

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université Mohammed Seddik Benyahia – Jijel  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département d'Automatique

Mémoire de fin d'étude pour l'obtention du diplôme  
Master en Automatique

Option : Automatique et Informatique industriel

**Thème :**

Commande PID robuste d'un pendule  
inversé rotatif

Réalisé par :

- ❖ Saadallah Ala eddine
- ❖ Boudab Abderrafik

Encadré par :

- ❖ Cherrat Nidhal
- ❖ Boubertakh Hamid

Année Universitaire 2018/2019

## *Remerciements*

*Nous tenons à remercier tout premièrement 'ALLAH' le tout  
puissant pour la  
volonté, la santé et la patience, qu'il nous a donné durant toutes  
ces longues  
années*

*Je tiens à exprimer ensuite mes vifs remerciements à notre  
Co-encadreur Mr N.CHERRAT. Vous avez bien voulu nous  
confier ce travail  
riche d'intérêt et nous guider à chaque étape de sa réalisation,  
Vous nous avez  
toujours réservé le meilleur accueil malgré vos obligations  
professionnelles  
Nous saisissons cette occasion pour vous exprimer notre  
profonde gratitude tout  
en vous témoignant notre respect*

*Mes remerciements s'adressent ensuite à Mr H.Boubertakh  
et aux membres de jury, Mr N.Oucief et Mr A.Boubakir  
Pour l'intérêt qu'ils ont manifesté pour notre travail et d'avoir  
acceptés de le juger  
Vous nous faites l'honneur d'accepter avec une très grande  
amabilité de siéger  
parmi notre jury*

*En fin nous exprimons nos remerciements à tous ceux qui ont  
contribué de près et  
de loin à l'élaboration de ce travail*

# ***Dédicaces***

*Nous dédions ce travail ....*

## ***A nos très chères mères***

*Affables, honorables, aimables : vous représentez pour nous le symbole de la bonté par excellence, la source de tendresse, et l'exemple de dévouement.*

*Vous n'avez pas cessé de nous encourager et de prier pour nous.*

*Nous vous dédions ce travail en témoignage de notre profond amour. Puisse Dieu, le tout puissant, vous préserver et vous accorder santé, longue vie et bonheur.*

## ***A nos très chers pères***

*Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le respect que nous avons toujours eu pour vous.*

*Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour nous éduquer et pour notre bien être.*

*Ce travail est le fruit des sacrifices que vous avez consentis pour notre éducation et notre formation.*

## ***A nos chers sœurs et frères***

*En témoignage de l'attachement, de l'amour et de l'affection que nous portons pour vous.*

*Nous vous dédions ce travail avec tous nos vœux de bonheur, de santé et de réussite.*

## ***A nos chères ami (e)s***

*En témoignage de l'amitié qui nous uni et des souvenirs de tous les moments que nous avons passé ensemble, nous vous dédions ce travail et nous vous souhaitons une vie pleine de santé et de bonheur.*

## Liste des matières

Dédicaces.....	i
Remerciements.....	ii
Liste des matières.....	iii
Listes des figures.....	v
Liste du tableau.....	vi
Introduction générale.....	1

### Chapitre I : Modélisation d'un pendule inversé rotatif

I.1. Introduction.....	3
I.2.Intérêt de l'étude des systèmes a pendule .....	3
I.2.1.En médecine .....	3
I.2.2. En robotique .....	4
I.2.3. Dans l'aérospatiale .....	5
I.2.4. Dans la recherche .....	6
I.3.Pendule inversé rotatif .....	6
I.4.Modélisation de pendule inversé rotatif :.....	7
I.4.1.Equation de mouvement :.....	8
I.4.2.Linéarisation et obtention d'un modèle linéaire.....	10
I.4.3.Représentation du système dans l'espace d'état .....	10
I.5.Conclusion .....	13

### Chapitre II: commande par swing up d'un pendule inversé rotatif

II.1. Introduction .....	14
II.2. Commande PID classique.....	14
II.3.Effet de chaque action sur les performances de système.....	17
II.3.1Action proportionnelle P :.....	17
II.3.2.Action dérivée I : .....	17
II.3.3Action intégral D : .....	17
II.4.Application de la commande PID sur un pendule inversée rotatif :.....	17
II.4.1.Commande PID linéaire :.....	18
II.4.2.Commande PID des systèmes non linéaires par des approches non linéaire.....	18
II.5.Commande d'énergie.....	19
II.6.La commande swing up hybride.....	21
II.7.Résultats de simulation.....	21

II.7.1. test de la commande PID .....	21
II.7.2.test de la commande swing up hybride .....	27
II.7.3.Interprétation des résultats obtenus .....	36
II.8. Conclusion .....	36
<b>Chapitre III: commande par mode glissant d'un pendule inversé rotatif</b>	
III.1. Introduction .....	37
III.2.Historique .....	38
III.3. Définition du mode glissant : .....	38
III.4. Objectif de la commande par mode glissant : .....	38
III.5. principe de la commande par mode glissement.....	39
III.6. Conception de la commande par mode de glissement .....	40
III.7. broutement : .....	42
III.8. Suppression du phénomène de réticence : .....	43
III.8.1. Commande signe : .....	43
III.8.2 Commande avec un seul seuil : .....	44
III.8.3 Commande adoucie : .....	45
III.8.4 Commande intégrale : .....	46
III.8.5 Commande SAT : .....	48
III.9 Commande par modes glissants hiérarchiques des systèmes mécaniquessous-actionnés : .....	48
III.10. Position du problème.....	49
III.11. Analyse de stabilité de toutes les surfaces de glissement.....	51
III.12. Resultats de simulation.....	53
III.13. Interprétation des résultats de simulation .....	63
III.14. Conclusion.....	63
Conclusion Générale.....	64
Bibliographie.....	65

## Liste des figures

Figure I. 1 Le corps de l'être humain vu comme un double pendule.....	3
Figure I. 2 le robot BIPED et sa représentation 3D.....	4
Figure I. 3 Le robot JOE et sa représentation 3D.....	5
Figure I. 4: pendule gyroskopique.....	5
Figure I. 5: Composants du pendule inversé rotatif (ROTPEN).....	6
Figure I. 6:Schéma du pendule inversé rotatif. ....	8
Figure II. 1 Structure série d'un régulateurPID.....	15
Figure II. 2 Structure parallèle d'un régulateur PID .....	15
Figure II. 3: Structure mixte d'un régulateurPID.....	16
Figure II. 4 Diagramme de pendule du corps libre .....	20
Figure II. 5: Evolution de $\alpha, v_\alpha, \theta, v_\theta$ et le signal de commande PID sans perturbation .....	24
Figure II. 6: Evolution de $\alpha, v_\alpha, \theta, v_\theta$ après l'application de perturbation .....	27
Figure II. 7 Evolution de $\alpha u, v_\alpha, \theta, v_\theta$ et le swing-up pour La position initial $\theta = \pi/2$ .....	30
Figure II. 8 Evolution de $\alpha u, v_\alpha, \theta, v_\theta$ et le swing-up por La position initial $\theta = \pi/4$ .....	33
Figure II. 9 Evolution de $\alpha u, v_\alpha, \theta, v_\theta$ et le swing-up pour La position initial perturbées.....	35
Figure III. 1:shématisation du mode glissement dant le plan de phase.....	40
Figure III. 2:Phénomène de broutement.....	43
Figure III. 3 Fonction signe.....	44
Figure III. 4: Fonction signe avec un seul seuil .....	45
Figure III. 5:Fonction signe adoucie .....	46
Figure III. 6:Finction intégrale. ....	47
Figure III. 7 Définition de la fonction SAT .....	48
Figure III. 8: Evolution de $\alpha, v_\alpha, \theta, v_\theta$ et le signal de commande par mode glissant pour Le test1. ...	57
Figure III. 9: Evolution de $\alpha, v_\alpha, \theta, v_\theta$ et le signal de commande par mode glissant pour Le test 2. ...	60
Figure III.10: Evolution de $\alpha, v_\alpha, \theta, v_\theta$ et le signal de commande par mode glissant pour le test 3 .....	63

## Liste des tableaux

Tableau I. 1 Nomenclature des composants de la maquette .....	7
Tableau I. 2 Propriétés physiques du pendule inversé rotatif .....	9
Tableau I. 3 Résumé du modèle d'espace d'état .....	12

## Introduction générale

Face au développement technologique rapide et les besoins de plus en plus croissant en précision et en robustesse, les systèmes automatisés n'ont cessé d'évoluer entraînant inévitablement des structures de commandes de plus en plus complexes.

Dans toute formulation d'un problème de commande, le modèle mathématique développé dans le but d'établir la loi de commande ne reflète pas exactement le processus réel.

Ces différences peuvent par exemple être dues à des dynamiques non modélisées, à des variations des paramètres du système ou à l'approximation trop directe des comportements complexes du processus. On doit néanmoins s'assurer que, malgré toutes ces incertitudes, la loi de commande résultante permet d'atteindre les objectifs prédéfinis. Ceci a conduit à un important intérêt pour la synthèse de contrôles dits robustes et capables de pallier à ce problème.

Dans le domaine scientifique et celui de l'enseignement, l'automatique a souvent recours à des cas d'études particuliers, qui sont représentatifs de grandes classes d'applications. De plus, avec l'expérience, la connaissance de ces cas s'est affinée et ils fournissent aujourd'hui une base idéale pour comparer de façon valable les avantages et les inconvénients d'approches différentes. Le pendule inversé est l'un de ces cas typique qui occupe une place importante dans l'industrie comme un outil de transport, d'inspection et d'intervention dans des milieux hostiles, en particulier quand les capacités de mouvement autonome sont exigées.[17]

Un système mécanique est dit sous-actionné s'il admet moins d'actionneurs que de degrés de liberté. On peut citer le pendule inversé, le pendurobot et l'acrobot, comme exemples de cette classe de systèmes. L'étude de la commande de ces système est récente, elle est motivée principalement par leur caractère complexe et instable ainsi que par des besoins d'applications réelle tel que : la commande des robots marcheurs et des engins spatiaux, l'étude de la structure de corps humain...etc.

Dans cette classe des systèmes, Le manque d'actionneurs complique la tâche de commande. En effet, le contrôleur doit stabiliser les parties non actionnées en leurs positions d'équilibre instable, et les parties actionnées à des positions finales désirées parant de conditions initiales proches ou lointaines du point d'équilibre. Plus à la complexité de leur



comportement, s'ajoute leur caractère non linéaire qui limite l'utilisation de commandes basées sur linéarisation des systèmes dynamiques. à part les lois de commande hybride basées sur un retour d'état linéaire, il existe peu de stratégies de commande, de ces systèmes, conçues à la base des équations non linéaires seulement, assurant la stabilisation autour du point d'équilibre instable [8].

Il existe dans la littérature une grande variété d'approches de commande des systèmes non linéaires. On peut citer : la commande par linéarisation entrée-sortie, le backstepping, la commande par mode glissement...etc. Cependant, aucune de ces approches de n'est adaptée, dans sa version de base, à la stabilisation des systèmes sous-actionnés.

Dans cette voie on a décidé de faire un étude comparative entre les deux méthodes les plus utilisés pour commander le pendule inversé rotatif qui sont la commande hybride PID-commande d'énergie (swing-up) et la commande par mode glissant en utilisant un modèle mathématique donné par quanserqube

Le contenu de ce mémoire est le suivant :

Dans le premier chapitre, nous donnons une brève introduction sur le pendule inversé, le pendule inversé rotatif, les domaines d'utilisation et le principe de fonctionnement de ce dernier, puis, nous établissons le modèle non linéaire du pendule inversé rotatif en se basant sur le formalisme d'Euler-Lagrange. En fin, un modèle non linéaire de ce système est défini et écrire sous forme d'espace d'état.

Dans le second chapitre, au début, on fait un résumé sur les différentes structures de la commande PID classique. Puis, nous allons utiliser une commande PID classique pour stabiliser le pendule inversé rotatif présentée dans le premier chapitre, Ensuite une commande d'énergie non linéaire « swing-up control » est ajoutée à la commande PID pour traitée le comportement du système complètement. En fin, un résultat de simulation est présenté.

Le dernier chapitre est réservé à l'application d'une commande de type mode de glissement au système de pendule inversé rotatif. Dans un premier temps une brève introduction à la commande par mode glissement est présentée, puis une commande par mode de glissement hiérarchique est employée afin de stabiliser le pendule inversé rotatif. la validation numérique de cette loi de commande est présentée à la fin du chapitre.

# Chapitre I.

## Modélisation de pendule inversé rotatif

# Chapitre I. Modélisation de pendule inversé rotatif

## I.1. Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude du pendule inversé rotatif. Premièrement, nous exposons son principe de fonctionnement, deuxièmement, nous élaborons son modèle dynamique par le formalisme d'Euler-Lagrange. Enfin nous présentons ce système dans l'espace d'état et résultats de simulation.

## I.2. Intérêt de l'étude des systèmes à pendule

L'étude des systèmes à pendule n'est pas faite par plaisir. Son importance est illustrée par les exemples d'application cités ci-dessous.

### I.2.1. En médecine

L'homme est vu comme un double pendule inversé en série, dont les deux axes de rotations principales sont les chevilles et les hanches. Quand nous sommes en position debout, nos articulations travaillent sans arrêt pour nous y maintenir. Les spécialistes qui travaillent à la réalisation de prothèses (remplacement chirurgical d'un organe ; la pièce ou l'appareil de remplacement : prothèse dentaire) pour les hanches sont amenés à utiliser le modèle de double pendule inversé pour calculer l'ensemble des contraintes qui sont soumises à la prothèse [1], comme le montre la figure suivante.

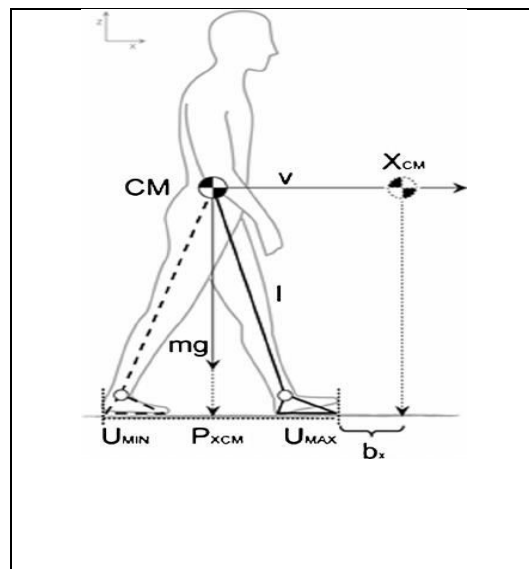


Figure I.1: Le corps de l'être humain vu comme un double pendule.

Le premier pendule est articulé à la cheville et représente les membres inférieurs considérés groupes. Le second pendule est articulé à la hanche et représente la partie supérieure du corps. On accélère en se avant et on ralenti en penchant en arrière. Le système est le même que le pendule inversé.

### I.2.2. En robotique

Dans le même ordre d'idée, un robot est vu comme un pendule inversé. Pour maintenir le robot en équilibre il suffit de stabiliser le pendule inversé correspondant à sa position verticale au cours de son déplacement et en présence d'autres perturbations [2]. A l'occasion nous citons quelques exemples des robots qui sont déjà étudiés et conçus à base de ce principe :

- **Le robot BIPED** : peut se présenter par deux doubles pendules inversés en série, dont les deux pendules sont couplés par une tige avec deux articulations.

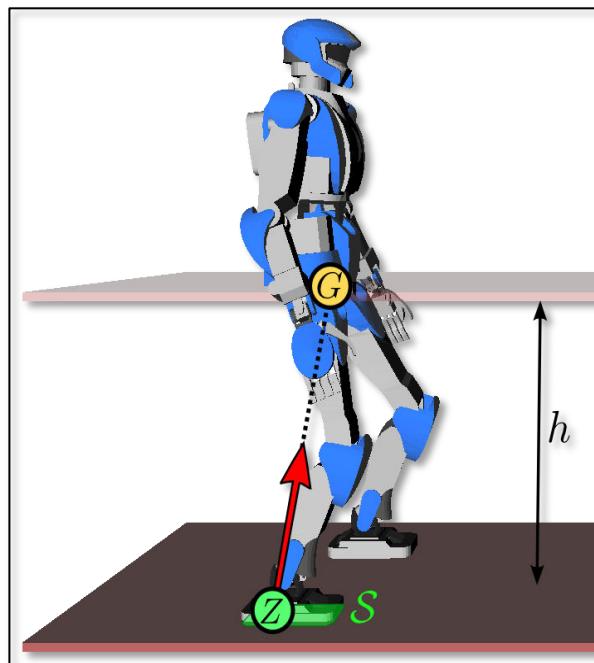


Figure I.2 : Le robot BIPED et sa représentation 3D

● **Le robot JOE** : Il est vu comme un pendule inversé simple (une seule tige) se déplaçant à l'aide de deux roues.



**Figure I.3** : Le robot JOE et sa représentation 3D

### I.2.3. Dans l'aérospatiale

Dans ce domaine aussi, l'étude des systèmes à pendules a une grande importance, par exemple pour commander et stabiliser l'attitude du satellite, le lancement des fusées ...etc.

Pour stabiliser l'attitude d'un satellite par les actionneurs gyroscopiques, les actionneurs gyroscopiques également appelés girodynes (CMG : Control Moment Gyro) constituent un nouveau système d'actionneurs qui permettent de générer des couples dynamiques de commande de basculement d'attitude d'un satellite. L'expérience consiste à Le rappeler vers la position d'équilibre (instable), donc il est vu comme un pendule inversé [19].



**Figure I.4** : pendule gyroscopique

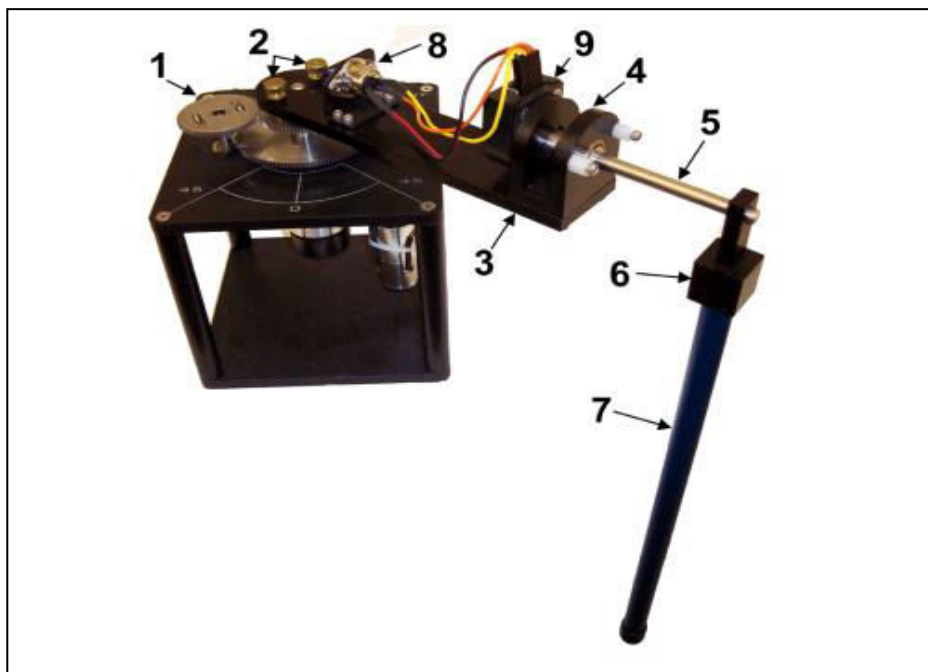
### I.2.4. Dans la recherche

Vu leur complexité, les systèmes à pendules sont très utilisés pour tester des lois de commande modernes.

### I.3. Pendule inversé rotatif

Le pendule inversé rotatif est une combinaison du pendule inversé qui a un centre de gravité au-dessus de son point de pivot et du pendule simple qui il est stable quand il est suspendu vers le bas. Dans ce mémoire nous proposons d'étude du pendule inversé rotatif (ROTPEN) de l'entreprise QUANSER.

Le pendule inversé de l'entreprise QUANSER est composé d'un moteur SVR02, qui entraîne un bras disposant à son extrémité un pendule (tige) lié l'un à l'autre par une liaison pivot. Ce système possède deux capteurs (une roue codeuse chacune, voir N°9 de Tableau I.1) qui nous renseignent sur l'angle du pendule par rapport au bras et sur l'angle du bras par rapport au bâti. Les différents éléments du pendule sont décrits par la Figure (I.5).



**Figure I.5 :** Composants du pendule inversé rotatif (ROTPEN)

Notons que le pendule inversé rotatif est un système mécanique sous-actionné c'est-à-dire il est caractérisé par un nombre d'entrées de commande inférieur au nombre de degrés de liberté.

N°	Composant
1	SRV02
2	VIS
3	Bras
4	Logement d'arbre
5	Arbre
6	Raccord
7	Pendule
8	Connecteur de l'encodeur
9	Encodeur

**Tableau I.1 :** Nomenclature des composants de la maquette

#### **I.4. Modélisation de pendule inversé rotatif :**

Une représentation schématique du pendule est donnée dans la figure suivante (I.6). Le bras est relié au moteur, qui entraîne la rotation du bras et donc du pendule. Il a une longueur  $L_r$  et un moment d'inertie  $J_r$ . Nous noterons son angle  $\theta$ .

Le pendule, quant à lui, est fixé au bout du bras. Il a une longueur  $L_p$ . Son moment d'inertie au centre de masse est noté  $J_p$ . On note l'angle que fait l'axe du pendule avec l'axe verticale  $\alpha$ .

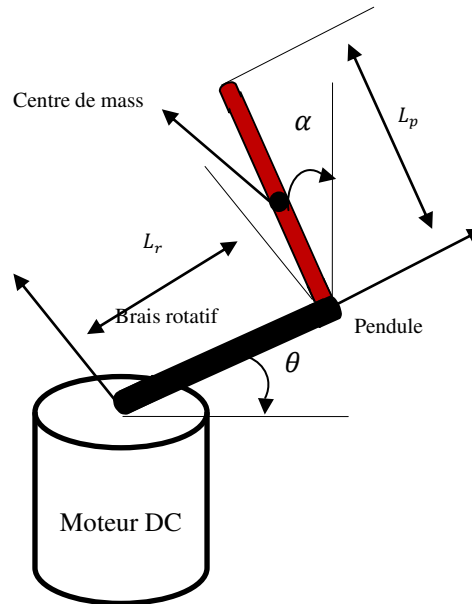


Figure I.6 : Schéma du pendule inversé rotatif.

