REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Seddik Ben Yahia de Jijel
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Physique

N° d'ordre :

Série :

Mémoire

présenté pour obtenir le diplome de

Master en physique

Option: Physique théorique

par

Khalef Rokia

Thème:

Cosmologie du champ de Proca

Soutenue le: 28 / 06 / 2018

Devant le Jury:

Président:	T. Boudjedaa	Pr.	Univ. MSB. Jijel
Rapporteur:	K. Nouicer	Pr.	Univ. MSB. Jijel
Examinateur:	S. Haouat	Pr	Univ. MSB. Jijel

بسم الله الرحمن الرحيم

Remerciements

Tous mes remerciments vont tout permièrement à Dieu tout puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il m'a donné pour achever ce mémoire de master.

Je remercie mon encadreur Monsieur K. Nouicer Professeur à l'Université de Jijel, pour toute l'aide qu'il m'a apporté durant la réalisation de ce travail.

Mes vifs remerciements vont à Mr. T. Boudjdaa Pr. à l'université de Jijel, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury.

Je remercie également le Mr. S. Haouat Pr. à l'université de Jijel, pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à ce travail en acceptant de le juger.

Je remercie également tous les enseignants de physique théorique ainsi que mes amis et mes collègues étudiants de la promotion 2017/2018. J'exprime aussi ma profonde gratitude à Mlle Lamri Houria, sécrètaire du LPTh, pour le soutien moral, ses conseils et aussi pour ses encouragements au cours de ce travail.

Puis, j'adresse mes plus sincéres remerciments à mon père, ma mère, mes frères et mes soeurs qui ont accepté de faire beaucoup de sacrifices pour que je réussisse dans mon travail.

Enfin, je remercie très sincèrement a un personne trés chère, qui est toujours prés de moi par son sontien, son encouragement, ses coneils, qui a toujours su me remonter le moral chaque fois que j'en avois besoin, je dédie ce travail:

à toi cher Ali.

khalef

Contents

Chapter 1

Introduction générale

La cosmologie est le domaine de l'astrophysique qui s'intéresse aux propriétés globales de l'univers. Elle est décrite par les principes de la relativité générale. En relativité générale la goémétrie n'est plus euclidienne, et la métrique conserve la forme canonique caractéristique de l'espace de Riemann. Les équations d'Einstein sont des équations dynamiques qui décrivent à grandes échelles un univers homogène et isotrope (le principe cosmologie).

Le modèle cosmologique de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) nécessite la détermination de quelques paramètres cosmologiques (par exemple: paramètre de Hubble et paramètre de densité d'énergie, et paramètre effectif de l'équation d'état...etc) pour prédire l'évolution de l'histoire cosmique de l'univers. Les valeurs de cet paramètre dépendent du facteur d'échelle a(t).

Le modèle du big bang est le modèle standard cosmologique utilisé par les scientifiques pour décrire l'origine et l'évolution de l'univers, et les succés de ce modèle sont résumés par les observations suivantes:

•le mouvement de récession des galaxies, observé grâce à leur décalage spectral, démontre l'expansion continue de l'univers

•les abondances des éléments légers prédites par la théorie de nucléosynthèse primordiale sont en accord avec les observations

•le rayonnement du fond cosmique observé avec une température de l'ordre de 3 degrés Kelvin, refléte le rayonnement émis au moment du découplage matière-rayonnement.

La relativité générale marque le début de la cosmologie moderne, où il devient possible de décrire l'univers dans son ensemble comme un système physique. Deux ans passées après la découverte de la relativité générale, Einstein publia le premier modèle cosmologique issu de cette nouvelle théorie, en introduisant le principe cosmologique: L'univers est homogène et isotrope. Dns ce principe, Einstein ajouta implicitement une autre hypothèse d'univers statique.

Le principe cosmologique et la relativité générale (RG) sont les deux bases fondamentales dans la théorie de modèle standard de la cosmologie du Big Bang pour décrire la physique sur les échelles cosmologiques. Le premier est la notion d'homogénéité et d'isotropie. Même si la théorie fondamentale qui arrive après la RG est très élégante et simple, les problèmes de la constante cosmologique et l'énergie sombre impliquent que nous pouvons avoir besoin de quelques modifications de la RG dans les deux échelles infrarouge et ultraviolet.

Le problème de la constante cosmologique représente le grand décalage entre les observations et les attentes d'un point de vue de la théorie des champs [2], et le problème de l'énergie reste une énergie énigme pour expliquer l'accélération observée dans le passé récent de l'univers. Pour résoudre ce problème plusieurs tentatives ont été testées, et dans ce mémoire nous introduisons le champ du Proca [3] [10] comme source de l'énergie sombre.

Ce modèle peut également être compatible avec le système Solaire pour une large portée de l'espace des paramètres [11]. Au niveau de l'espace-temps, il existe un attracteur de de Sitter responsable de l'accélération cosmique récente. En outre, il a été illustré comment le modèle d'énergie sombre dans le cadre des théories généralisées de Proca peut être distingué observationnellement du modèle standard de cosmologie selon à la fois l'histoire de l'expansion et la croissance cosmique. La solution de Sitter provient de la composante temporelle du champ de vecteur compatible avec les symétries de l'homogénéité et l'isotropie du l'espace de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). Même si la composante temporelle ne correspond pas à un degré de liberté de propagation par construction, elle a un effet non trivial sur la dynamique cosmologique en se comportant comme un champ auxiliaire.

Chapter 2

Introduction à la relativité générale

2.1 Relativité générale et cosmologie

2.1.1 Introduction

La relativité générale est une théorie relativiste de la gravitation, c'est à dire qu'elle décrit l'influence sur le mouvement des astres en présence de matière et plus généralement d'énergie. La cosmologie est la branche de l'astrophysique qui étudié la propriété de l'univers (par exemple: la nature, l'évolution, l'origine...etc.)

2.1.2 Equations d'Einstein

Comme il est bien connu, les équations d'Einstein sont des équations permettant de déterminer la dynamique de la géométrie, qui décrivent comment la matière et l'énergie modifient la géométrie de l'espace-temps.

L'action totale en relativité générale est donnée par:

$$S = S_g + S_M, \tag{2.1}$$

donc

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}(\mathcal{L}_M + \mathcal{L}_g) \tag{2.2}$$

où S_m représente l'action de matière et S_g représente l'action du champ de gravitation.

Action de courbure:

Elle est de la forme:

$$S_g = \frac{-1}{2\mu^2} \int \sqrt{-g} R \, d^4x. \tag{2.3}$$

où $\mu^2 = 8\pi G$, g est le déterminant du tenseur métrique $g =| g_{ab} |$. La variation de l'action S_g s'écrit donc:

$$\begin{aligned} \delta S_g &= \frac{-1}{2\mu^2} \int \delta(\sqrt{-g} R) d^4x, \\ &= \frac{-1}{2\mu^2} \int \delta(\sqrt{-g} R_{ab} g^{ab}) d^4x, \\ &= \frac{-1}{2\mu^2} \int \{R\delta(\sqrt{-g}) + R_{ab}\sqrt{-g}\delta g^{ab} + g^{ab}\sqrt{-g}\delta R_{ab}\} d^4x. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Ici on considére des variations δg_{ac} au lieu δg^{bc} :

$$g_{ac} g^{bc} = \delta^b_a, \tag{2.5}$$

$$g_{bd} g^{bc} \delta g_{ac} = -g_{bd} g_{ac} \delta g^{bc}.$$

Alors:

$$g_{bd} g_{ac} \delta g^{bc} = -\delta^c_d \delta g_{ac}. \tag{2.6}$$

Donc, le premier terme dans l'équation (2.4) devient:

$$R\delta(\sqrt{-g}) = -R\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{ab} \delta g^{ab}. \tag{2.7}$$

Pour le troisième terme, on utilise le principe de covariance pour écrire le tenseur de Ricci dans un système de coordonnées localement plat (euclidien):

$$R_{ab} = -\partial_c \Gamma^c_{ab} + \partial_b \Gamma^c_{ac}.$$

avec Γ^c_{ab} n'est pas un tenseur, mais $\delta\Gamma^c_{ab}$ est un tenseur, la variation δR_{ab} s'écrit comme:

$$\begin{aligned} \delta R_{ab} &= -\delta(\partial_c \Gamma^c_{ab}) + \delta(\partial_b \Gamma^c_{ac}), \\ &= -\partial_c(\delta\Gamma^c_{ab}) + \partial_b(\delta\Gamma^c_{ac}), \\ &= -D_c(\delta\Gamma^c_{ab}) + D_b(\delta\Gamma^c_{ac}). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Pour $D_a g^{bc} = 0$, il peut être écrit comme:

$$\begin{aligned}
\sqrt{-g} g^{ab} \delta R_{ab} d^4x &= \sqrt{-g}(-D_c(g^{ab}\delta\Gamma^c_{ab}) + D_b(g^{ab}\delta\Gamma^c_{ac})), \\
&= \sqrt{-g} D_c(-g^{ab}\delta\Gamma^c_{ab} + g^{ac}\delta\Gamma^b_{ab}), \\
&= \sqrt{-g} D_c A^c. \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

avec le vecteur contravariant A^c définit comme:

$$A^c = -g^{ab}\delta\Gamma^c_{ab} + g^{ac}\delta\Gamma^b_{ab}.$$

On tenant en compte que la variation de la métrique s'annule à l'infini on a:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{-g} g^{ab} \delta R_{ab} d^4x &= \int \sqrt{-g} D_c A^c d^4x, \\
&= \int \partial_c A^c d^4x \\
&= 0 \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

Maintenant la variation dans l'action S_g s'écrit donc:

$$\delta S_g = \frac{-1}{2\mu^2} \int (R_{ab}\sqrt{-g} + g^{ab} R_{ab} \frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{ab}} + g^{ab}\sqrt{-g}\frac{\delta R_{ab}}{\delta g^{ab}}) \delta g^{ab} d^4x. \qquad (2.11)$$

Finalement, en rassemblant tous les termes on obtient:

$$\begin{aligned}
\delta S_g &= \frac{-1}{2\mu^2} \int (R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab}) \sqrt{-g} \delta g^{ab} d^4x, \\
\delta S_g &= \frac{-1}{2\mu^2} \int G_{ab} \sqrt{-g} \delta g^{ab} d^4x. \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

où on reconnait le tenseur symétrique d'Einstein: $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab}$.

