REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOHAMED SEDDIK BEN YAHIA - JIJEL

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Mémoire
De fin d'étude en vue de l'obtention du diplôme de master
Filière : Physique
Spécialité : Physique Théorique

Présenté par

Fekrache Imane

Thème

Effet du champ magnétique sur la création des fermions dans l'espace de de-Sitter

Soutenu devant le jury composé de : Le : 26/06/2018

Président :	K. Nouicer	Prof.	Univ. MSBY, Jijel
Rapporteur :	S. Haouat	Prof.	Univ. MSBY, Jijel
Examinatrice :	B. Guettou	MAA.	Univ. MSBY, Jijel

Promotion : 2017-2018

Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé au Laboratoire de Physique Théorique du département de physique de la Faculté des Sciences Exactes et Informatique de l'Université de Jijel.

Tous mes remerciements vont premièrement à Dieu le tout puissant pour la volonté, la santé et patience qu'il m'a donné pour terminer ce mémoire.

Je remercie mon encadreur Monsieur Salah Haouat, Professeur à l'université de Jijel pour toute l'aide qu'il m'a apportée au cours de la réalisation de ce travail, mes discussions avec lui et sa disponibilité ont constitué un rapport très important pour moi.

Mes sincères remerciements vont également à Mr k.Nouicer, Professeur à l'université de Jijel, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de mon mémoire.

Je remercie également Madame Bouchra Guettou Maitre-Assistante à l'université de Jijel pour avoir accepté de juger ce travail.

Je remercie aussi tous mes collègues au laboratoire de physique Théorique de la promotion 2017/2018.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous les membres de ma famille, mes parents, mes sœurs et mes frères qui ont fait beaucoup de sacrifices pour que je réussisse dans mes études .

Imane

Table des matières

1 Introduction générale **3**

2 Création de particules en expansion de l'univers **7**

2.1 Introduction 7

2.2 Univers en expansion 7

2.3 Champs quantiques dans un univers en expansion 10

2.3.1 Champ scalaire libre 10

2.3.2 Champ scalaire complexe dans un espace courbe 12

2.4 Création de particules 16

2.5 Application :Espace de de-Sitter 17

2.5.1 Solution exacte de l'équation de Klein Gordon 17

2.5.2 Etats "in" et "out" et création de particules 18

2.6 Conclusion 20

3 Création de particules scalaires dans un univers de de-Sitter **21**

3.1 Introduction 22

3.2 Equation de Klein Gordon en présence champ électrique 22

3.3 Choix des état" in"et "out" 23

3.4 Création des particules 25

3.5 Action effective de Schwinger 26

3.6 Conclusion 28

4 Création de particules de spin $\frac{1}{2}$ dans un univers de de-Sitter **29**

4.1 Introduction 30

4.2 Equation de Dirac en présence d'un champ électrique 30

4.3 Création des particules 35
4.4 Action effective de Schwinger 36
4.5 Conclusion 38

5 Création de particules en présence d'un champ magnétique 39
5.1 Introduction 40
5.2 Equation de Dirac en présence d'un champ électromagnétique 40
5.3 Création des particules 43
5.4 Action effective de Schwinger 44
5.5 Conclusion 45

6 Conclusion générale 46

Chapitre 1

Introduction générale

Dans la diffusion des particules relativiste par une barrière du potentiel, il a été constaté que le flux de l'onde réfléchie par la barrière peut être supérieur à celui de l'onde incidente [1, 2]. Ce paradoxe de Klein, connu sous le nom "Paradoxe de Klein a trouvé une justification théorique après l'introduction de la théorie de trous de Dirac qui a prédit l'existence d'antiparticules associées aux particules. D'après cette théorie, le vide n'est pas vraiment vide mais une mer de Dirac qui contient des particules virtuelles ont une énergie négative. La transition des particules virtuelles de la mer de Dirac en particules réelles par l'effet tunnel est accompagnée la création des paires particule-antiparticule au voisinage de la barrière [3].

L'effet de la création des particules en électrodynamique a été étudié pour la première fois par Schwinger en utilisant la méthode du lagrangien effectif de Schwinger [4]. Au début des années 50, Schwinger a montré dans le cadre de la théorie quantique des champs que l'amplitude de transition vide-vide pour un champ spinoriel peut être exprimée par l'intermédiaire d'une action effective

$$\mathcal{A}(vac - vac) = \exp(iS_{eff}) = \exp\left(i \int d^4x \; L_{eff}\right), \tag{1.1}$$

où L_{eff} est dit le lagrangien effectif de Schwinger.

La probabilité de transition vide-vide est alors

$$\mathcal{P}_{vac-vac} = \exp\left(-2\,\mathrm{Im}\, S_{eff}\right) = \exp\left(-\int d^4x \; 2\,\mathrm{Im}\, L_{eff}\right). \tag{1.2}$$

Dans ce cas, la probabilité de création des particules peut être donc extraite de la partie imaginaire de S_{eff}

$$\mathcal{P}_{Creat.} = 1 - |\mathcal{A}(vac - vac)|^2 \simeq \int d^4x \; 2\,\mathrm{Im}\, L_{eff}. \tag{1.3}$$

Ici, $2\,\mathrm{Im}\, L_{eff}$ est la probabilité par unité de temps par unité de volume de créer des particules à partir du vide.

Pour un champ électrique constant L_{eff} a été exactement calculé [4, 5]. Le résultat est que la probabilité de création des paires des particules par un champ électrique constant d'intensité E est donnée par

$$2\,\mathrm{Im}\, L_{eff} = \frac{e^2E^2}{4\pi^3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \exp\left(-n\pi \frac{m^2}{eE}\right). \tag{1.4}$$

En présence d'un champ magnétique $\vec{H}$ parallèle à $\vec{E}$, la probabilité (1.4) devient [6]

$$2\,\mathrm{Im}\, L_{eff} = \frac{e^2EH}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \coth\left(n\pi \frac{H}{E}\right) \exp\left(-n\pi \frac{m^2}{eE}\right). \tag{1.5}$$

A partir de (1.5) nous pouvons voir que $\mathcal{P}_{Creat.} = 0$ quand $E = 0$ même si $H \neq 0$, ce qui montre qu'un champ magnétique pure ne crée pas des particules.

Par ailleurs les résultats (1.4) et (1.5) sont réobtenus suivant plusieurs approches et pour d'autres cas comme par exemple le champ électrique variable [5, 7, 8], la création de particules de spin quelconque [9, 10] et la création des particules dans un espace à dimension quelconque [11]. Notons que la généralisation au cas de spin quelconque montre la manifestation des effets statistiques. Si nous considérons par exemple les particules de spin 0, où la probabilité $\mathcal{P}_{Creat.}$ est donnée par [12]

$$\mathcal{P}_{Creat.} = \frac{e^2 E^2}{8\pi^3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \exp\left(-n\pi \frac{m^2}{eE}\right) \tag{1.6}$$

et

$$\mathcal{P}_{Creat.} = \frac{e^2 EH}{8\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \csc\left(n\pi \frac{H}{E}\right) \exp\left(-n\pi \frac{m^2}{eE}\right), \tag{1.7}$$

nous pouvons voir qu'un facteur $(-1)^{n+1}$ est survenu à cause de la statistique de Bose-Einstein et un facteur $\frac{1}{2}$ due à la minimisation des degrés de liberté par rapport aux particules spinorielles.

Comme dans le cas des champs électromagnétiques, il a été montré dans le cadre de la théorie quantique des champs dans un espace courbe que les champs gravitationnels peuvent créer des paires particule-antiparticule à partir de vide [13, 14, 15, 16, 17]. L'étude de ce phénomène nécessite une définition de l'état du vide pour les champs quantiques de la matière. Cependant, il est bien connu que dans un espace courbe, il n'y a pas de définition absolue de l'état du vide et la notion de particules n'est pas complètement claire[18]. Dans un univers en expansion, la création spontanée des particules aura lieu quand le vide devient instable ; l'état du vide défini dans le passé se diffère de l'état du vide dans le futur.

Dans la littérateur, nous trouvons plusieurs travaux qui traitent le problème de la création des particules dans un univers de de-Sitter [19, 20, 21, 22, 23, 24]. Les cas considérés sont la création des particules de spin 0, les particules de spin 1/2 ainsi que l'effet du champ électrique sur la création de particules à une dimension et à 3 dimensions. Dans ce travail, nous nous proposons d'étudier l'effet du champ magnétique sur la création des particules de spin 1/2 dans un univers de de-Sitter.

Pour étudier le phénomène de création de paires de particules à partir du vide par nous pouvons utiliser plusieurs méthodes comme par exemple la technique des intégrales de chemins [25, 26], la méthode semi-classique complexe [27, 28, 29], la technique de la transformation de Bogoliubov reliant les états "in" avec les états "out" [11, 30], la méthode de projection basée

sur le calcul de la fonction de Green [31, 32, 33]. Nous utilisons dans ce mémoire le formalise de la matrice S basé sur la transformation de Bogoliubov.

Ce mémoire se compose de six chapitres.

Dans le deuxième chapitre, nous introduisons la méthode canonique de Bogoliubov pour déterminer la probabilité de création d'une paire de particules et le nombre de particules créées. Nous commençons, d'abord, par la quantification canonique du champ scalaire libre puis nous considérons le cas d'un champ scalaire dans un univers en expansion. Comme exemple d'illustration nous considérons l'espace de de-Sitter où l'équation de Klein Gordon admet des solutions exactes et analytiques. A partir des coefficients de Bogoliubov nous calculons la probabilité de création d'une paire de particules et la densité des particules créées.

Dans le troisième chapitre, nous étudions l'effet du champ électrique sur la création de particules scalaires dans un univers de de-Sitter. En premier lieu, nous cherchons la solution de l'équation de Klein Gordon. Ensuit nous allons classer les solutions exactes en états "in" et "out", en admettant que les états d'énergie positive et négative se comporte comme les solutions semi-classique de l'équation d'Hamilton-Jacobi.

Dans le quatrième chapitre, nous nous proposons d'étudier l'effet du champ électrique sur la création de particules de spin 1/2 à partir du vide dans l'espace de-Sitter. En introduisant une transformation unitaire, nous pouvons obtenir les solutions exactes de l'équation de Dirac avec un champ électrique. A l'aide de la transformation de Bogoliubov nous calculons la probabilité de création de paires particules et la densité de particules créées.

Dans le cinquième chapitre, nous étudions l'effet de champ magnétique sur la production de particules dans un espace-temps de Sitter à quatre dimensions. En premier lieu, nous cherchons les solutions de l'équation de Dirac. Ensuite, nous étudions le comportement de ces solutions pour définir les états "in" et "out". En dernière étape, nous calculons la probabilité de création d'une paire et la densité des fermions créés à partir des coefficients de Bogoliubov.

Le dernier chapitre est réservé pour une conclusion générale.

Chapitre 2

Création de particules en expansion de l'univers

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous nous proposons de montrer comment dériver la probabilité de création d'une paire de particules scalaires et la densité des particules créées en présence d'un champ gravitationnel dans un univers en expansion par la méthode des transformations de Bogoliubov. Nous commençons par la quantification canonique du champ scalaire complexe libre puis nous considérons le cas d'un champ scalaire complexe dans un univers en expansion. Dans ce cas le système n'a pas un vide bien déterminé et la notion de particules n'est pas claire. Ils existent cependant des instants pour lesquels l'interprétation en particules est possible. Généralement, ces instants sont le passé et le futur lointains. Pour l'univers de de-Sitter, nous cherchons d'abord les solutions de l'équation de Klein Gordon correspondante. Puis, nous comparons ces solutions avec les solutions semi-classique $\varphi(\eta) \sim e^{\pm iS}$. Cela nous permet de classer nos solutions en états "in" et "out".

2.2 Univers en expansion

Le modèle standard de Friedmann-Robertson-Walker se repose essentiellement sur l'hypothèse (le principe cosmologique) suivante ; à grand échelle, l'univers est homogène, isotrope et en expansion. Une conséquence mathématique du principe cosmologique est l'existence d'un sys-

tème de coordonnées comobiles dans lequel la métrique à quatre dimensions de l'espace-temps prend la forme

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2 d\Omega^2\right] \tag{2.1}$$

où

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2, \tag{2.2}$$

t est le temps cosmique et K est la courbure spatiale qui peut prend les valeurs suivantes

$$\begin{cases} K = +1 \text{ pour un univers fermé} \\ K = 0 \text{ pour un univers plat} \\ K = -1 \text{ pour un univers ouvert} \end{cases} \tag{2.3}$$

L'équation de mouvement dans un champ gravitationnel est donnée par

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} \tag{2.4}$$

où τ est le temps propre et $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ est la connexion affine, qui s'écrit en termes de la métrique comme

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\left[g_{\rho\mu,\nu} + g_{\rho\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}\right] \tag{2.5}$$

Pour la métrique (2.1) les symboles de Chritoffel non nulles sont

$$\begin{cases} \Gamma^0_{ij} = a\dot{a}\tilde{g}_{ij} \\ \Gamma^i_{0j} = \frac{\dot{a}}{a}\delta_{ij} \\ \Gamma^i_{ij} = k\tilde{g}_{ij}x^i \end{cases} \tag{2.6}$$

où

$$\tilde{g}_{ij} = \delta_{ij} + k\frac{x^i x^j}{1-kr^2} \tag{2.7}$$

L'expansion de l'univers est gouverné par équation d'Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\lambda\kappa}R_{\lambda\kappa} = -8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{2.8}$$

où $T_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion et $R_{\mu\nu}$ est tenseur de Ricci défini par

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\lambda,\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu,\lambda} + \Gamma^\kappa_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\kappa} - \Gamma^\kappa_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\lambda\kappa}, \tag{2.9}$$

Ce tenseur est symétrique

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu} \tag{2.10}$$

Les composantes non nulles du tenseur de Ricci sont

$$\begin{cases} R_{ij} = -\left(2k + 2\dot{a}^2 + a\ddot{a}\right)\tilde{g}_{ij} \\ R_{0i} = \frac{\dot{a}}{a}k\left(\delta_{lj}\tilde{g}_{il} - \delta_{li}\tilde{g}_{jl}\right)x^j \\ R_{00} = 3\frac{\ddot{a}}{a} \end{cases} \tag{2.11}$$

