

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur  
Et de la Recherche Scientifique

*N d'ordre : .....*  
*Série : .....*



Université de Mohammed  
Seddik Ben Yahia - JIJEL

FACULTE DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE  
DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

SPECIALITE : Electronique

**THESE**

Présentée par  
**Mahmoud ARBID**

Pour obtenir le Diplôme de Doctorat en Sciences

---

**Modélisation, estimation et synthèse  
des systèmes complexes en réseaux**

---

Soutenu le 24/11/2016, devant le jury d'examen composé de :

<b>Mr. K. KEMIH</b>	<i>Prof.</i> Université MSB JIJEL	<b>Président</b>
<b>Mr. A. BOUKABOU</b>	<i>Prof.</i> Université MSB JIJEL	<b>Rapporteur</b>
<b>Mr. S. LADACI</b>	<i>Prof.</i> ENP Constantine	<b>Examineur</b>
<b>Mr. D. BOUDJEHEM</b>	<i>MCA.</i> Université de Guelma	<b>Examineur</b>

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



*A la mémoire de mon père,*

*A ma mère,*

*A mes soeurs,*

*A mon frère,*

*A ma femme,*

*Sans oublier mes deux mousquetaires Abdelmadjid et Ziad,  
et a tous ceux qui ont contribué un jour à notre éducation et  
formation...*

*Je dédie ce travail.*

# Remerciements

*Avant tout, je tiens à remercier Dieu qui m'a donné la force et la volonté pour réaliser cette modeste thèse. J'ai eu le plaisir et la chance de travailler sous l'orientation de M<sup>r</sup> A. Boukabou, Professeur à l'Université de MSB Jijel. Je tiens à lui exprimer toute ma reconnaissance de m'avoir proposé un sujet d'actualité et à diriger un tel travail. Il m'a fait profiter en toute sympathie et une grande compétence. Je lui suis également très reconnaissant de m'avoir partagé tous les outils et la documentation nécessaire ainsi que ses conseils précieux durant toute cette période.*

*Je tiens ensuite à remercier M<sup>r</sup> K. Kemih, Professeur à l'Université de MSB Jijel, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider mon jury de thèse. Je présente également, mes sincères remerciements à M<sup>r</sup> S. Ladaci, Professeur à l'ENP de Constantine, M<sup>r</sup> D. Boudjehem, Maître de conférences à l'Université de Guelma, et qui ont bien voulu me faire l'honneur d'examiner ce travail et d'être membres du jury.*

*Enfin je remercie toutes les personnes ayant participé de loin ou de près à ce travail, qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.*

## ملخص

ظهور علم الشبكات باعتبارها مجالاً أساسياً من الدراسة في تصميم نموذج لعدد كبير من النظم التحليلية أو تلك التي من العالم الحقيقي. وظهور الرسوم البيانية الثلاثة وقد أحدثت ثورة في الرسم البياني العشوائي والرسم البياني للعالم الصغير زيادة على التي هي من دون مقياس في هذه الشبكات، وسيلة لدراسة، تحليل وعلاج هذه الشبكات. في هذه الأطروحة، ونحن مهتمون في دراسة الشبكات مع خصائص من دون مقياس والصفات التي غالباً ما تكون شبكات ديناميكية معقدة. رأينا، يمكن تصنيف البحوث في هذا المجال إلى ثلاث فئات: التصميم، التقدير والتحليل. سنتطرق لحل مشاكل مع كل منهم طوال هذه الأطروحة.

في الفصلين الأولين تم استعراض الدراسات السابقة واللازمة. حيث تم عرض الشبكات الديناميكية المعقدة في الفصل 1، مع العلم أنها تتكون من العقد الفوضوية، وهو المبدأ المحدد بدوره في الفصل 2. الفصول 3، 4 و5، تتم معالجة مشكلة معينة أين نقترح حل لكل منهم. في الفصل 3، ويشمل طريقة التحكم عن طريق التثبيت، حيث أننا سنتطرق بالتفصيل الى كيفية توفير المعالم المناسبة لتوجيه مسار الفوضى لكل عقدة من الشبكة الدينامية إلى نقطة الاستقرار. ويخصص الفصل 4 إلى تحسين في الفصل السابق، وهي طريقة تقوم على السيطرة التنبؤية. وفي الفصل الأخير، فإننا نقترح امتداداً للطريقة OGY الأصلية لتحقيق الاستقرار في مدارات دورية غير مستقرة في فوضى عقد الشبكة الديناميكية. وأخيراً، نستنبط خلاصة من هذه الأطروحة زيادة الى اقتراح بعض اتجاهات البحوث المستقبلية على أساس اجتهادنا.

# Résumé

La Science des Réseaux est apparue comme un domaine d'étude essentiel pour modéliser un nombre important de systèmes synthétiques ou ceux du monde réel. L'apparition des trois graphes à savoir, le graphe aléatoire et le graphe petit-monde et celui invariant d'échelle dans ces réseaux a révolutionné la façon d'étudier, d'analyser, de modéliser et de traiter ces réseaux. Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'étude des réseaux ayant ces propriétés d'invariants d'échelles et qui sont souvent qualifiés de réseaux dynamiques complexes. Notre point de vue, les recherches menées dans ce domaine peuvent être regroupées en trois catégories : la modélisation, l'estimation et la synthèse. Nous abordons des problèmes relatifs à chacune d'elles tout au long de cette thèse.

Les deux premiers chapitres introduisent l'état de l'art nécessaire aux lecteurs. Les différents réseaux dynamiques sont présentés au chapitre 1, sachant qu'ils se composent de nœuds chaotiques ; un principe, qui est à son tour défini dans le chapitre 2. Les chapitres 3, 4 et 5, abordent chacun un problème spécifique auquel nous proposons une solution. Dans le chapitre 3, on regroupe la méthode du contrôle épinglant, où on va détailler comment fournir les paramètres appropriés, afin d'orienter la trajectoire chaotique de tous les nœuds du réseau dynamique vers le point de stabilité. Le chapitre 4 sera consacré à une amélioration par rapport au chapitre précédent, une méthode qui se base sur le contrôle prédictif. Dans le dernier chapitre, nous propo-

sons une extension de la méthode OGY originale, pour la stabilisation des orbites périodique instables, dans un réseau dynamique à nœuds chaotiques. Et enfin, nous concluons cette thèse en proposant quelques futurs axes de recherche basés sur nos travaux.

# Abstract

Network Science has emerged as a critical area to model a large number of synthetic systems or those of the real world. The appearance of the three graphs namely, the random graph, the small-world graph and scale-free in these networks have revolutionized the way to study, analyze, model and treat these networks. In this thesis, we are interested in the study of networks with scale-free properties and qualities that are often dynamical complex network. Our view, research in this area can be classified into three categories : modeling, estimation and synthesis. Throughout this thesis and in each chapter we study problems relating to the previous categories.

The first two chapters introduce the necessary background knowledge required for readers. The different dynamic networks are presented in Chapter 1, knowing that they consist of chaotic nodes, a principle which in turn defined in Chapter 2. Chapters 3, 4 and 5, each addressing a specific problem we propose a solution. In Chapter 3, the method includes pinning control, where we provide the appropriate parameters to guide the chaotic trajectory of all nodes of the dynamical network to the stability point. Chapter 4 is devoted to an improvement for the obtained results of the previous chapter, a method based on predictive control. In the last chapter, we propose an extension of the original OGY method to stabilize unstable periodic orbits in different types of chaotic dynamical network nodes. Finally, we conclude this thesis by proposing some future research directions based on our work.

# Table des matières

	Page
<b>REMERCIEMENTS</b> .....	<b>vi</b>
<b>RÉSUMÉ</b> .....	<b>vii</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>ix</b>
<b>LISTE DES TABLEAUX</b> .....	<b>xiii</b>
<b>TABLE DES FIGURES</b> .....	<b>xiv</b>
<b>ABRÉVIATIONS</b> .....	<b>xix</b>
 <b>CHAPITRE</b>	
<b>INTRODUCTION GÉNÉRALE</b> .....	<b>1</b>
<b>1. RÉSEAUX COMPLEXES : ETAT DE L'ART</b> .....	<b>4</b>
1.1 Introduction .....	4
1.2 Historique sur les réseaux .....	5
1.3 Science des réseaux .....	7
1.4 Développement des réseaux réels : Les réseaux complexes .....	8
1.5 Propriétés des réseaux .....	9
1.5.1 Longueur moyenne du trajet .....	9
1.5.2 Coefficient de groupement .....	10
1.5.3 Degré de distribution .....	11
1.6 Modèles de réseaux complexes .....	12

1.6.1	Les réseaux aléatoires ER (Erdős et Renyi) .....	13
1.6.2	Les réseaux petit-monde .....	15
1.6.3	Réseaux invariants d'échelle .....	16
1.6.3.1	Modèle de réseau BA invariant d'échelle .....	18
1.7	La vulnérabilité de l'infrastructure .....	20
1.7.1	Scénarios de menaces dans un réseau électrique .....	20
1.7.2	La vulnérabilité, la robustesse et la résistance .....	21
1.7.3	Grandes perturbations connues dans les réseaux électriques .....	22
1.7.4	Le talon d'Achille des réseaux invariants d'échelle .....	23
1.8	Conclusion .....	26
<b>2.</b>	<b>THÉORIE DU CHAOS .....</b>	<b>27</b>
2.1	Introduction .....	27
2.2	Définition .....	27
2.3	Caractéristiques du chaos .....	28
2.4	Méthodes de stabilisation des systèmes chaotiques .....	30
2.4.1	La méthode de contrôle OGY .....	30
2.4.2	Méthode de Pyragas .....	30
2.5	L'attracteur étrange .....	31
2.6	Application expérimentales sur le contrôle des systèmes chaotiques .....	33
2.7	Conclusion .....	34
<b>3.</b>	<b>CONTRÔLE DU TYPE "PINNING" DES RÉSEAUX DYNAMIQUES COMPLEXES À NŒUDS CHAOTIQUES .....</b>	<b>36</b>
3.1	Introduction .....	36
3.2	Caractéristiques du réseau dynamique .....	36
3.3	Conditions de stabilité de pour la synchronisation complète des réseaux dynamiques complexes .....	37
3.4	Réseau dynamique simplifié .....	39
3.5	Méthode de contrôle .....	41
3.6	Résultats de simulations .....	43
3.7	Conclusion .....	47
<b>4.</b>	<b>CONTRÔLE DES RÉSEAUX DYNAMIQUES COMPLEXES .....</b>	<b>48</b>
4.1	Introduction .....	48
4.2	Choix du réseau .....	49

4.3	Domaines d'application .....	49
4.4	Contribution .....	51
4.5	Description d'un model de réseau invariant d'échelle .....	52
4.6	Méthodes de contrôle des réseaux dynamiques complexes .....	52
4.6.1	Algorithme de contrôle .....	53
4.6.2	Contrôle prédictif globale .....	56
4.6.2.1	Réseau invariant d'échelle à nœuds chaotiques de type Chua .....	56
4.6.2.2	Réseau invariant d'échelle à nœuds chaotiques de type Chen .....	63
4.6.3	Contrôle robuste du type Pinning des RDCs invariants d'échelle .....	66
4.6.3.1	Contrôle d'un RDC à nœuds chaotiques de type Chua .....	71
4.6.3.2	Contrôle d'un RDC à nœuds chaotiques de type Chen .....	71
4.7	Conclusion .....	74
<b>5.</b>	<b>CONTRÔLE DES RÉSEAUX DYNAMIQUES COMPLEXES D'ORDRE ÉLEVÉ .....</b>	<b>77</b>
5.1	Introduction .....	77
5.2	Développement des RDCs D'ordre élevé .....	77
5.3	Méthode de contrôle d'ordre élevé .....	79
5.4	Application aux réseaux de systèmes d'ordre élevé .....	81
5.4.1	Réseaux de systèmes d'ordre élevé de type Chen .....	81
5.4.2	Réseaux de systèmes d'ordre élevé de type Rössler .....	84
5.5	Conclusion .....	93
	<b>CONCLUSION GÉNÉRALE .....</b>	<b>95</b>
	<b>A. MODEL DE BARABÁSI-ALBERT .....</b>	<b>98</b>
	<b>B. MODÈLE DE WATTS-STROGATZ .....</b>	<b>100</b>
	<b>C. MODÈLE D'ERDŐS-RENYI .....</b>	<b>102</b>
	<b>BIBLIOGRAPHIE .....</b>	<b>104</b>

# Liste des tableaux

Table	Page
2.1 Exemples d'émergences dans quelques systèmes complexes .....	30
4.1 Les 10 premiers nœuds et leurs nombre de connexions d'un réseau invariant d'échelle généré.....	70
5.1 Les résultats de l'influence des changements paramétriques sur la variation des variables d'état pour certains nœuds de types Chen .....	84
5.2 Les résultats de l'influence des changements paramétriques sur la variation des variables d'état pour certains nœuds de types Rössler .....	91

# Table des figures

Figure	Page
1.1 Nœud en gras est relié à quatre Voisins directs.....	4
1.2 Carte de Königsberg au temps d'Euler : schéma réel de disposition des sept ponts.....	5
1.3 Représentation abstraite du pont de Königsberg.....	7
1.4 Concept de base d'une distribution de liens en réseau.....	11
1.5 Distribution de Poisson du nombre de liens dans les réseaux ER avec une forme caractéristique autour du nombre moyen de liens par nœud.....	13
1.6 Illustration de la procédure d'évolution du modèle de graphe aléatoire binomiale en fonction de $p$ . ....	14
1.7 Illustration de la procédure de connexion aléatoire d'un réseau petit monde, par Watts et Strogatz.....	15
1.8 Type de RDC. (a) Modèle Aléatoire. (b) Modèle petit monde. (c) Modèle invariant d'échelle. ....	17
1.9 (a) Histogramme et (b) Distribution géométrique de degré dans le réseau.....	18
1.10 Développement du réseau invariant d'échelle, pour $N=10$ . ....	19
1.11 Rupture accidentelle de nœuds dans un réseau aléatoire. ....	23
1.12 Rupture accidentelle de nœuds dans un réseau invariant d'échelle. ....	24
1.13 Attaque ciblée de supernœuds dans un réseau invariant d'échelle. ....	24

2.1	Attracteur de Lorenz. ....	32
2.2	Constitution d'un système complexe .....	34
3.1	Attracteur de Chen : nœud n°01. ....	40
3.2	Représentation d'un réseau invariant d'échelle de type Chen, avec N=50 nœuds. ....	42
3.3	Représentation d'un seul nœud du réseau invariant d'échelle de type Chen. ....	42
3.4	02 super-nœuds épinglés dans un réseau de 50 nœuds généré par le modèle de BA invariant d'échelle : (a) $\gamma=0.01$ , (b) $\gamma=5$ , (c) $\gamma=10$ , (d) $\gamma=15$ et $d=1000$ . ....	43
3.5	06 super-nœuds épinglés dans un réseau de 50 nœuds généré par le modèle de BA invariant d'échelle : (a) $\gamma=0.01$ , (b) $\gamma=5$ , (c) $\gamma=10$ , (d) $\gamma=15$ et $d=1000$ . ....	44
3.6	Convergence de stabilisation du réseau en fonction de l'augmentation du nombre de nœuds épinglés. ....	45
3.7	Convergence du plus petit nœud dans un réseau de 50 nœuds généré par le modèle de BA invariant d'échelle. ....	46
4.1	Attracteur de Chua : nœud n°50. ....	58
4.2	Représentation d'un réseau invariant échelle de type Chua, avec N=50 nœuds. ....	59
4.3	Représentation d'un seul nœud du réseau invariant d'échelle de type Chua. ....	59
4.4	Contrôle prédictif du circuit de Chua au point d'équilibre $\bar{x}_1$ , pour un seul nœud. ....	61
4.5	Contrôle prédictif du circuit de Chua au point d'équilibre $\bar{x}_1$ , pour 50 nœuds. ....	62
4.6	Contrôle prédictif du RDC de type Chua au point d'équilibre $\bar{x}_2$ , pour un seul nœud. ....	63
4.7	Contrôle prédictif du RDC de type Chua au point d'équilibre $\bar{x}_2$ , pour 11 nœuds. ....	64

4.8	Contrôle prédictif du RDC de type Chua au point d'équilibre $\bar{x}_3$ , pour un seul nœud. ....	65
4.9	Contrôle prédictif du RDC de type Chua au point d'équilibre $\bar{x}_3$ , pour 39 nœuds. ....	66
4.10	Contrôle prédictif du RDC de type Chen au point d'équilibre $\bar{x}_2$ , pour un seul nœud. ....	67
4.11	Contrôle prédictif du RDC de type Chen au point d'équilibre $\bar{x}_2$ , pour 25 nœuds. ....	67
4.12	Contrôle prédictif du RDC de type Chen au point d'équilibre $\bar{x}_3$ , pour un seul nœud. ....	68
4.13	Contrôle prédictif du RDC de type Chen au point d'équilibre $\bar{x}_3$ , pour 25 nœuds. ....	68
4.14	Super-nœuds et leurs connexions dans un réseau de 50 nœuds. ....	69
4.15	Super-nœuds épinglés : 2 et 3 dans un réseau de 50 nœuds chaotiques de type Chua, avec différentes forces de couplage $\gamma = \{0.01, 0.7,$ $0.9, 1\}$ . ....	72
4.16	Différence de convergence entre deux nœuds chaotiques de type Chua, l'un d'eux épinglé, avec différentes forces de couplage $\gamma = \{0.01,$ $0.7, 0.9, 1\}$ et $\delta=4\%$ . ....	72
4.17	Super-nœuds épinglés : 1,2,3,4,5 et 10 dans un réseau de 50 nœuds chaotiques de type Chua, avec différentes forces de couplage $\gamma$ $= \{0.01, 0.7, 0.9, 1\}$ . ....	73
4.18	Différence de convergence entre deux nœuds chaotiques de type Chua, l'un d'eux épinglé, avec différentes forces de couplage $\gamma = \{0.01,$ $0.7, 0.9, 1\}$ et $\delta=12\%$ . ....	73
4.19	Super-nœuds épinglés : 2 et 3 dans un réseau de 50 nœuds chaotiques de type Chen, avec différentes forces de couplage $\gamma = \{0.01, 5, 10,$ $15\}$ . ....	74
4.20	Différence de convergence entre deux nœuds chaotiques de type Chen, l'un d'eux épinglé, avec différentes forces de couplage $\gamma = \{0.01, 5,$ $10, 15\}$ et $\delta=4\%$ . ....	75