Action de matiére:

Elle est de la forme:

$$S_M = \int \mathcal{L}_M \sqrt{-g} d^4x. \qquad (2.13)$$

où $\mathcal{L}_M$ est la densité lagrangienne qui décrit la présence du matière de l'espace-temps. On peut fait cette action par rapport au tenseur métrique:

$$\begin{aligned}
\delta S_M &= \int (\sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{ab}} - \frac{\sqrt{-g}}{2} g_{ab} \mathcal{L}_M) \delta g^{ab} d^4x, \\
\delta S_M &= \frac{1}{2} \int (2 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{ab}} - g_{ab} \mathcal{L}_M) \sqrt{-g} \delta g^{ab} d^4x.
\end{aligned}$$

La variation de l'action du champ de matiére s'écrit alors:

$$\delta S_M = \int \frac{1}{2} T_{ab}\sqrt{-g}\delta g^{ab} d^4x. \tag{2.14}$$

où le tenseur énergie-impulsion est donné par

$$T_{\mu\nu} = (2\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{ab}} - g_{ab}\mathcal{L}_M).$$

A partir du principe de moindre action:

$$\delta S = \delta S_g + \delta S_M = 0. \tag{2.15}$$

Nous avons donc:

$$\frac{-1}{2\mu^2}\int G_{ab}\sqrt{-g}\delta g^{ab} d^4x + \int \frac{1}{2} T_{ab}\sqrt{-g}\delta g^{ab} d^4x = 0. \tag{2.16}$$

$$\int (\frac{-1}{2\mu^2} G_{ab} + \frac{1}{2} T_{ab})\sqrt{-g}\delta g^{ab} d^4x = 0. \tag{2.17}$$

L'équation d'Einstein du champ de la relativité générale est donc:

$$\frac{-1}{2\mu^2} G_{ab} + \frac{1}{2} T_{ab} = 0. \tag{2.18}$$

Donc:

$$G_{ab} = 8\pi G T_{ab}. \tag{2.19}$$

où T_{ab} le tenseur énergée-impulsion et G la constante de la gravitation.

2.2 L'équations fondamentales dans la cosmologie

2.2.1 Métrique de Friedmann-Robertson-Walker

La métrique de Friedmann-Robertson-Walker est permet de décrire un espace-temps de géométrie homogène et isotrope, et cette métrique est utilisée pour la description de l'évolution de l'univers aux grandes échelles, et qui décrit l'expansion de l'univers est basé sur les lois de la relativité générale d'Einstein prend la forme obtenue par (FRW).

$$dS = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

où t, x, y, z sont des coordonnées par rapport à l'observateur local, et $a^2(t)$ est le facteur d'échelle ($a^2(t) \rangle 0$). Donc la métrique de FRW donnée par: $g_{ab} = (-1,\, a^2(t),\, a^2(t),\, a^2(t))$.

Les coefficients de Christoffel s'écrivent à partir du tenseur métrique de la forme:

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad}(g_{db,c} + g_{dc,b} - g_{bc,d}). \tag{2.20}$$

On déduit les symboles non nuls:

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{ij} &= \dot{a}a\delta_{ij},\\ \Gamma^0_{ij} &= a^2 H\delta_{ij}.\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\Gamma^i_{0j} &= \Gamma^i_{j0} = \frac{\dot{a}}{a}\delta_{ij},\\ &= H\delta_{ij}.\end{aligned}$$

On calcule facilement le tenseur de Ricci et le scalaire de Ricci associés à la métrique de FRW.

le tenseur de Ricci donnée comme suit:

$$R_{ab} = \Gamma^c_{ac,b} - \Gamma^c_{ab,c} + \Gamma^d_{ac}\Gamma^c_{bd} - \Gamma^c_{ab}\Gamma^d_{cd}.$$

On obtient:

$$\begin{aligned}R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a},\\ R_{ij} &= -\delta_{ij}(\ddot{a}a + 2\dot{a}^2).\end{aligned}$$

Et le scalaire de Ricci est donnée par:

$$\begin{aligned}R &= g^{ab}R_{ab},\\ R &= g^{00}R_{00} + g^{ij}R_{ij}.\end{aligned}$$

Donc:

$$R = -6(\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2).$$

La composante temporelle dans l'équation d'Einstein donne la première équation de Friedmann:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{1}{3}\rho. \tag{2.21}$$

Pour la composante spatiale, on obtient la 2^{eme} équation de Friedmann:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{2}{3}(\rho + 3p). \tag{2.22}$$

Les équations fondamentales de la cosmologie sont constituées par les deux équations de Friedmann, en plus des équations de conservation du tenseur énergie-impulsion.

2.3 Les paramètres cosmologiques

Dans cette section en définit quelques paramètres fondamentaux de la cosmologie dans l'équation de FRW.

Paramètre de Hubble: Il décrit l'expansion de l'univers, et est donné par le rapport:

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} \tag{2.23}$$

Les paramètres de densité d'énergie: En général, les paramètres cosmologiques qui décrivent le contenu énergétique de l'univers sont la densité d'énergie de matière, de rayonnement et de l'énergie sombre: ($8\pi G = 1$):

$$\Omega_m = \frac{1}{3H^2}\rho_m \tag{2.24}$$

$$\Omega_r = \frac{1}{3H^2}\rho_r, \tag{2.25}$$

$$\Omega_{DE} = \frac{1}{3H^2}\rho_{DE}. \tag{2.26}$$

Tenseur énergie-impulsion: Nous allons maintenant donnée la forme générale du tenseur énergie-impulsion de la matière dans l'univers considérée comme un fluide parfait. C'est un tenseur symétrique tout comme la métrique:

$$T_{ab} = (p_M + \rho_M)u_a u_b + g_{ab}p_M. \tag{2.27}$$

où u^a est la quadri-vitesse du fluide, $u^a u_a = -1$, ρ et p sont les fonctions uniquement du temps.

Dans le cas du système de coordonnées comobiles $u^a = (1, 0, 0, 0)$, les composantes du tenseur moment-énergie de la matière est donne par les deux composantes:

- la composante temporelle:

$$T_{00} = \rho_M. \tag{2.28}$$

Donc:

$$G_{00} = \rho_M.$$

- la composante spatiale:

$$T_{ij} = g_{ij} p_M. \tag{2.29}$$

Donc:

$$G_{ij} = g_{ij} p_M.$$

Equation de conservation: Elle est donnée par:

$$\nabla_a T^a_b = 0. \tag{2.30}$$

qu'on peut expliciter comme suit:

$$\begin{aligned} \nabla_a T^a_b &= \partial_a T^a_b + \Gamma^a_{ac} T^c_b - \Gamma^c_{ab} T^a_c, \\ \nabla_a T^a_0 &= \partial_a T^a_0 + \Gamma^a_{ac} T^c_0 - \Gamma^c_{a0} T^a_c. \end{aligned}$$

Et donc:

$$\begin{aligned} \nabla_0 T^0_0 &= -\partial_0 \rho - 3\frac{\dot{a}}{a}(p + \rho), \\ &\Longrightarrow \dot{\rho} + 3H(p + \rho) = 0. \end{aligned} \tag{2.31}$$

où H est le paramètre de Hubble.

Chapter 3

Théorie de Proca généralisée

Dans les théories de Proca généralisées, le champ de Proca A^{μ} est un champ relativiste vectoriel massife (c-à-d de spin 1 et de masse m). Il posséde deux polarisation transversales et une longitudinale .

L'action qui décrit les théories des Proca généralisées est donnée par:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}(\mathcal{L}_M + \mathcal{L}). \tag{3.1}$$

où g est le déterminant du tenseur métrique, $\mathcal{L}_M$ est la densité lagrangienne de matière, et la densité lagrangien de Proca généralisée $\mathcal{L}$ est:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=2}^{4} \mathcal{L}_i. \tag{3.2}$$

avec $\mathcal{L}_i$ sont des interactions tenseur-vecteur:

$$\mathcal{L}_2 = G_2(X), \tag{3.3}$$

$$\mathcal{L}_3 = G_3(X)\nabla_a A^a, \tag{3.4}$$

$$\mathcal{L}_4 = G_4(X)R + G_{4,X}[(\nabla_a A^a)^2 - \nabla_b A_c \nabla^c A^b]. \tag{3.5}$$

où ∇_a est l'opérateur de dérivation covariante, $\nabla_a A^a = \partial A^a + \Gamma^a_{ac} A^c$, R est le scalaire de Ricci et les $G_i(X)$ sont des fonctions de X et telles que $G_{i,X} \equiv \frac{\partial G_i}{\partial X}$ et X est une quantité définie par:

$$X = -\frac{1}{2} A_a A^a. \tag{3.6}$$

3.1 Equations de mouvement

Pour trouver les équations de mouvement, on applique le principe de moindre action:

$$\delta S = 0. \tag{3.7}$$

$$\delta S = \int d^4x \ \delta\{\sqrt{-g}(\mathcal{L} + \mathcal{L}_M)\} = 0.$$

et l'action totale donnée par:

$$\delta S = \delta S^1 + \delta S^2 + \delta S^3.$$

où $\delta S^1, \delta S^2$ et δS^3 sont les variations de la densité Lagrangicnnc de Proca par rapport à g_{ab}.

La varaition de 1^{er} terme dans l'action δS est donnée par:

$$\delta S^1 = \int d^4x \ \delta\{\sqrt{-g}\mathcal{L}_2\} = \int d^4x\delta\{\sqrt{-g}G_2(X)\}. \tag{3.8}$$

Par conséquent, nous obtenons:

$$\delta S^1 = -\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\{g_{ab}G_2 + A_aA_bG_{2,X}\}\delta g^{ab}. \tag{3.9}$$

La variation de 2^{eme} terme est de la forme:

$$\delta S^2 = \int d^4x \ \delta\{\sqrt{-g}\mathcal{L}_3\} = \int d^4x\delta\{\sqrt{-g}G_3(X)(\nabla_cA^c)\}.$$

ce qui implique:

$$\delta S^2 = \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\{A_aA^c(\nabla_bA_c)+A_bA^c(\nabla_aA_c)-A_aA_b(\nabla_cA^c)-A^cA^dg_{ab}(\nabla_dA_c)\}G_{3,X}\delta g^{ab}. \tag{3.10}$$

D'une manière similaire, le dernier terme est:

$$\delta S^3 = \int d^4x \ \delta\{\sqrt{-g}\mathcal{L}_4\} = \int d^4x\delta\{\sqrt{-g}G_4(X)R+\sqrt{-g}G_{4,X}[(\nabla_cA^c)^2-\nabla_\rho A_\sigma\nabla^\sigma A^\rho]\}. \tag{3.11}$$