#### I.4.1. Equation de mouvement :

La méthode de Lagrange est utilisée pour déterminer les équations du mouvement. Le système ait deux coordonnées généralisées (appelée aussi degrés de libertés)  $\alpha$  pour la rotation du bras et  $\theta$  pour la rotation du pendule, on a donc deux équations d'Euler-Lagrange pour le pendule inversé rotatif :

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q_1$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = Q_2$$

Où  $Q_1$  et  $Q_2$  sont les forces non conservatrices (par exemple, le frottement) appliquées au système. Pour les forces qui concernent le bras ( $Q_1$ ), il y a des frottements visqueux et le couple résultant du moteur à courant continu et pour le pendule ( $Q_2$ ), il y a seulement des frottements visqueux qui sont pris en compte. Alors  $Q_1$  peut être défini comme suit :

$$Q_1 = \tau - B_r \dot{\theta}$$

Et  $Q_2$  comme suit :

$$Q_2 = -B_p \dot{\alpha}$$



Où  $\tau$  est le couple appliqué aux bras rotatif et  $B_p$  et  $B_r$  sont respectivement les coefficients de frottement visqueux du pendule du bras.

Le lagrangien du système est décrit comme suit :

$$L = T - V$$

Où  $T$  est l'énergie cinétique totale et  $V$  est l'énergie potentielle totale du système.

Finalement, après des calculs on obtient un jeu de deux équations différentielles qui décrivent le mouvement du procédé :

$$\begin{aligned} & (m_p L_r^2 \pm \frac{1}{4} m_p L_p^2 - \frac{1}{4} m_p L_p^2 \cos(\alpha)^2 + J_r) \ddot{\theta} \\ & - \left( \frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos(\alpha) \right) \alpha'' + \left( \frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin(\alpha) \right) \theta \dot{\alpha} + \left( \frac{1}{2} m_p L_p L_r \sin(\alpha) \right) \dot{\alpha}^2 \\ & = \tau - B_t(\dot{\theta}) \\ & - \frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos(\alpha) \theta'' + \left( J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) \alpha'' - \frac{1}{4} m_p L_p^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} m_p L_p g \sin(\alpha) \\ & = B_p \alpha \end{aligned}$$

Avec le couple  $\tau$ , qui généré par un servomoteur, est décrit par l'équation suivant[3]

$$\tau = \frac{\eta_p K_g \eta_m k_t (V_m - K_g K - m\dot{\theta})}{R_m}$$

Symbole	Valeur
$R_m$	2.60 $\Omega$
$L_r$	0.18 mH
$m_p$	0.127 kg
$L_p$	0.337 m
$J_p$	0.0012 kg.m <sup>2</sup>
$D_p$	0.0024 N.m.s/rad
$L_r$	0.2159m
$J_r$	9.98x10 <sup>-4</sup> kg.m
$k_m$	0.0077 V.s/rad
$g$	9.8kg.m/s <sup>2</sup>

**Table I.2 :** Propriétés physiques du pendule inversé rotatif[4]

### I.4.2. Linéarisation et obtention d'un modèle linéaire

Dans cette partie, nous allons utiliser de la décomposition en série de Taylor d'ordre 1 pour linéariser le pendule inversé.

La fonction linéarisée de la fonction non linéaire  $f(z)$  autour du point de fonctionnement  $z_0^T = [a, b]$  en utilisant une décomposition en série de Taylor arrêtée à l'ordre 1 est :

$$f_{lin} = f(z_0) + \left( \frac{\partial f(z)}{\partial z_1} \right) \Big|_{z=z_0} (z_1 - a) + \left( \frac{\partial f(z)}{\partial z_2} \right) \Big|_{z=z_0} (z_2 - a)$$

En utilisant cette méthode et on prend les conditions initiales suivantes :  $\theta = 0^\circ$ ,  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\dot{\theta} = 0^\circ$  et  $\dot{\alpha} = 0^\circ$ , nous obtenons le modèle linéarisée du pendule inversé relatif suivante :

$$\begin{aligned} (m_p L_r^2 + J_r) \ddot{\theta} - \frac{1}{2} m_p L_p^2 \ddot{\alpha} &= \tau - B_r \dot{\theta} \\ -\frac{1}{2} m_p L_p L_r \ddot{\theta} - \frac{1}{2} m_p L_p^2 \ddot{\alpha} - \frac{1}{2} m_p L_p g \alpha &= -B_p \dot{\alpha} \end{aligned}$$

Qui peut être écrit sous la forme matricielle suivante[3] :

$$\begin{bmatrix} m_p L_r^2 + J_r & -\frac{1}{2} m_p L_p L_r \\ -\frac{1}{2} m_p L_p L_r & J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_r & 0 \\ 0 & B_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} m_p L_p g \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix}$$

### I.4.3. Représentation du système dans l'espace d'état

Les équations de l'espace d'état linéaire sont :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Où  $x$  est le vecteur d'état du système,  $A, B, C$ , et  $D$  sont les matrices d'état,  $y$  est la sortie du système et  $u$  est l'entrée de commande.

$$x^T = [\theta \quad \alpha \quad \dot{\theta} \quad \dot{\alpha}] \quad (1.12)$$

Et

$$y^T = x_1 \quad x_2 \quad (1.13)$$

Dans l'équation de sortie, seule la position des angles d'asservissement et de liaison est mesurée. Sur cette base, les matrices C et D des équations de sortie sont

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (1.14)$$

Et

$$D = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (1.15)$$

À partir de l'équation (1.10)

$$\begin{vmatrix} m_p L_r^2 + J_r & -\frac{1}{2} m_p L_p L_r \\ -\frac{1}{2} m_p L_p L_r & J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tau - B_r \dot{\theta} \\ \frac{1}{2} m_p L_p g \alpha - B_p \dot{\alpha} \end{vmatrix}$$

Résoudre pour les termes d'accélération

$$\begin{vmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{vmatrix} = \frac{1}{J_T} \begin{vmatrix} J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 & \frac{1}{2} m_p L_p L_r \\ \frac{1}{2} m_p L_p L_r & J_r + m_p L_r^2 \end{vmatrix}$$

Ici,  $J_T = \left( J_p m_p L_r^2 + J_r J_p + \frac{1}{4} J_r m_p L_p^2 \right)$  nous trouvons la forme suivante d'expressions d'accélération ce qui précède

$$\begin{aligned} \dot{\theta} = & \frac{1}{J_T} \left( - \left( J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) B_r \dot{\theta} - \frac{1}{2} m_p L_p L_r B_r \dot{\alpha} + \frac{1}{4} m_p^2 L_p^2 L_r g \alpha \right. \\ & \left. + \left( J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) \tau \right) \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \alpha = & \frac{1}{J_T} \left( \frac{1}{2} m_p L_p L_r B_r \dot{\theta} - (J_r + m_p L_r^2) B_p \dot{\alpha} + \frac{1}{2} m_p L_p g (J_r + m_p L_r^2) \alpha \right. \\ & \left. + m_p L_p L_r \tau \right) \end{aligned} \quad (1.17)$$

Forme (réf douze)  $\dot{x}_1 = x_3$  en  $\dot{x}_2 = x_4$  substituant x dans les termes d'accélération, les matrices spatiales A et B peuvent être calculés

$$A = \frac{1}{J_T} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} m_p^2 L_p^2 L_r g & - \left( J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) B_r & - \frac{1}{2} m_p L_p L_r B_r \\ 0 & \frac{1}{2} m_p L_p g (J_r + m_p L_r^2) & \frac{1}{2} m_p L_p L_r B_r & - (J_r + m_p L_r) B_p \end{vmatrix} \quad (1.18)$$

$$B = \frac{1}{J_T} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \\ \frac{1}{2} m_p L_p L_r \end{bmatrix}$$

Comme A, B, C et D sont connus maintenant, nous connaissons le modèle d'espace d'état complet du système. En entrant les valeurs de dans la Table I.2 , nous obtenons les valeurs exactes des matrices d'espace d'état. La valeur propre de la matrice A donne les pôles de la boucle ouverte du système. Les résultats obtenus sont illustrés à la table [1.3]

description	symbole	value
Matrice fondamentale	A	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 80.3 & -45.8 & -0.93 \\ 0 & 122 & +44.1 & -1.4 \end{bmatrix}$
Matrice d'entrée	B	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 83.4 \\ 80.3 \end{bmatrix}$
Matrice de sortie	C	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Matrice de transmission directe	D	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
Les pole en boucle ouvert	OL	{-48.42 ,7.06,-5.86, and 0}

**Table I.3 :** Résumé du modèle d'espace d'état

**I.5. Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons effectué une étude détaillé sur le pendule inversé rotatif et sur le développement de son modèle mathématique, ensuite, nous avons linéarisé le modèle non linéaire de ce pendule, en fin, nous allons obtenu une représentation d'état de ce pendule.

## **Chapitre II.**

# **Commande par swing up de pendule inversé rotatif**

## Chapitre II. Commande par swing up de pendule inversé rotatif

### II.1. Introduction

Le contrôle proportionnel-intégral-dérivé (PID) est l'algorithme de contrôle le plus couramment utilisé dans le contrôle ingénierie. Il est très efficace et utile pour résoudre divers problèmes de contrôle dans l'industrie. L'avantage du contrôleur PID peut être attribué à sa simplicité fonctionnelle, ce qui permet d'exploiter une commande de manière simple et direct.

Les premières approches de commande des systèmes non linéaires consistent à linéariser les équations de la dynamique autour d'un point de fonctionnement, puis appliquer les techniques de commande classique sur la base du modèle linéaire obtenu. L'utilisation de cette technique est l'une des solutions les plus connues et les plus efficace pour l'application de la commande PID classique aux systèmes non linéaire.

Dans ce chapitre nous proposons d'utiliser la technique de linéarisation afin d'appliquer deux commande de type PID pour stabiliser le pendule inverse rotatif présentée dans la chapitre 1, la première commande est valable **seulement** sur le modèle linéarisée et dans la deuxième nous allons près en compte la dynamique non linéaire complétement. A la fin du chapitre, un résultat de simulation est présenté.

### II.2. Commande PID classique

Le régulateur PID classique est constitué d'une action proportionnelle  $P$ , d'une action intégrale  $I$  et d'une action dérivée  $D$ . Les combinaisons possibles entre ces actions permettent de donner trois structures de la commande PID à savoir : la structure série, la structure parallèle et la structure mixte. Chacune des structures présente des avantages par rapport aux autres. Dans la suite, nous allons présenter ces trois structures seclarifié les principales différences entre elles.

- ***PID à structure série***

Dans la structure série, les trois actions  $P$ ,  $I$  et  $D$  sont associées en série, c'est-à-dire le signal de l'erreur subit à trois transformations successives comme illustré par la Figure 1.2.

Dans cette structure le signal de commande  $u(t)$  est défini par [47]:

$$u(t) = \alpha K_P e(t) + \frac{K_P}{T_i} \int_0^t e(\tau) dt + T_d K_P \frac{de(t)}{dt} \quad (\text{II.1})$$

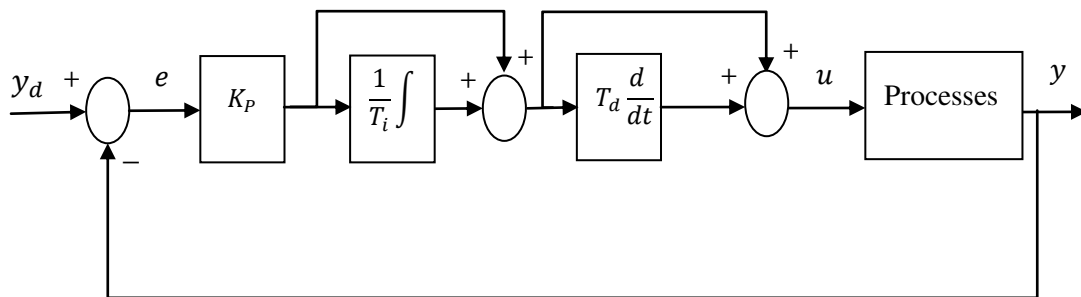
Où :  $\alpha = \frac{T_i + T_d}{T_i}$  et  $e(t) = y_d(t) - y(t)$

Avec :

$y_d$  : Le signal de référence et  $y$  la sortie du système.

En appliquant la transformée de Laplace à (1.6), on obtient la fonction de transfert  $C(p)$  du régulateur PID série :

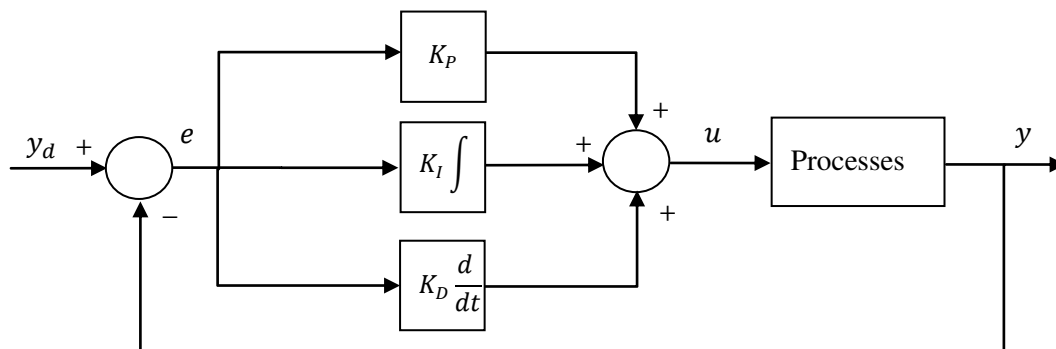
$$C(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right) (1 + T_d p) \quad (\text{II.2})$$



**Figure II.1.** Structure série d'un régulateur PID.

#### ▪ *PID à structure parallèle*

Dans la structure parallèle, les trois actions  $P$ ,  $I$  et  $D$  sont associées en parallèle, comme illustré par la Figure 1.3.



**Figure II.2.** Structure parallèle d'un régulateur PID.



Dans cette structure le signal de commande  $u(t)$  donné est défini par :

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt} \quad (\text{II.3})$$

En appliquant la transformée de Laplace à (II.3), on obtient la fonction de transfert  $C(p)$  du régulateur PID parallèle :

$$C(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = K_P + \frac{K_I}{p} + K_D p \quad (\text{II.4})$$

#### ▪ PID à structure mixte

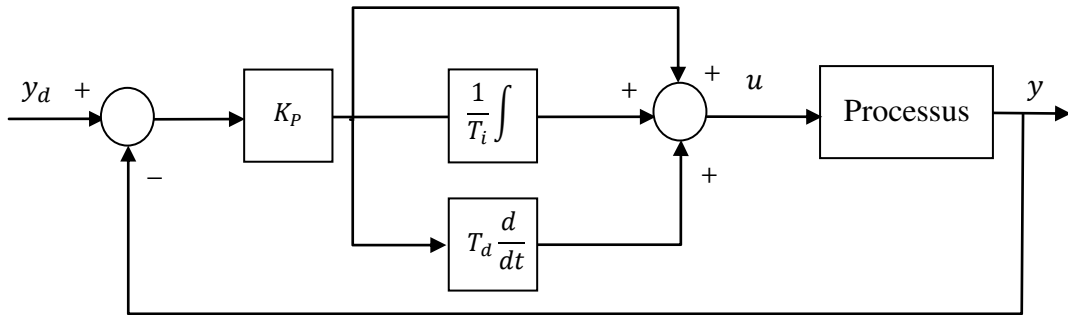
Dans la structure mixte, les deux actions  $I$  et  $D$  sont associées en parallèle, et leur somme est multipliée par l'action  $P$ , comme illustré par la Figure 1.4.

Dans cette structure le signal de commande  $u$  est donné par [5] :

$$u(t) = K_P \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (\text{II.5})$$

En appliquant la transformée de Laplace à (1.10), on obtient la fonction de transfert  $C(p)$  du régulateur PID mixte :

$$C(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right) \quad (\text{II.6})$$



**Figure II.3.** Structure mixte d'un régulateur PID.

La principale différence entre ces trois structures concerne l'effet des gains de réglage ( $K_P$ ,  $K_I$  et  $K_D$ ) sur le comportement du régulateur, on remarque que contrairement aux deux structures série et mixte. Où les trois actions sont couplées entre elles, dans la structure parallèle les trois actions sont découplées entre elles complètement, c'est-à-dire, la modification du gain proportionnel  $K_P$  ne modifie que l'action proportionnelle, tandis que, dans les deux autres structures (série et mixte), la modification du gain proportionnel  $K_P$  va modifier simultanément les trois actions (proportionnelle, intégrale et dérivée).

## **II.3.Effet de chaque action sur les performances de système**

### **II.3.1 Action proportionnelle P :**

La composante proportionnelle ne dépend que de la différence entre le point de consigne et le Variable de processus (sortie). Cette différence est appelé le terme d'erreur. Le gain proportionnel  $K_p$  détermine le rapport entre la réponse de sortie et le signal d'erreur. Par exemple, si le terme d'erreur a un 10, un gain proportionnel de 5 produirait une réponse proportionnelle de 50. En général, l'augmentation du gain proportionnel augmentera la vitesse de réponse du système de commande. Cependant, si le gain proportionnel est trop important, la variable de processus commencera à osciller. Si  $K_p$  est augmenté plus loin, les oscillations deviendront plus grandes et le système deviendra instable et peut même osciller hors de contrôle.

### **II.3.2. Action dérivée I :**

La composante intégrale additionne le terme d'erreur en fonction du temps. Le résultat est que même une petite erreur terme entraînera la composante intégrale à augmenter lentement. La réponse intégrale sera continuellement augmenter avec le temps, sauf si l'erreur est égale à zéro ; l'effet consiste donc à générer l'erreur d'état stable zéro. L'erreur d'état stable est la dernière différence entre la variable de processus et le point de consigne. Un phénomène appelé enroulement intégral (Wind up) résulte lorsque l'action intégrale sature un contrôleur sans le contrôleur conduisant le signal d'erreur vers zéro.

### **II.3.3 Action intégral D :**

La composante dérivée entraîne une diminution de la sortie si la variable de processus augmente rapidement. La réponse dérivée est proportionnelle au taux de changement de la variable de processus. En augmentant le paramètre de gain dérivé  $K_d$ , le système de commande réagira plus fortement aux modifications du terme d'erreur et augmentera la vitesse de la réponse globale du système de commande. La plupart des systèmes de contrôle utilisent un très faible gain dérivé ( $K_d$ ), car la réponse dérivée est très sensible au bruit dans le signal de variable de processus. Si le signal de retour du capteur est bruyant ou si le débit de la boucle de contrôle est trop lent, la réponse dérivée peut rendre le système de contrôle instable.

## **II.4. Application de la commande PID sur un pendule inversée rotatif :**

Dans cette partie nous proposons d'utiliser un commande PID pour stabiliser le pendule

inversé rotatif définit dans le premier chapitre à la position verticale pointant vers le haut.

Pour ce mémoire, deux expériences différentes sont considérées :

1. Le premier objectif est la stabilisation verticale du pendule, où l'objectif est d'assurer la stabilité du pendule à la position verticale pointant vers le haut. Cette stabilité doit être déterminée pour un ensemble de conditions initiales pour trouver la plage d'angles avant le décrochage du pendule.

2. Le second objectif est de synthétiser un contrôleur qui amène le pendule de la position verticale vers le bas jusqu'à la plage de tolérance verticale du contrôleur synthétisé pour le premier objectif pour que ce contrôleur prenne le relais et stabilise le pendule autour de la position d'équilibre verticale pointant vers le haut.

Donc, pour faire la stabilisation complète du pendule, de sa position stable à la position instable, il faudra une cascade  $u$  contrôleurs différents : le premier pour réaliser le deuxième objectif et le second pour réaliser le premier objectif.

dans la section suivante on applique rapidement un contrôleur linéaire PID afin de réguler le positionnement du pendule autour de sa position d'équilibre instable.

#### **II.4.1. Commande PID linéaire :**

L'objectif de commande est de forcer la sortie  $y = \alpha$  à converger vers une valeur désirée constante  $y_d = \alpha_d = 0$  à partir des conditions initiales bien définies.

L'architecture du contrôleur est présentée à la Figure II.2.

A cet effet, la commande PID classique suivante est conçue sur la base du modèle linéaire (1.16)

$$u = K_p e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt}$$

Avec  $e(t) = y - y_d = \alpha - \alpha_d$

Et  $K_p = 10$  ,  $K_I = 5$  ,  $K_d = 1.5$ .

Les résultats de simulation sont donnés à la fin de ce chapitre.

#### **II.4.2. Commande PID des systèmes non linéaires par des approches non linéaire**

Afin d'appliquer la commande PID sur des systèmes non linéaire avec la prise en compte de son comportement non linéaire complètement, et aussi la rendre plus robuste plusieurs solutions sont proposées dans la littérature. Dans cette partie, nous proposons stabiliser le

pendule inversé rotatif une loi de commande PID de type non linéaire. Dans ce schéma, une loi de commande PID classique est placée en cascades avec le contrôleur swing-up.

La synthèse du contrôleur *swing-up* permet de répondre au second objectif de ce mémoire qui consiste à développer un contrôleur permettant de stabiliser le pendule en sa position d'équilibre instable à partir de sa position d'équilibre stable (conditions initiales  $\alpha = 0$ ,  $\theta = \pi$ ).

## II.5. Commande d'énergie

Pour ce faire, on décide de suivre les étapes proposées par [6] qui reposent sur une commande énergétique. Les grandes lignes du principe sont les suivantes :

- L'énergie totale (cinétique + potentielle) du système est nulle lorsque le pendule est au repos à  $\alpha = 0$ .
- Ainsi, l'énergie potentielle est maximum et l'énergie cinétique est nulle lorsque le pendule est dans sa position d'équilibre instable (pendule vers le haut),
- Il s'agit donc de définir un contrôleur qui permet d'augmenter l'énergie dans le pendule afin de partir d'une énergie nulle (représentant la position d'équilibre stable vers le bas) et d'atteindre l'énergie potentielle maximum à la position désirée (instable vers le haut).

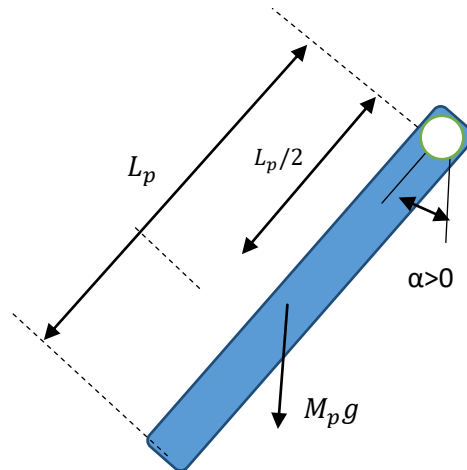
L'énergie potentielle du pendule, à tout moment, est définie comme suit [7] :

$$E_p = M_p g l_p (1 - \cos \alpha)$$

Et l'énergie cinétique est :

$$E_c = \frac{1}{2} J_p \dot{\alpha}^2$$

L'angle du pendule  $\alpha$ , et les longueurs sont illustrés à la figure 2.1. Le moment d'inertie dans ce cas est  $J_p = l_p / 2$ .