4.21	Super-nœuds épinglés : 1,2,3,4,5 et 10 dans un réseau de 50 nœuds chaotiques de type Chen, avec différentes forces de couplage $\gamma = \{0.01, 5, 10, 15\}$ .	75
4.22	Différence de convergence entre deux nœuds chaotiques de type Chen, l'un d'eux épinglé, avec différentes forces de couplage $\gamma = \{0.01, 5, 10, 15\}$ et $\delta=12\%$ .	76
5.1	Section de Poincaré au 13 <sup>ème</sup> nœud du réseau de système de Chen. (a) $c=28$ et (b) $c=28.1$	82
5.2	Stabilisation de l'OPI souhaité dans le RDC de Chen, pour le (a)=13 <sup>ème</sup> nœud. Temps de réponse et portrait de phase respectivement	83
5.3	Section de Poincaré au 18 <sup>ème</sup> nœud du réseau de système de Chen. (a) $c=28$ et (b) $c=28.1$	85
5.4	Stabilisation de l'OPI souhaité dans le RDC de Chen, pour le (b)=18 <sup>ème</sup> nœud. Temps de réponse et portrait de phase respectivement	85
5.5	Section de Poincaré au 31 <sup>ème</sup> nœud du réseau de système de Chen. (a) $c=28$ et (b) $c=28.1$	86
5.6	Stabilisation de l'OPI souhaité dans le RDC de Chen, pour le (a)=31 <sup>ème</sup> nœud. Temps de réponse et portrait de phase respectivement	86
5.7	Représentation d'un réseau invariant d'échelle de type Rössler, avec $N=50$ nœuds.	88
5.8	Section de Poincaré au 6 <sup>ème</sup> nœud du réseau de système de Rössler. (a) $c=4$ et (b) $c=4.1$	89
5.9	Stabilisation de l'OPI souhaité dans le RDC de Rössler, pour le 6 <sup>ème</sup> nœud. Temps de réponse et portrait de phase respectivement	90
5.10	Section de Poincaré au 13 <sup>ème</sup> nœud du réseau de système de Rössler. (a) $c=4$ et (b) $c=4.1$	91
5.11	Stabilisation de l'OPI souhaité dans le RDC de Rössler, pour le 13 <sup>ème</sup> nœud. Temps de réponse et portrait de phase respectivement	92

5.12	Section de Poincaré au 27 <sup>ème</sup> nœud du réseau de système de Rössler. (a) $c=4$ et (b) $c=4.1$ .....	92
5.13	Stabilisation de l'OPI souhaité dans le RDC de Rössler, pour le 27 <sup>ème</sup> nœud. Temps de réponse et portrait de phase respectivement .....	93

# Abréviations

<i>RDC</i>	Réseau Dynamique Complexe
<i>OPI</i>	Orbite Périotique Instable
<i>OGY</i>	Ott-Grebogi-Yorke
<i>BA</i>	Barabási-Albert
<i>ER</i>	Erdős-Renyi
<i>WS</i>	Watts-Strogatz
$L_c^f$	Constante de Lipschitz
$\gamma$	Coefficient de groupement
$\lambda_{\max}$	Valeur propre maximale
$\Gamma$	Matrice de liaison de 2 variables couplées
$a, b, c, \alpha, \beta$	Paramètres du système chaotique
$\xi$	Distance entre la trajectoire réelle et l'OPI souhaité
$d$	Gain
$G$	Matrice de connexion
$u$	Entrée de commande
$\delta$	Fraction de nœuds épinglés
$N$	Nombre de nœuds dans le réseau
$l$	Nombre de nœuds épinglés
$K$	Paramètre de contrôle

# Introduction générale

Dans le monde réel, la plupart des systèmes peuvent être modélisés comme des réseaux où des exemples courants comprennent des réseaux sociaux, les systèmes de transport et des réseaux biologiques. Un réseau est une représentation abstraite afin de modéliser des relations entre les objets par paires à partir d'un certain recouvrement. Dans la littérature des mathématiques, nous utilisons le terme graphe pour représenter le même concept. Ces objets sont représentés par des cercles appelés nœuds (ou sommets) et leurs relations sont représentées par des lignes appelées bords (degré ou liens). A partir de cette structure mathématique simplifiée, de nombreux systèmes complexes du monde réel peuvent être représentés de manière intuitive [1] (voir la figure (1.1)).

L'analyse et la modélisation des systèmes au monde réel ont données une nouvelle ère de recherche dite science des réseaux. La première intention commença en 1735 Par Leonard Euler avec une solution du problème célèbre des ponts de Königsberg. La première modélisation à était publiée par Erdős et Renye qui expliquaient la théorie des réseaux aléatoires. Or, à l'absence de réseaux bien-définis, les réseaux aléatoires étaient fortement utilisés pour l'exploitation des réseaux. L'axe de recherche continu avec Watts et Strogatz en 1998, qui ont proposés un autre modèle dit petit-monde, se basant sur les travaux de Stanley Milgram en 1960. L'axe suivant qui à révolutionner le monde des réseaux a été élaboré par Barabási et ses collègues en

1999, qui après une étude statistique ont tracés la topologie du world wide web, concluant que quelques nœuds ont beaucoup plus des connexions que d'autres. D'où la génération d'un nouveau modèle dit *réseau invariant d'échelle* avec sa distribution de la loi de puissance au lieu d'une loi de Poisson.

Ce dernier modèle a fait ses preuves dans beaucoup de domaines au monde réel, citées par Barabási et ses collègues. Et plus encore, il fait l'objet de notre étude durant toute cette thèse.

Afin d'étudier un réseau dynamique, ses nœuds prennent un comportement bien-déterminé, or dans notre cas ils sont du type chaotique. Il existe un comportement entre la régularité ferme et l'aspect aléatoire, nommé chaos. En plus d'une variété d'applications dans différents domaines industrielles et commerciales, basées sur les différents comportements chaotiques.

Il existe deux types de systèmes qui relèvent de la théorie du chaos, à savoir les systèmes formels, qui sont définis mathématiquement sous forme d'équations différentielles non linéaires, d'où il est possible de définir rigoureusement l'ensemble de leurs conditions initiales. En plus des systèmes empiriques qui révèlent d'une observation dans le monde réel et c'est le cas le plus intéressant, où ce type de systèmes est quasi-impossible à formaliser, mais qui pourrait être modélisé au moyen d'équations différentielles non linéaires. Or, ces systèmes révèlent aussi de la théorie du chaos. Pour les physiciens, ils sont imprévisibles à cause de leurs sensibilités aux conditions initiales.

A partir de là, on va générer un réseau dynamique complexe, dont les nœuds sont sous une forme d'équations différentielles non linéaires et reliés entre eux à l'aide d'une matrice de connexion.

Notre contribution à travers cette thèse est de proposer et développer une nouvelle approche et méthode, afin de contrôler et stabiliser tous les nœuds chaotiques du

réseau dynamique vers les points d'équilibre instables du système, ou bien vers des trajectoires spécifiques dans le cas des orbites périodiques instables.

Par conséquent, nous avons proposé des solutions liées aux différentes formes de nœuds chaotiques, d'où le développement d'une technique basée sur le contrôle prédictif des réseaux dynamiques complexes continus d'ordre élevé, en plus de généraliser la méthode de contrôle OGY, pour bute de commander de différents types de réseaux dynamiques complexes à nœuds chaotiques.

Le plan de travail est organisé comme suit :

Le chapitre 1 introduit un état de l'art sur les différents types de réseaux, d'où le modèle des réseaux aléatoire traité par les deux mathématiciens Erdős et Renyi. Puis celui du petit-monde, développé par Watts et Strogatz. Jusqu'à arriver au fameux réseau invariant d'échelle, introduit par les deux physiciens Barabási et Albert.

Le chapitre 2 est consacré à l'état de l'art sur la théorie du chaos ; ainsi que les méthodes de contrôle les plus connues, en plus d'un éclaircissement à propos d'un phénomène réel et ça traduction en équations mathématiques.

Au 3eme chapitre, nous allons présenter le modèle mathématique d'un réseau dynamique complexe à nœuds chaotiques, ainsi de lui appliquer une loi de contrôle dite *pinning control* (ou contrôle épinglant), afin de vérifier la stabilité d'un réseau dynamique.

Nous consacrons le chapitre 4, pour aborder une conception intéressante et qui va devoir apportée une amélioration par rapport au *pinning control*. L'application de la méthode va se réaliser sur deux réseaux dynamiques complexes à nœuds chaotiques, de Chua et celui de Chen.

Dans le dernier chapitre, nous proposons une extension de la méthode OGY originale, pour la stabilisation des orbites périodiques instables appliquée au réseau dynamique complexe, à nœuds chaotique de Chen et celui de Rossler.

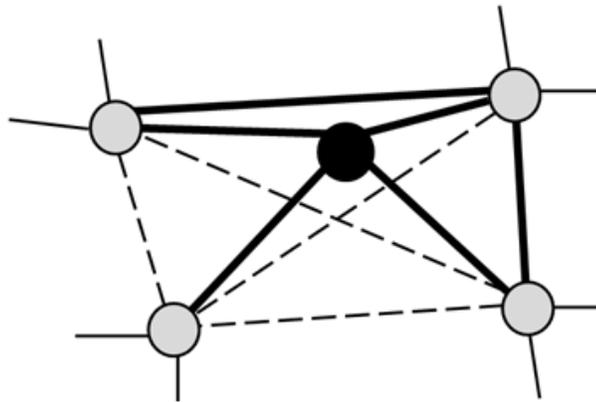
Et nous terminons cette thèse par une conclusion générale et des perspectives.

# Chapitre 1

## Réseaux complexes : Etat de l'art

### 1.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à un état de l'art sur les types de réseaux. Ainsi en va présenter les modèles de réseaux aléatoires  $ER$  qui ont été traités par les deux mathématiciens Paul Erdős et son collègue Alfred Renyi, les réseaux petit-monde par Watts et Strogatz, en plus des réseaux invariants d'échelle  $BA$ , concept introduit par les physiciens Barabási et Albert, aussi bien que leurs caractéristiques principales et les processus pour lesquels ils sont développés.



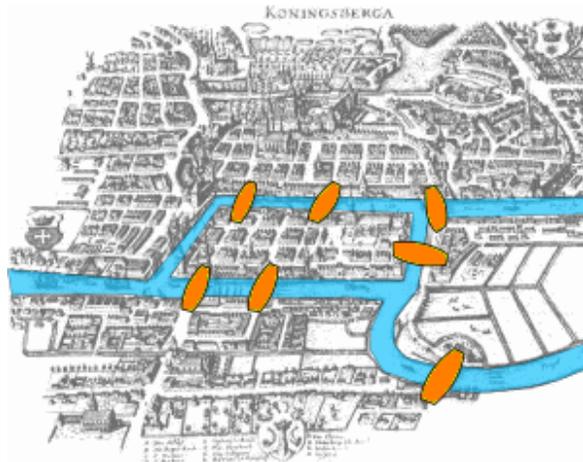
**Fig. 1.1.** Nœud en gras est relié à quatre Voisins directs

## 1.2 Historique sur les réseaux

La modélisation des systèmes au monde réel a donnée la naissance d'un axe de recherche dit science des réseaux. La base de ce dernier remonte à l'année 1735, où Leonhard Euler donna la solution au problème célèbre du pont de Königsberg, considéré comme le premier théorème dans le domaine de la théorie des graphes et la science des réseaux [2].

Le problème des sept ponts de Königsberg est un problème mathématique connu pour être à l'origine de la théorie des graphes. Résolu par Leonhard Euler en 1736, il se présente de la façon suivante :

La ville de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad) est construite autour de deux îles situées sur le *Pregel* et reliées entre elles par un pont. Six autres ponts relient les rives de la rivière à l'une ou l'autre des deux îles, comme représentés sur la figure (1.2). Le problème consiste à déterminer s'il existe ou non une promenade dans les rues de Königsberg permettant, à partir d'un point de départ au choix, de passer une et une seule fois par chaque pont, et de revenir à son point de départ, sachant qu'on ne peut traverser le *Pregel* qu'en passant sur les ponts.



**Fig. 1.2.** Carte de Königsberg au temps d'Euler : schéma réel de disposition des sept ponts

Euler a remarqué que chaque pont ne doit être parcouru qu'une fois, il faut donc autant de ponts pour quitter un quartier que pour y revenir (sinon l'on ne reviendrait jamais au point de départ). Ainsi, la théorie d'Euler dit qu'il est nécessaire que chaque quartier comporte un nombre pair de ponts, ou bien, exactement deux quartiers contiennent un nombre de ponts impair alors que le reste est pair. Or, dans la ville de Königsberg, tous les quartiers sont reliés aux autres par un nombre impair de ponts. Par conséquent, il n'existe pas de cycle Eulérien possible dans cette ville, et le problème de la promenade par les sept ponts n'a pas de solution !

La modélisation par la théorie des graphes est générée par ce qui suit :

**Définition 1** *On appelle degré d'un sommet d'un graphe (non orienté) le nombre d'arêtes partant de ce sommet.*

**Définition 2** *Une chaîne eulérienne est une chaîne passant une et une seule fois par toutes les arêtes du graphe.*

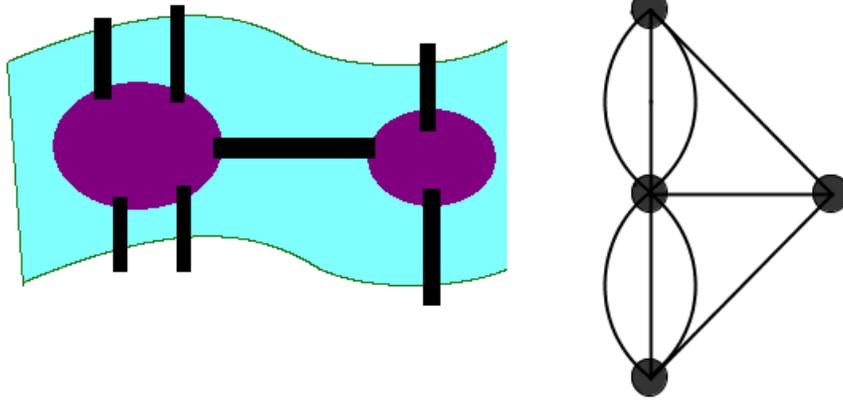
*un cycle eulérien est une chaîne eulérienne dont le sommet de départ et le sommet d'arrivée sont identiques.*

**Théorème 3** *Un graphe connexe possède une chaîne eulérienne si et seulement si ses sommets sont tous de degré pair sauf au plus deux.*

*Un graphe connexe possède un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.*

En particulier et comme présenté dans la figure (1.3), de chaque sommet partent un nombre impair d'arêtes : il y a 4 sommets de degré impair. Ce graphe ne possède donc ni chaîne eulérienne, ni cycle eulérien.

Une simple interprétation a engendrée les bases de la théorie des graphes, qui est devenue un support indispensable des mathématiques discrètes. Cette théorie a boostée indépendamment le développement d'un certain nombre de domaines, a savoir



**Fig. 1.3.** Représentation abstraite du pont de Königsberg.

la sociologie, la chimie, la biologie, la physique et la géographie. Tous ces efforts ont été regroupés récemment avec des théories, principes, algorithmes et mesures, afin d'aboutir à la naissance de la science des réseaux.

### 1.3 Science des réseaux

Les réseaux sont partout. Le cerveau est un réseau de cellules nerveuses reliées par des axones. Les cellules sont elles-mêmes des réseaux de molécules connectées par des réactions biochimiques. Les sociétés représentent un autre type de réseaux, constitués d'individus unis par des liens amicaux, familiaux ou professionnels. A plus grande échelle, les chaînes alimentaires et les écosystèmes sont constitués de réseaux d'espèces. La technologie fournit également son lot de réseaux, avec en premier lieu Internet [3]. Si les réseaux sont omniprésents, leur structure et leurs propriétés sont encore des objets d'étude à défricher : Le développement d'un cancer par les interactions de plusieurs nœuds défaillants d'un réseau génétique complexe ; la rapidité de diffusion d'agents infectieux dans les réseaux informatiques et le fonctionnement de certains réseaux, même après la mise hors service de la plus part de leurs nœuds.

## 1.4 Développement des réseaux réels : Les réseaux complexes

Les idées du petit-monde et les propriétés invariant d'échelle remontent au 18<sup>ème</sup> et 19<sup>ème</sup> siècle, elles ont été rendues populaires récemment avec les travaux des Watts et Strogatz en 1998 [5] et Barabási et Albert en 1999 [6].

Pendant plus de 40 ans, après les travaux de deux précurseurs, le mathématicien hongrois Paul Erdős et son collègue Alfred Renyi, la science a traité les réseaux complexes comme des graphes aux branchements aléatoires. Les réseaux de communication et les réseaux biologiques étaient modélisés par des nœuds reliés au hasard. La simplicité de leurs approches, alliée à l'élégance de certains de leurs résultats, conduisit à l'émergence d'un nouveau domaine d'études : les réseaux aléatoires. Selon une des prédictions de la théorie des réseaux aléatoires : si les liens sont placés au hasard, le système résultant est démocratique : la plupart des nœuds ont approximativement le même nombre de liens. En effet, dans un réseau aléatoire, la fonction mathématique qui représente les nœuds qui ont un nombre de liaisons donné, c'est-à-dire la distribution des liens, a une forme en cloche : c'est une distribution de Poisson. Cela signifie que la majorité des nœuds comprend un nombre de liens proche d'une valeur moyenne et, d'autre part, qu'il n'y a quasiment pas de nœuds ayant très peu ou énormément de liens [3].

Les lois de puissance sont très différentes des distributions de Poisson qui caractérisent les réseaux aléatoires : une loi de puissance ne présente pas de pic, c'est une courbe monotone et décroissante. En coordonnées logarithmiques, une telle loi est représentée par une droite (voir la figure (1.9.b)).

Barabási et Bonabeau dans [3], on construit un programme qui sautait de page Web en page Web et notait tous les liens possibles. Bien que ce robot virtuel n'ait visité qu'une infime fraction de la toile, la carte qu'il a établie a mis en lumière que la cohésion de la toile est assurée par quelques pages très branchées. Plus de 80 pour cent des pages de notre échantillon ont moins de quatre liens, mais une petite minorité,

moins de 0,01 % de tous les nœuds, en a plus de 1000. Une étude ultérieure a même révélé qu'un document est référencé par plus de deux millions de pages, c'est-à-dire que deux millions de pages Web y mènent par un lien hypertexte !

En comptant le nombre de pages ayant  $k$  liens, ils ont découvert que la distribution suit une loi, non de Poisson, mais de puissance : la probabilité qu'un nœud soit connecté à  $k$  autres nœuds est proportionnelle à  $1/k^N$ , où  $N$  est approximativement égal à 2. Ainsi, un nœud quelconque a quatre fois plus de chances d'avoir juste la moitié des liens que d'autres.

