REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOHAMED SEDDIK BEN YAHIA - JIJEL

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Mémoire
Présenté pour obtenir le diplôme de master
Filière : physique
Spécialité : Physique Théorique

Présenté par

Boukhrouf Hadjer

Thème

Modes quasi-normaux pour un trou noir chargé

Soutenu devant le jury composé de :

Président :	T.Boudjedaa	Prof.	Univ. MSBY, Jijel
Rapporteur :	S. Haouat	Prof.	Univ. MSBY, Jijel
Examinatrice :	R.Rekioua	MAA.	Univ. MSBY, Jijel

Promotion : 2017-2018

Remerciements

Avant tout, je remercie Allah pour nous avoir donné la santé, le courage, la patience et la volonté pour réaliser ce travail.

Cette étude a été réalisée au laboratoire de la faculté des sciences exacte et informatique de l'université de jijel, département de la physique.

Je remercie tout particulièrement Monsieur Haouat Salah professeur à l'université de Jijel, qui m'a proposé ce sujet de recherche, pour ses conseils et son aide durant toute la période du travail et pour m'avoir guidé et encouragé.

Mes remerciements vont également aux membre du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à ma recherche en acceptant d'examiner mon travail; Prof T. Boudjedaa , Mme R.Rekioua .

Je remercie tous les enseignants qui m'ont étudié durant 5 ans d'étude, en particulier les professeurs N.Ferkous et KH.Nouicer sans oublier Pr P. Aurenche Sur la gentillesse et l'encouragement

J'exprime aussi ma profonde gratitude à Mlle Lamri Houria, secrétaire du laboratoire de physique théorique

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à ma famille et en particulier ma mère et mon père qui m'ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE

1

Introduction

Avant l'avènement de la théorie de la relativité, la loi de Newton sur la gravitation universelle de 1686 avait été considéré comme une description valable de la force de gravité pendant plus de deux cents ans. Dans ce modèle, la gravité était considérée comme une force d'attraction inhérente entre deux masses, agissant instantanément à distance.

En 1905, Albert Einstein a formulé la théorie de la relativité restreinte dans laquelle toute interaction physique devrait se propager à une vitesse égale ou inférieure à la vitesse de la lumière. Comme la théorie newtonienne ne satisfaisait pas à cette exigence, Einstein cherchait une théorie de la relativité plus générale qui pourrait rendre compte de la gravité, sans contredire la théorie de la relativité restreinte.

La relativité générale formulé par Einstein remplaçait donc la théorie de la gravitation universelle de Newton en prenant en compte de nombreux effets qui ne pouvaient pas être expliqués par la dernière. L'idée fondamentale à la base de cette théorie est que le champ de gravitation, que nous mesurons par ses effets sur le mouvement des corps massifs, est en fait une manifestation de la géométrie courbe de l'espace-temps. Après sa formulation il y a bientôt un siècle, ses prédictions à l'échelle astrophysique (déviation de la lumière par les corps massifs, précession du périhélie des planètes, décalage des raies spectrales vers le rouge) ont été rapidement confirmées par l'observation. Ainsi la théorie de la relativité générale est devenue un outil essentiel de l'astrophysique moderne. La relativité générale est également la base du modèle standard du Big Bang de la cosmologie. Une prédiction moins évidente de la théorie, qui a mis beaucoup plus longtemps à se dégager, est maintenant aussi bien confirmée par les observations. C'est celle de l'existence des trous noirs, des régions de l'espace-temps où la courbure est si forte que la lumière – ainsi que tous les objets tombés dans ces régions – est piégée et ne peut plus s'en échapper.

En théorie newtonienne, l'énergie non-relativiste d'un corps d'épreuve de masse m à la distance r d'une masse ponctuelle M est

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}\,. \tag{1.1}$$

Le corps d'épreuve peut donc s'échapper du champ gravitationnel de la masse M si sa vitesse est supérieure à la *vitesse de libération* $v_L = (2GM/r)^{1/2}$. Cette vitesse devient égale à la vitesse de la lumière, $v_L = c$, à la distance $r = R_0 = 2GM/c^2$. Il en résulte que la lumière ne peut pas s'échapper d'une étoile de rayon $R < R_0$, qui est donc invisible pour un observateur extérieur (étoile noire). Cet argument classique a été confirmé dans le cadre de la théorie de la relativité générale qui a fournit les fondements de notre compréhension actuelle des trous noirs. On pense que son immense gravité est responsable du rayonnement intense émis par certains types d'objets astronomiques (tels que les noyaux galactiques actifs ou les microquasars). La nature de la géométrie des trous noirs peut être élucidée par l'étude de certaines solutions exactes des équations d'Einstein, ou des équations couplées d'Einstein-Maxwell.

D'autre part, il est bien connu que la sonorité d'une corde de la guitare produit un son caractéristique de cette corde. Un tel système répond à toute excitation en sélectionnant un ensemble de fréquences réelles (les fréquences normales) et son réponse est donnée comme une superposition de modes stationnaires (les modes normaux).

Les trous noirs ont aussi un ensemble de fréquences (*son*) caractéristique. Le caractère distinctif est que le signal est dominé, pendant un certain temps, par des oscillations amorties avec une fréquence unique.

La fréquence et l'amortissement de ces oscillations dépendent uniquement des paramètres caractérisant le trou noir, ce qui est la masse dans le cas de Schwarzschild.

Le terme "**normal**" dérive de la similitude évidente entre les oscillations des trous noirs et celles des systèmes en mode normal. Il existe cependant des différences importantes entre ces deux systèmes, ce qui justifie le prefixe "**quasi**" d'abord.

Les modes quasi-normaux ne sont pas des modes stationnaires, puisqu'ils sont exponentiellement amortis. Cela reflète simplement le fait que l'espace-temps du trou noir rayonne de l'énergie sous la forme d'ondes gravitationnelles (ou de tout champ sans masse). Ces modes sont décrits par une fonction d'onde de la forme

$$\psi(x,t) = e^{-i\omega t}\varphi(x) \tag{1.2}$$

où $\varphi(x)$ vérifie les conditions initiales

$$\lim_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = \exp(\pm i\omega x) \tag{1.3}$$

Ici ω est un nombre complexe

$$\omega = -i\omega_I + \omega_R \tag{1.4}$$

dont la partie réelle est la fréquence des oscillations et la partie imaginaire exprime l'amortissement. Nous avons alors

$$\lim_{t\to+\infty} \psi(x,t) \sim 0. \tag{1.5}$$

L'ojectif de ce travail est de calculer les modes quasi-normaux pour certaines solutions à symétrie sphérique (espace de de-Sitter et trous noirs chargé) en utilisant en premier lieu la solution de l'équation d'onde (de Klein Gordon) et ensuite nous considérons des méthodes d'aproximation.

CHAPITRE

2

Relativité générale et solutions à symétrie sphérique

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous exposons un bref rappel sur la relativité générale. D'abord nous commençons par la dérivation des équations d'Einstein. Ensuite nous considérons quelques solutions à symétrie sphérique.

2.2 Relativité générale

Dans la théorie de la relativité génerale la la géometrie de l'éspace-temps est une variété pseudo-remannienne sur aquelle le carré de la distance entre deux points infiniment voisins est définie par l'intermédiaire d'une métrique

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)\, dx^\mu dx^\nu \tag{2.1}$$

où $\mu = \overline{0,3}$. Ici le tenseur métrique $g_{\mu\nu}(x)$ est une "*matrice*" symetrique ($g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$) et inversible de signature $(+ - --)$.

La derivée covariante d'un quadrivecteur de composantes contravarantes A^μ est définie par

$$\nabla_\nu A^\mu = \partial_\nu A^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho} A^\rho \tag{2.2}$$

où $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ les connexions affines définissant le transport parallele d'un vecteur. Compte tenu du fait qu'un scalaire se transforme parallelement nous pouvons écrire la dérivé covariante de la composante $A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$ sous la forme

$$\nabla_\nu A_\mu = \partial_\nu A_\mu + \Gamma^\rho_{\nu\mu} A_\rho \tag{2.3}$$

Ces définitions peuvent être facilement généralisées aux cas de tenseurs covariantes , contravariants ou mixtes. Nous avons alors

$$\nabla_\rho T^\mu_\nu = \partial_\rho T^\mu_\nu + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} T^\sigma_\nu - \Gamma^\sigma_{\rho\nu} T^\mu_\sigma \tag{2.4}$$

La dérivée covariante du tenseur métrique s'annulle

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\lambda} g_{\rho\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} g_{\rho\mu} = 0 \tag{2.5}$$

Ce qui définit les connexions métriques en fonction de la métrique

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(\partial_{\mu} g_{\rho\nu} + \partial_{\nu} g_{\rho\mu} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu} \right) \tag{2.6}$$

où $g^{\lambda\rho}$ est le tenseur métrique contravariant dont les composantes sont les éléments inverse de la matrice $g_{\lambda\rho}$

$$g^{\lambda\rho} g_{\sigma\rho} = \delta^{\sigma}_{\lambda} \tag{2.7}$$

et $\delta^{\sigma}_{\lambda}$ est le symbole de Kronecker (un tenseur).