**Figure II.4 :** Diagramme de pendule du corps libre

L'énergie potentielle est nulle lorsque le pendule est au repos à  $\alpha = 0$  et égale à  $2M_p g l_p$  lorsque le pendule est en position verticale à  $\alpha = \pm \pi$ . La somme des énergies potentielle et cinétique du pendule est

$$E = \frac{1}{2} J_p \dot{\alpha}^2 + M_p g l_p (1 - \cos \alpha) \quad (\text{II.7})$$

En intégrant(II.7), on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\dot{E} = \dot{\alpha} (J_p \ddot{\alpha} + M_p g l_p \sin \alpha) \quad (\text{II.8})$$

En utilisant l'équation du mouvement suivante :

$$J_p \ddot{\alpha} = -M_p g l_p \sin \alpha + M_p u l_p \cos \alpha$$

L'accélération de pendule dans l'équation (II.8) nous donne

$$\dot{E} = M_p u l_p \dot{\alpha} \cos \alpha$$

Puisque l'accélération du pivot est proportionnelle au courant d'entraînement du moteur du bras et donc également à la tension de commande, nous constatons qu'il est facile de contrôler l'énergie du pendule. La loi de commande proportionnelle

$$u = (E_r - E) \dot{\alpha} \cos \alpha \quad (\text{II.9})$$

Entraîne l'énergie  $E$  vers l'énergie de référence  $E_r$ . Notez que la loi de commande est non linéaire car le gain proportionnel dépend de l'angle du pendule,  $\alpha$ . Notez également que la commande change son signe lorsque  $\dot{\alpha}$  change son signe et que l'angle est à  $\pm 90$  degrés.

Cependant, pour une énergie change rapidement, l'amplitude du signal de commande doit être grande. En conséquence, le contrôleur swing up suivant est implémenté dans le contrôleur comme suit :

$$u = \text{sat}_{u_{max}}(\mu(E_r - E)\text{sign}(\dot{\alpha}\cos\alpha)) \quad (\text{II.10})$$

où  $\mu$  est un gain de commande ajustable et la fonction  $\text{sat}_{u_{max}}$  sature le signal de commande à l'accélération maximale du pivot du pendule  $u_{max}$ . [3]

## II.6. La commande swing up hybride

La commande d'énergie (swing up) de (2.3) (ou 2.4) peut être combinée avec la loi de commande de balance PID pour obtenir une loi de commande réalisant le double tâche de relèvement et d'équilibrage du pendule.

De même, comme décrit dans le contrôle de balance, le contrôle de balance doit être activé lorsque le pendule est à  $\pm 20$  degrés. Lorsqu'elle n'est pas activée, la commande de swing up est activée. Donc, la commutation peut être décrite mathématiquement par :

$$u = \begin{cases} u_{bal} & \text{si } |\alpha| - \pi \leq 20 \text{ deg} \\ u_{swing} & \text{autrement} \end{cases} \quad [4]$$

## II.7. Résultats de simulation

Cette section présente d'abord les résultats de simulation obtenus pour les trois contrôleurs PID de régulation autour de la position d'équilibre instable. De plus, des simulations complètes où le contrôleur *swing-up* est utilisé afin de transférer le pendule de la position stable à la position instable sont également présentées

### II.7.1. Test de la commande PID

Dans ce test on utilise les condition initial :  $[c1, c2, c3, c4] = [0, \pi/9, 0, 0.3]$ .

Les simulations ont été réalisé sur le modele lineaire du système et pour un angle desireé de  $\theta_d = 0$ . L'algorithme de resolution utilisé est celui de ode45 (dormande prince) avec un pas de simulation de 0.01.

Les gain de la commande PID utilises sont :

$K_p$	$K_i$	$K_d$
10	5	1.5

**a) Test 1 : test sans perturbation**

Les résultats de simulation de la position et de la vitesse angulaire de  $\theta$  et  $\alpha$  et .Le signal de commande PID sont donnés sur les Figures II.5

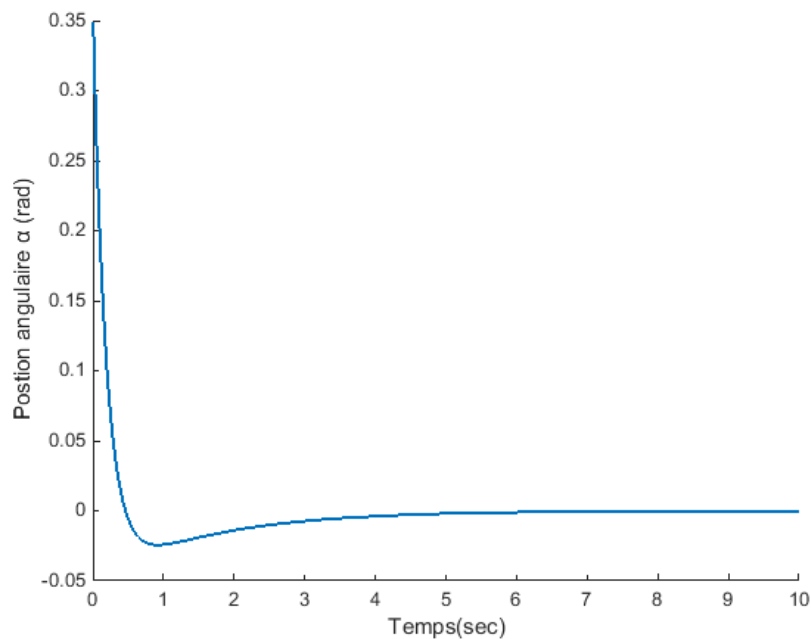
On remarque que la commande arrive à stabiliser le pendule à la position désiré ( $\alpha=0$ ).

**b) Test 2 :test avec des perturbations**

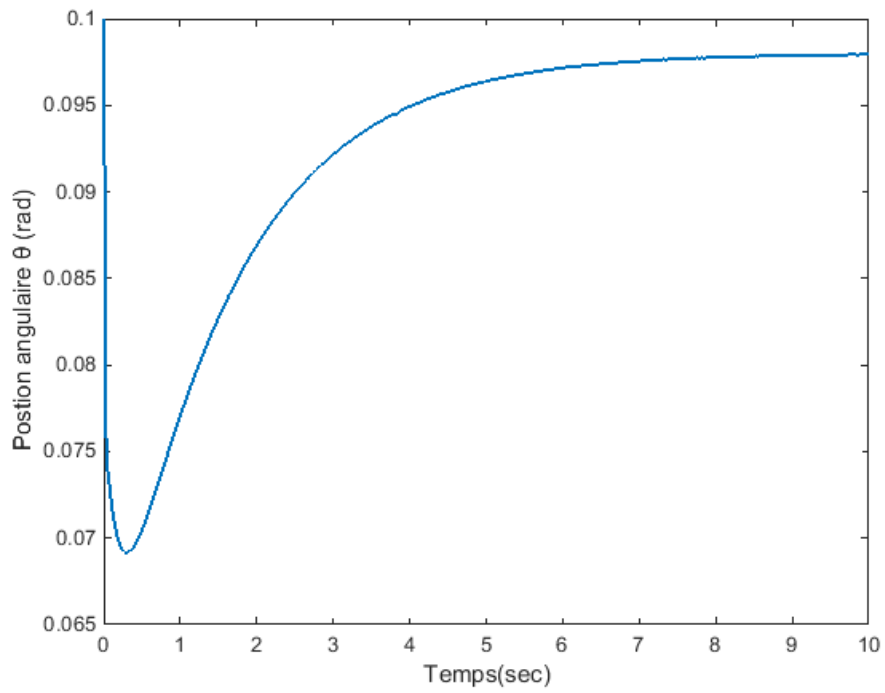
Afin de tester l'efficacité de la commande PID proposée une perturbation de type gaussien avec une variance de 0.01 et une moyenne nulle est considérée. Cette perturbation survient à l'intervalle de temps  $T= [5 6]$ .

Les résultats de simulation de la position et de la vitesse angulaire de  $\theta$  et  $\alpha$  sont donnés respectivement sur les Figures II.6.

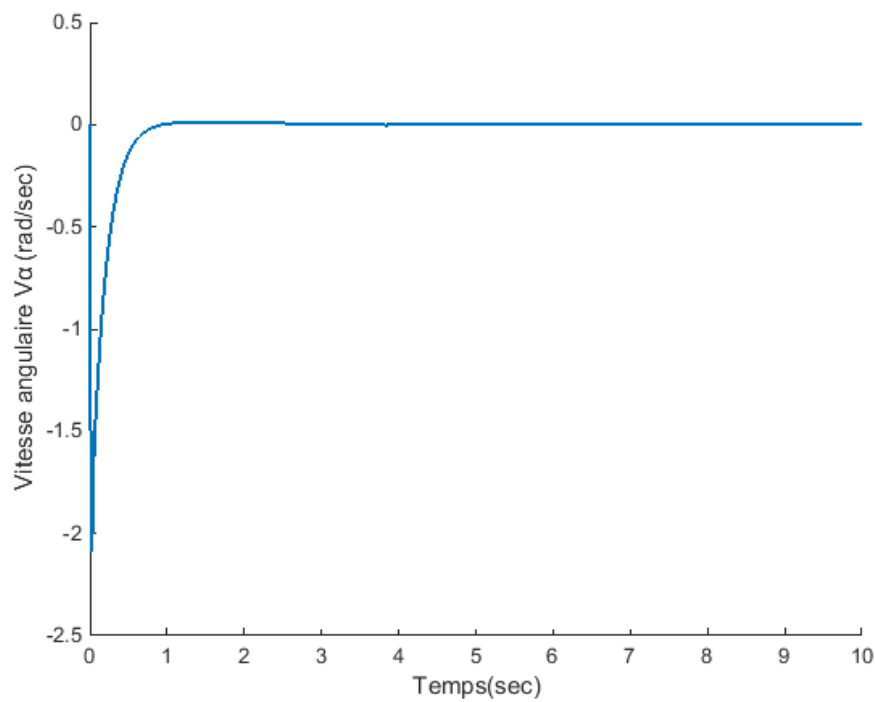
On remarque que le correcteur arrive à stabiliser le pendule même en présence de la perturbation externe.



(a)

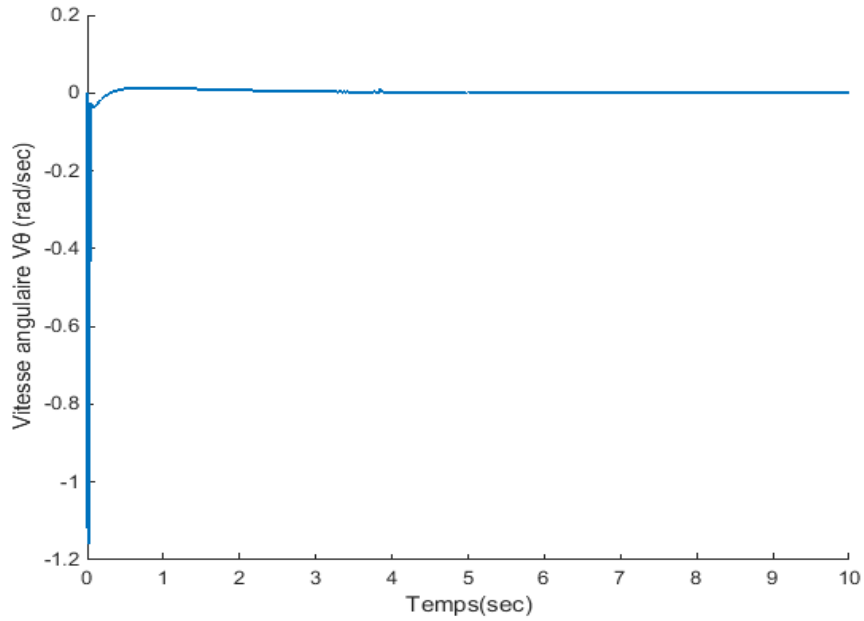


(b)

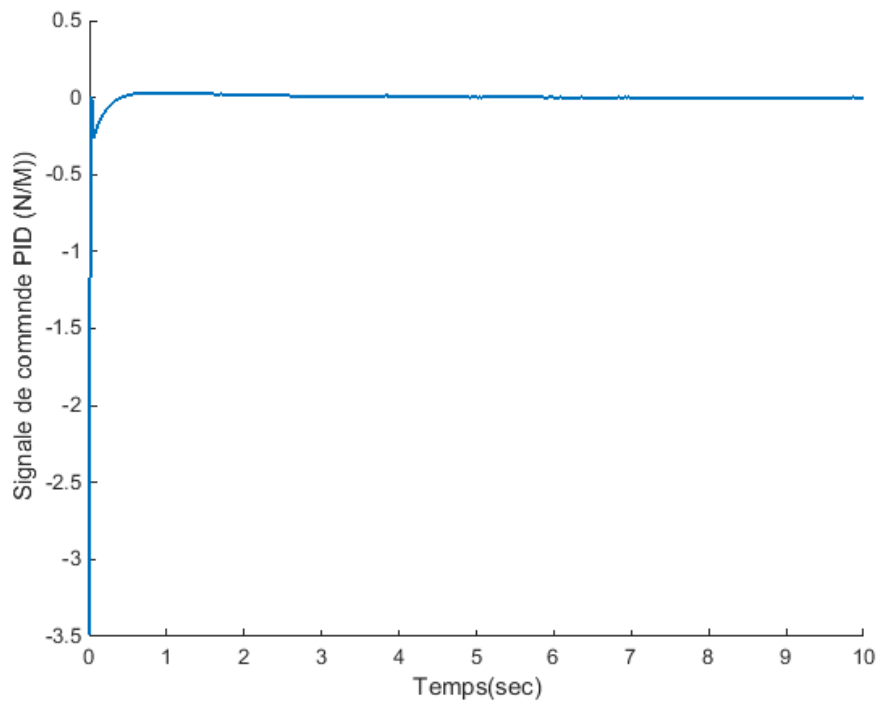


(c)





(d)



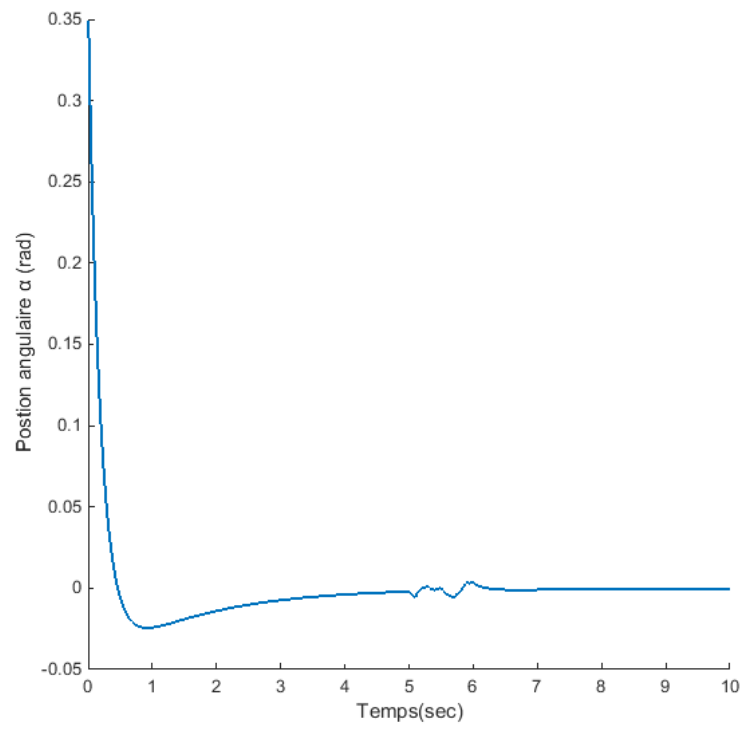
(e)

**Figure(II.5)** :Evolution de  $\alpha$ ,  $v_{\alpha}$ ,  $\theta$ ,  $v_{\theta}$  et le signal de commande PID sans perturbation

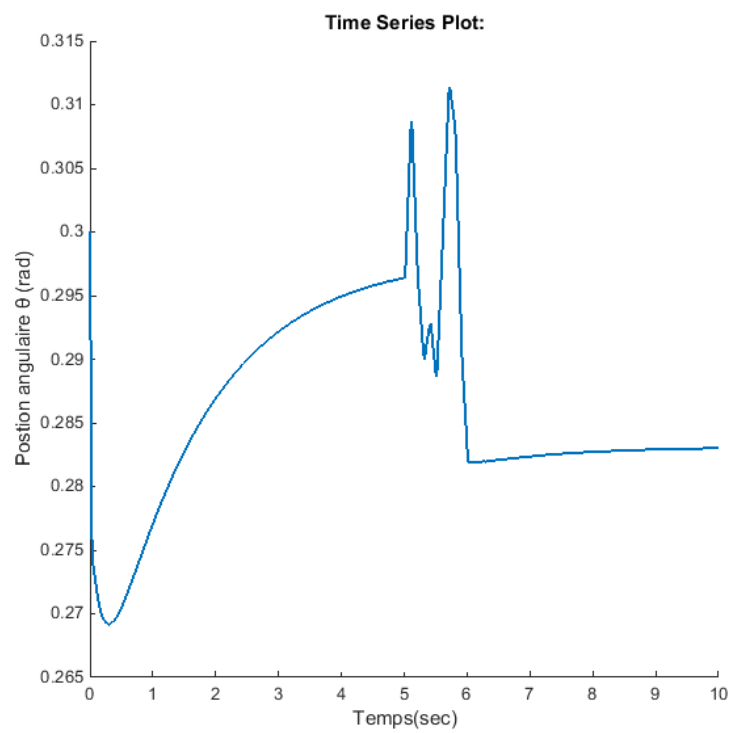
(a) Position angulaire de tige  $L_r$  (b) Position angulaire de tige  $L_p$

(c) Vitesse angulaire de tige  $L_r$  (d) Vitesse angulaire de  $L_p$  tige

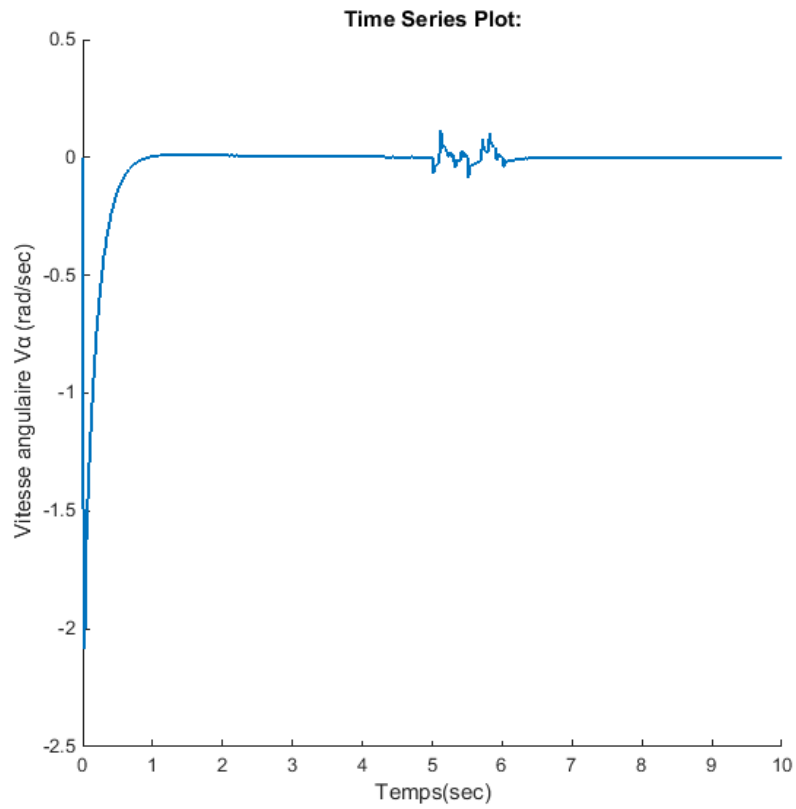
(e) signal de commande PID



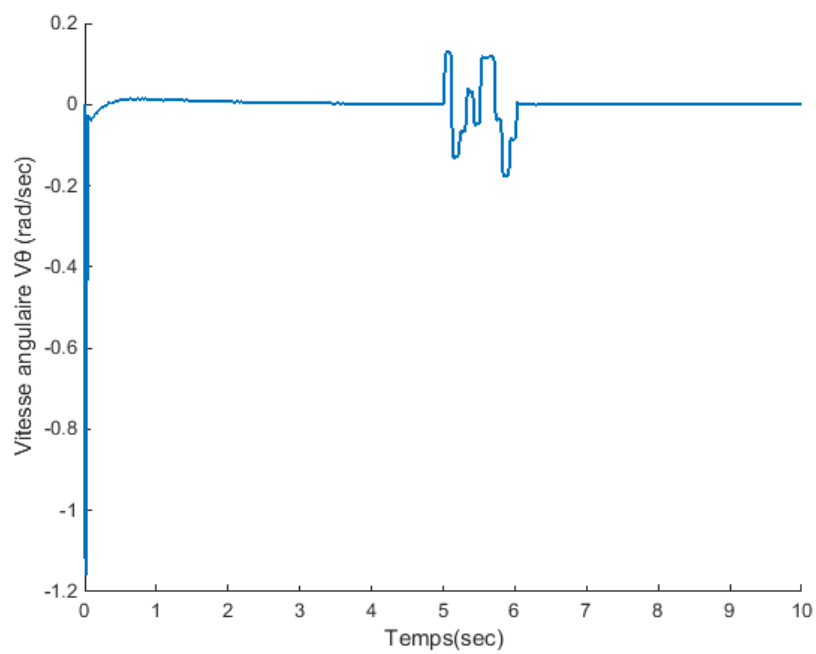
(a)



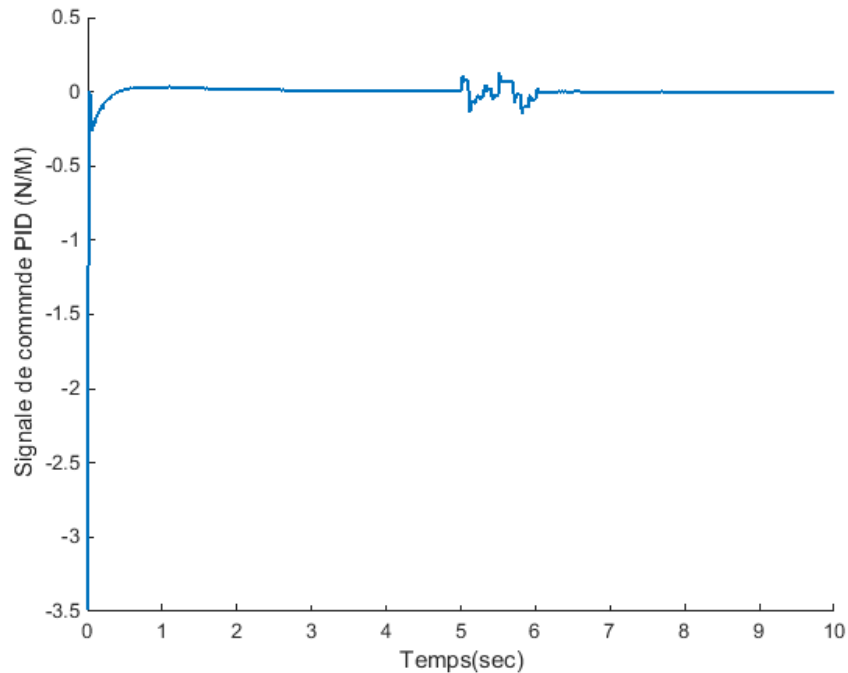
(b)



**(c)**



**(d)**



(e)

**Figure II.6 :** Evolution de  $\alpha, v_\alpha, \theta, v_\theta$  après l'application de perturbation

(a) Position angulaire de tige  $L_r$  perturbé (b) Position angulaire de tige  $L_p$  perturbé

(c) Vitesse angulaire de tige  $L_r$  perturbé (d) Vitesse angulaire de tige  $L_p$  perturbé

(e) signal de commande perturbé.