L'intérêt récent pour les réseaux invariants d'échelle a commencé en 1999 par le travail de Barabási et ses collègues qui ont tracé la topologie d'une partie du word wide web, constatant que quelques nœuds appelés *HUB*, ont eu beaucoup plus de connexions que d'autres et que les réseaux dans son ensemble ont eu la distribution d'une loi de puissance du nombre de liens. Après une constatation avec d'autres réseaux, y compris quelques réseaux sociaux et biologiques, Barabási et al ont inventé le terme *réseaux invariants d'échelle* pour décrire la classe des réseaux qui montrent une distribution d'une loi de puissance concernant le nombre de liens. Ils ont proposés un mécanisme généralisé pour expliquer l'aspect de distribution d'une loi de puissance, dit : *attachement préférentiel*.

## 1.5 Propriétés des réseaux

Trois concepts ont attirés beaucoup d'attentions à la recherche de réseaux au monde réel et à certaine mesure, ils ont révolutionnés leurs études. A savoir : la longueur moyenne du trajet, le coefficient de groupement et le degré distribution.

### 1.5.1 Longueur moyenne du trajet

A la fin des années 1960, le psychologue américain, Stanley Milgram a mené une série d'expériences qui les a appelés, les expériences du petit-monde [8]. Formellement,

on peut définir la longueur moyenne du trajet comme étant la distance moyenne géodésique (la plus courte) entre des paires des nœuds dans un réseau. Considérons que cette distance est représentée par  $l$ , dont on peut définir mathématiquement ce facteur par la formule suivante

$$l = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{ij} d_{ij} \quad (1.1)$$

où  $d$  est la plus courte distance entre les nœuds  $i$  et  $j$ .  $N$  est le nombre total de nœuds dans le réseau. Nous supposons que la distance entre deux nœuds est égale à 0 s'ils ne sont pas atteints par un autre nœud, et la distance entre un nœud et lui-même est aussi égale à 0 [1].

Pour des réseaux de grande taille, la distance typique géodésique entre deux nœuds quelconques prend une échelle logarithmique du nombre de nœuds, ce qui suggère que la distance moyenne entre deux nœuds quelconques dans le réseau est très faible. Erdős et Renyi ont montré que la distance moyenne dans les graphes aléatoires et aussi à échelles, qui tend vers un nombre de nœuds logarithmique, pour dire ainsi, les graphes aléatoires ont également un effet petit-monde [9].

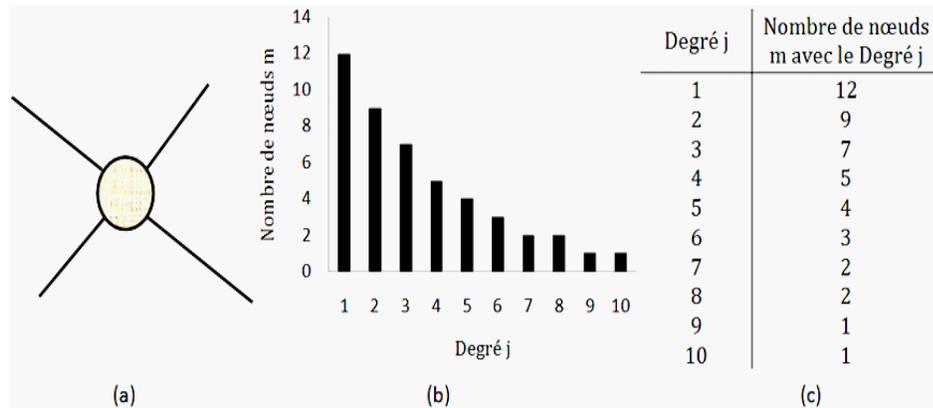
Cette information peut être très utile dans de différents réseaux. Par exemple, étudier la façon de contrôler et de prendre des précautions contre une épidémie se propageant dans les réseaux sociaux [10], la conception des stratégies du marketing et ciblage des clients pour le lancement et la diffusion de nouveaux produits technologiques [11], et toute application technique tels que : estimer le nombre de sauts nécessaires d'un paquet d'informations pour aller d'un ordinateur à un autre sur Internet [44].

### 1.5.2 Coefficient de groupement

Une autre caractéristique importante des réseaux au monde réel, est le coefficient de groupement des nœuds à moyenne élevée. Il est intéressant de savoir à quel point

des nœuds sont reliés dans un secteur spécifique du réseau. Une tâche semblable est la question pour lesquels des amis d'une personne se connaissent aussi. La figure (1.2), présente un exemple d'une personne (nœud en gras avec quatre sommets en gras) et quatre amis. Sur les six relations possibles d'amitié (lignes précipitées) entre les quatre amis (cercles gris), seulement deux amitiés existent (sommets en gras). Utilisant le rapport entre existence et relations possibles, un coefficient de groupement peut être calculé. Si un nœud à  $z$  voisins les plus près, un maximum de  $z \frac{(z-1)}{2}$  sommets est possible entre eux. Watts et Strogatz [5] ont définis le coefficient de groupement pour le nœud  $v$ , comme étant le rapport du  $i^{\text{ème}}$  nœud existant, par le nombre de sommets possibles entre les voisins du nœud  $v$ , par la formule suivante

$$C_v = \frac{2i}{z(z-1)} \quad (1.2)$$



**Fig. 1.4.** Concept de base d'une distribution de liens en réseau

### 1.5.3 Degré de distribution

Généralement, on a cru que la distribution des liens dans la plupart des réseaux suit une distribution de la loi de Poisson, mais en réalité, les réseaux du monde réel ont une distribution très inégalitaire qui suit une loi de puissance. Cette dernière a

une expression de la forme  $y = x^\gamma$ , où  $\gamma$  est une constante,  $x$  et  $y$  sont des mesures d'intérêt [12].

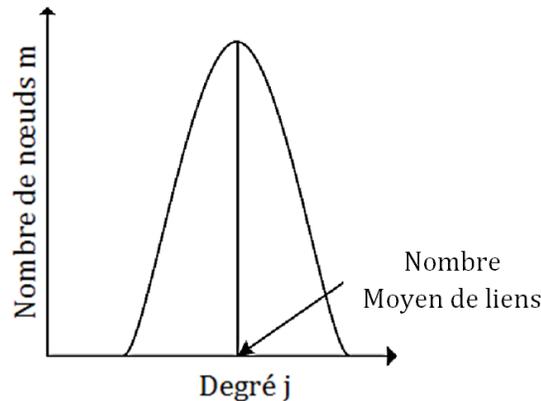
## 1.6 Modèles de réseaux complexes

Dans un graphe non orienté de réseau, le degré d'un nœud est défini comme le nombre de sommets qu'il possède. La figure (1.4.a) est l'exemple d'un nœud avec un degré 4. Si tous les nœuds du réseau qui partagent le même degré sont reliés, alors une telle fonction de la figure (1.4.b) est la plus susceptible de se produire. Il n'existe pas de nœud avec un degré zéro, car ces nœuds ne sont pas reliés au réseau. Le réseau présenté dans la figure (1.4.c), montre la majorité des nœuds avec le degré un à trois, ainsi que moins de nœuds avec un degré supérieur à sept. La figure (1.4.b) est idéalisée et la distribution des liens dans les réseaux ne doit pas prendre la caractéristique d'une ligne droite.

Si un nœud du réseau de la figure (1.4.c) a été aléatoirement choisie, la probabilité d'obtenir un autre avec seulement un à trois sommets est beaucoup plus importante que celle pour l'obtenir avec un nœud de degré supérieur à sept. Par conséquent, il est possible de définir une probabilité d'une fonction de répartition  $P(k, v, N)$ , cela renvoie la probabilité que le nœud  $v$  contient  $k$  nœuds dans le réseau de  $N$  nœuds [13]. Le concept de la distribution des liens dans un réseau admet des conséquences considérables. D'où, le groupement des coefficients qui joue un rôle important en analysant des réseaux en termes de propriétés, comme la diffusion. La longueur de trajet entre deux nœuds du réseau est définie comme le nombre de sommets entre eux. Ainsi, la longueur de trajet minimale est le plus court chemin entre deux nœuds. Et en fin, la longueur de trajet moyenne qui représente la moyenne de toutes les longueurs de trajet minimales entre les paires des nœuds.

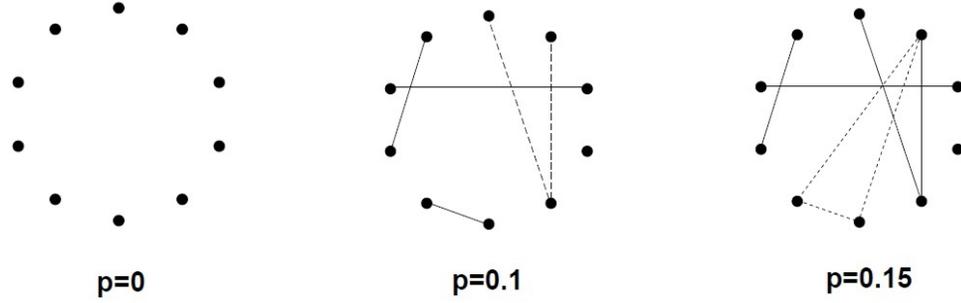
### 1.6.1 Les réseaux aléatoires ER (Erdős et Renyi)

Depuis le papier séminaire d'Erdős et Renyi en 1959, la théorie de réseau aléatoire a dominée la pensée scientifique [14]. Les réseaux réels au monde, avaient été vraisemblablement trop complexes pour les comprendre et donc tenus pour aléatoires. A l'absence d'autres modèles de réseaux bien-définis, les réseaux aléatoires étaient très utilisés pour modéliser les réseaux. Le processus de créer un réseau *ER* (Erdős et Renyi) dépend d'une probabilité. Pour un réseau de  $N$  nœuds, chaque paire possible de nœuds distincts sont reliés à un sommet en fonction d'une probabilité  $P$ . Un Réseau ER comprend la propriété, que la majorité des nœuds contiennent un degré qui est près du degré moyen de la combinaison du réseau, et cela n'a pas beaucoup de déviation au-dessous et au-dessus de la moyenne. Il a été montré que la distribution des liens suit une loi de Poisson (voir la figure (1.5)). Connaissant la distribution des degrés, la longueur de trajet moyenne et le groupement de coefficient du Réseaux ER, il est faisable d'analyser leurs différents comportements comparés aux réseaux à échelle invariante.



**Fig. 1.5.** Distribution de Poisson du nombre de liens dans les réseaux ER avec une forme caractéristique autour du nombre moyen de liens par nœud

Le modèle ER est assez simple et probablement le modèle de graphe aléatoire le plus connu. Ces modèles contiennent deux paramètres. Le modèle de graphe  $G(N, m)$  qui attribue une probabilité uniforme à la collecte de tous les graphes de  $N$  nœuds et



**Fig. 1.6.** Illustration de la procédure d'évolution du modèle de graphe aléatoire binomiale en fonction de  $p$ .

$m$  arêtes. En d'autres termes, on peut choisir au hasard, un graphe uniforme parmi tous les graphes qui comportent  $N$  nœuds et  $m$  liens.

Dans une autre variante du modèle ER  $G(N, p)$ , le développement d'un graphe commence par définir un ensemble de  $N$  nœuds. Les sommets sont ensuite rajoutés en les reliant au hasard d'une manière indépendante avec une probabilité  $p$  (voir la figure (1.6)). Par conséquent, le nombre total de nœuds dans le même modèle est de  $\frac{pN(N-1)}{2}$ . La probabilité  $P(k)$  que le nœud  $i$  est de degré  $k$  suit une distribution binomiale est donnée par [13]

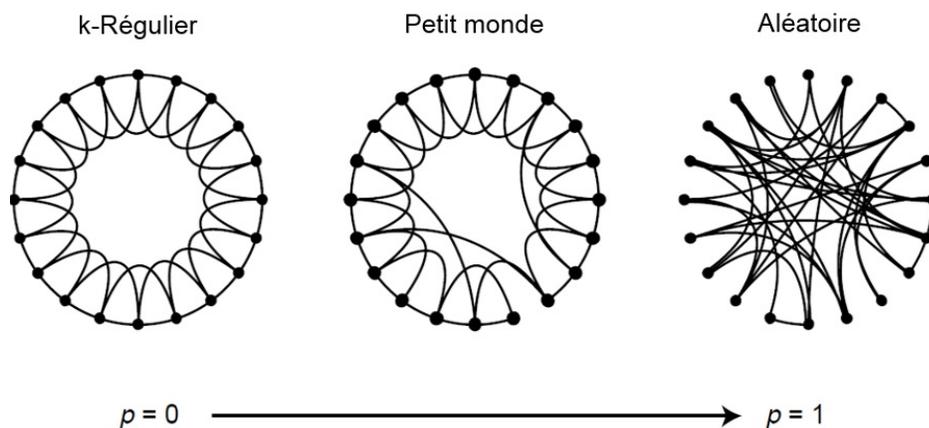
$$P(k) = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k} \quad (1.3)$$

Pour  $N \rightarrow \infty$ , la distribution de degré du nœud  $i$  pourrait être reconnue comme une distribution de Poisson

$$P(k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} \quad (1.4)$$

où

$$\lambda = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k} \quad (1.5)$$



**Fig. 1.7.** Illustration de la procédure de connexion aléatoire d'un réseau petit monde, par Watts et Strogatz.

### 1.6.2 Les réseaux petit-monde

Le concept (ou notion) de petit-monde (small-world network) est issu des travaux bien connus de Stanley Milgram dans les années 60. L'expérience consistait à demander aux habitants du Middle West de faire parvenir une lettre à un destinataire de la Côte Ouest en utilisant comme intermédiaire des personnes qu'ils appelaient par leur prénom. Milgram eu la surprise de constater que la moyenne des chaînes parvenues au destinataire n'était que de 5.6 [15]. Cette expérience a donnée lieu à un mythe devenu dans sa version populaire les six degrés de séparation : en clair, seules cinq personnes nous séparent de n'importe quelle autre personne dans le monde.

Watts et Strogatz [5] publient un article dans Nature en 1998, qui proposent un modèle de graphe petit-monde (small-world network) qui diffère du modèle dominant de graphe utilisé auparavant (graphe aléatoire). La figure (1.7) résume le type théorique du graphe proposé et sa méthode de construction. Le graphe de départ est k-régulier (tous les nœuds ont le même degré) et chaque nœud est lié à ses voisins proches. De façon aléatoire, un lien est supprimé et un autre ajouté au graphe de départ. Les auteurs mesurent deux paramètres : la moyenne des plus courts chemins

entre chaque paire de nœuds (le graphe est non orienté) et ce qu'ils appellent le coefficient de groupement.

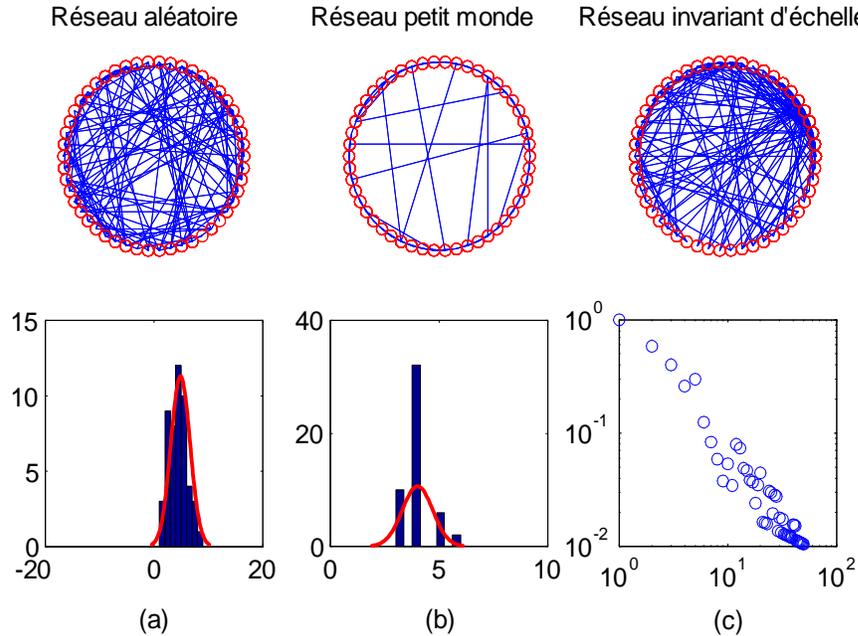
Watts et Strogatz ont démontré que même pour une faible probabilité  $p$  de liaison, ce qui crée quelques raccourcis dans le réseau, est suffisante pour diminuer la distance moyenne  $l$ . Cependant, le voisinage local est presque inchangé, et le coefficient de groupement  $\gamma$  reste élevé même pour un  $p$  relativement grand. La solution exacte pour  $l$  n'a pas encore été trouvée, mais les simulations et les calculs ont montré que les échelles de  $l$  suit un  $\log N$ , pour  $N$  suffisamment large et  $p > 0$ . Barrat et Weigt [7] obtiennent la formule d'approximation suivante

$$\gamma = \frac{3(k-2)}{4(k-1)}(1-p)^3 \quad (1.6)$$

ce qui est indépendant de  $N$ . Pour  $N$  grand, la distribution de degré  $p(k)$  est similaire à une distribution d'une loi de Poisson, mais encore plus concentré autour d'une moyenne de  $\bar{k} = k$  pour des petites valeurs de  $p$ . Ainsi, le réseau petit-monde de Watts et Strogatz capture le groupement et l'effet petit de monde, mais non pas une distribution des liens dans les réseaux réels. Cependant, ce dernier n'a encore jamais proposé l'objet d'un modèle.

### 1.6.3 Réseaux invariants d'échelle

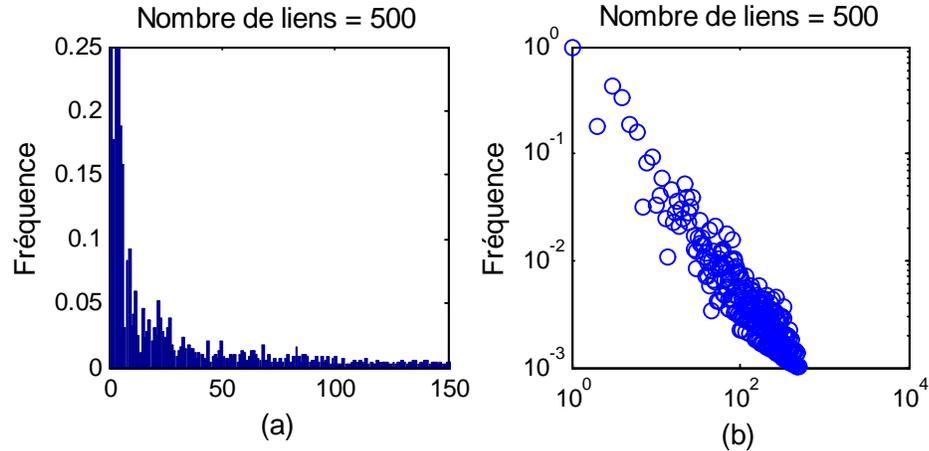
Quand Albert et Barabási [16] ont commencé à tracer l'internet en 1999, ils n'ont pas su qu'ils étaient sur le point d'influencer le réseau de recherche d'une manière soutenue. En raison de divers intérêts de chaque utilisateur d'internet et le nombre gigantesque de pages Web, elles ont été aléatoirement liées comme étant un réseau aléatoire. Les résultats de leurs études ont été en désaccord avec cette attente d'une manière étonnante. Seulement quelques pages ont la majorité de liens, tandis que la plupart des pages sont seulement très peu abondamment reliés.