Si nous contractons le tenseur de Ricci, nous obtenons

$$R = 8\pi GT \tag{2.12}$$

Le tenseur énergie-impultion s'écrit sous la forme

$$T_{\mu\nu} = pg_{\mu\nu} + (p+\rho)\,U_\mu U_\nu \tag{2.13}$$

dont ses composantes sont donnée par

$$T^{00} = \rho\,(t)\,,\ T^{0i} = 0\ ,\ T^{ij} = \tilde{g}^{ij}a^{-2}p(t) \tag{2.14}$$

Il vien que

$$R_{\mu\nu} = -8\pi GS_{\mu\nu} \tag{2.15}$$

où $S_{\mu\nu}$ est donnée par

$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^{\lambda}_{\lambda} \tag{2.16}$$

avec ses composntes

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\rho - p\right)a^2 g^2_{ij} \tag{2.17}$$

$$S_{00} = \frac{1}{2}\left(\rho + 3p\right) \tag{2.18}$$

En substituant, d'une part, les composantes du tenseur de Ricci et d'autre part les composantes du tenseur de $S_{\mu\nu}$ dans l'équation d'Einstein, nous obtenons

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-4\pi}{3}G\left(\rho + 3p\right) \tag{2.19}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{k}{a^2} = 4\pi G\left(\rho - p\right) \tag{2.20}$$

En combinant (2.19) et (2.20), nous arrivons à l'équation fondamentale gouvernant l'expansion de l'univers

$$8\pi G\rho\,(t) = 3\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right] \tag{2.21}$$

جامعة محمد الصديق بن يحي - جيجل
مكتبة الكلية
-02-
كلية العلوم الدقيقة و الإعلام الآلي

D'après la loi de conservation de l'énergie

$$T^{0\nu}{}_{;\nu} = 0 \tag{2.22}$$

Nous avons une équation diffèrentielle du premier ordre

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \tag{2.23}$$

En introduisant l'équation d'état ω

$$\omega = \frac{p}{\rho} \tag{2.24}$$

Pour ω constante l'équation (1.4) devient

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+\omega)} \tag{2.25}$$

où ρ_0 la densité du fluide cosmique et a_0 est le rayon de l'univers observé actuellement avec l'indice 0 dénote la valeur actuelle.

Selon la valeur de ω on distingue trois cas

Un univers dominé par la matière non-relativiste pour $\omega = 0$, $(p = 0)$

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3} \tag{2.26}$$

Un univers dominé par la matière relativiste pour $\omega = \frac{1}{3}$, $(p = \frac{\rho}{3})$

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-4} \tag{2.27}$$

Un univers dominé par l'énergie du vide $\omega = -1$

$$\rho = \Lambda = c^{ct} \tag{2.28}$$

2.3 Champs quantiques dans un univers en expansion

2.3.1 Champ scalaire libre

D'abord nous commençons par la quantification d'un système de champ scalaire libre. La densité lagrangienne d'un champ scalaire complexe libre s'écrit

$$\mathcal{L} = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi^*\partial_\nu\varphi - m^2\varphi^*\varphi \tag{2.29}$$

avec la métrique Minkowskienne $\eta_{\mu\upsilon} = diag\,(1,-1,-1,-1)$

La dynamique de ce système est régie par l'équation de Klein-Gordon suivante

$$\left(\Box + m^2\right)\varphi\left(x,t\right) = 0 \tag{2.30}$$

où le d'alembertien est donné par

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial^2 t} - \triangle \tag{2.31}$$

Les deux solutions linéairement indépendantes sont $f_k\left(\overrightarrow{r},t\right)$ et $f_k^*\left(r,t\right)$ avec

$$f_k\left(\overrightarrow{r},t\right) = Ne^{i\left(k_0 t - \overrightarrow{k}\,\overrightarrow{r}\right)} \tag{2.32}$$

où $k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$et N est une constant de normalisation qui peut se déterminer à partir de la condition

$$f_k^* \dot{f}_k - \dot{f}_k^* f_k = 2i \tag{2.33}$$

qui exprime la conservation du courant

La solution générale de l'équation de Klein Gordon est donc

$$\varphi\left(\overrightarrow{r},t\right) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}[A_k f\left(\overrightarrow{r},t\right) + B_k^* f_k^*\left(\overrightarrow{r},t\right)] \tag{2.34}$$

et

$$\varphi^*\left(\overrightarrow{r},t\right) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}[B_K f_k\left(\overrightarrow{r},t\right) + A_K^* f_k^*\left(\overrightarrow{r},t\right)] \tag{2.35}$$

où les amplitudes A_k et B_k sont de fonctions du vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$.

Les moment conjugués associés aux champs $\varphi\left(\overrightarrow{r},t\right)$ et $\varphi^*\left(\overrightarrow{r},t\right)$ sont donnés par

$$\begin{cases} \pi_\varphi = i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k_0 N\left[A_K e^{i\left(k_0 t - \overrightarrow{k}\,\overrightarrow{r}\right)} - B_K^* e^{-i\left(k_0 t - \overrightarrow{k}\,\overrightarrow{r}\right)}\right] \\ \pi_\varphi^* = i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k_0 N\left[B_K f_k e^{i\left(k_0 t - \overrightarrow{k}\,\overrightarrow{r}\right)} - A_k^* f_k^* e^{-i\left(k_0 t - \overrightarrow{k}\,\overrightarrow{r}\right)}\right] \end{cases} \tag{2.36}$$

D'après la procédure de quantification, les opérateurs $\hat{\varphi}\left(\overrightarrow{r},t\right), \hat{\pi}(\overrightarrow{r'},t)$ vérifient les relations de commutation suivantes

$$\left[\hat{\varphi}\left(\overrightarrow{r},t\right), \hat{\pi}(\overrightarrow{r'},t)\right] = i\delta\left(r - \overrightarrow{r'}\right) \tag{2.37}$$

et

$$\left[\hat{\varphi}\left(\overrightarrow{r},t\right), \hat{\varphi}(\overrightarrow{r'},t)\right] = \left[\hat{\pi}\left(\overrightarrow{r},t\right), \hat{\pi}(\overrightarrow{r'},t)\right] = 0 \tag{2.38}$$

Les champs $\varphi\left(\overrightarrow{r},t\right)$ et $\varphi^+\left(\overrightarrow{r},t\right)$ s'écrivent alors

$$\varphi\left(\overrightarrow{r},t\right) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}[a(\vec{k}) f\left(\overrightarrow{r},t\right) + b^+(\vec{k}) f_k^*\left(\overrightarrow{r},t\right)] \tag{2.39}$$

et

$$\varphi^+(\vec{r},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}[b(\vec{k})f_k(\vec{r},t) + a(\vec{k})f_k^*(\vec{r},t)] \tag{2.40}$$

où les opérateurs $a(\vec{k})$, $a^+(\vec{k})$, $b(\vec{k})$ et $b^+(\vec{k})$ vérifient les relation de commutation

$$\left[a\left(\vec{k}\right), a^+(\vec{k'})\right] = \left[b\left(\vec{k}\right), b^+(\vec{k'})\right] = (2\pi)^3\,\delta\left(\vec{k} - \vec{k'}\right) \tag{2.41}$$

et

$$\left[a\left(\vec{k}\right), b^+(\vec{k'})\right] = \left[a\left(\vec{k}\right), b\left(\vec{k}\right)\right] = 0 \tag{2.42}$$

Calculons maintenant le Hamiltonien du système. Par définition le Hamiltonien de ce système est donnée par

$$H = \int d^3x\,(\pi_\varphi\dot{\varphi} + \pi_{\varphi^*}\dot{\varphi}^* - \mathcal{L}) \tag{2.43}$$

Par un calcul explicite nous obtenons

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}k_0\left[a^+(k)\,a(k) + b(k)b^+(k)\right] \tag{2.44}$$

De la même manière, nous obtenons l'opérateur de charge

$$Q = i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[a^+(k)a(k) - b(k)b^+(k)\right] \tag{2.45}$$

Nous remarquons que H et Q sont diagonaux. Donc nous pouvons interpréter $a^+(\vec{k})$ et $a(\vec{k})$ comme des opérateurs de création et d'annihilation de particules et $b^+(\vec{k})$ et $b(\vec{k})$ comme des opérateurs de création et d'annihilation des antipartipaticules

Nous peuvent définir les opérateurs

$$N_a = \frac{1}{(2\pi)^3}a^+(k)a(k) \tag{2.46}$$

et

$$N_b = \frac{1}{(2\pi)^3}b^+(k)b(k) \tag{2.47}$$

qui représentent respectivement le nombre de particules et le nombre d'antiparticules par rapport au vide $|0\rangle$ défini par $N_a\,|0\rangle = 0$ et $N_b\,|0\rangle = 0$.

2.3.2 Champ scalaire complexe dans un espace courbe

Considérons maintenant le cas d'un champ scalaire complexe dans un espace courbe. La métrique de FRW

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)d\overrightarrow{x}^2 \tag{2.48}$$

Nous introduisons le temps conforme η avec $\eta = \int \frac{dt}{a(t)}$,la métrique de FRW devient

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - d\overrightarrow{x}^2) \tag{2.49}$$

où $a(\eta)$ est le facteur d'échelle qui indique la taille de l'univers à chaque instant.

L'action de système et donnée par

$$s = \int d^4x\sqrt{-g}\left[g_{\mu\nu}\partial_\mu\varphi^*\partial_\nu\varphi - (m^2 + \xi R\varphi^*\varphi\right] \tag{2.50}$$

où ξ est un paramètre numérique qui vaut dans le cas du couplage conforme

$$\xi = \frac{1}{4}\frac{d-2}{d-1} \tag{2.51}$$

Pour un espace-temps de quatre dimension nous avons

$$\xi = \frac{1}{6} \tag{2.52}$$

D'après le principe de moindre action, $\delta s = 0$, l'équation de mouvement du champ scalaire est

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\partial_\nu\varphi) + (m^2 + \frac{R}{6})\varphi = 0 \tag{2.53}$$

Si nous introduisons le champ $\psi\,(x,\eta)$ défini par

$$\varphi(r,\eta) = \frac{1}{a(\eta)}\psi\,(x,\eta) \tag{2.54}$$

nous obtenons

$$[\frac{d^2}{d\eta^2} - \triangle + a^2(\eta)(m^2 + \xi R) - \frac{a^{"}(\eta)}{a(\eta)}]\psi\,(x,\eta) = 0 \tag{2.55}$$

avec $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ et $a^{"}(\eta) = \frac{d^2a(t)}{d\eta^2}$. La grandeur scalaire R est le scalaire de Ricci défini par

$$R = 6\frac{a^{"}(\eta)}{a^3(\eta)} \tag{2.56}$$

Dans le cas du couplage conforme l'équation de Klein Gordon devient

$$\left[\frac{d^2}{d\eta^2} - \triangle + a^2(\eta)m^2\right]\psi\,(x,\eta) = 0 \tag{2.57}$$

Maintenant nous faisons la décomposition

$$\psi(x,\eta) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \varkappa_k(\vec{x}) u_k(\eta) \tag{2.58}$$

où $\varkappa_k(\vec{x})$ est la fonction propre de l'operateur $\triangle$ avec la valeur propre $-\lambda_k^2$

$$\left(\triangle + \lambda_k^2\right) \varkappa_k(\vec{x}) = 0 \tag{2.59}$$

Pour un espace plat les fonctions $\varkappa_k(\vec{x})$ sont des ondes planes et $\lambda_k^2 = \vec{k}^2$, avec

$$\int d\vec{x}\, \varkappa_k(\vec{x}) \varkappa_{k'}^*(\vec{x}) = \delta_{kk'} \tag{2.60}$$

La fonction $u_k(\eta)$ vérifie l'équation différentielle suivante

$$\left[\frac{d^2}{d\eta^2} + \omega^2\right] u_k(\eta) = 0 \tag{2.61}$$

avec

$$\omega^2 = k^2 + a^2(\eta) m^2.$$

Si $\varphi_k(\eta)$ et $\varphi_k^*(\eta)$ sont deux solutions qui vérifient la condition de normalisation

$$\varphi_k^*(\eta)\, \varphi_k'(\eta) - \varphi_k^{*'}(\eta)\, \varphi_k(\eta) = 2i, \tag{2.62}$$

la solution générale de (2.61) est

$$u_k(\eta) = a_k \varphi_k^*(\eta) + b_k^* \varphi_k(\eta) \tag{2.63}$$

En insérant l'équation (2.63) dans la décomposition (2.58), nous obtenons

$$\psi(x,\eta) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} [\varphi_k^*(\eta) \varkappa_k(\vec{x})\, a(k) + \varphi_k(\eta) \varkappa_k^*(\vec{x})\, b^*(k) \tag{2.64}$$

D'après la procédure de quantification nous avons pour le champ $\hat{\psi}(x,\eta)$

$$\hat{\psi}(x,\eta) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} [\varphi_k^+(\eta) \varkappa_k(\vec{x})\, \hat{a}(k) + \varphi_k^-(\eta) \varkappa_k^*(\vec{x})\, \hat{b}^+(k) \tag{2.65}$$

Dans ce cas son moment conjugué est

$$\hat{\pi}(x,\eta) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} [\dot{\varphi}_k^+(\eta) \varkappa_k^*(\vec{x})\, \hat{a}^+(k) + \dot{\varphi}_k^-(\eta) \varkappa_k(\vec{x})\, \hat{b}(k) \tag{2.66}$$