Pour un champ de vecteur A^{μ} les dérivées covariantes successives ne commutent pas,

$$\nabla_{\lambda} \nabla_{\nu} A^{\mu} \neq \nabla_{\nu} \nabla_{\lambda} A^{\mu}, \tag{2.8}$$

et le commutateur des deux dérivées definit le tenseur de courbure ou tenseur dre Riemann $R^{\mu}_{\rho\nu\lambda}$ par

$$\left[\nabla_{\lambda}, \nabla_{\nu} \right] A^{\mu} \equiv R^{\mu}_{\rho\lambda\nu} A^{\rho}. \tag{2.9}$$

En utilisant les définitions des dérivées covariantes, nous obtenons les composantes du tenseur de Riemann

$$R^{\mu}_{\rho\nu\lambda} = \partial_{\nu} \Gamma^{\mu}_{\rho\lambda} - \partial_{\lambda} \Gamma^{\mu}_{\rho\nu} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\nu} \Gamma^{\sigma}_{\rho\lambda} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda} \Gamma^{\sigma}_{\rho\nu} \tag{2.10}$$

Ce tenseur satisfait aux propriétés de symétrie suivantses

$$R^{\mu}_{\rho\nu\lambda} = -R^{\mu}_{\rho\lambda\nu}, \tag{2.11}$$

$$R^{\mu}_{\rho\nu\lambda} + R^{\mu}_{\nu\lambda\rho} + R^{\mu}_{\lambda\rho\nu} = 0 \tag{2.12}$$

et

$$R_{\mu\rho\nu\lambda} = R_{\nu\lambda\mu\rho} \tag{2.13}$$

où $R_{\mu\rho\nu\lambda} = g_{\mu\nu} R^{\mu}_{\rho\nu\lambda}$. Le tenseur de Riemann vérifie aussi les identités de Bianchi

$$\nabla_{\sigma} R^{\mu}_{\rho\nu\lambda} + \nabla_{\lambda} R^{\mu}_{\rho\sigma\nu} + \nabla_{\nu} R^{\mu}_{\rho\lambda\sigma} = 0 \tag{2.14}$$

Par contraction des indices du tenseur de Riemann, nous obtenons le tenseur de Ricci

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} = g^{\sigma\lambda} R_{\sigma\mu\lambda\nu} \tag{2.15}$$

Il st bien claire que ce tenseur est symétrique $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$. La contraction du tenseur de Ricci nous donne le scalaire de courbure

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \tag{2.16}$$

La contraction des identités de Bianchi conduit à l'équation

$$\nabla_{\nu} \left(R^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2} R \delta^{\nu}_{\mu} \right) = 0 \tag{2.17}$$

qui est formellement analogue à l'équation de continuité covariante pour le tenseur d'énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$. Dans un espace-temps courbe l'équation de continuité de $T_{\mu\nu}$ s'écrit

$$\nabla_{\nu} T^{\nu}_{\mu} = 0. \tag{2.18}$$

Cette analogie entre (2.17) et(2.18) a conduit Einstien à prpposé les équations qui déterminent le champ de gravitation engendré par une distribution de matière

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \tag{2.19}$$

où $G_{\mu\nu}$ est appelé tenseur d'Einstien et la constante d'Einstien κ est reliée à la constante de Newton G par la relation

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}. \tag{2.20}$$

Les équations d'Einstien (2.19) peuvent être, également, obtenues en minimisant l'action ($\delta I = 0$)

$$I = I_E + I_m \tag{2.21}$$

où I_E est l'action d'Einstein-Hilbert associée au champ gravitationnel

$$I_E = \frac{1}{2\kappa} \int R \sqrt{|g|} d^4 x \tag{2.22}$$

où$\sqrt{|g|} d^4 x$ (avec $g = \det (g_{\mu\nu})$) est la densité invariante de 4-volume en coordonnées curvilignes. L'action de la matière I_m est donnée par

$$I_m = \int L_m \sqrt{|g|} d^4x \tag{2.23}$$

Pour calculer la variation de l'action d'Einstein-Hilbert lors d'une variation $\delta g_{\mu\nu}$ du tenseur métrique, décomposons

$$\delta(R\sqrt{|g|}) = \sqrt{|g|}\left[g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2}R\frac{\delta|g|}{|g|}\right]. \tag{2.24}$$

A l'aide des propriétés $\nabla_\lambda g^{\mu\nu} = 0$, et

$$\nabla_\lambda A^\lambda = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\lambda(\sqrt{|g|}A^\lambda) \tag{2.25}$$

nous pouvons montrer que le premier terme dans (2.24) conduit à une divergence qui disparait après intégration par parties, car

$$\begin{aligned}
\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= \sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\left[\nabla_\lambda\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \nabla_\nu\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\right] \\
&= \nabla_\lambda(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}) \\
&= \partial_\lambda(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - \partial_\nu(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}).
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Compte tenu du fait que

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho}\delta g_{\lambda\rho}\,, \quad \frac{\delta|g|}{|g|} = g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\,, \tag{2.27}$$

nous obtenons alors

$$\delta I_g = \frac{1}{2\kappa}\int\left[R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu}\right]\delta g_{\mu\nu}\sqrt{|g|}\,d^4x\,. \tag{2.28}$$

La variation de l'action de la matière I_m étant, par définition du tenseur d'énergie-impulsion,

$$\delta I_m \equiv -\frac{1}{2}\int T^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\sqrt{|g|}\,d^4x\,, \tag{2.29}$$

la variation de l'action totale (2.21) conduit bien aux équations d'Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}\,. \tag{2.30}$$

2.3 Trous noirs de Schwarzschild

En 1916 karl Schwarzschild a pu trouver une solution des équations d'Einstein dans le vide

$$G_{\mu\nu} = 0. \tag{2.31}$$

Cette solution qui s'écrit

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2(\theta)\, d\varphi^2\right) \tag{2.32}$$

est une bonne approximation du champ gravitationnel induit par une source de masse M.

2.3.1 Théorème de Birkhoff

Ce théorème (1923) énonce que la seule solution à symétrie sphérique des équations d'Einstein dans le vide est nécessairement statique,

$$ds^2 = -g_{00}(\vec{x})dt^2 + g_{ij}(\vec{x})dx^i dx^j, \tag{2.33}$$

et asymptotiquement plate. C'est la solution de Schwarzschild (1916) à une transformation de coordonnées près.

Le potentiel $-g_{00} = 1 - 2GM/r$ correspond bien au potentiel newtonien si la constante d'intégration M est la masse de la source. Cette solution est valable par exemple à l'extérieur d'une étoile sphérique de masse M, qu'elle soit statique ou en effondrement gravitationnel.

2.3.2 Solution de Schwarzschild

Considérons les équations d'Einstein dans le vide

$$G_{\mu\nu} = 0 \quad \text{et} \quad T_{\mu\nu} = 0 \tag{2.34}$$

En contractant les indices du tenseur d'Einstein, nous obtenons $R = 0$, ce qui nous permet d'écrire

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{2.35}$$

Suposons maintenant que la métrique $g_{\alpha\beta}(x)$ est à symétrie sphérique

$$g_{\alpha\beta}(x^\alpha) = g_{\alpha\beta}(t, r) \tag{2.36}$$

avec

$$ds^2 = e^{2\nu(r,t)} dt^2 - e^{2\lambda(r,t)} dr^2 - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) \tag{2.37}$$

Les composantes du tenseur de Ricci non nulles sont

$$R_{00} = \frac{1}{c^2}\left(\dot{\lambda}\dot{\nu} - \ddot{\lambda} - \dot{\lambda}^2\right) + \left(\nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda' + \frac{2\nu'}{r}\right) e^{2(\nu-\lambda)} \tag{2.38}$$

$$R_{11} = \frac{1}{c^2}\left(\ddot{\lambda} + \dot{\lambda}^2 - \dot{\lambda}\dot{\nu}\right) e^{2(\lambda-\nu)} - \nu'' - \nu'^2 + \nu'\lambda' + \frac{2\lambda'}{r} \tag{2.39}$$

$$R_{01} = \frac{2}{r}\dot{\lambda} \tag{2.40}$$

$$R_{22} = \left(-1 - r\nu' + r\lambda'\right) e^{-2\lambda} + 1 \tag{2.41}$$

$$R_{33} = R_{22}\sin^2\theta \tag{2.42}$$

De l'équation (2.40), nous tirons

$$R_{01} = \frac{2}{r}\dot{\lambda} = 0 \tag{2.43}$$

ce qui implique que λ ne depend pas du temps

$$\lambda = \lambda(r) \tag{2.44}$$

La combinaison des équations (2.38) et (2.39) nous donne

$$R_{00} + e^{2(\nu-\lambda)}R_{11} = \frac{e^{2(\nu-\lambda)}}{r}\left(2\nu' + 2\lambda'\right). \tag{2.45}$$

Suivant les équations d'Einstein $R_{00} = R_{11} = 0$, nous obtenons

$$\nu' + \lambda' = 0$$

et, par conséquent

$$\nu(r,t) + \lambda(r) = \eta(t) \tag{2.46}$$

Comme $R_{00} = 0$ et $\dot{\lambda} = 0$ nous pouvons écrire

$$\nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda' + \frac{2\nu'}{r} = 0 \tag{2.47}$$