### II.7.2. Test de la commande swing up hybride

Pour ce partie on va tester la commande swing up hybride pour des conditions initial différent puis pour avec perturbation notons que le modèle de pendule utilisé est le modèle non linéaire.

#### Test1 :

Ce test est fait pour les conditions initial :  $[\alpha, \dot{\alpha}, \theta, \dot{\theta}] = [\pi/2, 0, 5, 0]$  la figure (II.7) montre l'évolution de de la position et de la vitesse angulaire de  $\theta$  et  $\alpha$  et .Le signal de commande swing-up .on remarque que la postion angulaire  $\alpha$  arrive a stabiliser a la position intable et la postion  $\theta$  n'arrive pas a stabiliser.

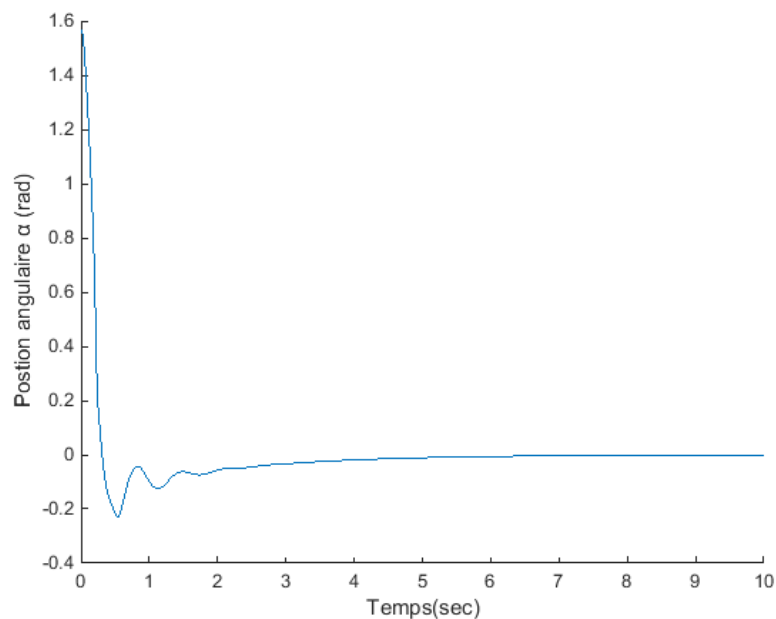
#### Test 2 :

Ce test est fait pour les conditions initial :  $[\alpha, \dot{\alpha}, \theta, \dot{\theta}] = [\pi/4, 0, 5, 0]$  la figure (II.8) montre l'évolution de de la position et de la vitesse angulaire de  $\theta$  et  $\alpha$  et .Le signal de commande swing-up .on remarque que malgré le changement des condition initial la postion angulaire  $\alpha$  arrive a stabiliser a la position intable et la postion  $\theta$  rest divergente .

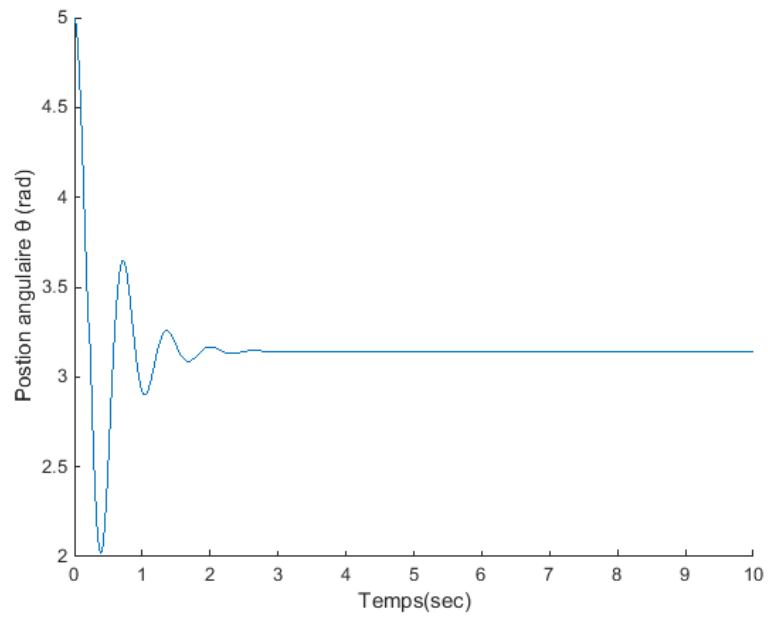
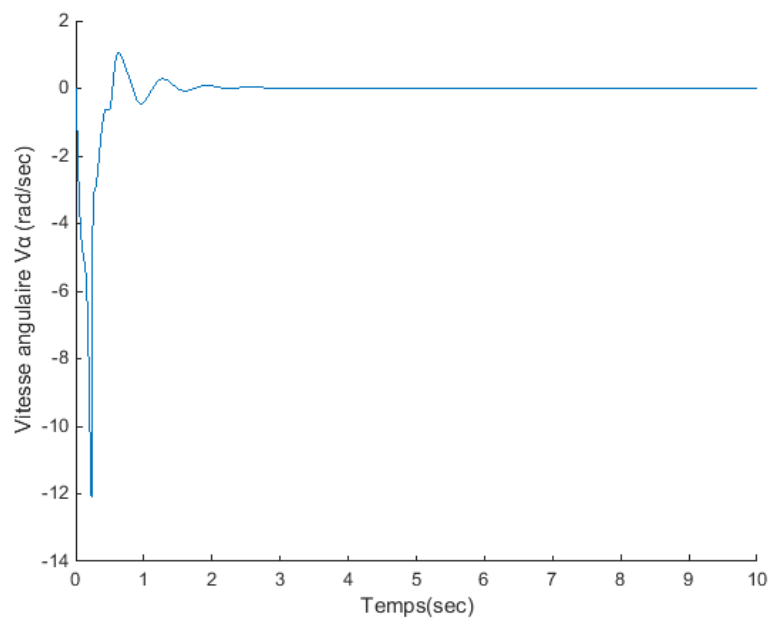
### Test 3 :

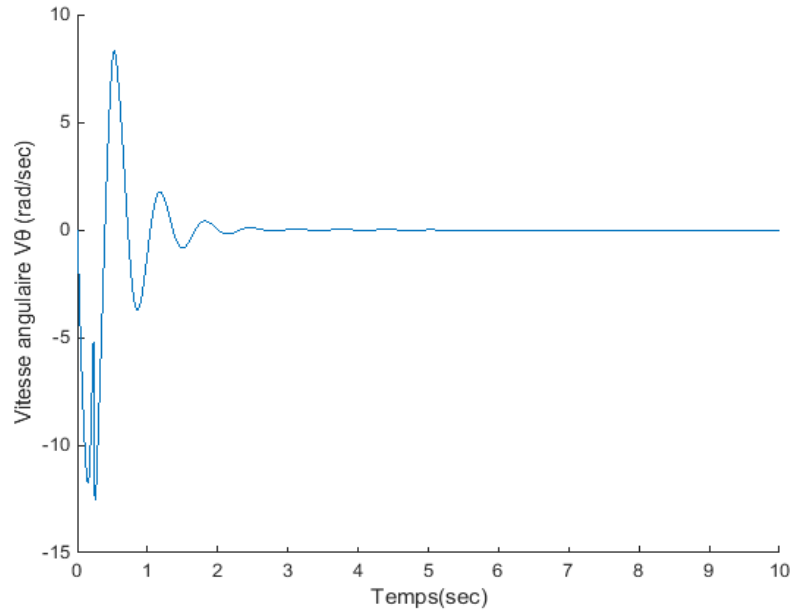
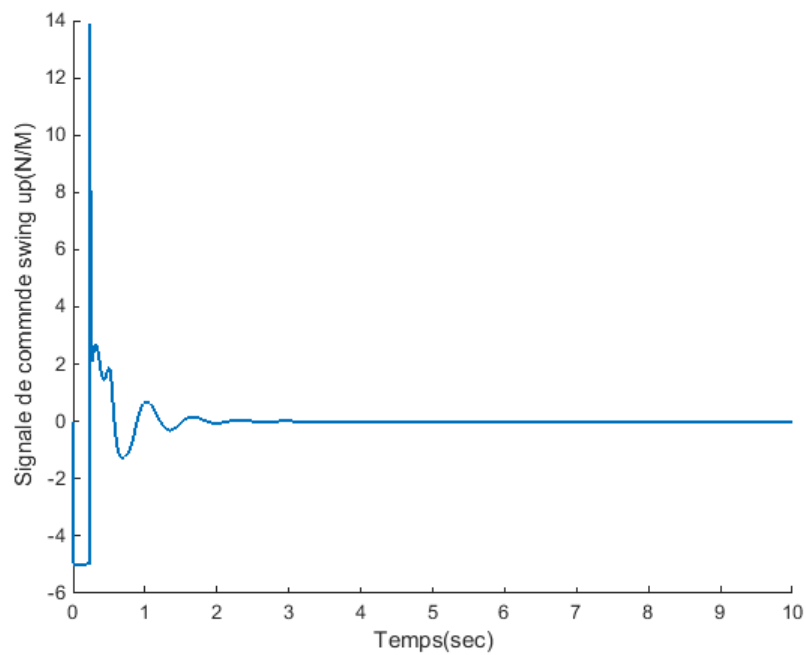
Ce test est fait pour les conditions initiales :  $[\alpha, \dot{\alpha}, \theta, \dot{\theta}] = [\pi/4, 0, 5, 0]$  avec l'application d'une **perturbation** de type gaussien avec une variance de 0.01 et une moyenne nulle est considérée. Cette perturbation survenir à l'intervalle de temps  $T = [5, 6]$ . La figure (II.9) montre l'évolution de la position et de la vitesse angulaire de  $\theta$  et  $\alpha$  et .Le signal de commande swing-up .

on remarque que la postion angulaire  $\alpha$  arrive a stabiliser a la position intable desire apres la fin de l'ntervale de perturbation et la situation contraire pou la postion  $\theta$  qui rest divergente.

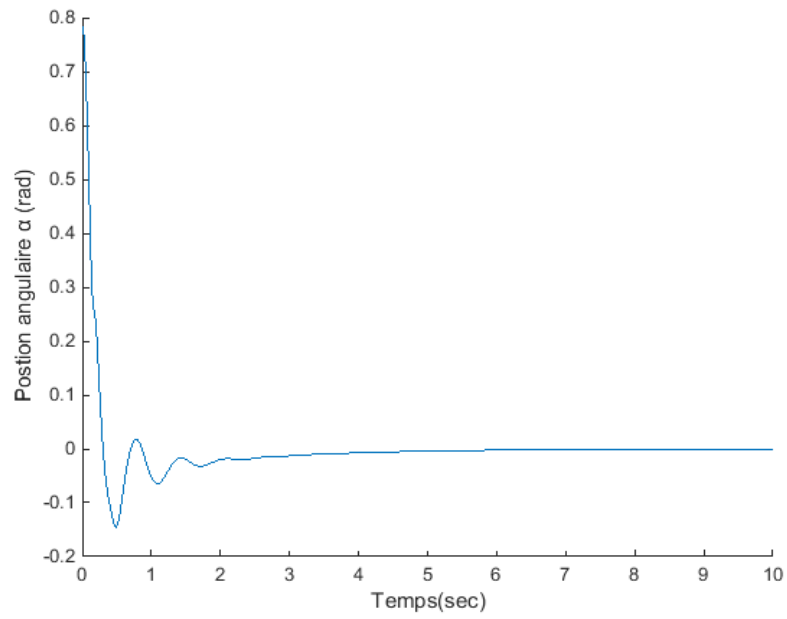
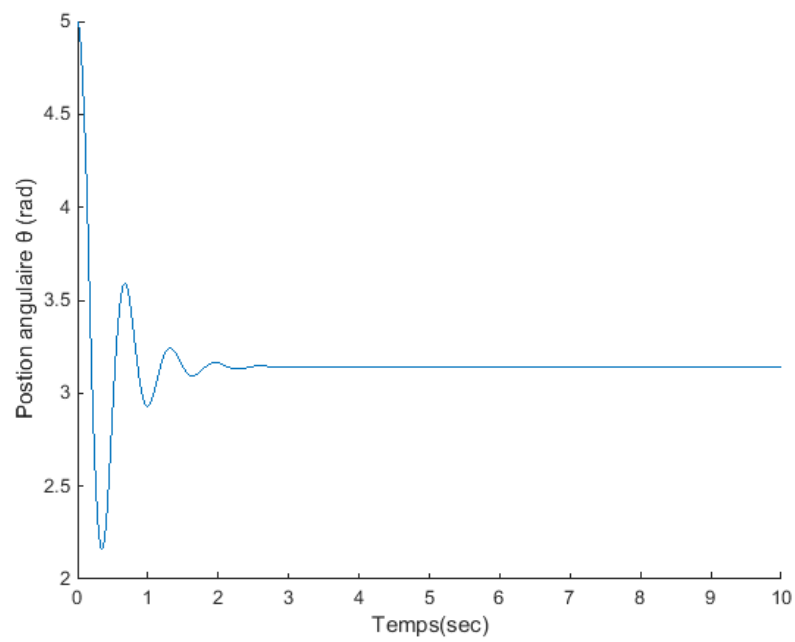


(a) évolution de position angulaire  $\alpha$

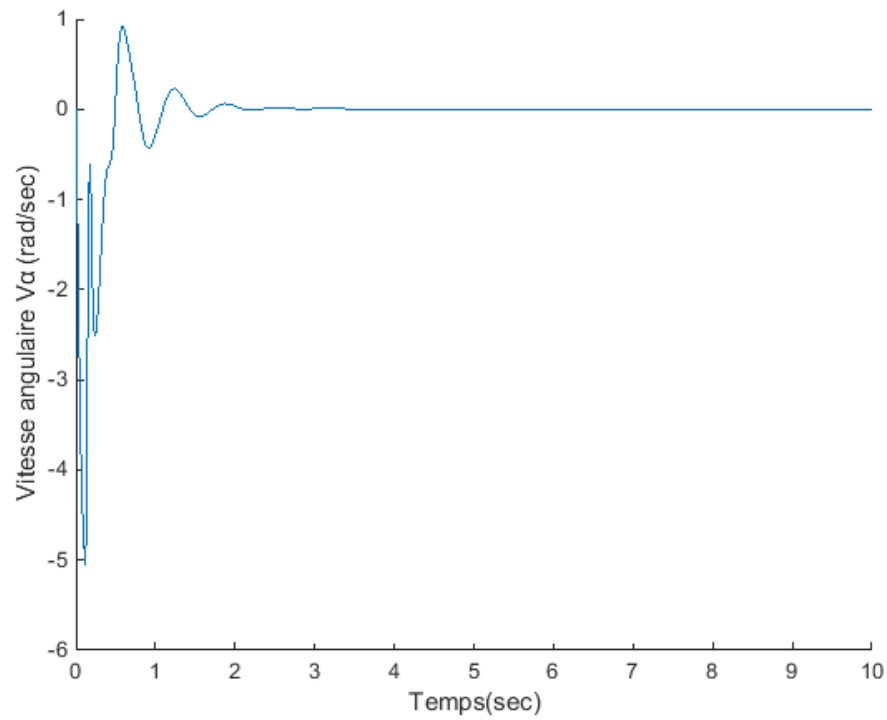
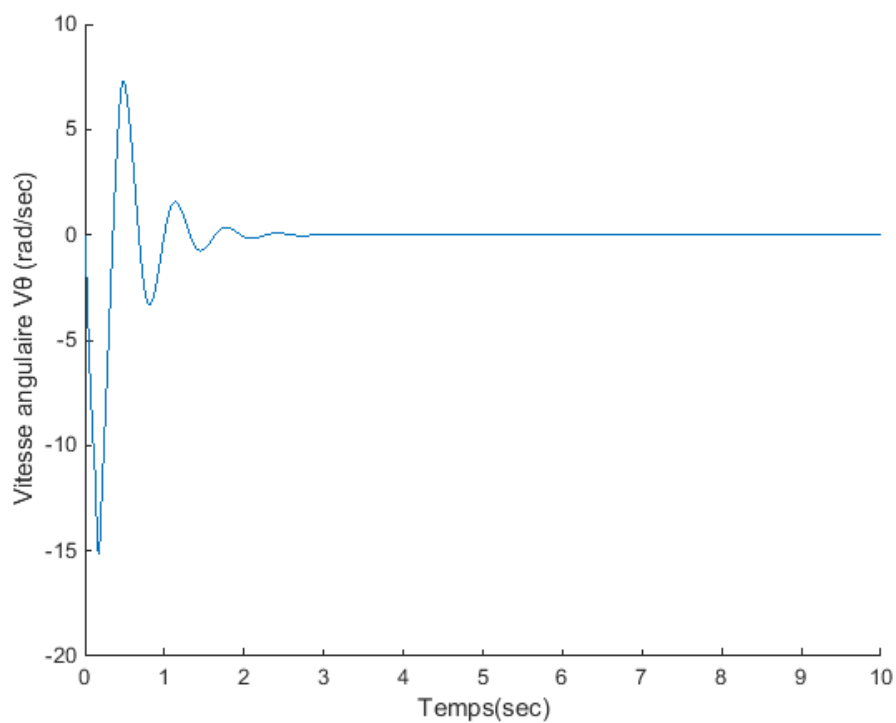
(b) évolution de position angulaire  $\theta$ (c) évolution de vitesse angulaire  $\alpha$

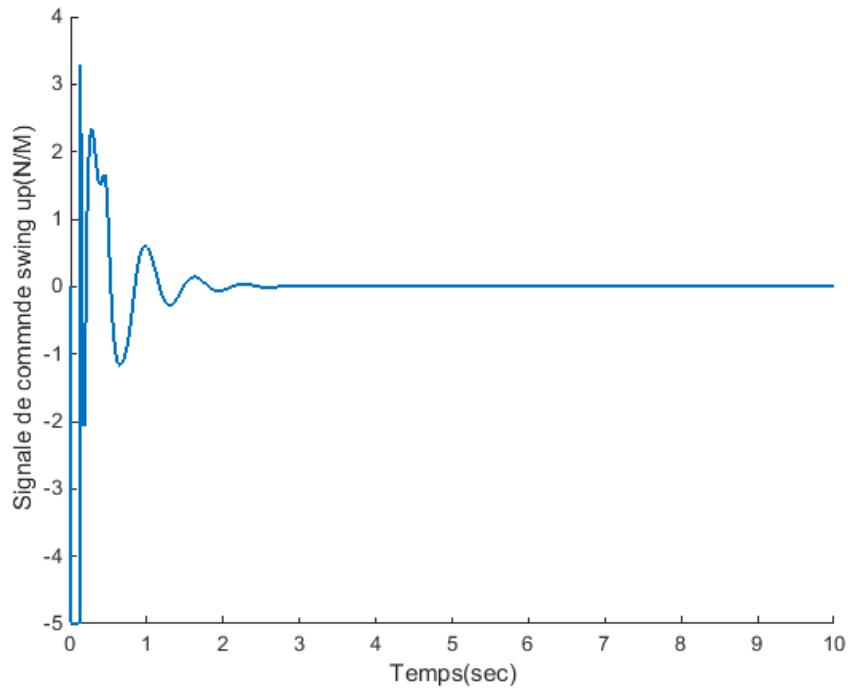
(d) évolution de vitesse angulaire  $\theta$ (e) évolution de signal de commande  $u$ 

**Figure(II.7) :** Evolution de  $\alpha$  signal de commande,  $v_\alpha$ ,  $\theta$ ,  $v_\theta$  et le swing-up pour La position initiale  $\theta = \pi/2$

(a) évolution Position angulaire de  $\alpha$ (b) évolution Position angulaire de  $\theta$

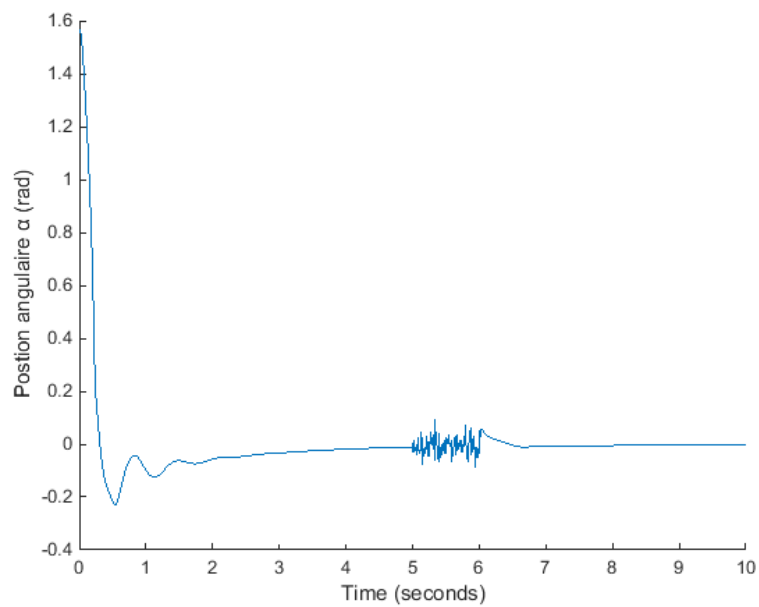


(c) évolution vitesse Position angulaire de  $\alpha$ (d) évolution vitesse Position angulaire de  $\theta$