Ce qui conduit à:

$$
\begin{aligned}
\delta S^3 \;=\;& \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\{G_4[2R_{ab}-Rg_{ab}]+G_{4,X}[2A_aA^cR_{bc}+2A_bA^cR_{ac}\\
&-2A^cA^dg_{ab}R_{cd}-(\nabla_aA_b)(\nabla_cA^c)-(\nabla_bA_a)(\nabla_cA^c)\\
&-A^c(\nabla_c\nabla_aA_b)-A_b(\nabla_c\nabla_aA^c)-A^c(\nabla_c\nabla_bA_a)\\
&-A_a(\nabla_c\nabla_bA^c)+A_b(\nabla_c\nabla^cA_a)+A_a(\nabla_c\nabla^cA_b)\\
&-(\nabla_bA_c)(\nabla^cA_a)+2(\nabla_bA_c)(\nabla^cA_a)-(\nabla_aA_c)(\nabla^cA_b)\\
&+g_{ab}(\nabla_cA^c)(\nabla_dA^d)+2g_{ab}A^c(\nabla_d\nabla_cA^d)+g_{ab}(\nabla_cA_d)(\nabla^dA^c)\\
&-A_aA_bR+2(\nabla_aA^c)(\nabla_bA_c)+2A^c(\nabla_b\nabla_aA_c)\\
&-2A^cg_{ab}(\nabla_d\nabla^dA_c)-2g_{ab}(\nabla_dA_c)(\nabla^dA^c)]\\
&+G_{4,XX}[A^cA^d(\nabla_aA_b)(\nabla_dA_c)-A_bA^c(\nabla_aA^d)(\nabla_dA_c)\\
&+A^cA^d(\nabla_bA_a)(\nabla_dA_c)-A_aA^c(\nabla_bA^d)(\nabla_dA_c)\\
&+2A_bA^c(\nabla_aA_c)(\nabla_dA^d)+2A_aA^c(\nabla_bA_c)(\nabla_dA^d)\\
&-A_aA_b(\nabla_cA^c)(\nabla_dA^d)-A_bA^c(\nabla_dA_c)(\nabla^dA_a)\\
&-A_aA^c(\nabla_dA_c)(\nabla^dA_b)+A_aA_b(\nabla_dA_c)(\nabla^dA^c)\\
&-2A^cA^dg_{ab}(\nabla_dA_c)(\nabla_eA^e)-2A^cA^d(\nabla_aA_c)(\nabla_bA_d)\\
&+2A^cA^dg_{ab}(\nabla_eA_d)(\nabla^eA_c)]\}\delta g^{ab}. \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

Donc le résultat final est:

$$
\begin{aligned}
\delta S \;=\;& \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\{-g_{ab}G_2-A_aA_bG_{2,X}+[A_aA^c(\nabla_bA_c)+A_bA^c(\nabla_aA_c)\\
&-A_aA_b(\nabla_cA^c)-A^cA^dg_{ab}(\nabla_dA_c)]G_{3,X}+G_4[2R_{ab}-Rg_{ab}]\\
&+G_{4,X}[2A_aA^cR_{bc}+2A_bA^cR_{ac}-2A^cA^dg_{ab}R_{cd}-(\nabla_aA_b)(\nabla_cA^c)\\
&-(\nabla_bA_a)(\nabla_cA^c)-A^c(\nabla_c\nabla_aA_b)-A_b(\nabla_c\nabla_aA^c)-A^c(\nabla_c\nabla_bA_a)\\
&-A_a(\nabla_c\nabla_bA^c)+A_b(\nabla_c\nabla^cA_a)+A_a(\nabla_c\nabla^cA_b)-(\nabla_bA_c)(\nabla^cA_a)\\
&+2(\nabla_bA_c)(\nabla^cA_a)-(\nabla_aA_c)(\nabla^cA_b)+g_{ab}(\nabla_cA^c)(\nabla_dA^d)\\
&+2g_{ab}A^c(\nabla_d\nabla_cA^d)+g_{ab}(\nabla_cA_d)(\nabla^dA^c)-A_aA_bR+2(\nabla_aA^c)(\nabla_bA_c)\\
&+2A^c(\nabla_b\nabla_aA_c)-2A^cg_{ab}(\nabla_d\nabla^dA_c)-2g_{ab}(\nabla_dA_c)(\nabla^dA^c)]\\
&+G_{4,XX}[A^cA^d(\nabla_aA_b)(\nabla_dA_c)-A_bA^c(\nabla_aA^d)(\nabla_dA_c)+A^cA^d(\nabla_bA_a)(\nabla_dA_c)\\
&-A_aA^c(\nabla_bA^d)(\nabla_dA_c)+2A_bA^c(\nabla_aA_c)(\nabla_dA^d)+2A_aA^c(\nabla_bA_c)(\nabla_dA^d)\\
&-A_aA_b(\nabla_cA^c)(\nabla_dA^d)-A_bA^c(\nabla_dA_c)(\nabla^dA_a)-A_aA^c(\nabla_dA_c)(\nabla^dA_b)\\
&+A_aA_b(\nabla_dA_c)(\nabla^dA^c)-2A^cA^dg_{ab}(\nabla_dA_c)(\nabla_eA^e)\\
&-2A^cA^d(\nabla_aA_c)(\nabla_bA_d)+2A^cA^dg_{ab}(\nabla_eA_d)(\nabla^eA_c)]\}\delta g^{ab}.
\end{aligned}
$$

où on reconnait le tenseur d'Einstein dans la théorie de Proca généralisée est donnée par l'expression suivant:

$$
\begin{aligned}
G_{ab} \;=\;& \frac{1}{2}G_2 - \frac{1}{2}A_aA_bG_{2,X} + [\frac{1}{2}A_aA^c(\nabla_aA_c) + \frac{1}{2}A_bA^c(\nabla_bA_c) \\
& -\frac{1}{2}A_aA_b(\nabla_cA^c) - \frac{1}{2}A^cA^dg_{ab}(\nabla_dA_c)]G_{3,X} + G_4[R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}] \\
& +G_{4,X}[A_aA^cR_{bc} + A_bA^cR_{ac} - A^cA^dg_{ab}R_{cd} - \frac{1}{2}(\nabla_aA_b)(\nabla_cA^c) \\
& -\frac{1}{2}(\nabla_bA_a)(\nabla_cA^c) - \frac{1}{2}A^c(\nabla_c\nabla_aA_b) - \frac{1}{2}A_b(\nabla_c\nabla_aA^c) - \frac{1}{2}A^c(\nabla_c\nabla_bA_a) \\
& -\frac{1}{2}A_a(\nabla_c\nabla_bA^c) + \frac{1}{2}A_b(\nabla_c\nabla^cA_a) + \frac{1}{2}A_a(\nabla_c\nabla^cA_b) - \frac{1}{2}(\nabla_bA_c)(\nabla^cA_a) \\
& +(\nabla_bA_c)(\nabla^cA_a) - \frac{1}{2}(\nabla_aA_c)(\nabla^cA_b) + \frac{1}{2}g_{ab}(\nabla_cA^c)(\nabla_dA^d) + g_{ab}A^c(\nabla_d\nabla_cA^d) \\
& +\frac{1}{2}g_{ab}(\nabla_cA_d)(\nabla^dA^c) - \frac{1}{2}A_aA_bR + (\nabla_aA^c)(\nabla_bA_c) + A^c(\nabla_b\nabla_aA_c) \\
& -A^cg_{ab}(\nabla_d\nabla^dA_c) - g_{ab}(\nabla_dA_c)(\nabla^dA^c)] + G_{4,XX}[\frac{1}{2}A^cA^d(\nabla_aA_b)(\nabla_dA_c) \\
& -\frac{1}{2}A_bA^c(\nabla_aA^d)(\nabla_dA_c) + \frac{1}{2}A^cA^d(\nabla_bA_a)(\nabla_dA_c) - \frac{1}{2}A_aA^c(\nabla_bA^d)(\nabla_dA_c) \\
& +A_bA^c(\nabla_aA_c)(\nabla_dA^d) + A_aA^c(\nabla_bA_c)(\nabla_dA^d) - \frac{1}{2}A_aA_b(\nabla_cA^c)(\nabla_dA^d) \\
& -\frac{1}{2}A_bA^c(\nabla_dA_c)(\nabla^dA_a) - \frac{1}{2}A_aA^c(\nabla_dA_c)(\nabla^dA_b) + \frac{1}{2}A_aA_b(\nabla_dA_c)(\nabla^dA^c) \\
& -A^cA^dg_{ab}(\nabla_dA_c)(\nabla_eA^e) - A^cA^d(\nabla_aA_c)(\nabla_bA_d) + A^cA^dg_{ab}(\nabla_eA_d)(\nabla^eA_c)]
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

3.2 Equation de mouvement du champ de Proca

Dans cette équation en applique le même principe en évaluant la variation par rapport à A^a:

$$\delta S = \int d^4x \; \delta\{\sqrt{-g}(\mathcal{L} + \mathcal{L}_M)\} = 0.$$

D'après la forme présédente de l'action on trouve:

$$\delta S^1 = \int d^4x \; \delta\{\sqrt{-g}\mathcal{L}_2\} = \int d^4x \; \delta\{\sqrt{-g}G_2(X)\}.$$

Le résultat de cette variation est:

$$\delta S^1 = -\int d^4x\sqrt{-g}A^a G_{2,X}\ \delta A_a. \tag{3.14}$$

De la même manière, on aboutit à:

$$\delta S^2 = \int d^4x\ \delta\{\sqrt{-g}\mathcal{L}_3\} = \int d^4x\delta\{\sqrt{-g}G_3(X)(\nabla_c A^c)\}. \tag{3.15}$$

Donc:

$$\delta S^2 = \int d^4x\sqrt{-g}[A^b(\nabla^a A_b) - A^a(\nabla_b A^b)]G_{3,X}\ \delta A_a. \tag{3.16}$$

Et le dernier terme dans δS exprime comme suit:

$$\delta S^3 = \int d^4x\ \delta\{\sqrt{-g}\mathcal{L}_4\} = \int d^4x\delta\{\sqrt{-g}G_4(X)R+\sqrt{-g}G_{4,X}[(\nabla_c A^c)^2-\nabla_\rho A_\sigma \nabla^\sigma A^\rho]\}. \tag{3.17}$$

La résultat de cette variation est:

$$\begin{aligned}\delta S^3 \;=\; & \int d^4x\sqrt{-g}\{G_{4,X}[-2(\nabla^a\nabla_b A^b) + 2(\nabla_b\nabla^a A^b) - A^b R_{ab}] + G_{4,XX}[-2A^b(\nabla^a A^c)(\nabla_c A_b) \\ & +2A^b(\nabla^a A_b)(\nabla_c A^c) - A^a(\nabla_b A^b)(\nabla_c A^c) + A^a(\nabla_b A_c)(\nabla^c A^b)]\}\delta A_a. \end{aligned} \tag{3.18}$$

La variation totale est:

$$\begin{aligned}\delta S \;=\; & \int d^4x\sqrt{-g}\{-A^a G_{2,X} + [A^b(\nabla^a A_b) - A^a(\nabla_b A^b)]G_{3,X} \\ & +G_{4,X}[-2(\nabla^a\nabla_b A^b) + 2(\nabla_b\nabla^a A^b) - A^b R_{ab}] + G_{4,XX}[-2A^b(\nabla^a A^c)(\nabla_c A_b) \\ & +2A^b(\nabla^a A_b)(\nabla_c A^c) - A^a(\nabla_b A^b)(\nabla_c A^c) + A^a(\nabla_b A_c)(\nabla^c A^b)]\}\delta A_a.\end{aligned}$$

Donc l'équation du champ est définit comme suit:

$$\begin{aligned} & -A^a G_{2,X} + [A^b(\nabla^a A_b) - A^a(\nabla_b A^b)]G_{3,X} + G_{4,X}[-2(\nabla^a\nabla_b A^b) + 2(\nabla_b\nabla^a A^b) - A^b R_{ab}] \\ & +G_{4,XX}[-2A^b(\nabla^a A^c)(\nabla_c A_b) + 2A^b(\nabla^a A_b)(\nabla_c A^c) - A^a(\nabla_b A^b)(\nabla_c A^c) + A^a(\nabla_b A_c)(\nabla^c A^b)] \\ = \; & 0 \end{aligned}$$

3.3 Application cosmologique

Pour les applications cosmologiques nous prenons la forme générale de la métrique dans un univers homogène et isotrope de *F*riedmann-Lamaitre-*R*obertson-*W*alker (FLRW) décrit par la métrique:

$$dS^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \tag{3.19}$$

où $a^2(t)$ est le facteur d'échelle.