Maintenant compte tenu du (2.46) nous obtenons les équations

$$\nu'' + 2(\nu')^2 + \frac{2\nu'}{r} = 0 \tag{2.48}$$

$$\lambda'' - 2(\lambda')^2 + \frac{2\lambda'}{r} = 0. \tag{2.49}$$

L'integration de la dernière équation nous donne l'expression de $\lambda(r)$

$$e^{-2\lambda(r)} = 1 - \frac{2M}{r}. \tag{2.50}$$

A partir de (2.46) nous pouvons écrire

$$e^{2\nu(r,t)} = e^{2\eta(t)} e^{-2\lambda(r,t)} \tag{2.51}$$

ce qui donne

$$e^{2\nu(r,t)} = e^{2\eta(t)} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \tag{2.52}$$

A ce niveau nous faisons le changement

$$d\tilde{t} = e^{2\eta(t)} dt \tag{2.53}$$

Pour écrire la solution sous la forme

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2(\theta)\, d\varphi^2\right) \tag{2.54}$$

qui est bien la métrique de Schwarzschild

2.3.3 Singularités et horizons

La métrique de Schwarzschild est singuliére en $r = 0$ où $g_{tt} = \infty$ et $g_{rr} = 0$ et aussi en $r = 2M$ où $g_{tt} = 0$ et $g_{rr} = \infty$. Nous pouvons cependant montrer que $r = 2M$ n'est pas une singularité physique mais une singularité apparente (singularité de coordonnées). La constante $r_s = 2M$ est appellée le rayon de Schwarzschild. Elle représente aussi l'horizon des évenements. Si M est la masse du corps massif qui crée le champ gravitationnel (l'étoile), le rayon de Schwarzschild $r_s = 2M$ se trouve à l'interieur de l'étoile.

2.4 Solution de Reissner-Nordstron

La solution de Reissner-Nordstron représente le champ de gravitation d'une étoile à symétrie sphérique de masse M et la charge éléctrique Q

2.4.1 Equations de Maxwell-Einstein

Considérons les équations d'Einstein en presence d'un champ de Maxwell décrit par le tenseur énergie-impulsion

$$T^{\nu}_{\mu} = \frac{1}{4\pi} \left[F_{\mu\alpha} F^{\mu\alpha} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}\right] \tag{2.55}$$

Il existe un potentiel electromagnetique A_μ tel que

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{2.56}$$

La symétrie sphérique pour le potentiel se traduit par les conditions

$$\begin{aligned} A_0 &= \phi(r,t) \\ A_1 &= f(r,t) \\ A_2 &= 0 \\ A_3 &= 0 \end{aligned} \tag{2.57}$$

Par une transformation de jauge nous pouvons éliminer la $f(r,t)$ (i.e. $f \to f' = f + \partial_r \Psi = 0$). Nous avons alors

$$\begin{aligned} F_{01} &= -F_{10} = -\phi'(r,t) \\ F^{01} &= -F^{10} = e^{-(\nu+\lambda)}\phi'(r,t) \end{aligned} \tag{2.58}$$

Les équations de Maxwell et d'Einstien sont

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}\right)_{,\nu} = 0 \tag{2.59}$$

Nous avons alors

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 e^{-(\nu+\lambda)}\phi'(r,t)\right) = 0 \tag{2.60}$$

ce qui nous donne

$$r^2 e^{-(\nu+\lambda)}\phi'(r,t) = Q$$

où la constante d'integration Q peut etre indentifiée à la charge électrique de la source.

En suivant les même étapes que dans le cas de la solution de Schwazschild nous obtenons la solution de Reissner-Nordstrom

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2(\theta)\, d\varphi^2\right) \tag{2.61}$$

avec

$$A_0 = -\frac{Q}{r},\; F_{01} = -F_{10} = -\frac{Q}{r^2} \text{ et } T_0^0 = -\frac{1}{8}\frac{Q}{r^2} \tag{2.62}$$

2.4.2 Signification physique de M et Q

Comme pour la solution de Schwarzschild , l'approximation newtonienne permet d'interpréter M comme la masse de l'etoile (en unités géométriques).

Rappelons la loi de Gauss qui lie distribution de charge à la divergence du champ électrique

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_m\left(\sqrt{-g}F^{0m}\right)=j^0 \tag{2.63}$$

et l'expression de la charge électrique totale qui l'intégrale de volume de la distribution de charge .On a donc

$$Q_e=\int d^3x\sqrt{-g}j^0 \tag{2.64}$$

Or,

$$\begin{aligned} Q_e &= \int d^3x\partial_m\left(\sqrt{-g}F^{0m}\right) \\ &= \oint d^2s_m\sqrt{-g}F^{0m} \\ &= \int_0^\pi d\cos\theta\int_0^{2\pi}d\varphi r^2\frac{Q^2}{r^2} \\ &= Q \end{aligned} \tag{2.65}$$

Ce qui indique que la constante d'intégration Q est bien , comme annoncé , la charge totale de l'étoile

Noter que ,pour une particule élémentaire de masse M et de charge Q le rapport $\frac{M}{Q}$ est très petit : il est de l'ordre de 10^{-18} ,pour le proton et de 10^{-22} pour l'électron , par exemple .Les particules élémentaires ont aussi un spin; leur champ é.m et gravitationnel ne peut donc pas être à symétrie sphérique et n'est donc pas donné par la solution de Reissner-Nordsrom. pour des corps astronomiques ,par contre ,on s'attend à l'inverse , càd à ce que $\frac{Q}{M} <<< 1$ de sorte que ,dans ce cas la charge électrique est quasi négligeable .

2.4.3 Singularités,horizons

Par rapport à schawarzschild, lastructure des singularités et des horizons d'événements est plus compliquée ,à cause du terme supplémentaire dans

$$\Delta(r)=-g_{00}=1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2} \tag{2.66}$$

ce qui ne change pas ,c'est que en $r = 0$ il y a une vraie singularité de courbure (dont on peut s'assurer en calculant le scalaire $R_{\mu\nu\rho\sigma}\ R^{\mu\nu\rho\sigma}$). par contre ,ce qui joue le role de $r = 2M$ dans schwarzschild est la valeur de r pour laquelle Δ s'annule :

càd

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2} \tag{2.67}$$

En fonction des valeurs relatives de M^2 et Q^2,il y a deux , une ou zéro solutions qu'il convient de considérer séparément.

Cas $:M^2 < Q^2$

Dans ce cas Δ est toujours positif et la métrique est parfaitement régulière partout sauf en $r = 0$ qui est une **singularité nue.** l'analyse des géodésique révèle que cette singularité est **répulsive** : les geodésiques de type -temps n'atteignent pas $r = 0$,elles s'en approchent puis rebroussent chemin .

cette solution est généralement considérée comme non-physique

Cas $:M^2 > Q^2$

Les surfaces $r = r_+$ et $r = r_-$sont toutes deux des surfaces nulles; ce sont des horizons d'événements. Pour l'observateur au repos loin de l'étoile $r = r_+$ joue le meme role que $r = 2M$ dans Schwarzschild : sa description de la trajectoire d'une particule neutre en chute libre vers le trou noir reste la meme , que le tou noir soit chargé ou non.

la métrique de Reissner-Nordstrom est régulière dans 3 régions,à savoir

$$\begin{aligned} I &: \ r_+ < r < \infty \\ II &: \ r_- < r < r_+ \\ III &: \ 0 < r < r_- \end{aligned} \tag{2.68}$$

Les coordonnées t et r sont respectivement de type temps et de type espace dans les régions I et III ; par contre ,dans la région II, t est de type espace et r est de type temps . comme dans le cas de schwarzschild , ces régions sont complètement disconnectées car les cones de lumière y ont des orientations très différents .On peut cependant ici aussidéfinir des coordonnées mieux appropriées du type d'Eddington-Finkelstien ou du type de Kruskal qui définissent l'extension analytique maximale .

Cas extreme : $M^2 = Q^2$

Dans ce cas

$$\Delta(r) = \left(1 - \frac{M}{r}\right)^2 \tag{2.69}$$

et

$$r_+ = r_- = M \tag{2.70}$$

ils'agit encore d'un horizon d'événements .La coordonnée r n'est jamais de type-temps :elle est de type lumière en $r = M$ mais elle est de type -espace de part et d'autre de $r = M$.

2.5 Solutions en présence d'une constante cosmologique

En présence d'une constante cosmologique Λ, les équations d'Einstien s'écrivent

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{u\nu}R - g_{\mu\nu}\Lambda = 8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{2.71}$$

Dans ce cas nous pouvons obtenir les solutions suivantes :

1) Trou noir de de-Sitter-Sschwarzschild

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1}dr^2 - r^2 d\Omega^2 \tag{2.72}$$

avec

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2$$

2) Trou noir de de-Sitter-Reissner-Nordström

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1}dr^2 - r^2 d\Omega^2 \tag{2.73}$$

3) Pour $M = Q = 0$, nous avons l'espace de de-Sitter

$$ds^2 = \left(1 - H^2r^2\right)dt^2 - \left(1 - H^2r^2\right)^{-1}dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2(\theta)\, d\varphi^2\right) \tag{2.74}$$

avec $H^2 = \frac{\Lambda}{3}$.