**Fig. 1.8.** Type de RDC. (a) Modèle Aléatoire. (b) Modèle petit monde. (c) Modèle invariant d'échelle.

L'approche et la méthodologie sont radicalement différentes. Les auteurs partent de l'étude de très gros graphes dont ils cherchent à modéliser la structure et les règles de construction. Contrairement à ce qui était communément admis, les graphes qu'ils étudient ne présentent pas une distribution gaussienne de liens mais au contraire une distribution de type loi de puissance. En effet, si on représente en abscisse le degré et en ordonnée la fréquence sur un diagramme bi-logarithmique, on obtient la figure (1.9).

Depuis, les informaticiens ont mis à jour des structures invariantes d'échelle dans de nombreux systèmes. De leur côté, Fatoulous et al [17] ont étudié la structure physique d'internet. Ils ont tous exploré sur les routeurs (les équipements qui relient les réseaux informatiques et par où passent les informations) connectés par des lignes de communication, et montraient que la topologie de ce réseau est aussi invariante d'échelle.



**Fig. 1.9.** (a) Histogramme et (b) Distribution géométrique de degré dans le réseau

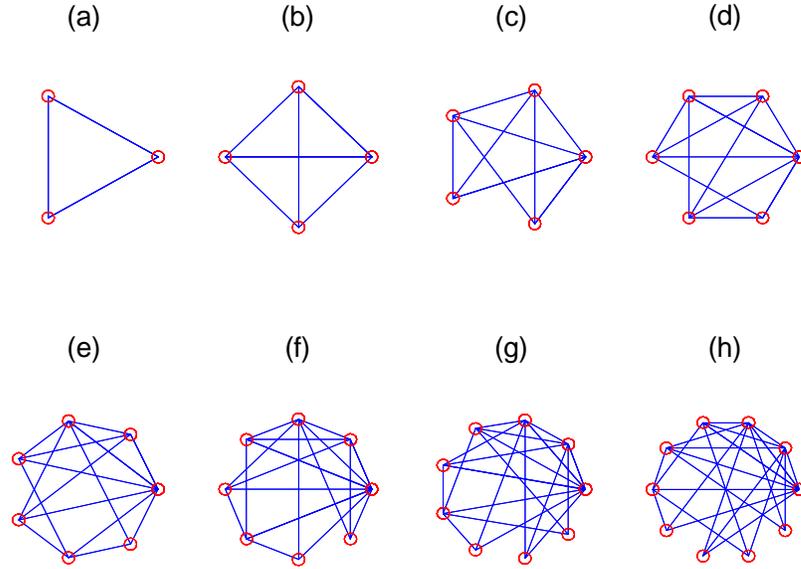
Une étude effectuée par Ebel et al [18], a révélée que le réseau constitué de personnes connectées par courrier électronique est également invariant d'échelle. Il en va de même du réseau des collaborations entre scientifiques (Erdős, qui a écrit plus de 1400 articles avec près de 500 co-auteurs, est lui-même l'un des super-noeuds les plus gros de la communauté mathématique) ou de certains réseaux du monde des affaires.

### 1.6.3.1 Modèle de réseau BA invariant d'échelle

Ce modèle est généré comme suit :

*La croissance* : Commenant par un petit nombre  $m_0$  de nœuds. Au fil du temps, on ajoute un nouveau nœud avec  $m(\leq m_0)$  degrés qui lient le nouveau nœud à ceux déjà présents dans le réseau.

*L'attachement préférentiel* : signifie que plus un nœud est relié, plus il a une grande probabilité de recevoir de nouveaux liens. Formellement, la probabilité  $P(k_i)$  qu'un nouveau nœud sera connecté à un nœud  $i$  dépendant du degré  $k_i$  est donnée par la formule suivante



**Fig. 1.10.** Développement du réseau invariant d'échelle, pour  $N=10$ .

$$P(k_i) = \frac{k_i}{\sum_{j=1}^i k_j} \quad (1.7)$$

où  $N$  est le nombre de nœuds dans le réseau.  $k_i$ , le nombre de liens du nœud  $i$ , or  $\sum_{j=1}^N k_j$  représente le nombre total de liens dans le réseau.

Après un certain temps  $t$ , nous obtiendrons un réseau ayant  $n = t + m_0$  nœuds et  $mt$  liens, qui évolue à l'aide d'une échelle invariante avec une probabilité qu'un nœud de  $k$  liens suit une distribution de loi de puissance sous la forme

$$P(k) \sim 2m^2 k^{-\omega_{BA}} \quad (1.8)$$

sachant que l'exposant  $\omega_{BA} = 3$  est indépendant de  $m$ . Cette exposant est considéré comme une échelle invariante, et dans ce sens, le réseau est dit invariant d'échelle (scale-free). Et afin de bien saisir ce modèle, la figure (1.10) montre clairement les étapes d'évolution d'un réseau invariant d'échelle à 10 nœuds.

Autrement dit, les nœuds fortement liés (super-nœuds) tendent à accumuler bien plus de liens, alors que ceux avec seulement quelques liens, sont peu susceptibles d'être

choisis comme destination pour un nouveau lien. Ainsi, les nouveaux nœuds ont une préférence de s'attacher à ceux qui sont fortement liés.

## 1.7 La vulnérabilité de l'infrastructure

Nous passons en revue les mesures les plus largement utilisés, qui caractérisent les réseaux et les modèles de réseaux les plus influents pour la capture et l'explication de ces caractéristiques. Pour les réseaux d'infrastructure, la capacité de maintenir une fonction bien déterminée est très importante, lorsque des parties du système sont endommagés, c'est ce qu'on appelle *la robustesse*.

### 1.7.1 Scénarios de menaces dans un réseau électrique

Les infrastructures peuvent être exposées à des perturbations qui causent des décompositions totales ou partielles dans les systèmes, pendant un certain temps. Ces événements ou scénarios de menace peuvent être de différentes sortes, complètement aléatoire à des attaques intentionnelles. Considérons l'exemple du réseau électrique, la grande menace à ce type de système sont les conditions météorologiques extrêmes, comme les tempêtes et les fortes chutes de neige. La tombée des arbres, la neige ou la glace peut causer des coupures des lignes électriques ou bien un court-circuit, qui à son tour peut provoquer une perte de puissance. Ce genre de menace est de nature aléatoire, suivant une certaine distribution de probabilité dans le temps et l'espace géographique.

Un autre événement déclencheur peut provoquer une défaillance de l'équipement, par exemple en raison de l'usure (vieillesse). Cette menace est également d'un type aléatoire, mais la probabilité qu'elle se réalise peut être contrôlée avec une certaine mesure, grâce à des choix en ce qui concerne les matériaux, la construction et les inspections. Les erreurs humaines, y compris les faiblesses organisationnelles, ne sont ni entièrement aléatoire ni déterministe, et sont difficiles à modéliser [19].

### 1.7.2 La vulnérabilité, la robustesse et la résistance

La vulnérabilité peut être décrite comme la collection des propriétés d'un système d'infrastructure, qui peuvent affaiblir ou limiter sa capacité à supporter les menaces et de survivre aux événements accidentels, qui proviennent à la fois à l'intérieur et à l'extérieur des limites du système [20]. Pour être considéré comme un problème de vulnérabilité, les conséquences d'une certaine perturbation devraient être suffisamment graves pour désactiver des services importants de la société pendant une période considérable.

Il y a une manière relativement naturelle pour mesurer le niveau de vulnérabilité des menaces aléatoires, telles que les défaillances météorologiques. A partir de la probabilité qu'une certaine menace soit réalisée. Par exemple, une tempête de neige, nous pouvons la combiner avec les probabilités de certaines conséquences négatives, comme une perte de puissance sévère pendant un certain temps. La vulnérabilité de l'infrastructure est alors la probabilité totale des conséquences données.

Pour le sabotage et les attaques hostiles aux quelles il est difficile d'attribuer des probabilités, nous pouvons étudier la vulnérabilité conditionnelle, à savoir, la probabilité d'avoir des conséquences données si un certain scénario de menace est réalisé. Parfois, le jeu des méthodes théoriques peut être utilisé pour mesurer la vulnérabilité dans des situations pareilles.

La vulnérabilité est un concept relatif et peut être comparé pour les différentes conceptions possibles d'une infrastructure. Dans de nombreux cas, il pourrait être difficile, voire impossible, de calculer la vulnérabilité d'un système. Cependant, les changements relatifs à la vulnérabilité causée par les mesures de sécurité, peuvent souvent être estimés.

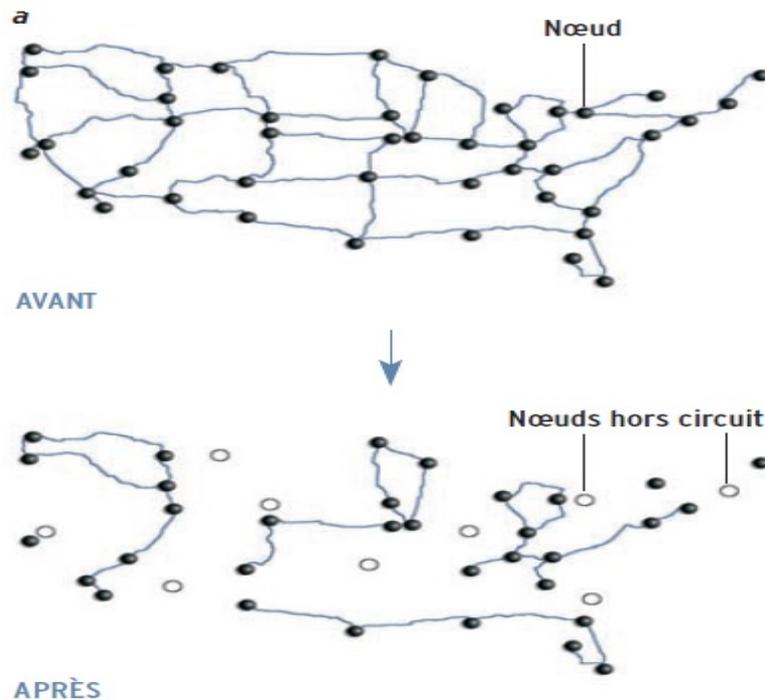
Pour les systèmes techniques, les concepts de robustesse et résistance, ensemble, elles peuvent être considérées comme un complément de la vulnérabilité [20]. Ainsi, à partir de ce point de vue, la robustesse est la capacité à résister à des souches de

manière satisfaisante qui maintiennent une fonction donnée, alors que la résistance est la capacité de revenir à un état normal après une certaine perturbation [21]. Tout comme la vulnérabilité, la robustesse est un concept relatif qui dépend de ce que nous considérons comme des menaces. Un système peut être très robuste pour des pannes d'équipement au hasard, mais en même temps, très vulnérable aux attaques et sabotages.

### 1.7.3 Grandes perturbations connues dans les réseaux électriques

En 2003, trois pannes graves se sont produites dans différentes parties du monde en seulement quelques semaines. A titre d'illustration de la vulnérabilité des réseaux électriques et des infrastructures :

Aux Etats-Unis et Canada, le 14 Août 2003. En raison de problèmes de logiciels, l'agence d'exploitation d'énergie FirstEnergy (une société par actions américaine du secteur énergétique qui produit, transporte et distribue de l'électricité) dans le nord de l'Ohio ne pouvait pas détecter les défaillances qui se sont produites dans la ligne. Trois lignes à haute tension de 345 kv ont été coupées en raison de leurs contacts avec des arbres (Défaut triphasé : phase à la terre), qui ont augmenté la charge sur d'autres lignes et provoquées ainsi, un nombre d'échecs secondaires. Au moment où les opérateurs ont pris conscience du problème, une cascade incontrôlable avait commencé au moment d'une forte consommation (appelée aussi : effet domino), la panne s'étend en quelques heures sur 256 centrales électriques. Par conséquent, environ 50 millions de personnes dans le nord des états-Unis et la province canadienne de l'Ontario étaient dans l'obscurité [22]. Les villes de New York, Toronto, Ottawa, Detroit et Cleveland connaissent une heure de pointe chaotique. Faute de transports en commun, de nombreux travailleurs doivent rentrer chez eux à pied. Il s'agit de la plus grande catastrophe énergétique de l'histoire du continent, les dommages s'élevant à



**Fig. 1.11.** Rupture accidentelle de nœuds dans un réseau aléatoire.

environ six milliards de dollars américains. La plupart des secteurs technologiques ont ralenti, mais l'industrie a rapidement redémarré le jour suivant.

#### 1.7.4 Le talon d'Achille des réseaux invariants d'échelle

La robustesse des réseaux dépend de leur structure et du type de problème. Une panne accidentelle d'un certain nombre de nœuds dans un réseau aléatoire découpe celui-ci en plusieurs îlots qui ne peuvent plus communiquer (figure (1.11)). Les réseaux invariants d'échelle sont plus résistants face à ce type de pannes (figure (1.12)). En revanche, ils sont beaucoup plus fragiles en cas d'attaque coordonnée dirigée contre les super-nœuds (figure (1.13)).

Barabási et Bonabeau dans [3], mentionnent que même si 80 % des routeurs d'internet sélectionnés aléatoirement sont mis hors service, les 20 % restants continuent

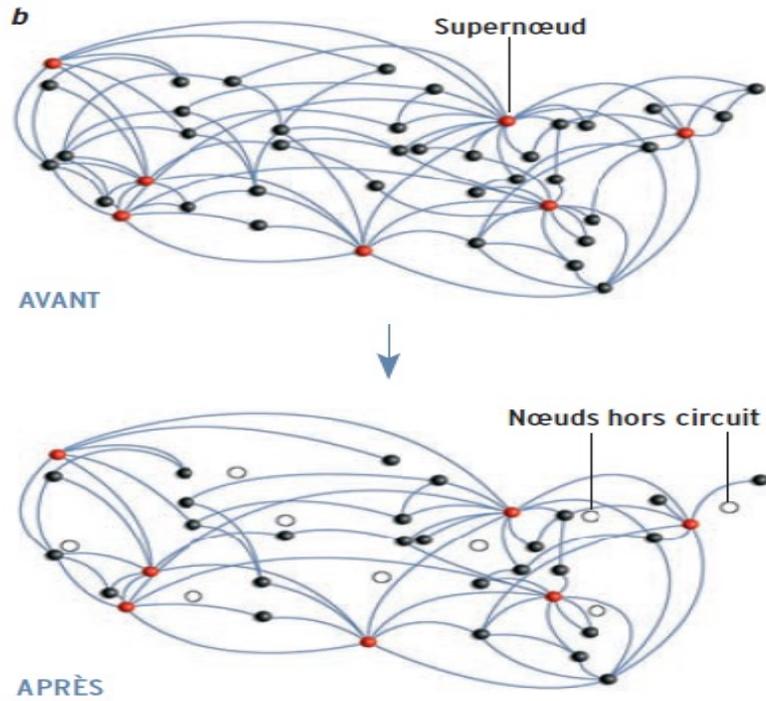


Fig. 1.12. Rupture accidentelle de nœuds dans un réseau invariant d'échelle.

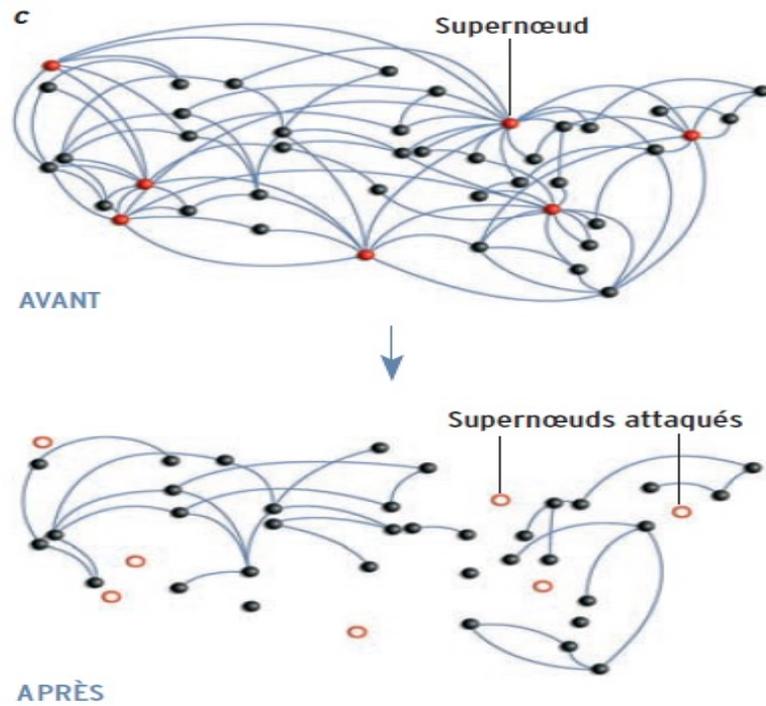


Fig. 1.13. Attaque ciblée de supernœuds dans un réseau invariant d'échelle.

à assurer un réseau connexe et fonctionnel (où n'importe quels nœuds pris au hasard peuvent être connectés deux à deux).

Cette robustesse des réseaux invariants d'échelle est ancrée dans leur topologie. La suppression aléatoire de nœuds perturbe surtout les petits nœuds, car ils sont beaucoup plus nombreux que les super-nœuds : l'élimination de petits nœuds, peu connectés, ne perturbe notablement pas la topologie du réseau. Pourtant, le fait que le réseau ne dépend que de quelques super-nœuds *vitaux*, présente un sérieux inconvénient : le réseau est très vulnérable si l'attaque est ciblée.

Ils ont montré que la mise hors circuit de quelques-uns des principaux super-nœuds du réseau internet, découpe le système en amas minuscules de routeurs définitivement isolés. Les super-nœuds sont indispensables au fonctionnement du réseau. La possibilité qu'un petit groupe de pirates bien informés perturbe les réseaux de communication en attaquant ses super-nœuds est une réelle menace. Ce talon d'Achille des réseaux invariants d'échelle soulève une question importante : combien de super-nœuds sont indispensables au bon fonctionnement du réseau dans son ensemble ? Des recherches récentes ont montré qu'en général la suppression de moins de 5 à 15 % de la totalité des super-nœuds peut entraîner l'effondrement du système. En ce qui concerne la Toile, nous avons montré qu'une attaque ciblée supprimant seulement quelques super-nœuds perturberait notablement le réseau. En conséquence, la protection de ces super-nœuds est le moyen le plus efficace d'éviter les perturbations à grande échelle causées par des cyberattaques.