On considère le vecteur de champ A^a avec une composante temporelle:

$$A^a = (\Phi(t), 0, 0, 0).$$

A) $\underline{a = 0, b = 0}$:

Commençons par le premier terme de G_{ab}:

$$I = \frac{1}{2}G_2 - \frac{1}{2}A_a A_b G_{2,X}$$

On obtient:

$$I = -\frac{1}{2}g_{00}G_2 - \frac{1}{2}A_0 A_0 G_{2,X}.$$

D'où le résultat final est:

$$I = \frac{1}{2}G_2 - \frac{1}{2}\Phi^2 G_{2,X}. \tag{3.20}$$

Pour le $2^{ème}$ terme dans G_{ab}, on a:

$$J = [\frac{1}{2}A_a A^c(\nabla_a A_c) + \frac{1}{2}A_b A^c(\nabla_b A_c) - \frac{1}{2}A_a A_b(\nabla_c A^c) - \frac{1}{2}A^c A^d g_{ab}(\nabla_d A_c)]G_{3,X}$$

On trouve:

$$J = [\frac{1}{2}A_0 A^c(\nabla_0 A_c) + \frac{1}{2}A_0 A^c(\nabla_0 A_c) - \frac{1}{2}A_0 A_0(\nabla_c A^c) - \frac{1}{2}A^c A^d g_{00}(\nabla_d A_c)]G_{3,X}.$$

On somme sur les indices c et d, on a:

$$\begin{aligned}
J &= [\frac{1}{2}A_0 A^0(\nabla_0 A_0) + \frac{1}{2}A_0 A^0(\nabla_0 A_0) - \frac{1}{2}A_0 A_0(3H\Phi + \dot{\Phi}) - \frac{1}{2}A^0 A^d g_{00}(\nabla_d A_0)]G_{3,X}, \\
&= [A_0 A^0(\nabla_0 A_0) - \frac{1}{2}A_0 A_0(3H\Phi + \dot{\Phi}) - \frac{1}{2}A^0 A^0 g_{00}(\nabla_0 A_0) - \frac{1}{2}A^0 A^i g_{00}(\nabla_i A_0)]G_{3,X}, \\
&= [A_0 A^0(\nabla_0 A_0) - \frac{1}{2}A_0 A_0(3H\Phi + \dot{\Phi}) - \frac{1}{2}A^0 A^0 g_{00}(\nabla_0 A_0)]G_{3,X}, \\
&= [\Phi^2\dot{\Phi} - \frac{3}{2}\Phi^3 H - \frac{1}{2}\Phi^2\dot{\Phi} - \frac{1}{2}\Phi^2\dot{\Phi}]G_{3,X}. \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

Donc:

$$J = -\frac{3}{2}\Phi^3 H G_{3,X}. \tag{3.22}$$

Pour $3^{ème}$ terme, on utilise la formule(3.13), on trouve:

$$Q = K_1 + K_{,X} + K_{,XX} \,. \tag{3.23}$$

Avec, le premier terme donné par:

$$\begin{aligned} K_1 &= G_4[R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}], \\ &= G_4[R_{00} - \frac{1}{2}Rg_{00}], \\ &= G_4[R_{00} + \frac{1}{2}R]. \end{aligned}$$

D'après les calculs on obtient:

$$\begin{aligned} K_1 &= G_4[-3(H^2 + \dot{H}) - \frac{1}{2}(-12H^2 - 6\dot{H})], \\ &= G_4[-\frac{6}{2}(H^2 + \dot{H}) + \frac{1}{2}(12H^2 6\dot{H})]. \end{aligned}$$

Donc:

$$K_1 = \frac{6}{2}H^2 G_4. \tag{3.24}$$

Et le deuxième terme à la forme:

$$\begin{aligned} K_{,X} = \; & G_{4,X}[A_a A^c R_{bc} + A_b A^c R_{ac} - A^c A^d g_{ab} R_{cd} - \frac{1}{2}(\nabla_a A_b)(\nabla_c A^c) \\ & -\frac{1}{2}(\nabla_b A_a)(\nabla_c A^c) - \frac{1}{2}A^c(\nabla_c \nabla_a A_b) - \frac{1}{2}A_b(\nabla_c \nabla_a A^c) \\ & -\frac{1}{2}A^c(\nabla_c \nabla_b A_a) - \frac{1}{2}A_a(\nabla_c \nabla_b A^c) + \frac{1}{2}A_b(\nabla_c \nabla^c A_a) \\ & -\frac{1}{2}A_a(\nabla_c \nabla^c A_b) - \frac{1}{2}(\nabla_b A_c)(\nabla^c A_a) + (\nabla_c A_b)(\nabla^c A_a) \\ & -\frac{1}{2}(\nabla_a A_c)(\nabla^c A_b) + \frac{1}{2}g_{ab}(\nabla_c A^c)(\nabla_d A^d) - A^c g_{ab}(\nabla_d \nabla_c A^d) \\ & +\frac{1}{2}g_{ab}(\nabla_c A_d)(\nabla^d A^c) - \frac{1}{2}A_a A_b R + (\nabla_a A^c)(\nabla_b A_c) \\ & +A^c(\nabla_b \nabla_a A_c) - A^c g_{ab}(\nabla_d \nabla^d A_c) - g_{ab}(\nabla_d A_c)(\nabla^d A^c)]. \end{aligned} \tag{3.25}$$

On obtient:

$$
\begin{aligned}
K_{,X} \;=\; & G_{4,X}[A_0A^cR_{0c} + A_0A^cR_{0c} - A^cA^dg_{00}R_{cd} - \frac{1}{2}(\nabla_0A_0)(\nabla_cA^c) \\
& -\frac{1}{2}(\nabla_0A_0)(\nabla_cA^c) - \frac{1}{2}A^c(\nabla_c\nabla_0A_0) - \frac{1}{2}A_0(\nabla_c\nabla_0A^c) \\
& -\frac{1}{2}A^c(\nabla_c\nabla_0A_0) - \frac{1}{2}A_0(\nabla_c\nabla_0A^c) + \frac{1}{2}A_0(\nabla_c\nabla^cA_0) \\
& -\frac{1}{2}A_0(\nabla_c\nabla^cA_0) - \frac{1}{2}(\nabla_0A_c)(\nabla^cA_0) + (\nabla_cA_0)(\nabla^cA_0) \\
& -\frac{1}{2}(\nabla_0A_c)(\nabla^cA_0) + \frac{1}{2}g_{00}(\nabla_cA^c)(\nabla_dA^d) + A^cg_{00}(\nabla_d\nabla_cA^d) \\
& +\frac{1}{2}g_{00}(\nabla_cA_d)(\nabla^dA^c) - \frac{1}{2}A_0A_0R + (\nabla_0A^c)(\nabla_0A_c) \\
& +A^c(\nabla_0\nabla_0A_c) - A^cg_{00}(\nabla_d\nabla^dA_c) - g_{00}(\nabla_dA_c)(\nabla^dA^c)].
\end{aligned}
$$

Aprés simplification, on trouve:

$$
\begin{aligned}
K_{,X} \;=\; & G_{4,X}[2A_0A^cR_{0c} - A^cA^dg_{00}R_{cd} - (\nabla_0A_0) - A^c(\nabla_c\nabla_0A_0) \\
& -A_0(\nabla_c\nabla_0A^c) - (\nabla_cA_0)(\nabla^cA_0) + (\nabla_0A_c)(\nabla^cA_0) - \frac{1}{2}A_0A_0R \\
& +\frac{1}{2}g_{00}(\nabla_cA^c)(\nabla_dA^d) + A^cg_{00}(\nabla_d\nabla_cA^d) + \frac{1}{2}g_{00}(\nabla_cA_d)(\nabla^dA^c) \\
& +(\nabla_0A^c)(\nabla_0A_c) + A^c(\nabla_0\nabla_0A_c) - A^cg_{00}(\nabla_d\nabla^dA_c) \\
& -g_{00}(\nabla_dA_c)(\nabla^dA^c)].
\end{aligned}
$$

Maintenant on somme sur l'indice c on obtient:

$$
\begin{aligned}
K_{,X} \;=\; & G_{4,X}[2A_0A^0R_{00} + 2A_0A^iR_{0i} - A^0A^dg_{00}R_{0d} - A^iA^dg_{00}R_{id} - (\nabla_0A_0)(3H\Phi + \dot{\Phi}) \\
& -A^0(\nabla_0\nabla_0A_0) - A^i(\nabla_i\nabla_0A_0) - A_0(\nabla_0\nabla_0A^0) - A_0(\nabla_i\nabla_0A^i) - (\nabla_0A_0)(\nabla^0A_0) \\
& -(\nabla_iA_0)(\nabla^iA_0) + (\nabla_0A_0)(\nabla^0A_0) + (\nabla_0A_i)(\nabla^iA_0) - \frac{1}{2}A_0A_0R \\
& +\frac{1}{2}g_{00}(3H\Phi + \dot{\Phi})(3H\Phi + \dot{\Phi}) + A^0g_{00}(\nabla_d\nabla_0A^d) + A^ig_{00}(\nabla_d\nabla_iA^d) \\
& +\frac{1}{2}g_{00}(\nabla_0A_d)(\nabla^dA^0) + \frac{1}{2}g_{00}(\nabla_iA_d)(\nabla^dA^i) + (\nabla_0A^0)(\nabla_0A_0) \\
& +(\nabla_0A^i)(\nabla_0A_i) + A^0(\nabla_0\nabla_0A_0) + A^i(\nabla_0\nabla_0A_i) - A^0g_{00}(\nabla_d\nabla^dA_0) \\
& -A^ig_{00}(\nabla_d\nabla^dA_i) - g_{00}(\nabla_dA_0)(\nabla^dA^0) - g_{00}(\nabla_dA_i)(\nabla^dA^i)]
\end{aligned}
$$

