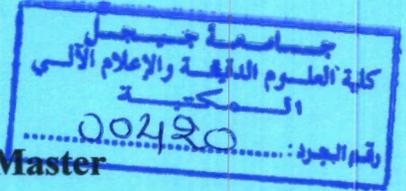


REPUBLICQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE MOHAMED SEDDIK  
BEN YAHIA - JIJEL



FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE  
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Série : .....



Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de Master  
Filière : physique  
Spécialité : Physique Théorique

Présenté par

Phy. Thé. 16/18'

**Cheriet Loubna**

Intitulé

**Méthode des invariants et création de particules**

Soutenu le : 29/06/2018

Devant le jury:

Président :	A. Bounames	Prof.	Univ. MSBY, Jijel
Rapporteur :	S. Haouat	Prof.	Univ. MSBY, Jijel
Examineur :	K. Nouicer	Prof.	Univ. MSBY, Jijel



# Dédicaces

*Au symbole d'amour et de tendresse, ma très chère mère, pour son amour et son soutien incessant. A mon très cher père pour les sacrifices qu'il a consentis pour mon éducation. Que ce travail soit le témoignage de l'amour que je lui avoue. A mes soeurs et mes frères qui, au delà de partager ma vie, ont su comment me soutenir. J'ai toujours pu compter sur eux dans les moments difficiles. Aux petits anges Ishek et Anouar qui ont toujours apporté de la joie à ma vie. A mes chères amies qui m'ont soutenu, encouragé et m'ont surtout permis de travailler dans une atmosphère joviale.*



*Loubna Cheriet*

# Remerciements

*En premier lieu,*  
*je tiens à remercier Allah pour m'avoir aidé*  
*à poursuivre tout mes études ainsi que ma réussite. Mon*  
*respect et ma gratitude vont à mon encadreur Monsieur HAOUAT*  
*SALAH, à qui je dois mes vifs remerciements où j'ai particulièrement*  
*apprécié sa disponibilité, sa gentillesse, ses encouragements et ses conseils qui*  
*m'ont été extrêmement bénéfiques et profitables, j'ai beaucoup appris de lui grâce à*  
*ses compétences et ses connaissances, je le remercie également pour sa patience et sa*  
*confiance qui m'ont permis d'établir ce mémoire. Je remercie sincèrement Monsieur*  
*A. BOUNAMES qui m'a fait l'honneur d'être le président de Jury ainsi que*  
*Monsieur K. NOUCER qui a accepté d'examiner et juger ce travail. Mes profonds*  
*remerciements vont à tous les enseignants qui m'ont suivi durant mes 5 ans*  
*d'études universitaires. Enfin, je remercie particulièrement mes parents,*  
*mes soeurs, mes frères, mes collègues et sans oublier la secrétaire*  
*Houria Lamri pour leur aide et leur soutien et toutes*  
*les personnes qui ont participé à la réalisation*  
*de ce travail.*

Loubna Cheriet

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Champ quantique dans un univers en expansion</b>	<b>7</b>
2.1	Introduction . . . . .	8
2.2	Champ scalaire libre . . . . .	8
2.3	Champ scalaire dans un espace courbe . . . . .	11
2.3.1	Transformation conforme . . . . .	12
2.3.2	Quantification . . . . .	14
2.4	Vide adiabatique . . . . .	16
2.5	Conclusion . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Méthode de diagonalisation de l'Hamiltonien</b>	<b>18</b>
3.1	Introduction . . . . .	19
3.2	Diagonalisation de l'hamiltonien . . . . .	19
3.3	Solution exacte pour l'univers de de-Sitter . . . . .	23
3.4	Conclusion . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Méthode des invariants</b>	<b>31</b>
4.1	Introduction . . . . .	32
4.2	La théorie des invariants en mécanique quantique . . . . .	32
4.2.1	L'oscillateur harmonique avec fréquence variable . . . . .	35
4.3	La méthode des invariant en TQC . . . . .	41

4.3.1	Champ scalaire et invariant classique . . . . .	41
4.3.2	Invariant quantique . . . . .	45
4.3.3	Transformation de Bogoliubov et création de particules . . . . .	46
4.4	Création des particules dans l'univers de de-Sitter . . . . .	49
4.4.1	Solution de l'équation d'Ermakov . . . . .	49
4.4.2	Solutions exacte pour l'univers de de-Sitter . . . . .	51
4.5	Approximation adiabatique . . . . .	55
4.6	Conclusion . . . . .	58
<b>5</b>	<b>Champ scalaire complexe</b>	<b>60</b>
5.1	Introduction . . . . .	61
5.2	Champ scalaire complexe . . . . .	61
5.3	Invariant classique . . . . .	62
5.4	Invariant quantique . . . . .	64
5.5	Création de particules . . . . .	66
5.6	Champ électrique constant et homogène . . . . .	69
5.6.1	Solution de l'équation d'Ermakov . . . . .	70
5.6.2	Résultats . . . . .	72
5.7	Conclusion . . . . .	73
<b>6</b>	<b>Conclusion générale</b>	<b>74</b>
<b>A</b>	<b>Equations de Friedmann</b>	<b>77</b>
<b>B</b>	<b>Equation relativiste de Hamilton-Jacobi</b>	<b>81</b>

# Table des figures

3.1	Variation de $ \beta ^2$ en fonction du temps conforme $\eta$ , pour différentes valeurs du vecteur d'onde $k$ . Le paramètre $\frac{m^2}{H^2} = 100$ . . . . .	27
3.2	Variation de $ \beta ^2$ en fonction du temps conforme $\eta$ , pour différentes valeurs du paramètre $\frac{m^2}{H^2}$ . Le vecteur d'onde $k = 1$ . . . . .	28
3.3	Variation de $ \beta ^2$ en fonction du temps conforme $\eta$ , pour différentes valeurs du paramètre $\frac{m^2}{H^2}$ . Le vecteur d'onde $k = 1$ . . . . .	29
3.4	Variation de $ \beta ^2$ en fonction du temps conforme $\eta$ , pour différentes valeurs du paramètre $\frac{m^2}{H^2}$ . Le vecteur d'onde $k = 1$ . . . . .	29
3.5	Variation de $ \beta ^2$ en fonction du temps conforme $\eta$ , pour différentes valeurs du paramètre $\frac{m^2}{H^2}$ . Le vecteur d'onde $k = 1$ . . . . .	30
4.1	La densité de particules calculée par la méthode de la diagonalisation de l'hamiltonien comparée à celle calculée par la méthode des invariants, pour $\frac{M}{H} = 100$ et $k = 1$ . . . . .	53
4.2	La densité de particules calculée par la méthode de la diagonalisation de l'hamiltonien comparée à celle calculée par la méthode des invariants, pour $\frac{M}{H} = 10$ et $k = 1$ . . . . .	54
4.3	La densité de particules calculée par la méthode de la diagonalisation de l'hamiltonien comparée à celle calculée par la méthode des invariants, pour $\frac{M}{H} = 2$ et $k = 1$ . . . . .	54

4.4	La densité de particules calculée par la méthode de la diagonalisation de l'hamiltonien comparée à celle calculée par la méthode des invariants, pour $\frac{M}{H} = 2$ et $k = 1$ . . . . .	55
4.5	Variation de la densité $ \beta_k ^2$ (4.155) comparée à la densité exacte pour certaines valeurs des paramètre $\frac{M}{H} = 100$ et $k = 1$ . . . . .	57
4.6	Variation de la densité $ \beta_k ^2$ (4.155) comparée à la densité exacte pour certaines valeurs des paramètre $\frac{M}{H} = 75$ et $k = 1$ . . . . .	57
4.7	Variation de la densité $ \beta_k ^2$ (4.155) comparée à la densité exacte pour certaines valeurs des paramètre $\frac{M}{H} = 50$ et $k = 1$ . . . . .	58
4.8	Variation de la densité $ \beta_k ^2$ (4.155) comparée à la densité exacte pour certaines valeurs des paramètre $\frac{M}{H} = 25$ et $k = 1$ . . . . .	58
5.1	Variation de la densité des particules créées en fonction de la variable $z = \sqrt{eE} \left( t + \frac{k_z}{eE} \right)$ . La ligne droite représente la limite de Schwinger $\exp(-\pi\lambda)$ . La constante $\lambda$ est prise 0.1 . . . . .	72
5.2	Variation de la densité des particules créées en fonction de la variable $z = \sqrt{eE} \left( t + \frac{k_z}{eE} \right)$ . La ligne droite représente la limite de Schwinger $\exp(-\pi\lambda)$ . La constante $\lambda$ est prise 0.5. . . . .	72
5.3	Variation de la densité des particules créées en fonction de la variable $z = \sqrt{eE} \left( t + \frac{k_z}{eE} \right)$ . La ligne droite représente la limite de Schwinger $\exp(-\pi\lambda)$ . La constante $\lambda$ est prise 1. . . . .	73

# Introduction

L'étude d'un champ quantique soumis à l'action d'une source extérieure spatialement homogène et dépendante du temps est pertinente dans plusieurs contextes physiques. Le premier exemple est dans l'étude d'un champ scalaire dans un univers spatialement plat de Friedman-Robert-Walker (FRW) décrit par un facteur d'échelle  $a(t)$  [1, 2, 3, 4, 5]. Un autre exemple concerne l'étude du champ scalaire quantique complexe en présence d'un champ électrique homogène dépendant du temps  $E(t)$  [6, 7]. Dans les deux cas, la source dépendante du temps ( $E(t)$  ou  $a(t)$ ) peut produire des particules à partir du vide [8].

Si la création des particules par une barrière du potentiel qui dépend de la position peut être expliquée par l'effet tunnel où des particules virtuelles de la mer de Dirac peuvent subir une transition en particules réelles en produisant ainsi des paires particule-trou (ou particule-antiparticule) au voisinage de la barrière, la création des particules par un champ extérieur dépendant du temps peut être expliquée par l'instabilité du vide [9, 10, 11]. En présence d'une source dépendante du temps, la création spontanée des particules aura lieu quand le vide devient instable ; l'état du vide défini dans le passé se diffère de l'état du vide dans le futur. Dans ce cas, l'amplitude de transition vide-vide porte une phase complexe, dont la partie imaginaire s'interprète comme la probabilité de création des particules. Du point de vue physique, c'est à cause du fait qu'en théorie quantique, une particule ne peut être localisée dans une région plus petite que sa longueur d'onde de de-Broglie. Quand cette longueur d'onde devient suffisamment large, la notion de particule perd sa signification [12]. On dit, alors, que la matière se comporte comme des ondes (des champs).

Lorsque l'état quantique du champ correspond à l'état fondamental (l'état du vide) à un instant initial  $t = t_i$  (défini de façon raisonnable), alors à tout moment ultérieur  $t = t_f$  l'état quantique sera une superposition de l'état fondamental et des états excités du système. Ceci est généralement interprété comme des particules créées à partir du vide à cause de l'action de la source extérieure [8]. L'énergie pour la création de ces particules doit provenir du champ extérieur et donc la dynamique de ce dernier sera modifiée par l'effet inverse de la création des particules (Back reaction). Un champ scalaire dans l'univers

FRW et un champ scalaire chargé dans un champ électrique constituent des exemples simples dans lesquels la production de particules et son effet inverse ont été étudiées de manière approfondie dans la littérature [13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42].

Comme le phénomène de la création des particules avec un champ extérieur ne peut y avoir lieu sauf si le champ extérieur est intense, le problème a une nature nonperturbative. C'est ainsi qu'il soit nécessaire de suivre une méthode d'analyse exacte. Ici, nous avons à utiliser plusieurs méthodes comme, par exemple, la technique de l'action effective de Schwinger [43, 44, 45], la méthode des intégrales de chemins [46, 47], l'approche adiabatique de Parker [48, 49, 50], la méthode semi-classique WKB [51, 52, 53, 54, 55], la diagonalisation de l'Hamiltonien [56, 57, 58, 59, 60, 61], et la transformation de Bogoliubov reliant les états 'in' avec les états 'out' [62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71].

D'autre part, plusieurs problèmes physiques impliquant la théorie quantique des champs en présence d'un champ extérieur homogène et dépendant du temps peuvent être réduits à l'étude des oscillateurs harmoniques dépendants du temps [72]. Puisque le champ extérieur est homogène, il est commode de décomposer le champ scalaire (libre)  $\phi(t, x)$  en ses modes spatiaux de Fourier  $\phi_{\mathbf{k}}(t)$ . La simplicité de ces problèmes provient du fait que les modes de Fourier  $\phi_{\mathbf{k}}(t)$  sont découplés et que la dynamique de chacun d'eux est décrite, en général, par le lagrangien d'un oscillateur harmonique dépendant du temps. Cela permet une simple image physique pour les particules créées à partir du vide. Supposons qu'à  $t = t_i$  tous les oscillateurs étaient dans leur état fondamental. À tout moment ultérieur, il existe une probabilité  $P_n(\mathbf{k}, t)$  pour que l'oscillateur marqué par  $\mathbf{k}$  soit dans le  $n^{\text{ème}}$  état excité (instantané). On peut alors interpréter  $P_n(\mathbf{k}, t)$  comme la probabilité de création à partir du vide de  $n(\mathbf{k})$  particules avec l'impulsion  $\mathbf{k}$  à l'instant  $t$ .

Il est bien connu que l'oscillateur harmonique dépendant du temps possède une quantité conservée, habituellement appelée invariant d'Ermakov-Lewis. Si  $f(t)$  est une solution de

l'équation différentielle nonlinéaire [73]

$$\ddot{f} + \omega^2 f = \frac{\Omega^2}{m^2 f^3} \quad (1.1)$$

où  $\Omega$  est une constante. Il est alors facile de vérifier que la quantité suivante

$$I = \frac{1}{2} \left[ m^2 (\dot{q}f - q\dot{f})^2 + \frac{\Omega^2 q^2}{f^2} \right] \quad (1.2)$$

est conservée,  $dI/dt = 0$  [74]. C'est le plus simple d'une famille d'invariants que l'on puisse introduire dans l'étude de l'oscillateur harmonique dépendant du temps.

On peut éliminer la dépendance temporelle de la variable d'oscillateur  $q(t)$  par une transformation appropriée et réduire le système à l'étude d'un autre oscillateur,  $Q(t)$ , avec une fréquence constante  $\Omega$ . L'énergie de l'oscillateur  $Q$ , qui est bien sûr conservée, s'avère d'être l'invariant d'Ermakov-Lewis.

Selon [72], il est facile de relier la dynamique quantique de l'oscillateur  $Q$  à celle de l'oscillateur  $q$  d'origine par un calcul élémentaire. Par exemple, si  $\phi(t, Q)$  est une solution à l'équation de Schrödinger pour l'oscillateur  $Q$ , alors la solution  $\psi(t, q)$  correspondante à l'équation de Schrödinger pour l'oscillateur  $q$  est donnée par

$$\psi(t, q) = \frac{1}{\sqrt{f}} \phi[\tau(t), Q = (q/f)] \exp\left(i \frac{mf}{2f} q^2\right) \quad (1.3)$$

avec  $dt = mf^2 d\tau$ . Le facteur  $\left(\frac{1}{\sqrt{f}}\right)$  assure la normalisation correcte de la fonction d'onde tandis que le facteur de phase supplémentaire  $\phi[\tau(t), Q = (q/f)]$  provient du changement de variable  $t \rightarrow \tau$ . Ce résultat résout complètement le problème dans l'image de Schrödinger.

Dans la représentation de Heisenberg, nous nous intéressons généralement aux coefficients de Bogoliubov reliant les opérateurs de création et d'annihilation ( $A, A^\dagger$ ) de l'oscillateur  $Q$  à ceux, notés  $(a, a^\dagger)$ , de l'oscillateur  $q$ . La transformation Bogoliubov s'écrit

$$A = \alpha(t)a + \beta(t)a^\dagger \quad (1.4)$$

où les coefficients de Bogoliubov sont donnés par

$$\alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{m}{\omega\Omega} \right)^{1/2} f \left[ \omega + \frac{\Omega}{mf^2} - i\frac{\dot{f}}{f} \right] \quad (1.5)$$

and

$$\beta = -\frac{1}{2} \left( \frac{m}{\omega\Omega} \right)^{1/2} f \left[ \omega - \frac{\Omega}{mf^2} + i\frac{\dot{f}}{f} \right] \quad (1.6)$$

Alors, ces coefficients déterminent complètement l'évolution du système. Ainsi, cette procédure nous permet de calculer toutes les grandeurs physiques d'une manière simple.

Dans ce travail, nous nous proposons d'étudier la création des particules en présence d'une source dépendante du temps par la méthode des invariants. Il est bien connu que cette de grande importance en mécanique quantique des systèmes dépendants du temps.

Ce mémoire se compose essentiellement de 6 chapitres

Dans le deuxième chapitre, nous rappelons succinctement, le formalisme de la théorie quantique des champs dans l'univers de FRW. Nous quantifions d'abord le champ scalaire dans un univers en expansion et nous cherchons ensuite une interprétation en termes de particules. La relation entre les modes permettre une telle interprétation nous conduit à la densité des particules créées.

Dans le troisième chapitre, nous nous proposons d'étudier la création de particules dans un univers isotrope homogène en utilisant la méthode basée sur la diagonalisation de l'hamiltonien. En premier lieu, nous effectuons la quantification du champ scalaire avec un couplage de type général en supposant l'existence d'une représentation des opérateurs de création et d'annihilation qui diagonalise l'hamiltonien à un instant donné  $\eta_0$ . Ensuite, nous accomplissons la diagonalisation instantanée de l'hamiltonien en introduisant une nouvelle représentation. Si nous exigeons que la nouvelle représentation diagonalise l'hamiltonien nous pouvons établir une transformation de Bogoliubov entre les deux représentations. Comme application, nous considérons la création de particules dans l'espace de Sitter où l'équation de Klein Gordon associée admet des solutions exactes bien connues.

L'objectif du quatrième chapitre est d'étendre la méthode des invariants de Lewis Riesenfeld à la théorie quantique des champs pour traiter le processus de la création des particules dans un univers en expansion. Pour obtenir l'invariant relatif à un champ scalaire réel, nous suivons en premier lieu une démarche classique. Une fois nous obtenons la forme de l'invariant classique, nous cherchons les générateurs qui engendrent l'invariant quantique. En dernière étape, nous établissons la transformation de Bogoliubov qui lie la représentation qui diagonalise l'invariant à celle qui diagonalise l'hamiltonien  $H$ . A partir des coefficients de Bogoliubov nous obtenons la densité des particules créées. Comme application nous considérons l'espace de de-Sitter.

Dans le cinquième chapitre, nous nous proposons d'établir la méthode des invariants au cas d'un champ scalaire complexe. C'est une généralisation de la méthode élaborée dans chapitre précédent, qui nous permet d'étudier la création de particules par un champ électrique dépendant du temps. Comme application nous considérons l'effet de Schwinger en présence d'un champ constant et homogène.

Le sixième chapitre est une conclusion générale qui récapitule l'ensemble des résultats obtenus.

# Champ quantique dans un univers en expansion

---

2.1	Introduction . . . . .	8
2.2	Champ scalaire libre . . . . .	8
2.3	Champ scalaire dans un espace courbe . . . . .	11
2.3.1	Transformation conforme . . . . .	12
2.3.2	Quantification . . . . .	14
2.4	Vide adiabatique . . . . .	16
2.5	Conclusion . . . . .	17

---

## 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous développons les outils nécessaires pour étudier la création des particules à partir du vide via le formalisme de la théorie quantique des champs dans un univers en expansion. Pour être concret, nous quantifions les champs de matière, alors que nous traitons le champ gravitationnel d'une manière purement classique. Nous commençons d'abord par une brève description de la quantification canonique du champ scalaire libre. Ensuite, nous considérons le cas d'un champ scalaire dans un univers en expansion. Dans ce cas, comme nous allons le voir, le système en question n'a pas un vide bien déterminé et la notion de particules n'est pas toute à fait claire. Ils existent cependant des instants pour lesquels l'interprétation du champs en termes de particules est possible. Généralement, ces instants sont le passé et le futur lointains. Cependant l'état du vide défini au passé est en général différent de l'état du vide défini à  $+\infty$ . On dit alors que le vide devient instable à cause du champ gravitationnel [75], ce qui induit la création des paires particule-antiparticule.