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons exposé un bref rappel sur la relativité générale. D'abord nous avons montrer comment dériver les équations d'Einstein. Ensuite nous avons obtenu la solution de ces équation dans le vide. Cette soltion n'est rien d'autre que la solution de Schwarzschild. En deuxième étape, nous avons considéré les equation d'Einstein-Maxwell, où nous avons montré que la seule solution à symétrie sphérique est la solution de Reissner-Nordstron. A la fin nous avons cité quelques solutions en présence d'une constante cosmologique.

CHAPITRE

3

Modes quasi-normaux pour les potentiels PT en MQ

3.1 Introduction

Avant de chercher les modes quasi-normaux pour le cas d'un trou noir chargé où l'équation de Klein Gordon n'a pas de solution analytique. Nous nous proposons de ce chapitre d'étudier quelques problèmes de mécanique quantique qui peuvent avoir des modes quasi-normaux.

3.2 Premier exemple

3.2.1 Equation de Schrödinger et ses solutions

Considéronsl'équation de Schrödinger

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{V_0}{\cosh^2\kappa x}\right]\varphi(x)=E\varphi(x)\,. \tag{3.1}$$

pour obtenir les solutions de cette équation nous faisons le changement de variable

$$y=\frac{1}{2}(1+\tanh\kappa x) \tag{3.2}$$

Dans ce cas, comme $dy=\frac{1}{2}\kappa\left[1-\tanh^2(\kappa x)\right]dx$, nous pouvons écrire

$$\frac{\partial}{\partial x}=2\kappa y(1-y)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{3.3}$$

Pour la dérivée seconde, nous avons

$$\frac{d^2}{dx^2}=4\kappa^2y^2(1-y)^2\frac{d^2}{dy^2}+4\kappa^2y(1-y)(1-2y)\frac{d}{dy} \tag{3.4}$$

Nous obtenons alors l'équation différentielle du second ordre

$$\left[y^2(1-y)^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+y(1-y)(1-2y)\frac{\partial}{\partial y}-\frac{V_0}{\kappa^2}y(1-y)+\frac{E}{4\kappa^2}\right]\varphi(y)=0 \tag{3.5}$$

Ici, nous écrivons la solution sous la forme

$$\varphi(y)=y^q(1-y)^pF(y) \tag{3.6}$$

avec

$$p=q=i\frac{\omega}{2\kappa} \tag{3.7}$$

pour obtenir l'équation

$$\left[y\left(1-y\right)\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\left(i\frac{\omega}{\kappa}+1-2\left(i\frac{\omega}{\kappa}+1\right)y\right)\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\omega^2}{\kappa^2}-i\frac{\omega}{\kappa}-\frac{V_0}{\kappa^2}\right]F\left(y\right)=0 \tag{3.8}$$

L'équation (3.8) est une équation hypergeometrique

$$\left[y\left(1-y\right)\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\left(C-\left(A+B+1\right)y\right)\frac{\partial}{\partial y}-AB\right]F\left(y\right)=0 \tag{3.9}$$

où les ceoffitions A, B et C sont donnés par

$$A=i\frac{\omega}{\kappa}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{V_0}{\kappa^2}}=i\frac{\omega}{\kappa}+\frac{1}{2}+\alpha, \tag{3.10}$$

$$B=i\frac{\omega}{\kappa}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{V_0}{\kappa^2}}=i\frac{\omega}{\kappa}+\frac{1}{2}-\alpha \tag{3.11}$$

et

$$C=i\frac{\omega}{\kappa}+1 \tag{3.12}$$

Suivant [17], les deux solution linéairement indépendantes de cette équation sont données par

$$F_1\left(y\right)=F\left(A,B,C;y\right) \tag{3.13}$$

et

$$F_2\left(y\right)=y^{1-C}F\left(A-C+1,B-C+1,2-C;y\right) \tag{3.14}$$

3.2.2 Modes quasi-normaux

Maintenant nous cherchons parmi ces deux solutions celle qui vérifie les condition initiales

$$\lim_{x\to\pm\infty}\varphi\left(x\right)=\lim_{y\to\frac{1\pm1}{2}}\widetilde{\varphi}\left(y\right)=\exp\left(\pm i\omega x\right) \tag{3.15}$$

En étudiant le comportement des deux solutions à ($x\to-\infty$, $y\to0$), nous pouvons voir que la bonne solution est $F_2\left(y\right)$. Nous avons alors

$$\widetilde{\varphi}_2\left(y\right)\sim y^{-\frac{i\omega}{2\kappa}}\sim\exp\left(-i\omega x\right). \tag{3.16}$$

Pour obtenir le comportement de cette solution à $x\to+\infty$, ($y\to1$) nous utilisons la propriètè

$$
\begin{aligned}
F(A,B,C;y) &= \frac{\Gamma(C)\,\Gamma(C-A-B)}{\Gamma(C-A)\,\Gamma(C-B)} F(A,B;A+B-C+1;1-y) + \\
&\quad (1-y)^{C-A-B} \frac{\Gamma(C)\,\Gamma(A+B-C)}{\Gamma(A)\,\Gamma(B)} F(C-A,C-B,C-A-B+1;1-y)\,.
\end{aligned} \tag{3.17}
$$

Il vient que la solution $\widetilde{\varphi}_2(y)$ se comporte à $x \to +\infty$, $(y \to 1)$ comme

$$
\widetilde{\varphi}_2(y) \simeq a(1-y)^{\frac{i\omega}{2\kappa}} + b(1-y)^{-\frac{i\omega}{2\kappa}} \tag{3.18}
$$

$$
\simeq a\ \exp(i\omega x) + b\ \exp(-i\omega x) \tag{3.19}
$$

avec

$$
a = \frac{\Gamma\left(1-\frac{i\omega}{\kappa}\right)\Gamma\left(-\frac{i\omega}{\kappa}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)} \tag{3.20}
$$

$$
b = \frac{\Gamma\left(1-\frac{i\omega}{\kappa}\right)\Gamma\left(\frac{i\omega}{\kappa}\right)}{\Gamma\left(-i\frac{\omega}{\kappa}+\frac{1}{2}+\alpha\right)\Gamma\left(-i\frac{\omega}{\kappa}+\frac{1}{2}-\alpha\right)}. \tag{3.21}
$$

Pour avoir $\widetilde{\varphi}_2(y) \sim \exp(i\omega x)$ il faut que $b = 0$ d'où on tire la condition

$$
-n = -i\frac{\omega}{\kappa} + \frac{1}{2} \pm \alpha \tag{3.22}
$$

Les modes quasi -normaux sont donc

$$
\omega = -i\kappa\left(n+\frac{1}{2}\right) \pm \kappa\sqrt{\frac{V_0}{\kappa^2}-\frac{1}{4}}. \tag{3.23}
$$

3.3 Potentiel de Rosen-Morse

Considérons maintenant le potentiel de Rosen-Morse

$$
V(x) = \frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)} + V_1 \tanh(\alpha x)\,. \tag{3.24}
$$

Pour traiter ce problème nous posons

$$
y = \frac{1}{2}(1+\tanh \alpha x) \tag{3.25}
$$

Nous obtenons l'équation différentielle du second ordre

$$\left[y^2(1-y)^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+y(1-y)(1-2y)\frac{\partial}{\partial y}-\frac{V_0}{\alpha^2}y(1-y)-\frac{V_1}{4\alpha^2}(2y-1)+\frac{\omega^2}{4\alpha^2}\right]\phi(y)=0 \tag{3.26}$$

Si nous écrivons la solution sous la forme

$$\phi(y)=y^{\lambda}(1-y)^{\mu}g(y) \tag{3.27}$$

avec

$$\mu^2=\lambda^2=\frac{V_1}{4\alpha^2}-\frac{\omega^2}{4\alpha^2} \tag{3.28}$$

Nous obtenons l'équation hypergeométrique

$$\left[y(1-y)\frac{\partial^2}{\partial y^2}+(C-(A+B+1)y)\frac{\partial}{\partial y}-AB\right]g(y)=0 \tag{3.29}$$

où cette fois-ci les coefficients A, B et C sont donnés par

$$A = 2\lambda+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{V_0}{\alpha^2}}=2\lambda+\frac{1}{2}+\beta \tag{3.30}$$

$$B = 2\lambda+\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{V_0}{\alpha^2}}=2\lambda+\frac{1}{2}-\beta \tag{3.31}$$

$$C = 2\lambda+1 \tag{3.32}$$

Les deux solution linéairement indépendantes peuvent etre données par

$$g_1(y)=F(A,B,C;y) \tag{3.33}$$

et

$$g_2(y)=y^{1-C}F(A-C+1,B-C+1,2-C;y). \tag{3.34}$$

En suivant les même étapes que dans la section précédente, nous pouvons obtenir pour les modes quasi -normaux l'expression suivante

$$2\lambda=-i\alpha\left(n+\frac{1}{2}\right)\pm\alpha\sqrt{\frac{V_0}{\alpha^2}-\frac{1}{4}} \tag{3.35}$$

3.4 Potentiel de Poschl-Teller modifié

Le dernier potentiel que nous proposons d'étudier est le potentiel de Poschl-Teller

$$V(x) = \frac{V_+}{\cosh^2 x} + \frac{V_-}{\sinh^2 x} \tag{3.36}$$

Pour résoudre l'équation de Schrodinger correspondante nous introduisant la nouvelle variable

$$y = \tanh^2 x. \tag{3.37}$$

Nous obtenons nous obtenons alors l'équation différentielle

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{\frac{1}{2}}{y} - \frac{1}{1-y}\right)\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{(1-y)\,y}\left(\frac{\frac{\omega^2}{4\kappa^2}}{1-y} - \frac{V_-}{4y} - \frac{V_+}{4}\right)\right]\varphi(y) = 0 \tag{3.38}$$

qui est de type Riemann

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{1-\alpha-\alpha'}{y} - \frac{1-\gamma-\gamma'}{1-y}\right)\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{(1-y)\,y}\left(\frac{\gamma\gamma'}{1-y} + \frac{\alpha\alpha'}{y} - \beta\beta'\right)\right]\varphi(y) = 0 \tag{3.39}$$

où

$$\alpha = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4} + V_-} \quad , \alpha' = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4} + V_-} \tag{3.40}$$

$$\beta = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4} - V_+} \quad , \beta' = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4} - V_+} \tag{3.41}$$

$$\gamma = -\gamma' = -i\frac{\omega}{2\kappa} \tag{3.42}$$

avec la condition $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1$.