Par un calcul direct nous pouvons montrer que l'hamiltonien du système

$$H = \int dx^3 (\pi_\psi \psi' + \pi_{\psi^*} \psi'^* - \mathcal{L}) \tag{2.67}$$

peut s'écrire sous la forme

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x \left[E_k \left(\hat{a}^+ \left(\vec{k}\right) \hat{a} \left(\vec{k}\right) + \hat{b} \left(\vec{k}\right) \hat{b}^+ \left(\vec{k}\right) \right) + F_k^* b(\vec{k}) a(-\vec{k}) + F_k b^+(\vec{k}) a^+(-\vec{k}) \right] \tag{2.68}$$

avec

$$\begin{cases} E_k(\eta) = |\dot{\varphi}_k(\eta)|^2 + w^2(\eta) |\varphi_k(\eta)|^2 \\ F_k(\eta) = \dot{\varphi}_k^2(\eta) + w^2(\eta) \varphi_k^2(\eta) \end{cases} \tag{2.69}$$

On remarque que H n'est pas diagonal, il contient des termes mixtes. Pour une métrique asymptotiquement Minkowskienne le 1er couple $(\varphi^+_{k,in}(\eta), \varphi^-_{k,in}(\eta))$ qui rend H diagonal se comporte à $(-\infty)$ comme

$$(\varphi^+_{k,in}(\eta), \varphi^-_{k,in}(\eta)) = \left(e^{-i\omega_{in}\eta}, e^{i\omega_{in}\eta}\right) \tag{2.70}$$

avec

$$\omega_{in} = \sqrt{k^2 + m^2 a_1^2(\eta)}, a_1 = a(\eta \longrightarrow -\infty) \tag{2.71}$$

Ici nous avons

$$\lim_{\eta \longrightarrow -\infty} E_k = 2\omega_{in}^2 \tag{2.72}$$

$$\lim_{\eta \longrightarrow -\infty} F_k = 0 \tag{2.73}$$

et

$$H = \int d^3k \omega_{in}^2 \left[a^+_{in}(\eta) a_{in}(\eta) + b_{in}(\eta) b^+_{in}(\eta) \right] \tag{2.74}$$

Le 2eme couple $(\varphi^+_{k,out}(\eta), \varphi^-_{k,out}(\eta))$ qui rend H diagonal se comporte à $(+\infty)$ comme

$$(\varphi^+_k(\eta), \varphi^-_k(\eta)) = \left(e^{-i\omega_{out}\eta}, e^{i\omega_{out}\eta}\right) \tag{2.75}$$

avec

$$\omega_{out} = \sqrt{k^2 + m^2 a_2^2(\eta)}, a_2 = a(\eta \longrightarrow +\infty) \tag{2.76}$$

Nous avons alors

$$\lim_{\eta \longrightarrow +\infty} E_k = 2\omega_{in}^2 \tag{2.77}$$

$$\lim_{\eta \longrightarrow +\infty} F_k = 0 \tag{2.78}$$

et

$$H = \int d^3k\omega_{out}^2 \left[a_{out}^+(\eta)a_{out}(\eta) + b_{out}(\eta)b_{out}^+(\eta)\right] \tag{2.79}$$

La diagonalisation de H est possible si $\omega_k(\eta)$ varie d'une manière adiabatique au voisinage d'un instant η_0. Sachant que la condition d'adiabatique est donnée par [44]

$$\lim_{\eta\to\eta_0} \left|\frac{\omega_k'(\eta)}{\omega_k^2(\eta)}\right| << 1 \tag{2.80}$$

avec les fonction $\varphi_k^{\pm}(\eta)$ sont des solution de l'équation (2.61)

$$\varphi_k^{\pm}(\eta) \simeq \frac{1}{\sqrt{\omega_k(\eta)}} e^{\mp\int\omega_k(\eta)d\eta} \tag{2.81}$$

pour

$$E_k = 2\omega_k^2(\eta_0) \tag{2.82}$$

$$F_k = 0 \tag{2.83}$$

et

$$H = \int d^3k\omega_k^2(\eta_0)\left[a_k^+(\eta)a_k(\eta) + b_k(\eta)b_k^+(\eta)\right] \tag{2.84}$$

Le Hamiltonien est diagonal à l'instant $\eta = \eta_0$.C'est un état physique dit vide adiabatique

2.4 Création de particules

Comme l'ensemble $\{\varphi_{k,out}^+(\eta), \varphi_{k,out}^-(\eta)\}$ forme une base. Nous pouvons écrire les éléments du deuxième ensemble $\{\varphi_{k,in}^+(\eta), \varphi_{k,in}^-(\eta)\}$ comme combinaisons linéaires $\varphi_{k,out}^+(\eta)$ et $\varphi_{k,out}^-(\eta)$

$$\varphi_{in}^+(\eta) = \alpha_k\varphi_{out}^+(\eta) + \beta_k\varphi_{out}^-(\eta) \tag{2.85}$$

$$\varphi_{in}^-(\eta) = \alpha_k^*\varphi_{out}^-(\eta) + \beta_k^*\varphi_{out}^+(\eta) \tag{2.86}$$

où les coefficients de Bogoliubov vérifient la condition

$$\left|\alpha_{\vec{k}}\right|^2 - \left|\beta_{\vec{k}}\right|^2 = 1 \tag{2.87}$$

La relation entre les opérateurs de création et d'annihilation est

$$\hat{a}_{\vec{k},out} = \alpha_{\vec{k}}\hat{a}_{in} + \beta_{\vec{k}}\hat{b}_{\vec{k},in}^+ \tag{2.88}$$

$$\hat{a}_{\vec{k},out}^+ = \alpha_{\vec{k}}^*\hat{a}_{in}^+ + \beta_{\vec{k}}^*\hat{b}_{\vec{k},in} \tag{2.89}$$

La densité des particules créées est par définition

$$\langle 0_{in} \left| b^{+}_{\vec{k},out} b_{\vec{k},out} \right| 0_{in} \rangle = \langle 0_{in} \left| a^{+}_{\vec{k},out} a_{\vec{k},out} \right| 0_{in} \rangle = \left| \beta_{\vec{k}} \right|^2 \tag{2.90}$$

Par conséquent, la probabilité de création de paires et la densité des particules créées seront données en termes de coefficients de Bogoliubov. En effet, à partir de l'amplitude

$$A = \langle 0_{out} \left| \hat{b}_{\vec{k},out} \hat{a}_{\vec{k},out} \right| 0_{in} \rangle \tag{2.91}$$

L'opérateur $\hat{b}_{\vec{k},out}$ peut s'écrire en fonction de $\hat{a}^{+}_{\vec{k},out}$ et $\hat{b}_{\vec{k},in}$ comme suit

$$\hat{b}_{\vec{k},out} = \frac{\beta_{\vec{K}}}{\alpha^{*}_{\vec{k}}} \hat{a}^{+}_{\vec{k},out} + \frac{1}{\alpha^{*}_{\vec{k}}} \hat{b}_{\vec{k},in} \tag{2.92}$$

L'amplitude devient

$$A = \frac{\beta_{\vec{k}}}{\alpha^{*}_{\vec{k}}} \langle 0_{out} | 0_{in} \rangle \tag{2.93}$$

Pour la probabilité de création d'une paire de particules, nous avons

$$p_{\vec{k}} = \frac{\left| \beta_{\vec{k}} \right|^2}{1 + \left| \beta_{\vec{k}} \right|^2} = \left| \frac{\beta_{\vec{k}}}{\alpha^{*}_{\vec{k}}} \right|^2 \tag{2.94}$$

2.5 Application :Espace de de-Sitter

2.5.1 Solution exacte de l'équation de Klein Gordon

Pour l'espace de de-Sitter, $a(t) = \frac{-1}{H\eta}$, l'équation de Klein Gordon devient

$$\left[\frac{d^2}{d\eta^2} - \triangle + \left(\frac{m^2}{H^2} + 12\zeta - 2 \right) \frac{1}{\eta^2} \right] \psi(\eta, x) = 0 \tag{2.95}$$

On fait le changement de variable $\eta = \frac{\rho}{k}$ et on pose

$$\psi(\eta, x) = \rho^{\frac{1}{2}} g(\rho) e^{i \vec{k} \vec{r}}$$

On trouve l'équation de Bessel [59]

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} + (1 - \frac{\lambda^2}{\rho^2}) \right] g(\rho) = 0 \tag{2.96}$$

où $\lambda^2 = \frac{1}{4} - \frac{m^2}{H^2} + 2 - 12\zeta$.

2.5.2 Etats "in" et "out" et création de particules

Si nous écrivons la solution de l'équation de Klein Gordon On fait le changement de variable .L'équation de mouvement s'écrit comme

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}}\hbar^2\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu v}\partial_v)+m^2\right]\varphi=0 \tag{2.97}$$

sous la forme $\varphi = e^{\frac{i}{\hbar}s}$, nous obtenons pour S l'équation de Hamilton-Jacobi

$$g^{\mu v}\partial_\mu S\partial_v S - m^2 = 0 \tag{2.98}$$

En écrivant S sous la forme

$$S = G(\eta) + \overrightarrow{k}\,\vec{x} \tag{2.99}$$

nous peuvons avoir

$$G(\eta) = \int\sqrt{k^2+\frac{m^2}{H^2\eta^2}}d\eta \tag{2.100}$$

Nous faisons maintenant le changement de variable $\eta = \frac{1}{u}$ pour obtenir

$$G(\eta) = -\frac{m}{H}\int\frac{\sqrt{\frac{k^2H^2}{m^2}+u^2}}{u^2}du \tag{2.101}$$

A l'aide de l'intégrale suivante [59]

$$\int\frac{\sqrt{b^2+u^2}}{u^2}du = -\frac{\sqrt{b^2+u^2}}{u}+\ln(u+\sqrt{b^2+u^2})+cst \tag{2.102}$$

nous obtenons

$$G(\eta) = -\left[-\frac{\sqrt{k^2+\frac{m^2}{H^2}u^2}}{u}+\frac{m}{H}\ln(u+\sqrt{\frac{k^2H^2}{m^2}+u^2})\right] \tag{2.103}$$

et, par conséquent,

$$G(\eta) = \sqrt{k^2\eta^2+\frac{m^2}{H^2}}+\ln(\frac{1}{\eta}+\sqrt{\frac{k^2H^2}{m^2}+\frac{1}{\eta^2}})^{-\frac{m}{H}} \tag{2.104}$$

Les états d'énergie positive et négative se comportent, alors, comme

$$\varphi_{in}^{\pm} = \lim_{\eta\to-\infty} e^{\mp\frac{i}{\hbar}G(\eta)} \sim e^{\pm ik\eta} \tag{2.105}$$

$$\varphi_{out}^{\pm} = \lim_{\eta\to 0} e^{\mp\frac{i}{\hbar}G(\eta)} \sim \eta^{\mp i\frac{m}{H}} \tag{2.106}$$

En utilisant le comportement des fonctions de Bessel

$$\begin{aligned} J_{\pm}(k\eta) &\approx \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}(k\eta)^{\pm\lambda} \\ H_{\lambda}^{(1,2)}(k\eta) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi k\eta}}e^{\pm\left(k\eta-\frac{\pi}{2}\eta-\frac{\pi}{4}\right)} \end{aligned} \tag{2.107}$$

nous obtenons la bonne définition des états "in" est "out"

$$\varphi_{in}^{+} = N_1 H_{\lambda}^{1}(K\eta) \tag{2.108}$$

$$\varphi_{in}^{-} = N_1^{*} H_{\lambda}^{2}(K\eta) \tag{2.109}$$

et

$$\varphi_{out}^{+} = N_2 J_{-\lambda}(K\eta)$$

$$\varphi_{out}^{-} = N_2^{*} J_{\lambda}(K\eta)$$

Maintenant, pour déterminer les coefficients de Bogoliubov nous utilisons les relations entre les fonctions de Bessel et les fonctions de Hankel [59]

$$\begin{aligned} H_{\lambda}^{(1)}(k\eta) &= \frac{J_{-\lambda}(k\eta)-e^{-i\lambda\pi}J_{\lambda}(k\eta)}{i\sin(\pi\lambda)} \\ H_{\lambda}^{(2)}(k\eta) &= \frac{e^{i\lambda\pi}J_{\lambda}(k\eta)-J_{-\lambda}(k\eta)}{i\sin(\pi\lambda)} \end{aligned} \tag{2.110}$$

Les coefficients de Bogoliubov sont alors

$$\alpha = \frac{N_1}{N_2}\frac{1}{\sinh(\pi\tilde{\lambda})} \tag{2.111}$$

$$\beta = -\frac{N_1}{N_2^{*}}\frac{e^{-\tilde{\lambda}\pi}}{\sinh(\pi\tilde{\lambda})} \tag{2.112}$$

où $\tilde{\lambda} = \sqrt{-\frac{1}{4}+\frac{m^2}{H^2}-2+12\zeta}$

La probabilité de création d'une paire de particules dans l'état $\overrightarrow{k}$ est donnée par

$$p_k = \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|^2 = e^{-2\tilde{\lambda}\pi}. \tag{2.113}$$

Pour la densité des particules crées nous avons

$$n(k) = |\beta|^2 = \frac{1}{e^{2\pi\tilde{\lambda}}-1}. \tag{2.114}$$

Il est à noter que p_K et $n(k)$ ne dépend pas du k

جامعة محمد الصديق بن يحيى - جيجل
مكتبة الكلية
-02-
كلية العلوم الدقيقة و الإعلام الآلي

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un bref rappel sur la théorie quantique des champs dans un espace courbe et nous avons montré comment obtenir la probabilité de création d'une paire de particule dans un univers en expansion ainsi que la densité des particules créées. Comme exemple d'illustration nous avons considéré l'espace de de-Sitter où l'équation de Klein Gordon admet des solutions exactes et analytiques. A partir des coefficients de Bogoliubov nous avons pu calculer la probabilité de création d'une paire de particules dans l'état $\overrightarrow{k}$ et la densité des particules créées. Nous avons remarqué que la densité de particules créées se ressemble à la distribution de Bose-Einstein.

Chapitre 3

Création de particules scalaires dans un univers de de-Sitter

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étudier l'effet du champ électrique sur la création, à partir du vide, de particules scalaires dans un univers de de-Sitter. En premier lieu, nous cherchons des solutions à l'équation de Klein Gordon. Comme les états d'énergie positive et négative se comportent comme les solutions semi-classique de l'équation d'Hamilton-Jacobi nous pouvons les solutions obtenues en états "in" et "out". A partir de la relation entre ces états nous calculons la probabilité de création d'une paire et la densité des particules créées.