## 2.2 Champ scalaire libre

Avant d'aborder le formalisme de la théorie des champs dans un univers en expansion rappelons d'abord la procédure de quantification du champ scalaire libre  $\varphi(x)$ , dont la densité lagrangienne s'écrit

$$\mathcal{L}(x) = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi^* \partial_\nu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi \quad (2.1)$$

où  $\eta_{\mu\nu}$  est la métrique minkowskienne

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

La dynamique du champ est décrite par l'équation de Klein-Gordon qui s'écrit sous la forme

$$(\square + m^2)\varphi(x) = 0 \quad (2.3)$$

où  $\square$  est l'opérateur d'Alembertien défini par

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.4)$$

Nous pouvons vérifier que les fonctions linéairement indépendantes  $\zeta_{\mathbf{k}}(t, \vec{x})$  et  $\zeta_{\mathbf{k}}^*(t, \vec{x})$  avec

$$\zeta_{\mathbf{k}}(t, \vec{x}) = C e^{i(k_0 t - \vec{k} \cdot \vec{x})}, \quad (2.5)$$

où  $C$  est une constante de normalisation et  $k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ , sont deux solutions à l'équation de Klein Gordon. Ici, la constante  $C$  sera fixée à partir de la condition

$$\zeta_{\mathbf{k}}^* \dot{\zeta}_{\mathbf{k}} - \dot{\zeta}_{\mathbf{k}}^* \zeta_{\mathbf{k}} = 2i \quad (2.6)$$

Le champ  $\varphi(t, \vec{x})$  admet alors la décomposition de Fourier suivante

$$\varphi(t, \vec{x}) = \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[ a(\vec{k}) \zeta_{\mathbf{k}}(t, \vec{x}) + b^*(\vec{k}) \zeta_{\mathbf{k}}^*(t, \vec{x}) \right] \quad (2.7)$$

et

$$\varphi^*(t, \vec{x}) = \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[ b(\vec{k}) \zeta_{\mathbf{k}}(t, \vec{x}) + a^*(\vec{k}) \zeta_{\mathbf{k}}^*(t, \vec{x}) \right]. \quad (2.8)$$

Pour les moments conjugués  $\pi(t, \vec{x})$  et  $\pi^*(t, \vec{x})$  associés, respectivement, aux champs  $\varphi(t, \vec{x})$  et  $\varphi^*(t, \vec{x})$ , nous avons

$$\pi(t, \vec{x}) = \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ b(\vec{k}) \dot{\zeta}_k(t, \vec{x}) - a^*(\vec{k}) \dot{\zeta}_k^*(t, \vec{x}) \right] \quad (2.9)$$

$$\pi^*(t, \vec{x}) = \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ a(\vec{k}) \dot{\zeta}_k(t, \vec{x}) - b^*(\vec{k}) \dot{\zeta}_k^*(t, \vec{x}) \right] \quad (2.10)$$

La procédure de quantification canonique consiste à remplacer les champs  $\varphi(t, \vec{x})$  et  $\varphi^*(t, \vec{x})$  et leurs moments conjugués  $\pi(t, \vec{x})$  et  $\pi^*(t, \vec{x})$  par des opérateurs qui vérifient les relations de commutation à temps égaux

$$\left[ \hat{\varphi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{x}') \right] = i\delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (2.11)$$

$$\left[ \hat{\varphi}(t, \vec{x}), \hat{\varphi}(t, \vec{x}') \right] = \left[ \hat{\pi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{x}') \right] = 0. \quad (2.12)$$

Nous avons alors les opérateurs du champ scalaire complexe

$$\hat{\varphi}(t, \vec{x}) = \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ \hat{a}(\vec{k}) \zeta_k(t, \vec{x}) + \hat{b}^+(\vec{k}) \zeta_k^*(t, \vec{x}) \right] \quad (2.13)$$

$$\hat{\pi}(t, \vec{x}) = \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ \hat{b}(\vec{k}) \dot{\zeta}_k(t, \vec{x}) - \hat{a}^+(\vec{k}) \dot{\zeta}_k^*(t, \vec{x}) \right] \quad (2.14)$$

Compte tenu de la condition de normalisation (2.6) et des relations de commutation (2.11) et (2.12), nous pouvons montrer que les opérateurs  $\hat{a}(\vec{k})$ ,  $\hat{a}^+(\vec{k})$ ,  $\hat{b}(\vec{k})$  et  $\hat{b}^+(\vec{k})$  satisfont aux relations de commutation suivantes

$$\left[ \hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^+(\vec{k}') \right] = \left[ \hat{b}(\vec{k}), \hat{b}^+(\vec{k}') \right] = (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (2.15)$$

$$\left[ \hat{a}(\vec{k}), \hat{b}^+(\vec{k}') \right] = \left[ \hat{a}(\vec{k}), \hat{b}(\vec{k}') \right] = 0 \quad (2.16)$$

Suivant le cours standard de la théorie des champs, l'Hamiltonien du champ scalaire est, par définition,

$$H = d^4x \mathcal{H}(x) = d^4x (\pi\dot{\varphi} + \pi^*\dot{\varphi}^* - \mathcal{L}(x)) \quad (2.17)$$

En utilisant la propriété d'orthogonalité des ondes planes et les relations de commutation (2.15) et (2.16), nous pouvons exprimer l'opérateur hamiltonien (2.17) en fonction des opérateurs  $\hat{a}(\vec{k})$ ,  $\hat{a}^+(\vec{k})$ ,  $\hat{b}^+(\vec{k})$  et  $\hat{b}(\vec{k})$  s, nous obtenons

$$H = \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k_0 [\hat{a}^+(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}) + \hat{b}(\vec{k}) \hat{b}^+(\vec{k})]. \quad (2.18)$$

Nous pouvons également obtenir une expression similaire pour l'opérateur de charge électrique

$$Q = e \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [\hat{a}^+(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}) - \hat{b}(\vec{k}) \hat{b}^+(\vec{k})] \quad (2.19)$$

Ici, il est à noter que les opérateurs  $H$  et  $Q$  ont une forme diagonale.

Si nous définissons les opérateurs nombre de particules  $N_a$  et nombre d'antiparticules  $N_b$ , avec

$$N_a = \frac{1}{(2\pi)^3} \hat{a}^+(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}) \quad (2.20)$$

$$N_b = \frac{1}{(2\pi)^3} \hat{b}^+(\vec{k}) \hat{b}(\vec{k}), \quad (2.21)$$

et nous introduisons la forme normale qui ordonne les opérateurs  $\hat{a}(\vec{k})$ ,  $\hat{a}^+(\vec{k})$ ,  $\hat{b}(\vec{k})$  et  $\hat{b}^+(\vec{k})$ , nous pouvons voir qu'il existe un état du vide  $|0\rangle$  qui vérifie les conditions  $N_a |0\rangle = N_b |0\rangle = 0$  et

$$\langle 0| H |0\rangle = \langle 0| Q |0\rangle = 0. \quad (2.22)$$

## 2.3 Champ scalaire dans un espace courbe

Ayant montré comment quantifier le champ scalaire libre, considérons maintenant un champ scalaire complexe  $\varphi(x)$ , de masse  $m$ , dans un univers en expansion. L'action de ce système est donnée par [75]

$$S = \int d^4x \sqrt{|g|} [g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi^* \partial_\nu \varphi - (m^2 + \xi R) \varphi^* \varphi] \quad (2.23)$$

où  $x = (t, \vec{x})$ ,  $g = \det(g_{\mu\nu})$ ,  $\xi$  est un paramètre numérique et  $R$  est le scalaire de courbure de Ricci. Il est à noter, ici, que la valeur  $\xi = \xi_c = \frac{1}{6}$  assure l'invariance par une transformation conforme.

Selon le principe de moindre action,  $\delta S = 0$ , l'équation du mouvement (de Klein Gordon) correspondante s'écrit

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu \left[ \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi \right] + (m^2 + \xi R) \varphi = 0 \quad (2.24)$$

Sans spécifier  $\xi$ , nous considérons, par la suite, un espace-temps isotrope et homogène décrit par la métrique de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)

$$ds^2 = dt^2 - \tilde{a}^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (2.25)$$

### 2.3.1 Transformation conforme

Pour transformer la métrique (2.25) en une forme conformément minkowskienne, nous utilisons le temps conforme  $\eta$  défini par

$$d\eta = \frac{dt}{a(t)} \quad (2.26)$$

où le facteur d'échelle  $\tilde{a}(t)$  exprimé par la nouvelle variable  $\eta$  est noté  $a(\eta)$ . Nous avons alors

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - dl^2) \quad (2.27)$$

Maintenant, nous introduisons un nouveau champ  $\tilde{\varphi}(x)$  en effectuant la factorisation  $\varphi(x) = a^{-1}(\eta)\tilde{\varphi}(x)$ . Comme  $R = 6\frac{a''}{a^2}$ , l'action du système par rapport au champ  $\tilde{\varphi}(x)$  en coordonnées  $(\eta, \vec{x})$  devient

$$S = \int d\eta d^3x \left[ \tilde{\varphi}^{*\prime} \tilde{\varphi}' - (\vec{\nabla} \tilde{\varphi}^*) (\vec{\nabla} \tilde{\varphi}) + \left( \frac{a'^2}{a^2} - \frac{a'}{a^2} \partial_\eta - 6\xi \frac{a''}{a^2} - a^2 m^2 \right) \tilde{\varphi}^* \tilde{\varphi} \right] \quad (2.28)$$

Ici, le prime ( $\prime$ ) indique la dérivée par rapport au temps conforme  $\eta$ .

Après avoir éliminer la 4-divergence  $\partial_\mu J^\mu$  où  $J^\mu$  est donné par [61]

$$J^\mu = \left( \frac{a'}{a} \tilde{\varphi}^* \tilde{\varphi}, 0, 0, 0 \right) \quad (2.29)$$

nous obtenons l'action finale

$$S = \int d^4x \left[ \tilde{\varphi}'^* \tilde{\varphi}' - (\vec{\nabla} \tilde{\varphi}^*) (\vec{\nabla} \tilde{\varphi}) + \left[ \frac{a''}{a^2} (1 - 6\xi) - a^2 m^2 \right] \tilde{\varphi}^* \tilde{\varphi} \right] \quad (2.30)$$

De (2.30) on obtient l'équation du mouvement pour le champ  $\tilde{\varphi}(x)$

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \Delta - \frac{a''}{a^2} (1 - 6\xi) + a^2 m^2 \right] \tilde{\varphi} = 0 \quad (2.31)$$

où  $\Delta$  est l'opérateur de Laplace-Beltrami dans l'espace plat à 3 dimensions.

Maintenant, nous écrivons le développement de Fourier du champ  $\tilde{\varphi}(x)$

$$\tilde{\varphi}(x) = \int d^3k \Phi_{\mathbf{k}}(\vec{x}) g_{\mathbf{k}}(\eta) \quad (2.32)$$

où  $\Phi_{\mathbf{k}}(\vec{x})$  est une fonction propre à l'opérateur  $\Delta$

$$\Delta \Phi_{\mathbf{k}}(\vec{x}) = -\lambda_{\mathbf{k}}^2 \Phi_{\mathbf{k}}(\vec{x}) \quad (2.33)$$

Dans un espace plat, les fonctions  $\Phi_{\mathbf{k}}(\vec{x})$  sont des ondes planes qui vérifient la relation d'orthogonalité

$$\int d^3k \Phi_{\mathbf{k}}(\vec{x}) \Phi_{\mathbf{k}'}(\vec{x}) = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (2.34)$$

Dans ce cas, l'équation (2.31) peut se réduire à l'équation suivante

$$g_{\mathbf{k}}''(\eta) + \Omega^2(\eta) g_{\mathbf{k}}(\eta) = 0 \quad (2.35)$$

où  $\Omega(\eta)$  est donné par

$$\Omega(\eta) = \sqrt{k^2 - \frac{a''}{a^2}(1 - 6\xi) + a^2 m^2}. \quad (2.36)$$

### 2.3.2 Quantification

Maintenant, pour quantifier le champ  $\tilde{\varphi}(x)$  nous considérons la décomposons suivante

$$\tilde{\varphi}(x) = \int d^3k \left[ \varphi_k^{(+)} b_k^+ + \varphi_k^{(-)} a_k \right] \quad (2.37)$$

où

$$\varphi_k^{(+)}(\eta, \vec{x}) = \frac{g_k(\eta) \Phi_k^*(\vec{x})}{\sqrt{2}} \quad (2.38)$$

$$\varphi_k^{(-)}(\eta, \vec{x}) = \left( \varphi_k^{(+)}(\eta, \vec{x}) \right)^* \quad (2.39)$$

En faisant le changement  $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ , nous pouvons écrire le champ sous la forme

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int d^3k \Phi_k(\vec{x}) \left[ g_k^*(\eta) a_k + g_{-k}(\eta) b_{-k}^+ \right] \quad (2.40)$$

En utilisant la densité lagrangienne  $\tilde{\mathcal{L}}(x)$ , nous obtenons les moments conjugués canoniques

$$\pi = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \tilde{\varphi}'} = \tilde{\varphi}'^*, \quad \pi^* = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \tilde{\varphi}'^*} = \tilde{\varphi}' \quad (2.41)$$

Nous avons alors

$$\pi(\eta, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int d^3k \Phi_k^*(\vec{x}) \left[ g'_k(\eta) a_k^+ + g'_{-k}(\eta) b_{-k} \right] \quad (2.42)$$

$$\pi^*(\eta, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int d^3k \Phi_k(\vec{x}) \left[ g_k'^*(\eta) a_k + g'_{-k}(\eta) b_{-k}^+ \right] \quad (2.43)$$

En quantifiant le champ  $\tilde{\varphi}(x)$ , nous écrivons les relations de commutation suivantes

$$\begin{aligned}
 \left[ \tilde{\varphi}(\eta, \vec{x}), \pi(\eta, \vec{x}') \right] &= \left[ \tilde{\varphi}^*(\eta, \vec{x}), \pi^*(\eta, \vec{x}') \right] = i\delta(\vec{x} - \vec{x}') \\
 \left[ \tilde{\varphi}(\eta, \vec{x}), \tilde{\varphi}(\eta, \vec{x}') \right] &= \left[ \tilde{\varphi}^*(\eta, \vec{x}), \tilde{\varphi}^*(\eta, \vec{x}') \right] = 0 \\
 \left[ \pi(\eta, \vec{x}), \pi(\eta, \vec{x}') \right] &= \left[ \pi^*(\eta, \vec{x}), \pi^*(\eta, \vec{x}') \right] = 0
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Dans ce cas, les opérateurs  $a_{\mathbf{k}}$ ,  $a_{\mathbf{k}}^+$ ,  $b_{\mathbf{k}}$  et  $b_{\mathbf{k}}^+$  vérifient les commutateurs

$$\begin{aligned}
 [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^+] &= [b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}'}^+] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\
 [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}] &= [a_{\mathbf{k}}^+, a_{\mathbf{k}'}^+] = 0 \\
 [b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}'}] &= [b_{\mathbf{k}}^+, b_{\mathbf{k}'}^+] = 0
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

Nous pouvons montrer que les relations de commutation (2.44) et (2.45) sont compatibles si les fonctions  $g_{\mathbf{k}}(\eta)$  sont normalisées par la condition

$$g_{\mathbf{k}}g_{\mathbf{k}}'^* - g_{\mathbf{k}}'g_{\mathbf{k}}^* = -2i. \tag{2.46}$$

Construisons l'Hamiltonien canonique  $H(\eta)$ , en effectuant l'intégration de la densité hamiltonienne  $\tilde{\mathcal{H}}(x) = \tilde{\varphi}'\pi + \tilde{\varphi}'^*\pi^* - \tilde{\mathcal{L}}$  sur l'hypersurface  $\Sigma$  définie par  $\eta = Const.$  Nous obtenons, alors, l'expression suivante

$$H(\eta) = \int d^3x \left[ \tilde{\varphi}'^*\tilde{\varphi}' + (\vec{\nabla}\tilde{\varphi}^*)(\vec{\nabla}\tilde{\varphi}) - \left[ \frac{a''}{a^2}(1 - 6\xi) - a^2m^2 \right] \tilde{\varphi}^*\tilde{\varphi} \right] \tag{2.47}$$

L'Hamiltonien (2.47) peut être écrit en termes d'opérateurs  $a_{\mathbf{k}}$ ,  $a_{\mathbf{k}}^+$ ,  $b_{\mathbf{k}}$  et  $b_{\mathbf{k}}^+$

$$H(\eta) = \int d^3k \left[ E_{\mathbf{k}}(\eta) (a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}} + b_{-\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}}^+) + F_{\mathbf{k}}(\eta) a_{-\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}}^+ + F_{\mathbf{k}}^*(\eta) b_{-\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} \right] \tag{2.48}$$

où

$$E_k(\eta) = \frac{|g'_k|^2 + \Omega^2 |g_k|^2}{2} \quad (2.49)$$

$$F_k(\eta) = \frac{g_k'^2 + \Omega^2 g_k^2}{2} \quad (2.50)$$

Nous remarquons que l'Hamiltonien n'est pas diagonal car il contient des termes mixtes en opérateurs  $a_k$ ,  $a_k^+$ ,  $b_k$  et  $b_k^+$ . De plus, comme  $H(\eta)$  dépend explicitement du temps, il n'y a pas d'état propre indépendant du temps qui pourrait servir l'état du vide. Alors nous ne pouvons pas interpréter les opérateurs  $a_k$  et  $a_k^+$  comme des opérateurs de création et d'annihilation de particules et les opérateurs  $b_k$  et  $b_k^+$  comme des opérateurs de création et d'annihilation des antiparticules. Cette interprétation est possible seulement si les coefficients des termes mixtes sont nuls ( $F_k^*(\eta) = F_k(\eta) = 0$ ).

Il est bien évident que pour un espace-temps asymptotiquement plat, le système du champ complexe se comporte à  $\eta \rightarrow \pm\infty$  comme libre et donc l'état du vide, à  $\pm\infty$ , est bien déterminé. Dans ce cas, l'interprétation des opérateurs  $a_k$ ,  $a_k^+$ ,  $b_k$  et  $b_k^+$  en termes de particules est possible.

## 2.4 Vide adiabatique

Pour une métrique qui n'est pas asymptotiquement Minkowskienne, la diagonalisation de  $H$  est possible si  $\Omega_k(\eta)$  varie d'une manière adiabatique au voisinage d'un instant  $\eta_0$ . Sachant que la condition d'adiabaticité est donnée par

$$\lim_{\eta \rightarrow \eta_0} \left| \frac{\Omega'_k(\eta)}{\Omega_k^2(\eta)} \right| \ll 1 \quad (2.51)$$

nous pouvons montrer que les fonctions

$$\varphi_k^\pm(\eta) \simeq \frac{1}{\sqrt{\Omega_k(\eta)}} e^{\mp i \int \Omega_k(\eta) d\eta} \quad (2.52)$$

sont des solution à l'équation (2.35) pour lesquelles

$$F_{\mathbf{k}}^*(\eta) \simeq F_{\mathbf{k}}(\eta) \simeq 0, \quad (2.53)$$

et

$$E_{\mathbf{k}}(\eta) \simeq 2\Omega_{\mathbf{k}}(\eta_0), \quad (2.54)$$

Nous obtenons dans ce cas

$$\hat{H} = \int d^3k \Omega_{\mathbf{k}}(\eta_0) [\hat{a}^+(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}) + \hat{b}^+(\vec{k}) \hat{b}(\vec{k})]. \quad (2.55)$$

A l'instant  $\eta_0$ , le Hamiltonien est diagonal et l'état du vide  $\hat{a}(\vec{k})|0_{\eta_0}\rangle = 0$  est bien déterminé. C'est un état physique dit vide adiabatique. Pour l'espace de de-Sitter, avec  $\eta_0 \rightarrow -\infty$ , l'état du vide défini ainsi est le vide de Bunch-Davies [76, 77, 78].

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposé un bref rappel sur la théorie quantique des champs dans l'univers de FRW où nous avons prouvé que l'Hamiltonien d'un champ scalaire dans un univers en expansion n'est pas toujours diagonal et l'interprétation du champ en termes de particules n'est pas possible. Dans le cas d'une expansion adiabatique, nous avons montré qu'ils existent des modes pour lesquels l'Hamiltonien est diagonal. L'état du vide défini par ces modes est appelé vide adiabatique.

# Méthode de diagonalisation de l'Hamiltonien

---

3.1	Introduction . . . . .	19
3.2	Diagonalisation de l'hamiltonien . . . . .	19
3.3	Solution exacte pour l'univers de de-Sitter . . . . .	23
3.4	Conclusion . . . . .	30

---

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'établir une étude dynamique de la création de particules dans un univers isotrope homogène. En premier lieu, nous effectuons la quantification du champ scalaire avec un couplage de type général en supposant l'existence d'une représentation des opérateurs de création et d'annihilation qui diagonalise l'hamiltonien à un instant donné  $\eta_0$ . Ensuite, nous accomplissons la diagonalisation instantanée de l'hamiltonien en introduisant une nouvelle représentation. Si nous exigeons que la nouvelle représentation diagonalise l'hamiltonien nous pouvons établir une transformation de Bogoliubov entre les deux représentations. Comme application, nous considérons la création de particules dans l'espace de Sitter où l'équation de Klein Gordon associée admet des solutions exactes bien connues. Nous allons suivre la référence [61].

### 3.2 Diagonalisation de l'hamiltonien

Nous supposons que l'Hamiltonien (2.48) est diagonal à l'instant  $\eta_0$  par rapport aux opérateurs  $a_k$ ,  $a_k^+$ ,  $b_k$  et  $b_k^+$ , qui sont dans ce cas les opérateurs de création et d'annihilation des particules et des antiparticules. Ceci est possible seulement si la fonction  $F_k(\eta_0)$  est nulle.

$$F_k(\eta_0) = 0 \quad (3.1)$$

A l'instant  $\eta_0$ , les fonctions  $g_k(\eta)$  doivent obéir, alors, à la condition initiale suivante

$$g'_k(\eta_0) = i\Omega(\eta_0)g_k(\eta_0) \quad (3.2)$$

Ici, nous pouvons vérifier que la condition (3.2) est compatible avec la normalisation (2.46) seulement si  $\Omega^2(\eta_0) > 0$ .