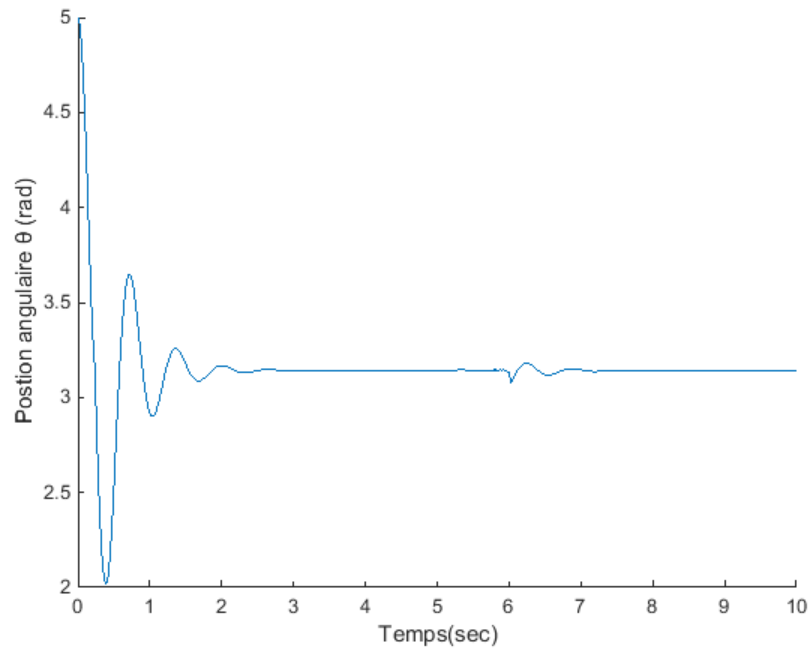
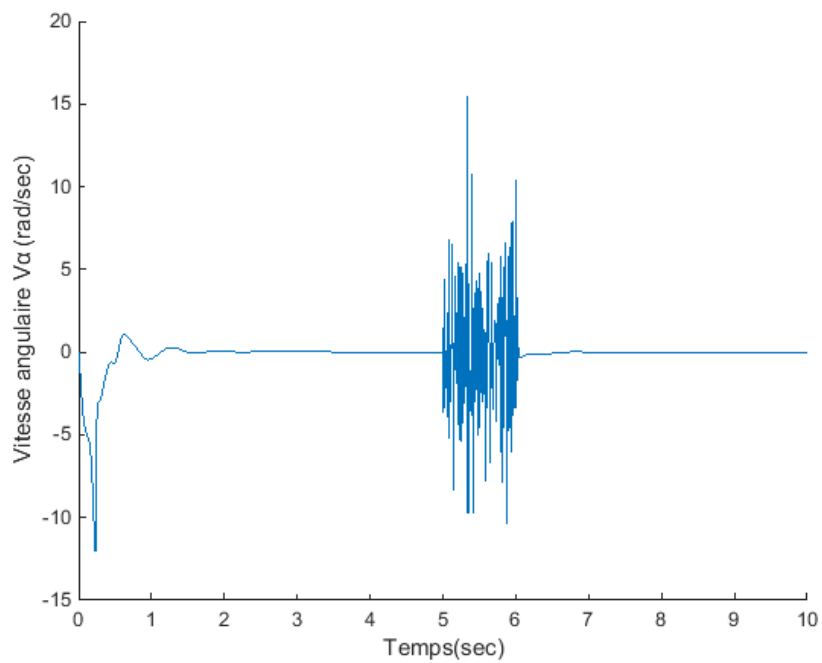


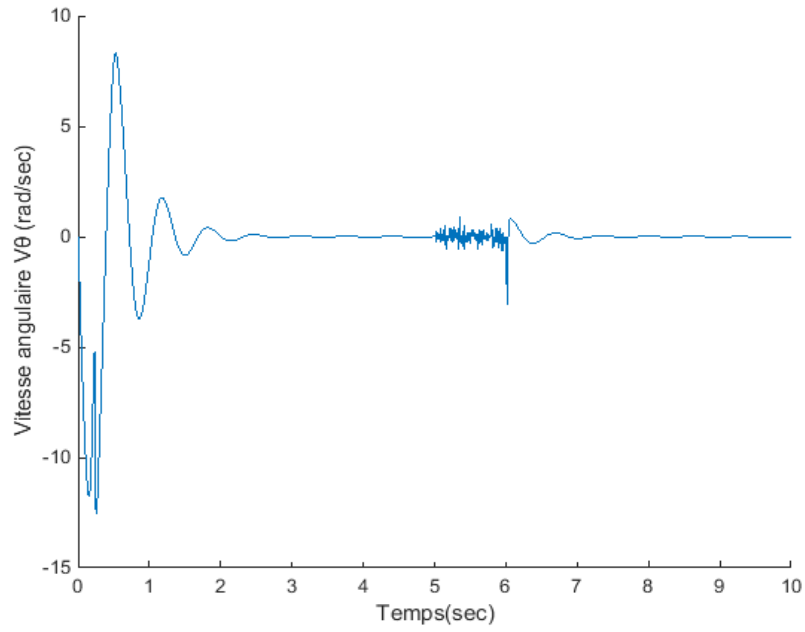
(e)évolution de  $\alpha$  signal de commande swing-upu

**Figure(II.8) :** Evolution de  $\alpha$  signal de commande,  $v_\alpha$ ,  $\theta$ ,  $v_\theta$  et le swing-up pour La position initiale  $\theta = \pi/4$

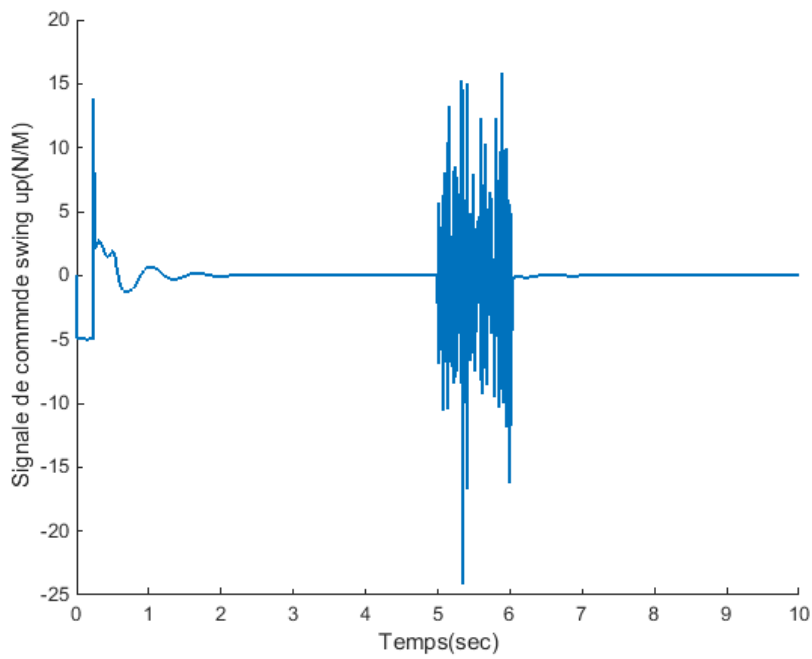


(a) évolution de position angulaire  $\alpha$

(b) évolution de position angulaire  $\alpha$ (c) évolution de vitesse angulaire de  $\alpha$



(c) évolution de vitesse angulaire de  $\theta$



(e) Evolution de  $\alpha$  signal de commande  $u$

**Figure(II.9)** : Evolution de  $\alpha$  signal de commande,  $v_{\alpha}$ ,  $\theta$ ,  $v_{\theta}$  et le swing-up pour La position perturbées

### **II.7.3. Interprétation des résultats obtenus**

D'après les résultats obtenus en simulation, il s'avère que la commande swing-up peut stabiliser avec précision l'angle  $\alpha$  mais pas la même pour l'angle  $\theta$  qui est resté divergente.

### **III.8. Conclusion**

Dans ce chapitre, deux schémas de commande PID pour un pendule inversé rotatif ont été appliqués. Dans le premier schéma, une commande PID classique est utilisée pour stabilisée du pendule autour la sa position d'équilibre instable. Dans le deuxième schéma, une commande d'énergie non linéaire « swing-up control » est utilisée avec la commande PID pour traiter le comportement du système complètement.

## **Chapitre III**

# **Commande par mode glissant de pendule inversé rotatif**

## Chapitre III. Commande de par mode glissant de pendule inversé rotatif

### III.1. Introduction

En pratique, tous les processus physiques présentent des non linéarités. Nous avons vu, dans le chapitre précédent, que si le contrôleur est basé sur un modèle linéarisé autour d'un point de fonctionnement, lorsque l'état du système s'écarte notablement de ce point de fonctionnement normal, des dérives importantes ou même des instabilités peuvent être observées. En plus bien que la technique de linéarisation ait prouvé son efficacité avec une large gamme de systèmes, il existe en revanche certains cas où l'utilisation de la technique de linéarisation ne peut pas étendre les objectifs de commande désirés.

Afin de rendre les contrôleurs efficaces dans ces situations, il faut employer des lois de commandes qui tiennent compte du caractère non linéaire du processus. D'autre part, en raison de la nature approximative des modèles représentant les dynamiques des systèmes réels, les approches de commande doivent inclure des contraintes robustesse vis-à-vis les incertitudes du modèle.

Dans ce chapitre, Nous avons choisit de synthétiser un contrôleur par surface de glissement pour le système de pendule inversé rotatif, car il ne requiert pas que le système soit linéarisable. A causé au caractère non linéaire et le sous-actionnement de ce système, la commande utilisée doit accomplir deux taches : stabiliser la partie non actionnée en sa position d'équilibre instable, et la partie actionnée en une position finale désirée partant de conditions initiales proches ou lointaines du point d'équilibre. Réaliser ces deux objectifs par une seule commande constitue un défi sérieux même avec les commandes non linéaires les plus établies.

Dans ce chapitre, après une brève introduction à la commande par mode glissant, nous proposons de l'utiliser sous forme hiérarchique afin de stabiliser le pendule inversé rotatif présenté dans le premier chapitre. La validation de ce loi de commande est présentée à la fin de chapitre.

La commande par mode glissant, qui appartient à une sorte de système de commande à structure variable, est une commande à rétroaction non linéaire dont la structure est intentionnellement modifiée pour obtenir les performances souhaitées. Parce que la

commande en mode glissant devient moins sensible aux variations des paramètres des systèmes les nuisances sonores, on peut envisager d'utiliser la commande en mode glissant pour mettre en œuvre le contrôle des systèmes sous-actionnés. Cependant, la conception d'une surface commune en mode glissant pour les systèmes sous-actionnés n'est pas appropriée. Les systèmes sous-actionnés comprenant généralement plusieurs sous-systèmes et les variables d'état n'ayant pas de relation différentielle évidente entre eux, les paramètres de la surface en mode glissant commun ne peuvent pas être obtenus directement en fonction de la condition *de Hurwitz* [8]

### III.2. Historique :

Une attention considérable a été concentrée ces deux dernières décennies sur la commande des systèmes non linéaires à dynamique incertaine et souvent sujet aux perturbations et aux variations paramétriques. La théorie des systèmes à structure variable et les modes glissants associés a fait l'objet d'études détaillées au cours des quarante dernières années. Des contrôleurs à structure variable ont fait leur application dans la littérature soviétique (Emelyanov 1967, Utikin 1974), et ont été largement identifiés comme une approche potentielle à ce problème. Des recherches sur la commande à structure variable ont été menées par Decarlo et Hung, l'action de commande force la trajectoire de système à intercepter l'espace d'état intitulé surface de glissement. Les trajectoires du système sont alors confondues avec la surface de glissement durant l'utilisation des commandes à une grande vitesse de commutation. L'avantage saillant de la commande à structure variable avec le mode glissant, est la robustesse contre les changements de paramètres ou les différents types de perturbations.

### III.3. Définition du mode glissant :

L'approche des modes glissants consiste à amener la trajectoire d'état d'un système vers la surface de glissement et de la faire commuter à l'aide d'une logique de commutation appropriée autour de celle-ci jusqu'au point d'équilibre, d'où le phénomène de glissement.

### III.4. Objectif de la commande par mode glissant :

L'objectif de la commande par mode glissant se résume en deux points essentiels :

- Synthétiser une surface  $S(x, t)$ , telle que toutes les trajectoires du système obéissent à un comportement désiré de poursuite, de régulation et de stabilité.



• Déterminer une loi de commande (commutation)  $U(x, t)$  qui est capable d'attirer toutes les trajectoires d'état vers la surface de glissement et les maintenir sur cette surface.

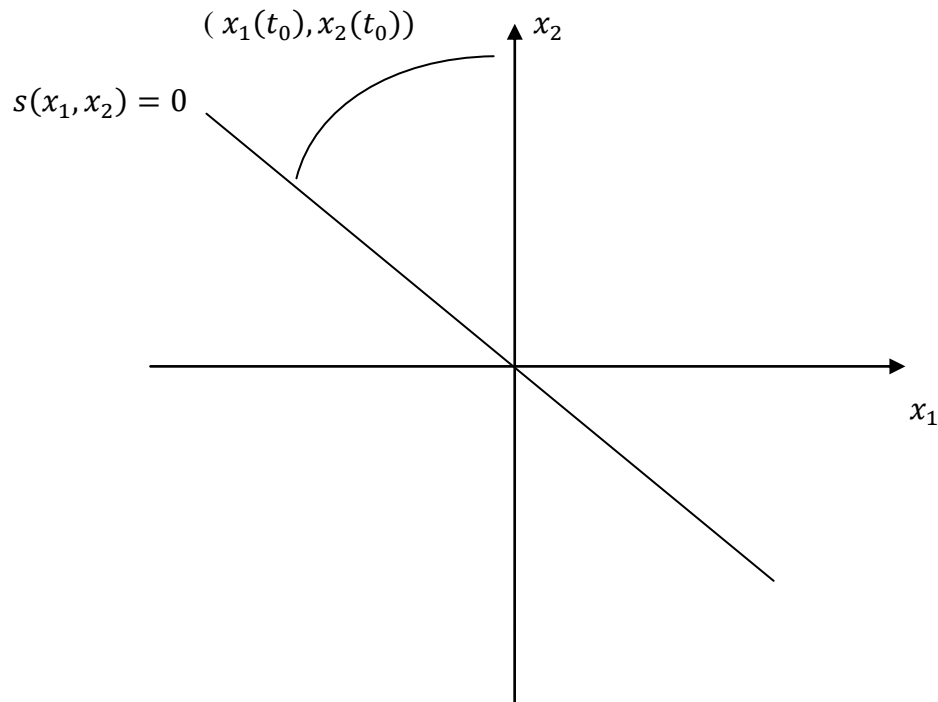
### III.5. principe de la commande par mode glissement

La commande par mode glissement consiste à concevoir de la loi de commande qui puisse guider le vecteur d'état  $X(t)$  d'un système donné vers une hypersurface  $s(X)=0$ , communément appelé surface de glissement ou de commutation. Une fois ce sous-espace d'état atteint, le vecteur d'état possédera alors une dynamique stable qui dépendra directement du choix de la surface de glissement, et qui fera en sorte que la vecteur d'état glisse sur hypersurface jusqu'à atteindre le point d'équilibre.

L'avantage d'obtenir un tel comportement est double : d'un coté, on a une réduction de l'ordre du système, et d'autre part, le régime glissant est insensible aux perturbations intervenant dans les mêmes équations que les entrées [9].

La figure (III.1) schématise ce processus dans le plan de phase, c'est-à-dire dans le cas où le système est d'ordre deux. Ainsi nous pouvons constater que la commande par mode de glissement est divisée en deux étapes : dans la première phase, le vecteur d'état doit atteindre la surface de glissement. Dans la deuxième phase, et après avoir atteint la surface de glissement, le vecteur d'état doit glisser sur cette surface jusqu'à atteindre le point d'équilibre, nous parlons alors de mode glissement. Donc la conception de la commande par mode de glissement est divisée en deux parties distinctes :

- 1- Premièrement, il faut choisir adéquatement la surface de glissement pour y assurer la convergence du vecteur d'état vers le point d'équilibre.
- 2- Deuxièmement, il faut concevoir la loi de commande de telle manière que le vecteur d'état puisse atteindre la surface de glissement et y glisser.



**Figure III.1** : Schématisation du mode de glissement dans le plan de phase

### III.6. Conception de la commande par mode de glissement

Afin de bien comprendre les étapes de conception de la commande par mode de glissement, considérons le cas particulier d'un système non linéaire suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x_1, x_2) + b(x_1, x_2)u\end{aligned}\quad (\text{III.1})$$

Où  $f$  et  $b$  sont des fonctions non linéaires, et  $b$  supposée inversible.  $u$  est l'entrée du système. soit  $x_d$  la consigne désirée pour  $x_1$  et soit  $e$  l'erreur de poursuite définie par  $e = x_1 - x_d$ . Tout d'abord, il faut commencer par choisir la fonction de glissement  $S$ . Le choix typique de  $S$  est fait tout simplement comme suit :

$$S = \lambda e + \dot{e} \quad (\text{III.2})$$

Où  $\lambda$  est un coefficient positif. Ainsi lorsque la surface de glissement  $S = 0$  est atteinte, le système vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\lambda e + \dot{e} = 0 \quad (\text{III.3})$$

D'après (III.3),  $e$  vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre dont la solution tendra exponentiellement vers 0. La deuxième étape consiste à concevoir une loi de

commande qui puisse amener le vecteur d'état à glisser sur la surface  $s = 0$ . Pour cela, il faut que la loi commande soit conçue de telle manière à ce que la condition suivante (appelée également condition d'atteinte) soit vérifiée :

$$S\dot{S} < \forall t \quad (\text{III.4})$$

Si la condition (III.4) est vérifiée, alors la fonction de glissement et sa dérivée sont de signe contraire quel que soit le temps. Ceci implique donc que  $S$  convergera vers 0.

D'une autre perspective, la condition (III.4) assure que la fonction de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}S^2 \quad (\text{III.5})$$

Admet une dérivée temporelle strictement négative. Généralement pour que la condition (III.4) soit vérifiée en tout temps,  $\dot{S}$  est usuellement choisie comme suit :

$$\dot{S} = -k \times \text{sign}(S) \quad (\text{III.6})$$

Avec  $k$  un coefficient strictement positif. Il suffit maintenant de choisir la loi de commande pour que la loi de convergence (III.6) soit vérifiée. Pour cela, reprenons la fonction de Lyapunov (III.5), sa dérivée est donnée par :

$$\dot{V} = S\dot{S}$$

$$= S(\lambda\dot{e} + \ddot{e})$$

$$= S(\lambda e + f(x_1, x_2) + b(x_1, x_2)u - \ddot{x}_d)$$

Ainsi, pour que (III.4) soit vérifiée, il suffirait que

$$\lambda\dot{e} + f(x_1, x_2) + b(x_1, x_2)u - \ddot{x}_d = -k \times \text{sign}(S) \quad (\text{III.8})$$

Ce qui conduit à la commande

$$u = \frac{-1}{b(x_1, x_2)} (\lambda\dot{e} + f(x_1, x_2) - \ddot{x}) - \frac{1}{b(x_1, x_2)} k \times \text{sign}(S) \quad (\text{III.9})$$

De (III.9) , nous constatons que la loi de commande est divisée en deux termes de natures différentes [10]. L'un de nature continue, appelé commande équivalente et correspond à :

$$u_{eq} = \frac{-1}{b(x_1, x_2)} (\lambda\dot{e} + f(x_1, x_2) - \ddot{x}) \quad (\text{III.10})$$

L'autre, de nature discontinue, est appelé commande discontinue et correspond à :

$$u_{swi} = -\frac{1}{b(x_1, x_2)} k \times \text{sign}(S) \quad (\text{III.11})$$

L'interprétation du rôle de chacun de ces termes est différente : lorsque la surface de glissement est atteinte, la commande discontinu s'annule théoriquement (puisque  $\text{sign}(0) = 0$ ) et seul le terme équivalent de la loi de commande subsiste. Nous déduisons alors que le rôle de  $u_{eq}$  est de garder le vecteur d'état sur la surface de glissement lorsque celle-ci est atteinte. Par ailleurs, le rôle du terme discontinu  $u_{swi}$  est principalement de vérifier la condition d'atteinte (III.4), et donc de guider le vecteur d'état vers la surface de glissement.

Afin de généraliser la démarche de synthèse d'un contrôleur par mode de glissement, considérons maintenant le système mono variable d'ordre  $n$  suivant:

$$\dot{X} = F(t, X) + B(t, X)u \quad (\text{III.12})$$

avec  $X = [x \dot{x} \dots x^{(n-1)}]$ ,  $B(t, X) = [0 \ 0 \dots b_n(t, X)]^T$  et  $F(t, X) = [x \ \dot{x} \dots x^{(n-1)} f_n(t, X)]^T$

Où  $f_n$  et  $b_n$  sont deux fonctions non linéaires, et  $b_n$  est inversible. Notons  $X_d = [x_d \ x_d^{(1)} \dots x_d^{(n-1)}]^T$  le vecteur de la trajectoire de référence et de ses dérivées successives. Posons  $E = X - X_d$  le vecteur erreur d'état.

Avec ces notations, nous pouvons choisir la fonction de glissement suivante :

$$S = C^T E \quad (\text{III.13})$$

Avec  $C^T = [c_1 c_2 \dots c_n]$  et  $c_n \neq 0$ . Les coefficients  $c_i$  doivent être choisis de sorte que le système est un comportement stable dans le sous-espace d'état  $S = 0$  et qu'il puisse converger vers la point d'équilibre.