Aprés simplification,on a:

$$\begin{aligned}K,_X &= G_{4,X}[2A_0A^0R_{00} - A^0A^dg_{00}R_{0d} - (\nabla_0A_0)(3H\Phi+\dot\Phi)\\ &-A_0(\nabla_0\nabla_0A^0) - A_0(\nabla_i\nabla_0A^i) - (\nabla_iA_0)(\nabla^iA_0) - \frac{1}{2}A_0A_0R\\ &+(\nabla_0A_i)(\nabla^iA_0) + \frac{1}{2}g_{00}(3H\Phi+\dot\Phi)(3H\Phi+\dot\Phi)\\ &-A^0g_{00}(\nabla_d\nabla_0A^d) + \frac{1}{2}g_{00}(\nabla_0A_d)(\nabla^dA^0) + \frac{1}{2}g_{00}(\nabla_iA_d)(\nabla^dA^i)\\ &+(\nabla_0A^0)(\nabla_0A_0) + (\nabla_0A^i)(\nabla_0A_i) - A^0g_{00}(\nabla_d\nabla^dA_0)\\ &-g_{00}(\nabla_dA_0)(\nabla^dA^0) - g_{00}(\nabla_dA_i)(\nabla^dA^i)].\end{aligned}$$

On somme sur l'indice d, on a:

$$\begin{aligned}K,_X &= G_{4,X}[2A_0A^0R_{00} - A^0A^0g_{00}R_{00} - (\nabla_0A_0)(3H\Phi+\dot\Phi)\\ &-A_0(\nabla_0\nabla_0A^0) - A_0(\nabla_i\nabla_0A^i) - (\nabla_iA_0)(\nabla^iA_0) + (\nabla_0A_i)(\nabla^iA_0)\\ &-\frac{1}{2}A_0A_0R + \frac{1}{2}g_{00}(3H\Phi+\dot\Phi)^2 - A^0g_{00}(\nabla_0\nabla_0A^0) - A^0g_{00}(\nabla_i\nabla_0A^i)\\ &+\frac{1}{2}g_{00}(\nabla_0A_0)(\nabla^0A^0) + \frac{1}{2}g_{00}(\nabla_0A_i)(\nabla^iA^0) + \frac{1}{2}g_{00}(\nabla_iA_0)(\nabla^0A^i)\\ &+\frac{1}{2}g_{00}(\nabla_iA_j)(\nabla^jA^i) + (\nabla_0A^0)(\nabla_0A_0) + (\nabla_0A^i)(\nabla_0A_i) - A^0g_{00}(\nabla_0\nabla^0A_0)\\ &-A^0g_{00}(\nabla_i\nabla^iA_0) - g_{00}(\nabla_0A_0)(\nabla^0A^0) - g_{00}(\nabla_iA_0)(\nabla^iA^0) - g_{00}(\nabla_0A_i)(\nabla^0A^i)\\ &-g_{00}(\nabla_jA_i)(\nabla^jA^i)].\end{aligned}$$

Finalement, on trouve l'expression suivante:

$$\begin{aligned}K,_X &= G_{4,X}[-\frac{3}{2}g^{00}A_0A_0(H^2+\dot H) - \frac{3}{2}A_0A_0(-3H^2-\dot H) - \frac{9}{2}H^2\Phi^2 - \frac{1}{2}\dot\Phi^2\\ &-3H\Phi\dot\Phi - \frac{1}{2}(\nabla_0A_0)(\nabla^0A_0g^{00}) + \frac{3}{2}g_{00}H^2A_0A^0 - 3H\Phi(\nabla_0A^0)\\ &-(\nabla_0A_0)(\nabla_0A^0) - g_{00}(\nabla_0A_0)(\nabla^0A^0) - 3g_{00}H^2A_0A^0 - \dot\Phi(\nabla_0A^0)].\end{aligned}$$

L'expression finale après simplifications est donnée par:

$$K,_X = -\frac{12}{2}H^2\Phi^2G_{4,X}. \tag{3.26}$$

Et le dernier terme dans Q est définit comme :

$$\begin{aligned}
K_{,XX} &= G_{4,XX}[\frac{1}{2}A^cA^d(\nabla_a A_b)(\nabla_d A_c) - \frac{1}{2}A_bA^c(\nabla_a A^d)(\nabla_d A_c) + \frac{1}{2}A^cA^d(\nabla_b A_a)(\nabla_d A_c) \\
&-\frac{1}{2}A_aA^c(\nabla_b A^d)(\nabla_d A_c) + A_bA^c(\nabla_a A_c)(\nabla_d A^d) + A_aA^c(\nabla_b A_c)(\nabla_d A^d) \\
&-\frac{1}{2}A_aA_b(\nabla_c A^c)(\nabla_d A^d) - \frac{1}{2}A_bA^c(\nabla_d A_c)(\nabla^d A_a) - \frac{1}{2}A_aA^c(\nabla_d A_c)(\nabla^d A_b) \\
&+\frac{1}{2}A_aA_b(\nabla_d A_c)(\nabla^d A^c) - A^cA^d g_{ab}(\nabla_d A_c)(\nabla_c A^e) - A^cA^d(\nabla_a A_c)(\nabla_b A_d) \\
&+A^cA^d g_{ab}(\nabla_e A_c)(\nabla^e A_c)].
\end{aligned}$$

On trouve:

$$\begin{aligned}
K_{,XX} &= G_{4,XX}[\frac{1}{2}A^cA^d(\nabla_0 A_0)(\nabla_d A_c) - \frac{1}{2}A_0A^c(\nabla_0 A^d)(\nabla_d A_c) + \frac{1}{2}A^cA^d(\nabla_0 A_0)(\nabla_d A_c) \\
&-\frac{1}{2}A_0A^c(\nabla_0 A^d)(\nabla_d A_c) + A_0A^c(\nabla_0 A_c)(\nabla_d A^d) + A_0A^c(\nabla_0 A_c)(\nabla_d A^d) \\
&-\frac{1}{2}A_0A_0(\nabla_c A^c)(\nabla_d A^d) - \frac{1}{2}A_0A^c(\nabla_d A_c)(\nabla^d A_0) - \frac{1}{2}A_0A^c(\nabla_d A_c)(\nabla^d A_0) \\
&+\frac{1}{2}A_0A_0(\nabla_d A_c)(\nabla^d A^c) - A^cA^d g_{00}(\nabla_d A_c)(\nabla_e A^e) - A^cA^d(\nabla_0 A_c)(\nabla_0 A_d) \\
&+A^cA^d g_{00}(\nabla_e A_c)(\nabla^e A_c)].
\end{aligned}$$

Après simplification on obtient:

$$\begin{aligned}
K_{,XX} &= G_{4,XX}[A^cA^d(\nabla_0 A_0)(\nabla_d A_c) - A_0A^c(\nabla_0 A^d)(\nabla_d A_c) + 2A_0A^c(\nabla_0 A_c)(\nabla_d A^d) \\
&-\frac{1}{2}A_0A_0(\nabla_c A^c)(\nabla_d A^d) - A_0A^c(\nabla_d A_c)(\nabla^d A_0) + \frac{1}{2}A_0A_0(\nabla_d A_c)(\nabla^d A^c) \\
&-A^cA^d g_{00}(\nabla_d A_c)(\nabla_e A^e) - A^cA^d(\nabla_0 A_c)(\nabla_0 A_d) + A^cA^d g_{00}(\nabla_e A_c)(\nabla^e A_c)].
\end{aligned}$$

Dans cette étape en somme sur les indices c et d, et on trouve:

$$\begin{aligned}
K_{,XX} &= G_{4,XX}[A^0A^0(\nabla_0 A_0)(\nabla_0 A_0) - A_0A^0(\nabla_0 A^0)(\nabla_0 A_0) - A_0A^0(\nabla_0 A^i)(\nabla_i A_0) \\
&+2A_0A^0(\nabla_0 A_0)(3H\Phi + \dot{\Phi}) - \frac{1}{2}A_0A_0(3H\Phi + \dot{\Phi})(3H\Phi + \dot{\Phi}) \\
&-A_0A^0(\nabla_0 A_0)(\nabla^0 A_0) - A_0A^0(\nabla_i A_0)(\nabla^i A_0) + \frac{1}{2}A_0A_0(\nabla_0 A_0)(\nabla^0 A^0) \\
&+\frac{1}{2}A_0A_0(\nabla_i A_0)(\nabla^i A^0) + \frac{1}{2}A_0A_0(\nabla_0 A_i)(\nabla^0 A^i) + \frac{1}{2}A_0A_0(\nabla_j A_i)(\nabla^j A^i) \\
&-A^0A^0 g_{00}(\nabla_0 A_0)(3H\Phi + \dot{\Phi}) - A^0A^0 g_{00}(\nabla_e A_0)(\nabla^e A_0) - A^0A^0(\nabla_0 A_0)(\nabla_0 A_0)].
\end{aligned}$$

Après les simplifications, on a:

$$\begin{aligned}
K_{,XX} &= G_{4,XX}[A^0A^0(\nabla_0 A_0)(\nabla_0 A_0) - A^0 g_{00} A^0(\nabla_0 A^0)(\nabla_0 A_0) \\
&\quad +2A^0 g_{00} A^0(\nabla_0 A_0)(3H\Phi + \dot{\Phi}) - \frac{1}{2}A_0A_0(3H\Phi + \dot{\Phi})^2 \\
&\quad -g_{00}A^0A^0(\nabla_0 A_0)(\nabla^0 A_0) + \frac{1}{2}A_0A_0(\nabla_0 A_0)(\nabla^0 A^0) \\
&\quad +\frac{3}{2}A_0A_0(\nabla_i A_i)(\nabla^i A^i) - A^0A^0 g_{00}(\nabla_0 A_0)(3H\Phi + \dot{\Phi}) \\
&\quad -A^0A^0 g_{00}(\nabla_0 A_0)(\nabla^0 A_0) - A^0A^0(\nabla_0 A_0)(\nabla_0 A_0)].
\end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{aligned}
K_{,XX} &= G_{4,XX}[\Phi^2\dot{\Phi}^2 - \Phi^2(\nabla_0 A_0)(\nabla_0 A_0) + 6\Phi^3\dot{\Phi}H + 2\Phi^2\dot{\Phi}^2 - \frac{9}{2}\Phi^4 H^2 \\
&\quad -\frac{1}{2}\Phi^2\dot{\Phi}^2 - 3\Phi^3\dot{\Phi}H - \frac{1}{2}\Phi^2\dot{\Phi}^2 + \frac{3}{2}\Phi^2(a^2HA_0)(a^{-2}HA^0) - 3A^0A^0\Phi H(\nabla_0 A_0) \\
&\quad -\Phi^2(\nabla_0 A_0)(\nabla_0 A_0) - g_{00}\Phi^2\dot{\Phi}(\nabla^0 A^0) - \Phi^2(\nabla_0 A_0)(\nabla_0 A_0)].
\end{aligned}$$