La solution qui a le comportement $\varphi_1(y) = e^{-i\omega x}$ quand $x \to -\infty$ et $y \to 1$ est donnée par

$$\varphi(y) = (1-y)^{\gamma} y^{\alpha} F\left(\gamma + \beta + \alpha, \gamma + \beta' + \alpha, 1 + \gamma - \gamma', 1 - y\right) \tag{3.43}$$

Au voisinage de 0 cette solution se comporte comme

$$\varphi_1(y) = \tilde{a} y^{\alpha} + \tilde{b} y^{\alpha'} \tag{3.44}$$

où les coefficients $\tilde{a}$ et $\tilde{b}$ sont donnés par

$$\tilde{a} = \frac{\Gamma\left(1 - \frac{i\omega}{\kappa}\right)\Gamma(-\eta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{i\omega}{2\kappa} - \frac{1}{2}(\eta - \xi)\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{i\omega}{2\kappa} - \frac{1}{2}(\eta + \xi)\right)} \tag{3.45}$$

$$\tilde{b} = \frac{\Gamma\left(1 - \frac{i\omega}{\kappa}\right)\Gamma(\eta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{i\omega}{2\kappa} + \frac{1}{2}(\eta - \xi)\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{i\omega}{2\kappa} + \frac{1}{2}(\eta + \xi)\right)}$$

avec

$$\xi = \sqrt{\frac{1}{4} - V_+} \quad \text{et} \quad \eta = \sqrt{\frac{1}{4} + V_-} \tag{3.46}$$

La condition d'avoir des modes quasi-normaux et alors $\tilde{b} = 0$. Nous obtenons alors

$$\omega = -i2\kappa\left(n + \frac{1}{2}\right) - i\kappa\left(\sqrt{\frac{1}{4} + V_-} \pm i\sqrt{V_+ - \frac{1}{4}}\right). \tag{3.47}$$

CHAPITRE

4

Modes quasi-normaux pour l'espace de de-Sitter

4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous nous proposons de calculer les modes quasi-normaux pour un espace de de-Sitter statique perturbé par un champ scalaire.

4.2 Equation de Klein Gordon

L'espace de de-Sitter statique est décrit par la métrique

$$ds^2 = f(r)\,dt^2 - g(r)\,dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \tag{4.1}$$

avec

$$f(r) = 1 - H^2r^2 \quad , \quad g(r) = \frac{1}{1 - H^2r^2} \tag{4.2}$$

Dans ce cas l'équation du champ scalaire s'ecrit

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi\right) + m^2\phi = 0 \tag{4.3}$$

où

$$\sqrt{-g} = \sqrt{f(r)\,g(r)}r^2\sin(\theta) \tag{4.4}$$

Si nous faisons la factorisation

$$\phi = \frac{e^{i\omega t}}{r} y_l^m(\theta,\varphi)\,\xi(r) \tag{4.5}$$

Nous obtenons l'équation radiale

$$\begin{aligned}&\left[\left(1 - H^2r^2\right)^2\frac{\partial^2}{\partial r^2} - 2H^2r\left(1 - H^2r^2\right)\frac{\partial}{\partial r} + 2H^2\left(1 - H^2r^2\right)\right.\\ &\left.+\omega^2 - \left(1 - H^2r^2\right)\left(\frac{l(l+1)}{r^2} + m^2\right)\right]\xi(r) = 0\end{aligned} \tag{4.6}$$

4.3 Solutions de l'équation radiale

En premier lieu, nous faisons le changement de variable

$$\rho = H^2r^2 \tag{4.7}$$

pour obtenir l'équation

$$\left[\rho\left(1-\rho\right)^{2}\frac{\partial^{2}}{\partial\rho^{2}}+\frac{1}{2}\left(1-\rho\right)\left(1-3\rho\right)\frac{\partial}{\partial\rho}+\left(\frac{m^{2}}{4H^{2}}-\frac{1}{2}\right)\rho\right. \\ \left.-\frac{l\left(l+1\right)}{4\rho}+\frac{1}{2}+\frac{\omega^{2}-m^{2}}{4H^{2}}+\frac{l\left(l+1\right)}{4}\right]\tilde{\xi}\left(\rho\right)=0 \tag{4.8}$$

Si nous écrivons la solution de cette équation sous la forme

$$\xi\left(\rho\right)=\rho^{\lambda}\left(1-\rho\right)^{\mu}f\left(\rho\right) \tag{4.9}$$

avec

$$\lambda=\frac{1}{2}\left(l+1\right) \tag{4.10}$$

et

$$\mu=\frac{i\omega}{2H} \tag{4.11}$$

Nous obtenons, encore une fois, une équation de type hypergeometrique

$$\left[\rho\left(1-\rho\right)\frac{\partial^{2}}{\partial\rho^{2}}+\left(C-\left(A+B+1\right)\rho\right)\frac{\partial}{\partial\rho}-AB\right]f\left(\rho\right)=0 \tag{4.12}$$

où les ceoffitions : A, B et C sont donnés par

$$C = l+\frac{3}{2} \tag{4.13}$$

$$A = \frac{i\omega}{2H}+\frac{l}{2}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{m^{2}}{H^{2}}} \tag{4.14}$$

$$B = \frac{i\omega}{2H}+\frac{l}{2}+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{m^{2}}{H^{2}}} \tag{4.15}$$

Les deux solutions linéairement independantes sont

$$f_{1}\left(\rho\right) = F\left(A,B,C,\rho\right) \tag{4.16}$$

$$f_{2}\left(\rho\right) = \rho^{-\left(l+\frac{1}{2}\right)}F\left(A-C+1,B-C+1,2-C,\rho\right) \tag{4.17}$$

4.4 Modes quasi-normaux

Les deux solutions obtenues ont les comportements asymtotiques suivants

$$\tilde{\xi}_{1}\left(\rho\right)\underset{r\to0}{=}\rho^{\frac{l+1}{2}} \tag{4.18}$$

$$\tilde{\xi}_{2}\left(\rho\right)\underset{r\to0}{=}\rho^{-\frac{l}{2}} \tag{4.19}$$

Ainsi, la solution qui peut représenter des modes quasi-normaux est $\tilde{\xi}_1(\rho)$

Etudions maintenant le comportement de $\tilde{\xi}_1(\rho)$ quand $r \to \frac{1}{H}$ $(\rho \to 1)$ en utilisant la propriété(5.15). Nous Avons alors

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}(\rho) &= \frac{\Gamma\left(l+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{i\omega}{H}\right)}{\Gamma\left(\frac{l}{2}+\frac{3}{4}-\frac{i\omega}{2H}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{m^2}{H^2}}\right)\Gamma\left(\frac{l}{2}+\frac{3}{4}-\frac{i\omega}{2H}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{m^2}{H^2}}\right)}(1-\rho)^{\frac{i\omega}{2H}} \\ & \frac{\Gamma\left(l+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{i\omega}{H}\right)}{\Gamma\left(\frac{i\omega}{2H}+\frac{l}{2}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{m^2}{H^2}}\right)\Gamma\left(\frac{i\omega}{2H}+\frac{l}{2}+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{m^2}{H^2}}\right)}(1-\rho)^{-\frac{i\omega}{2H}} \end{aligned} \tag{4.20}$$

Finalement les modes quasi-normaux se calculent à partir de la condition

$$\frac{\Gamma\left(l+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{i\omega}{H}\right)}{\Gamma\left(\frac{l}{2}+\frac{3}{4}-\frac{i\omega}{2H}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{m^2}{H^2}}\right)\Gamma\left(\frac{l}{2}+\frac{3}{4}-\frac{i\omega}{2H}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{m^2}{H^2}}\right)}=0 \tag{4.21}$$

Nous obtenons alors

$$-\frac{i\omega}{2H}+\frac{l}{2}+\frac{3}{4}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{m^2}{H^2}}=-n \tag{4.22}$$

et, par conséquent,

$$\omega=-iH\left(2n+l+\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{m^2}{H^2}}\right). \tag{4.23}$$

CHAPITRE

5

Modes quasi-normaux pour un trou noir charge

5.1 Introduction

L'objectif principal de ce chapitre est de calculer les modes quasi-normaux pour un trou noir chargé perturbé par un champ scalaire chargé. En générale l'équation d'onde de Klein-Gordon correspendante n'a pas de solutions analytiques. C'est ainsi que nous considérons la limite extrémale $Q/M \to 1$. Dans ce cas, nous pouvons dériver une formule analytique compacte pour le spectre des modes quasi-normaux en suivant l'article [26]

5.2 Equation de Klein Gordon

Nous considérons un champ scalaire ϕ de masse μ et de charge q en présence d'un trou noir de Reissner-Nordström de masse M et de charge Q.