3.2 Equation de Klein Gordon en présence champ électrique

Considérons maintenant un champ scalaire complexe en présence d'un champ électrique décrit par la jauge $A_\mu = (0, 0, 0, A_3)$ où

$$A_3(\eta) = -\frac{E_0}{H^2\eta}. \tag{3.1}$$

La dynamique de ce système est en général régie par l'équation de Klein-Gordon

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}(i\partial_\mu - eA_\mu)g^{\mu\upsilon}\sqrt{-g}(i\partial_\upsilon - eA_\upsilon)\psi - \left(m^2 + \zeta R\right)\psi = 0 \tag{3.2}$$

où R scalaire de Ricci et ζ est un paramètre numérique

En faisons la factorisation

$$\psi(\eta) = \frac{1}{a(\eta)}e^{i\vec{k}\vec{r}}\tilde{\varphi}(\eta) \tag{3.3}$$

nous obtenons l'équation

$$\left[\frac{d^2}{d\eta^2} + k^2 - 2ek_3\frac{E_0}{H^2\eta} + \frac{M^2}{H^2\eta^2}\right]\tilde{\varphi}(\eta) = 0 \tag{3.4}$$

avec

$$M = \sqrt{\tilde{m}^2 + \frac{e^2E_0^2}{H^2}} \tag{3.5}$$

Afin de résoudre cette équation, nous introduisons la nouvelle variable

$$\eta = \frac{i}{2k}\rho \tag{3.6}$$

L'équation résultante est de type Whittaker [59]

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{1}{4} + \frac{\lambda}{\rho} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{\rho^2}\right] \tilde{\varphi}(\rho) = 0 \tag{3.7}$$

où $\tilde{\varphi}(\rho) \equiv \tilde{\varphi}(\eta)$ et les constantes μ et λ sont donnés par

$$\mu = i\sqrt{\left(\frac{M}{H}\right)^2 - \frac{1}{4}} = i\,\tilde{\mu} \tag{3.8}$$

$$\lambda = -ie\frac{k_z}{k}\frac{E_0}{H^2} = i\tilde{\lambda}. \tag{3.9}$$

L'équation de Whittaker admet comme solutions linéairement indépendantes les fonctions de Whittaker suivantes [60]

$$M_{\lambda,\mu}(\rho) = \rho^{\mu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{\rho}{2}} M(\mu - \lambda + \frac{1}{2}, 2\mu + 1; \rho) \tag{3.10}$$

$$W_{\lambda,\mu}(\rho) = \rho^{\mu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{\rho}{2}} U(\mu - \lambda + \frac{1}{2}, 2\mu + 1; \rho) \tag{3.11}$$

où $M(a, b, \rho)$ et $U(a, b, \rho)$ sont les fonctions de Kummer. Il est bien connu que les fonctions de Whittaker ont le comportement suivant

$$W_{\lambda,\mu}(\rho)_{\rho\to-\infty} \sim e^{-\frac{\rho}{2}}(-\rho)^{\lambda} \tag{3.12}$$

et

$$M_{\lambda,\mu}(\rho)_{\rho\to 0} \sim e^{-\frac{\rho}{2}}(\rho)^{\mu+1}. \tag{3.13}$$

3.3 Choix des état" in"et "out"

Les états "in" et "out" sont choisis en fonction du comportement asymptotique de la solution semi-classique construite par l'utilisation de l'approximation WKB à partir des solutions de l'équation relativiste de Hamilton-Jacobi. Nous donnons la solution analytique de l'équation H-J

$$g^{\mu\upsilon}(\partial_\mu S + eA_\mu)(\partial_\upsilon S + eA_\upsilon) - m^2 = 0 \tag{3.14}$$

où S est l'action du système. Si nous écrivons S sous la forme

$$S = G(\eta) + \vec{k}\vec{x} \tag{3.15}$$

nous obtenons

$$G(\eta) = \int d\eta \sqrt{k_\perp^2 + (k_z + \frac{eE_0}{H^2\eta})^2 + \frac{m^2}{H^2\eta^2}} \tag{3.16}$$

avec $k_\perp = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$

A l'aide de l'intégrale suivante

$$\int \frac{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}}{x} = \sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2} - \sqrt{\alpha} \arg\sinh\left(\frac{2\alpha + \beta x}{x\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}}\right) + \frac{\beta}{2}\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \arg\sinh\left(\frac{2\gamma x + \beta}{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}}\right) \tag{3.17}$$

où α, β et γ sont des nombres réels, avec $\gamma \rangle 0$ et $4\alpha\gamma - \beta^2 \rangle 0$, il vient que

$$G(\eta) = \sqrt{k^2\eta^2 + 2k_z\frac{eE_0}{H^2}\eta + \frac{M^2}{H^2}} \tag{3.18}$$

$$-\frac{M}{H}\ln\left[\frac{\frac{M^2}{H^2} + \frac{eE_0}{H^2}K_z\eta}{\eta\sqrt{\frac{M^2}{H^2}k^2 - \frac{e^2E_0^2}{H^4}K_z^2}} + \sqrt{\left(\frac{\frac{M^2}{H^2} + \frac{eE_0}{H^2}K_z\eta}{\eta\sqrt{\frac{M^2}{H^2}k^2 - \frac{e^2E_0^2}{H^4}K_z^2}}\right)^2 + 1}\right]$$

$$+\frac{eE_0}{H^2}k_z\ln\left[\frac{k^2\eta + \frac{eE_0}{H^2}K_z}{\sqrt{\frac{M^2}{H^2}k^2 - \frac{e^2E_0^2}{H^4}K_z^2}} + \sqrt{\left(\frac{k^2\eta + \frac{cE_0}{H^2}K_z}{\sqrt{\frac{M^2}{H^2}k^2 - \frac{c^2E_0^2}{H^4}K_z^2}}\right)^2 + 1}\right]$$

Nous pouvons voir que

$$G(\eta) \sim \begin{cases} -\frac{M}{H}\ln(-\eta) + c^{st} \; pour \quad \eta \to 0 \\ k\eta + c^{st} pour \quad \eta \to -\infty \end{cases} \tag{3.19}$$

Les solutions $\varphi_{out}^{\pm}$ et $\varphi_{in}^{\pm}$ doivent se comporter comme suit

$$\varphi_{out}^{\pm} = \lim_{\eta \to 0} e^{\mp\frac{i}{\hbar}G(\eta)} \tag{3.20}$$

$$\varphi_{in}^{\pm} = \lim_{\eta \to -\infty} e^{\mp\frac{i}{\hbar}G(\eta)} \tag{3.21}$$

Nous avons alors les états "in"

$$\varphi_{in}^{+} = N_{in} w_{-\lambda,\mu}(-\rho) \tag{3.22}$$

$$\varphi_{in}^{-} = N_{in}^{*} w_{\lambda,\mu}(\rho) \tag{3.23}$$

et les états "out"

$$\varphi_{out}^{+} = N_{out} M_{\lambda,-\mu}(\rho) \tag{3.24}$$

$$\varphi_{out}^{-} = N_{out}^{*} M_{-\lambda,\mu}(-\rho). \tag{3.25}$$

3.4 Création des particules

Maintenant, pour déterminer la probabilité de création de paires particules et la densité des particules créées, nous utilisons la transformation de bogoliubov reliant les états «in» et «out». La relation entre ces états peut être obtenue par utilisation de la relation entre la fonction whittaker

$$M_{\lambda,\mu}(\rho) = [\frac{\Gamma(2\mu-1)e^{-i\pi\lambda}}{\Gamma(\mu-\lambda+\frac{1}{2})}W_{-\lambda,\mu}(-\rho) + \frac{\Gamma(2\mu+1)e^{i\pi(\mu-\lambda+\frac{1}{2})}}{\Gamma(\mu+\lambda+\frac{1}{2})}W_{\lambda,\mu}(\rho)] \tag{3.26}$$

avec $-\frac{\pi}{2} < \arg\rho < \frac{3\pi}{2}$ et $2\mu \neq -1, -2, ...$

Tenant compte du fait que $W_{\lambda,\mu}(\rho) = W_{\lambda,-\mu}(\rho)$, les fonctions $\varphi^{+}_{out}(\eta)$ et $\varphi^{+}_{out}(\eta)$ peuvent être exprimé en termes de $\varphi^{+}_{in}(\eta)$ et $\varphi^{+}_{in}(\eta)$

$$\varphi^{+}_{in}(\eta) = \alpha_k\varphi^{+}_{out}(\eta) + \beta_k\varphi^{-}_{out}(\eta) \tag{3.27}$$

$$\varphi^{-}_{in}(\eta) = \alpha^{*}_k\varphi^{-}_{out}(\eta) + \beta^{*}_k\varphi^{+}_{out}(\eta) \tag{3.28}$$

où les coefficients de Bogoliubov sont donnés par

$$\alpha = \frac{N_{out}}{N_{in}}\frac{\Gamma(1+i2\tilde{\mu})e^{\pi\tilde{\lambda}}}{\Gamma(\frac{1}{2}+i(\tilde{\mu}-\tilde{\lambda}))} \tag{3.29}$$

$$\beta = i\frac{N_{out}}{N^{*}_{in}}\frac{\Gamma(1+2i\tilde{\mu})e^{-\pi(\tilde{\mu}-\tilde{\lambda})}}{\Gamma(\frac{1}{2}+i(\tilde{\mu}+\tilde{\lambda}))} \tag{3.30}$$

avec la condition

$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \tag{3.31}$$

La probabilité de création d'une paire de particules dans l'état $\overrightarrow{k}$ est alors

$$p_k = \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|^2 = \left|\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+i(\tilde{\mu}-\tilde{\lambda}))}{\Gamma(\frac{1}{2}+i(\tilde{\mu}+\tilde{\lambda}))}\right|^2 e^{-2\pi|\tilde{\mu}|} \tag{3.32}$$

Compte tenu de la propriété de la fonction gamma

$$\left|\Gamma(\frac{1}{2}+ix)\right|^2 = \frac{\pi}{\cosh \pi x} \tag{3.33}$$

Nous obtenons

$$p_k = \frac{\cosh(|\tilde{\mu}| - \frac{k_z}{k}\frac{eE_0}{H^2})}{\cosh(|\tilde{\mu}| + \frac{k_z}{k}\frac{eE_0}{H^2})}e^{-2\pi|\tilde{\mu}|} \tag{3.34}$$

Pour la densité des particules créées nous avons

$$n(k) = |\beta|^2 \tag{3.35}$$

Comme $\left|\alpha_{\vec{k}}\right|^2 + \left|\beta_{\vec{k}}\right|^2 = 1$, nous pouvons écrire

$$n(k) = \frac{\cos\pi\left(|\tilde{\mu}| - \frac{k_z}{k}\frac{eE_0}{H^2}\right)e^{-2\pi|\tilde{\mu}|}}{\cos\pi\left(|\tilde{\mu}| + \frac{k_z}{k}\frac{eE_0}{H^2}\right) - \cos\pi\left(|\tilde{\mu}| - \frac{k_z}{k}\frac{eE_0}{H^2}\right)e^{-2\pi|\tilde{\mu}|}} \tag{3.36}$$

On remarque que p_k et $n(k)$ dépendent de l'orientation de $\vec{k}$

Puisque la création de particules est bien définie seulement dans la limite adiabatique, $M >> H$, la densité des particules créées se comporte comme

$$n(k) = \exp\left[-2\pi\left(|\mu| + \frac{k_z}{k}\frac{eE_0}{H^2}\right)\right] \tag{3.37}$$

Ce qui n'est rien d'autre que la distribution de Boltzmann. Ceci explique la nature thermique de l'effet. De plus, il résulte de (3.36) et (3.37)que le champ électrique amplifie de manière significative la création de particules.

A la fin de cette section, examinons la limite $H \to 0$ où l'espace de de-Sitter se réduit à l'espace-temps plat de Minkowski.Tenant compte du fait que $\frac{M}{H} - \frac{eE_0}{H^2} \approx \frac{m^2}{2eE_0}$, pour le petit H, on obtient facilement

$$p_k = \frac{e^{-\pi\frac{m^2+k_\perp^2}{eE_0}}}{1 - e^{-\pi\frac{m^2+k_\perp^2}{eE_0}}}$$

et

$$n(k) = e^{-\pi\frac{m^2+k_\perp^2}{eE_0}}$$

3.5 Action effective de Schwinger

Le nombre des particules créés est

$$n(K) = \frac{\cosh\left[\pi\left(|\tilde{\mu}| - \frac{eE_0}{H^2}\frac{k_z}{k}\right)\right]}{\cosh\left[\pi\left(|\tilde{\mu}| + \frac{eE_0}{H^2}\frac{k_z}{k}\right)\right]e^{-2\pi|\tilde{\mu}|} - \cosh\left[\pi\left(|\tilde{\mu}| - \frac{eE_0}{H^2}\frac{k_z}{k}\right)\right]} \tag{3.38}$$

A cause de la condition $M >> H$, la densité des particules créés se comporte comme

$$n(K) = e^{2\pi\left(|\tilde{\mu}| - \frac{eE_0}{H^2}\frac{k_z}{k}\right)} \tag{3.39}$$

L'amplitude de transition vide-vide donnée par

$$\langle vid|\, vid\rangle = e^{iS_{eff}} \tag{3.40}$$

جامعة محمد الصديق بن يحي - جيجل
مكتبة الكلية
-02-
كلية العلوم الدقيقة و الإعلام الآلي

Soit $c_{\vec{k}}$ la probabilité pour qu'il n'y ait pas de création de paires dans l'état $\vec{k}$.