Leur connaissance des réseaux invariants d'échelle nous aide à comprendre la propagation des virus informatiques, mais aussi des maladies. Les théories de la diffusion et de la percolation, étudiées pendant des décennies par les épidémiologistes et par les analystes des marchés, prédisent l'existence d'un seuil critique pour la propagation d'une épidémie dans une population donnée : tout virus dont le degré de contagiosité

est inférieur à un seuil critique finit par disparaître. Au-dessus du seuil critique, le virus se développe exponentiellement, infectant toute la population.

Dans un réseau invariant d'échelle, le seuil est nul. Ainsi, tous les virus, même les virus peu contagieux, se propagent dans la population et y perdurent. Comme les super-nœuds sont reliés à une grande quantité de nœuds, au moins l'un d'eux risque d'être infecté par un nœud contaminé. Quand ce super-nœud est atteint, il contamine une multitude d'autres sites, et met en danger d'autres super-nœuds, qui finissent par diffuser le virus dans tout le réseau.

Notons que dans le domaine des affaires et des marchés, les campagnes de promotion *contagieuses* tentent, par exemple, de cibler les super-nœuds pour accélérer la diffusion d'un produit. Les travaux sur les réseaux invariants d'échelle apportent les outils mathématiques pour explorer et exploiter ce phénomène.

## 1.8 Conclusion

Concernant le choix du type de système, Les réseaux *ER*, en raison de leur diminution importante pour modéliser réellement des réseaux au monde. Seulement, ils sont brièvement présentés pour montrer leurs différences importantes par rapport aux réseaux invariants d'échelle. A savoir que ce dernier type de réseau en question sera exploité tout au long de cette thèse.

# Chapitre 2

## Théorie du chaos

### 2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à un état de l'art sur la théorie du chaos, en plus de quelques caractéristiques y seront présentées. Ainsi que les méthodes de contrôle du chaos les plus connues et les plus efficaces sont citées, à savoir la méthode d'Ott-Grebogi-Yorke [26] et la méthode de Pyragas [27]. Et d'un autre côté, on va essayer d'éclaircir un système empirique d'où un phénomène réel et sa traduction en équations mathématiques. Or, des applications expérimentales dans différents domaines seront aussi présentées.

### 2.2 Définition

En science, le chaos n'admet pas de définition standard. Néanmoins, les dispositifs cycliques du chaos incluent : la non-linéarité, le déterminisme, la sensibilité aux conditions initiales, l'imprévision, ainsi que l'irrégularité [28]. Or, les deux principes mathématiques importants qui expliquent le comportement chaotique sont ceux de Li-York [29] et Devaney [30].

### 2.3 Caractéristiques du chaos

Un système relève de la théorie du chaos s'il est extrêmement sensible à des petites causes et si son comportement admet un aspect cyclique. A titre d'exemple, les systèmes météorologiques, l'effet papillon, leur dynamique est cyclique.

Les trajectoires des systèmes qui relèvent de la théorie du chaos convergent toute fois vers des zones appelées attracteurs. Le même système peut avoir un ou plusieurs attracteurs. L'importance de ces derniers repose sur l'ensemble des possibilités d'évolution du système. Les attracteurs sont de types variés :

1. *Ponctuel* : une bille lancée dans un bol ;
2. *Circulaire* : un pendule sans frottement ;
3. *Etrange* : cas des équations de Lorenz (voir la figure (2.1)). Les trajectoires qui convergent vers un attracteur étrange ont une allure cyclique, mais ne repassent jamais par le même point. Ils sont fréquemment présents dans les systèmes d'équations dynamiques non linéaires.

Les systèmes qui relèvent de la théorie du chaos comprennent :

1. *Les systèmes formels* : définis mathématiquement, souvent sous forme d'équations différentielles non linéaires, par exemple les équations de Chen, Chua, Lorenz. . .
2. *Les systèmes empiriques* : relèvent de l'observation et qui est quasi-impossible de formaliser exactement, à savoir les systèmes météorologiques, chimiques, électriques. . . . Ces systèmes peuvent être modélisés au moyen d'équations différentielles non linéaires et relèvent donc de la théorie du chaos.

Pour les mathématiciens les systèmes qui relèvent de la théorie du chaos sont parfaitement prévisibles, car il s'agit de systèmes formels dont il est possible de définir rigoureusement l'ensemble de leurs conditions initiales. Or, Pour les physiciens, ce sont des systèmes empiriques imprévisibles à cause de leur extrême sensibilité aux

contions initiales qu'il est impossible de définir exactement, voire de les dénombrer. Ces systèmes évoluent vers des bassins d'attraction sachant que leurs dynamiques sont imprévisibles. Souvent, on ne connaît pas les bassins d'attraction, par exemple ceux de l'évolution des espèces animales.

La création de Santa Fe Institute aux Etats Unis dans l'état de New Mexico en 1984, et sur l'initiative de personnalités *Prix Nobel* et *Field Medal*, a pour mission de rechercher des lois communes à des systèmes complexes de divers natures : économiques, biologiques, sociaux... , ainsi que de définir des outils d'analyse et de prévision .

Un système complexe est constitué d'agents qui interagissent entre eux, avec leur environnement et avec les phénomènes émergents créés par ces interactions (voir la figure (2.2)). Ces agents peuvent être de nature variée : animal, personne, groupe de personnes, institution, organes, cellule, enzyme, etc. Où, les règles de comportement d'un agent définissent les stimuli qu'il émet vers les autres agents, en fonction des stimuli qu'il reçoit des autres agents et de son environnement. Ces règles sont évolutives en fonction de la durée de vie de l'agent. En plus de l'émergence, qui est une propriété importante des systèmes complexes : processus de création de phénomènes par les interactions des agents entre eux et avec leur environnement. Les phénomènes émergents sont de natures variées comme l'apparition d'un nouvel agent, d'une modification de l'environnement, d'une loi de distribution des évènements... Ces phénomènes peuvent être surprenants et défient l'intuition et le bon sens. La table (2.1) montre quelques exemples d'émergences en précisant les agents, les méthodes d'interaction, les phénomènes émergents [24, 25].

**Tab. 2.1.** Exemples d'émergences dans quelques systèmes complexes

<i>Agents</i>	<i>Interactions</i>	<i>Phénomène émergent</i>
Insectes sociaux	Intensité des odeurs (phéromones)	Galeries d'une fourmilière
Animaux grégaires	Vue, ouïe	Vols groupés d'oiseaux, bancs de poissons
Consommateurs	Directe : imitation. Indirecte : impact de la demande sur l'offre	Prix de marché, engouements
Particules	Règles de la physique des atomes et particules élémentaires	Pression, température, courant électrique

## 2.4 Méthodes de stabilisation des systèmes chaotiques

### 2.4.1 La méthode de contrôle OGY

Dans une telle classe, la méthode typique est celle proposée par Ott, Grebogi et Yorke (OGY) [26] qui été la première à évoquer la notion du contrôle des systèmes dynamiques à comportement chaotique. L'idée développée par les auteurs en question, est pour qu'un système chaotique puisse être contrôlé, on lui applique une petite perturbation à certains paramètres du système. Grâce à son grand succès, cette méthode a été trop exploitée par la suite, d'où plusieurs algorithmes ont été proposés et développés [31, 32].

### 2.4.2 Méthode de Pyragas

Dans [27], Pyragas propose une méthode qui permet de stabiliser des orbites périodiques instables, en se basant sur la connaissance de leur ordre mais sans connaître leurs positions. Elle se base simplement sur l'application d'un terme de retard d'état, afin de forcer l'évolution dynamique du système à suivre une dynamique périodique désirée tout au long de sa période. Ainsi, le retard doit avoir la valeur exacte de la période de l'orbite périodique instable à stabiliser.

## 2.5 L'attracteur étrange

L'illustration d'un phénomène réel est très importante pour mieux aider à comprendre le sens de l'évènement : l'attracteur étrange !

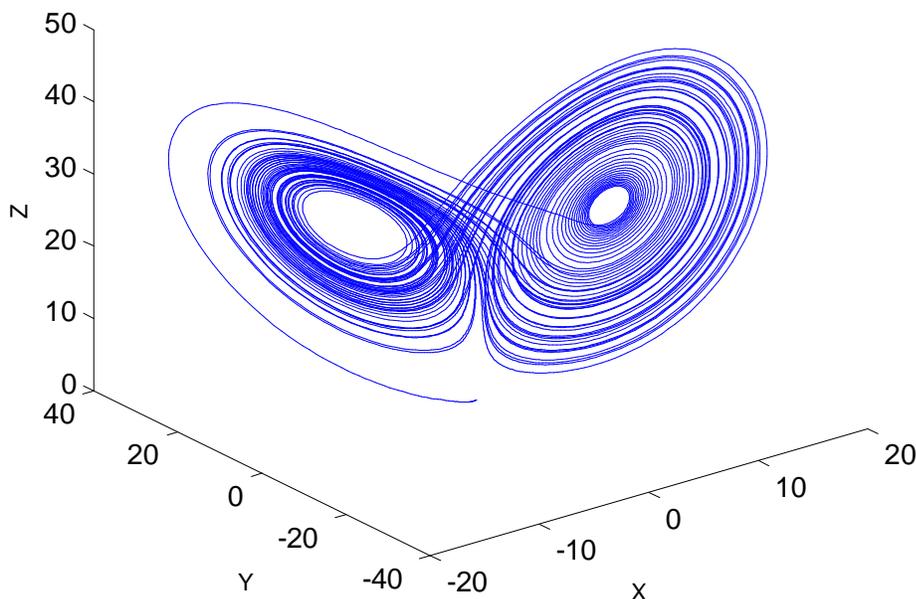
La météorologie consiste donc à prévoir le déplacement de grandes masses d'air. Dans la foulée de la mécanique newtonienne, il suffisait alors de traduire par des équations différentielles le déplacement de ces masses, puis de les résoudre. En théorie, le temps serait alors aussi prévisible que le mouvement des planètes, un vrai mécanisme d'horlogerie. Pour établir le modèle d'un phénomène naturel, il y avait trois étapes majeures à suivre : observer le phénomène, le traduire en équations et enfin résoudre ces équations.

L'objet de la science de météorologie, c'est d'établir des équations permettant d'expliquer, de représenter et de prévoir le déplacement de masses d'air. Le premier coup de génie de Lorenz a été de choisir délibérément la compréhension aux dépens de la prévision. Il a donc établi un système d'équations différentielles ultra simplifiées de seulement trois variables qui permettaient de déterminer l'évolution de masses d'air. Ce système, avec seulement trois variables (voir la figure (2.1)), est représenté par les équations ci-dessous

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma(x_2 - x_1) \\ (r - x_3)x_1 - x_2 \\ x_1x_2 - bx_3 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

Les variables  $x_1$  et  $x_2$  sont respectivement proportionnelles aux amplitudes du champ de vitesse et du champ de température alors que  $x_3$  est relié au mode vertical de l'humidité. Enfin  $t$  représente le facteur temps.

Dans son résumé, Lorenz et dans son fameux article de 1963 [23], il allait marquer la naissance officielle de la théorie du chaos : Les solutions de telles équations peuvent être identifiées par des trajectoires dans un espace des phases. Pour les systèmes ayant des solutions limitées, on trouve que les solutions non périodiques sont



**Fig. 2.1.** Attracteur de Lorenz.

habituellement stables par rapport à de petites modifications, de sorte que des états initiaux légèrement différents peuvent évoluer vers des états considérablement différents. On peut montrer que les systèmes ayant des solutions limitées possèdent des solutions numériques...

Un système représentant une convection cellulaire est résolu numériquement. On s'aperçoit que les solutions sont instables, et presque toutes, sont non périodiques. La possibilité de faire des prédictions météorologiques à très long terme est examinée à la lumière de ces résultats.

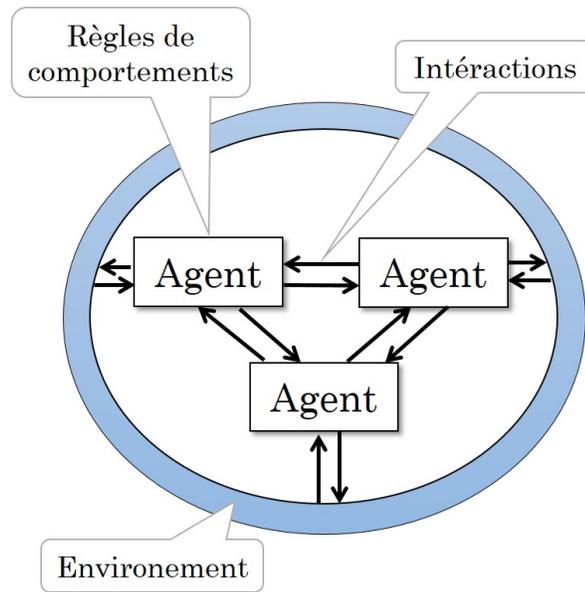
Si Lorenz a découvert les propriétés chaotiques de son modèle en 1961, sa communication ne parût que deux années plus tard, en 1963. C'est cet article, paru dans la revue spécialisée des météorologistes américains, que tout le monde cite aujourd'hui. Or cet article est passé totalement inaperçu. Ce qui a rendu Lorenz célèbre c'est une conférence qu'il donna en 1972, soit près de dix ans plus tard devant le grand public du congrès de l'Association américaine pour l'avancement des sciences. Cette

conférence à grand public était intitulée : "*Prédictibilité : le battement des ailes d'un papillon au Brésil peut-il déclencher une tornade au Texas ?*".

Ce qu'il voulait dire par là, c'était qu'une donnée infime, imperceptible, pouvait, si elle était amplifiée de proche en proche, aboutir à une situation météorologique complètement différente de celle qui avait été calculée sans tenir compte de cette donnée infime. En théorie le modèle marchait : les lois étaient bien définies et se calculaient pour n'importe quelles valeurs des variables. Mais en pratique, pour que le résultat concorde avec l'évolution de la météo, il faut tant de données et il faut qu'elles soient si précises, que l'avenir météorologique est incalculable. Lorenz venait de découvrir que chaque phénomène physique avait son *horizon de prédictibilité*. Dans le cas de la météo, les prévisions fiables ne peuvent dépasser une semaine.

## 2.6 Application expérimentales sur le contrôle des systèmes chaotiques

Le contrôle du chaos a trouvé des applications expérimentales intenses dans divers domaines physiques [28]. La première application expérimentale était réalisée à la fin de 1990 [33]. L'implantation du contrôle permet de stabiliser une orbite périodique dans la dynamique d'un ruban magnétoélastique. Cette expérience constitue le premier succès de la fiabilité de la technique OGY pour le contrôle du chaos. Par la suite, les scientifiques commençaient à exploiter cette dynamique et à réaliser des comportements réguliers. A savoir, dans les circuits électroniques [31] : l'auteur propose de stabiliser des comportements périodiques plus compliqués en utilisant la méthode OPF (Occasional Proportional Feedback) qui utilise la carte de Poincaré pour représenter les systèmes dynamiques fortement dissipatifs. Dans les systèmes chimiques, la première expérience de contrôle a été réalisée par le groupe de Showalter [34] sur le système chimique à comportement chaotique connu sous le nom de la réaction de Belousov Zhabotinsky (BZ), où un acide d'oxydation ion-catalysé est produit dans



**Fig. 2.2.** Constitution d'un système complexe

un réacteur continu. Dans les lasers, le système chaotique est un laser à fibre (NDFL) pompé par une diode laser (DL) [35]. La stabilisation du laser est obtenue en contrôlant celui-ci sur une orbite périodique instable de période  $nT$  par la technique de contre-réaction. Dans les fluides, les premières expériences de contrôle du chaos dans les fluides ont été rapportées par Singer et al [36]. Dans cette expérience, un fluide est trompé dans une cellule toroïdal en position verticale.

Récemment, le contrôle du chaos a été réalisé dans les systèmes d'ordre élevé, à savoir le contrôle des convertisseur DC-DC [37], le contrôle du chaos dans un réacteur nucléaire [38]. La suppression du chaos d'une convection magnétique [39], etc.

## 2.7 Conclusion

Dans le présent chapitre, nous avons brièvement présenté quelques notions du chaos, comme la stabilisation des systèmes chaotique, ainsi que leurs applications expérimentales. Les contributions de la théorie du chaos à la théorie des systèmes

complexes sont importantes. D'ailleurs, ce type de système admet des comportements variés. Donc, comment intervenir dans ces systèmes afin de les faire évoluer dans le sens des objectifs souhaités ? Pour cela et durant tout ce travail et comme montrés dans la figure (2.2), on va générer un réseau d'un système complexe qui représente un environnement constitué d'un nombre important d'agents, reliés par des interactions bien définies. En sachant que chaque agent va être représenté par un système chaotique. Plus de détails vont être éclaircis dans les chapitres qui viennent.

# Chapitre 3

## Contrôle du type "Pinning" des réseaux dynamiques complexes à nœuds chaotiques

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter le modèle mathématique du réseau dynamique complexe, en plus de ses conditions de stabilité et synchronisation. Or, dans nos simulation, on va présenter la méthode de contrôle du type *Pinning* (ou contrôle épinglant) qui permet de commander seulement les super-nœuds, alors que le reste du réseau se synchronise avec les nœuds en question jusqu'à arriver à une globale stabilité. On se contente par la suite de faire varier le nombre de nœuds épinglés et essayer d'aboutir à des paramètres optimaux afin d'avoir des résultats concluants. Les valeurs correspondantes aux systèmes utilisés tout au long de cette thèse, sont choisies de façon qu'ils soient chaotiques.

### 3.2 Caractéristiques du réseau dynamique

Considérons un réseau complexe constitué de  $N$  nœuds identiques linéaires et diffuse des nœuds couplés d'un système dynamique de dimension  $N$  décrit par

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t), t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N \gamma_{ij} g_{ij} \Gamma(x_j(t) - x_i(t)), \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.1)$$

où  $x_i = [x_i^1, \dots, x_i^N]^T \in R^N$  est le vecteur d'état du  $i^{\text{ème}}$  nœud,  $t \in [0, +\infty[$  est le facteur temps,  $f : R^N \times [0, +\infty[ \rightarrow R^N$  est une fonction continue et  $\gamma_{ij}$  désigne le coefficient de groupement entre les nœuds  $i$  et celles de  $j$ ,  $\Gamma = (\tau_{ij}) \in R^{N \times N}$  est une matrice liaison des variables couplés. Si certaines paires  $(i, j)$ ,  $1 \leq i, j \leq N$ , avec  $\tau_{ij} \neq 0$ , alors les deux nœuds couplés sont liés par leurs  $i^{\text{ème}}$  et  $j^{\text{ème}}$  variable d'état, respectivement.