Dans ce cas, l'état du vide  $|0_{\eta_0}\rangle$  correspondant à (3.2) est défini de la manière standard

$$a_k |0_{\eta_0}\rangle = b_k^+ |0_{\eta_0}\rangle = 0 \quad (3.3)$$

La diagonalisation de l'Hamiltonien à un instant arbitraire  $\eta$  peut être effectuée en fonction des opérateurs  $c_k(\eta)$ ,  $c_k^+(\eta)$  et  $d_k(\eta)$ ,  $d_k^+(\eta)$  liées avec  $a_k$ ,  $a_k^+$  et  $b_k$ ,  $b_k^+$  par la transformation de Bogoliubov dépendante du temps

$$c_k(\eta) = \alpha_k(\eta)a_k + \beta_{-k}(\eta)b_{-k}^+ \quad (3.4)$$

$$d_k^+(\eta) = \alpha_k^*(\eta)b_k^+ + \beta_{-k}^*(\eta)a_{-k} \quad (3.5)$$

ou, inversement,

$$a_k = \alpha_k^*(\eta)c_k(\eta) - \beta_{-k}(\eta)d_{-k}^+(\eta) \quad (3.6)$$

$$b_k^+ = \alpha_k(\eta)d_k^+(\eta) - \beta_{-k}^*(\eta)c_{-k}(\eta) \quad (3.7)$$

Les fonctions  $\alpha_k(\eta) = \alpha_{-k}(\eta)$  et  $\beta_k(\eta) = \beta_{-k}(\eta)$  vérifient les conditions initiales

$$|\alpha_k(\eta_0)| = 1 \quad (3.8)$$

$$\beta_k(\eta_0) = 0 \quad (3.9)$$

et l'identité

$$|\alpha_k(\eta)|^2 - |\beta_k(\eta)|^2 = 1 \quad (3.10)$$

En substituant (3.6) et (3.7) dans l'expression de l'hamiltonien, nous obtenons la même expression mais en termes d'opérateurs  $c_k$ ,  $c_k^+$ ,  $d_k$  et  $d_k^+$

$$H(\eta) = \int d^3k \left[ \tilde{E}_k \left( c_k^+ c_k + d_k d_k^+ \right) + \tilde{F}_k c_k^+ d_{-k}^+ + \tilde{F}_k^* d_{-k} c_k \right] \quad (3.11)$$

avec

$$\tilde{E}_k = E_k (|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2) - 2\text{Re}(F_k \alpha_k \beta_k^*) \quad (3.12)$$

$$\tilde{F}_k = -2\alpha_k \beta_k E_k + \alpha_k^2 F_k + \beta_k^2 F_k^* \quad (3.13)$$

Pour que l'Hamiltonien soit diagonal par rapport aux opérateurs  $c_k$ ,  $c_k^+$ ,  $d_k$  et  $d_k^+$  à l'instant  $\eta$ , il faut que

$$\tilde{F}_k = 0 \quad (3.14)$$

Ce qui implique

$$-2\frac{\alpha_k}{\beta_k} E_k + \frac{\alpha_k^2}{\beta_k^2} F_k + F_k^* = 0 \quad (3.15)$$

Compte tenu de l'équation (2.46) nous pouvons montrer que

$$E_k^2 - |F_k|^2 = \Omega^2 \quad (3.16)$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\alpha_k = \left( \frac{E_k + \Omega}{F_k} \right) \beta_k \quad (3.17)$$

En utilisant l'identité (3.10) et la normalisation (2.46) nous obtenons finalement les coefficients complexes de Bogoliubov

$$\beta_k = i\chi_k \frac{g'_k - i\Omega g_k}{2\sqrt{\Omega}} \quad (3.18)$$

$$\alpha_k = i\chi_k \frac{g_k^* - i\Omega g_k^*}{2\sqrt{\Omega}} \quad (3.19)$$

où  $\chi_k$  est une phase arbitraire dépendante du temps.

En outre, dans la condition  $\tilde{F}_k = 0$ , d'après les résultats précédents, nous pouvons vérifier que  $\tilde{E}_k$  est égale à la fréquence  $\Omega(\eta)$ , ce qui nous conduit à l'expression suivante pour l'Hamiltonien

$$H(\eta) = \int d^3k \Omega(\eta) (c_k^+ c_k + d_k d_k^+). \quad (3.20)$$

Ici, les opérateurs  $c_k, c_k^+, d_k$  et  $d_k^+$  vérifient les mêmes relations de commutation que  $a_k, a_k^+$  et  $b_k, b_k^+$

$$[c_k, c_{k'}^+] = [d_k, d_{k'}^+] = \delta(k - k') \quad (3.21)$$

$$[c_k, c_{k'}] = [c_k^+, c_{k'}^+] = 0 \quad (3.22)$$

$$[d_k, d_{k'}] = [d_k^+, d_{k'}^+] = 0 \quad (3.23)$$

Il est à noter que les équations du mouvement d'Heisenberg pour les opérateurs de création et d'annihilation de particules s'écrivent

$$\frac{dc_k}{d\eta} = \frac{\partial c_k}{\partial \eta} + i[H(\eta), c_k] \quad (3.24)$$

$$\frac{d(d_k^+)}{d\eta} = \frac{\partial d_k^+}{\partial \eta} + i[H(\eta), d_k^+] \quad (3.25)$$

En utilisant les équations (3.4), (3.5), (3.18) et (3.19) nous pouvons montrer que

$$\frac{dc_k}{d\eta} = \frac{\Omega'}{2\Omega} d_k^+ - i\Omega(\eta) c_k \quad (3.26)$$

$$\frac{d(d_k^+)}{d\eta} = \frac{\Omega'}{2\Omega} c_k - i\Omega(\eta) d_k^+. \quad (3.27)$$

Maintenant, nous définissons les opérateurs nombres de particules et d'antiparticules

$$\hat{N}_k^{(c)} = c_k^+(\eta) c_k(\eta) \quad (3.28)$$

$$\hat{N}_k^{(d)} = d_k^+(\eta) d_k(\eta) \quad (3.29)$$

Ainsi, qu'à l'instant  $\eta$  l'état du vide est défini par

$$c_k |0_\eta\rangle = d_k |0_\eta\rangle = 0 \quad (3.30)$$

Considérons le problème de la création de particules. D'abord nous supposons que le champ scalaire quantifié est dans l'état du vide à l'instant  $\eta_0$ , annihilé par les opérateurs  $a_k$  et  $b_k^+$ , c'est-à-dire dans l'état  $|0_{\eta_0}\rangle$ , ensuite nous calculons la densité du nombre de particules dans cet état, nous obtenons

$$\langle 0_{\eta_0} | \hat{N}_k^{(c)} | 0_{\eta_0} \rangle = \langle 0_{\eta_0} | c_k^+(\eta) c_k(\eta) | 0_{\eta_0} \rangle = |\beta_k|^2 \quad (3.31)$$

$$\langle 0_{\eta_0} | \hat{N}_k^{(d)} | 0_{\eta_0} \rangle = \langle 0_{\eta_0} | d_k^+(\eta) d_k(\eta) | 0_{\eta_0} \rangle = |\beta_k|^2 \quad (3.32)$$

Nous pouvons dire alors que l'état  $|0_{\eta_0}\rangle$  contient  $|\beta_k|^2$  paires particule-antiparticule correspondant aux opérateurs  $c_k, c_k^+$  et  $d_k, d_k^+$  où

$$|\beta_k|^2 = \frac{\Omega}{4} |g_k|^2 + \frac{1}{4\Omega} |g'_k|^2 - \frac{1}{2} \quad (3.33)$$

### 3.3 Solution exacte pour l'univers de de-Sitter

Comme nous le savons, notre univers endure une expansion accélérée qui peut être décrite par un espace-temps de-Sitter en expansion exponentielle. De plus, l'espace-temps de de-Sitter permet une meilleure description de la période d'inflation. Par conséquent, la métrique de de-Sitter est intéressante à la fois pour la cosmologie de l'univers primordial et de l'univers actuel. Cette importance vient aussi du fait que l'espace de-Sitter est l'unique espace courbe maximale symétrique. Il jouit des mêmes degrés de symétrie que l'espace-temps de Minkowski. Ceci explique l'intérêt accru pour étudier les effets quantiques physiques dans un tel espace-temps. Dans ce paragraphe, nous considérons la création des particules dans l'univers de de-Sitter, qui est une solution de l'équation de Friedmann en présence d'une constante cosmologique, avec le facteur d'échelle

$$a(t) = \exp(Ht) \quad (3.34)$$

En terme du temps conforme  $\eta$ , l'espace-temps de de-Sitter est décrit par la métrique

$$ds^2 = \frac{1}{H^2\eta^2}(d\eta^2 - d\vec{x}^2) \quad (3.35)$$

où

$$\eta = -\frac{1}{Ha(t)} = \frac{-1}{H\eta} \text{ avec } -\infty < \eta < 0 \quad (3.36)$$

Ici, le scalaire de courbure  $R$  est constant

$$R = 12H^2 \quad (3.37)$$

Dans ce cas, l'équation du champ scalaire se réduit à

$$g_k''(\eta) + \Omega^2(\eta)g_k(\eta) = 0 \quad (3.38)$$

où

$$\Omega(\eta) = \sqrt{k^2 + \frac{M^2}{H^2\eta^2}} \quad (3.39)$$

avec

$$M^2 = \left(\xi - \frac{1}{6}\right)12H^2 + m^2 \quad (3.40)$$

Pour résoudre l'équation (3.38) nous utilisons la nouvelle variable

$$\rho = c\eta \quad (3.41)$$

où  $c$  est une constante. Nous obtenons l'équation différentielle suivante

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{M^2}{H^2} \frac{1}{\rho^2} + \frac{k^2}{c^2}\right)g_k(\eta) = 0 \quad (3.42)$$

A ce niveau, nous effectuons la factorisation

$$g_k(\eta) = \rho^s f(\rho) \quad (3.43)$$

qui nous mène à l'équation différentielle

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{2s}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \left[ \frac{M^2}{H^2} + s(s-1) \right] + \frac{k^2}{c^2} \right\} f(\rho) = 0. \quad (3.44)$$

Dans le cas où  $s = \frac{1}{2}$  et  $c = -k$ , l'équation (3.44) se réduit à celle de Bessel [79]

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \left[ 1 - \frac{\lambda^2}{\rho^2} \right] \right\} f(\rho) = 0 \quad (3.45)$$

où le paramètre  $\lambda$  est donné par

$$\lambda^2 = \frac{1}{4} - \frac{M^2}{H^2}. \quad (3.46)$$

La solution générale à l'équation (3.45) s'écrit comme une combinaison de deux solutions linéairement indépendantes exprimées par les fonctions de Hankel

$$f(\rho) = AH_\lambda^{(1)}(\rho) + BH_\lambda^{(2)}(\rho) \quad (3.47)$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes arbitraires.

Nous obtenons alors

$$g_k(\eta) = \sqrt{-|k|\eta} \left[ AH_\lambda^{(1)}(-k\eta) + BH_\lambda^{(2)}(-k\eta) \right] \quad (3.48)$$

Pour  $\eta_0 \rightarrow -\infty$ , le comportement asymptotique des fonctions de Hankel est donné par



[79]

$$\mathbf{H}_\lambda^{(1)}(-k\eta_0) \simeq \sqrt{-\frac{2}{\pi k\eta_0}} e^{i(-k\eta_0 - \frac{\pi\lambda}{2} - \frac{\pi}{4})} \quad , -2\pi < \arg(-k\eta_0) < \pi \quad (3.49)$$

$$\mathbf{H}_\lambda^{(2)}(-k\eta_0) \simeq \sqrt{-\frac{2}{\pi k\eta_0}} e^{-i(-k\eta_0 - \frac{\pi\lambda}{2} - \frac{\pi}{4})} \quad , -2\pi < \arg(-k\eta_0) < \pi \quad (3.50)$$

Nous savons bien que l'état du vide à l'instant  $\eta_0$ , est défini sous la condition initiale (3.2), alors, de (3.48) nous avons

$$g'_k(\eta_0) = i\Omega(\eta_0)\sqrt{-k\eta} \left[ A\mathbf{H}_\lambda^{(1)}(-k\eta) + B\mathbf{H}_\lambda^{(2)}(-k\eta) \right] \quad (3.51)$$

Quand  $\eta_0 \rightarrow -\infty$ , la fréquence  $\Omega(\eta_0)$  devient constante

$$\Omega(\eta_0) = k \quad (3.52)$$

et par conséquent,

$$g'_k(\eta_0) = ik\sqrt{-k\eta_0} \left[ A\mathbf{H}_\lambda^{(1)}(-k\eta) + B\mathbf{H}_\lambda^{(2)}(-k\eta) \right] \quad (3.53)$$

A partir de l'équation (3.48) nous obtenons

$$g'_k(\eta_0) = ik\sqrt{-k\eta_0} \left[ -A\mathbf{H}_\lambda^{(1)}(-k\eta_0) + B\mathbf{H}_\lambda^{(2)}(-k\eta_0) \right] \quad (3.54)$$

Si nous faisons une comparaison entre les deux équations (3.53) et (3.54), nous pouvons déduire que

$$g_k(\eta) = B\sqrt{-k\eta}\mathbf{H}_\lambda^{(2)}(-k\eta) \quad (3.55)$$

Pour déterminer la constante  $B$ , nous utilisons la condition

$$|g_k(\eta_0)| = \Omega^{-\frac{1}{2}}(\eta_0) \quad (3.56)$$

qui, lorsque  $\eta_0 \rightarrow -\infty$ , se réduit à

$$|g_k(\eta_0)| = k^{-\frac{1}{2}} \quad (3.57)$$

Alors, ceci nous permet de trouver

$$B = \sqrt{\frac{\pi}{2k}} \exp\left(\frac{\pi\tilde{\lambda}}{2}\right). \quad (3.58)$$

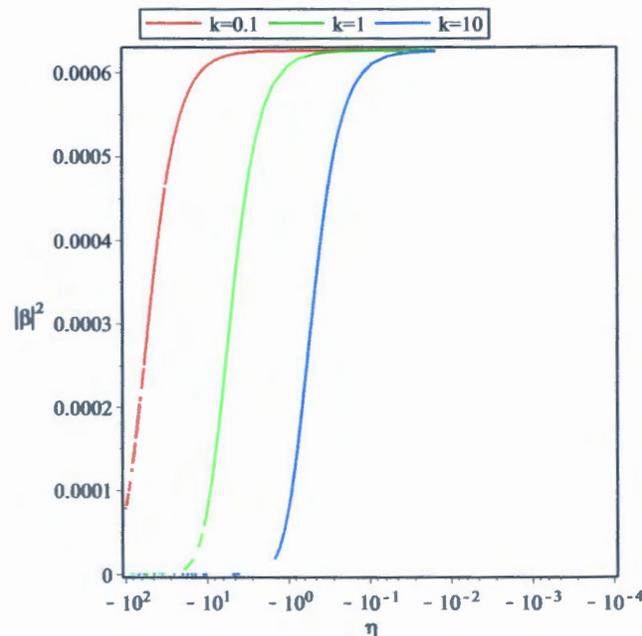
Finalement, la fonction  $g_k(\eta)$  prend l'expression suivante

$$g_k(\eta) = \sqrt{\frac{-\pi\eta}{2}} \exp\left(\frac{\pi\tilde{\lambda}}{2}\right) \mathbf{H}_\lambda^{(2)}(-k\eta) \quad (3.59)$$

avec

$$\tilde{\lambda} = \sqrt{\frac{M^2}{H^2} - \frac{1}{4}} = |\lambda| \quad (3.60)$$

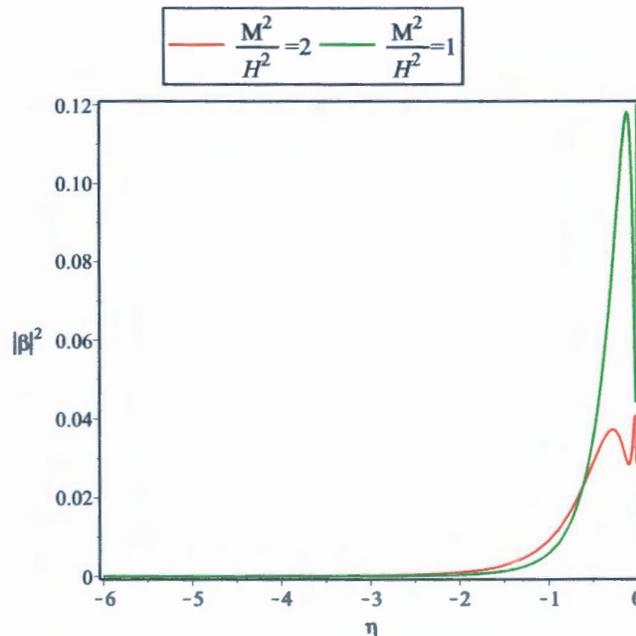
Nous obtenons ainsi une expression analytique pour le coefficient  $|\beta|^2$  qui représente le nombre de particules créées.



**Figure 3.1** – Variation de  $|\beta|^2$  en fonction du temps conforme  $\eta$ , pour différentes valeurs du vecteur d'onde  $k$ . Le paramètre  $\frac{m^2}{H^2} = 100$ .

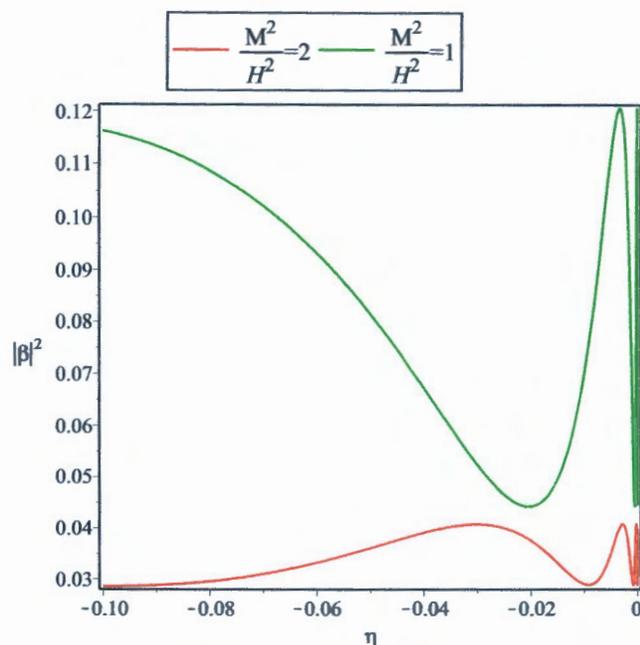
La figure 3.1 montre un résultat très important ; Les particules ayant le plus petit vecteur d'onde sont les premières à être créées. La deuxième remarque est que la limite  $\eta \rightarrow 0$  (i.e.  $t \rightarrow \infty$ ) ne dépend pas de  $k$ , ce qui mène à une divergence dans le calcul du nombre total des particules en faisant la somme sur toutes les impulsions. Cependant, comme l'espace-temps de de-Sitter, avec une expansion en exponentielle, décrit l'univers dans la période d'inflation qui est un période limitée, nous pouvons en conclure qu'il existe un Cut-off naturel sur les impulsions des particules créées dans l'espace de de-Sitter.

D'autre part, comme il est montré dans la figure (3.2), pour les petites valeurs du rapport  $\frac{M}{H}$ , la limite  $\lim_{\eta \rightarrow 0} |\beta|^2$  n'existe pas. Cela peut être expliqué par le fait que les petites valeurs de  $\frac{M}{H}$  brisent la condition adiabatique, qui peut se réduire dans l'espace de de-Sitter à  $\frac{M}{H} \gg 1$ .



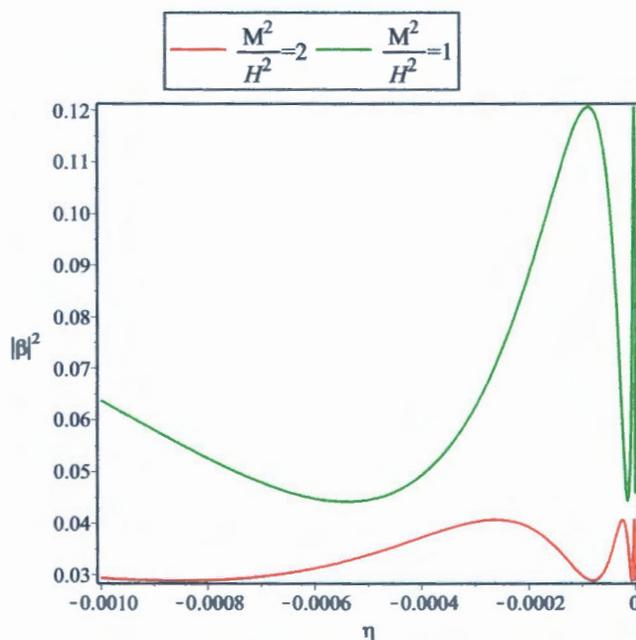
**Figure 3.2** – Variation de  $|\beta|^2$  en fonction du temps conforme  $\eta$ , pour différentes valeurs du paramètre  $\frac{m^2}{H^2}$ . Le vecteur d'onde  $k = 1$ .

Dans la figure (3.3), nous montrons la variation de  $|\beta|^2$  en fonction du temps conforme dans l'intervalle  $]-0.1, 0[$ . Cette figure éclaire le fait que la limite  $\eta \rightarrow 0$  n'existe pas et que  $|\beta|^2$  n'est bien défini.

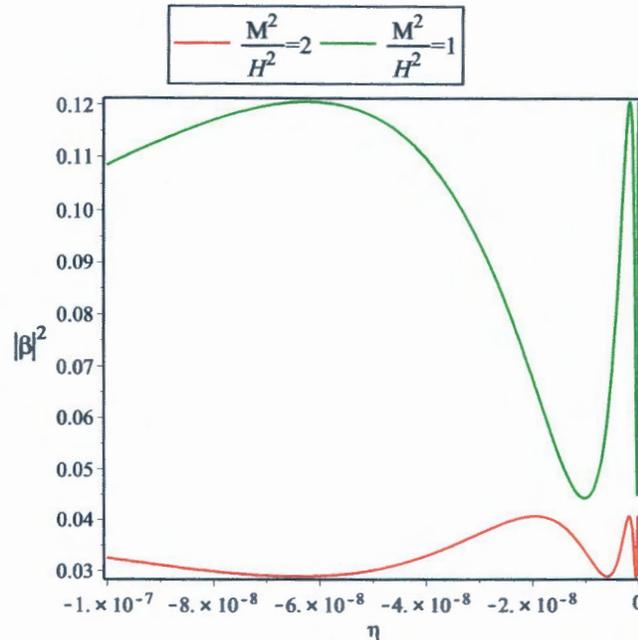


**Figure 3.3** – Variation de  $|\beta|^2$  en fonction du temps conforme  $\eta$ , pour différentes valeurs du paramètre  $\frac{m^2}{H^2}$ . Le vecteur d'onde  $k = 1$ .

Les figures (3.4) et (3.5) montrent les mêmes variations que celles représentées dans la figure précédente mais dans des intervalle plus petites. Nous remarquons qu'à chaque fois nous approchons la bore 0, nous obtenons la même forme, ce qui montre encore une fois l'inexistence de la limite  $\eta \rightarrow 0$ .