La quantité $C_{\vec{k}}\left(p_{\vec{k}}\right)^n$ est la probabilité de avoir créé seulement n paires dans l'état $\vec{k}$.

$$\sum_n C_{\vec{k}}\left(p_{\vec{k}}\right)^n = 1 \tag{3.41}$$

Ce qui implique que

$$c_k = 1 - p_k = \frac{1}{|\alpha|^2} \tag{3.42}$$

La probabilité de transition vide-vide est donc

$$|\langle vid|\, vid\rangle|^2 = e^{-2\,\mathrm{Im}\,S_{eff}} = \prod_k c_k = e^{\sum_k \ln c_k} \tag{3.43}$$

La partie imaginaire de l'action effective de Schwinger est

$$2\,\mathrm{Im}\,S_{eff} = -\sum_k \ln c_k = \sum_k \ln\left(1 + |\beta_k|^2\right) \tag{3.44}$$

Utilisons le développement de Taylor

$$\ln\left(1 + |\beta_k|^2\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} |\beta_k|^{2n} \tag{3.45}$$

En remplace la somme sur k par l'intégrale suivant

$$\sum_k \rightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{V}{a^3(t)} \tag{3.46}$$

L'action effective de Schwinger devient

$$2\,\mathrm{Im}\,S_{eff} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{V}{a^3(t)} e^{2\pi n\left(|\vec{\mu}| - \frac{eE_0}{H^2}\frac{k_z}{k}\right)} \tag{3.47}$$

Nous faisons $d^3k = k^2 dk \sin\theta d\theta d\varphi$ et en pose $\frac{k_z}{k} = \cos\theta$. Nous obtenons

$$2\,\mathrm{Im}\,S_{eff} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \int_0^{+\infty} \frac{k^2 dk}{(2\pi)^2} \frac{V}{a^3(t)} \frac{H^2}{\pi n e E_0} e^{2\pi n|\vec{\mu}|} \sinh\left(2\pi n \frac{eE_0}{H^2}\right) \tag{3.48}$$

Pour éliminer la divergence , nous définissons le lagrangien effective avec

$$2\,\mathrm{Im}\,S_{eff} = \int d^3x dt\; 2\,\mathrm{Im}\,L_{eff} \tag{3.49}$$

où $\mathrm{Im}\,L_{eff}$ est la probabilité de création par unité du temps et par unité de volume

$$\int dt\;\mathrm{Im}\,L_{eff} = \int_0^{+\infty} k^2 dk \frac{H^2}{(2\pi)^2 eE_0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \frac{e^{2\pi n|\vec{\mu}|}}{a^3(t)} \sinh\left(2\pi n \frac{eE_0}{H^2}\right) \tag{3.50}$$

Nous cherchons une condition pour la quelle $M(a,b;\rho) \simeq 1$.La définition du fonction de Kummer [60]

$$M(a,b;\rho) = 1 + \frac{a}{1}\frac{\rho}{b} + \frac{a(a+1)}{1*2}\frac{\rho^2}{b(b+1)} + \frac{a(a+1)(a+2)}{1*2*3}\frac{\rho^3}{b(b+1)(b+2)} + ... \tag{3.51}$$

Pour une valeur finie de ρ, $M(a,b;\rho) \simeq 1$ seulement si $\left|\frac{\rho}{b}\right| \ll 1$.Nous avons alors

$$|\rho| \ll |2\mu + 1| \tag{3.52}$$

Nous pouvons voir que la notion de particules ne peut avoir un sens que si

$$|k| \ll Me^{H\eta} \tag{3.53}$$

Alors la partie imaginaire de Lagrangien effectif de Schwinger s'écrit sous la forme

$$\operatorname{Im} L_{eff} = \frac{M^3H^3}{eE_0(2\pi)^3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}e^{-2\pi n|\tilde{\mu}|}\sinh\left(2\pi n\frac{eE_0}{H^2}\right) \tag{3.54}$$

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié l'effet du champ électrique sur la création de particules scalaire dans un univers de de-Sitter. Nous avons considéré la méthode canonique basée sur la transformation de Bogoliubov reliant les états "in" aux états "out". Les résultats essentiels de cette étude sont :

1) Les quantités p_k et $n(k)$ dépendent seulement de l'orientation de $\vec{k}$

2) Le champ électrique amplifie la densité des particules créées.

Chapitre 4

Création de particules de spin $\frac{1}{2}$ dans un univers de de-Sitter

4.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'étudier l'effet du champ électrique sur la création de particules de spin 1/2 à partir du vide dans l'espace de-Sitter. En premier lieu, nous cherchons des solutions exactes à l'équation de Dirac avec un champ électrique. A l'aide de la transformation de Bogoliubov nous calculons la probabilité de création de paires particules et la densité de particules créées.

4.2 Equation de Dirac en présence d'un champ électrique

Considérons un fermion de spin $\frac{1}{2}$ de mass m et de charge e .L'équation covariante de Dirac avec la métrique (2.49) prend la forme

$$[i\tilde{\gamma}^{\mu}(\partial_{\mu} + ieA_{\mu} - \Gamma_{\mu}) - m]\,\psi = 0 \tag{4.1}$$

où les matrices de Dirac $\tilde{\gamma}^{\mu}$ dépendant de la courbure sont données en jauge de tétrade diagonale par

$$\tilde{\gamma}^{0} = \frac{1}{a(\eta)}\gamma^{0} \tag{4.2}$$

et

$$\tilde{\gamma}^{i} = \frac{1}{a(\eta)}\gamma^{i} \tag{4.3}$$

avec γ^0 et γ^i sont les matrices habituelles de Dirac qui peuvent être écrites dans un espace de Minkowski

$$\gamma^{0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

$$\gamma^{i} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{i} \\ -\sigma^{i} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

et Γ_i sont les connexions de spin définies à l'aide des symboles de Christoffel Γ^{β}_{vi}

$$\Gamma_{i} = -\frac{1}{8}g_{\alpha\beta}\Gamma^{\beta}_{vi}\,[\tilde{\gamma}^{\alpha}, \tilde{\gamma}^{v}] \tag{4.6}$$

Les seuls symboles de Christoffel non-nuls sont

$$\Gamma^{0}_{00} = \frac{a^{'}(\eta)}{a(\eta)} \tag{4.7}$$

$$\Gamma^i_{0j} = \Gamma^0_{ij} = \frac{a'(\eta)}{a(\eta)}\delta_{ij} \tag{4.8}$$

Par un calcul simple nous obtenons

$$\Gamma_0 = 0 \tag{4.9}$$

$$\Gamma_i = -\frac{1}{2}\frac{a'(\eta)}{a(\eta)}\gamma^0\gamma^i \tag{4.10}$$

Nous choisissons la jauge $A_\mu = (0;0;0;A_3)$ où

$$A_3 = -E_0 f(\eta) \tag{4.11}$$

En effectuant la factorisation

$$\psi = a^{-\frac{3}{2}}(\eta)\chi(\eta, x) \tag{4.12}$$

Nous obtenons l'équation la plus simple

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu) - ma(\eta)]\chi(\eta, x) = 0 \tag{4.13}$$

Afin de résoudre cette équation, nous écrivons, au début, $\chi(\eta, x) = e^{ik\vec{x}}\gamma^0\gamma^3\tilde{\xi}$ .Nous pouvons écrire l'équation de Dirac sous la forme

$$\hat{D}\tilde{\xi} = \hat{K}\tilde{\xi} \tag{4.14}$$

où les opérateurs linéaires $\hat{D}$ et $\hat{k}$ sont donnés par

$$\hat{D} = i\gamma^3\frac{d}{d\eta} - (k_z - eA_z)\gamma^0 - ma(\eta)\gamma^0\gamma^3 \tag{4.15}$$

$$\hat{K} = (k_x\gamma^1 + k_y\gamma^2)\gamma^0\gamma^3 \tag{4.16}$$

Ici, nous pouvons montrer que

$$\left[\hat{D}, \hat{K}\right] = 0 \tag{4.17}$$

et

$$k^2 = -(k_x^2 + k_y^2) = -k_\perp^2$$

En écrivant le vecteur propre de K sous la forme

$$\tilde{\xi} = \begin{pmatrix} \tilde{\xi}_1(\eta)\chi_1 \\ \tilde{\xi}_2(\eta)\sigma_3\chi_1 \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

Nous pouvons montrer que $\tilde{\xi}_1$ et $\tilde{\xi}_2$ vérifient les deux équations

$$(i\frac{d}{d\eta} - ma(\eta))\tilde{\xi}_2 = [(k_z - eA_z) + isk_\perp]\,\tilde{\xi}_1 \tag{4.19}$$

$$(i\frac{d}{d\eta} + ma(\eta))\tilde{\xi}_1 = [(k_z - eA_z) - isk_\perp]\,\tilde{\xi}_2 \tag{4.20}$$

On remarque que les coefficient de couplage $[(k_z - eA_z) \pm isk_\perp]$ dépend du temps conforme et la procédure d'interaction habituelle conduit à une équation du second ordre compliquée qui fait ne pas admettre des solutions bien connues. Pour simplifier le problème, introduisons la transformation unitaire

$$\begin{pmatrix} \tilde{\xi}_1 \\ \tilde{\xi}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ -\tau & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

où

$$\tau = -\frac{a_0}{eE_0}(M - m) \tag{4.22}$$

et

$$M = \sqrt{m^2 + \frac{e^2E_0^2}{a_0^2}} \tag{4.23}$$

Nous avons alors un système de deux équations différentielles de premier ordre couplées

$$\begin{cases} \left[i\frac{d}{d\eta} - \frac{m^2}{M}a_0 f(\eta) + \frac{eE_0}{a_0M}k_z - \frac{e^2E_0^2}{a_0M}f(\eta)\right]\varphi_2 = \left[\frac{m}{M}k_z + isk_\perp\right]\varphi_1 \\ \left[i\frac{d}{d\eta} + \frac{m^2}{M}a_0 f(\eta) - \frac{eE_0}{a_0M}k_z + \frac{e^2E_0^2}{a_0M}f(\eta)\right]\varphi_1 = \left[\frac{m}{M}k_z - isk_\perp\right]\varphi_2 \end{cases} \tag{4.24}$$

Par interaction nous obtenons pour chaque composante une équation différentielle du second ordre

$$\left[\frac{d^2}{d\eta^2} \mp ia_0Mf'(\eta) + a_0^2M^2f^2(\eta) - 2eE_0K_zf(\eta) + k^2\right]\varphi_{1,2} = 0 \tag{4.25}$$

qui admet une solution simple et analytique. Il est à noter, que l'équation (4.25) peut s'écrire sous la forme $\varphi_s''(\eta) + \omega_s^2(\eta)\,\varphi_s(\eta) = 0$ où

$$\omega_s^2(\eta) = \mp ia_0Mf'(\eta) + a_0^2M^2f^2(\eta) - 2eE_0K_zf(\eta) + k^2 \tag{4.26}$$

ce qui montre que la création de particules est bien définie seulement dans la limite adiabatique (2.80).

Nous obtenons alors les composantes $\varphi^{\pm}_{2,in}$ et $\varphi^{\pm}_{2,out}$ comme

$$\varphi^{+}_{2,in} = \frac{1}{\left[k_z\frac{m}{M} - isk_\perp\right]}(k - \frac{eE_0K_z}{MH})W_{-\lambda,\mu-1}(-\rho) \tag{4.39}$$

$$\varphi^{-}_{2,in} = \frac{-1}{\left[k_z\frac{m}{M} - isk_\perp\right]}(k + \frac{eE_0K_z}{MH})W_{\lambda,\mu-1}(\rho) \tag{4.40}$$

$$\varphi^{+}_{2,out} = \frac{-4k}{\left[k_z\frac{m}{M} - isk_\perp\right]}\left(\frac{1}{2} + i\frac{M}{H}\right)M_{-\lambda,\mu-1}(-\rho) \tag{4.41}$$

$$\varphi^{-}_{2,out} = \frac{k}{4\left[k_z\frac{m}{M} - isk_\perp\right]}\frac{(1 - \frac{e^2E_0^2k_z^2}{M^2H^2k^2})}{(\frac{1}{2} - i\frac{M}{H})}M_{\lambda,-\mu+1}(\rho) \tag{4.42}$$

Alors, les spineurs de Dirac correspondant aux états d'énergie positive et négative sont donnée par

$$\begin{pmatrix} \tilde{\xi}^{+}_{1,in}\chi_1 \\ \tilde{\xi}^{+}_{2,in}\sigma_3\chi_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}\begin{pmatrix} \left[1W_{-\lambda,\mu}(-\rho) + \tau\frac{1}{\left[k_z\frac{m}{M} - isk_\perp\right]}(k - \frac{eE_0K_z}{MH})W_{-\lambda,\mu-1}(-\rho)\right]\chi_1 \\ \left[-\tau W_{-\lambda,\mu}(-\rho) + \frac{1}{\left[k_z\frac{m}{M} - isk_\perp\right]}(k - \frac{eE_0K_z}{MH})W_{-\lambda,\mu-1}(-\rho)\right]\sigma_3\chi_1 \end{pmatrix} \tag{4.43}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\xi}^{-}_{1,in}\chi_1 \\ \tilde{\xi}^{-}_{2,in}\sigma_3\chi_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}\begin{pmatrix} \left[1W_{\lambda,\mu}(\rho) - \tau\frac{1}{\left[k_z\frac{m}{M} - isk_\perp\right]}(k + \frac{eE_0K_z}{MH})W_{\lambda,\mu-1}(\rho)\right]\chi_1 \\ \left[-\tau W_{\lambda,\mu}(\rho) - \frac{1}{\left[k_z\frac{m}{M} - isk_\perp\right]}(k + \frac{eE_0K_z}{MH})W_{\lambda,\mu-1}(\rho)\right]\sigma_3\chi_1 \end{pmatrix} \tag{4.44}$$

et

$$\begin{pmatrix} \tilde{\xi}^{+}_{1,out}\chi_1 \\ \tilde{\xi}^{+}_{2,out}\sigma_3\chi_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}\begin{pmatrix} \left[1M_{-\lambda,\mu}(-\rho) - \tau\frac{4k}{\left[k_z\frac{m}{M} - isk_\perp\right]}\left(\frac{1}{2} + i\frac{M}{H}\right)M_{-\lambda,\mu-1}(-\rho)\right]\chi_1 \\ \left[-\tau M_{-\lambda,\mu}(-\rho) - \frac{4k}{\left[k_z\frac{m}{M} - isk_\perp\right]}\left(\frac{1}{2} + i\frac{M}{H}\right)M_{-\lambda,\mu-1}(-\rho)\right]\sigma_3\chi_1 \end{pmatrix} \tag{4.45}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\xi}^{-}_{1,out}\chi_1 \\ \tilde{\xi}^{-}_{2,out}\sigma_3\chi_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}\begin{pmatrix} \left[1M_{\lambda,-\mu}(\rho) + \tau\frac{k}{4\left[k_z\frac{m}{M} - isk_\perp\right]}\frac{(1 - \frac{e^2E_0^2k_z^2}{M^2H^2k^2})}{(\frac{1}{2} - i\frac{M}{H})}M_{\lambda,-\mu+1}(\rho)\right]\chi_1 \\ \left[-\tau M_{\lambda,-\mu}(\rho) + 1\frac{k}{4\left[k_z\frac{m}{M} - isk_\perp\right]}\frac{(1 - \frac{e^2E_0^2k_z^2}{M^2H^2k^2})}{(\frac{1}{2} - i\frac{M}{H})}M_{\lambda,-\mu+1}(\rho)\right]\sigma_3\chi_1 \end{pmatrix} \tag{4.46}$$