La forme la plus simple est donnée par:

$$K_{,XX} = -\frac{6}{2}\Phi^4 H^2 G_{4,XX}. \tag{3.27}$$

La forme finale de Q est:

$$Q = \frac{6}{2}H^2 G_4 - 2H^2\Phi^2 G_{4,X} - \Phi^4 H^2 G_{4,XX}. \tag{3.28}$$

Donc, le premier composante de tenseur d'Einstein est comme suit:

$$G_{00} = G_2 - \Phi^2 G_{2,X} - 3\Phi^3 H G_{3,X} + 6[H^2 G_4 - 2H^2\Phi^2 G_{4,X} - \Phi^4 H^2 G_{4,XX}]. \tag{3.29}$$

Et la première équation de Friedmann est alors donnée par:

$$G_{00} = \rho_M = \rho_m + \rho_r. \tag{3.30}$$

où ρ_M est la densité effective ρ_r est la densité de rayonnement et ρ_m est la densité de matière,

D'après la formule (3.29) et (3.30), on obtient:

$$\rho_M = G_2 - \Phi^2 G_{2,X} - 3\Phi^3 H G_{3,X} + 6H^2 G_4 - 6(2G_{4,X} + \Phi^2 G_{4,XX})H^2\Phi^2. \tag{3.31}$$

B) $a = 1, b = 1$:
Le 1^{er} terme dans les équations d'Einstein s'écrit comme:

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2}g_{11}G_2 - \frac{1}{2}A_1A_1G_{2,X}, \\ &= -\frac{1}{2}g_{11}G_2 \end{aligned}$$

Donc:

$$I = -\frac{1}{2}a^2(t)G_2. \tag{3.32}$$

Le second terme est donné par:

$$\begin{aligned} J &= [\frac{1}{2}A_1A^c(\nabla_1A_c) + \frac{1}{2}A_1A^c(\nabla_1A_c) - \frac{1}{2}A_1A_1(\nabla_cA^c) - \frac{1}{2}A^cA^dg_{11}(\nabla_dA_c)]G_{3,X}, \\ &= [-\frac{1}{2}A^0A^dg_{11}(\nabla_dA_0) - \frac{1}{2}A^iA^dg_{11}(\nabla_dA_i)]G_{3,X}, \\ &= [-\frac{1}{2}A^0A^0g_{11}(\nabla_0A_0) - \frac{1}{2}A^0A^ig_{11}(\nabla_iA_0)]G_{3,X}, \\ &= [-\frac{1}{2}A^0A^0g_{11}(\nabla_0A_0)]G_{3,X}. \end{aligned}$$

L'expression finale est:

$$J = \frac{1}{2}a^2(t)\Phi^2\dot{\Phi}G_{3,X}.$$

Et la variation du 1^{er} terme en Q s'écrit:

$$\begin{aligned} K_1 &= G_4[R_{11} - \frac{1}{2}Rg_{11}], \\ &= G_4[a^2(t)(-3H^2 - \dot{H}) - \frac{1}{2}(-12H^2 - 6\dot{H})a^2(t)]. \end{aligned}$$

La forme générale est donnée par:

$$K_1 = -\frac{1}{2}a^2(t)G_4[6H^2 + 4\dot{H}]. \tag{3.33}$$

Maintenant d'après la relation (3.25), nous avons:

$$\begin{aligned}
K_{,X} &= G_{4,X}[A_1A^cR_{1c} + A_1A^cR_{1c} - A^cA^dg_{11}R_{cd} - \frac{1}{2}(\nabla_1A_1)(\nabla_cA^c) - \frac{1}{2}(\nabla_1A_1)(\nabla_cA^c) \\
&\quad -\frac{1}{2}A^c(\nabla_c\nabla_1A_1) - \frac{1}{2}A_1(\nabla_c\nabla_1A^c) - \frac{1}{2}A^c(\nabla_c\nabla_1A_1) - \frac{1}{2}A_1(\nabla_c\nabla_1A^c) \\
&\quad +\frac{1}{2}A_1(\nabla_c\nabla^cA^1) - \frac{1}{2}A_1(\nabla_c\nabla^cA_1) - \frac{1}{2}(\nabla_1A_c)(\nabla^cA_1) + (\nabla_cA_1)(\nabla^cA_1) - \frac{1}{2}(\nabla_1A_c)(\nabla^cA_1) \\
&\quad +\frac{1}{2}g_{11}(\nabla_cA^c)(\nabla_dA^d) - A^cg_{11}(\nabla_d\nabla_cA^d) + \frac{1}{2}g_{11}(\nabla_cA_d)(\nabla^dA^c) - \frac{1}{2}A_1A_1R \\
&\quad +(\nabla_1A^c)(\nabla_1A_c) + A^c(\nabla_1\nabla_1A_c) - A^cg_{11}(\nabla_d\nabla^dA_c) - g_{11}(\nabla_dA_c)(\nabla^dA^c).
\end{aligned}$$

Après les simplifications et sommation sur l'indice c on obtient:

$$\begin{aligned}
K_{,X} &= G_{4,X}[-A^0A^0a^2(t)R_{00} - (\nabla_1A_1)(3H\Phi + \dot{\Phi}) - A^0(\nabla_0\nabla_1A_1) \\
&\quad -(\nabla_1A_1)(\nabla^1A_1) + \frac{1}{2}a^2(t)(3H\Phi + \dot{\Phi})^2 - A^0a^2(t)(\nabla_d\nabla_0A^d) \\
&\quad +\frac{1}{2}a^2(t)(\nabla_0A_d)(\nabla^dA^0) + \frac{1}{2}a^2(t)(\nabla_iA_d)(\nabla^dA^i) + (\nabla_1A^1)(\nabla_1A_1) \\
&\quad +A^0(\nabla_1\nabla_1A_0) - A^0a^2(t)(\nabla_d\nabla^dA_0) - a^2(t)(\nabla_dA_0)(\nabla^dA^0) - a^2(t)(\nabla_dA_i)(\nabla^dA^i)].
\end{aligned}$$

On somme sur l'indice d, on trouve:

$$\begin{aligned}
K_{,X} &= G_{4,X}[-A^0A^0a^2(t)R_{00} - (\nabla_1A_1)(3H\Phi + \dot{\Phi}) - A^0(\nabla_0\nabla_1A_1) + \frac{1}{2}a^2(t)(3H\Phi + \dot{\Phi})^2 \\
&\quad -A^0a^2(t)(\nabla_0\nabla_0A^0) - A^0a^2(t)(\nabla_i\nabla_0A^i) + \frac{1}{2}a^2(t)(\nabla_0A_0)(\nabla^0A^0) - (\nabla_1A_1)(\nabla^1A_1) \\
&\quad +\frac{1}{2}a^2(t)(\nabla_iA_i)(\nabla^iA^i) + (\nabla_1A^1)(\nabla_1A_1) + A^0(\nabla_1\nabla_1A_0) - A^0a^2(t)(\nabla_0\nabla^0A_0) \\
&\quad -A^0a^2(t)(\nabla_i\nabla^iA_0) - a^2(t)(\nabla_0A_0)(\nabla^0A^0) - a^2(t)(\nabla_iA_i)(\nabla^iA^i)].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{,X} &= G_{4,X}[3a^2(t)A^0A^0(H^2 + \dot{H}) - a^2(t)A_0H(3H\Phi + \dot{\Phi}) - A^0(\nabla_0\nabla_1A_1) \\
&\quad +\frac{1}{2}a^2(t)(9H^2\Phi^2 + \dot{\Phi}^2 + 6H\Phi\dot{\Phi}) - A^0a^2(t)(\nabla_0\nabla_0A^0) - A^0a^2(t)(\nabla_i\nabla_0A^i) \\
&\quad +\frac{1}{2}a^2(t)(\nabla_0A_0)(\nabla^0A^0) - (\nabla_1A_1)(\nabla^1A_1) + \frac{3}{2}a^2(t)(\nabla_1A_1)(\nabla^1A^1) \\
&\quad +(\nabla_1A^1)(\nabla_1A_1) + A^0(\nabla_1\nabla_1A_0) - A^0a^2(t)(\nabla_0\nabla^0A_0) \\
&\quad -A^0a^2(t)(\nabla_i\nabla^iA_0) - a^2(t)(\nabla_0A_0)(\nabla^0A^0) - 3a^2(t)(\nabla_1A_1)(\nabla^1A^1)].
\end{aligned}$$

Alors:

$$K_{,X} = \frac{1}{2}a^2(t)\Phi G_{4,X}[6H^2\Phi + 4H\dot{\Phi} + 4\dot{H}\Phi].$$

Et le troisième terme est exprimé comme:

$$\begin{aligned}
K_{,XX} \ &= \ G_{4,XX}[\frac{1}{2}A^cA^d(\nabla_1 A_1)(\nabla_d A_c) - \frac{1}{2}A_1A^c(\nabla_1 A^d)(\nabla_d A_c) + \frac{1}{2}A^cA^d(\nabla_1 A_1)(\nabla_d A_c) \\
&-\frac{1}{2}A_1A^c(\nabla_1 A^d)(\nabla_d A_c) + A_1A^c(\nabla_1 A_c)(\nabla_d A^d) + A_1A^c(\nabla_1 A_c)(\nabla_d A^d) \\
&-\frac{1}{2}A_1A_1(\nabla_c A^c)(\nabla_d A^d) - \frac{1}{2}A_1A^c(\nabla_d A_c)(\nabla^d A_1) - \frac{1}{2}A_1A^c(\nabla_d A_c)(\nabla^d A_1) \\
&+\frac{1}{2}A_1A_1(\nabla_d A_c)(\nabla^d A^c) - A^cA^d g_{11}(\nabla_d A_c)(\nabla_e A^e) - A^cA^d(\nabla_1 A_c)(\nabla_1 A_d) \\
&+A^cA^d g_{ab}(\nabla_e A_c)(\nabla^e A_c)].
\end{aligned}$$

On fait la sommation sur c et d dans $K_{,XX}$, on trouve:

$$\begin{aligned}
K_{,XX} \ &= \ G_{4,XX}[\frac{1}{2}A^0A^0(\nabla_1 A_1)(\nabla_0 A_0) + \frac{1}{2}A^0A^0(\nabla_1 A_1)(\nabla_0 A_0) \\
&-A^0A^0 g_{11}(\nabla_0 A_0)(3H\Phi + \dot{\Phi}) - A^0A^0(\nabla_1 A_0)(\nabla_1 A_0) + A^0A^0 g_{11}(\nabla_e A_0)(\nabla^e A_0)].
\end{aligned}$$