**Figure 3.4** – Variation de  $|\beta|^2$  en fonction du temps conforme  $\eta$ , pour différentes valeurs du paramètre  $\frac{m^2}{H^2}$ . Le vecteur d'onde  $k = 1$ .



**Figure 3.5** – Variation de  $|\beta|^2$  en fonction du temps conforme  $\eta$ , pour différentes valeurs du paramètre  $\frac{m^2}{H^2}$ . Le vecteur d'onde  $k = 1$ .

### 3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons établi une étude dynamique de la création de particules dans un univers isotrope homogène en utilisant la méthode de la diagonalisation instantanée de l'hamiltonien. Cette méthode nous permet d'obtenir l'expression de la densité des particules créées en fonction du temps conforme. Comme application, nous avons considéré la création de particules dans l'espace de Sitter où nous avons pu obtenir des solutions exactes pour l'équation de Klein Gordon associée. Les résultats essentiels de cette étude sont les suivants :

1. Le nombre de particules est bien défini seulement dans la limite adiabatique  $\frac{M}{H} \gg 1$ .
2. Les particules ayant le plus petit vecteur d'onde sont les premières à être créées.
3. Si la limite  $\eta \rightarrow 0$  existe, elle ne dépend pas du vecteur d'onde  $k$ .
4. Il existe une limite naturelle sur les impulsions des particules créées.

# Méthode des invariants

---

4.1	Introduction . . . . .	32
4.2	La théorie des invariants en mécanique quantique . . . . .	32
4.2.1	L'oscillateur harmonique avec fréquence variable . . . . .	35
4.3	La méthode des invariant en TQC . . . . .	41
4.3.1	Champ scalaire et invariant classique . . . . .	41
4.3.2	Invariant quantique . . . . .	45
4.3.3	Transformation de Bogoliubov et création de particules . . . . .	46
4.4	Création des particules dans l'univers de de-Sitter . . . . .	49
4.4.1	Solution de l'équation d'Ermakov . . . . .	49
4.4.2	Solutions exacte pour l'univers de de-Sitter . . . . .	51
4.5	Approximation adiabatique . . . . .	55
4.6	Conclusion . . . . .	58

---

## 4.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre, est de traiter le problème de la création de particules par la méthode des invariants de Lewis Riesenfeld, établie pour la première fois pour l'oscillateur harmonique dépendant du temps. D'abord nous abordons la théorie des invariants en mécanique quantique et nous cherchons la relation entre les solutions de l'équation de Schrödinger et les états propres de l'invariant. Nous considérons un oscillateur harmonique avec une fréquence dépendante du temps comme un exemple d'illustration. Ensuite nous nous proposons d'étendre cette méthode à la théorie quantique des champs. Pour obtenir l'invariant relatif à un champ scalaire réel, nous suivons en premier lieu une démarche classique [82, 83]. Une fois nous obtenons la forme de l'invariant classique, nous cherchons les générateurs qui engendrent l'invariant quantique. En dernière étape, nous établissons la transformation de Bogoliubov qui lie la représentation qui diagonalise l'invariant à celle qui diagonalise l'hamiltonien  $H$ . A partir des coefficients de Bogoliubov nous obtenons la densité des particules créées [82, 83, 84, 85]. Comme application nous considérons l'espace de de-Sitter.

## 4.2 La théorie des invariants en mécanique quantique

Considérons un système physique dont l'Hamiltonien  $H(t)$  dépend explicitement du temps. La théorie de Lewis-Riesenfeld [86] consiste à trouver un opérateur hermitien dit "invariant  $I(t)$ "

$$I(t) = I^\dagger(t) \quad (4.1)$$

ce qui implique que les valeurs propres de  $I(t)$  sont réelles. Ainsi  $I(t)$  vérifie la relation Von Neumann suivante

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [H, I] = 0. \quad (4.2)$$

En mécanique quantique, l'évolution de l'état du système est gouvernée par l'équation de Schrödinger dépendante du temps

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle. \quad (4.3)$$

En appliquant la relation (4.2) sur le ket  $|\psi(t)\rangle$  et en utilisant (4.3), nous obtenons l'équation

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (I |\psi(t)\rangle) = H(I |\psi(t)\rangle), \quad (4.4)$$

ce qui implique que l'opération de l'invariant  $I$  sur une solution de l'équation de Schrödinger est aussi une autre solution de cette équation.

Nous supposons que l'invariant est un opérateur d'un ensemble complet d'observables qui commutent, de ce fait nous pouvons dire que  $I$  admet un ensemble complet d'états propres  $|\chi_{\lambda,\kappa}(t)\rangle$  correspondants aux valeurs propres  $\lambda$ , où l'indice  $\kappa$  représente tous les autres nombres quantiques nécessaire pour spécifier ces états propres. Donc, les kets  $|\chi_{\lambda,\kappa}(t)\rangle$  satisfont l'équation suivante

$$I |\chi_{\lambda,\kappa}(t)\rangle = \lambda |\chi_{\lambda,\kappa}(t)\rangle, \quad (4.5)$$

avec, comme  $I$  est invariant,

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0 \quad (4.6)$$

et

$$\langle \chi_{\lambda',\kappa'}(t) | \chi_{\lambda,\kappa}(t) \rangle = \delta_{\lambda,\lambda'} \delta_{\kappa,\kappa'}. \quad (4.7)$$

En dérivant l'équation (4.5) par rapport à  $t$ , nous obtenons

$$(\lambda - I) \frac{\partial}{\partial t} |\chi_{\lambda,\kappa}(t)\rangle = \frac{\partial I}{\partial t} |\chi_{\lambda,\kappa}(t)\rangle, \quad (4.8)$$

Le produit de la dernière équation par le bra  $\langle \chi_{\lambda',\kappa'}(t) |$ , donne

$$(\lambda - \lambda') \langle \chi_{\lambda',\kappa'}(t) | \frac{\partial}{\partial t} | \chi_{\lambda,\kappa}(t) \rangle = \langle \chi_{\lambda',\kappa'}(t) | \frac{\partial I}{\partial t} | \chi_{\lambda,\kappa}(t) \rangle, \quad (4.9)$$

Maintenant, en opérant la relation (4.2) sur le ket  $| \chi_{\lambda,\kappa}(t) \rangle$  et en utilisant l'équation (4.5), nous pouvons écrire

$$i\hbar \frac{\partial I}{\partial t} | \chi_{\lambda,\kappa}(t) \rangle + IH | \chi_{\lambda,\kappa}(t) \rangle - \lambda H | \chi_{\lambda,\kappa}(t) \rangle = 0. \quad (4.10)$$

La projection de la dernière équation sur l'état  $| \chi_{\lambda',\kappa'}(t) \rangle$  nous donne

$$i\hbar \langle \chi_{\lambda',\kappa'}(t) | \frac{\partial I}{\partial t} | \chi_{\lambda,\kappa}(t) \rangle + (\lambda' - \lambda) \langle \chi_{\lambda',\kappa'}(t) | H | \chi_{\lambda,\kappa}(t) \rangle = 0. \quad (4.11)$$

En tenant compte de l'équation (4.9), nous obtenons

$$i\hbar (\lambda - \lambda') \langle \chi_{\lambda',\kappa'}(t) | \frac{\partial}{\partial t} | \chi_{\lambda,\kappa}(t) \rangle = (\lambda - \lambda') \langle \chi_{\lambda',\kappa'}(t) | H | \chi_{\lambda,\kappa}(t) \rangle, \quad (4.12)$$

Donc, pour  $\lambda \neq \lambda'$ , nous en déduisons la relation suivante

$$\langle \chi_{\lambda',\kappa'}(t) | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \chi_{\lambda,\kappa}(t) \rangle = \langle \chi_{\lambda',\kappa'}(t) | H | \chi_{\lambda,\kappa}(t) \rangle. \quad (4.13)$$

Pour  $\lambda = \lambda'$ , l'équation (4.12) n'implique pas l'équation (4.13) et, par conséquent, le ket  $| \chi_{\lambda,\kappa}(t) \rangle$  n'est pas une solution pour l'équation de Schrödinger. Alors, pour obtenir, des solutions de l'équation de Schrödinger nous considérons la transformation de jauge

$$| \chi_{\lambda,\kappa}(t) \rangle_s = e^{i\varepsilon_{\lambda,\kappa}(t)} | \chi_{\lambda,\kappa}(t) \rangle, \quad (4.14)$$

où  $\varepsilon_{\lambda,\kappa}(t)$  sont des fonctions arbitraires réelles dépendante du temps. Notons que  $| \chi_{\lambda,\kappa}(t) \rangle_s$  sont des états propres orthonormés de  $I(t)$  associés à la valeur propre  $\lambda$ .

Si nous exigeons que  $|\chi_{\lambda,\kappa}(t)\rangle_s$  soit une solution de l'équation de Schrödinger, nous obtenons le résultat suivant

$$\hbar\delta_{\kappa,\kappa'}\frac{d\varepsilon_{\lambda,\kappa}(t)}{dt} = \langle\chi_{\lambda,\kappa'}(t)|i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H|\chi_{\lambda,\kappa}(t)\rangle, \quad (4.15)$$

ce qui montre que les phases  $\varepsilon_{\lambda,\kappa}(t)$  satisfont l'équation simple suivante

$$\hbar\frac{d\varepsilon_{\lambda,\kappa}(t)}{dt} = \langle\chi_{\lambda,\kappa}(t)|i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H|\chi_{\lambda,\kappa}(t)\rangle. \quad (4.16)$$

La solution générale de l'équation de Schrödinger est alors

$$|\psi(t)\rangle =_{\lambda,\kappa} c_{\lambda,\kappa} e^{i\varepsilon(t)} |\chi_{\lambda,\kappa}(t)\rangle. \quad (4.17)$$

où  $c_{\lambda,\kappa}$  sont des coefficients de normalisation indépendants du temps.

### 4.2.1 L'oscillateur harmonique avec fréquence variable

Dans cette partie, nous allons étudier un oscillateur harmonique dépendant du temps via la méthode de Lewis et Riesenfeld pour obtenir des solutions exactes de l'équation de Schrödinger correspondante. Pour un oscillateur harmonique dépendant du temps l'opérateur hamiltonien s'écrit [?]

$$H(t) = \frac{p^2}{2M} + \frac{1}{2}M\Omega^2(t)q^2, \quad (4.18)$$

où les grandeurs canoniquement conjuguées  $p$  et  $q$  vérifient la relation de commutation suivante

$$[q, p] = i\hbar \quad (4.19)$$

et  $M$  et  $\Omega(t)$  sont, respectivement, la masse et la fréquence associées à cet oscillateur.

Pour appliquer la méthode de Lewis et Riesenfeld nous devons construire, d'abord,

l'opérateur invariant  $I$ . Pour un oscillateur harmonique nous pouvons chercher un invariant de la forme

$$I = \frac{1}{2} [\alpha(t) T_1 + \beta(t) T_2 + \gamma(t) T_3], \quad (4.20)$$

où  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  et  $\gamma(t)$  sont des fonctions dépendantes du temps à déterminer et les opérateurs  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$  sont donnés par

$$T_1 = p^2, \quad T_2 = q^2, \quad T_3 = \{q, p\}_+. \quad (4.21)$$

Dans ce cas, nous pouvons facilement vérifier les relations de commutations suivantes

$$[T_1, T_2] = -2i\hbar T_3 \quad (4.22)$$

$$[T_2, T_3] = 4i\hbar T_2 \quad (4.23)$$

$$[T_1, T_3] = -4i\hbar T_1 \quad (4.24)$$

Remplaçons l'équation (4.20) dans (4.2), nous obtenons

$$\left(\dot{\alpha} + \frac{2\gamma}{M}\right) T_1 + \left(\dot{\beta} - 2M\Omega^2\gamma\right) T_2 + \left(\dot{\gamma} + \frac{\beta}{M} - M\Omega^2\alpha\right) T_3 = 0, \quad (4.25)$$

d'où, nous tirons un système d'équations linéaires de premier ordre

$$\dot{\alpha} = -\frac{2\gamma}{M}, \quad (4.26)$$

$$\dot{\beta} = 2M\Omega^2\gamma, \quad (4.27)$$

$$\dot{\gamma} = M\Omega^2\alpha - \frac{\beta}{M}. \quad (4.28)$$

Pour résoudre ce système d'équations, posons

$$\alpha = \sigma^2, \quad (4.29)$$

où  $\sigma = \sigma(t)$  est une fonction dépendant du temps. Il vient alors

$$\beta = M^2 (\dot{\sigma}^2 + \sigma \ddot{\sigma} + \Omega^2 \sigma^2), \quad (4.30)$$

et

$$\gamma = -M\sigma\dot{\sigma}. \quad (4.31)$$

En remplaçant l'expression de  $\beta$  dans (4.27), nous pouvons montrer que  $\sigma$  vérifie l'équation

$$\sigma \frac{d}{dt} [\ddot{\sigma} + \Omega^2 \sigma] + 3\dot{\sigma} [\ddot{\sigma} + \Omega^2 \sigma] = 0. \quad (4.32)$$

En multipliant la dernière équation par  $\sigma^2$  et en faisant l'intégration, nous en déduisons que la quantité  $\sigma^3 (\ddot{\sigma} + \Omega^2 \sigma)$  est une constante, ce qui nous donne

$$\ddot{\sigma} + \Omega^2 \sigma = \frac{c}{\sigma^3} \quad (4.33)$$

où  $c$  est la constante d'intégration. Prenons  $\sigma = c^{\frac{1}{4}} \rho$ , nous trouvons l'équation auxiliaire suivante

$$\ddot{\rho} + \Omega^2 \rho = \frac{1}{\rho^3}. \quad (4.34)$$

En tenant compte des équations (4.29), (4.31), (4.30) et (4.34), l'invariant (4.20) peut s'écrire comme

$$I = \frac{1}{2} \left[ \rho^2 p^2 + \left( M^2 \dot{\rho}^2 + \frac{1}{\rho^2} \right) q^2 - M \rho \dot{\rho} \{q, p\}_+ \right]. \quad (4.35)$$

Ayant obtenu l'expression de l'invariant, cherchons, maintenant, ses fonctions propres pour obtenir les solutions exactes de l'équation de Schrodinger pour l'oscillateur harmonique dépendant du temps (4.18).

D'abord, nous considérons l'équation aux valeurs propres

$$I\chi(q, t) = \lambda\chi(q, t). \quad (4.36)$$

et nous introduisons la transformation unitaire suivante

$$\chi(q, t) = S\chi'(q, t) \quad (4.37)$$

avec

$$S = \exp\left(\frac{iM\dot{\rho}}{2\hbar\rho}q^2\right). \quad (4.38)$$

L'opérateur  $I$  se transforme, alors, en  $I'$  avec

$$I' = S^+IS = \frac{1}{2}\left(\rho^2p^2 + \frac{q^2}{\rho^2}\right). \quad (4.39)$$

L'équation (4.36) devient

$$I'\chi'(q, t) = \lambda\chi'(q, t). \quad (4.40)$$

En faisant le changement de variable  $Q = \frac{q}{\rho}$ , l'équation (4.40) peut se réduire à celle de l'oscillateur harmonique indépendant du temps de masse  $M = \frac{1}{2}$  et de fréquence  $\Omega = 2M$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial Q^2} + \frac{1}{2}M\Omega^2Q^2 - \lambda\right)\chi'(q, t) = 0, \quad (4.41)$$

dont la solution peut être écrite en fonction de polynôme d'Hermite

$$\chi'_n(Q, t) = A \exp\left(-\frac{M\Omega}{2\hbar}Q^2\right) H_n\left(\sqrt{\frac{M\Omega}{\hbar}}Q\right), \quad (4.42)$$

et les valeurs propres  $\lambda$  sont données par

$$\lambda = \lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\Omega. \quad (4.43)$$

Compte tenu de (4.37), les états propres de l'invariant (4.35) sont donc donnés par

$$\chi_n(q, t) = A \exp\left[\frac{M}{2\hbar}\left(\frac{i\rho\dot{\rho}}{2M} - 1\right)\frac{q^2}{\rho^2}\right] H_n\left(\sqrt{\frac{M\Omega}{\hbar}}\frac{q}{\rho}\right). \quad (4.44)$$

Pour déterminer la constante  $A$ , nous utilisons la condition de normalisation

$$\int \chi_n^* \chi_n dQ = \int \chi_n^* \chi_n dq = 1 \quad (4.45)$$

et la formule [79]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} H_n(z) H_n(z) dz = \sqrt{\pi} 2^n n! \quad (4.46)$$

d'où

$$A = \sqrt{\left(\frac{\hbar}{M\Omega\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^n n! \rho}} \quad (4.47)$$

et, ainsi, nous obtenons

$$\chi_n(q, t) = \sqrt{\left(\frac{\hbar}{M\Omega\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^n n! \rho}} \exp\left[\frac{M}{2\hbar} \left(\frac{i\rho\dot{\rho}}{2M} - 1\right) \frac{q^2}{\rho^2}\right] H_n\left(\sqrt{\frac{M\Omega}{\hbar}} \frac{q}{\rho}\right). \quad (4.48)$$

Maintenant nous voulons trouver l'expression de la phase  $\varepsilon(t)$ . A l'aide de la transformation unitaire (4.38), l'équation (4.16) devient

$$\hbar\dot{\varepsilon}(t) = \langle \chi'_n | i\hbar S^+ \frac{\partial}{\partial t} S | \chi'_n \rangle - \langle \chi'_n | S^+ H S | \chi'_n \rangle. \quad (4.49)$$

Le premier terme du second membre peut se simplifier à

$$\langle \chi'_n | i\hbar S^+ \frac{\partial}{\partial t} S | \chi'_n \rangle = \langle \chi'_n | -\frac{M}{2} \left(\frac{\ddot{\rho}}{\rho} - \frac{\dot{\rho}^2}{\rho^2}\right) q^2 + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \chi'_n \rangle, \quad (4.50)$$

et le deuxième terme s'écrit

$$\begin{aligned} \langle \chi'_n | S^+ H S | \chi'_n \rangle &= \langle \chi'_n | -\frac{i\hbar\dot{\rho}}{2\rho} - \frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{1}{2} M\Omega^2 q^2 \\ &+ \frac{M\dot{\rho}^2}{2\rho^2} q^2 - \frac{i\hbar\dot{\rho}}{\rho} q \frac{\partial}{\partial q} | \chi'_n \rangle. \end{aligned} \quad (4.51)$$



L'équation (4.49) se réduit alors à l'équation suivante

$$\begin{aligned} \hbar \dot{\epsilon}(t) = \langle \chi'_n | & -\frac{M}{2\rho} [\dot{\rho} + \Omega^2 \rho] q^2 - \frac{p^2}{2M} \\ & + \frac{i\hbar \dot{\rho}}{2\rho} - \frac{\dot{\rho}}{\rho} qp + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \chi'_n \rangle. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Ici, nous utilisons la formule [79]

$$\frac{d}{dx} H_n(x) = 2n H_{n-1}(x) \quad (4.53)$$

pour écrire

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \chi'_n(q, t) = i\hbar \sqrt{\left(\frac{\hbar}{M\Omega\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^n n! \rho}} \exp\left(-\frac{M\Omega}{2\hbar} \left(\frac{q}{\rho}\right)^2\right) \left\{ -\frac{\dot{\rho}}{2\rho} H_n\left(\sqrt{\frac{M\Omega}{\hbar}} \frac{q}{\rho}\right) \right. \\ \left. + \frac{M\Omega \dot{\rho} q^2}{2\hbar \rho^3} H_n\left(\sqrt{\frac{M\Omega}{\hbar}} \frac{q}{\rho}\right) - 2n \sqrt{\frac{M\Omega}{\hbar}} \frac{\dot{\rho} q}{\rho^2} H_{n-1}\left(\sqrt{\frac{M\Omega}{\hbar}} \frac{q}{\rho}\right) \right\} \end{aligned} \quad (4.54)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q} \chi'_n(q, t) = \sqrt{\left(\frac{\hbar}{M\Omega\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^n n! \rho}} \exp\left(-\frac{M\Omega}{2\hbar} \left(\frac{q}{\rho}\right)^2\right) \left\{ -\frac{M\Omega q}{\hbar \rho^2} H_n\left(\sqrt{\frac{M\Omega}{\hbar}} \frac{q}{\rho}\right) \right. \\ \left. + \frac{2n}{\rho} \sqrt{\frac{M\Omega}{\hbar}} H_{n-1}\left(\sqrt{\frac{M\Omega}{\hbar}} \frac{q}{\rho}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Nous obtenons alors

$$\left( \frac{i\hbar \dot{\rho}}{2\rho} + i\hbar \frac{\dot{\rho}}{\rho} q \frac{\partial}{\partial q} + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \chi'_n(q, t) = 0, \quad (4.56)$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\langle \chi'_n | \frac{i\hbar \dot{\rho}}{2\rho} - \frac{\dot{\rho}}{\rho} qp + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \chi'_n \rangle = 0. \quad (4.57)$$

En utilisant les équations (4.34), (4.57) et (4.39), nous obtenons l'équation

$$\hbar \dot{\varepsilon}(t) = \langle \chi'_n | \left( -\frac{I'}{2M\rho^2} \right) | \chi'_n \rangle, \quad (4.58)$$

et, par conséquent,

$$\varepsilon(t) = -\left(n + \frac{1}{2}\right) \int^t \frac{dt}{\rho^2}. \quad (4.59)$$

Finalement, nous obtenons l'expression de la solution de l'équation de Schrödinger associée à l'Hamiltonien (4.18)

$$\begin{aligned} \psi(q, t) = & \sqrt{\left(\frac{\hbar}{M\Omega\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^n n! \rho}} \exp\left(-i\left(n + \frac{1}{2}\right) \int^t \frac{dt}{\rho^2}\right) \\ & \times \exp\left[\frac{M}{2\hbar} (iM\rho\dot{\rho} - 1) \frac{q^2}{\rho^2}\right] H_n\left(\sqrt{\frac{M\Omega}{\hbar}} \frac{q}{\rho}\right). \end{aligned} \quad (4.60)$$

### 4.3 La méthode des invariant en TQC

Dans cette section nous nous proposons de suivre la même démarche pour trouver un invariant  $I$  pour la théorie quantique des champs dans univers en expansion. Il est plus commode de chercher d'abord l'invariant classique [82].