Alors

$$\begin{pmatrix} \tilde{\xi}^{+}_{1,in}\chi_1 \\ \tilde{\xi}^{+}_{2,in}\sigma_3\chi_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}\begin{pmatrix} \left[\sqrt{\frac{kM + k_z\frac{eE_0}{H}}{mk_z + isMk_\perp}}W_{-\lambda,\mu}(-\rho) + \tau\sqrt{\frac{kM - k_z\frac{eE_0}{H}}{mk_z - isMk_\perp}}W_{-\lambda,1-\mu}(-\rho)\right]\chi_1 \\ \left[-\tau\sqrt{\frac{kM + k_z\frac{eE_0}{H}}{mk_z + isMk_\perp}}W_{-\lambda,\mu}(-\rho) + \sqrt{\frac{kM - k_z\frac{eE_0}{H}}{mk_z - isMk_\perp}}W_{-\lambda,1-\mu}(-\rho)\right]\sigma_3\chi_1 \end{pmatrix} \tag{4.47}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\xi}^{-}_{1,in}(s,\eta)\chi_1 \\ \tilde{\xi}^{-}_{2,in}(s,\eta)\sigma_3\chi_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} \begin{pmatrix} \left[\sqrt{\frac{kM-k_z\frac{eE_0}{H}}{mk_z+isMk_\perp}}W_{\lambda,\mu}(\rho) - \tau\sqrt{\frac{kM+k_z\frac{eE_0}{H}}{mk_z-isMk_\perp}}W_{\lambda,1-\mu}(\rho)\right]\chi_1 \\ \left[-\tau\sqrt{\frac{kM-k_z\frac{eE_0}{H}}{mk_z+isMk_\perp}}W_{\lambda,\mu}(\rho) - \sqrt{\frac{kM+k_z\frac{eE_0}{H}}{mk_z-isMk_\perp}}W_{\lambda,1-\mu}(\rho)\right]\sigma_3\chi_1 \end{pmatrix} \tag{4.48}$$

Ces états sont reliés l'une à l'autre par la conjugaison de charge

$$\xi \to \xi^c = \gamma^2\xi^* \tag{4.49}$$

De plus, les solutions d'énergie positive et négative satisfont la relation d'orthogonalité suivante

$$\bar{\xi}^{+}\xi^{-} = \bar{\xi}^{-}\xi^{+} = 0. \tag{4.50}$$

4.3 Création des particules

La relation entre ces états peut être obtenue par utilisation de la relation entre la fonction whittaker(3.26)

La fonction $\tilde{\xi}^{+}_{out}(\eta)$ et $\tilde{\xi}^{+}_{out}(\eta)$ peut être ensuite exprimé en termes de $\tilde{\xi}^{+}_{in}(\eta)$ et $\tilde{\xi}^{+}_{in}(\eta)$ comme suit

$$\tilde{\xi}^{+}_{s,\vec{k},out}(\eta) = \alpha_{s,\vec{k}}\tilde{\xi}^{+}_{s,\vec{k},in}(\eta) + \beta_{s,\vec{k}}\tilde{\xi}^{-}_{s,\vec{k},in}(\eta) \tag{4.51}$$

$$\tilde{\xi}^{-}_{s,\vec{k},out}(\eta) = \alpha^{*}_{s,\vec{k}}\tilde{\xi}^{-}_{s,\vec{k},in}(\eta) + \beta^{*}_{s,\vec{k}}\tilde{\xi}^{+}_{s,\vec{k},in}(\eta) \tag{4.52}$$

Nous pouvons montrer que les coefficients de Bogoliubov $\alpha_{s,\vec{k}}$ et $\beta_{s,\vec{k}}$ sont donnés par

$$\frac{\alpha_{s,\vec{k}}}{\beta_{s,\vec{k}}} = \frac{\Gamma\left(i\left(\frac{M}{H}+\frac{eE_0}{H^2}\frac{k_z}{k}\right)\right)}{\Gamma\left(i\left(\frac{M}{H}-\frac{eE_0}{H^2}\frac{k_z}{k}\right)\right)}\sqrt{\frac{kM+k_z\frac{eE_0}{H}}{kM-k_z\frac{eE_0}{H}}}e^{\pi\frac{M}{H}} \tag{4.53}$$

Sachant que les coefficients de Bogoliubov $\alpha_{s,\vec{k}}$ et $\beta_{s,\vec{k}}$ vérifient la condition

$$\left|\alpha_{s,\vec{k}}\right|^2 + \left|\beta_{s,\vec{k}}\right|^2 = 1 \tag{4.54}$$

Danc , il est possible de calculer la probabilité de création d'une paire de particules et la densité des particule créées dans l'état $\left(s,\vec{k}\right)$

La probabilité de création d'une paire de particules dans l'état $\left(s,\overrightarrow{k}\right)$, est donnée par

$$p_{s,\vec{k}} = \left|\frac{\beta_{s,\vec{k}}}{\alpha_{s,\vec{k}}}\right|^2 \tag{4.55}$$

جامعة محمد الصديق بن يحي - جيجل
مكتبة الكلية
02
كلية العلوم الدقيقة و الإعلام الآلي

Nous obtenons alors

$$p_{s,\vec{k}} = \left| \frac{\Gamma\left(i\left(\frac{M}{H} - \frac{eE_0}{H^2}\frac{k_z}{k}\right)\right)}{\Gamma\left(i\left(\frac{M}{H} + \frac{eE_0}{H^2}\frac{k_z}{k}\right)\right)} \right|^2 \left(\frac{kM - k_z\frac{eE_0}{H}}{kM + k_z\frac{eE_0}{H}} \right) e^{-2\pi\frac{M}{H}} \tag{4.56}$$

Compte tenu la propriété de fonction gamma

$$\left|\Gamma\left(i\left(x\right)\right)\right|^2 = \frac{\pi}{x\sinh\left(\pi x\right)} \tag{4.57}$$

Nous avons le résultat suivant

$$p_{s,\vec{k}} = \frac{\sinh\left[\pi\left(\frac{M}{H} + \frac{eE_0}{H^2}\frac{k_z}{k}\right)\right]}{\sinh\left[\pi\left(\frac{M}{H} - \frac{eE_0}{H^2}\frac{k_z}{k}\right)\right]} e^{-2\pi\frac{M}{H}} \tag{4.58}$$

Par définition.Nous avons que la densité des particules créées est

$$n(s,\vec{k}) = \left|\beta_{s,\vec{k}}\right|^2 \tag{4.59}$$

comme $\left|\alpha_{s,\vec{k}}\right|^2 + \left|\beta_{s,\vec{k}}\right|^2 = 1$,nous pouvons écrire

$$n(s,\vec{k}) = \frac{\sinh\left[\pi\left(\frac{M}{H} + \frac{eE_0}{H^2}\frac{k_z}{k}\right)\right] e^{-2\pi\frac{M}{H}}}{\sinh\left[\pi\left(\frac{M}{H} - \frac{eE_0}{H^2}\frac{k_z}{k}\right)\right] + \sinh\left[\pi\left(\frac{M}{H} + \frac{eE_0}{H^2}\frac{k_z}{k}\right)\right] e^{-2\pi\frac{M}{H}}} \tag{4.60}$$

4.4 Action effective de Schwinger

Le nombre des particules créés est

$$n(s,\vec{k}) = \frac{\sinh\left[\pi\left(\frac{M}{H} + \frac{eE_0}{H^2}\frac{k_z}{k}\right)\right]}{\sinh\left[\pi\left(\frac{M}{H} - \frac{eE_0}{H^2}\frac{k_z}{k}\right)\right] e^{2\pi\frac{M}{H}} + \sinh\left[\pi\left(\frac{M}{H} + \frac{eE_0}{H^2}\frac{k_z}{k}\right)\right]} \tag{4.61}$$

A cause de la condition $M \rangle\rangle H$,la densité des particules créés se comporte comme

$$n(s,\vec{k}) = e^{-2\pi\left(\frac{M}{H} - \frac{eE_0}{H^2}\frac{k_z}{k}\right)} \tag{4.62}$$

L'amplitude de transition vide-vide donnée par

$$\langle vid|\, vid\rangle = e^{iS_{eff}} \tag{4.63}$$

Soit $c_{\vec{k}}$ la probabilité pour qu'il n'y ait pas de création de paires dans l'état $\overrightarrow{k}$.
La quantité $C_{\vec{k}}\left(p_{\vec{k}}\right)^n$ est la probabilité de avoir créé seulement n paires dans l'état $\overrightarrow{k}$.

$$\sum_n C_{\vec{k}}\left(p_{\vec{k}}\right)^n = 1 \tag{4.64}$$

ce qui implique que

$$c_k = 1 - p_k = \frac{1}{|\alpha|^2} \tag{4.65}$$

La probabilité de transition vide-vide est donc

$$|\langle vid|\, vid\rangle|^2 = e^{-2\,\mathrm{Im}\,S_{eff}} = \prod_k c_k = e^{\sum_k \ln c_k} \tag{4.66}$$

La partie imaginaire de l'action effective de Schwinger est

$$2\,\mathrm{Im}\,S_{eff} = -\sum_k \ln c_k = \sum_k \ln\left(1 - |\beta_k|^2\right) \tag{4.67}$$

Utilisons le développement de Taylor

$$\ln\left(1 - |\beta_k|^2\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)}{n} |\beta_k|^{2n} \tag{4.68}$$

En remplace la somme sur k par l'intégrale suivant

$$\sum_k \rightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{V}{a^3(t)} \tag{4.69}$$

L'action effective de Schwinger devient

$$2\,\mathrm{Im}\,S_{eff} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)}{n} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{V}{a^3(t)} e^{-2\pi n\left(\frac{M}{H} - \frac{eE_0}{H^2}\frac{k_z}{k}\right)} \tag{4.70}$$

Nous faisons $d^3k = k^2 dk \sin\theta d\theta d\varphi$ et en pose $\frac{k_z}{k} = \cos\theta$. Nous obtenons

$$2\,\mathrm{Im}\,S_{eff} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)}{n} \int_0^{+\infty} \frac{k^2 dk}{(2\pi)^2} \frac{V}{a^3(t)} \frac{H^2}{\pi n e E_0} e^{-2\pi n \frac{M}{H}} \sinh\left(2\pi n \frac{eE_0}{H^2}\right) \tag{4.71}$$

Pour éliminer la divergence , nous définissons le lagrangien effective avec

$$2\,\mathrm{Im}\,S_{eff} = \int d^3x dt\; 2\,\mathrm{Im}\,L_{eff} \tag{4.72}$$

où $\mathrm{Im}\,L_{eff}$ est la probabilité de création par unité du temp et par unité de volume

$$\int dt\;\; \mathrm{Im}\,L_{eff} = \int_0^{+\infty} k^2 dk \frac{H^2}{(2\pi)^3\, eE_0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)}{n^2} \frac{e^{-2\pi n \frac{M}{H}}}{a^3(t)} \sinh\left(2\pi n \frac{eE_0}{H^2}\right) \tag{4.73}$$

Nous cherchons une condition pour la quelle $M\,(a, b; \rho) \simeq 1$.La définition du fonction de Kummer

$$M\,(a, b; \rho) = 1 + \frac{a}{1}\frac{\rho}{b} + \frac{a(a+1)}{1*2}\frac{\rho^2}{b(b+1)} + \frac{a(a+1)\,(a+2)}{1*2*3}\frac{\rho^3}{b(b+1)(b+2)} + ... \tag{4.74}$$

Pour une valeur finie de ρ, $M(a,b;\rho) \simeq 1$ seulement si $\left|\frac{\rho}{b}\right| \ll 1$.Nous avons alors

$$|\rho| \ll |2\mu + 1| \tag{4.75}$$

Nous pouvons voir que la notion de particules ne peut avoir un sens que si

$$|k| \ll Me^{H\eta} \tag{4.76}$$

Alors la partie imaginaire de Lagrangien effectif de Schwinger s'écrit sous la forme

$$\operatorname{Im} L_{eff} = \frac{M^3 H^3}{eE_0 (2\pi)^3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)}{n^2} e^{-2\pi n \frac{M}{H}} \sinh\left(2\pi n \frac{eE_0}{H^2}\right) \tag{4.77}$$

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié l'effet du champ électrique sur la création de particules de spin $\frac{1}{2}$ dans un univers de de-Sitter .En premier lieu nous avons cherché la solution de l'équation de Dirac. Ensuit nous avons pu exprimer la densité de particules créées en fonction des deux rapport $\frac{M}{H}$ et $\frac{eE_0}{H^2}$ et cette densité ne dépende pas de $cos\theta$. Pour éliminer la divergence , nous définissons le lagrangien effective qui présente la probabilité de création par unité du temps et par unité de volume et nous introduisons cut-of pour voir un sens physique de la notion de particules

Chapitre 5

Création de particules en présence d'un champ magnétique

5.1 Introduction

Dans ce chapitre nous étudions l'effet de champ magnétique sur la production de paires particules dans un espace-temps de Sitter à quatre dimensions ds_4 .En premier lieu nous cherchons la solution de l'équation de Dirac .Ensuit nous étudions les comportement des états "in" et "out" à l'aide des solutions semi-classiques de l'équation de Hamilton-Jacobi et déterminer les coefficients de Bogoliubov . Puis nous allons calculer la probabilité de création d'une paire et la densité des fermions créés à partir des coefficients de Bogoliubov.