Après les simplifications on obtient:

$$\begin{aligned}
K_{,XX} \ &= \ G_{4,XX}[\frac{1}{2}A^0A^0(\nabla_1 A_1)(\nabla_0 A_0) + \frac{1}{2}A^0A^0(\nabla_1 A_1)(\nabla_0 A_0) \\
&-A^0A^0a^2(t)(\nabla_0 A_0)(3H\Phi + \dot{\Phi}) + A^0A^0a^2(t)(\nabla_e A_0)(\nabla^e A_0)], \\
&= \ 2a^2(t)H\dot{\Phi}\Phi^3 G_{4,XX}.
\end{aligned}$$

Donc:

$$K_{,XX} = \frac{4}{2}a^2(t)H\dot{\Phi}\Phi^3 G_{4,XX}. \tag{3.34}$$

La forme générale de Q est:

$$Q = \frac{1}{2}\{-a^2(t)G_4[6H^2+4\dot{H}]+a^2(t)\Phi G_{4,X}[6H^2\Phi+4H\dot{\Phi}+4\dot{H}\Phi]+4a^2(t)H\dot{\Phi}\Phi^3 G_{4,XX}\}.$$

Finalement, l'équation d'Einstein (1,1) s'écrit:

$$\begin{aligned}
G_{11} \ &= \ a^2(t)\{-G_2 + \Phi^2\dot{\Phi}G_{3,X} - G_4[6H^2 + 4\dot{H}] \\
&+\Phi G_{4,X}[6H^2\Phi + 4H\dot{\Phi} + 4\dot{H}\Phi] + 4H\dot{\Phi}\Phi^3 G_{4,XX} H\dot{\Phi}\Phi^3\}. \qquad (3.35)
\end{aligned}$$

Et:

$$G_{11} = a^2(t)P_M. \tag{3.36}$$

à partir de laquelle on identifie la pression effective:

$$-P_M = G_2 - \Phi^2\dot{\Phi}G_{3,X} + 2G_4[3H^2 + 2\dot{H}] - 2\Phi G_{4,X}[3H^2\Phi + 2H\dot{\Phi} + 2\dot{H}\Phi] - 4H\dot{\Phi}\Phi^3 G_{4,XX}. \tag{3.37}$$

On passe maintenant à l'équation de mouvement du champ de Proca.

D'après le résultat (3.14), on a:

$$\begin{aligned} L &= -A^a G_{2,X}, \\ &= -A^0 G_{2,X}. \end{aligned}$$

Donc:

$$L = -\Phi G_{2,X}. \tag{3.38}$$

Pour le 2^{eme} terme, on utilise la forme (3.16):

$$W = [A^b(\nabla^a A_b) - A^a(\nabla_b A^b)]G_{3,X}$$

$$\begin{aligned} W &= [A^b(\nabla^0 A_b) - A^0(\nabla_b A^b)]G_{3,X} \\ &= [A^0(\nabla^0 A_0) - A^0(3H\Phi + \dot{\Phi})]G_{3,X} \\ &= [\Phi(\nabla^0 A_0) - \Phi(3H\Phi + \dot{\Phi})]G_{3,X} \end{aligned}$$

Donc:

$$W = -3\Phi^2 H G_{3,X} \tag{3.39}$$

Nous calculons le dernièr terme dans δS^3 . On a:

$$\begin{aligned} N &= G_{4,X}[-2(\nabla^a\nabla_b A^b) + 2(\nabla_b\nabla^a A^b) - A^b R_{ab}] + G_{4,XX}[-2A^b(\nabla^a A^c)(\nabla_c A_b) \\ &\quad +2A^b(\nabla^a A_b)(\nabla_c A^c) - A^a(\nabla_b A^b)(\nabla_c A^c) + A^a(\nabla_b A_c)(\nabla^c A^b)]. \end{aligned} \tag{3.40}$$

On fait la sommation sur a, on obteint:

$$\begin{aligned} N &= G_{4,X}[-2(\nabla^0\nabla_b A^b) + 2(\nabla_b\nabla^0 A^b) - A^b R_{0b}] + G_{4,XX}[-2A^b(\nabla^0 A^c)(\nabla_c A_b) \\ &\quad +2A^b(\nabla^0 A_b)(\nabla_c A^c) - A^0(\nabla_b A^b)(\nabla_c A^c) + A^0(\nabla_b A_c)(\nabla^c A^b)] \end{aligned}$$

On somme sur l'indice b, on obtient:

$$
\begin{aligned}
N &= G_{4,X}[-2(\nabla^0\nabla_0 A^0) - 2(\nabla^0\nabla_i A^i) + 2(\nabla_0\nabla^0 A^0) + 2(\nabla_i\nabla^0 A^i) - A^0 R_{00}] \\
&\quad + G_{4,XX}[-2A^0(\nabla^0 A^c)(\nabla_c A_0) + 2A^0(\nabla^0 A_0)(3H\Phi + \dot{\Phi}) \\
&\quad - A^0(3H\Phi + \dot{\Phi})(3H\Phi + \dot{\Phi}) + A^0(\nabla_0 A_c)(\nabla^c A^0) + A^0(\nabla_i A_c)(\nabla^c A^i)] \\
&= G_{4,X}[-2(\nabla^0\nabla_0 A^0) - 2(\nabla^0\nabla_i A^i) + 2(\nabla_0\nabla^0 A^0) + 2(\nabla_i\nabla^0 A^i) - A^0 R_{00}] \\
&\quad + G_{4,XX}[-2A^0(\nabla^0 A^c)(\nabla_c A_0)2A^0(\nabla^0 A_0)(3H\Phi + \dot{\Phi}) - A^0(3H\Phi + \dot{\Phi})^2 \\
&\quad + A^0(\nabla_0 A_c)(\nabla^c A^0) + A^0(\nabla_i A_c)(\nabla^c A^i)]
\end{aligned}
$$

Après simplification on trouve l'expression si dessous:

$$
\begin{aligned}
N &= G_{4,X}[-2(\nabla^0\nabla_i A^i) + 2(\nabla_i\nabla^0 A^i) - A^0 R_{00}] + G_{4,XX}[-2A^0(\nabla^0 A^0)(\nabla_0 A_0) \\
&\quad - 2A^0(\nabla^0 A^i)(\nabla_i A_0) + 2A^0(\nabla^0 A_0)(3H\Phi + \dot{\Phi}) - A^0(3H\Phi + \dot{\Phi})^2 \\
&\quad + A^0(\nabla_0 A_0)(\nabla^0 A^0) + A^0(\nabla_0 A_i)(\nabla^i A^0) + A^0(\nabla_i A_i)(\nabla^i A^i) + A^0(\nabla_i A_0)(\nabla^0 A^i)].
\end{aligned}
$$

Après les simplifications on obtient le résultat suivant:

$$N = -6H^2 G_{4,X} - 6H^2\Phi^3 G_{4,XX}. \tag{3.41}$$

On utilise les équations (3.38), (3.39) et (3.41), on obteint l'équation du champ par rapport à A^a.C'est l'équation de mouvement du champ de Proca.

$$-\Phi G_{2,X} - 3\Phi^2 H G_{3,X} - 6H^2 G_{4,X} - 6H^2\Phi^3 G_{4,XX} = 0.$$

Alors la forme plus simple est donnée par:

$$\Phi(G_{2,X} + 3\Phi H G_{3,X} + 6H^2\Phi G_{4,X} + 6H^2\Phi^2 G_{4,XX}) = 0. \tag{3.42}$$

3.3.1 Exemple de Modèle Cosmologique

On fait le choix suivant:

$$\Phi^p \propto H^{-1} \iff \Phi \sim t^\alpha. \tag{3.43}$$

où p est une constante positive.

On considéré Φ positive, et on choisit les fonctions $G_{2,3,4}$ comme:

$$G_2(X) = b_2 X^{p_2} + F, \quad G_3(X) = b_3 X^{p_3}, \quad G_4(X) = \frac{M_{pl}^2}{2} + b_4 X^{p_4}. \tag{3.44}$$

où $p_3 = \frac{1}{2}(p + p_2 - 1\ )$; $p_4 = (p + p_2)$, M_{pl}^2 est la masse de Planck et $b_{2,3,4}$ sont des constantes. Dans le cas spécifique ($p = 1 \Rightarrow H^{-1} \propto \Phi$) on retrouve le modèle covariant du Galiléen.

Pour un champ de matière, rayonnement ou matière sans pression, on a:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_r + 3H(\rho_r + p_r) &= 0, \\ \dot{\rho}_m + 3H(\rho_m + p_m) &= 0. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Et d'autre part:

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{1}{3}\rho_r, \\ p_m &= 0. \end{aligned}$$

où p_r est la pression de rayonnement et p_m represent pression de matière.

Nous remplaçons cette quantité dans (3.45) on trouve les équations de continuité ordinaires suivant:

$$\dot{\rho}_r + 4H\rho_r = 0, \tag{3.46}$$

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = 0. \tag{3.47}$$

On introduit les variables sans dimensions:

$$y = \frac{b_2\Phi^{2p_2}}{3M_{pl}^2H^2 2^{p_2}}, \tag{3.48}$$

$$\beta_i = \frac{p_i b_i}{2^{p_i - p_2} p_2 b_2}(\Phi H)^{i-2}. \tag{3.49}$$

Et les paramètres de densités sans dimensions:

$$\Omega_r = \frac{\rho_r}{3M_{pl}^2H^2}; \quad \Omega_m = \frac{\rho_m}{3M_{pl}^2H^2}; \quad \Omega_{DE} = 1 - \Omega_m - \Omega_r. \tag{3.50}$$

D'après l'équation (??), on a:

$$\Phi(G_{2,X} + 3\Phi H G_{3,X} + 6H^2\Phi G_{4,X} + 6H^2\Phi^2 G_{4,XX}) = 0.$$

Et pour $\Phi \neq 0$,on obtient la contrainte suivante:

$$1 + 3\beta_3 + 6\beta_4(2p + 2p_2 - 1) = 0. \tag{3.51}$$

à partir de laquelle on obtient:

$$\beta_3 = \frac{1}{3}[-1 - 6\beta_4(2p + 2p_2 - 1)]. \tag{3.52}$$

Pour trouver la forme de l'expression du paramètre d'énergie sombre, on utilise l'équation (3.31) :

$$\rho_M = G_2 - \Phi^2 G_{2,X} - 3\Phi^3 H G_{3,X} + 6H^2 G - 6(2G_{4,X} - \Phi^2 G_{4,XX})H^2\Phi^2. \tag{3.53}$$

comme: $\rho_M = \rho_r + \rho_m$, donc:

$$\rho_r + \rho_m = G_2 - \Phi^2 G_{2,X} - 3\Phi^3 H G_{3,X} + 6H^2 G - 6(2G_{4,X} - \Phi^2 G_{4,XX})H^2\Phi^2,$$

$$\Omega_r + \Omega_m = -\frac{1}{3M_{pl}^2 H^2}\{-b_2 - FX^{-p_2} + \Phi^2 p_2 b_2 X^{-1} + 3\Phi^3 H p_3 b_3 X^{-1} - 3H^2 M_{pl}^2 - 6H^2 b_4 X,$$