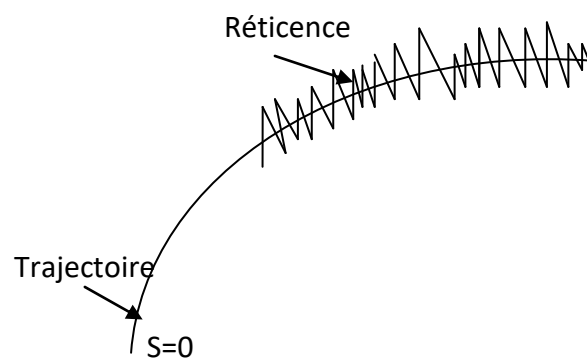
En suivant un développement similaire à ce qu'a précédé, nous déduisons la loi de commande suivante :

$$u = \frac{1}{(c_n \cdot b_n)} C^T (\dot{X}_d - F) - \frac{1}{(c_n \cdot c_b)} k \times \text{sign}(S) \quad (\text{III.14})$$

### III.7. broutement :

Un régime glissant idéal requiert une commande pouvant commuter à une fréquence infinie. Ainsi, durant le régime glissant, les discontinuités appliquées à la commande peuvent entraîner un phénomène de broutement, appelé réticence ou "chattering" en anglais. Celui-ci se caractérise par de fortes oscillations des trajectoires du système autour de la surface de

glissement (figure (III.2)). Les principales raisons à l'origine de ce phénomène sont les limitations des actionneurs ou les retards de commutation au niveau de la commande. Ces commutations détériorent la précision de la commande et peuvent s'avérer néfastes pour l'organe de commande en provoquant une détérioration prématurée des systèmes mécaniques et une élévation de température dans les systèmes électriques (perte d'énergie non négligeable)[10]



**Figure III.2 :** Phénomène de broutement.[11]

### III.8. Suppression du phénomène de réticence :

Dans le but de réduire ou d'éliminer ce phénomène, de nombreuses solutions ont été proposées, comme la solution de couche limite, mode glissant flou, mode glissant d'ordre supérieur, etc....

#### III.8.1. Commande signe :

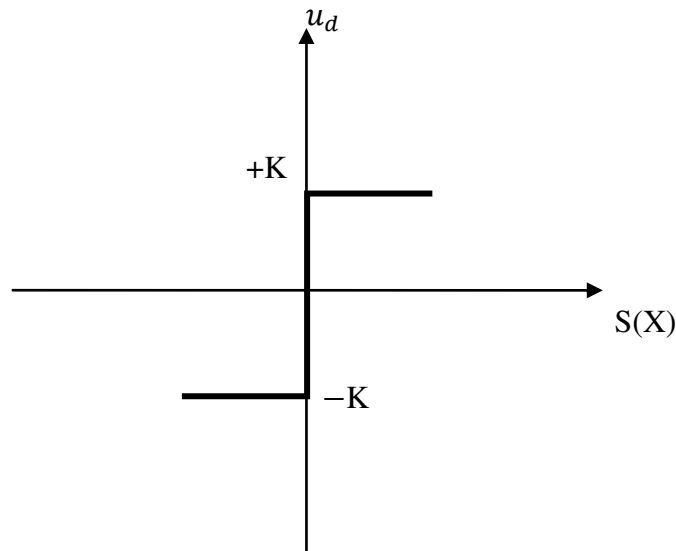
Plusieurs choix pour la commande discontinue  $u_d$  peuvent être faits. Le plus simple consiste à exprimer la commande discontinue  $u_d = [u_1, u_2, \dots, u_d]$  avec la fonction signe par rapport à  $S = [S_1, S_2, \dots, S_d]$ .

$$\begin{cases} \text{sign}(S(x)) = +1 \text{ si } S(x) > 0 \\ \text{sign}(S(x)) = -1 \text{ si } S(x) < 0 \end{cases} \quad (\text{III.15})$$

$u_d$  s'exprime donc comme suit :

$$u_d = k \cdot \text{sign}(s(x)) \quad (\text{III.16})$$

Ou k est un gain positif.



**Figure III.3 :** Fonction signe

Le gain k est choisi positif pour satisfaire la condition :

$$\dot{S}S \leq -K|S|; \quad K > 0 \quad (\text{III.17})$$

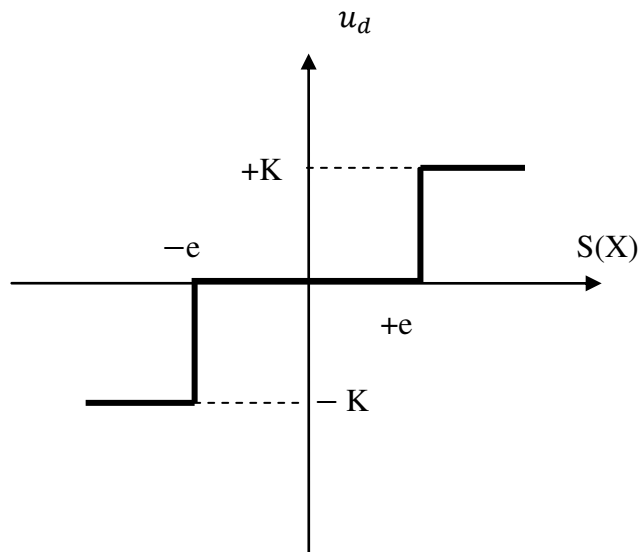
le choix de ce gain est très influent car s'il est très petit le temps de réponse sera très long, et s'il est choisi très grand, nous aurons des fortes oscillations au niveau de l'organe de commande .ces oscillation peuvent exciter les dynamiques négligées (phénomène de broutement).

### III.8.2 Commande avec un seul seuil :

Cette commande est caractérisé par un seuil  $e$  (figure III.4) .dans la bande qui entoure la surface de glissement  $S(X)$ , seule la composante continue  $u_{eq}$  de la tension de commande qui agit .la partie discontinue  $u_d$  étant égale à zéro, les oscillations sur les réponse fortement atténuées. Cependant lorsque  $e$  augmente, il apparait un écart statique sur la réponse en régulation .la commande discontinue a l'expression suivante :

$$\begin{cases} u_d = 0 & \text{si } |s(x)| < e \\ u_d = k \cdot \text{sign}(s(x)) & \text{si } |s(x)| > e \end{cases} \quad (\text{III.18})$$

Ce choix de la fonction discontinue est représenté sur la figure ci-dessous :



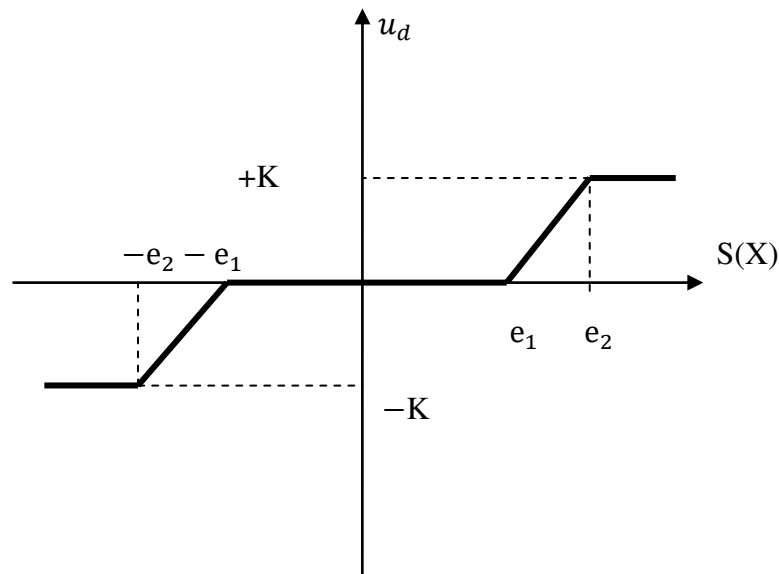
**Figure III.4** : Fonction signe avec un seul seuil

Ce type de commande n'est pas très utilisé car, outre le problème d'erreur statique, en présence d'une perturbation,  $u_d$  intervient avec toute sa valeur et des oscillations peuvent persister en régime permanent. Un adoucissement de la commande  $u_d$  est donc nécessaire.

### III.8.3 Commande adoucie :

Dans le but de diminuer progressivement la valeur de la commande  $u_d$  en fonction de la distance entre la trajectoire de la variation à régler et la surface de glissement, on doit encadrer la surface par une bande avec un ou deux seuils.

On peut distinguer trois zones qui dépendent de la distance du point à la surface de glissement. Si la distance est supérieure au seuil  $e_2$ , alors la fonction signe est activée. Si la distance est inférieure au seuil  $e_2$ , alors  $u_d$  est nulle (zone morte). Si le point est dans la bande  $(e_1, e_2)$ , alors  $u_d$  est une fonction linéaire de la distance droite de pente  $(\frac{k}{e_2 - e_1})$ .



**Figure III.5 :** Fonction signe adoucie

Dans cette méthode d'adoucissement utilisée pour limiter les oscillations, plus le seuil est grand, moins il y a des commutations. Néanmoins s'il est trop important, il y a problème de précision. En effet le système va évoluer dans la bande et risque donc de ne jamais atteindre le point désiré.

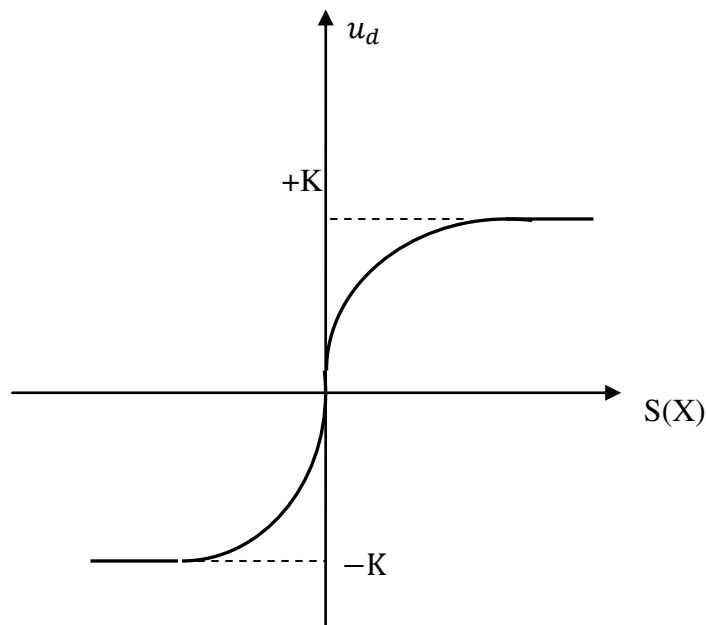
#### III.8.4 Commande intégrale :

Les oscillations de haute fréquence qui apparaissent sur les réponses en régime glissant peuvent être évitées en rendant continue la commande discontinue  $u_d$ . Pour cela, on remplace la fonction signe par la fonction intégrale.

$$u_d = k \frac{s(x)}{|s(x)|+1} \quad (\text{III.19})$$

Où  $l$  est un paramètre définissant le degré d'atténuation des oscillations. Lorsque  $l$  tend vers zéro, on tend vers la même commande discontinue défini par (III.15). La fonction  $u_d$  continue est illustrée sur la figure (III.6).





**Figure (III.6) :** Fonction intégrale.

Pour augmenter la précision de la réponse du système, on peut utiliser une commande continue incluant une composante intégrale qui devient active lorsque le point est proche de la surface.

En général, le compensateur intégral diminue l'erreur en régime permanent, mais il est souvent indésirable pour les régimes transitoires brusques, car il provoque des oscillations supplémentaires sur la réponse. La commande  $u_d$  dans ce cas devient :

$$u_d = k \frac{s(x)}{|s(x)|+h} \quad (\text{III.20})$$

Tel que :  $l = l_0 + |g|$

Avec :

$$\begin{cases} g = g_0 \int s(x) dt & \text{si } |s(x)| < e \\ g = 0 & \text{si } |s(x)| > e \end{cases} \quad (\text{III.21})$$

et

$$\begin{cases} h = h_0 \int S(x) dt & \text{si } |s(x)| < e \\ h = 0 & \text{si } |S(x)| > e \end{cases} \quad (\text{III.22})$$

Où  $l$ ,  $g$  et  $h$  sont des constantes ou paramètres adaptatifs en fonction des références. Ce type de commande est difficile à mettre en œuvre car il y a un grand nombre de paramètres à déterminer.

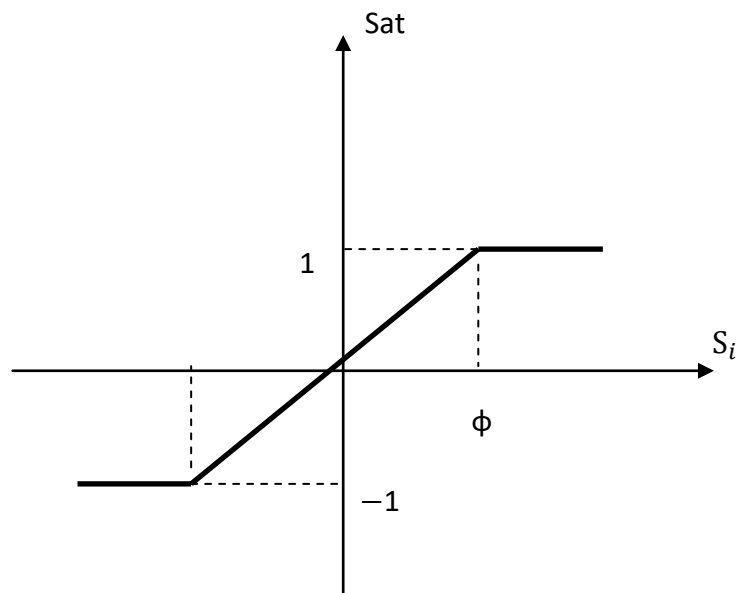
### III.8.5 Commande SAT :

Cette fonction représentée dans la figure (III.7), est définie par :

$$sat(s) = \begin{cases} \frac{s}{\phi} si \left| \frac{s}{\phi} \right| \leq 1 \\ sign\left(\frac{s}{\phi}\right) si \end{cases} \quad (III.23)$$

$u_d S$  exprime donc comme :  $u_d = k sat(s)$

$\phi$  Représente la bande de transition de la surface de glissement.



Figure(III.7) :Définition de la fonction SAT.

### III.9 Commande par modes glissants hiérarchiques des systèmes mécaniques sous-actionnés :

Dans cette partie, nous nous servons de l'approche des modes glissants hiérarchiques, développée dans [12], afin de l'appliquer aux systèmes de pendule inversé rotatif. Dans ce

qui suit nous désignons par couche de glissement une surface de glissement constituée par d'autres surfaces de glissement.

Dans cette approche, le système sous-actionné du pendule inversé rotatif est divisé en deux sous-systèmes en fonction de sa structure physique et la surface de glissement de chaque sous-système. Puis, la surface de glissement d'un sous-système est choisie comme étant la première couche de glissement. Cette première couche est utilisée ensuite avec la surface de glissement d'un autre sous-système, pour construire la seconde couche de glissement..

Cette approche nous permet de dériver facilement une loi de commande stabilisante du système global en utilisant le théorème de stabilité de Lyapunov.

### III.10. Position du problème

Le système non linéaire du pendule inversé rotatif qui a deux degrés de liberté peut être écrit par son modèle d'état suivant [13][14] et [15] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_1(x) + b_1(x)u + d_1(t) \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = f_2(x) + b_2(x)u + d_2(t) \end{cases} \quad (\text{III.24})$$

où  $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$  est le vecteur d'état du système supposé disponible pour la mesure,  $y = [x_1, x_3]^T$  est la sortie du système,  $u$  est l'entrée de commande,  $f_1(x), f_2(x), b_1(x)$  et  $b_2(x)$  sont des fonctions continues non linéaires et  $d_1(t)$  et  $d_2(t)$  sont des perturbations externe bornées (c'est à dire  $|d_1(t)| \leq d_{1M}$  et  $|d_2(t)| \leq d_{2M}$  où  $d_{1M}$  et  $d_{2M}$  sont des constantes positives connues, et  $u$  est l'entrée de commande.

**Hypothèse :** Les gains de commande  $b_1(x)$  et  $b_2(x)$  sont continus bornés et non nuls.

**Objectif :** Notre objectif est de développer une loi de commande unique  $u$  pour commander simultanément les états  $(x_1, x_2)$  et  $(x_3, x_4)$  pour atteindre les performances souhaitées.

Les surfaces de glissement de chaque sous-système sont définies par :

$$s_1 = c_1 x_1 + x_2 \quad (\text{III.25})$$

$$s_2 = c_2 x_3 + x_4 \quad (\text{III.26})$$

Avec :  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes positives.

Si les fonctions  $f_1(x), f_2(x), b_1(x)$  et  $b_2(x)$  sont connues exactement, on définit la commande équivalente pour chaque sous-système comme suit :

$$u_{eq1} = -\frac{f_1(X)+c_1x_2}{b_1(X)} \quad (III.27)$$

$$u_{eq2} = \frac{-f_2(x)+c_2x_4}{b_2(X)} \quad (III.28)$$

Puisque l'objectif est de concevoir une loi de commande unique  $u$  qui assure la convergence de  $x_1(t)$  et  $x_3(t)$  respectivement vers les valeurs désirées  $x_{d1}$  et  $x_{d3}$ , c'est-à-dire, les deux erreurs  $e_1(t)$  et  $e_2(t)$  convergent vers zéro quand  $t \rightarrow \infty$ , il est évident que les deux lois de commande équivalentes (III.27) et (III.28) ne peut pas assurer cet objectif, car chacune d'eux est conçue uniquement pour stabiliser le sous-système correspondant.

Pour atteindre cet objectif dans le cas où la dynamique du système est connue, nous considérons la loi de commande idéale par mode de glissement suivante :

$$u = u_{eq1} + u_{eq2} + u_{sw} \quad (III.29)$$

Où  $u_{sw}$  est la partie de commande discontinue du la mode glissement

une surface de glissement de deuxième niveau est défini comme suit :

$$S = \alpha s_1 + \beta s_2 \quad (III.30)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des paramètres de mode glissant qui peuvent rester constants ou changer en fonction de condition différentes.

Nous décrivons ci-après la loi de commande de discontinue selon le théorème de stabilité de Lyapunov.

### Analyse de la stabilité

Considérons la fonction candidate de Lyapunov suivante :

$$V = \frac{1}{2} S^2 \quad (III.31)$$

Par dérivation, on obtient :

$$\begin{aligned} V &= S\dot{S} = \dot{S}(\alpha\dot{s}_1 + \beta\dot{s}_2) \\ &= S [\alpha(c_1\dot{x}_2 + \dot{x}_2) + \beta(c_2\dot{x}_3 + \dot{x}_4)] \\ &= S [(\alpha(c_1x_2 + f_1 + b_1(u_{eq1} + u_{eq2} + u_{sw})) + d_1) + \beta(c_2x_4 + f_2 + b_2(u_{eq1} + u_{eq2} + u_{sw})) + d_2] \\ &= S [\alpha b_1(u_{eq2} + u_{sw}) + \beta b_2(u_{eq1} + u_{sw}) + \alpha d_1 + \beta d_2] \end{aligned}$$

$$=S[(\beta b_2 u_{eq1} + \alpha b_1 u_{eq2}) + u_{sw}(\beta b_2 + \alpha b_1) + \alpha d_1 + \beta d_2] \quad (\text{III.32})$$

$$\text{on a: } u_{sw}(\beta b_2 + \alpha b_1) + (\beta b_2 u_{eq1} + \alpha b_1 u_{eq2}) = -\eta \text{sgn}(S) - kS$$

où  $\eta$ ,  $k$  sont des constantes positives.

alors la loi de commande discontinu  $u_{sw}$  est définie comme suit :

$$u_{sw} = -(\alpha b_1 + \beta b_2)^{-1}(\beta b_2 u_{eq1} + \alpha b_1 u_{eq2}) = -\eta \text{sgn}(S) - kS$$

De cette manière, la loi de commande discontinu  $u_{sw}$  et la loi de commande totale  $u$  du système de commande sont données par :

$$u_{sw} = -\frac{\beta b_2}{\alpha b_1 + \beta b_2} u_{eq1} - \frac{\alpha b_1}{\alpha b_1 + \beta b_2} u_{eq2} - \eta^* \text{sgn}(S) - k^* S \quad (\text{III.33})$$

$$u = u_{eq1} + u_{eq2} + u_{sw}$$

$$= u_{eq1} + u_{eq2} - \frac{\beta b_2}{\alpha b_1 + \beta b_2} u_{eq1} - \frac{\alpha b_1}{\alpha b_1 + \beta b_2} u_{eq2} - \eta^* \text{sgn}(S) - k^* S$$

$$= -\frac{\beta b_1}{\alpha b_1 + \beta b_2} u_{eq1} - \frac{\beta b_2}{\alpha b_1 + \beta b_2} u_{eq2} - \eta^* \text{sgn}(S) - k^* S \quad (\text{III.34})$$

$$\text{Où } \eta^* = (\alpha b_1 + \beta b_2)^{-1} \eta, \quad k^* = (\alpha b_1 + \beta b_2)^{-1} k.$$

En utilisant (4.42),  $\dot{V}$  devient :

$$\dot{V} = \eta |S| - ks^2 + S(\alpha d_1 + \beta d_2) \leq -\eta |S| ks^2 + |S| |\alpha d_1 + \beta d_2| \quad (\text{III.35})$$

qui peut être bornée comme suit

$$\dot{V} \leq -ks^2 - |S| (\eta - |\alpha d_1 + \beta d_2|) \leq -ks^2 - (\eta - D_M) |S| < 0 \quad (\text{III.36})$$

On considère  $D_M = \sup_{t \geq 0} |\alpha d_1(t) + \beta d_2(t)|$ , il est clair que, sous la condition  $\eta > D_M$  on peut conclure la convergence de  $S$  vers zéro.

### III.11. Analyse de stabilité de $S_1$ et $S_2$

D'un point de vue de la propriété des points d'équilibre, il existe deux types de systèmes sous-actionnés. L'un a un point d'équilibre stable, tel que le pont roulant, l'autre, un point d'équilibre instable, tel que le Pendubot.

Nous devons prouver la stabilité asymptotique des surfaces de glissement pour un point d'équilibre instable.

Examinons maintenant la stabilité asymptotique des deux surfaces de glissement  $S_1$  et  $S_2$

**Théorème :** Considérons le modèle du pendule inversé rotatif (III.1), la loi de commande proposée (III.17) garantit que les deux surfaces de glissement convergent asymptotiquement vers une région ajustable.

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_0 s_1 s_2 \geq 0 \\ -\alpha_0 s_1 s_2 < 0 \end{cases} \quad (\alpha_0 > 0) \quad (\text{III.52})$$

Preuve : Partie 1 : D'abord nous prouvons  $s_1 \in L_2, s_2 \in L_2$ , i. e.

$$\int_0^\infty s_1^2 d\tau < \infty, \int_0^\infty s_2^2 d\tau < \infty$$

a partir de (20),

$$\int_0^\infty S^2 d\tau = (\alpha s_1 - s_2)^2 d\tau$$

$$\int_0^\infty (x^2 s_1^2 + 2x s_1 s_2 + s_2^2) d\tau < \infty \quad (\text{III.53})$$

Dans le même temps, il est évident que

$$\int_0^\infty 2\alpha s_1 s_2 d\tau \leq \int_0^\infty (\alpha^2 s_1^2 + s_2^2) d\tau \quad (\text{III.54})$$

Alors on trouve

$$4\alpha s_1 s_2 d\tau \leq \int_0^\infty S^2 d\tau < \infty \quad (\text{III.55})$$

Maintenant, (III.52) existera aussi longtemps que nous garantissons que le côté gauche de (III.55) est supérieur à zéro en choisissant la valeur de  $\alpha$ . Il est évident que nous pouvons obtenir (III.52) si on choisit  $\alpha \geq 0$  lorsque  $s_1 s_2 \geq 0$ .