5.2 Equation de Dirac en présence d'un champ électromagnétique

L'équation de Dirac covariante s'écrit

$$[i\widetilde{\gamma}^{\mu}\left(\partial_{\mu}+ieA_{\mu}-\Gamma_{\mu}\right)-m]\,\psi=0 \tag{5.1}$$

Considérons maintenant $A_{\mu}=(0,A_1,0,A_3)$ où

$$A_1=By\ ,\ A_3=-E_0f(\eta) \tag{5.2}$$

Nous faisons la factorisation $\psi=a^{-\frac{3}{2}}\chi\left(\eta,x\right)$. Nous obtenons l'équation

$$[\gamma^{\mu}\left(i\partial_{\mu}-eA_{\mu}\right)-ma(\eta)]\chi=0 \tag{5.3}$$

Ici, nous posons

$$\chi=e^{ik_zz}\gamma^0\gamma^3\tilde{\xi}\left(x,y,\eta\right). \tag{5.4}$$

Dans ce cas,l'équation de Dirac peut s'écrire sous la forme

$$D\tilde{\xi}\left(x,y,\eta\right)=\tilde{k}\tilde{\xi}\left(x,y,\eta\right) \tag{5.5}$$

où les opérateurs linéaires D et $\tilde{k}$ sont donnés par

$$D = i\gamma^3\frac{d}{d\eta}-(k_z-eA_z)\gamma^0-ma(\eta)\gamma^0\gamma^3 \tag{5.6}$$

$$\tilde{k} = \left[-i\partial_2\gamma^2\gamma^0\gamma^3-\left(i\partial_1+eA_x\right)\gamma^1\gamma^0\gamma^3\right]. \tag{5.7}$$

Nous pouvons alors montrer que

$$\tilde{\xi} = e^{ik_x x} \begin{pmatrix} \tilde{\xi}_1 \chi_1 \\ \tilde{\xi}_2 \sigma_3 \chi_1 \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

est un vecteur propre de $\tilde{k}$ si

$$\left[\frac{d^2}{d^2 y} - (k + eBy)^2 + esB - \lambda^2\right] \chi_1(y) = 0 \tag{5.9}$$

où $\lambda_s = \sqrt{(2n+1-s)eB}$.

Les composante $\tilde{\xi}_1$ et $\tilde{\xi}_2$ vérifient alors le système d'équations

$$\left(i\frac{d}{d\eta} - ma(\eta)\right)\tilde{\xi}_2(\eta) = [(k_z - eA_z) + \lambda_s]\,\tilde{\xi}_1(\eta) \tag{5.10}$$

$$\left(i\frac{d}{d\eta} + ma(\eta)\right)\tilde{\xi}_1(\eta) = [(k_z - eA_z) - \lambda_s]\,\tilde{\xi}_2(\eta) \tag{5.11}$$

En utilisant la transformation(4.21) nous obtenons alors un système de deux équations différentielles de premier ordre couplées

$$\left[i\frac{d}{d\eta} - \frac{m^2}{M}a_0 f(\eta) + \frac{eE_0}{a_0 M}k_z - \frac{e^2E_0^2}{a_0 M}f\right]\varphi_2 = \left[\frac{m}{M}k_z + \lambda_s\right]\varphi_1 \tag{5.12}$$

$$\left[i\frac{d}{d\eta} + \frac{m^2}{M}a_0 f(\eta) - \frac{eE_0}{a_0 M}k_z + \frac{e^2E_0^2}{a_0 M}f\right]\varphi_1 = \left[\frac{m}{M}k_z - \lambda_s\right]\varphi_2 \tag{5.13}$$

Par interaction nous obtenons pour chaque composante une équation différentielle du second ordre

$$\left[\frac{d^2}{d\eta^2} \mp ia_0 M f'(\eta) + a_0^2 M^2 f^2(\eta) - 2eE_0 K_z f(\eta) + (k_z^2 - \lambda_s^2)\right]\varphi_{1,2} = 0 \tag{5.14}$$

avec

$$M = \sqrt{m^2 + \frac{e^2E_0^2}{a_0^2}} \tag{5.15}$$

Dans ce cas nous avons $f(\eta) = -\frac{1}{H^2\eta}$ et $a_0 = H$ .Alors

$$\left[\frac{d^2}{d\eta^2} \mp i\frac{M}{H}\frac{1}{\eta^2} + \frac{M^2}{H^2\eta^2} + 2\frac{eE_0}{H^2}K_z\frac{1}{\eta} + (k_z^2 - \lambda_s^2)\right]\varphi_{1,2} = 0 \tag{5.16}$$

Cette équation peut se réduire à une équation de type Whittaker

$$\left[\frac{d^2}{d^2\rho} + \frac{\left(\frac{1}{4} - \mu_{1,2}^2\right)}{\rho^2} + \frac{\lambda}{\rho} - \frac{1}{4}\right]\varphi_1 = 0 \tag{5.17}$$

avec

$$\eta = \frac{i}{2h}\rho \tag{5.18}$$

et

$$h^2 = (k_z^2 - \lambda_s^2) \tag{5.19}$$

Les paramètres λ et μ sont donnés par

$$\lambda = i\frac{eE_0}{H^2}\frac{k_z}{h} \tag{5.20}$$

$$\mu_1 = \frac{1}{2} + i\frac{M}{H} = \mu \tag{5.21}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{2} - i\frac{M}{H} = \mu^* \tag{5.22}$$

Les solutions de cette équation sont données par(3.10)

Nous comparons les solution semi-classique avec les solution exactes les fonction de Whittaker de sorte qu'on peut choisir les bons états "in" et "out"

$$\varphi_{1,in}^{+} = N_{1,in}W_{-\lambda,\mu}(-\rho) \tag{5.23}$$

$$\varphi_{1,in}^{-} = N_{1,in}^{*}W_{\lambda,\mu}(\rho) \tag{5.24}$$

$$\varphi_{1,out}^{+} = N_{1,out}M_{-\lambda,\mu}(-\rho) \tag{5.25}$$

$$\varphi_{1,out}^{-} = N_{1,out}^{*}M_{\lambda,-\mu}(\rho) \tag{5.26}$$

Pour calculer la deuxième composante pour chaque spineur nous utilisons les relations (4.36), (4.37) et (4.38). Après un simple calcul nous obtenons alors les résultats suivants

$$\varphi_{2,in}^{+} = \frac{1}{\left[k_z\frac{m}{M}-\lambda_s\right]}(h - \frac{eE_0K_z}{MH})W_{-\lambda,\mu-1}(-\rho) \tag{5.27}$$

$$\varphi_{2,in}^{-} = \frac{-1}{\left[k_z\frac{m}{M}-\lambda_s\right]}(h + \frac{eE_0K_z}{MH})W_{\lambda,\mu-1}(\rho) \tag{5.28}$$

$$\varphi_{2,out}^{+} = \frac{-4h}{\left[k_z\frac{m}{M}-\lambda_s\right]}\left(\frac{1}{2} + i\frac{M}{H}\right)M_{-\lambda,\mu-1}(-\rho) \tag{5.29}$$

$$\varphi_{2,out}^{-} = \frac{h}{4\left[k_z\frac{m}{M}-\lambda_s\right]}\frac{(1-\frac{e^2E_0^2k_z^2}{M^2H^2h^2})}{(\frac{1}{2}-i\frac{M}{H})}M_{\lambda,-\mu+1}(\rho) \tag{5.30}$$

Enfin , les spineurs de Dirac correspondant aux états d'énergie positive et négative sont

$$\begin{pmatrix} \tilde{\xi}_{1,in}^{-}\chi_1 \\ \tilde{\xi}_{2,in}^{-}\sigma_3\chi_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}\begin{pmatrix} \left[W_{\lambda,\mu}(\rho) - \tau\frac{1}{\left[k_z\frac{m}{M}-\lambda_s\right]}(h + \frac{eE_0K_z}{MH})W_{\lambda,\mu-1}(\rho)\right]\chi_1 \\ \left[-\tau W_{\lambda,\mu}(\rho) - \frac{1}{\left[k_z\frac{m}{M}-\lambda_s\right]}(h + \frac{eE_0K_z}{MH})W_{\lambda,\mu-1}(\rho)\right]\sigma_3\chi_1 \end{pmatrix} \tag{5.31}$$

et

$$\begin{pmatrix} \tilde{\xi}^{+}_{1,out}\chi_1 \\ \tilde{\xi}^{+}_{2,out}\sigma_3\chi_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} \begin{pmatrix} \left[M_{-\lambda,\mu}(-\rho) - \tau\frac{4h}{\left[k_z\frac{m}{M}-\lambda_s\right]}\left(\frac{1}{2}+i\frac{M}{H}\right)M_{-\lambda,\mu-1}(-\rho)\right]\chi_1 \\ \left[-\tau M_{-\lambda,\mu}(-\rho) - \frac{4h}{\left[k_z\frac{m}{M}-\lambda_s\right]}\left(\frac{1}{2}+i\frac{M}{H}\right)M_{-\lambda,\mu-1}(-\rho)\right]\sigma_3\chi_1 \end{pmatrix} \tag{5.32}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\xi}^{-}_{1,out}\chi_1 \\ \tilde{\xi}^{-}_{2,out}\sigma_3\chi_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} \begin{pmatrix} \left[M_{\lambda,-\mu}(\rho) + \tau\frac{h}{4\left[k_z\frac{m}{M}-\lambda_s\right]}\frac{(1-\frac{e^2E_0^2k_z^2}{M^2H^2h^2})}{(\frac{1}{2}-i\frac{M}{H})}M_{\lambda,-\mu+1}(\rho)\right]\chi_1 \\ \left[-\tau M_{\lambda,-\mu}(\rho) + \frac{h}{4\left[k_z\frac{m}{M}-\lambda_s\right]}\frac{(1-\frac{e^2E_0^2k_z^2}{M^2H^2h^2})}{(\frac{1}{2}-i\frac{M}{H})}M_{\lambda,-\mu+1}(\rho)\right]\sigma_3\chi_1 \end{pmatrix} \tag{5.33}$$

Alors

$$\begin{pmatrix} \tilde{\xi}^{+}_{1,in}\chi_1 \\ \tilde{\xi}^{+}_{2,in}\sigma_3\chi_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} \begin{pmatrix} \left[\sqrt{\frac{hM+k_z\frac{eE_0}{H}}{mk_z+M\lambda_s}}W_{-\lambda,\mu}(-\rho) + \tau\sqrt{\frac{hM-k_z\frac{eE_0}{H}}{mk_z-M\lambda_s}}W_{-\lambda,1-\mu}(-\rho)\right]\chi_1 \\ \left[-\tau\sqrt{\frac{hM+k_z\frac{eE_0}{H}}{mk_z+M\lambda_s}}W_{-\lambda,\mu}(-\rho) + \sqrt{\frac{hM-k_z\frac{eE_0}{H}}{mk_z-M\lambda_s}}W_{-\lambda,1-\mu}(-\rho)\right]\sigma_3\chi_1 \end{pmatrix} \tag{5.34}$$

et

$$\begin{pmatrix} \tilde{\xi}^{-}_{1,in}(s,\eta)\chi_1 \\ \tilde{\xi}^{-}_{2,in}(s,\eta)\sigma_3\chi_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} \begin{pmatrix} \left[\sqrt{\frac{hM-k_z\frac{eE_0}{H}}{mk_z+M\lambda_s}}W_{\lambda,\mu}(\rho) - \tau\sqrt{\frac{hM+k_z\frac{eE_0}{H}}{mk_z-M\lambda_s}}W_{\lambda,1-\mu}(\rho)\right]\chi_1 \\ \left[-\tau\sqrt{\frac{hM-k_z\frac{eE_0}{H}}{mk_z+M\lambda_s}}W_{\lambda,\mu}(\rho) - \sqrt{\frac{hM+k_z\frac{eE_0}{H}}{mk_z-M\lambda_s}}W_{\lambda,1-\mu}(\rho)\right]\sigma_3\chi_1 \end{pmatrix} \tag{5.35}$$

5.3 Création des particules

La transformation de Bogoliubov reliant les états "in" avec les états "out"

$$\varphi^{+}_{s,\vec{k},out}(\eta) = \alpha_{s,\vec{k}}\varphi^{+}_{s,\vec{k},in}(\eta) + \beta_{s,\vec{k}}\varphi^{-}_{s,\vec{k},in}(\eta) \tag{5.36}$$

$$\varphi^{-}_{s,\vec{k},out}(\eta) = \alpha^{*}_{s,\vec{k}}\varphi^{-}_{s,\vec{k},in}(\eta) + \beta^{*}_{s,\vec{k}}\varphi^{+}_{s,\vec{k},in}(\eta) \tag{5.37}$$

Nous pouvons montrer que les coefficients de Bogoliubov $\alpha_{s,\vec{k}}$ et $\beta_{s,\vec{k}}$ sont donnés par

$$\frac{\alpha_{s,\vec{k}}}{\beta_{s,\vec{k}}} = \frac{\Gamma\left(i\left(\frac{M}{H}+\frac{eE_0}{H^2}\frac{k_z}{h}\right)\right)}{\Gamma\left(i\left(\frac{M}{H}-\frac{eE_0}{H^2}\frac{k_z}{h}\right)\right)}\sqrt{\frac{kM+k_z\frac{eE_0}{H}}{kM-k_z\frac{eE_0}{H}}}e^{\pi\frac{M}{H}} \tag{5.38}$$