### 3.3 Conditions de stabilité de pour la synchronisation complète des réseaux dynamiques complexes

Supposons qu'un réseau complexe admet  $N$  nœuds linéaires et diffuse des couples identiques, chaque nœud étant un système dynamique de dimension  $N$ . Dans le réseau de l'équation (3.1), la matrice de couplage symétrique  $G = (g_{ij}) \in R^{N \times N}$  représente la configuration de couplage du réseau, qui est supposée dans cette section comme un réseau invariant d'échelle décrit par le modèle  $BA$ .

Supposons que le réseau est connecté dans le sens qui ne comprend pas de groupes isolés, dont la matrice symétrique  $G$  est irréductible. L'état homogène stationnaire satisfait la condition suivante

$$f(\bar{x}(t), t) = 0 \tag{3.2}$$

Supposons que nous voudrions stabiliser le réseau (3.1) sur l'état homogène stationnaire (3.2). Pour atteindre cet objectif, nous appliquons la méthode du contrôle épinglant sur une petite fraction  $\delta$  ( $0 < \delta \ll 1$ ) des nœuds du réseau (3.1). On suppose que les nœuds  $i_1, i_2, \dots, i_l$  sont sélectionnés, où  $l = [\delta N]$  représente le plus grand entier inférieur au nombre réel  $\delta N$ . Le réseau contrôlé peut être décrit comme suit

$$\begin{cases} \dot{x}_{i_k} = f(x_{i_k}) + \sum_{j=1, j \neq i_k}^N \gamma_{i_k j} g_{i_k j} \Gamma(x_j - x_{i_k}) + u_{i_k}, & i = 1, \dots, l, \\ \dot{x}_{i_k} = f(x_{i_k}) + \sum_{j=1, j \neq i_k}^N \gamma_{i_k j} g_{i_k j} \Gamma(x_j - x_{i_k}), & i = l + 1, \dots, N, \end{cases} \quad (3.3)$$

Pour simplifier [41],

$$u_{i_k} = -\gamma_{i_k i_k} d_{i_k} \Gamma(x_j - x_{i_k}), \quad i = 1, \dots, l, \quad (3.4)$$

où le coefficient de groupement  $\gamma_{i_k i_k}$  satisfait  $\gamma_{i_k i_k} g_{i_k i_k} + \sum_{j=1, j \neq i_k}^N \gamma_{i_k j} g_{i_k j} = 0$  et le gain  $d_{i_k} > 0$ .

Nous réarrangeons l'ordre des nœuds dans le réseau de façon que les nœuds épinglés  $i_k, k = \overline{1, l}$  sont les  $l$  premier nœuds du réseau regroupé.

**Corollaire 4** *Supposons que  $\gamma_{ij} = \gamma$  et  $d_i = \gamma d$ . Le réseau dynamique contrôlé (3.1) est stable autour de l'état homogène  $\bar{x}$  si :*

$$\gamma > \frac{L_C^f}{\lambda_{\min}(-G + \text{diag}(d, \dots, d, 0, d, \dots, 0)) \cdot \lambda_{\min}(\Gamma)} \quad (3.5)$$

Si on suppose que  $\Gamma$  n'est qu'une matrice de constantes 0-1, puis en utilisant le théorème Gershgorin, nous pouvons vérifier que seule  $\text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)_{N \times N}$  peut satisfaire la condition d'une matrice semi-symétrique définie positive, et  $\Gamma$  devient  $I_N$  dans la matrice symétrique définie positive. Par conséquent, la condition (3.5) dans le corollaire (4) peut être simplifié comme suit :

$$\gamma > \frac{L_C^f}{\lambda_{\min}(-G + \text{diag}(d, \dots, d, 0, d, \dots, 0)) \cdot \lambda_{\min}(\Gamma)} \quad (3.6)$$

Si l'oscillateur  $\dot{x}_i = f(x_i)$  est chaotique, la constante de Lipschitz  $L_C^f$  de la fonction  $f$  signifie également que pour deux différentes valeurs initiales et arbitraire,  $x_i^1$  et  $x_i^2$ , les différentes trajectoires correspondantes doivent satisfaire  $\|f(x_i^1) - f(x_i^2)\| < L_C^f \|x_i^1 - x_i^2\|$  pour tout  $t \in [0, +\infty[$ . Un autre concept plus précis pour un système

chaotique est l'exposant de Lyapunov ( $EL$ ). Cependant, la relation entre les  $EL$ s du réseau couplé (3.1) et celles des nœuds chaotiques non couplés est non triviale (non évidente), et seulement dans certains groupements simplifiés, la relation peut être facilement analysée.

**Théorème 5** Supposons que le nœud  $\dot{x}_i = f(x_i)$  est chaotique pour tout  $i = 1, \dots, N$ , avec le maximum positif  $EL$   $h_{\max} > 0$ . Si  $\gamma_{ij} = \gamma$ ,  $d_i = \gamma d$  et  $\Gamma = I_N$ , alors le réseau contrôlé (1.2) est localement asymptotique stable autour de l'état homogène  $\bar{x}$ , à condition que

$$\gamma > \frac{h_{\max}}{\lambda_{\min}(-G + \text{diag}(d, \dots, d, 0, \dots, 0))} \quad (3.7)$$

### 3.4 Réseau dynamique simplifié

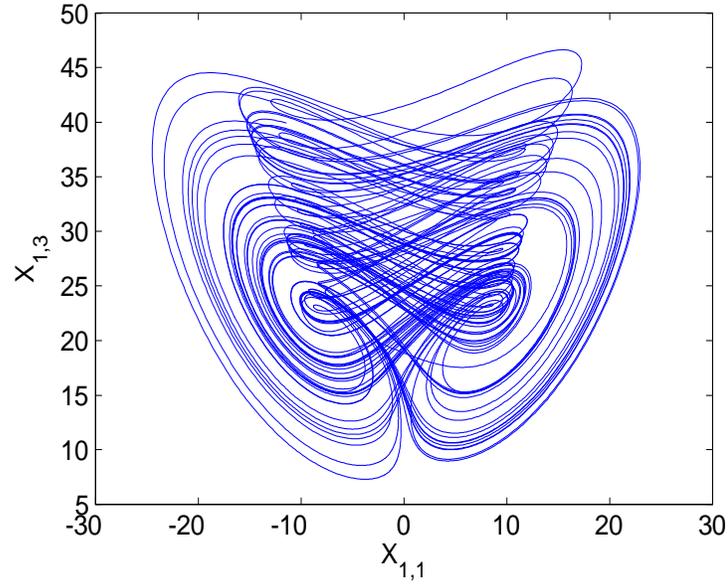
Considérons un  $RDC$  invariant d'échelle où les différents nœuds sont représentés par le système chaotique de Chen [40]. Par conséquent, un seul nœud est décrit par

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(x_2 - x_1) \\ (c - a - x_3)x_1 + cx_2 \\ x_1x_2 - bx_3 \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

où  $x_1, x_2$  et  $x_3$  sont des variable d'état.  $a, b$  et  $c$  des paramètres du système. A savoir que  $a = 35$ ,  $b = 3$ , et  $c = 28$ . le système de Chen a un comportement chaotique comme représenté dans la figure (3.1).

La matrice Jacobienne du système de Chen est donnée par

$$A = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ (c - a - x_3) & c & -x_1 \\ x_2 & x_1 & -b \end{bmatrix} \quad (3.9)$$



**Fig. 3.1.** Attracteur de Chen : nœud n°01.

1. Au point d'équilibre  $\bar{x}_1$

$$A = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ (c-a) & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

2. Au points fixes  $\bar{x}_{2,3}$

$$A = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ (c-a-x_3) & c & -x_1 \\ x_2 & x_1 & -b \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Le point d'équilibre du système est

$$\bar{x}_1 = [0, 0, 0]^T, \quad (3.12)$$

ainsi que les deux points fixes symétriques

$$\begin{aligned}\bar{x}_2 &= \left[ \sqrt{b(2c-a)}, \sqrt{b(2c-a)}, (2c-a) \right]^T = [7.9373, 7.9373, 21]^T, \\ \bar{x}_3 &= \left[ -\sqrt{b(2c-a)}, -\sqrt{b(2c-a)}, (2c-a) \right]^T = [-7.9373, -7.9373, 21]^T,\end{aligned}\tag{3.13}$$

Afin de construire un réseau invariant d'échelle de la figure (3.2) générée, supposons que toutes les variables d'état du système sont couplés, à savoir,  $\Gamma = \text{diag}(1, 1, 1)$ . Ainsi, les équations d'état du *RDC* avec des nœuds de type Chen sont données par

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{i1} \\ \dot{x}_{i2} \\ \dot{x}_{i3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(x_{i2} - x_{i1}) + \gamma \sum_{j=1}^N g_{ij} x_{j1} \\ (c - a - x_{i3})x_{i1} + cx_{i2} + \gamma \sum_{j=1}^N g_{ij} x_{j2} \\ x_{i1}x_{i2} - bx_{i3} + \gamma \sum_{j=1}^N g_{ij} x_{j3} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \tag{3.14}$$

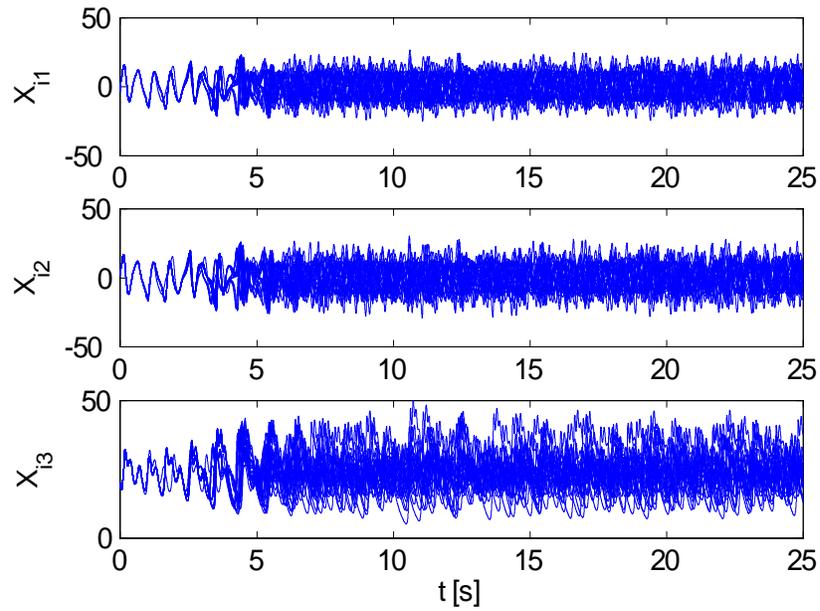
### 3.5 Méthode de contrôle

L'objectif est de stabiliser le réseau (3.14) sur le point d'équilibre instable  $x = \bar{x}_2$ , en appliquant le contrôle épingleant (pinning control) de retour d'état linéaire et local, seulement à une petite fraction  $\delta$  de nœuds. Les équations du réseau contrôlé sont données par

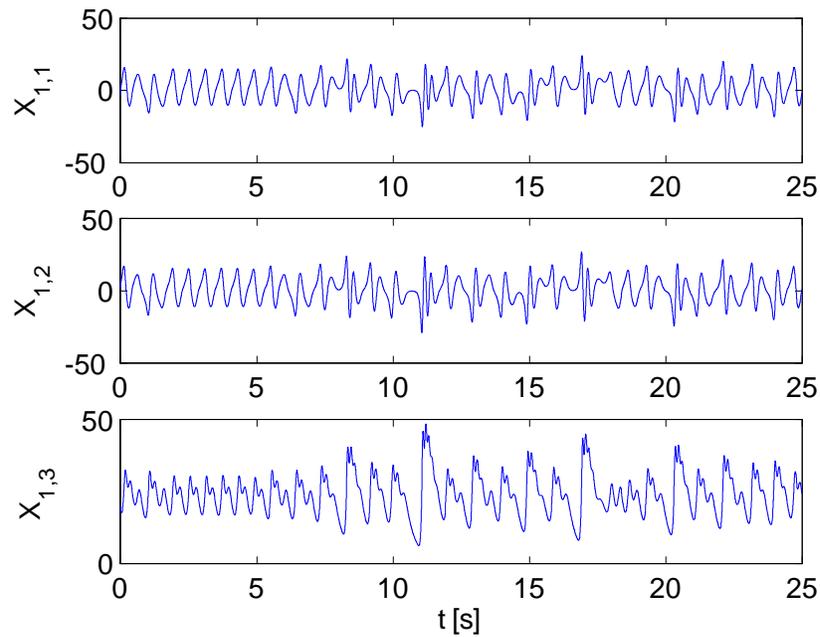
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{i1} \\ \dot{x}_{i2} \\ \dot{x}_{i3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(x_{i2} - x_{i1}) + \gamma \sum_{j=1}^N g_{ij} x_{j1} + u_{i1} \\ (c - a - x_{i3})x_{i1} + cx_{i2} + \gamma \sum_{j=1}^N g_{ij} x_{j2} + u_{i2} \\ x_{i1}x_{i2} - bx_{i3} + \gamma \sum_{j=1}^N g_{ij} x_{j3} + u_{i3} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \tag{3.15}$$

Où

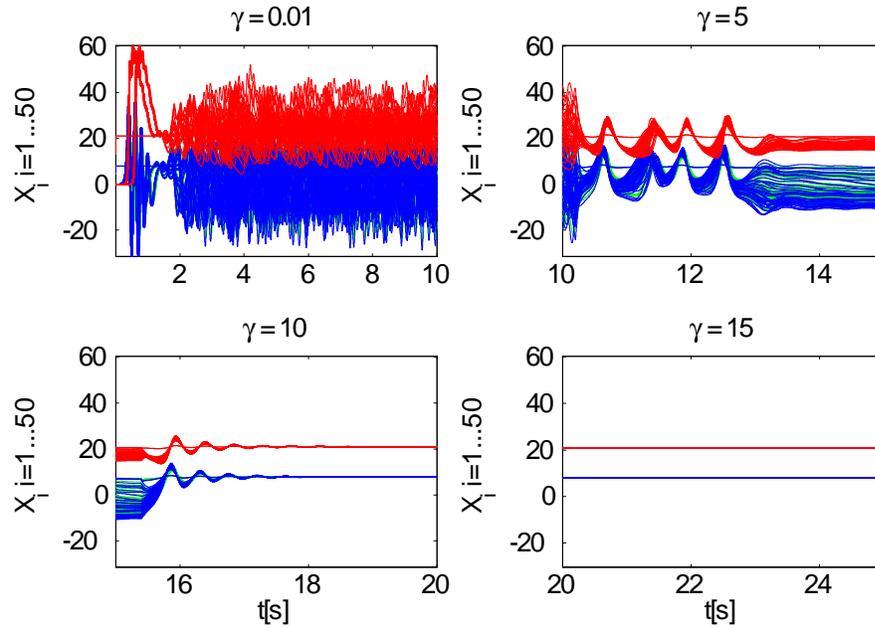
$$u_{ij} = \begin{cases} \gamma d (x_{ij} - \bar{x}_2) & i = i_1, i_2, \dots, i_l, j = 1, 2, 3, \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases} \tag{3.16}$$



**Fig. 3.2.** Représentation d'un réseau invariant d'échelle de type Chen, avec  $N=50$  nœuds.



**Fig. 3.3.** Représentation d'un seul nœud du réseau invariant d'échelle de type Chen.



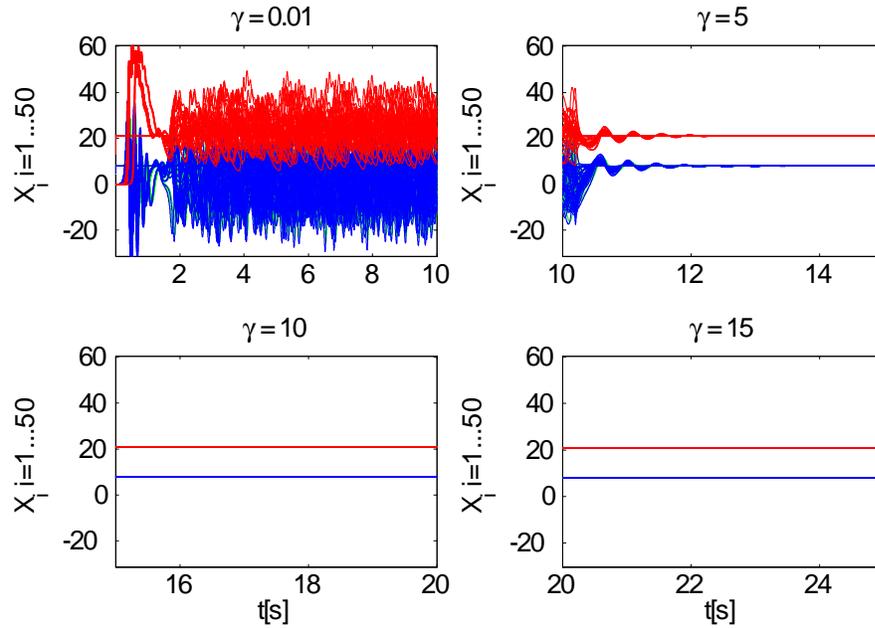
**Fig. 3.4.** 02 super-nœuds épinglés dans un réseau de 50 nœuds généré par le modèle de BA invariant d'échelle : (a)  $\gamma=0.01$ , (b)  $\gamma=5$ , (c)  $\gamma=10$ , (d)  $\gamma=15$  et  $d=1000$ .

### 3.6 Résultats de simulations

La figure (3.4) permet de visualiser le processus de contrôle d'un réseau de 50 nœuds générés par le modèle invariant d'échelle BA, où seuls 2 super-nœuds sont épinglés, qui disposent de 18 et 22 degrés respectivement.

La figure (3.5) comprend le même processus de stabilité avec 6 super-nœuds épinglés, à savoir 14, 18, 22, 16, 13 et 10 degrés, respectivement. On peut remarquer que l'augmentation de la fraction  $\delta$  permet d'accélérer la convergence, d'où la stabilisation du réseau, comme illustré sur la figure (3.6), mais nous savons, par contre, qu'une plus grande fraction de  $\delta$  signifie aussi que plus de contrôleurs sont utilisés. Et dans la même figure (3.6) on remarque, qu'épinglé un seul nœud n'a pas suffi pour stabiliser tout le réseau. C'est à partir de deux nœuds épinglés que le réseau commence à se stabiliser.