Maintenant, nous discutons de la condition que  $s_1 s_2 < 0$ . à partir de l'analyse de la stabilité précédent. Nous pouvons constater que le choix de la valeur de  $\alpha$  n'influence pas sur la stabilité de la surface de glissement de second niveau  $S$ . Nous pouvons donc choisir  $\alpha = -\alpha_0$  lorsque  $s_1 s_2 < 0$ . donc  $\alpha s_1 s_2 = \alpha_0 s_1 s_2 > 0$ .

En résumé, si nous choisissons  $\alpha$  comme suit :

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_0 s_1 s_2 \geq 0 \\ -\alpha_0 s_1 s_2 < 0 \end{cases} \quad (\alpha_0 > 0)$$

On peut toujours obtenir (III.52).

Partie 2: Maintenant nous prouvons que  $s_1 \in L_\infty, \dot{s}_1 \in L_\infty, s_2 \in L_\infty, \dot{s}_2 \in L_\infty$ . à partir de (III.36) on peut obtenir  $s \in L_\infty$  en même temps à partir de (III.38) on peut aussi obtenir  $S \in L_\infty$  parce que le choix de  $\alpha$  garantie que  $s_2 \in L_\infty$  on peut obtenir  $s_1 \in L_1; \dot{s}_2 \in L_1$ ; c'est à dire.

$$\sup_{t \geq 0} |s_1| = \|s_1\|_\infty < \infty, \sup_{t \geq 0} |s_2| = \|s_2\|_\infty < \infty \quad (\text{III.56})$$

D'après (III.25), on trouve

$$\dot{s}_1 = c_1 \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = c_1 \dot{x}_1 + f_1 + b_1 u + d_1(t) \quad (\text{III.57})$$

Puisque toutes les variables du côté droit de (41) sont bornées,  $\dot{s}_1$  est borné, c'est-à-dire  $\dot{s}_1 \in L_\infty$ , à partir de (III.29), nous pouvons obtenir  $\dot{s}_2 \in L_\infty$ , Parce que nous avons prouvé  $\dot{s}_1 \in L_2, \dot{s}_2 \in L_2$ , selon le lemma de Barbalat on trouve que  $\lim_{t \rightarrow \infty} s_1 = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} s_2 = 0$  c'est-à-dire que les surfaces de glissement de premier niveau convergent asymptotiquement vers zéro.

La loi de commande s'écrit suit :

$$u = -\frac{\beta b_1}{\alpha b_1 + \beta b_2} u_{eq1} - \frac{\beta b_2}{\alpha b_1 + \beta b_2} u_{eq2} - \eta^* \text{sgn}(S) - k^* S$$

### III.12. Résultat de simulation

La résultat de simulation a été fait pour des conditions initiales différentes puis avec l'application d'un signal de perturbation aléatoire.

L'algorithme de résolution utilisé est celui de Runge-kutta d'ordre 4 avec un pas de simulation de 0.001s.

Les paramètres de désigne du contrôleur

$\alpha$	$\beta$	$b_1$	$b_2$	$\eta$
0.1	0.9	1.8	2	0.01

#### Test1 :

Dans ce test on utilise les conditions initiales suivantes  $[\dot{\alpha} \alpha \theta \dot{\theta}] = [\pi/4 \ 0 \ 5 \ 0]$ . La figure (III.8) montre l'évolution du signal de commande PID, la position et la vitesse angulaire de  $\theta$  et  $\alpha$ , les surfaces  $s_1, s_2, s$  et le signal de commande par MG. On remarque que le contrôleur mg parvient à stabiliser les deux états du pendule inversé rotatif.

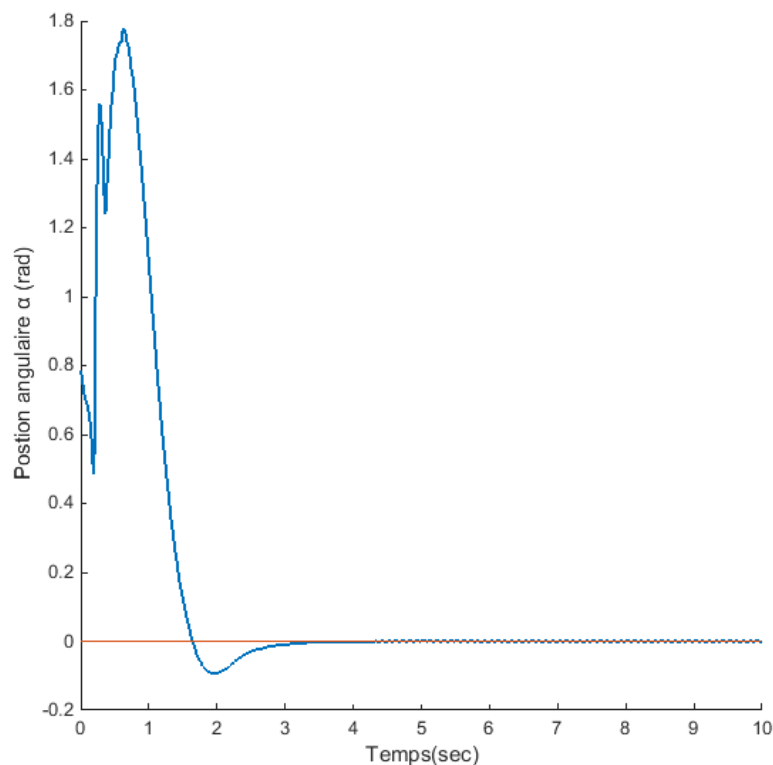
#### Test2 :

Dans ce test on utilise les conditions initiales suivantes  $[\dot{\alpha} \alpha \dot{\theta} \theta] = [\pi \ 0 \ 5 \ 0]$ . La figure (III.9) montre l'évolution du signal de commande PID, la position et la vitesse angulaire de  $\theta$  et  $\alpha$ , les surfaces  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s$  et le signal de commande par mode glissant. On remarque que malgré le changement de condition initial le contrôleur mode glissant parvient stabiliser les deux états du pendule inversé rotatif.

### Test 3 :

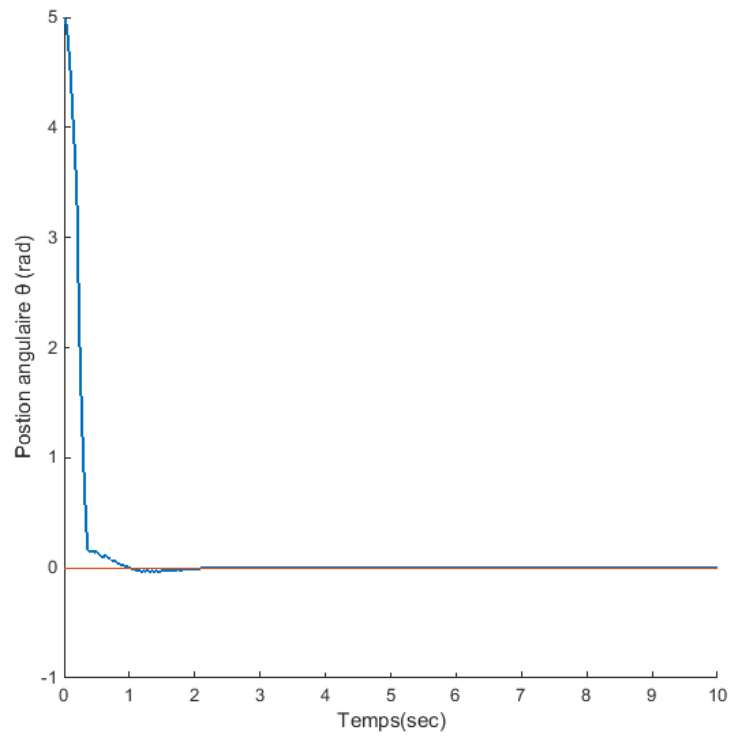
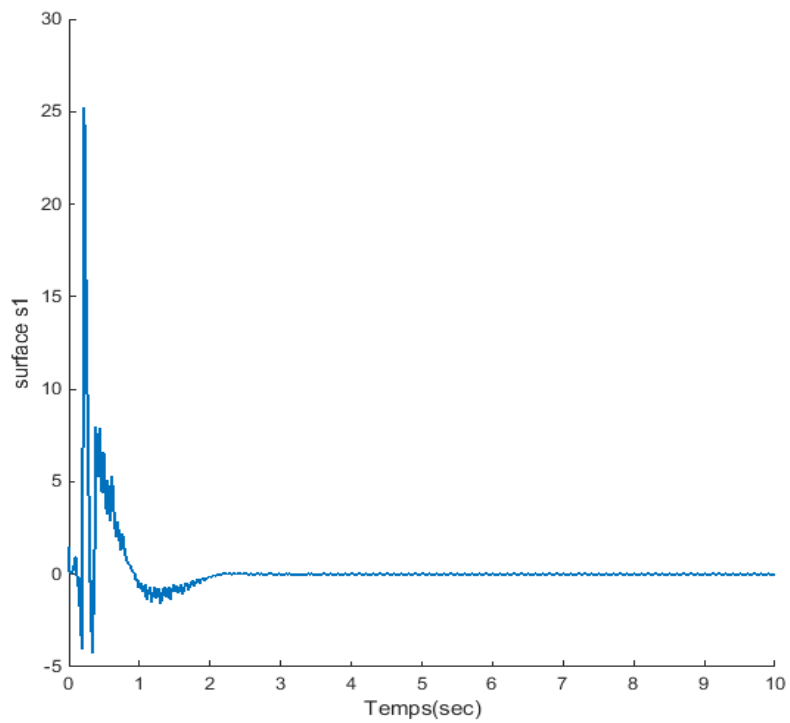
Dans ce test on propose d'utiliser les conditions initiales suivantes  $[\dot{\alpha} \alpha \dot{\theta} \theta] = [\pi \ 0 \ 5 \ 0]$  et d'appliquer une perturbation de type gaussienne de moyen de 0.01 durant l'intervalle  $T = [5 \ 6]$ . La figure (III.10) montre l'évolution du signal de commande PID, la position et la vitesse angulaire de  $\theta$  et  $\alpha$ , les surfaces  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s$  et le signal de commande par MG.

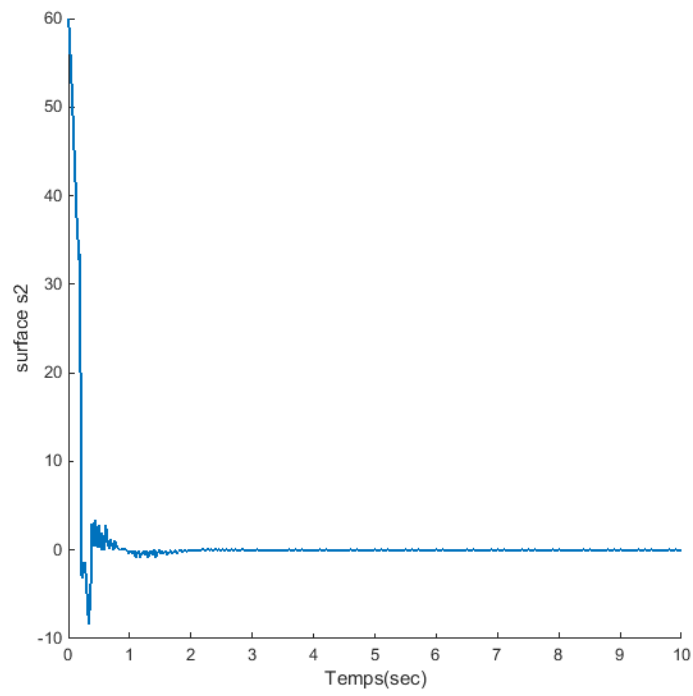
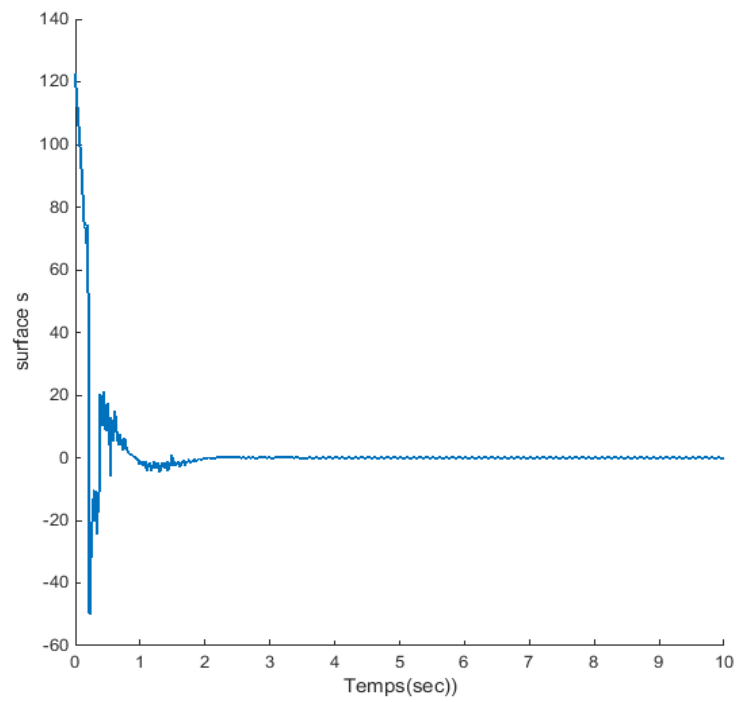
On remarque que le correcteur arrive à stabiliser le pendule même en présence de la perturbation externe.

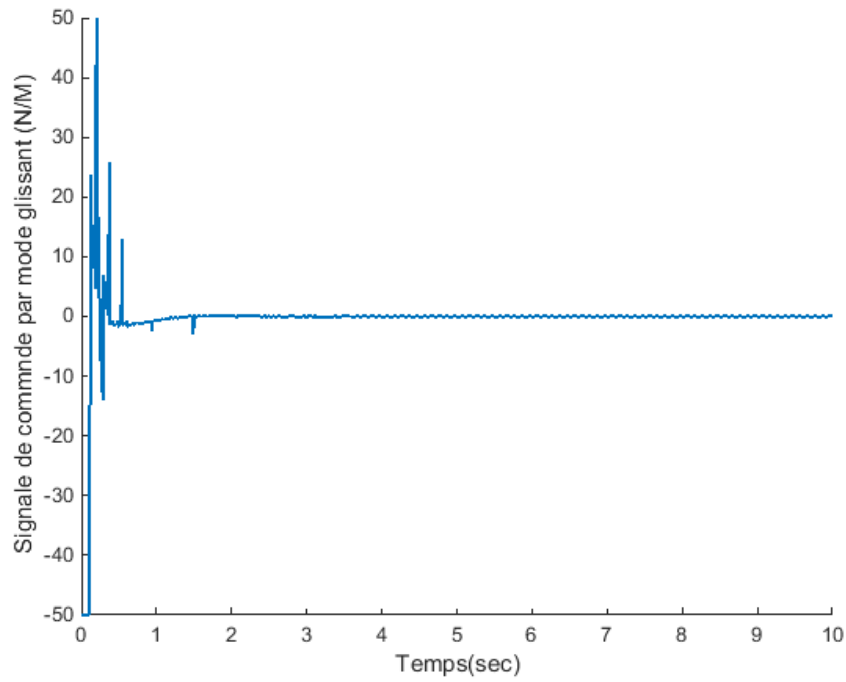


(a) évolution de position angulaire  $\alpha$

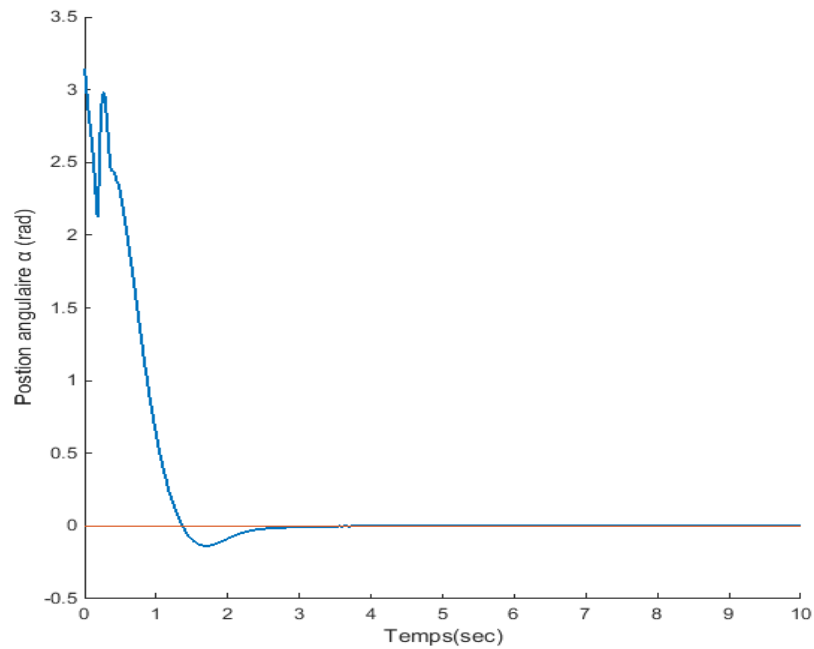


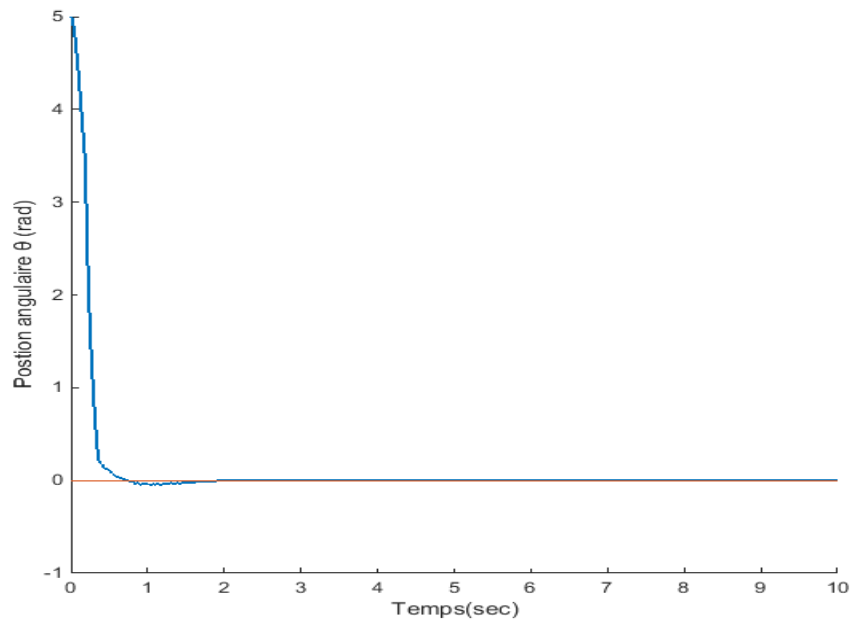
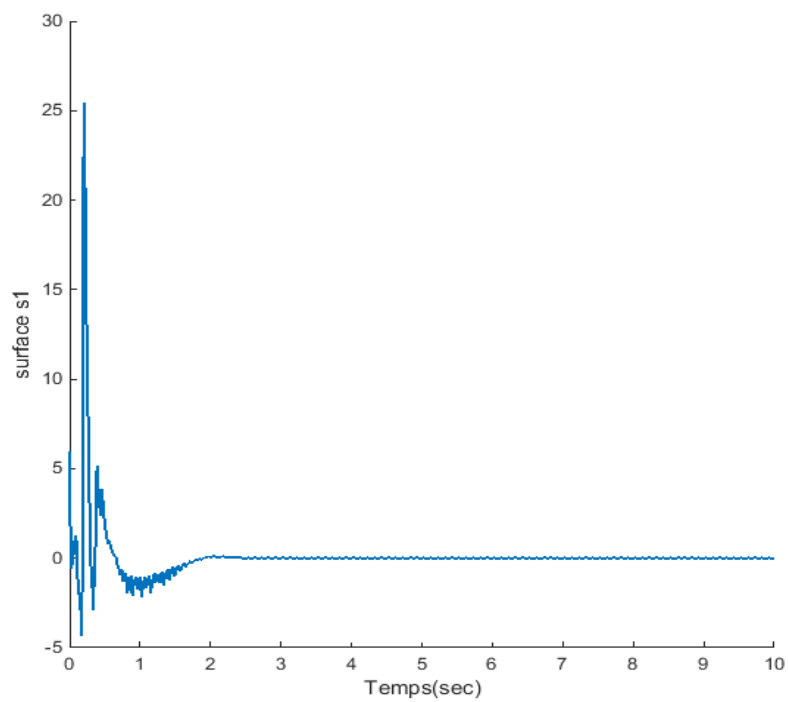
(b) évolution de position angulaire  $\theta$ (c) Surface  $s_1$

