biedenharn, J. Phys. A **22**, L873 (1989).
- [8] A. Macfarlane, J. Phys. A **22**, 4581 (1989).
- [9] Chin Rong Lee. Phys. Lett. A **164**. 164 (1992).
- [10] J. A. Tuszynski, J.L. Rubin, J. Meyer, M. Kibler, Phys. Lett. A **175**, 173 (1993).
- [11] Y. Shu, J. Chen, L. Chen, Phys. Lett A **292**, 309 (2002).
- [12] A. Guhaa, P. Kumar Dasa, *An Extensive Study of Bose-Einstein Condensation in Liquid Helium using Tsallis Statistics*, arXiv :1708.06809v2 [cond-mat.stat-mech] 4 Feb 2018.
- [13] A. Lavagno, P. Narayana Swamy, Phys. Rev. E **65**, 036101-1 (2002).