La dynamique du champ scalaire massif dans l'espace-temps courbe du trou noir est décrit par l'équation de Klein Gordon

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}g^{\nu\mu}\partial_\nu\phi\right)+m^2\phi=0 \tag{5.1}$$

avec

$$\sqrt{-g}=\sqrt{g\left(r\right)f\left(r\right)}r^2\sin\theta. \tag{5.2}$$

L'équation (5.1) peut s'écrire sous la forme

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{g}{f}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\left(\frac{2}{r}+\frac{f'g-g'f}{2gf}\right)\frac{\partial}{\partial r}-\left(\frac{L^2}{r^2}+m^2\right)g\right]\phi=0 \tag{5.3}$$

En écrivant le champ scalaire sous la forme

$$\phi\left(r,t,\theta,\varphi\right)=e^{i\omega t}Y_l^m\left(\theta,\varphi\right)R\left(r\right) \tag{5.4}$$

Nous obtenons, pour $R\left(r\right)$, l'équation différentielle suivante

$$\left[\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\left(r-M\right)\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\left(\omega-\frac{qQ}{r}\right)^2}{1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}}-l\left(l+1\right)-m^2\right]R\left(r\right)=0 \tag{5.5}$$

Nous nous intéressons aux modes quasi-normaux qui sont caractérisés par les conditions aux limites

$$R\left(r\to\infty\right)\sim\frac{1}{r}e^{-\sqrt{m^2-\omega^2}r} \tag{5.6}$$

et

$$R(r \to r_+) \sim e^{-i\left(\omega - \frac{qQ}{r_+}\right)r^*} \tag{5.7}$$

avec $dr^*/dr = 1/f(r)$.

L'équation (5.6) que les fonctions propres radiales décroissantes exponentiellement dans le régime $\omega^2 < \mu^2$.

Nous considérons le cas où $\frac{r_+ - r_-}{r_+} << 1$ et nous définissons les paramètres sans dimensions

$$a = \frac{r_+ - r_-}{r_+}\,;\;\; k = 2\omega r_+ - qQ\,;\;\; \bar{\omega} = \frac{\left(\omega - \frac{qQ}{r_+}\right)}{2\pi T_{BH}} \tag{5.8}$$

où

$$T_{BH} = \frac{r_+ - r_-}{4\pi r_+^2}$$

est la température de Bekenstein-Hawking du trou noir chargé.

En premier lieu, nous faisons le changement de variable

$$z = \frac{r - r_+}{r_+} \tag{5.9}$$

pour obtenir l'équation

$$\left[z(z+a)\frac{\partial^2}{\partial z^2} + (2z+a)\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\left(\omega r_+ (z+1)^2 - qQ(z+1)\right)^2}{z(z+a)} - l(l+1) - m^2 r_+^2 (z+1)^2\right]\tilde{R}(y) = 0 \tag{5.10}$$

Pour les trous noirs quasi-extrémaux dans le régime $a << 1$, l'équation différentielle caractéristique (5.10) peut faire l'objet d'un traitement analytique dans les deux régions asymptotiques $z << 1$ et $z >> a$.

5.2.1 Solutions pour $z \ll 1$

Nous allons d'abord analyser l'équation (5.10) dans la région proche de l'horizon.

$$z \ll 1 \tag{5.11}$$

Nous obtenons l'équation défférentielle suivante

$$\left[z^2(z+a)^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} + z(z+a)(2z+a)\frac{\partial}{\partial z} + \left(kz + \frac{\bar{\omega}a}{2}\right)^2 - \left(l(l+1) + m^2 r_+^2\right)z(z+a)\right]\tilde{R}(y) = 0 \tag{5.12}$$

En introduisant la nouvelle variable

$$y = -\frac{z}{a}$$

l'équation (5.12) peut se mettre sous la forme

$$\left[y^2(1-y)^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} + y(1-y)(1-2y)\frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{\bar{\omega}}{2} - ky\right)^2 + \left(l(l+1) + m^2 r_+^2\right) y(1-y)\right]\tilde{R}(y) = 0 \tag{5.13}$$

Si nous faisons la factorisation

$$\tilde{R}(y) = y^{\mu}(1-y)^{\lambda} f(y) \tag{5.14}$$

où

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{i\bar{\omega}}{2} \\ \lambda &= i\left(\frac{\bar{\omega}}{2} - k\right) \end{aligned} \tag{5.15}$$

nous obtenons l'équation différantielle hypergeometrique

$$\left[y(1-y)\frac{\partial^2}{\partial y^2} + (C - (A+B+1)y)\frac{\partial}{\partial y} - AB\right] f(y) = 0 \tag{5.16}$$

avec les parametres

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} + \beta + i\bar{\omega} - ik \\ B &= \frac{1}{2} - \beta + i\bar{\omega} - ik \\ C &= i\bar{\omega} + 1 \end{aligned} \tag{5.17}$$

où

$$\beta^2 = \left(l + \frac{1}{2}\right)^2 + m^2 r_+^2 - k^2 \tag{5.18}$$

Les deux solutions linéairement indépendantes peuvent être données par

$$R_1(y) = y^{\frac{i\bar{\omega}}{2}}(1-y)^{i\left(\frac{\bar{\omega}}{2}+k\right)} F\left(\frac{1}{2} + \beta + i\bar{\omega} - ik, \frac{1}{2} - \beta + i\bar{\omega} - ik, i\bar{\omega} + 1; y\right) \tag{5.19}$$

et

$$R_2(y) = y^{-\frac{i\bar{\omega}}{2}}(1-y)^{i\left(\frac{\bar{\omega}}{2}-k\right)} F\left(\frac{1}{2} + \beta - ik, \frac{1}{2} - \beta - ik, 1 - i\bar{\omega}; y\right) \tag{5.20}$$

Nous avons alors les comportement asymtotiques suivants

$$R_1(y) \underset{r\to r_+}{=} y^{\frac{i\bar{\omega}}{2}} \tag{5.21}$$
$$R_2(y) \underset{r\to r_+}{=} y^{-\frac{i\bar{\omega}}{2}}$$

La solution physiquement acceptable est $R_2(y)$. Pour obtenir le comportement de cette solution à $y \to +\infty$ nous utilisons la propriètè

$$\begin{aligned} F(A,B,C,y) &= \frac{\Gamma(C)\Gamma(B-A)}{\Gamma(B)\Gamma(C-A)} y^{-A} F\left(A, A+1-C, A+1-B, \frac{-1}{y}\right) \\ &+ \frac{\Gamma(C)\Gamma(A-B)}{\Gamma(A)\Gamma(C-B)} y^{-B} F\left(B, B+1-C, B+1-A, \frac{-1}{y}\right) \end{aligned} \tag{5.22}$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{2}+\beta-ik, \frac{1}{2}-\beta-ik, 1-i\bar{\omega}; y\right) &= \frac{\Gamma(1-i\bar{\omega})\Gamma(-2\beta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta-ik\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta+ik-i\bar{\omega}\right)} y^{\frac{-1}{2}-\beta+ik} \\ &+ \frac{\Gamma(1-i\bar{\omega})\Gamma(2\beta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta-ik\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta+ik-i\bar{\omega}\right)} y^{\frac{-1}{2}+\beta+ik} \end{aligned} \tag{5.23}$$

ce qui nous permet d'écrire

$$R(z) = \frac{\Gamma(1-i\bar{\omega})\Gamma(-2\beta)\, a^{\frac{1}{2}+\beta}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta+ik\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta+ik-i\bar{\omega}\right)} (z)^{-\frac{1}{2}-\beta} + \frac{\Gamma(1-i\bar{\omega})\Gamma(2\beta)\, a^{\frac{1}{2}-\beta}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta+ik\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta+ik-i\bar{\omega}\right)} (z)^{\frac{-1}{2}+\beta} \tag{5.24}$$

5.2.2 Solutions pour $z \gg a$

Considérons maintenant le cas où $z \gg a$. Dans cette région, l'équation (5.10) peut se réduire à l'équation suivante

$$\left[z^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2z\frac{\partial}{\partial z} + \left(\omega^2-m^2\right) r_+^2 z^2 - 2\left(\omega\left(2\omega - \frac{qQ}{r_+}\right) + m^2\right) r_+^2 z - l(l+1) - m^2 r_+^2 + 2\left(\omega r_+ - qQ\right)^2\right] \tag{5.25}$$

En faisant la factorisation

$$\tilde{R}(z) = z^{\lambda} e^{-\rho z} G(z) \tag{5.26}$$

où

$$\begin{aligned} \lambda &= -\frac{1}{2} \pm \beta \\ \rho &= i\sqrt{\omega^2 - m^2} r_+ \end{aligned} \tag{5.27}$$