#### 4.3.1 Champ scalaire et invariant classique

Nous considérons un champ scalaire réel  $\varphi(x)$  de masse  $m$  dans un espace courbe, décrit par l'action,

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \left[ \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \left( a^2 m^2 - \frac{a''}{a^2} (1 - 6\xi) \right) \phi^2 \right] \quad (4.61)$$

Ici, nous prenons le couplage conforme  $\xi = \xi_c = \frac{1}{6}$  et nous considérons la transformation de Fourier suivante

$$\phi(\eta, \vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \phi_{\mathbf{k}}(\eta) \quad (4.62)$$

nous obtenons l'action totale

$$S = \frac{1}{2} \int d\eta \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} [(\phi'_k)^2 - \Omega^2(\eta) \phi_k^2] \quad (4.63)$$

avec

$$\Omega^2(\eta) = a^2 m^2 + k^2. \quad (4.64)$$

De l'équation (4.63), nous pouvons tirer l'expression du Lagrangien  $L_\phi$  associé au champ  $\phi_k(\eta)$

$$L_\phi = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} [(\phi'_k)^2 - \Omega^2(\eta) \phi_k^2]. \quad (4.65)$$

Par transformation de Legendre nous obtenons l'Hamiltonien  $H_\phi$

$$H_\phi = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} [\pi_\phi^2 + \Omega^2(\eta) \phi_k^2] \quad (4.66)$$

où  $\pi_\phi(\eta)$  est le moment conjugué du champ  $\phi_k(\eta)$

$$\pi_\phi(\eta) = \phi'_k(\eta) \quad (4.67)$$

Maintenant, nous introduisons une transformation sur le temps conforme  $\eta$

$$d\eta = \rho^2 d\tau \quad (4.68)$$

et une autre sur le champ  $\phi_k(\eta)$

$$\phi_k(\eta) = \rho \chi_k(\tau) \quad (4.69)$$

où  $\rho$  est une fonction qui dépend explicitement du temps. Nous pouvons facilement voir que l'action (4.63) devient

$$S = \frac{1}{2} \int d\tau \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[ \left( \dot{\chi}_k + \frac{\dot{\rho}}{\rho} \chi_k \right)^2 - \Omega^2 \rho^4 \chi_k^2 \right] \quad (4.70)$$

d'où nous pouvons tirer le Lagrangien  $L_\chi$  associé au champ  $\chi_k(\tau)$

$$L_\chi = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ \left( \dot{\chi}_k + \frac{\dot{\rho}}{\rho} \chi_k \right)^2 - \Omega^2 \rho^4 \chi_k^2 \right] \quad (4.71)$$

Notons que le moment conjugué associé au champ  $\chi_k(\tau)$  est donné par

$$\pi_\chi = \frac{\partial L_\chi}{\partial \dot{\chi}_k} = \dot{\chi}_k + \frac{\dot{\rho}}{\rho} \chi_k. \quad (4.72)$$

Pour un simple calcul nous obtenons l'expression de l'Hamiltonien du système  $H_\chi$

$$H_\chi = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ \left( \pi_\chi - \frac{\dot{\rho}}{\rho} \chi \right)^2 + \left( \rho^4 \Omega^2 - \frac{\dot{\rho}^2}{\rho^2} \right) \chi^2 \right]. \quad (4.73)$$

Ici, nous introduisons une transformation canonique de l'ensemble  $\{\chi_k, \pi_\chi\}$  à l'ensemble  $\{\tilde{\chi}_k, \tilde{\pi}_\chi\}$  définie par

$$\tilde{\pi}_\chi = \pi_\chi - \frac{\dot{\rho}}{\rho} \chi_k, \quad (4.74)$$

$$\tilde{\chi}_k = \chi_k, \quad (4.75)$$

Cette transformation est associée à la fonction génératrice

$$F(\tilde{\chi}_k, \tilde{\pi}_\chi) = \tilde{\pi}_\chi \tilde{\chi}_k + \frac{1}{2} \frac{\dot{\rho}}{\rho} \tilde{\chi}_k^2 \quad (4.76)$$

qui vérifie les relations suivantes

$$\frac{\partial F}{\partial \tilde{\chi}_k} = \tilde{\pi}_\chi, \quad (4.77)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \tilde{\pi}_\chi} = \tilde{\chi}_k. \quad (4.78)$$

L'hamiltonien  $H_{\tilde{\chi}}$  associé au nouveau champ  $\tilde{\chi}_k$  est par définition

$$H_{\tilde{\chi}}(\tilde{\chi}_k, \tilde{\pi}_\chi) = H_\chi(\chi_k, \pi_\chi) + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\partial F(\tilde{\chi}_k, \tilde{\pi}_\chi)}{\partial \tau}, \quad (4.79)$$

ce qui nous conduit au résultat suivant

$$H_{\tilde{\chi}} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ \tilde{\pi}_\chi^2 + \left( \rho^4 \Omega^2 - 2 \frac{\dot{\rho}^2}{\rho^2} + \frac{\ddot{\rho}}{\rho} \right) \tilde{\chi}_k^2 \right]. \quad (4.80)$$

Rétablissons, maintenant, le temps conforme  $\eta$ , pour obtenir l'expression

$$H_{\tilde{\chi}} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ \tilde{\pi}_\chi^2 + (\rho^4 \Omega^2 + \rho^3 \rho'') \tilde{\chi}_k^2 \right] \quad (4.81)$$

d'où nous tirons immédiatement l'équation d'Ermakov en posant  $\rho^4 \Omega^2 + \rho^3 \rho'' = k^2$ . Nous avons alors

$$\rho'' + \rho \Omega^2 = \frac{k^2}{\rho^3}. \quad (4.82)$$

Il est à noter que, si pour  $\rho$  est une solution de l'équation d'Ermakov, l'Hamiltonien  $H_{\tilde{\chi}}$  est exactement l'invariant associé au système en considération

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ \tilde{\pi}_\chi^2 + k^2 \tilde{\chi}_k^2 \right]. \quad (4.83)$$

En rétablissant les champs initiaux  $\phi_k(\eta)$  et  $\pi_\phi(\eta)$ , nous obtenons

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ (\rho \pi_\phi - \rho' \phi_k)^2 + \frac{k^2}{\rho^2} \phi_k^2 \right]. \quad (4.84)$$

### 4.3.2 Invariant quantique

Ayant construit l'invariant classique, considérons maintenant une approche quantique.

Nous cherchons un invariant de la forme

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [\alpha(\eta) T_1(k) + \beta(\eta) T_2(k) + \gamma(\eta) T_3(k)], \quad (4.85)$$

où les opérateurs  $T_1(k), T_2(k)$  et  $T_3(k)$  sont donnés par

$$T_1(k) = \pi_\phi^2(\eta), \quad (4.86)$$

$$T_2(k) = \phi_k^2(\eta), \quad (4.87)$$

$$T_3(k) = \{\phi_k(\eta), \pi_\phi(\eta)\}_+. \quad (4.88)$$

L'hamiltonien  $H_\phi$ , défini par l'équation (4.66), s'écrit en fonction de ces opérateurs comme suit

$$H_\phi = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [T_1(k) + \Omega^2(\eta) T_2(k)]. \quad (4.89)$$

Comme l'invariant vérifie l'équation de Von Neumann et les opérateurs  $T_1(k), T_2(k)$  et  $T_3(k)$  satisfont les relations de commutation suivantes

$$[T_1(k), T_2(k')] = -2i (\pi_\phi(\eta) \phi_{k'}(\eta) + \phi_{k'}(\eta) \pi_\phi(\eta)) \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (4.90)$$

$$[T_2(k), T_3(k')] = 2i (\phi_k(\eta) \phi_{k'}(\eta) + \phi_{k'}(\eta) \phi_k(\eta)) \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (4.91)$$

$$[T_1(k), T_3(k')] = -2i (\pi_{\phi_k}(\eta) \pi_{\phi_{k'}}(\eta) + \pi_{\phi_{k'}}(\eta) \pi_{\phi_k}(\eta)) \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (4.92)$$

Nous obtenons, pour les coefficients  $\alpha(\eta)$ ,  $\beta(\eta)$  et  $\gamma(\eta)$ , le système d'équations suivant

$$\alpha'(\eta) = -2\gamma(\eta) \quad (4.93)$$

$$\beta'(\eta) = 2\Omega^2\gamma(\eta) \quad (4.94)$$

$$\gamma'(\eta) = \Omega^2\alpha(\tau) - \beta(\eta) \quad (4.95)$$

Notons que ce système d'équations est le même que celui obtenu pour l'oscillateur harmonique dépendant du temps. La solution est donc

$$\alpha(\eta) = \rho^2 \quad (4.96)$$

$$\beta(\eta) = \Omega^2 \rho^2 + \rho'' \rho + \rho'^2 \quad (4.97)$$

$$\gamma(\eta) = -\rho' \rho \quad (4.98)$$

où  $\rho$  est une solution de l'équation d'Ermakov (4.82). Nous avons alors

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[ (\rho \pi_\phi - \rho' \phi_k)^2 + \frac{k^2}{\rho^2} \phi_k^2 \right] \quad (4.99)$$

En faisant la transformation

$$\tilde{\phi}_k = \frac{\phi_k}{\rho} \quad (4.100)$$

$$\tilde{\pi}_\phi = \rho \pi_\phi - \rho' \phi_k, \quad (4.101)$$

nous obtenons

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[ \tilde{\pi}_\phi^2 + k^2 \tilde{\phi}_k^2 \right]. \quad (4.102)$$

### 4.3.3 Transformation de Bogoliubov et création de particules

Dans cette partie, nous nous proposons d'étudier le problème de la création de particules dans un univers en expansion à partir de la représentation qui diagonalise l'invariant. Dans cette représentation le champ  $\tilde{\phi}_k(\eta)$  et le moment conjugué  $\tilde{\pi}_\phi(\eta)$  s'écrivent comme suit

$$\tilde{\phi}_k(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2k}} [a_k + a_{-k}^+] \quad (4.103)$$

$$\tilde{\pi}_\phi(\eta) = -i \sqrt{\frac{\Omega}{2}} [a_k - a_{-k}^+]. \quad (4.104)$$

Ici, nous pouvons voir que l'invariant  $I$  est diagonal dans la représentation (4.103) et (4.104) qui définit, ainsi, un état du vide invariant  $|0_{inv}\rangle$  qui reste stable au cours du temps.

Nous avons alors

$$a_k |0_{inv}\rangle = 0. \quad (4.105)$$

D'autre part, nous avons la représentation qui diagonalise l'Hamiltonien à l'instant  $\eta$

$$\phi_k(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} [c_k + c_{-k}^+] \quad (4.106)$$

$$\pi_\phi(\eta) = -i\sqrt{\frac{k}{2}} [c_k - c_{-k}^+]. \quad (4.107)$$

Nous avons, ainsi, un état du vide instantané

$$c_k |0_\eta\rangle = 0. \quad (4.108)$$

Maintenant, nous utilisons la transformation définie par (4.100) et (4.101) pour trouver la liaison entre les opérateurs  $a_k$  et  $a_k^+$  d'une part et  $c_k$  et  $c_k^+$  de l'autre part. Il vient alors que

$$a_k = \alpha_k c_k + \beta_k c_{-k}^+ \quad (4.109)$$

$$a_k^+ = \beta_k^* c_{-k} + \alpha_k^* c_k^+, \quad (4.110)$$

où les coefficients de Bogoliubov  $\alpha_k$  et  $\beta_k$  sont donnés par

$$\beta_k = \frac{1}{2} \left( -\rho\sqrt{\frac{\Omega}{k}} + \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{k}{\Omega}} - i\frac{\rho'}{\sqrt{\Omega k}} \right) \quad (4.111)$$

$$\alpha_k = \frac{1}{2} \left( \rho\sqrt{\frac{\Omega}{k}} + \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{k}{\Omega}} - i\frac{\rho'}{\sqrt{\Omega k}} \right), \quad (4.112)$$

avec la condition

$$|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2 = 1. \quad (4.113)$$

Nous avons aussi la transformation inverse

$$c_k = \alpha_k^* a_k - \beta_k a_{-k}^+ \quad (4.114)$$

$$c_k^+ = \alpha_k a_k^+ - \beta_k^* a_{-k}. \quad (4.115)$$

Maintenant nous définissons le nombre de particules

$$N_k = c_k^+ c_k \quad (4.116)$$

A l'aide de la transformation de Bogoliubov (4.114) et (4.115) nous pouvons montrer que

$$\langle 0_{inv} | N_k | 0_{inv} \rangle = \langle 0_{inv} | c_k^+ c_k | 0_{inv} \rangle = |\beta_k|^2 \quad (4.117)$$

Ce dernier résultat montre que le vide invariant contient des particules  $c$  avec la densité

$$|\beta_k|^2 = \left( \frac{\rho^2 \Omega}{4 k} + \frac{1}{4\rho^2} \frac{k}{\Omega} - \frac{1}{2} \right) + \frac{\rho'^2}{4\Omega k} \quad (4.118)$$

Cependant, même si la l'équation (4.105) est vérifiée, nous ne pouvons pas dire que  $|0_{inv}\rangle$  décrit un vide physique. Alors, pour qu'on puisse interpréter  $|0_{inv}\rangle$  comme un vide physique, la condition suivante doit être vérifiée

$$\rho \rightarrow 1. \quad (4.119)$$

Dans cette condition, nous pouvons voir que

$$\phi_k(\eta) \rightarrow \tilde{\phi}_k(\eta) \quad (4.120)$$

$$\pi_\phi(\eta) \rightarrow \tilde{\pi}_\phi(\eta), \quad (4.121)$$

ce qui implique que

$$a_k \equiv c_k \quad (4.122)$$

$$a_k^+ \equiv c_k^+ \quad (4.123)$$

Dans ce cas, nous pouvons dire que  $|\beta_k|^2$  signifie la densité du nombre de particules physiques.

## 4.4 Création des particules dans l'univers de de-Sitter

### 4.4.1 Solution de l'équation d'Ermakov

Bien avant l'avènement de la mécanique quantique, Ermakov a étudié l'intégrabilité d'un système non linéaire avec une force harmonique temporelle avec un terme cubique inverse, qui est maintenant connu comme l'invariant d'Ermakov. Ensuite, Pinney a trouvé une solution générale à l'équation d'Ermakov en termes de deux solutions indépendantes pour l'oscillateur harmonique dépendant du temps. Dans ce paragraphe, nous nous proposons de trouver une solution plus générale à l'équation d'Ermakov. Pour cela, nous considérons deux solutions linéairement indépendantes à l'équation homogène

$$\rho'' + \Omega^2(\eta) \rho = 0. \quad (4.124)$$

Nous notons ces deux solutions  $\rho_1$  et  $\rho_2$  et nous posons

$$\rho^2 = A^2 \rho_1^2 + B^2 \rho_2^2 + 2ABC \rho_1 \rho_2 \quad (4.125)$$

où  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des constantes. Un simple calcul nous montre que (4.125) est une solution de l'équation d'Ermakov

$$\rho'' + \omega^2 \rho = \frac{k^2}{\rho^3} \quad (4.126)$$

si les constantes  $A$ ,  $B$  et  $C$  vérifient la condition

$$k^2 = A^2 B^2 (1 - C^2) W^2 \quad (4.127)$$

où  $W$  est le Wronskian, donné par la relation suivante

$$W = \rho_1' \rho_2 - \rho_2' \rho_1 \quad (4.128)$$

Pour avoir une solution réelle, supposons que les deux solutions sont les conjuguées complexes l'une de l'autre  $\rho_1^* = \rho_2$ . L'équation (4.125) peut s'écrire alors comme

$$\rho^2 = a^2 (\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2C \rho_1 \rho_2) \quad (4.129)$$

où  $a$  est une constante réelle.

Nous posons maintenant  $C = \cosh(2\alpha)$ . Dans ce cas, nous pouvons montrer que

$$a^2 = \left| \frac{k}{W} \right| \frac{1}{\sinh 2\alpha} \quad (4.130)$$

et, par conséquent, la solution  $\rho^2$  s'écrit alors

$$\rho^2 = \left| \frac{k}{W} \right| \frac{1}{\sinh 2\alpha} (\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1 \rho_2 \cosh(2\alpha)). \quad (4.131)$$

Nous obtenons finalement

$$\rho = \sqrt{\left| \frac{k}{W} \right| \frac{1}{\sinh 2\alpha} |e^{-\alpha} \rho_1 + e^{\alpha} \rho_2|}. \quad (4.132)$$

#### 4.4.2 Solutions exacte pour l'univers de de-Sitter

Pour l'espace de de-Sitter, l'équation (4.124) devient la même équation de Bessel qui peut être résolue par deux solutions linéairement indépendantes, données par

$$\rho_1 = e^{i\vartheta} \sqrt{-\frac{k\eta}{2}} J_\lambda(-k\eta) \simeq \frac{e^{i\vartheta}}{\Gamma(\lambda+1)} \left(-\frac{k\eta}{2}\right)^{\lambda+\frac{1}{2}} \quad (4.133)$$

$$\rho_2 = e^{-i\vartheta} \sqrt{-\frac{k\eta}{2}} J_{-\lambda}(-k\eta) \simeq \frac{e^{-i\vartheta}}{\Gamma(-\lambda+1)} \left(-\frac{k\eta}{2}\right)^{-\lambda+\frac{1}{2}} \quad (4.134)$$

Dans ce cas,  $W$  prend cette expression

$$W = \frac{1}{\Gamma(1+i\tilde{\lambda})\Gamma(1-i\tilde{\lambda})} ik\tilde{\lambda} = ik \frac{\sinh \pi \tilde{\lambda}}{\pi} \quad (4.135)$$

où  $\lambda = i\tilde{\lambda}$

Ce qui fait

$$\rho^2 = -\frac{k\eta}{2} \frac{\pi}{\sinh \pi \tilde{\lambda} \sinh 2\alpha} \left| e^{\alpha+i\vartheta} J_\lambda(-k\eta) + e^{-(\alpha+i\vartheta)} J_{-\lambda}(-k\eta) \right|^2 \quad (4.136)$$

Maintenant en utilisant les relations

$$\mathbf{H}_\nu^{(1)}(z) = i \frac{1}{\sin \pi \nu} \left( e^{-\nu \pi i} J_\nu(z) - J_{-\nu}(z) \right) \quad (4.137)$$

$$\mathbf{H}_\nu^{(2)}(z) = i \frac{1}{\sin \pi \nu} \left( J_{-\nu}(z) - e^{\nu \pi i} J_\nu(z) \right) \quad (4.138)$$

et les propriétés

$$\mathbf{H}_{-\lambda}^{(1)}(z) = e^{\nu \pi i} \mathbf{H}_\lambda^{(1)}(z), \quad (4.139)$$

$$\mathbf{H}_{-\lambda}^{(2)}(z) = e^{-\nu \pi i} \mathbf{H}_\lambda^{(2)}(z) \quad (4.140)$$

$$\mathbf{H}_\lambda^{(1)}(z) = e^{\tilde{\lambda} \pi} \overline{\mathbf{H}_\lambda^{(2)}(-k\eta)} \quad (4.141)$$

nous trouvons

$$J_{i\tilde{\lambda}}(z) = \frac{\mathbf{H}_{i\tilde{\lambda}}^{(1)}(z) + \mathbf{H}_{i\tilde{\lambda}}^{(2)}(z)}{2} \quad (4.142)$$

$$J_{-i\tilde{\lambda}}(z) = \frac{e^{-\pi\tilde{\lambda}}\mathbf{H}_{i\tilde{\lambda}}^{(1)}(z) + e^{\pi\tilde{\lambda}}\mathbf{H}_{i\tilde{\lambda}}^{(2)}(z)}{2} \quad (4.143)$$

Alors, la solution (4.136) devient

$$\rho^2 = -\frac{k\eta}{2} \frac{\pi}{\sinh \pi\tilde{\lambda} \sinh 2\alpha} \left| e^{\alpha+i\vartheta} \frac{\mathbf{H}_{i\tilde{\lambda}}^{(1)}(z) + \mathbf{H}_{i\tilde{\lambda}}^{(2)}(z)}{2} + e^{-(\alpha+i\vartheta)} \frac{e^{-\pi\tilde{\lambda}}\mathbf{H}_{i\tilde{\lambda}}^{(1)}(z) + e^{\pi\tilde{\lambda}}\mathbf{H}_{i\tilde{\lambda}}^{(2)}(z)}{2} \right|^2 \quad (4.144)$$

ou bien

$$\rho^2 = -\frac{k\eta}{2} \frac{\pi}{\sinh \pi\tilde{\lambda} \sinh 2\alpha} \left| e^{-\frac{\pi}{2}\tilde{\lambda}} \cosh \left( \alpha + \frac{\pi}{2}\tilde{\lambda} + i\vartheta \right) \mathbf{H}_{i\tilde{\lambda}}^{(1)}(z) + e^{\frac{\pi}{2}\tilde{\lambda}} \cosh \left( \alpha - \frac{\pi}{2}\tilde{\lambda} + i\vartheta \right) \mathbf{H}_{i\tilde{\lambda}}^{(2)}(z) \right|^2 \quad (4.145)$$