Et:

$$\begin{aligned} 1 - \Omega_r - \Omega_m &= \frac{1}{3M_{pl}^2 H^2}\{-b_2 - FX^{-p_2} + \Phi^2 p_2 b_2 \frac{2}{\Phi^2} + 3\Phi^3 H p_3 b_3 \frac{2}{\Phi^2} - 6H^2 b_4 \frac{\Phi^2}{2} \\ &\quad + 12H^2\Phi^2 p_4 b_4 + 6H^2\Phi^4 p_4 b_4 (p_4 - 1)\frac{2}{\Phi^2}\}. \end{aligned}$$

Et comme $\Omega_{DE} = 1 - \Omega_r - \Omega_m$, on obtient:

$$\Omega_{DE} = \frac{\beta y}{p_2(p + p_2)}. \tag{3.54}$$

avec $\beta = -p_2(p + p_2) + 6p_2^2\beta_4(2p + 2p_2 - 1)$. On choisit b_2 sous la forme, $b_2 = -m^2 M_{pl}^{2(1-p_2)}$, avec m un terme de masse et on définit une autre quantité sans dimension: $\lambda \equiv \left(\frac{\Phi}{M_{pl}}\right)^p \frac{H}{m}$. On utilise les équations (3.48),(3.54) et la forme de λ pour trouver l'expression de la composante temporelle:

$$\Phi^{2p_2} = \frac{b_2}{3M_{pl}^2 H^2 2^{p_2}} y. \tag{3.55}$$

Et de la relation donnant Ω_{DE} on tire y :

$$y = \frac{p_2(p + p_2)}{\beta}\Omega_{DE}. \tag{3.56}$$

En remplaçant (3.56) et b_2 dans (3.55), on obtient:

$$\Phi^{2p_2} = -\frac{3M_{pl}^2 2^{p_2}}{M_{pl}^{2(1-p_2)}}\frac{H^2}{m^2}\frac{p_2(p+p_2)}{\beta}\Omega_{DE}.$$

D'autre part, on a:

$$\left(\frac{H}{m}\right)^2 = \lambda^2\left(\frac{M_{pl}}{\Phi}\right)^{2p}. \tag{3.57}$$

Donc:

$$\Phi^{2p_2} = -3\lambda^2 2^{p_2}\left(\frac{M_{pl}^{2p+2p_2}}{\Phi^{2p}}\right)\frac{p_2(p+p_2)}{\beta}\Omega_{DE}.$$

Et:

$$\Phi^{2p_2+2p} = -3\lambda^2 2^{p_2} M_{pl}^{2p+2p_2}\frac{p_2(p+p_2)}{\beta}\Omega_{DE}.$$

Donc, l'expression finale de Φ donnée par:

$$\Phi = M_{pl}[-3\lambda^2 2^{p_2}\frac{p_2(p+p_2)}{\beta}\Omega_{DE}]^{\frac{1}{2(p+p_2)}}. \tag{3.58}$$

Pour $\Phi \neq 0$, on considère l'équation de mouvement du champ de Proca et la deuxième équation de Friedmann:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\{G_{2,X} + 3G_{3,X}H\Phi + 6G_{4,X}H^2 + 6G_{4,XX}H^2\Phi^2\} = 0, \\ G_2 - G_{3,X}\Phi^2\dot{\Phi} + 2G_4[3H^2 + 2\dot{H}] - 2\Phi G_{4,X}[3H^2\Phi + 2H\dot{\Phi} + 2\dot{H}\Phi] - 4G_{4,XX}H\dot{\Phi}\Phi^3 = -P_M. \end{cases}$$

De ces équations nous pouvons extraire $\dot{\Phi}$ et $\dot{H}$, ce qui nous permet d'avoir:

$$\Omega'_{DE} = \frac{(1+s)\Omega_{DE}(3+\Omega_r-3\Omega_{DE})}{1+s\Omega_{DE}}, \tag{3.59}$$

$$\Omega'_r = \frac{(1-\Omega_r+(3+4s)\Omega_{DE}}{1+s\Omega_{DE}}. \tag{3.60}$$

avec Ω'_{DE} et Ω'_r où la dérivation est effectuée par rapport à $N = \ln a$, et où:

$$s = \frac{p_2}{p}. \tag{3.61}$$

Le paramètre d'état effectif est défini par:

$$w_{eff} = \frac{P}{\rho}.$$

où P est la pression totale et ρ est la densité totale.

D'apès le premier équation de Friedmann on a:

$$H^2 = \frac{1}{3}\rho$$

On trouve:

$$w_{eff} = 1 - \frac{2\dot{H}}{3H^2}. \tag{3.62}$$

Et qui s'écrit comme:

$$w_{eff} = \frac{\Omega_r - 3(1+s)\Omega_{DE}}{3(1+s\Omega_{DE})}. \tag{3.63}$$

En écrit les équations (3.31) et (3.37) sous la forme effective:

$$\begin{aligned} 3H^2M_{pl}^2 &= \rho_M + \rho_{DE}, \\ M_{pl}^2(3H^2+2\dot{H}) &= -P_{DE} - P. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Donc:

$$3H^2M_{pl}^2 = \rho_M - [G_2 - \Phi^2 G_{2,X} - 3\Phi^3 H G_{3,X} + 6H^2(-\frac{M_{pl}^2}{2} + b_4 X^{p_4}) - 6(2G_{4,X} + \Phi^2 G_{4,XX})H^2\Phi^2]. \tag{3.65}$$

$$\begin{aligned} M_{pl}^2(3H^2+2\dot{H}) &= -P - [G_2 - G_{3,X}\Phi^2\dot{\Phi} + 2(-\frac{M_{pl}^2}{2} + b_4X^{p_4})[3H^2+2\dot{H}] \\ &\quad -2\Phi G_{4,X}[3H^2\Phi + 2H\dot{\Phi} + 2\dot{H}\Phi] - 4G_{4,XX}H\dot{\Phi}\Phi^3] \end{aligned} \tag{3.66}$$

En comparant (3.65) et (3.66) avec (3.64), on obtient:

$$\rho_{DE} = -G_2 + \Phi^2 G_{2,X} + 3\Phi^3 H G_{3,X} - 6H^2 g_4 + 6(2G_{4,X} + \Phi^2 G_{4,XX})H^2\Phi^2. \tag{3.67}$$

Et:

$$P_{DE} = G_2 - G_{3,X}\Phi^2\dot{\Phi} + 2g_4[3H^2+2\dot{H}] - 2\Phi G_{4,X}[3H^2\Phi + 2H\dot{\Phi} + 2\dot{H}\Phi] - 4G_{4,XX}H\dot{\Phi}\Phi^3. \tag{3.68}$$

avec: $g_4 = b_4 X^{p_4}$.

On définit l'équation d'état de l'énergie sombre, $w_{DE} = \frac{p_{DE}}{\rho_{DE}}$:

$$w_{DE} = \frac{G_2 - G_{3,X}\Phi^2\dot{\Phi} + 2g_4[3H^2 + 2\dot{H}] - 2\Phi G_{4,X}[3H^2\Phi + 2H\dot{\Phi} + 2\dot{H}\Phi] - 4G_{4,XX}H\dot{\Phi}\Phi^3}{-G_2 + \Phi^2 G_{2,X} + 3\Phi^3 H G_{3,X} - 6H^2 g_4 + 6(2G_{4,X} + \Phi^2 G_{4,XX})H^2\Phi^2}. \tag{3.69}$$

On peut récrire w_{DE} sous la forme simplifiée.

$$w_{DE} = -\frac{3(1+s) + s\Omega_r}{3(1 + s\Omega_{DE})}. \tag{3.70}$$

Finalement la dynamique cosmologique du modèle étudié est réduite à solutionner un système d'équations formé par les équations (3.59), (3.60), (3.65) et (3.70). En outre la solution donnant w_{eff} permet de déduire le paramètre de Hubble en utilisant la définition $w_{eff} = 1 - \frac{2\dot{H}}{3H^2}$ et à partir de laquelle en recouvre le facteur d'échelle $a(t)$.

Chapter 4

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié dans un cas particulier la dynamique cosmologique d'un univers FLRW plat dans la théorie de Proca généralisée. La question si ce modèle est viable et peut réaliser les phases cosmologiques standards, la phase de radiation, la phase de matière et la phase de de Sitter, est restée sans réponse jusqu'a la solution numérique des équations données par (3.59), (3.60), (3.63) et (3.70). En outre le comportement de du champ de Proca (quintessence, fantôme ou quinton) est pour le moment inconnu.

Bibliography

[1] A. D. Felice, L. Heisenberg, S. Tsujikawa , Observation constaints on generalised Proca theories (24 Jun 2017) [arXiv :astro-ph-CO/ 1703.09573v2].

[2] S. Weinberg, Rev. Mod. Phy. 61, 1 (1989).

[3] E. J. Coplelaand, M. Sami et S. Tsujikawa, Int. J. Mod. Phy. D 15, 1753(2006) [hep-th/0603057] .

[4] T. P. Sotiriou et V. Faraoni, Rev. Mod. Phy. 82, 451(2010) [arXiv: 0805.1726 [gr-qc]] .

[5] A. De Felice et S. Tsujikawa, Living Rev. Rel. 13, 3 (2010) [arXiv: 1002.4928 [gr-qc]].

[6] T. Clifton, P. G. Ferreira, A. Padilla et C. Skordis, Phy. Rept. 513, 1 (2012) [arXiv :1106.2476 [astro-ph.CO]].

[7] L. Amendola et al. [Euclid Theory Working Group], Living Rev. Rel. 16, 6 (2013)[arXiv :1206.1225 [astro-ph.CO]] .

[8] A. Joyce, B. Jain, J. Khoury et M. Trodden, Phy. Rept. 568, 1 (2015) [arXiv :1407.0059 [astro-ph.CO]] .

[9] P. Bull et al. Phys. Dark Univ. 12, 56 (2016) [arXiv :1512.05356 [astro-ph.CO]] .

[10] L. Amendola et al. [arXiv :1606.00180 [astro-ph.CO]].

[11] A. De Felice, L. Heisenberg, R. Kase, S. Mukohyama, S. Tsujikawa et Y. 1. Zhang, Phys. Rev.

D 94, 044024(2016) [arXiv: 1605.05066 [gr-qc]] .