La probabilité de création d'une paire de particules dans l'état $\overrightarrow{k}$

$$p_{s,\vec{k}} = \left|\frac{\beta_{s,\vec{k}}}{\alpha_{s,\vec{k}}}\right|^2 = \left|\frac{\Gamma\left(i\left(\frac{M}{H}-\frac{eE_0}{H^2}\frac{k_z}{\sqrt{k_z^2-\lambda^2}}\right)\right)}{\Gamma\left(i\left(\frac{M}{H}+\frac{eE_0}{H^2}\frac{k_z}{\sqrt{k_z^2-\lambda^2}}\right)\right)}\right|^2\left(\frac{kM-k_z\frac{eE_0}{H}}{kM+k_z\frac{eE_0}{H}}\right)e^{-2\pi\frac{M}{H}} \tag{5.39}$$

Compte tenu la propriété de fonction gamma

$$|\Gamma(i(x))|^2 = \frac{\pi}{x\sinh(\pi x)} \tag{5.40}$$

Nous avons le résultat suivant

$$p_{s,\vec{k}} = \frac{\sinh\left[\pi\left(\frac{M}{H} + \frac{eE_0}{H^2}\frac{k_z}{\sqrt{k_z^2-\lambda^2}}\right)\right]}{\sinh\left[\pi\left(\frac{M}{H} - \frac{eE_0}{H^2}\frac{k_z}{\sqrt{k_z^2-\lambda^2}}\right)\right]} e^{-2\pi\frac{M}{H}} \tag{5.41}$$

La densité des particules créées donnée par

$$n(s,\vec{k}) = \left|\beta_{s,\vec{k}}\right|^2 = \frac{\sinh\left[\pi\left(\frac{M}{H} + \frac{eE_0}{H^2}\frac{k_z}{\sqrt{k_z^2-\lambda^2}}\right)\right] e^{-2\pi\frac{M}{H}}}{\sinh\left[\pi\left(\frac{M}{H} - \frac{eE_0}{H^2}\frac{k_z}{\sqrt{k_z^2-\lambda^2}}\right)\right] + \sinh\left[\pi\left(\frac{M}{H} + \frac{eE_0}{H^2}\frac{k_z}{\sqrt{k_z^2-\lambda^2}}\right)\right] e^{-2\pi\frac{M}{H}}} \tag{5.42}$$

5.4 Action effective de Schwinger

A cause de la condition $M >> H$, la densité des particules créées se comporte comme

$$n(k) = e^{-\frac{2\pi}{H}\left(M - \frac{k_z}{\sqrt{k_z^2+eB_0(2l+1-s)}}\frac{eE_0}{H}\right)} \tag{5.43}$$

Nous pouvons écrire

$$N = \int dt d^3x \frac{dN}{dt d^3x} \tag{5.44}$$

avec

$$\int dt d^3x \frac{dN}{dt d^3x} = \frac{1}{a^3(t)} \sum_{l,s} \int \frac{dk_z dz}{2\pi} \int \frac{dk_x dx}{2\pi} e^{-\frac{2\pi}{H}\left(M - \frac{k_z}{\sqrt{k_z^2+eB_0(2l+1-s)}}\frac{eE_0}{H}\right)} \tag{5.45}$$

Nous cherchons une condition pour la quelle $M(a,b;\rho) \simeq 1$.La définition du fonction de Kummer

$$M(a,b;\rho) = 1 + \frac{a}{1}\frac{\rho}{b} + \frac{a(a+1)}{1*2}\frac{\rho^2}{b(b+1)} + \frac{a(a+1)(a+2)}{1*2*3}\frac{\rho^3}{b(b+1)(b+2)} + ... \tag{5.46}$$

Pour une valeur finie de ρ, $M(a,b;\rho) \simeq 1$ seulement si $\left|\frac{\rho}{b}\right| \ll 1$. Nous avons alors

$$|\rho| \ll |2\mu + 1| \tag{5.47}$$

nous pouvons voir que la notion de particules ne peut avoir un sens que si

$$|k_z| \ll \sqrt{\frac{M^2}{H^2\eta^2} - eB_0(2l+1-s)} \tag{5.48}$$

En faisant la substitution $y = \frac{k_x}{eB_0}$. Par conséquent, l'intégrale donne

$$\int \frac{dk_x}{2\pi} = \int \frac{eB_0}{2\pi} dy \tag{5.49}$$

Nous obtenons

$$\int dt \frac{dN}{dtd^3x} = \frac{2}{a^3(t)} \frac{eB_0}{(2\pi)^2} e^{-\frac{2\pi}{H}M} \sum_{l,s} \int dk_z \cosh\left(\frac{2\pi eE_0}{H^2} \frac{k_z}{\sqrt{k_z^2 + eB_0(2l+1-s)}}\right) \tag{5.50}$$

Si on prend

$$k_z \sim \sqrt{\frac{M^2}{H^2\eta^2} - eB_0(2l+1-s)}$$

Le nombre des particules créées par unité du temps et par unité de volume, peut s'écrire donc sous la forme

$$\frac{dN}{dtd^3x} = \frac{2}{a(t)} \frac{eB_0HM^2}{(2\pi)^2} e^{-\frac{2\pi}{H}M} \sum_l \left[\frac{1}{\sqrt{M^2a^2(t) - eB_0(2l)}} \cosh\left(-\frac{2\pi eE_0}{H^2Ma(t)} \sqrt{M^2a(t)^2 - eB_0(2l)}\right) + \right.$$
$$\left. \frac{1}{\sqrt{M^2a^2(t) - eB_0(2l+2)}} \cosh\left(-\frac{2\pi eE_0}{H^2Ma(t)} \sqrt{M^2a(t)^2 - eB_0(2l+2)}\right)\right] \tag{5.51}$$

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié l'effet du champ magnétique sur la création de paires de particules dans un espace-temps de de-Sitter à 4 dimensions. Premièrement, nous avons obtenu des solutions exactes à l'équation de Dirac. Puis nous avons établi la transformation de Bogoliubov et à partir ses coefficients nous avons calculé la probabilité de création d'une paire et la densité des fermions créés.

Chapitre 6

Conclusion générale

Dans ce nous avons voulu étudier la création des particules à partir du vide dans l'univers de de-Sitter en présences d'un champ électromagnétique. Nous nous sommes intéressé au calcul de la probabilité de création d'une paire de particules dans un univers en expansion et la densité des particules créées en utilisant la méthode canonique basée sur la transformation de Bogoliubov reliant les états "in" et "out".

En premier lieu, nous avons pu trouver une interprétation physique de la création des particules dans un univers en expansion à travers une théorie quantique des champs dans un espace courbe. Nous avons montré que le Hamiltonien du champ scalaire complexe dans un univers en expansion n'est pas toujours diagonal et ainsi l'interprétation du champ en termes de particules n'est pas tout à fait claire. Ici, nous avons utilisé la technique de Bogoliubov pour montrer qu'il y a une création des particules. Nous avons considéré comme application l'un univers de de-Sitter.

Dans une deuxième étape, nous avons voulu étudier l'effet du champ électrique sur la création des particules. Compte tenu des difficultés rencontrées nous avons d'abord commencé par l'étude de l'effet du champ électrique sur la création des particules scalaires où nous avons trouvé des solutions exactes pour l'équation de Klein Gordon correspondante. Le résultat essentiel de cette étude est que le champ électrique amplifie la densité des particules créées.

Ayant contourné les difficultés rencontrées, nous avons considéré cette fois ci la création des particules de Dirac dans l'univers de de-Sitter en présence d'un champ électrique. Ensuite, nous avons étudié la combinaison d'un champ électrique et un champ magnétique.

جامعة محمد الصديق بن يحي - جيجل
مكتبة الكلية
-02-
كلية العلوم الدقيقة و الإعلام الآلي

Bibliographie

[1] O. Klein, Z. Phys. 53, 157 (1929)

[2] A. Calogeracos, N. Dombey, Contemp. Phys. 40 (1999) 313.

[3] R. Ruffini, G. Vereshchagin, S-S. Xue, Phys. Rep. **487** (2010)

[4] J. Schwinger, Phys. Rev. **82** (1951) 664.

[5] E. Bresin and C. Itzykson, Phys. Rev. D **2** (1970) 1191.

[6] Q. G. Lin, J. Phys. G : Nucl. Part. Phys. 25 (1999) 17

[7] M. N. Hounkonnou and M. Naciri, J. Phys. G : Nucl. Part. 26 (2000) 1849

[8] C. K. Dumlu and G.V. Dunne, Phys. Rev. D 83 (2011) 065028

[9] S. I. Kruglov, Annals Phys. 293 (2001) 228

[10] M. S. Marinov and V. S. Popov, Sov. J. Nucl. Phys. 15 (1972) 702.

[11] S. P. Gavrilov, D. M. Gitman, Phys.Rev. D **53** (1996) 7162

[12] S. P. Kim and D. N. Page, Phys. Rev. D 73 (2006) 0650202125

[13] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, Quantum Fields in Curved Space (Cambridge Univ. Press. Cambridge, 1982).

[14] S. A. Fulling, Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time (Campridge University. Press, Campridge 1985).

[15] V. F.Mukhanov and S. Winitzki, Intoduction of Quantum Effects in Gravity (Campridge Univ. Press, Campridge 2007).

[16] A. A. Grip S. G. Mamayev and V. M. Mostepanenko, Vacuum Quantum Effects in Strong Fields (Friedmannn Lab. Publ., St. Petersburg 1994).

[17] L. Parker and D. J. Toms, Quantum Field Theory in Curved Space-Time : Quantized Fields and Gravity (Campridge University. Press, Campridge 2009).

[18] I. Antoniadis, P. O. Mazur and E. Mottola, New J. Phys. **9,** 11 (2007)

[19] R-G. Cai and S. P. Kim, JHEP 09, 072 (2014).

[20] J. Haro and E. Elizald, J. Phys. A : Math. Theor. 41, 372003 (2008).

[21] J. Haro, J. Phys. A : Math. Theor. 44, 205401 (2011).

[22] J. Garriga, Phys. Rev. D 49, 6343 (1994).

[23] A. Havare, T. Yetkin, M. Korunur and K. Sogut, Nuclear Physics B 682, 464 (2004).

[24] S. P. Kim, H. K. Lee and Y. Yoon, Phys. Rev. D 78, 105013 (2008).

[25] S. Haouat and L. Chetouani, Phys. Scr. 75 (2007) 759

[26] G.V. Dunne and C. Schubert, Phys. Rev. D 72 (2005) 105004

[27] S. Biswas, J. Guha and N. G. Sarkar, Class. Quantum Grav. **12,** 1591 (1995)

[28] S. Biswas, A. Shaw and P. Misra, Gen. Rel. Grav. **34,** 665 (2002)

[29] S. Biswas and I. Chowdhury, Int. J. Mod. Phys. D **15,** 937 (2006)

[30] N. B. Narozhny and A. I. Nikishov, Sov. J. Nucl. Phys. **11** (1970) 596

[31] H. Aoyama and M. Kobayashi, Prog. Theor. Phys. 64 (1980) 1045

[32] S. A. Baran and I. H. Duru, J. Sov. Laser Res. 13 (1992) 241

[33] I. H. Duru, J. Phys. A : Math. Gen. 28 (1995) 588

[34] V. M. Villalba, Phys. Rev. D 60, 127501 (1999).

[35] V. M. Villalba and W. Greiner, Phys. Rev. D 65, 025007 (2001).

[36] V. M. Villalba, Prog. Theor. Phys. 4, 859 (1993).

[37] E. S. Fradkin, D. M. Gitman and S.M Shvartsman, Quantum Electrodynamics with Unstable Vacuum (Springer, Berlin, 1991).

[38] I. L. Buchbinder and S. D Odintsov, Sov. Phys. J. 25, 385 (1982).

[39] L. Parker Phys. Rev . Lett. 21, 562 (1968)

[40] Ya. Zeldovich and A. A. Starobinskii Sov. Phys. JETP 34, 1159 (1971)

[41] S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. 43, 199 (1975)

[42] A. A. Grib, S. G. Mamaev and V. M. Mostepanenko Quantum Vacuum effects in strong fields (Moscow : Energoatomizdat, 1988)

[43] Yu. V. Pavlov ; Grav. and Cosmol. 14 (2008) 314

[44] S. Winitzki, Phys. Rev. D **72,** 104011 (2005)

[45] S. Haouat and R. Chekireb, Mod. Phys. Lett. A, 26, 2639 (2011).

[46] N. B. Narozhny and A. I. Nikishov, Sov. J. Nucl. Phys. **11,** 596 (1970).

[47] S. Haouat and R. Chekireb, Int. J. Theor. Phys. 51, 1704 (2012)

[48] S. Moradi ; Journal of Geometry and Physics 59 (2009) 173,184

[49] S. Moradi ; Int. J. Theor. Phys. 47 (2008) 2808.

[50] I. Antoniadis, P. O. Mazur and E. Mottola, New J. Phys. 9, 11 (2007).

[51] S. Gavrilov, D. M. Gitman and S. D. Odintsov, Int. J. Mod. Phys. A 12, 4837(1997).

[52] A. A. Grib and Yu. V. Pavlov, Int. J. Mod. Phys. D, 11, 433 (2002).

[53] A. A. Grib and Yu. V. Pavlov, Int. J. Mod. Phys. A, 17, 4435 (2002).

[54] A. A. Grib and Yu. V. Pavlov, Grav. and Cosmol. 8, Suppl.,148 (2002).

[55] A. A. Grib and Yu. V. Pavlov, Grav. and Cosmol.8, Suppl. II,50 (2002).

[56] G. Schäfer and H. Dehnen, J. Phys. A, Math. Gen. 13, 517 (1980).

[57] S. Haouat and R. Chekireb, Eur. Phys. J. C, 72, 2034 (2012).

[58] S. Moradi, Mod. Phys. Lett. A 21, 1129 (2009).

[59] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products (Academic Press, New York 1979)

[60] M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions (Dover, New York, 1964)

[61] N. Ja. Vilenkin, Special Functions and the Theory of Group Representations (American Mathematical Society, 1968).