En utilisant le comportement asymptotique ( $\eta \rightarrow -\infty$ )

$$\mathbf{H}_{\lambda}^{(1)}(-k\eta) \simeq \sqrt{-\frac{2}{\pi k\eta}} e^{-i\left(k\eta + i\frac{\pi\tilde{\lambda}}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}, \quad -2\pi < \arg(-k\eta) < \pi. \quad (4.146)$$

$$\mathbf{H}_{\lambda}^{(2)}(-k\eta) \simeq \sqrt{-\frac{2}{\pi k\eta}} e^{i\left(k\eta + i\frac{\pi\tilde{\lambda}}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}, \quad -2\pi < \arg(-k\eta) < \pi. \quad (4.147)$$

nous obtenons

$$\rho^2 = \frac{1}{\sinh \pi\tilde{\lambda} \sinh 2\alpha} \left| \cos \left( \vartheta - i\alpha - i\frac{\pi}{2}\tilde{\lambda} \right) e^{-ik\eta} + \cos \left( \vartheta - i\alpha + i\frac{\pi}{2}\tilde{\lambda} \right) e^{ik\eta} e^{i\frac{\pi}{2}} \right|^2 \quad (4.148)$$

Pour avoir une solution  $\rho$ , constante à  $\eta \rightarrow -\infty$ , nous devons choisir

$$\cos \left( \vartheta - i\alpha + i\frac{\pi}{2}\tilde{\lambda} \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2}\tilde{\lambda} - \alpha = 0 \\ \vartheta = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (4.149)$$

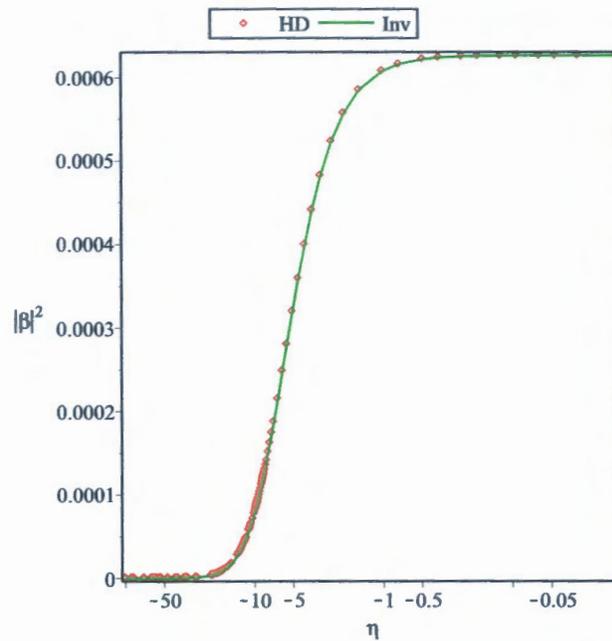
Dans ce cas avons

$$\rho^2(\eta \rightarrow -\infty) = \frac{1}{\sinh^2 \pi \tilde{\lambda}} \left| \cos \left( \frac{\pi}{2} - i\pi \tilde{\lambda} \right) \right|^2$$

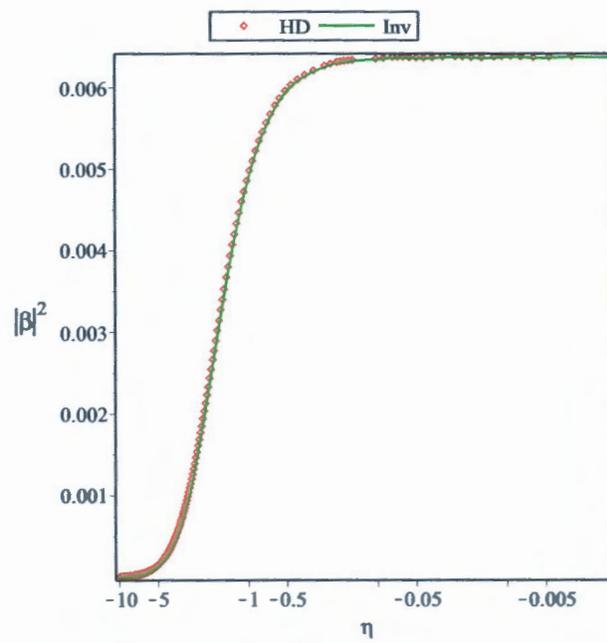
et par conséquent,

$$\rho = \sqrt{-\frac{\pi k \eta}{2}} e^{\frac{\pi}{2} \tilde{\lambda}} \left| \mathbf{H}_{i\tilde{\lambda}}^{(2)}(-k\eta) \right|. \quad (4.150)$$

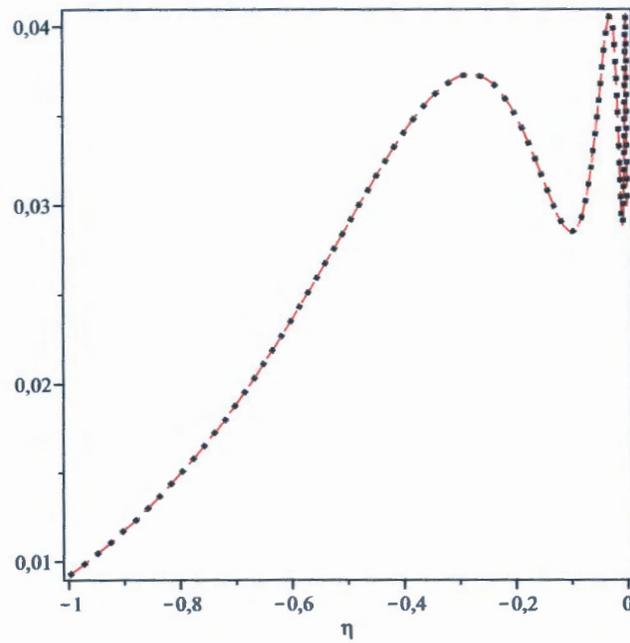
Dans les figures jointes nous représentons la densité des particules calculée par la méthode des invariants comparée à celle dérivée à partir de la diagonalisation de l'hamiltonien



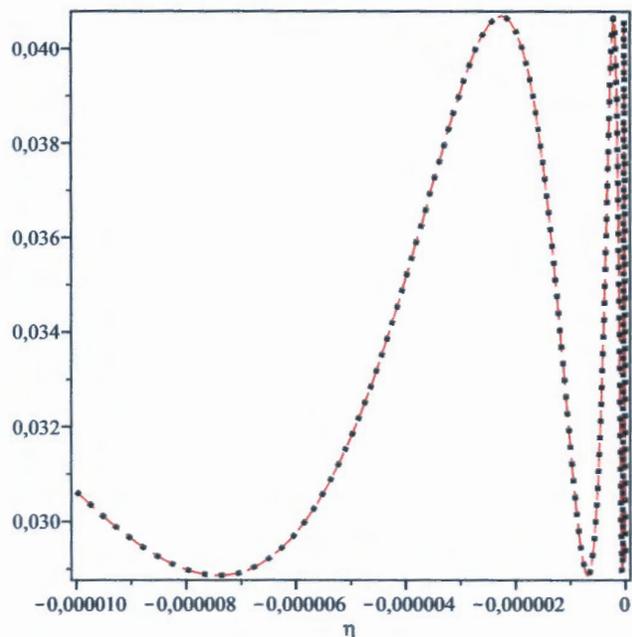
**Figure 4.1** – La densité de particules calculée par la méthode de la diagonalisation de l'hamiltonien comparée à celle calculée par la méthode des invariants, pour  $\frac{M}{H} = 100$  et  $k = 1$ .



**Figure 4.2** – La densité de particules calculée par la méthode de la diagonalisation de l'hamiltonien comparée à celle calculée par la méthode des invariants, pour  $\frac{M}{H} = 10$  et  $k = 1$ .



**Figure 4.3** – La densité de particules calculée par la méthode de la diagonalisation de l'hamiltonien comparée à celle calculée par la méthode des invariants, pour  $\frac{M}{H} = 2$  et  $k = 1$ .



**Figure 4.4** – La densité de particules calculée par la méthode de la diagonalisation de l'hamiltonien comparée à celle calculée par la méthode des invariants, pour  $\frac{M}{H} = 2$  et  $k = 1$ .

## 4.5 Approximation adiabatique

On peut se demander si la méthode présentée dans ce chapitre peut être appliquée quelque soit la fréquence dépendant du temps  $\Omega(\eta)$ . Le problème est équivalent à la résolution explicite de l'équation d'Ermakov qui au-delà de la théorie des équations différentielles linéaires. Nous proposons maintenant une méthode d'approximation inspirée de l'approximation WKB et la théorie de perturbations sous l'hypothèse d'une expansion lente de l'univers. La solution approchée peut être écrite sous la forme d'une série

$$\rho = \sum_k \rho_k \varepsilon^k = \rho_0 + \rho_1 \varepsilon + \rho_2 \varepsilon^2 + \rho_3 \varepsilon^3$$

où  $\varepsilon$  est le paramètre adiabatique qui représente l'échelle de variation caractéristique de la fonction  $\Omega(\eta)$ . La prescription de introduire le paramètre  $\varepsilon$  dans l'équation d'Ermakov

$$\varepsilon \rho'' + \Omega^2(\eta) \rho = \frac{k^2}{\rho^3}$$

de développer en série de perturbations. A la fin nous mettrons  $\varepsilon = 1$ .

A l'ordre zéro, nous avons

$$\rho_0^4 = \frac{k^2}{\Omega^2(\eta)} \quad (4.151)$$

Les corrections d'ordres supérieurs sont alors

$$\rho_1 = -\frac{\rho_0''}{4\Omega^2(\eta)} \quad (4.152)$$

$$\rho_2 = -\frac{\rho_1''}{4\Omega^2(\eta)} - \frac{3\rho_1^2}{2\rho_0} \quad (4.153)$$

$$\rho_3 = -\frac{5\rho_1^3}{2\rho_0^2} + 3\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_0} - \frac{\rho_2''}{4\Omega^2(\eta)} \quad (4.154)$$

Nous obtenons alors les résultats suivants

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{k}{\Omega}}$$

$$\rho_1 = \frac{1}{8} \left[ \sqrt{\frac{k}{\Omega}} \left( \frac{\Omega''}{\Omega^3} - \frac{3\Omega'^2}{2\Omega^4} \right) \right]$$

$$\rho_2 = -\frac{1}{32} \sqrt{\frac{k}{\Omega}} \left( \frac{\Omega''''}{\Omega^5} + 10\frac{\Omega'''\Omega'}{\Omega^6} + \frac{29\Omega''^2}{4\Omega^6} + \frac{207\Omega''\Omega'^2}{4\Omega^7} + \frac{621\Omega'^4}{16\Omega^8} \right)$$

La solution approchée est alors

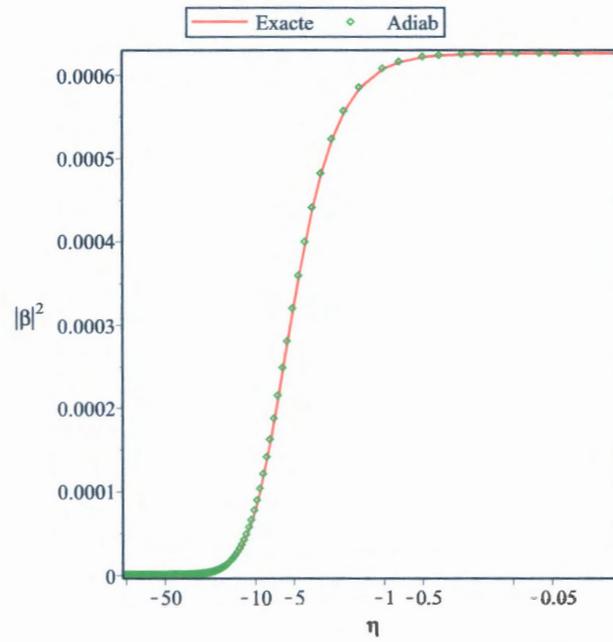
$$\begin{aligned} \rho = & \sqrt{\frac{k}{\Omega}} + \frac{1}{8} \sqrt{\frac{k}{\Omega}} \left( \frac{\Omega''}{\Omega^3} - \frac{3\Omega'^2}{2\Omega^4} \right) \varepsilon \\ & - \frac{1}{32} \sqrt{\frac{k}{\Omega}} \left( \frac{\Omega''''}{\Omega^5} + 10\frac{\Omega'''\Omega'}{\Omega^6} + \frac{29\Omega''^2}{4\Omega^6} + \frac{207\Omega''\Omega'^2}{4\Omega^7} + \frac{621\Omega'^4}{16\Omega^8} \right) \varepsilon^2 + \dots \end{aligned}$$

Comme application illustrative considérons la solution à l'ordre 1. Dans ce cas nous pouvons voir que

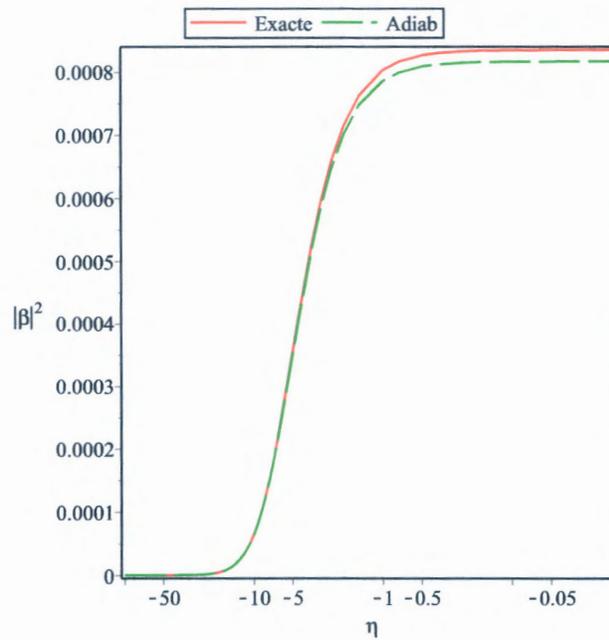
$$|\beta_k|^2 = \frac{1}{32} \left( -\frac{\Omega'''\Omega'}{\Omega^6} + \frac{13\Omega''\Omega'^2}{2\Omega^7} - \frac{27\Omega'^4}{4\Omega^8} + 2\frac{\Omega'^2}{\Omega^4} \right). \quad (4.155)$$

Dans les figures 4.5, 4.6, 4.7 et 4.8 nous représentons la variation de la densité  $|\beta_k|^2$  (4.155) comparée à la densité exacte calculée par la théorie des invariants pour certaines valeurs

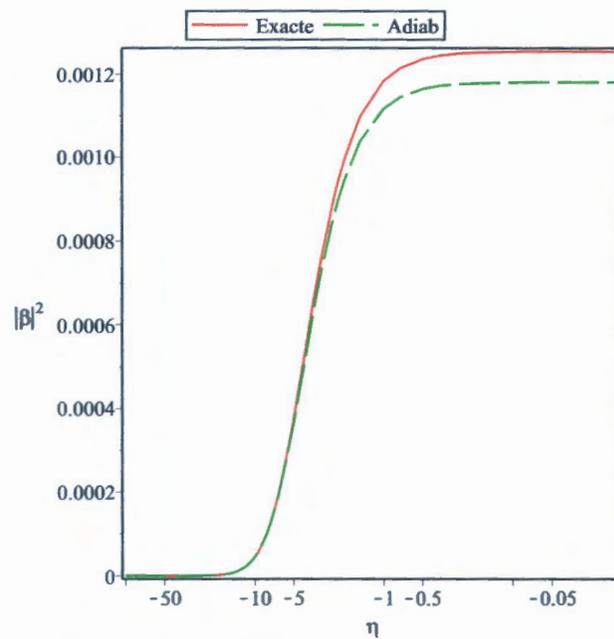
des paramètres  $M$ ,  $H$  et  $k$ .



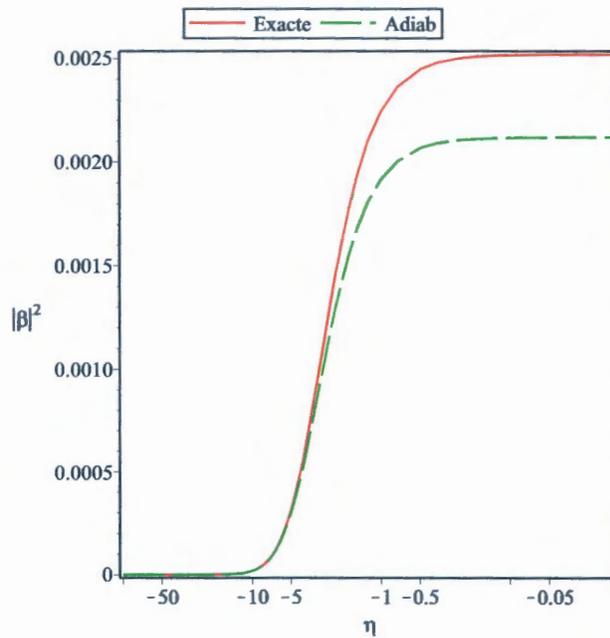
**Figure 4.5** – Variation de la densité  $|\beta_k|^2$  (4.155) comparée à la densité exacte pour certaines valeurs des paramètres  $\frac{M}{H} = 100$  et  $k = 1$ .



**Figure 4.6** – Variation de la densité  $|\beta_k|^2$  (4.155) comparée à la densité exacte pour certaines valeurs des paramètres  $\frac{M}{H} = 75$  et  $k = 1$ .



**Figure 4.7** – Variation de la densité  $|\beta_k|^2$  (4.155) comparée à la densité exacte pour certaines valeurs des paramètres  $\frac{M}{H} = 50$  et  $k = 1$ .



**Figure 4.8** – Variation de la densité  $|\beta_k|^2$  (4.155) comparée à la densité exacte pour certaines valeurs des paramètres  $\frac{M}{H} = 25$  et  $k = 1$ .

## 4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons considéré, dans la dernière partie, un champ scalaire complexe en présence d'un champ électrique dépendant du temps. Dans ce cas nous avons

pu obtenir l'expression de l'invariant correspondant, ce qui nous a permis de calculer la densité des particules créées. Nous avons considéré ensuite une méthode d'approximation inspirée de l'approximation WKB et la théorie de perturbations en supposant que l'univers subit une expansion lente.

Les résultats obtenus sont les suivants :

1. La méthode des invariants donne les mêmes résultats que la méthode basée sur la diagonalisation de l'hamiltonien.
2. L'approximation WKB est une bonne approximation dans la limite  $\frac{M}{H} \gg 1$ .

# Champ scalaire complexe

---

5.1	Introduction . . . . .	61
5.2	Champ scalaire complexe . . . . .	61
5.3	Invariant classique . . . . .	62
5.4	Invariant quantique . . . . .	64
5.5	Création de particules . . . . .	66
5.6	Champ électrique constant et homogène . . . . .	69
	5.6.1 Solution de l'équation d'Ermakov . . . . .	70
	5.6.2 Résultats . . . . .	72
5.7	Conclusion . . . . .	73

---

## 5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étudier la création de particules scalaires à partir du vide par un champ électrique en utilisant la théorie des invariants. Il s'agit alors d'un champ scalaire complexe soumis à l'action d'un champ électrique  $\vec{E}(t)$ . Nous obtenons en premier lieu l'opérateur invariant correspondant et nous considérons ensuite le cas d'un champ électrique homogène et constant. Il est à noter que l'étude de la création de particules par un champ électrique est de grand intérêt en électrodynamique quantique [91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 100, 101, 102].

## 5.2 Champ scalaire complexe

Considérons maintenant un champ scalaire complexe  $\phi(t, \vec{x})$  en présence d'un champ électrique décrit par le potentiel vecteur  $\vec{A}(t)$  avec  $\vec{E}(t) = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(t)$ . La densité lagrangienne de ce système peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{L} = \int d^4x \left[ \dot{\phi}^* \dot{\phi} - (\vec{\nabla} \phi + ie \vec{A} \phi)^* (\vec{\nabla} \phi + ie \vec{A} \phi) - m^2 \phi^* \phi \right] \quad (5.1)$$

d'où nous dérivons l'équation du mouvement pour le champ  $\phi$

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - (\vec{\nabla} + ie \vec{A})^2 + m^2 \right] \phi = 0, \quad (5.2)$$

qui n'est rien d'autre que l'équation de Klein Gordon en présence d'un potentiel vecteur  $\vec{A}(t)$ . D'abord nous introduisons la transformation de Fourier

$$\phi(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{\phi}_k(t) \quad (5.3)$$



Comme

$$\vec{\nabla} \phi^* = -i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} (\vec{k}) e^{-i \vec{k} \cdot \vec{x}} \tilde{\phi}_k(t) \quad (5.4)$$

$$\vec{\nabla} \phi = i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} (\vec{k}) e^{i \vec{k} \cdot \vec{x}} \tilde{\phi}_k(t) \quad (5.5)$$

nous obtenons

$$S = \int dt \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[ \dot{\phi}_k^* \dot{\phi}_k - \left( (\vec{k} - \vec{A}(t))^2 + m^2 \right) \phi_k^* \phi_k \right] \quad (5.6)$$

d'où nous extrayons le lagrangien

$$L_\phi = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[ \dot{\phi}_k^* \dot{\phi}_k - \Omega^2(t) \phi_k^* \phi_k \right] \quad (5.7)$$

avec

$$\Omega^2(t) = (\vec{k} - \vec{A}(t))^2 + m^2. \quad (5.8)$$

Dans ce cas, nous pouvons montrer que l'hamiltonien correspondant,  $H_\phi$ , s'écrit

$$H_\phi = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[ \pi_\phi \pi_\phi^* + \Omega^2(t) \phi_k^* \phi_k \right]. \quad (5.9)$$

### 5.3 Invariant classique

En théorie quantique des champs, il est bien connu qu'un champ scalaire complexe est équivalent à un système de deux champs scalaire réels. Nous pouvons toujours écrire le champ scalaire complexe  $\phi_k(t)$  et son moment conjugué  $\pi_\phi(t)$  sous la forme algébrique

$$\phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2) \quad (5.10)$$

$$\pi_\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\pi_1 - i\pi_2) \quad (5.11)$$

où  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont deux champs scalaires réels.  $\pi_1$  et  $\pi_2$  sont les moments conjugués à  $\phi_1$  et  $\phi_2$  respectivement.