Nous obtenons l'équation

$$\left[z\frac{\partial^2}{\partial z^2} + (2\lambda + 2 - 2\rho z)\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\lambda(\lambda+1) - l(l+1) - m^2 r_+^2 + 2(\omega r_+ - qQ)^2}{z} \right.$$
$$\left. + \left(\rho^2 + \left(\omega^2 - m^2\right) r_+^2\right) z - 2\lambda\rho - 2\rho + 2\omega\left(2\omega - \frac{qQ}{r_+} - m^2\right) r_+^2 \right] G(z) = 0. \tag{5.28}$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$\left[x\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (1 + 2\beta - x)\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2} - \beta + \varepsilon \right] \tilde{G}(x) \tag{5.29}$$

où

$$x = 2\rho z$$

et

$$\varepsilon = \omega\left(2\omega - \frac{qQ}{r_+} - m^2\right)\frac{r_+^2}{\rho} \tag{5.30}$$

La solution générale de l'équation (5.29) est

$$\tilde{G}(2\rho z) = N_1 (2\rho)^{-2\beta} z^{-2\beta} F\left(\frac{1}{2} - \beta - \varepsilon, 1 - 2\beta, 2\rho z\right) + N_2\ F\left(\frac{1}{2} + \beta - \varepsilon, 1 + 2\beta, 2\rho z\right) \tag{5.31}$$

où

$$\phi(a, b, z) = F(a, b, z) \tag{5.32}$$

Nous avons alors

$$R(z) = N_1\ (2\rho)^{-2\beta} z^{-\frac{1}{2}-\beta} e^{-\rho z} F\left(\frac{1}{2} - \beta - \varepsilon, 1 - 2\beta, 2\rho z\right) + N_2 z^{-\frac{1}{2}+\beta} e^{-\rho z} F\left(\frac{1}{2} + \beta - \varepsilon, 1 + 2\beta, 2\rho z\right) \tag{5.33}$$

Pour $z << 1$, nous avons le comportement

$$R(z) = N_1 (2\rho)^{-2\beta} z^{-\frac{1}{2}-\beta} + N_2 z^{-\frac{1}{2}+\beta} \tag{5.34}$$

Par comparison des solutions (5.24) et (5.34), qui sont toutes deux valides dans la région $a << z << 1$, nous obtenons les constantes de normalisation

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{\Gamma(1-i\bar{\omega})\Gamma(-2\beta)\,a^{\frac{1}{2}+\beta}(2\rho)^{2\beta}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta-ik\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta+ik-i\bar{\omega}\right)} \\ N_2 &= \frac{\Gamma(1-i\bar{\omega})\Gamma(2\beta)\,a^{\frac{1}{2}-\beta}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta-ik\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta+ik-i\bar{\omega}\right)}. \end{aligned} \tag{5.35}$$

5.3 Modes quasi-normaux

Maintenant, nous analysons la deuxieme solution dans la région $z \gg 1$. En utilisant la propriété

$$\phi(a,b,z) \simeq \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)}e^{i\pi a}z^{-a} + \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)}e^{z}z^{a-b}$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} R(z) &= \left[N_1\frac{\Gamma(1-2\beta)(-1)^{-\frac{1}{2}+\beta+\varepsilon}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta+\varepsilon\right)} + N_2\frac{\Gamma(1+2\beta)(-1)^{-\frac{1}{2}-\beta+\varepsilon}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta+\varepsilon\right)}\right](2\rho)^{-\frac{1}{2}-\beta+\varepsilon}\,z^{-1+\varepsilon}e^{-\rho z} \\ &+ \left[N_1\frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta-\varepsilon\right)} + N_2\frac{\Gamma(1+2\beta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta-\varepsilon\right)}\right](2\rho)^{-\frac{1}{2}-\beta-\varepsilon}\,z^{-1-\varepsilon}e^{\rho z} \end{aligned} \tag{5.36}$$

La condition des modes quasi-normaux est alors

$$\left[N_1\frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta-\varepsilon\right)} + N_2\frac{\Gamma(1+2\beta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta-\varepsilon\right)}\right](2\rho)^{-\frac{1}{2}-\beta-\varepsilon} = 0 \tag{5.37}$$

Enfin, en substituant les constantes de normalisation (5.35) dans (5.37), nous obtenons

$$\left[\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(-2\beta)}\right]^2\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta-i\kappa\right)\Gamma\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta+i\kappa-i\bar{\omega}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta-\varepsilon\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta-i\kappa\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta+i\kappa-i\bar{\omega}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta-\varepsilon\right)} = (2a\rho)^{2\beta} \tag{5.38}$$

5.4 Cas particulier

Dans le cas où $a << 1$ (le cas de la limite de basse température), nous avons

$$(2a\rho)^{2\beta} = \delta << 1$$

La condition des modes quasi-normaux peut se réduire à l'équation

$$\frac{1}{2} + \beta + i\kappa - i\bar{\omega} = -n + \eta\delta \tag{5.39}$$

qui s'écrit aussi

$$\bar{\omega}_n = \kappa - i\left(n + \frac{1}{2} + \beta - \eta\delta\right).$$

La constante adimensionnelle η dans (5.39) peut se déterminer en utilisatant les formules

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} C_k z^k \tag{5.40}$$

et

$$\frac{1}{\Gamma(-n+\eta\delta)} \simeq (-1)^n n!\eta\delta. \tag{5.41}$$

Nous avons alors

$$\eta = \frac{1}{(-1)^n n!}\left[\frac{\Gamma(-2\beta)}{\Gamma(2\beta)}\right]^2 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta-i\kappa\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta-\varepsilon\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta-i\kappa\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta+i\kappa-i\bar{\omega}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta-\varepsilon\right)} \tag{5.42}$$

CHAPITRE

6

Méthode WKB

6.1 Introduction

Comme l'équation de Klein Gordon pour un champ scalaire chargé en présence du trou noir de Reissner-Nordstrom n'a pas de solutions analytiques, il est plus commode de développer des méthodes d'approximation. Dans ce chapitre, nous nous proposons de calculer les modes quasi-normaux par des méthodes d'approximation. Il s'agit de l'approche WKB. Nous introduisons d'abord la coordonnée d'Eddington-Finkelstein et ensuite nous abordons un calcul aproximatif.

6.2 Coordonnée d'Eddington-Finkelstein et potentiel effectif

Pour une métrique de la forme

$$ds^2 = f(r)\,dt^2 - g(r)\,dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta \; d\varphi^2 \tag{6.1}$$

nous introduisons la variable tortue d'Eddington-Finkelstein, définie par

$$dr_* = \sqrt{\frac{g}{f}} dr. \tag{6.2}$$

Dans ce cas l'équation radiale de Klein Gordon se réduit à une équation de type Schrödinger

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} - V(r^*)\right] \tilde{\xi}(r^*) = 0, \tag{6.3}$$

où le potentiel effective $V(r^*)$ est donné par

$$V(r^*) = f\left[\frac{l(l+1)^2}{r^2} + \frac{1}{2r}\left(\frac{f'}{gf} - \frac{g'}{g^2}\right) + m^2\right] + \left(\omega - \frac{qQ}{r}\right)^2. \tag{6.4}$$

l'équation radiale peut s'écrire sous la forme

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r_*^2} - V(r_*) + \omega^2\right] \tilde{\Psi}(r_*) = 0 \tag{6.5}$$

où

$$V(r_*) = f(r)\left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{1}{2r}\left(\frac{f'}{gf} - \frac{g'}{g^2}\right) + m^2\right] \tag{6.6}$$

6.3 Approximation WKB

6.3.1 Déscription de la méthode

La méthode WKB fournit une bonne approximation des modes quasi-normaux. . Elle est basée sur la similarité entre l'équation de Klein Gordon en presence du trou noir et l'équation de Schrödinger dans le cas d'une barrière potentielle. L'idée de base est de developper le potentiel $V(r^*)$ au voisinage de son maximun

$$V(r^*) \simeq V_0 - V_1 (r_* - r_{*0})^2 \tag{6.7}$$

En remplaçe dans léquation de Schrodinger nous obtenons l'équation radial se réduit

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + p + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4}\right] \varphi(z) = 0 \tag{6.8}$$

avec

$$z = \alpha (r^* - r_0^*) \tag{6.9}$$

$$\begin{aligned} p + \frac{1}{2} &= \frac{\omega^2}{\alpha^2} - \frac{V_0}{\alpha^2} \\ \alpha^2 &= 2i\sqrt{V_1} \end{aligned} \tag{6.10}$$

Les solutions de l'équation (6.8) sont

$$\varphi_1(z) = D_p((1+i)\varepsilon) \tag{6.11}$$

$$\varphi_2(z) = D_p(-(1+i)\varepsilon) \tag{6.12}$$

$$\varphi_3(z) = D_{-p-1}((1-i)\varepsilon) \tag{6.13}$$

$$\varphi_4(z) = D_{-p-1}(-(1-i)\varepsilon) \tag{6.14}$$

avec

$$\varepsilon = (V_1)^{\frac{1}{4}} (r^* - r_0^*)$$

Les deux solutions de la derniere équation sont

$$D_{-p-1}[-(1-i)\varepsilon] \tag{6.15}$$

$$D_p[-(1+i)\varepsilon]$$

Comme nous avons les comportement

$$D_\nu(z) \underset{|z|>>|\nu|}{\simeq} z^\nu e^{-\frac{z^2}{4}} \quad \text{avec} \quad |\arg(z)| < \frac{3\pi}{4} \tag{6.16}$$