Un autre point qui est plus important : dans les figures (3.6), à chaque intervalle de temps  $t$ , on fait augmenter le coefficient de couplage (groupement) de cinq unités.

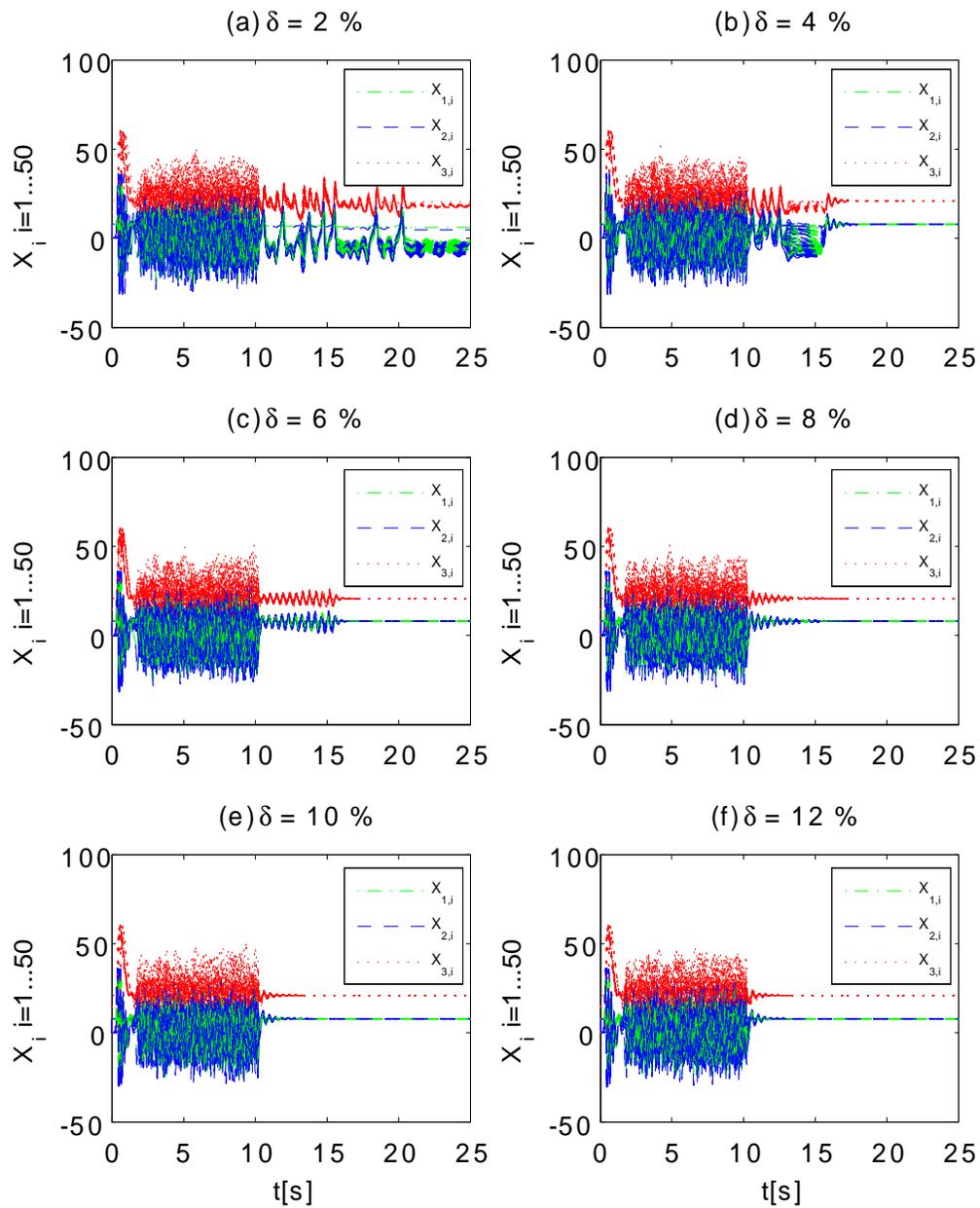


**Fig. 3.5.** 06 super-nœuds épinglés dans un réseau de 50 nœuds généré par le modèle de BA invariant d'échelle : (a)  $\gamma=0.01$ , (b)  $\gamma=5$ , (c)  $\gamma=10$ , (d)  $\gamma=15$  et  $d=1000$ .

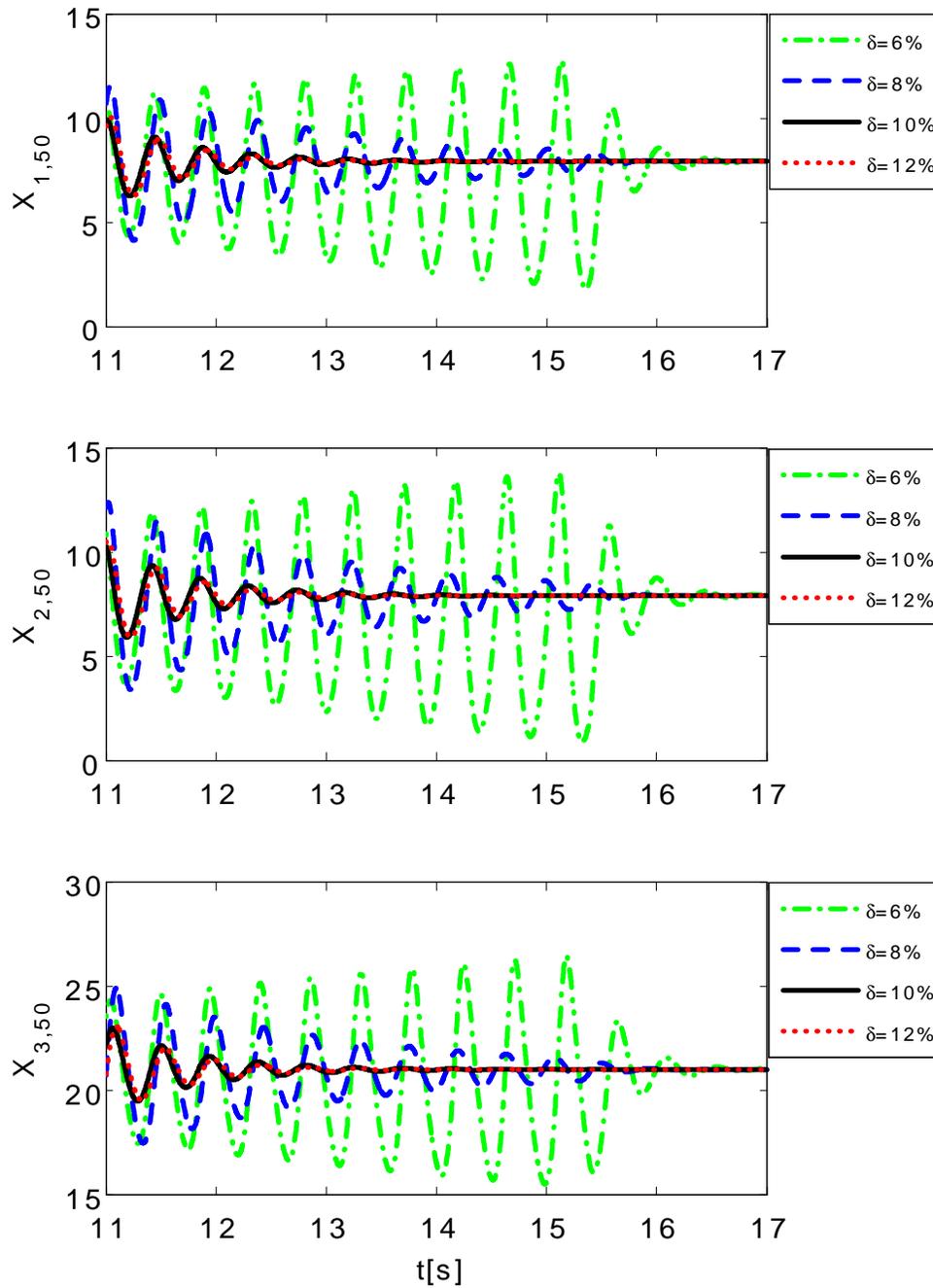
Pour  $t \in [0, 10s]$ , tous les nœuds sont chaotiques. Pour  $t \in [10s, 15s]$ , les nœuds deviennent plus synchrones, alors qu'à partir de  $t > 15s$ , ces derniers commencent à se stabilisés vers le point d'équilibre instable  $\bar{x}_2$ .

Afin de vérifier la convergence de tous les nœuds vers leur point d'équilibre instable, on va illustrer le pire des cas. Pour cela, on va tracer seulement le petit nœud qui possède le minimum de connexions, puis de vérifier son évolution en fonction du temps.

La figure (3.7) illustre le contrôle du plus petit nœud de degré 2. On remarque d'abord que le nœud en question s'est stabilisé autour du point d'équilibre instable  $\bar{x}_2$ . Ainsi, plus la fraction  $\delta$  est importante, plus le nœud converge rapidement.



**Fig. 3.6.** Convergence de stabilisation du réseau en fonction de l'augmentation du nombre de nœuds épinglés.



**Fig. 3.7.** Convergence du plus petit nœud dans un réseau de 50 nœuds généré par le modèle de BA invariant d'échelle.

### 3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons illustré quelques résultats de simulations, après avoir appliqué la loi de commande (Pinning control), sur un réseau dynamique complexe à nœuds chaotiques de type Chen. Cette loi tien en compte un nombre précis de nœuds épinglés, et d'après nos simulations, il s'est avéré que, plus on augmente le nombre de nœuds épinglés, plus la convergence du réseau devient plus rapide envers le point d'équilibre instable, jusqu'à arriver à un choix optimal, sachant que  $0 < \delta \ll 1$ .

# Chapitre 4

## Contrôle des réseaux dynamiques complexes

### 4.1 Introduction

Dans le contrôle épinglant (Pinning control) et au chapitre précédent, on remarque la méthode utilise les points d'équilibre instables dans la loi de commande comme une donnée prédéfinie. Et pour avoir recours à cette situation, nous avons opté dans notre première contribution à une autre solution plus consistante.

Dans ce chapitre, nous allons aborder une conception intéressante d'un contrôleur efficace, et ceci pour une classe de réseaux dynamiques complexes (*RDCs*). Cette dernière se caractérise par une structure typique, invariante d'échelle par l'intermédiaire de nœuds de type Chen et Chua. Le contrôle direct de chaque nœud dans un *RDC* avec un grand nombre de nœuds peut-être inutile. Basé sur le concept du contrôle du type pinning (contrôle par attachement ou contrôle épinglant) des systèmes chaotiques à temps continu et de la théorie de la matrice mesure, de simples critères de stabilité sont développés pour garantir la stabilité asymptotique des états du système tels que tous les états convergent vers le point d'équilibre instable désiré. Par conséquent, le contrôleur proposé et développé ici pour les réseaux invariants d'échelle peut être utilisé pour gérer une classe plus large de *RDCs* avec de différents types de nœuds. Des simulations numériques sont fournies pour montrer l'efficacité de la méthode de contrôle proposée.

## 4.2 Choix du réseau

Dans les réseaux aléatoires et à l'inverse de la distribution démocratique des liens, les réseaux dont une minorité de super-nœuds sont reliés à presque tout le reste, utilise la loi de puissance (Exemple : cas de Google). Ce type de réseau est nommé invariant d'échelle car le système ne suit pas d'échelle caractéristique. Notamment, le fait qu'un nombre limité de nœuds contient un grand nombre de liaisons avec d'autres qui sont peu connectés. En d'autre terme, doté de nombreux nœuds peu connectés et d'une minorité (super-nœuds) qui le sont beaucoup. De tels réseaux développent des comportements envisageables. Contrairement aux réseaux aléatoires, ils sont remarquablement résistants aux défaillances accidentelles, mais extrêmement vulnérables aux attaques concertées.

Le concept de ces réseaux dominés par quelques super-nœuds, prouve que beaucoup de systèmes complexes ont une architecture précise, gouvernée par des lois fondamentales qui s'appliquent aussi bien au fonctionnement des cellules, des ordinateurs, des langues et des sociétés. En plus, ces principes organisateurs auraient d'autres applications, telles que la protection du réseau internet contre le piratage, ou dans un autre registre, la lutte contre les épidémies [3].

## 4.3 Domaines d'application

Au cours des deux dernières décennies, et à la croissante demande pour la modélisation des systèmes complexes au monde réel, les *RDCs* ont fait l'objet d'un important travail de recherche dans différentes disciplines telles qu'internet, les réseaux sociaux, les réseaux écologiques, les réseaux de collaboration scientifique, etc. [13, 45]. Typiquement, les *RDCs* se caractérisent par deux structures topologiques, connues sous le nom de la carte réseau couplé (CML : Coupled Map Lattice) [46] et le réseau cellulaire neuronal (CNN : Cellular Neural Network) [47].

Le problème de contrôle des réseaux dynamiques invariants d'échelle a été largement étudié au cours des dernières années. Wang et Chen tout d'abord étudié le contrôle d'un *RDC* invariants d'échelle à son équilibre en utilisant le concept du contrôle épinglant [48]. Li et al [49] en outre ont précisé les conditions stables puis développé le contrôle épinglant à la propagation du contrôle virtuelle afin d'explorer l'efficacité des stratégies sélectives d'attachement. Xiang et al. [50] ont étudié le contrôle épinglant d'un système dynamique complexe en temps continu avec des topologies générales de couplage, puis, développé les résultats précédents au domaine discret. Des progrès récents dans le contrôle des *RDCs* en utilisant le pinning control peuvent être retrouvés dans [41]. De nombreux autres chercheurs ont apporté une contribution significative au contrôle des *RDCs* en utilisant une variété de techniques au contrôle [51, 57]. Li et Chen [51] ont proposé une méthode de contrôle de telle sorte que la stabilité asymptotique des *RDCs* soit garantie en utilisant le théorème de stabilité de Lyapunov. Yuan et al. [52] ont développé une méthode de contrôle pour assurer la stabilité asymptotique uniforme du *RDC* par la théorie de stabilité de Lyapunov. Le contrôle décentralisé [53, 54, 55], le contrôle de la passivité [55] et le contrôle impulsif [57] ont également été mis au point et appliqués aux *RDCs*.

Diverses méthodes ont été explorées pour avoir des conditions suffisantes de stabilité asymptotique globale ou locale. Chen et Su expliquaient dans [41] les conditions de stabilité pour la synchronisation des réseaux dynamiques complexes via attachement. Les stratégies sélectives du contrôle épinglant ont plusieurs manières et jouent un rôle important dans le but de réaliser une meilleure efficacité. Wang et Chen [48] ont montré qu'on épinglant les nœuds de degré élevé est plus efficace qu'on épinglant ceux choisis au hasard dans un réseau invariant d'échelle. Li et al [49] en outre, ont proposé le concept de contrôle virtuel, ainsi ils ont montré pourquoi l'étude du contrôle épinglant sur les liens de degrés importants est plus efficace qu'épinglère aléatoirement un réseau invariant échelle. Chen et Su [41] illustraient qu'en raison de la nature des

réseaux invariants d'échelle non homogène, il est beaucoup plus facile de stabiliser un réseau invariant d'échelle en plaçant d'une manière spécifique, les contrôleurs locaux sur les super-nœuds avec un degré important.

D'autre part, le contrôle du chaos est un sujet important dans la science non linéaire, et peut être accompli via différentes approches telles que le contrôle adaptatif [58, 59], le contrôle d'ordre élevé [60, 61], le contrôle passif [62, 63], le contrôle optimal [64], le contrôle sur la base de prédiction [65, 66, 67], et ainsi de suite. En particulier, la méthode de contrôle basé sur la prédiction peut être considérée comme une sorte de stratégie de contrôle adaptatif [68]. Parmi les différentes méthodes, Boukabou et al [66] ont proposé une méthode de contrôle prédictif pour le contrôle des systèmes chaotiques à temps continu. Il a été montré que cette méthode garantit la stabilité de l'ensemble des points d'équilibre incorporés dans le système chaotique. Hadeef et Boukabou démontré dans [69] que tous les points d'équilibre instables du système de Chen multi-scroll peuvent être stabilisés à l'aide du procédé de contrôle proposé par la matrice mesure. Néanmoins, le contrôle de réseaux dynamiques complexes en utilisant la prédiction et la matrice mesure est un concept qui n'a pas encore été réalisé.

#### 4.4 Contribution

Dans l'une de nos contributions, nous abordons le problème de commande pour un réseau dynamique invariant d'échelle à nœuds chaotiques de Chen et Chua, où seuls une fraction  $\delta$  de nœuds est épinglé. Sur la base des deux concepts à la fois la matrice mesure ainsi que le contrôle prédictif, nous dérivons quelques critères pour la stabilité asymptotique de ce type de réseau. Par conséquent, la méthodologie proposée offre la possibilité de stabiliser tous les points d'équilibre instables considérés dans les équations d'état, en appliquant l'entrée de commande à une seule variable d'état du système. L'avantage de cette approche, c'est qu'elle offre la possibilité de stabiliser

tous les nœuds présents dans le réseau, et plus important, c'est sans avoir une valeur prédéfinie du point d'équilibre instable. Des simulations numériques sont fournies pour montrer l'efficacité de la méthode de contrôle proposée.

## 4.5 Description d'un model de réseau invariant d'échelle

Dans le cas où chaque nœud est considéré comme un système dynamique de dimensions  $N$ , les équations d'état du réseau invariant d'échelle peuvent être exprimées comme suit

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = f(\mathbf{x}_i(t)) + \gamma \sum_{j=1, j \neq i}^N g_{ij} \Gamma \mathbf{x}_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.1)$$

où  $x_i = [x_i^1, \dots, x_i^n]^T \in \mathbb{R}^N$  est le vecteur d'état du  $i^{\text{ème}}$  nœud,  $t \in [0, +\infty[$  est le facteur temps,  $f : \mathbb{R}^N \times [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^N$  est une fonction continue et  $\gamma > 0$  désigne le coefficient de groupement (couplage) entre le nœud  $i$  et celui de  $j$ ,  $\Gamma = (\tau_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  est une matrice liaison des variables couplés,  $\mathbf{G} = (g_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  est une matrice de couplage. Si certaines paires  $(i, j)$ ,  $1 \leq i, j \leq N$ , avec  $\tau_{ij} \neq 0$ , alors les deux nœuds couplés sont liés par leurs  $i^{\text{ème}}$  et  $j^{\text{ème}}$  variable d'état, respectivement.