Dans ce cas, l'hamiltonien (5.9) peut se décomposer en deux parties

$$H_\phi = H_1 + H_2 \quad (5.12)$$

avec

$$H_i = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [(\pi_i)^2 + \Omega^2(t) (\phi_i)^2]. \quad (5.13)$$

Comme  $[H_1, H_2] = 0$ , nous pouvons montrer que l'invariant du système est de la forme

$$I = I_1 + I_2 \quad (5.14)$$

où  $I_i$  est l'invariant associé au champ réel  $\phi_i$

$$I_i = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ (\rho\pi_i - \dot{\rho}\phi_i)^2 + \frac{k^2}{\rho^2} \phi_i^2 \right]. \quad (5.15)$$

Pour avoir la représentation diagonale de l'invariant  $I$ , nous introduisons des nouveaux champs  $\tilde{\phi}_k$  et  $\tilde{\pi}_\phi$  avec

$$\tilde{\phi}_i = \frac{\phi_i}{\rho} \quad (5.16)$$

$$\tilde{\pi}_i = \rho\pi_i - \dot{\rho}\phi_i. \quad (5.17)$$

Il vient alors que

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [(\tilde{\pi}_1)^2 + (\tilde{\pi}_2)^2 + k^2 (\tilde{\phi}_1^2 + \tilde{\phi}_2^2)]. \quad (5.18)$$

Nous introduisons encore le champ complexe  $\tilde{\phi}_k$  définie par

$$\tilde{\phi}_k = \tilde{\phi}_1 + i\tilde{\phi}_2 \quad (5.19)$$

$$\tilde{\pi}_\phi = \tilde{\pi}_1 - i\tilde{\pi}_2 \quad (5.20)$$

L'invariant du système devient alors

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [\tilde{\pi}_\phi \tilde{\pi}_\phi^* + k^2 \tilde{\phi}_k \tilde{\phi}_k^*]. \quad (5.21)$$

Compte tenu de la transformation définie dans (5.16) et (5.17), nous avons

$$\tilde{\phi} = \frac{\phi}{\rho} \quad (5.22)$$

$$\tilde{\pi}_\phi = \rho \pi_\phi - \dot{\rho} \phi \quad (5.23)$$

ce qui nous permet d'écrire l'invariant sous la forme finale

$$I = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ (\rho \pi_\phi - \dot{\rho} \phi_k^*) (\rho \pi_\phi^* - \dot{\rho} \phi_k) + \frac{k^2}{\rho^2} \phi_k \phi_k^* \right]. \quad (5.24)$$

## 5.4 Invariant quantique

Dans ce paragraphe nous montrons que l'invariant quantique a la même forme que (5.24) et peut être obtenu à partir de l'équation de Von Neumann. En effet, nous cherchons un invariant de la forme

$$I = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [\alpha(t) T_1(k) + \beta(t) T_2(k) + \gamma(t) T_3(k)] \quad (5.25)$$

où les générateurs  $T_1(k)$ ,  $T_2(k)$  et  $T_3(k)$  sont donnés par

$$T_1(k) = \pi_\phi \pi_\phi^* \quad (5.26)$$

$$T_2(k) = \phi_k \phi_k^* \quad (5.27)$$

$$T_3(k) = \pi_\phi \phi_k + \phi_k^* \pi_\phi^*. \quad (5.28)$$

Ces opérateurs satisfont les relations de commutation suivantes

$$[T_1(k), T_2(k')] = -i(\pi_k \phi_{k'} + \phi_{k'}^* \pi_k^*) \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (5.29)$$

$$[T_2(k), T_3(k')] = i(\phi_k \phi_{k'}^* + \phi_{k'} \phi_k^*) \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (5.30)$$

$$[T_1(k), T_3(k')] = -i(\pi_k \pi_{k'}^* + \pi_{k'} \pi_k^*) \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (5.31)$$

En fonction des générateurs  $T_1(k)$ ,  $T_2(k)$  et  $T_3(k)$ , les opérateurs  $H_\phi$  et  $[I, H_\phi]$  s'écrivent

$$H_\phi = \int d^3k [T_1(k) + \Omega^2(\eta) T_2(k)] \quad (5.32)$$

et

$$[I, H_\phi] = \int d^3k \{2i\hbar\gamma T_1 - 2i\hbar\gamma\Omega^2 T_2 - i\hbar(\alpha\Omega^2 - \beta) T_3\} \quad (5.33)$$

Nous obtenons, pour les coefficients  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  et  $\gamma(t)$ , le système d'équations suivant

$$\dot{\alpha}(t) = -2\gamma(t) \quad (5.34)$$

$$\dot{\beta}(t) = 2\Omega^2\gamma(t) \quad (5.35)$$

$$\dot{\gamma}(t) = \Omega^2\alpha(t) - \beta(t), \quad (5.36)$$

qui le même que celui obtenu pour l'oscillateur harmonique dépendant du temps. La solution est donc

$$\alpha(t) = \rho^2 \quad (5.37)$$

$$\gamma(t) = -\dot{\rho} \quad (5.38)$$

$$\beta(t) = \frac{k^2}{\rho^2} + \dot{\rho}^2 \quad (5.39)$$

où la fonction  $\rho$  vérifie l'équation d'Ermakov

$$\ddot{\rho} + \Omega^2 \rho = \frac{k^2}{\rho^3}. \quad (5.40)$$

Nous avons alors

$$I = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[ \rho^2 T_1 + \left( \frac{k^2}{\rho^2} + \dot{\rho}^2 \right) T_2 - \dot{\rho} \rho T_3 \right] \quad (5.41)$$

$$= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[ (\rho \pi_\phi - \dot{\rho} \phi_k^*) (\rho \pi_\phi^* - \dot{\rho} \phi_k) + \frac{k^2}{\rho^2} \phi_k \phi_k^* \right]. \quad (5.42)$$

A ce niveau nous introduisons  $\tilde{\phi}_k$ ,  $\tilde{\phi}_k^*$ ,  $\tilde{\pi}_\phi$  et  $\tilde{\pi}_\phi^*$  défini par

$$\tilde{\pi}_\phi = \rho \pi_\phi - \dot{\rho} \phi_k^* \quad (5.43)$$

$$\tilde{\pi}_\phi^* = \rho \pi_\phi^* - \dot{\rho} \phi_k \quad (5.44)$$

$$\tilde{\phi}_k = \frac{\phi_k}{\rho} \quad (5.45)$$

$$\tilde{\phi}_k^* = \frac{\phi_k^*}{\rho} \quad (5.46)$$

pour obtenir finalement

$$I = \int d^3 x \left[ \tilde{\pi}_\phi^* \tilde{\pi}_\phi + k^2 \tilde{\phi}_k^* \tilde{\phi}_k \right]. \quad (5.47)$$

## 5.5 Création de particules

Comme dans le cas du champ scalaire réel, nous avons, ici, deux représentations. La première représentation est celle qui diagonalise l'hamiltonien  $H$

$$\pi_\phi = -i\sqrt{\frac{\Omega}{2}} [-c_k^+ + d_{-k}] \quad (5.48)$$

$$\pi_\phi^* = -i\sqrt{\frac{\Omega}{2}} [c_k - d_{-k}^+] \quad (5.49)$$

$$\phi_k = \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} [c_k + d_{-k}^+] \quad (5.50)$$

$$\phi_k^* = \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} [c_k^+ + d_{-k}]. \quad (5.51)$$

Pour la deuxième représentation qui diagonalise l'invariant nous avons

$$\tilde{\pi}_\phi = -i\sqrt{\frac{k}{2}} [-a_k^+ + b_{-k}] \quad (5.52)$$

$$\tilde{\pi}_\phi^* = -i\sqrt{\frac{k}{2}} [a_k - b_{-k}^+] \quad (5.53)$$

$$\tilde{\phi}_k = \frac{1}{\sqrt{2k}} [a_k + b_{-k}^+] \quad (5.54)$$

$$\tilde{\phi}_k^* = \frac{1}{\sqrt{2k}} [a_k^+ + b_{-k}]. \quad (5.55)$$

Compte tenu des équations (5.43), (5.44), (5.45) et (5.46), nous obtenons la transformation de Bogoliubov qui relie les deux représentations

$$c_k = \tilde{\alpha}_k^* a_k + \tilde{\beta}_k b_{-k}^+ \quad (5.56)$$

$$d_k^+ = \tilde{\alpha}_k^* b_k^+ + \tilde{\beta}_k^* a_{-k} \quad (5.57)$$

et sa transformation inverse

$$a_k = \tilde{\alpha}_k c_k - \tilde{\beta}_k d_{-k}^+ \quad (5.58)$$

$$b_k^+ = \tilde{\alpha}_k^* d_k^+ - \tilde{\beta}_k^* c_{-k}. \quad (5.59)$$

Ici ,les coefficient de Bogoliubov qui vérifient la condition

$$|\tilde{\alpha}_k|^2 - |\tilde{\beta}_k|^2 = 1 \quad (5.60)$$

sont donnés par

$$\tilde{\alpha}_k = \frac{1}{2} \left[ \rho \sqrt{\frac{\Omega}{k}} + \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{k}{\Omega}} - i \frac{\dot{\rho}}{\sqrt{k\Omega}} \right] \quad (5.61)$$

$$\tilde{\beta}_k = \frac{1}{2} \left[ \rho \sqrt{\frac{\Omega}{k}} - \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{k}{\Omega}} + i \frac{\dot{\rho}}{\sqrt{k\Omega}} \right] \quad (5.62)$$

Nous définissons maintenant l'état  $|0_i\rangle$  tel que

$$a_k |0_i\rangle = 0 \quad (5.63)$$

$$b_k |0_i\rangle = 0 \quad (5.64)$$

Cet état est l'état du vide physique si et seulement si

$$\rho_{t \rightarrow -\infty} \approx \frac{k}{\Omega}. \quad (5.65)$$

A tout instant donné  $t$ , nous définissons les opérateurs de nombre de particules à partir de la représentation qui diagonalise  $H$

$$\hat{N}_k^{(c)} = c_k^+(t) c_k(t) \quad (5.66)$$

$$\hat{N}_k^{(d)} = d_k^+(t) d_k(t) \quad (5.67)$$

Nous avons alors la densité des particules dans l'état du vide  $|0_i\rangle$

$$\langle 0_i | c_k^+(t) c_k(t) | 0_i \rangle = \langle 0_i | d_k^+(t) d_k(t) | 0_i \rangle = |\tilde{\beta}_k|^2 \quad (5.68)$$

Nous en déduisons alors que l'état  $|0_i\rangle$  contient  $|\tilde{\beta}_k|^2$  paires de particules où

$$|\tilde{\beta}_k|^2 = \frac{\rho^2 \Omega}{4k} + \frac{1}{4\rho^2} \frac{k}{\Omega} + \frac{\rho^2}{4\Omega k} - \frac{1}{2} \quad (5.69)$$

## 5.6 Champ électrique constant et homogène

Considérons maintenant un champ électrique constant et homogène et choisissons la jauge

$$A_\mu = (0, 0, 0, Et) \quad (5.70)$$

Dans ce cas l'équation (5.2) devient

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (k_z + eEt)^2 + k_\perp^2 + m^2 \right] \phi_k(t) = 0. \quad (5.71)$$

Posons pour résoudre cette équation

$$\tau = \sqrt{2ieE} \left( t + \frac{k_z}{eE} \right). \quad (5.72)$$

Compte tenu du fait que

$$\frac{d^2}{dt^2} = 2ieE \frac{d^2}{d\tau^2},$$

nous obtenons l'équation différentielle

$$\left[ \frac{d^2}{d\tau^2} - \frac{\tau^2}{4} + \frac{1}{2} + p \right] \phi_k(\tau) = 0 \quad (5.73)$$

où

$$p = -\frac{1}{2} - i \frac{k_\perp^2 + m^2}{2eE}. \quad (5.74)$$

### 5.6.1 Solution de l'équation d'Ermakov

Suivant [79] l'équation (5.73) admet comme solutions linéairement indépendantes

$$\rho_1 = e^{i\theta} D_p((1+i)z) \quad (5.75)$$

$$\rho_2 = e^{-i\theta} D_{-p-1}((1-i)z) \quad (5.76)$$

où  $D_p(z)$  est la fonction du cylindre parabolique de Weber (*Weber parabolic cylinder function*) et la variable  $\xi$  est donné par

$$z = \sqrt{eE} \left( t + \frac{k_z}{eE} \right). \quad (5.77)$$

Ici,  $e^{i\theta}$  est une phase constante supposée arbitraire. La solution de l'équation d'Ermakov est donc

$$\rho = \sqrt{\left| \frac{k}{W} \right| \frac{1}{\sinh 2\alpha}} \left| e^{-\alpha} \rho_1 + e^{\alpha} \rho_2 \right|. \quad (5.78)$$

$$= \sqrt{\left| \frac{k}{W} \right| \frac{1}{\sinh 2\alpha}} e^{-\alpha} \left| D_p((1+i)z) + e^{2(\alpha-i\theta)} D_{-p-1}((1-i)z) \right|. \quad (5.79)$$

Pour qu'on puisse avoir la limite (5.65), on doit pose

$$e^{2(\alpha-i\theta)} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-p)} \exp\left(i\pi \frac{p-1}{2}\right). \quad (5.80)$$

Nous avons alors

$$\rho = \sqrt{\left| \frac{k}{W} \right| \frac{1}{\sinh 2\alpha}} e^{-\alpha} \left| \exp(i\pi p) \right| \quad (5.81)$$

$$\left| \exp(-i\pi p) D_p((1+i)z) + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-p)} \exp\left(-i\pi \frac{p+1}{2}\right) D_{-p-1}((1-i)z) \right|.$$

Compte tenu de la relation fonctionnelle entre les fonctions du cylindre parabolique

$$D_p(x) = \exp(-i\pi p) D_p(-x) + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-p)} \exp\left(-i\pi \frac{p+1}{2}\right) D_{-p-1}(ix) \quad (5.82)$$

avec, dans notre cas,

$$x = -(1+i)z \quad (5.83)$$

nous pouvons voir que

$$\rho = \sqrt{\left|\frac{k}{W}\right| \frac{1}{\sinh 2\alpha} e^{-\alpha} |\exp(i\pi p)| |D_p(-(1+i)z)|}. \quad (5.84)$$

En utilisant la propriété

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2} + ix\right)\right|^2 = \frac{\pi}{\cosh \pi x} \quad (5.85)$$

nous pouvons montrer que

$$e^{2\alpha} = \sqrt{1 + \exp\left(-\pi \frac{k_1^2 + m^2}{eE}\right)} \quad (5.86)$$

Enfin nous obtenons

$$\rho = \sqrt{\left|\frac{2k}{W}\right| |D_p(-(1+i)z)|} \quad (5.87)$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{2}|k|}{\sqrt{eE}} e^{-\frac{\pi\lambda}{8}} |D_p(-(1+i)z)|} \quad (5.88)$$

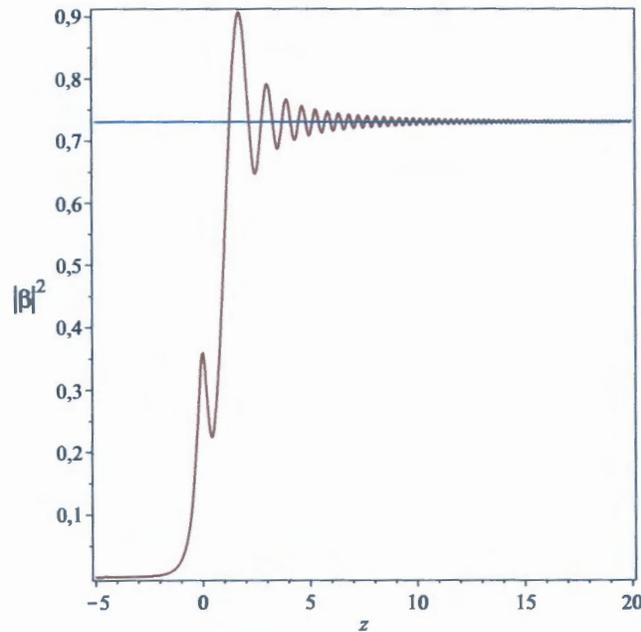
où le paramètre  $\lambda$  est donné par

$$\lambda = \frac{m^2 + k_1^2}{eE} \quad (5.89)$$

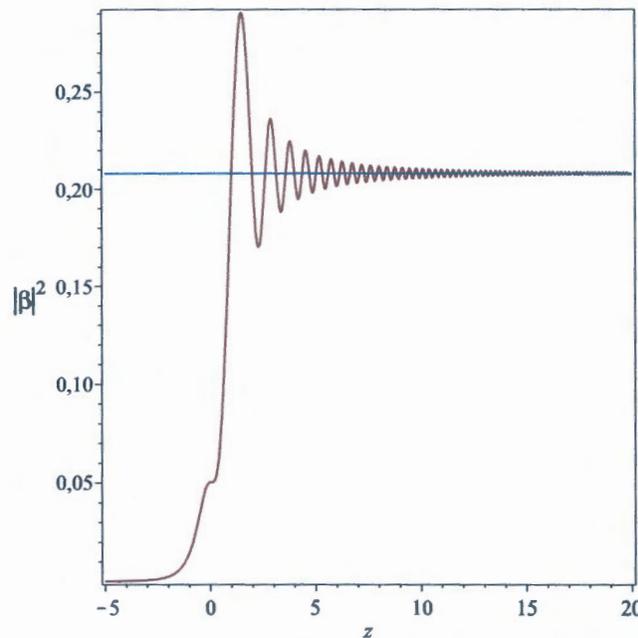


## 5.6.2 Résultats

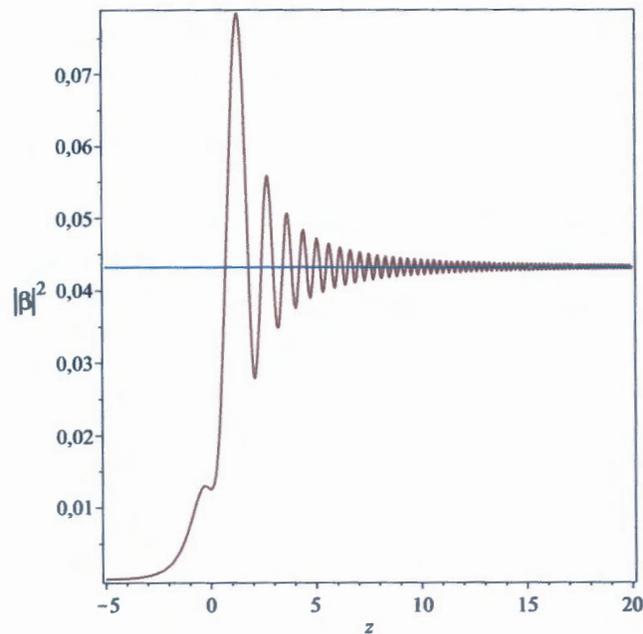
Comme résultats nous avons les figures (5.1), (5.2) et (5.3) qui montrent la variation de la densité des particules créées en fonction du temps.



**Figure 5.1** – Variation de la densité des particules créées en fonction de la variable  $z = \sqrt{eE} \left( t + \frac{k_x}{eE} \right)$ . La ligne droite représente la limite de Schwinger  $\exp(-\pi\lambda)$ . La constante  $\lambda$  est prise 0.1



**Figure 5.2** – Variation de la densité des particules créées en fonction de la variable  $z = \sqrt{eE} \left( t + \frac{k_x}{eE} \right)$ . La ligne droite représente la limite de Schwinger  $\exp(-\pi\lambda)$ . La constante  $\lambda$  est prise 0.5.



**Figure 5.3** – Variation de la densité des particules créées en fonction de la variable  $z = \sqrt{eE} \left( t + \frac{k_z}{eE} \right)$ . La ligne droite représente la limite de Schwinger  $\exp(-\pi\lambda)$ . La constante  $\lambda$  est prise 1.

## 5.7 Conclusion

Nous avons considéré, dans ce chapitre, un champ scalaire complexe en présence d'un champ électrique dépendant du temps. Dans ce cas nous avons pu obtenir l'expression de l'invariant correspondant, ce qui nous a permis de calculer la densité des particules créées. Comme application nous avons considéré un champ électrique constant.

Les résultats montrés dans les figures peuvent être interprétés de la manière suivante : La création de particules implique l'évolution d'un système quantique d'une configuration d'équilibre initiale (libre) à une nouvelle configuration d'équilibre finale (libre) à travers une évolution intermédiaire, hors équilibre, établie par le champ électrique. Aux moments intermédiaires, lorsque le système est hors équilibre, la distinction exacte des états d'énergie positive et négative n'est pas claire.

## Conclusion générale

Dans ce mémoire nous pouvons voir qu'il a été principalement question de calcul de la densité des particules créées par un champ extérieur dépendant du temps en considérons la théorie des invariants de Lewis-Riesenfeld. Deux modèles ont été considérés. Le premier modèle concerne la création de particules dans un univers en expansion décrit par la métrique de Friedman-Robert-Walker (FRW) avec un facteur d'échelle  $a(t)$ . Dans le deuxième modèle nous avons considéré la création de particules chargée à partir du vide en présence d'un champ électrique homogène dépendant du temps  $E(t)$ .

En premier lieu, nous avons développé les outils nécessaires pour étudier la création des particules à partir du vide en utilisant formalisme de la théorie quantique des champs dans un univers en expansion où nous avons considéré un champ scalaire réel de matière quantifié en interaction avec un champ gravitationnel purement classique. D'abord nous avons présenté une brève description de la quantification canonique du champ scalaire libre. Ensuite, nous avons considéré le cas d'un champ scalaire dans un univers en expansion. Nous avons montré que l'Hamiltonien d'un champ scalaire dans un univers en expansion n'est pas toujours diagonal et l'interprétation du champ en termes de particules n'est pas possible. Dans le cas d'une expansion adiabatique, nous avons montré qu'ils existent des modes pour lesquels l'Hamiltonien est diagonal. L'état du vide défini par ces modes est appelé vide adiabatique.