Le comportement des solutions a($r^* \to \infty$), la solution acséptable est

$$D_p[-(1+i)\varepsilon] \sim e^{i2\sqrt{V_1}\left(r^*-r_0^*\right)^2} (-(1+i)\varepsilon)^p \tag{6.17}$$

Utilisant maintenant la relation fonctionnelle

$$D_p(x) = \exp(i\pi p) D_p(-x) + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-p)} \exp\left(\frac{i\pi(p+1)}{2}\right) D_{-p-1}(-ix) \tag{6.18}$$

avec

$$\begin{aligned} D_p((1+i)\varepsilon) &\sim e^{-i2\sqrt{V_1}\left(r^*-r_0^*\right)^2} ((1+i)\varepsilon)^p \\ D_{-p-1}(-i(1+i)\varepsilon) &\sim e^{i2\sqrt{V_1}\left(r^*-r_0^*\right)^2} ((1+i)\varepsilon)^{-p-1} \end{aligned} \tag{6.19}$$

Nous extrayons les modes de la condition

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-p)} = 0 \tag{6.20}$$

qui implique que

$$p = n \tag{6.21}$$

Nous obtenons alors

$$\omega^2 = V_0 + 2i\sqrt{V_1}\left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{6.22}$$

6.3.2 La métrique de Reissner-Norsdröm

Ici le champ scalaire est soumis à un potentiel coulombien en plus du champ gravitationnel. En suivant l'article [28] nous pouvons montrer que les modes quasi-normaux dues à des perturbations scalaires chargées peuvent être étudiées analytiquement dans le régime.

$$l << qQ << l(l+1) \ . \tag{6.23}$$

Dans ce cas le potentiel effectif peut s'érire sous la forme

$$V(x) = -A\left(x + \frac{\omega r_+}{qQ} - 1\right)^2 + Bx \ . \tag{6.24}$$

où la nouvelle variable x est définie par

$$x = 1 - \frac{r_+}{r}, \tag{6.25}$$

et les constantes A et B sont donnés par

$$A = \left(\frac{qQ}{r_+}\right)^2 \tag{6.26}$$

$$B = \frac{(r_+ - r_-)}{r_+^3}\left(l(l+1) + \frac{2M}{r_+} - \frac{2Q^2}{r_+^2}\right). \tag{6.27}$$

Le potentiel ateint son maximum lorsque $x = x_0$ avec

$$x_0 + \frac{\omega r_+}{qQ} - 1 = \frac{r_+^2}{2q^2Q^2}B \ll 1 \tag{6.28}$$

Si nous introduisons le parametre

$$\varpi \equiv \frac{\omega r_+}{qQ} - 1 \tag{6.29}$$

nous pouvons montrer que

$$\varpi_R = \Upsilon\frac{(r_+ - r_-)}{4r_+}\cdot\frac{\Upsilon^2q^2Q^2 + 8(n+1/2)^2}{\Upsilon^2q^2Q^2 + 4(n+1/2)^2} \tag{6.30}$$

et

$$\varpi_I = -i\Upsilon\frac{(r_+ - r_-)}{4r_+}\cdot\frac{2qQ\Upsilon(n+1/2)}{\Upsilon^2q^2Q^2 + 4(n+1/2)^2}\,. \tag{6.31}$$

avec

$$\Upsilon = \frac{1}{q^2Q^2}\left(l(l+1) + \frac{2M}{r_+} - \frac{2Q^2}{r_+^2}\right)$$

Pour $l << qQ << l\,(l+1)$ les équations (6.30) et (6.31) peuvent être écrites sous la forme simple

$$\varpi_R = \frac{\Upsilon(r_+ - r_-)}{4r_+} \tag{6.32}$$

et

$$\varpi_I = -i\frac{(r_+ - r_-)}{2qQr_+}(n+1/2)\,. \tag{6.33}$$

Finalement, nous obtenons les modes quasi-normaux pour le trou noir chargé de Reissner-Nordstrom

$$\omega_n = \frac{qQ}{r_+} + \pi T_{\mathrm{BH}}\frac{l(l+1)}{qQ} - i2\pi T_{\mathrm{BH}}\cdot(n+1/2) \tag{6.34}$$

où

$$T_{\mathrm{BH}} = \frac{r_+ - r_-}{4\pi r_+^2} \tag{6.35}$$

est la température de Bekenstein-Hawking du trou noir.

CHAPITRE

7

Conclusion générale

Dans ce mémoire il été question de calculer les modes quasi-normaux pour certaines solutions à symétrie sphérique (espace de de-Sitter et trous noirs chargé) en utilisant différentes méthodes.

En premier lieu nous avons présenté un bref rappel sur la théorie de la relativité générale. D'abord nous avons montrer comment dériver les équations d'Einstein. Ensuite nous considérons quelques solutions à symétrie sphérique.

Dans le troisième chapitre nous avons calculé les modes quasi-normaux pour certains problèmes de mécanique quantique qui sont exactement soluble. Il s'agit de la barrière du potentiel $V_0 \cosh^{-2} \kappa x t$, le potentiel de Rosen-Morse et le potentiel de Poschl-Teller

Dans le quatrième chapitre, nous avons calculé les modes quasi-normaux pour un espace de de-Sitter statique perturbé par un champ scalaire.

L'objectif du cinquième chapitre était de calculer les modes quasi-normaux pour un trou noir chargé perturbé par un champ scalaire chargé. En générale l'équation d'onde de Klein-Gordon correspondante n'a pas de solutions analytiques. C'est ainsi que nous avons considéré la limite extrémale $Q/M \to 1$. Nous avons pu dériver une formule analytique compacte pour le spectre des modes quasi-normaux.

Dans le sixième chapitre, on s'est intéressé au calcul des modes quasi-normaux par une méthode d'approximation. Il s'agit de l'approche WKB.

[14] Konoplya R. A. and Zhidenko A., Rev. Mod. Phys. 83 (2011) 793-836

[15] P. S. Epstein, “Reflection of waves in an inhomogeneous absorbing medium,” Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 16 (1930) 627–637

[16] C. Eckart, “The penetration of a potential barrier by electrons,” Phys. Rev. 35 (1930) 1303–1309.

[17] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products (Academic Press, New York 1979)

[18] N. Rosen and P.M. Morse, Phys. Rev. 42, 210 (1932).

[19] G. Poschl and E. Teller, Z. Physik 83 (1933) 143

[20] W. Lotmar, Z. Physik 93 (1935) 528.

[21] Da-Ping Du, Bin Wang, Ru-Keng Su, Phys.Rev. D70 (2004) 064024

[22] A. Lopez-Ortega, Gen. Rel. Grav. 44 (2012) 2387–2400

[23] A. Lopez-Ortega, Gen. Rel. Grav. 38, (2006) 743

[24] J.C. Degollado, C.A.R. Herdeiro, Gen. Rel. Grav. 45, 2483 (2013)

[25] M.O.P. Sampaio, C. Herdeiro, M. Wang, Phys. Rev. D 90, 064004(2014)

[26] Hod S., Eur. Phys. J. C 77 (2017) 351

[27] M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions (Dover, New York, 1964)

[28] Hod S. Phys. Lett. B 710 (2012) 349

[29] B. F. Schutz and C. M. Will, Astrophys. J. **291**, L33 (1985).

[30] S. Iyer and C. M. Will, Phys. Rev. D **35**, 3621 (1987).

[31] S. Iyer, Phys. Rev. D **35**, 3632 (1987).

Résumé

Dans ce travail il a été question de calcule des modes quasi-normaux pour certaines solutions à symétrie sphérique. En premier lieu nous avons considéré un exemple d'illustration avec le potentiel dit Poschl-Teller ensuite nous avons calculé les modes quasi-normaux pour l'espace de de-Sitter. En dernière étape nous avons considéré le cas d'un trou noir chargé où nous avons pu déterminer les modes quasi –normaux à partir de la solution de l'équation de Klein Gordon. Nous avons considéré aussi la méthode d'approximation WKB.

ملخص

في هذا العمل، تم حساب أنماط شبه ذاتية لبعض الحلول ذات تناظركروي.
في البداية ، قمنا بوضع مثال توضيحي باستخدام كمون بوش تيلر ، ثم قمنا بحساب الأنماط شبه الذاتية لفضاء دي سيتير.
في الخطوة الأخيرة ، قمنا بحساب الأنماط شبه الذاتية في حالة الثقب الأسود وذلك بحل معادلة كلين قوردن.
كما قمنا باستخدام طريقة تقريبيةWKB .

Abstract

In this work, the quasinormal modes for some spherically symmetric solutions are calculated. At the beginning, the potential Poschl-Teller is considered as an illustrative example. Then, the quasinormal modes for the de-Sitter space are calculated. Finally, the case of a charged black hole is considered either by solving the Klein Gordon equation directly or by using the WKB approximation.

Les mots clés

Les modes quasi-normaux, les trous noirs chargés, l'espace de de-Sitter.