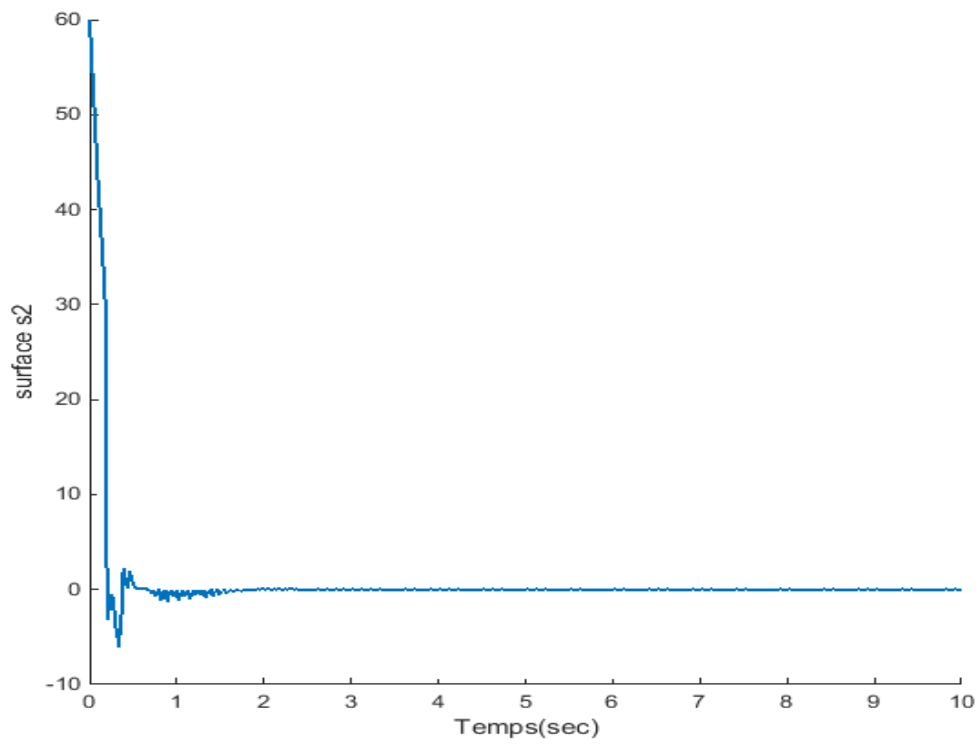
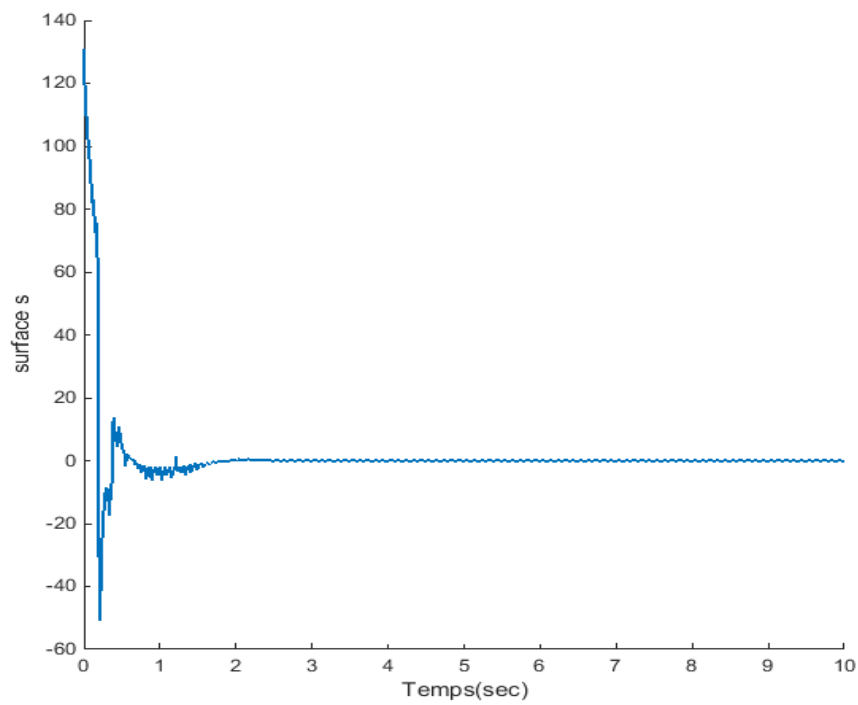
(d)Surface  $s_2$ (e)Surface  $S$

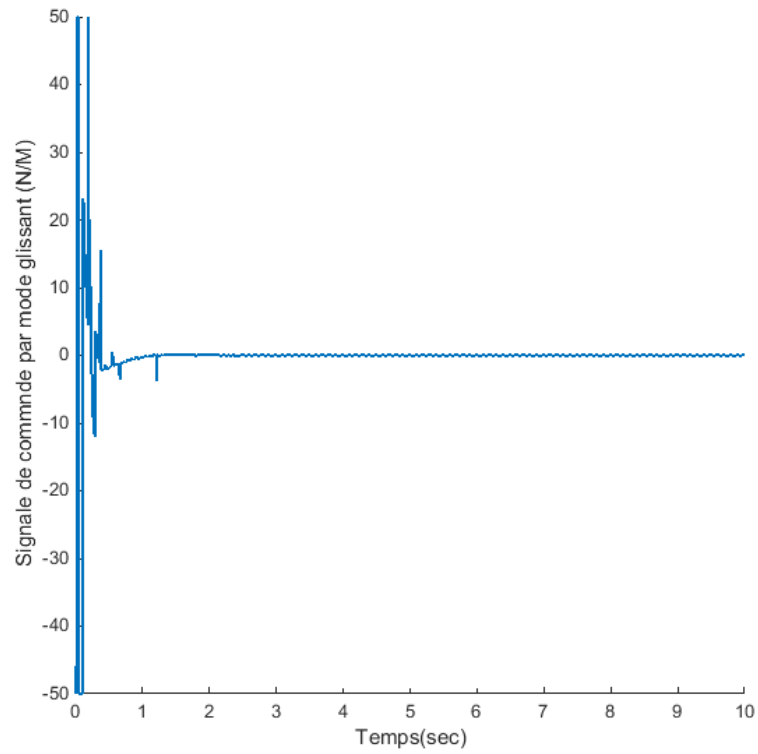
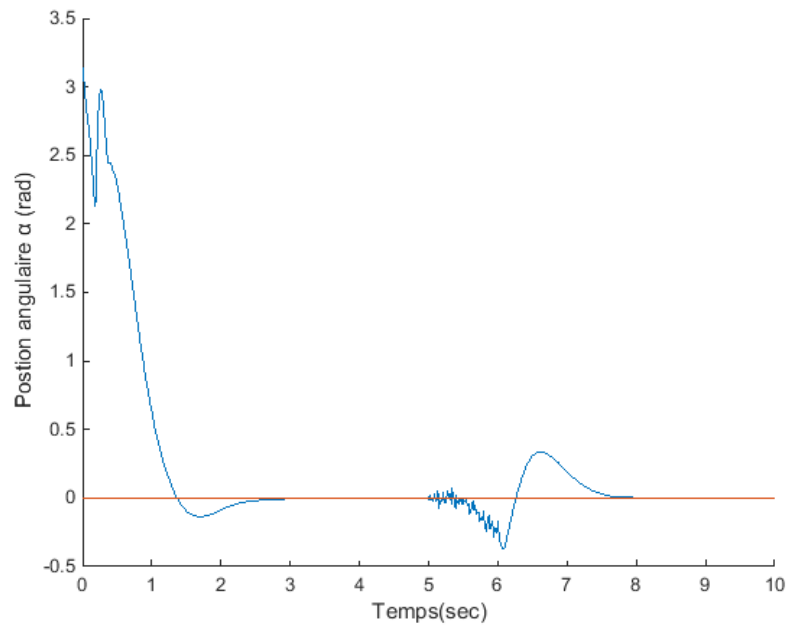
(f) évolution de  $\alpha$  signal de commande  $u$ 

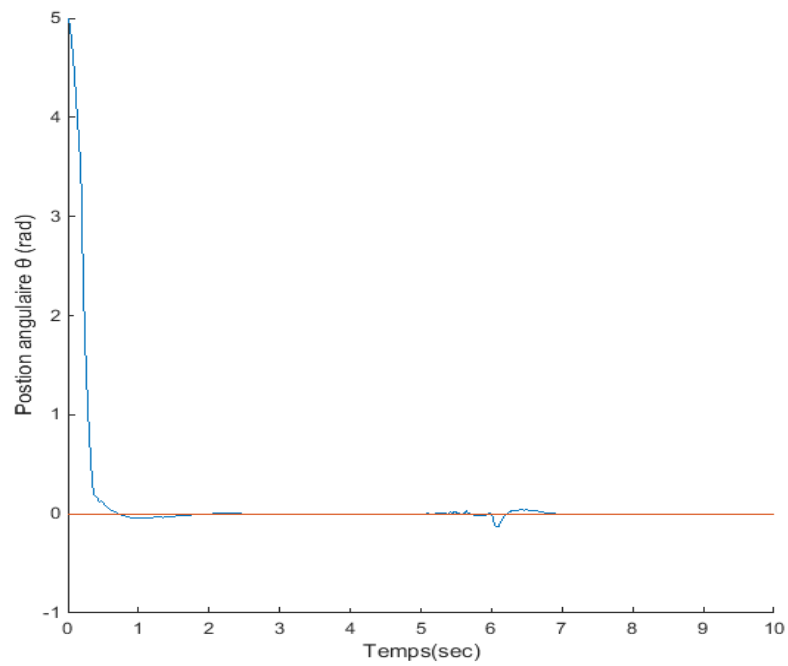
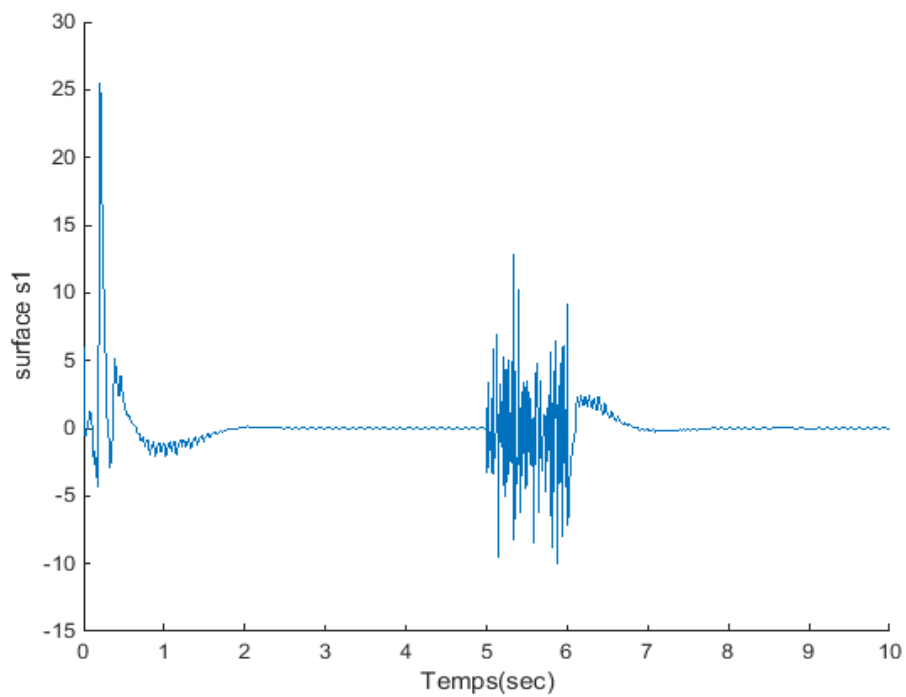
**Figure(III.8) :** Evolution de  $\alpha, v_\alpha, \theta, v_\theta$  et lesignal de commande par mode glissant pour Le test1

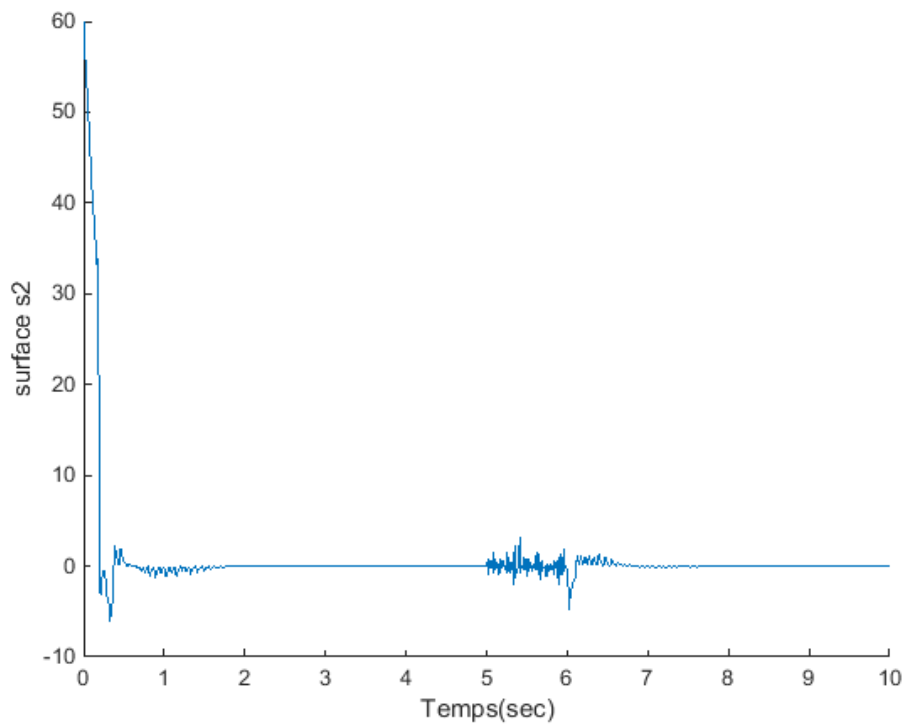
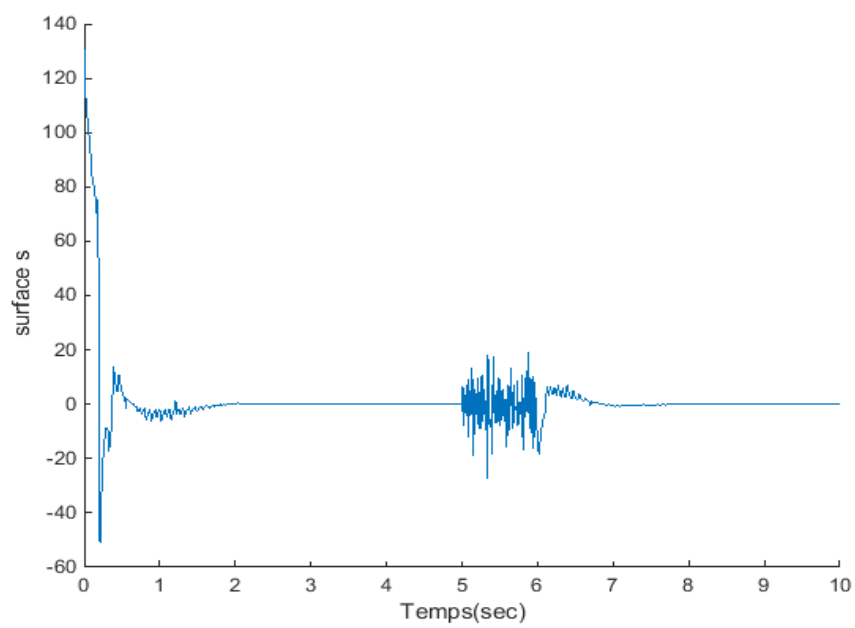
(a) évolution de position angulaire  $\alpha$

(b) évolution de position angulaire  $\theta$ (c) surface  $S_1$

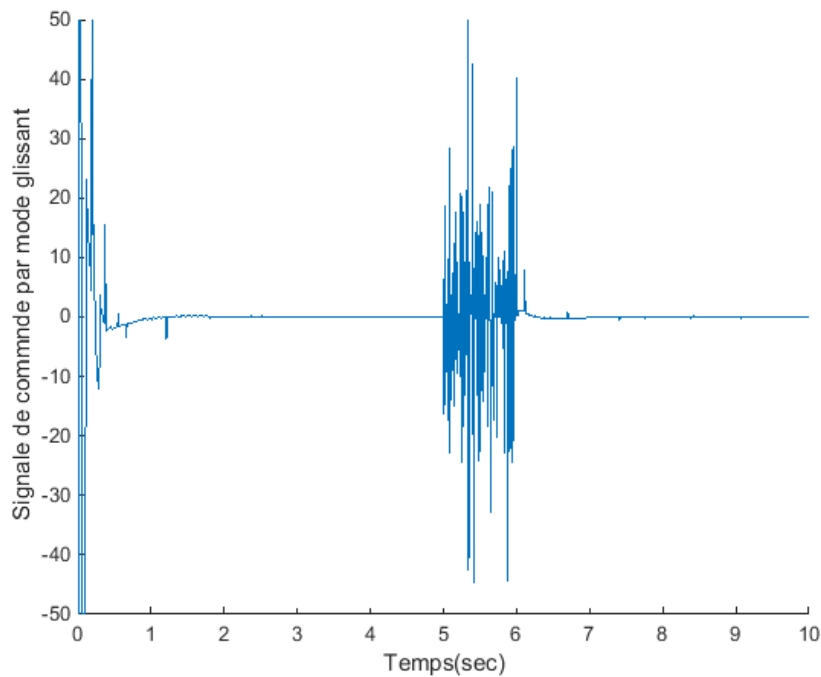
(d) surface  $S_2$ (e) surface  $S$

(f) évolution de  $\alpha$  signal de commande  $u$ **Figure(III.9)** : Evolution de  $\alpha, v_\alpha, \theta, v_\theta$  et le signal de commande par mode glissant pour Le test 2(a) évolution de position angulaire  $\alpha$

(b) évolution de position angulaire  $\theta$ (c) surface  $S_1$

(d) surface  $S_2$ (e) surface  $S$



(f) Evolution de  $\alpha$  signal de commande u

**Figure(III.10) :** Evolution de  $\alpha, v_\alpha, \theta, v_\theta$  et le signal de commande par mode glissant pour Le test 3

### III.13. Interprétation des résultats de simulation

Le résultat de simulation nous montre que contrairement, l'utilisation de la commande swing up, l'utilisation de la commande de mode glissant peut stabiliser les deux états du pendule inversé rotatif ( $\alpha$  et  $\theta$ ) pour n'importe quel condition initial.

### III.14. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons appliqué une commande mode glissant hiérarchique pour stabilisation du pendule inverse rotatif présenté dans le premier chapitre. Dans le premier une brève introduction à la commande par mode glissement a été présentée, puis une commande par mode de glissement hiérarchique est développée afin de stabiliser du pendule. La validation numérique de cette loi de commande a été présentée à la fin de chapitre.

Les résultats de simulation illustrent l'efficacité de la commande par mode de glissant ; les trajectoires réelles convergent rapidement vers les trajectoires désirées avec une erreur très petite.

## Conclusion générale

Le pendule inversé rotatif (Furuta) est un problème académique typique en ce qui concerne la commande de systèmes non linéaires. Ainsi, nous avons pu développer des contrôleurs non linéaires pour tenter de commander ce système. Les objectifs que nous nous sommes donnés pour ce projet sont de stabiliser le pendule vers le haut et de réussir à le faire monter s'il part initialement vers le bas.

L'objectif de l'étude présentée dans ce mémoire est d'appliquer une commande PID, une commande swing-up (commande d'énergie) et une commande de mode glissant hiérarchique afin de stabiliser un pendule inversé rotatif qui est un système non linéaire, instable, et sous-actionné.

A partir des résultats de simulation obtenus, nous avons trouvé que le contrôleur de mode glissant était le plus performant aux autres commandes en ce qui concerne la stabilisation du pendule et l'aptitude de commander des deux états de système ( $\alpha$  et  $\theta$ ) en même temps.

Dans le premier chapitre, nous avons donné une brève introduction sur le pendule inversé, le pendule inversé rotatif, les domaines d'utilisation et le principe de fonctionnement de ce dernier, puis, nous avons établi le modèle non linéaire du pendule inversé rotatif en se basant sur le formalisme d'Euler-Lagrange. En fin, un modèle non linéaire de ce système a été défini et écrit sous forme d'espace d'état.

Dans le second chapitre, au début, un résumé sur les différentes structures de la commande PID classique a été présenté. Puis, nous avons utilisé une commande PID classique pour stabiliser le pendule inversé rotatif présentée dans le premier chapitre, Ensuite une commande d'énergie non linéaire « swing-up control » a été ajoutée à la commande PID pour traiter le comportement du système complètement. En fin, un test de simulation numérique a été effectué pour montrer l'efficacité des commandes utilisées.

Le dernier chapitre a été réservé à l'application d'une commande de type mode de glissement au système de pendule inversé rotatif. Dans le premier une brève introduction à la commande par mode glissement a été présentée, puis une commande par mode de glissement hiérarchique a été développée afin de stabiliser le pendule inversé rotatif. En fin, un test de simulation numérique a été effectué pour montrer l'efficacité des commandes utilisées.

## Bibliographie

- [1] A. Djoudi , T. Benabdellah, ‘‘synthèse et Application des lois de commande nonlinéaires sur un pendule inverse’’, Mémoire d’Ingénieur , Ecole Nationale Polytechnique, 2007.
- [2] Jong H. Park and Kyoung, ‘‘Biped robot walking using gravity-compensated inverted pendulum mode and computed torque control ‘’. International Conference on Robotics and Automation, Belgium, 1998.
- [3] J.Apkarian, M. Lévis, ‘‘QUBE-Servo Experiment for lab VIEW’’, Users doncument , Canada 2013.
- [4] Quanser Inc. of National Instruments, 2016
- [5] P. Prouvost, Automatique-Contrôle et régulation 2/e: Cours, exercices et problèmes corrigés, Dunod, 2010.
- [6] K. Furuta, M. Yamakita, et S. Kobayashi, ‘‘Swingup control of invertedpendulum,’’ International Conference on Industrial Electronics, Control and Instrumentation, Oct 1991, p. 2193–2198 vol.3.
- [7] M. Gäfvert. (1998, avril) Modelling of the Furuta Pendulum. Lund Institute of Technology.
- [8] Shailaja Kurode , Asif Chalanga , B. Bandyopadhyay Design of a stable sliding-mode controller for a class of second-order underactuated systems
- [9] Dianwei Qian, Jianqiang Yi and Dongbin Zhao ‘‘Hierarchical sliding mode control for a class of SIMO under-actuated systems’’, Control and Cybernetics, 2008.
- [10] Thierry FLOQUET. « Contributions a la commande par modes glissants d'ordre supérieur », thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lille, 20 Décembre 2000.
- [11] Y. Bekakra. «Etude et commande du moteur asynchrone à double alimentation (MADA) par différentes techniques avancées», Mémoire de Magister, Centre Universitaire d’El-Oued, 2010
- [12] M.Ch.Sosse ALAOUI, ‘‘Commande et Observateur par modes glissants d’un système de pompage et d’un bras manipulateur’’ Thèse de Doctorat national. Université Sidi Mohammed Ben Abdellah, Fès, 2009.
- [13] F. Nafa, S. Labiod et H. Chekireb, «Direct adaptive fuzzy sliding mode decoupling control for a class of underactuated mechanical systems,» Turkish Journal of Electrical Engineering & Computer Sciences, vol. 21, n° 16, pp. 1615-1630, 2013.
- [14] M. Spong, «Underactuated mechanical systems,» Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 230, pp. 135-150, 1998.
- [15] N. Cherrat et B. Hamid, «An adaptive fuzzy PID control for a class of uncertain nonlinear underactuated systems,» 8th International Conference on Modelling, Identification and Control (ICMIC-2016), Algiers, Algeria, 2016.
- [16] W.Wang, J. Yi, D. Zhao,D. Liu Design of a stable sliding-mode controller for a class of second-order under actuated systems.

- [17] Ferhat LAHOVAZI , " Mise en œuvre d'une stratégie de commande neuro floue :Application à un pendule inversé" , Mémoire de Magister ,UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU

## Web graphie

[18] <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1474667015316049>

[19] <http://www.onera.fr/dcsd/gyrodynes/>