Dans une deuxième étape, nous avons réalisé une étude dynamique de la création de particules dans un univers isotrope homogène en utilisant la méthode basée sur la diagonalisation de l'hamiltonien. Cette méthode nous a permis d'obtenir l'expression de la densité des particules créées en fonction du temps conforme. Comme application, nous avons considéré la création de particules dans l'espace de Sitter où nous avons pu obtenir des solutions exactes pour l'équation de Klein Gordon associée. Les résultats essentiels de cette étude sont les suivants :

1. Le nombre de particules est bien défini seulement dans la limite adiabatique  $\frac{M}{H} \gg 1$ .
2. Les particules ayant le plus petit vecteur d'onde sont les premières à être créées.

3. Si la limite  $\eta \rightarrow 0$  existe, elle ne dépend pas du vecteur d'onde  $k$ .
4. Il existe une limite naturelle sur les impulsions des particules créées.

Ensuite, nous avons adopté la méthode de Lewis Riesenfeld à la théorie des champs pour étudier la création de particules dans univers en expansion. D'abord nous avons montré l'utilité de la théorie des invariants en mécanique quantique et nous cherchons la relation entre les solutions de l'équation de Schrödinger en considérons l'exemple de l'oscillateur harmonique dépendant du temps. Ensuite nous avons utilisé cette pour étudier le problème du champ scalaire dans un univers en expansion. Nous avons obtenu l'invariant relatif à un champ scalaire réel en premier lieu par une démarche classique et ensuite nous avons considéré un traitement purement quantique. En dernière étape, nous avons établi la transformation de Bogoliubov qui lie la représentation qui diagonalise l'invariant à celle qui diagonalise l'hamiltonien  $H$ . A partir des coefficients de Bogoliubov nous avons obtenu la densité des particules créées. Comme application nous avons considéré l'espace de de-Sitter.

Ayant contourné les difficultés rencontrées, nous avons considéré, dans la dernière partie, un champ scalaire complexe en présence d'un champ électrique dépendant du temps. Dans ce cas nous avons pu obtenir l'expression de l'invariant correspondant, ce qui nous a permis de calculer la densité des particules créées.

En conclusion, à travers ce mémoire nous avons pu montrer que la méthode des invariants, élaborée pour la première fois pour étudier l'oscillateur harmonique dépendant du temps, est un outil important pour l'étude de la création de particules en présence d'un champ extérieur dépendant du temps. Cette méthode conduit aux mêmes résultats que ceux obtenus par la diagonalisation de l'hamiltonien.

## Equations de Friedmann

Les équations d'Einstein liant la courbure de l'univers à la présence de la matière s'écrivent

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\lambda\kappa}R_{\lambda\kappa} = -8\pi GT_{\mu\nu} \quad (\text{A.1})$$

où  $R_{\mu\nu}$  est le tenseur de Ricci défini par

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu,\lambda}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa}\Gamma_{\nu\kappa}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\kappa}\Gamma_{\lambda\kappa}^{\lambda}. \quad (\text{A.2})$$

et  $T_{\mu\nu}$  est le tenseur énergie-impulsion du fluide cosmologique.

Les différentes composantes de  $R_{\mu\nu}$  sont

$$R_{00} = 3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_{ij} = -(2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2k)\tilde{g}_{ij} \quad (\text{A.3})$$

Comme

$$R_{0i} = \frac{\dot{a}}{a}K(\delta_{ij}\tilde{g}_{il} - \delta_{li}\tilde{g}_{jl})x^j$$

il vient alors qu'au voisinage de l'origine  $\tilde{g}_{ij} \sim \delta_{ij}$ , on a

$$R_{0i} = 0 \quad (\text{A.4})$$

En prenant la trace des équations d'Einstein nous arrivons à

$$R = 8\pi GT \quad (\text{A.5})$$

Ce qui donne

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right). \quad (\text{A.6})$$

Le fluide cosmique peut être étudié par analogie avec un gaz parfait de pression  $P$  et de densité  $\rho$ . Dans ce cas on a

$$T_{\mu\nu} = p g_{\mu\nu} + (p + \rho) u_{\mu} u_{\nu}$$

où  $u_{\mu}$  est la quadri-vitesse. Les composantes du tenseur d'énergie-impulsion sont alors données par

$$T^{00} = \rho(t) \quad , \quad T^{0i} = 0 \quad , \quad T^{ij} = \tilde{g}^{ij} a^{-2} p(t) \quad (\text{A.7})$$

et

$$T = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = -\rho + 3p \quad (\text{A.8})$$

En remplaçant les équations (A.3), (A.7) et (A.8) dans l'équation d'Einstein (A.6) nous obtenons les équations fondamentales de la cosmologie

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3} G (\rho + 3p) \quad (\text{A.9})$$

et

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{K}{a^2} = 4\pi G (\rho - p). \quad (\text{A.10})$$

En combinant ces deux dernières équations, nous arrivons à

$$8\pi G \rho(t) = 3 \left[ \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{K}{a^2} \right] \quad (\text{A.11})$$

Cette équation est l'équation fondamentale de Friedmann qui gouverne l'expansion de l'univers. Elle permet de déterminer la structure de l'univers selon son contenu.

A partir de la loi de conservation de l'énergie  $\nabla_{\mu} T^{\mu 0} = 0$ , nous obtenons l'équation

différentielle du premier ordre

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0, \quad (\text{A.12})$$

qui peut être facilement résolue pour une équation d'état de la forme

$$p = \omega\rho, \quad (\text{A.13})$$

où  $\omega$  c'est le paramètre d'état indépendant du temps, dans ce cas nous obtenons

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+\omega)} \quad (\text{A.14})$$

où  $\rho_0 = \rho(t_0)$  et  $a_0 = a(t_0)$  sont respectivement la densité du fluide cosmique et le rayon de l'univers observé actuellement (l'indice 0 indique l'instant présent).

Suivant la valeur de  $\omega$  on distingue différentes situations :

**a) Un univers dominé par la matière (matière non-relativiste) pour  $\omega = 0$**

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3} \quad (\text{A.15})$$

En cosmologie, la matière est souvent appelée "poussière" et sa pression peut être considérée comme négligeable. Elle se compose de la matière baryonique et probablement de la matière non baryonique de nature encore inconnue.

Dans un univers plat et d'après l'équation de Friedmann

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho_0 a_0^3}{3 a^3} \quad (\text{A.16})$$

le facteur d'expansion devient

$$a(t) \sim t^{\frac{2}{3}}. \quad (\text{A.17})$$

b) Un univers dominé par le rayonnement (matière relativiste) pour  $\omega = \frac{1}{3}$

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-4} \quad (\text{A.18})$$

Le rayonnement est constitué de rayonnement électromagnétique (photons), neutrinos (si  $k_B T \geq mc^2$ ) et ondes gravitationnelles. Pour  $K = 0$ , nous avons

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G \rho_0 a_0^4}{3 a^4} \quad (\text{A.19})$$

ce qui nous donne

$$a(t) \sim \sqrt{t}. \quad (\text{A.20})$$

c) Un univers dominé par l'énergie du vide (modèle de de Sitter)  $\omega = -1$

$$\rho = \Lambda = cste \quad (\text{A.21})$$

$\Lambda$  est la constante cosmologique. Dans un univers plat, l'équation de Friedmann étant

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G \Lambda}{3} \quad (\text{A.22})$$

le facteur d'échelle devient alors  $a(t) = e^{Ht}$  avec  $H = \sqrt{\frac{8\pi G \Lambda}{3}}$ .

# Equation relativiste de Hamilton-Jacobi

Comme il a été mentionné auparavant, pour avoir le bon choix des états 'in' et 'out', nous considérons les états semi-classiques solutions de l'équation de Hamilton-Jacobi donné par :

$$g^{\alpha\beta} (\partial_{\alpha} S) (\partial_{\beta} S) - m^2 = 0 \quad (\text{B.1})$$

En écrivant  $S$  sous la forme

$$S = g(\eta) + \vec{k}\vec{x}, \quad (\text{B.2})$$

où les deux fonctions  $g(\eta)$  et  $h(\sigma)$  satisfont l'équation

$$\left(\frac{\partial g}{\partial \eta}\right)^2 = k^2 + m^2 a^2(\eta), \quad (\text{B.3})$$

Pour un univers de de Sitter, nous avons

$$g(\eta) = \pm \int \sqrt{\frac{m^2}{H^2 \eta^2} + k^2} d\eta, \quad (\text{B.4})$$

En utilisant l'intégrale



$$\int du \frac{\sqrt{b^2 + u^2}}{u^2} = -\frac{\sqrt{b^2 + u^2}}{u} + \ln(u + \sqrt{b^2 + u^2}) + cst, \quad (\text{B.5})$$

avec  $u = \frac{1}{\eta}$  et  $b = \frac{Hk}{m}$ , nous arrivons à

$$g(\eta) = \pm \sqrt{\frac{m^2}{H^2} + k^2 \eta^2} + \ln \left( \frac{1}{\eta} + \sqrt{\frac{H^2}{m^2} k^2 + \frac{1}{\eta^2}} \right)^{\mp \frac{\Lambda}{H}} + cst \quad (\text{B.6})$$

Donc, les états "in" se comportent comme

$$\psi_{in}^{\pm}(\eta) \equiv \lim_{\eta \rightarrow -\infty} e^{ig(\eta)} \sim e^{\pm ik\eta}. \quad (\text{B.7})$$

# Bibliographie

- [1] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge Univ. Press. Cambridge, 1982).
- [2] S. A. Fulling, *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time* (Cambridge University. Press, Cambridge 1985).
- [3] V. F. Mukhanov and S. Winitzki, *Introduction of Quantum Effects in Gravity* (Cambridge Univ. Press, Cambridge 2007).
- [4] A. A. Grip S. G. Mamayev and V. M. Mostepanenko, *Vacuum Quantum Effects in Strong Fields* (FriedmannLab. Publ., St. Petersburg 1994).
- [5] L. Parker and D. J. Toms, *Quantum Field Theory in Curved Space-Time : Quantized Fields and Gravity* (Cambridge University. Press, Cambridge 2009).
- [6] E. S. Fradkin, D. M. Gitman and S.M Shvartsman, *Quantum Electrodynamics with Unstable Vacuum* ( Springer, Berlin, 1991).
- [7] W. Greiner, B. Müller, J. Rafelski, *Quantum Electrodynamics of Strong Field* (Springer-Verlag, 1985).
- [8] K . Rajeev, S . Chakraborty, T. Padmanabhan. *Switching between normal and inverted oscillator representations in the context of particle production in external fields*, arXiv :1712.06617 [gr-qc].
- [9] A. Calogeracos, N. Dombey, *Contemp. Phys.* 40, 313 (1999).
- [10] A. Hansen, F. Ravndal, *Physica Scripta* **23** (1981) 1036.

- [11] A. I. Nikishov, "on the theory of scalar pair production by a potential barrier",  
arXiv :hep-th/0111137v2
- [12] I. Antoniadis, P. O. Mazur and E. Mottola, *New J. Phys.* **9**, 11 (2007)
- [13] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, *Phys. Rev. D* **15**, 2738 (1977)
- [14] E. Mottola, *Phys. Rev. D* **31**, 754 (1985)
- [15] T. Mishima and A. Nakayama, *Phys. Rev. D.* **37**, 348 (1988)
- [16] J. Garriga, *Phys. Rev. D* **49**, 6327 (1994)
- [17] A. Havare, T. Yetkin, M. Korunur and K. Sogut, *Nuclear Phys. B* **682**, 464 (2004)
- [18] J. Haro and E. Elizald, *J. Phys. A : Math. Theor.* **41**, 372003 (2008)
- [19] A. Higuchi and L. Y. Cheong, *Class. Quantum Grav.* **26**, 145015 (2009)
- [20] C. Cosmin, *Phys. Rev. D* **85**, 084036 (2012)
- [21] T. Kobayashi and N. Afshordi, *JHEP* **1410**, 166 (2014)
- [22] E. E. Kangal, H. Yanar, A. Havare, K. Sogut, *Annals of Physics* **343**, 40 (2014)
- [23] M-A. Băloi, *Mod. Phys. Lett. A* **29**, 1450138 (2014)
- [24] N. Nicolaevici, *Mod. Phys. Lett. A* **30**, 1550046 (2015)
- [25] S. Debnath and A. K. Sanyal, *Class. Quantum Grav.* **28**, 145015 (2011)
- [26] J. A. S. Lima, F. E. Silva and R. C. Santos, *Class. Quantum. Grav.* **25**, 135019 (2008)
- [27] V. Sahni and S. Habib, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1766 (1998)
- [28] L. Kofman, *Preheating After Inflation*, *Lect. Notes Phys.* **738**, 55 (2008) (Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2008)
- [29] J. Martin, *Inflationary Perturbations : The Cosmological Schwinger Effect*, *Lect. Notes Phys.* **738**, 193 (2008) (Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2008)
- [30] J. Chen, P. Wu and H. Yu, Z. Li, *Eur. Phys. J. C* **72**, 1861 (2012)
- [31] S. K. Modak and D. Singleton, *Int. J. Mod. Phys. D* **21**, 1242020 (2012)

- [32] S. P. Gavrilov, D. M. Gitman, Phys. Rev. D **53**, 7162 (1996)
- [33] V. M. Villalba and W. Greiner, Mod. Phys. Lett. A **17**, 1883 (2002)
- [34] I. L. Buchbinder and S. D. Odintsov, Sov. Phys. J. **25**, 385 (1982)
- [35] V. M. Villalba, Phys. Rev. D **60**, 127501 (1999)
- [36] G. Schäfer and H. Dehnen, J. Phys. A : Math. Gen. **13**, 517 (1980)
- [37] S. Moradi, Mod. Phys. Lett. A **24**, 1129 (2009)
- [38] S. P. Kim and D. N. Page, Phys. Rev. D **78**, 103517 (2008)
- [39] S. P. Kim, Grav. Cosmol. **20**, 193 (2014)
- [40] R-G. Cai and S. P. Kim, JHEP **09**, 072 (2014)
- [41] M.B. Fröb et al., Schwinger effect in de Sitter space, JCAP **04**, 009 (2014)
- [42] S. Haouat and R. Chekireb, Phys. Rev. D **87**, 088501 (2013)
- [43] J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951)
- [44] E. Akhmedov, Mod. Phys. Lett. A **25**, 2815 (2010).
- [45] S. P. Kim, arXiv : 1008.0577v1.
- [46] I. H. Duru and N. Ünal, Phys. Rev. D **34**, 966 (1986).
- [47] D. M. Chitre and J. B. Hartel, Phys. D **16**, 251 (1977).
- [48] L. Parker, Phys. Rev. Lett. **21**, 562 (1968).
- [49] L. Parker, Phys. Rev. D **183**, 1057 (1969).
- [50] L. Parker, Phys. Rev. D **3**, 346 (1971).
- [51] S. Biswas, J. Guha, N. G. Sarkar, Class. Quantum Gravity **12**, 1591 (1995).
- [52] J. Guha, D. Biswas , N. G. Sarkar, S. Biswas, Class. Quantum Gravity **12**, 1641 (1995).
- [53] S. Biswas, A. Shaw, P. Misra, Gen. Relativ. Gravit. **34**, 665 (2002).
- [54] S. Biswas, I. Chowdhury, Int. J. Mod. Phys. D **15**, 937 (2006).
- [55] S. Winizki, Phys. Rev. D **72**, 104011 (2005).

- [56] Ya. B. Zel'dovich and A. A. Starobinski, *Sov. Phys. JETP* 34, 1159 (1972).
- [57] A. A. Grib and S. G. Mamayev and V. M. Mostepanenko, *Gen. Relativ. Gravit.* 7, 535 (1976).
- [58] A. A. Grib and S. G. Mamayev and V. M. Mostepanenko, *J. Phys. A : Math. Gen.* 13, 2057 (1980).
- [59] J. Haro and E. Elizald, *J. Phys. A : Math. Theor.* 41, 372003 (2008).
- [60] J. Haro, *J. Phys. A : Math. Theor.* 44, 205401 (2011).
- [61] Yu. V. Pavlov ; *Grav. and Cosmol.* 14 (2008) 314
- [62] J. Garriga, *Phys. Rev. D* 49, 6343 (1994).
- [63] V. M. Villalba, *Phys. Rev. D* 60, 127501 (1999).
- [64] V. M. Villalba and W. Greiner, *Phys. Rev. D* 65, 025007 (2001).
- [65] V. M. Villalba, *Prog. Theor. Phys.* 4, 859 (1993).
- [66] S. Haouat and R. Chekireb, *Mod. Phys. Lett. A*, 26, 2639 (2011).
- [67] S. Haouat and R. Chekireb, *Int. J. Theor. Phys.* 51, 1704 (2012)
- [68] S. Haouat and R. Chekireb, *Eur. Phys. J. C* 72, 2034 (2012)
- [69] N. B. Narozhny and A. I. Nikishov, *Sov. J. Nucl. Phys.* 11, 596 (1970).
- [70] S. Moradi ; *Journal of Geometry and Physics* 59 (2009) 173,184
- [71] S. Moradi ; *Int. J. Theor. Phys.* 47 (2008) 2808.
- [72] T. Padmanabhan, *Mod. Phys. Lett. A*, 33 (2018) 1830005
- [73] V. Ermakov, *Univ. Izv. Kiev, Series III* 9 (1880)1-25
- [74] H. Kanasugi and H. Okada. *Prog. Theor. Phys.* 93 (1995) 949
- [75] R. Chekireb, *Création de particules en cosmologie, thèse de doctorat, université de Jijel* (2017)
- [76] T. S. Bunch and P. C. W. Davies, *Proc. R. Soc. London A*360, 117 (1978).
- [77] T. S. Bunch and P. C. W. Davies, *J. Phys. A* 11, 1315 (1978).

- [78] B. Allen, Phys. Rev. D 32 (1985) 3136
- [79] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products (Academic Press, 1979).
- [80] M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions (Dover, New York, 1964)
- [81] P. R. Anderson, E. Mottola, and D. H. Sanders, Phys. Rev. D 97, 065016 (2018)
- [82] E. Greenwood. Int. J. Mod. Phys. D 24, (2015) 1550031
- [83] S. Robles-Pérez, Phys. Lett. B 774 (2017) 608
- [84] F. Finelli, A. Gruppuso and G. Venturi, Class. Quant. Grav.16, 3923 (1999)
- [85] C. Bertoni, F. Finelli and G. Venturi, Phys. Lett. A 237, 331 (1998)
- [86] H. R. Lewis, Jr., W.B. Riesenfeld, J. Math. Phys. 10 (1969) 1458-1473
- [87] I. A. Pedrosa, J. Math. Phys. 28, 2662 (1987)
- [88] L. Chetouani, L. Guechi, T. F. Hammann, Phys. Rev A 40, 1157 (1989)
- [89] W.E. Milne, Phys. Rev. 35 (1930) 863-867
- [90] E. Pinney, Proc. Am. Math. Soc. 1 (1950) 681-681
- [91] M. J. A. Jansen and C. Müller, Phys. Rev. A 88 (2013) 052125
- [92] N. Tanji, Annals Phys. 324, (2009) 1691-1736
- [93] E. Bresin and C. Itzykson, Phys. Rev. D 2 (1970) 1191.
- [94] Q. G. Lin, J. Phys. G : Nucl. Part. Phys. 25 (1999) 17
- [95] M. N. Hounkonnou and M. Naciri, J. Phys. G : Nucl. Part. 26 (2000) 1849
- [96] C. K. Dumlu and G.V. Dunne, Phys. Rev. D 83 (2011) 065028
- [97] S. I. Kruglov, Annals Phys. 293 (2001) 228
- [98] M. S. Marinov and V. S. Popov, Sov. J. Nucl. Phys. 15 (1972) 702.
- [99] S.P. Gavrilov, D.M. Gitman, Phys.Rev. D 53 (1996) 7162
- [100] S. P. Kim and D. N. Page, Phys. Rev. D 73 (2006) 065020



- [101] R. Schuetzhold, H. Gies, G. Dunne, Phys. Rev. Lett. **101** (2008) 130404
- [102] A. Di Piazza, E. Lotstedt, A. I. Milstein, C.H. Keitel, Phys. Rev. Lett. **103** (2009) 170403.
- [103] R. Dabrowski and G. V. Dunne, Phys. Rev. D **90**, 025021 (2014).
- [104] R. Dabrowski and G. V. Dunne, Phys. Rev. D **94**, 065005 (2016).

## Résumé

Dans ce travail, il a été question de calcul de la densité des particules créées par source dépendante du temps en utilisant la méthode des invariants. Nous avons pu obtenir l'expression exacte de l'invariant associé au champ scalaire réel dans l'univers de de-Sitter et au champ scalaire complexe dans un champ électrique. Il a été démontré que la densité des particules créées peut s'écrire en fonction de la solution de l'équation d'Ermakov. A travers les résultats obtenus, nous avons conclu que l'approche des invariants est équivalente à la méthode basée sur la diagonalisation de l'Hamiltonien.

## ملخص

في هذا العمل ، كانت المسألة هي حساب كثافة الجسيمات التي تم تكوينها خلال توسع الكون باستخدام طريقة الثوابت. لقد تمكنا من الحصول على التعبير الدقيق للثابت المرتبط بالحقل السلمي الحقيقي في فضاء دي سيتر والحقل السلمي المركب في مجال كهربائي. وقد تبين أن كثافة الجسيمات التي تم إنتاجها يتم كتابتها وفقا لحل معادلة ارماكوف. من خلال النتائج التي تم الحصول عليها ، استنتجنا أن طريقة الثوابت مكافئة لطريقة تقطير الهاميلتوني.

## Abstract

In this work, it was question of calculating the density of the particles created by the expansion of the universe by using the method of the invariants. We were able to obtain the exact expression of the invariant associated with the real scalar field in the de-Sitter universe and a complex scalar field in an electric field. It has been shown that the density of the created particles is written according to the solution of the Ermakov equation. Through the results obtained, we concluded that the invariant approach is equivalent to the Hamiltonian's diagonalization method.