## 4.6 Méthodes de contrôle des réseaux dynamiques complexes

Ushio et Yamamoto [70, 71] proposent un contrôleur dynamique à retour d'état prédictif pour les systèmes chaotiques, basés sur le principe de la méthode de Pyragas [27]. La loi de contrôle est calculée à partir de la différence entre l'état actuel et l'état futur du système chaotique. Les états du contrôle prédictif convergeront vers les points fixes stabilisés, puisque les approximations ne sont pas employées dans la boucle à retour d'état, qui est l'avantage de cette méthode [28]. A partir de là, on va

généraliser la méthode en question afin de pouvoir contrôler tout un réseau vers le point d'équilibre instable du système.

L'entrée de commande à retour d'état est choisie comme suit

$$\mathbf{u}_i(t) = \mathbf{K}[Ax_i(t) - x_i(t)], \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.2)$$

où  $A$  est la matrice Jacobiënne qu'on va définir plus tard.

#### 4.6.1 Algorithme de contrôle

L'algorithme de contrôle proposé pour les systèmes dynamiques non linéaires continus, est ensuite généralisé pour les réseaux dynamiques complexes. Soit le système dynamique non linéaire et continu, de dimension  $N$  [28], défini par

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), u(t)) \quad (4.3)$$

$x(t)$  est l'état actuel du système et  $u(t)$  son contrôle. Ce dernier est donné par la relation

$$\mathbf{u}(t) = K(x_p - x(t)) \quad (4.4)$$

tel que  $x_p$  représente l'état prédit.

Ainsi le système chaotique contrôlé est donné par

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(x(t)) + K(x_p - x(t)) \quad (4.5)$$

La prédiction d'un pas en avant aboutit à

$$\mathbf{u}(t) = K(\dot{\mathbf{x}}(t) - x(t)) \quad (4.6)$$

D'où le système chaotique contrôlé devient

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(x(t)) + K(\dot{\mathbf{x}}(t) - x(t)) \quad (4.7)$$

On souhaite stabiliser l'orbite périodique instable  $\bar{x}$ , qui satisfait

$$\bar{x} = f(\bar{x}, 0) \quad (4.8)$$

Le système est linéarisé autour de  $\bar{x}$

$$\begin{aligned} \delta\dot{\mathbf{x}}(t) &= A\delta x(t) + K(\delta\dot{\mathbf{x}}(t) - \delta x(t)) \\ &= (A + K(A - I))\delta x(t) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Enfin, le système contrôlé sera décrit par [72]

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{cases} f(x(t)) + u(t) & \text{si } r(t) < \varepsilon \\ f(x(t)) & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4.10)$$

$\varepsilon$  est un petit nombre positif et  $r(t)$  est le voisinage du point fixe déterminé par

$$r(t) = |x(t) - x(t-1)| \quad (4.11)$$

**Définition 6** Soit une matrice réelle carrée  $D = (d_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ , la matrice mesure de  $A$  est définie comme suit [73]

$$\mu_p(D) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\|I_n + \varepsilon D\|_p - 1}{\varepsilon} \quad (4.12)$$

où  $\|\cdot\|_p$  est la norme de la matrice induite telle que  $p = 1, 2$  ou  $\infty$ .  $I_n$  est la matrice identité.

Pour  $\|D\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^N |d_{ij}|$ ,  $\|D\|_2 = [\lambda_{\max}(D^T D)]^{\frac{1}{2}}$ , et  $\|D\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^N |d_{ij}|$ , nous pourrions tirer les respectivement, les matrices mesures suivantes

$$\mu_1(D) = \max_j \left\{ d_{jj} + \sum_{j=1, j \neq i}^N |d_{ij}| \right\} \quad (4.13)$$

$$\mu_2(D) = \frac{1}{2} \lambda_{\max}(D^T + D) \quad (4.14)$$

$$\mu_\infty(D) = \max_i \left\{ d_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^N |d_{ij}| \right\} \quad (4.15)$$

**Lemme 7** [69] *S'il existe une matrice gain à retour d'état  $K$  telle que*

$$\mu_p(A + K(A - I_n)) < 0, \quad p = 1, 2, \infty \quad (4.16)$$

*où  $A$  est la matrice Jacobienne et  $I_n$  est la matrice identité, alors, le RDC (4.18) est globalement asymptotiquement stable. Ainsi, les états de tous les nœuds du RDC, convergent vers les points d'équilibre instables.*

**Corollaire 8** *Le RDC (4.18) contrôlé est globalement asymptotiquement stable, s'il existe une matrice gain à retour d'état  $K$  telle qu'au moins, l'une des conditions suivantes est satisfaite.*

$$\begin{aligned} & \max_i \left\{ a_{ii} + k_i(a_{ii} - 1) + \sum_{j=1, j \neq i}^N |a_{ij}| \right\}, \\ & \max_j \left\{ a_{jj} + k_j(a_{jj} - 1) + \sum_{j=1, j \neq i}^N |a_{ij}| \right\}, \\ & \lambda_{\max} \left\{ (A + K(A - I_n))^T + (A + K(A - I_n)) \right\} < 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

*où  $\lambda_{\max}$  est la valeur propre maximale de la matrice entre parenthèses.*

**Remarque 9** *Tous les nœuds du RDC sont stables, uniquement si  $\det(A - I_n) \neq 0$ .*

### 4.6.2 Contrôle prédictif globale

L'objectif est de stabiliser tout le réseau vers un point d'équilibre instable par l'application d'une loi de commande à tous les nœuds dans un réseau invariant d'échelle. Par conséquent, les équations d'état du réseau contrôlé sont donnés par

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = f(\mathbf{x}_i(t)) + \gamma \sum_{j=1, j \neq i}^N g_{ij} \Gamma \mathbf{x}_j(t) + \mathbf{u}_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.18)$$

où  $\mathbf{u}_i = [u_{i1}, \dots, u_{iN}]^T \in \mathbb{R}^N$  est l'entrée de commande à concevoir. Ainsi, l'objectif est de trouver l'action de commande à appliquer pour que les nœuds contrôlés détectent la cible

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_i(t) - \bar{\mathbf{x}}\| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.19)$$

or  $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^N$  est le point d'équilibre instable à stabiliser.

#### 4.6.2.1 Réseau invariant d'échelle à nœuds chaotiques de type Chua

Dans cet exemple, nous considérons un RDC invariant d'échelle de telle sorte que chaque noeud sera décrit par le système chaotique de Chua comme suit

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x_2 - x_1 - h(x_1)) \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ -\beta x_2 \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

où  $x_1, x_2$  et  $x_3$  sont des variable d'état.  $\alpha$  et  $\beta$  des paramètres du système.  $h(x_1) = m_1 x_1 + \frac{m_0 - m_1}{2} (|x_1 + 1| - |x_1 - 1|)$  représente l'élément non linéaire du circuit, avec.

$$h(x_1) = \begin{cases} m_1 x_1 + (m_0 - m_1) & \text{si } x_1 \geq 1 \\ m_0 x_1 & \text{si } |x_1| < 1 \\ m_1 x_1 - (m_0 - m_1) & \text{si } x_1 \leq -1 \end{cases} \quad (4.21)$$

à savoir que  $\alpha = 10$ ,  $\beta = 14.87$ ,  $m_0 = -1.27$ ,  $m_1 = -0.68$ . Le système de Chua admet un comportement chaotique comme représenté dans la figure (4.1).

La matrice Jacobienne du système de Chua est donnée par

$$A = \begin{bmatrix} \alpha(-1 - h(x_1)) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

1. Au point d'équilibre  $\bar{x}_1$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha(1 + m_1) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

2. Au points fixes  $\bar{x}_{2,3}$

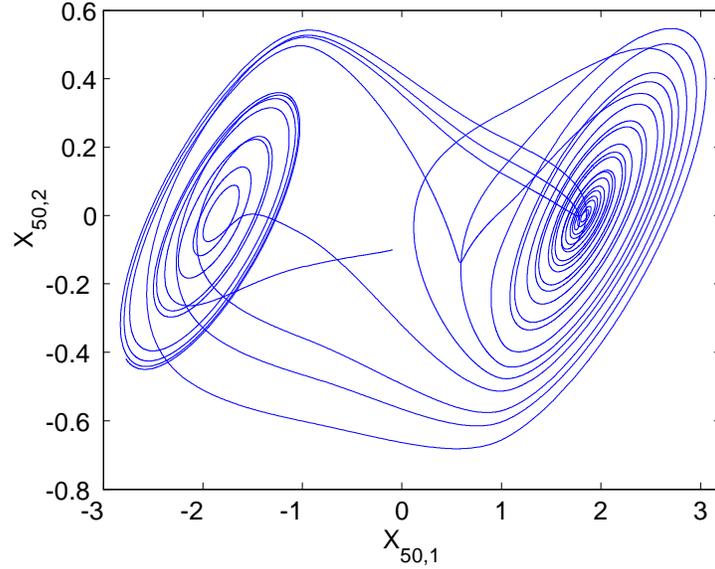
$$A = \begin{bmatrix} -\alpha(1 + m_0) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Le point d'équilibre du système est

$$\bar{x}_1 = [0, 0, 0]^T, \quad (4.25)$$

Ainsi que les deux points fixes symétriques

$$\begin{aligned} \bar{x}_2 &= \left[ \frac{m_1 - m_0}{m_1 + 1}, 0, \frac{m_0 - m_1}{m_1 + 1} \right]^T = [1.8437, 0, -1.8437]^T, \\ \bar{x}_3 &= \left[ \frac{m_0 - m_1}{m_1 + 1}, 0, \frac{m_1 - m_0}{m_1 + 1} \right]^T = [-1.8437, 0, 1.8437]^T, \end{aligned} \quad (4.26)$$



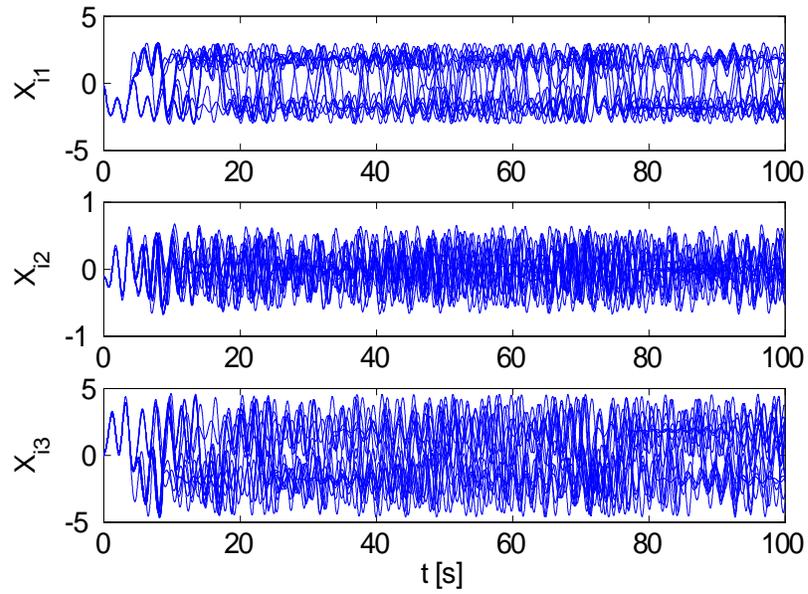
**Fig. 4.1.** Attracteur de Chua : nœud n°50.

Afin de construire un réseau invariant d'échelle (voir la figure (4.2)), on suppose que toutes les variables d'état du système sont couplés, à savoir,  $\Gamma = \text{diag}(1, 1, 1)$ . Ainsi, les équations d'état du *RDC* avec des nœuds de type Chua sont données par

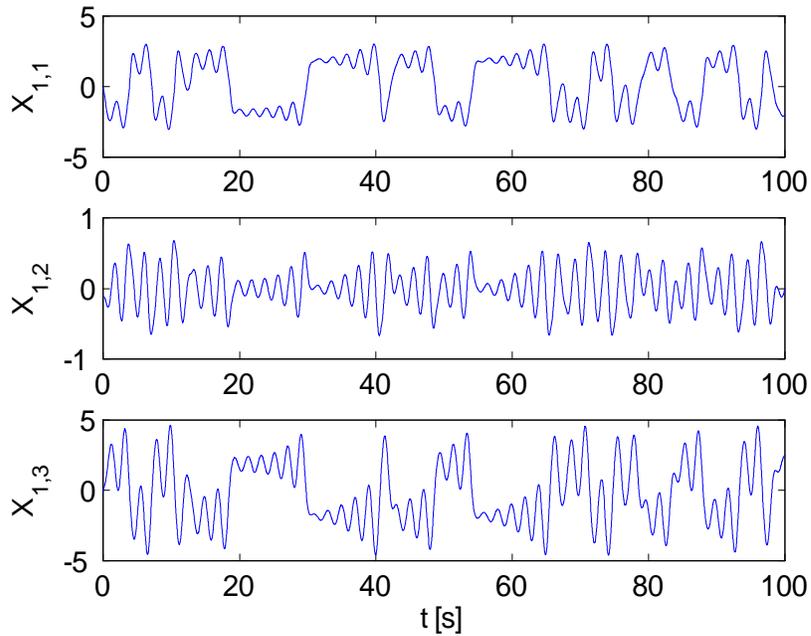
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{i1} \\ \dot{x}_{i2} \\ \dot{x}_{i3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x_2 - x_1 - h(x_1)) + \gamma \sum_{j=1}^N g_{ij} x_{j1} \\ x_1 - x_2 + x_3 + \gamma \sum_{j=1}^N g_{ij} x_{j2} \\ -\beta x_2 + \gamma \sum_{j=1}^N g_{ij} x_{j3} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.27)$$

Pour contrôler tout le réseau sur l'un de ses trois points d'équilibres instables, on doit déterminer d'abord la correction qui sera appliquée à l'état présent. Nous choisissons l'entrée de commande appliquée à la variable  $x_{i1}$ , or  $\mathbf{K} = (k_1, 0, 0)^T$ . L'entrée de commande sera définie comme suit

$$u_i(t) = \begin{cases} \mathbf{u}_{i1}(t) = k_1(\dot{\mathbf{x}}_{i1}(t) - x_{i1}(t)) \\ \mathbf{u}_{i2}(t) = 0 \\ \mathbf{u}_{i3}(t) = 0 \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.28)$$



**Fig. 4.2.** Représentation d'un réseau invariant échelle de type Chua, avec  $N=50$  nœuds.



**Fig. 4.3.** Représentation d'un seul nœud du réseau invariant d'échelle de type Chua.

Les simulations prouvent que le choix du paramètre  $\mathbf{K}$  assure une meilleur convergence de la trajectoire vers les points d'équilibres.

Le réseau dynamique complexe sous contrôle prédictif est alors donné par

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \dot{x}_{i1} \\ \dot{x}_{i2} \\ \dot{x}_{i3} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha(x_{i2} - x_{i1} - h(x_{i1})) + \gamma \sum_{j=1}^N g_{ij}x_{j1} + k_1(x_{i1} - x_{i1}) \\ x_{i1} - x_{i2} + x_{i3} + \gamma \sum_{j=1}^N g_{ij}x_{j2} \\ -\beta x_{i2} + \gamma \sum_{j=1}^N g_{ij}x_{j3} \end{pmatrix}, \\
 &= \begin{pmatrix} \alpha(k_1 + 1)(x_{i2} - x_{i1} - h(x_{i1})) - k_1x_{i1} + \gamma \sum_{j=1}^N g_{ij}x_{j1} \\ x_{i1} - x_{i2} + x_{i3} + \gamma \sum_{j=1}^N g_{ij}x_{j2} \\ -\beta x_{i2} + \gamma \sum_{j=1}^N g_{ij}x_{j3} \end{pmatrix}, \\
 i &= 1, 2, \dots, N,
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

La variable d'état  $x_{i1}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) est linéarisée autour de  $\bar{x}$  par

$$\begin{aligned}
 \delta \dot{x}_{i1} &= \left. \frac{\partial \dot{x}_{i1}}{\partial x_{i1}} \right|_{x_{i1}=\bar{x}} \delta x_{i1}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\
 &= \left. \frac{\partial \left[ \alpha(k_1 + 1)(x_{i2} - x_{i1} - h(x_{i1})) - k_1x_{i1} + \gamma \sum_{j=1}^N g_{ij}x_{j1} \right]}{\partial x_{i1}} \right|_{x_{i1}=\bar{x}} \delta x_{i1}
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

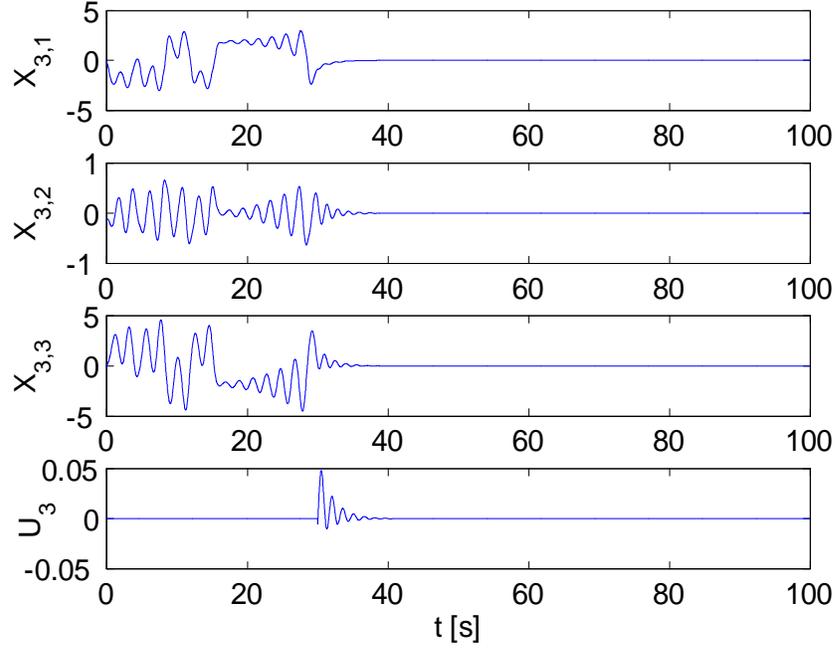
sachant que  $\gamma \sum_{j=1}^N g_{ij}x_{j1}$  représente une constante.

### 1. Au point d'équilibre

$$\delta \dot{x}_{i1} = [\alpha(-1 - m_0) + k_1(\alpha(-1 - m_0) - 1)] \delta x_{i1}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \tag{4.31}$$

Le contrôle prédictif stabilise ce point d'équilibre si la valeur du gain  $k_1$  satisfait l'inégalité suivante

$$|\alpha(-1 - m_0) + k_1(\alpha(-1 - m_0) - 1)| < 1 \tag{4.32}$$



**Fig. 4.4.** Contrôle prédictif du circuit de Chua au point d'équilibre  $\bar{x}_1$ , pour un seul nœud.

Donc

$$-2.176 < k_1 < -1 \quad (4.33)$$

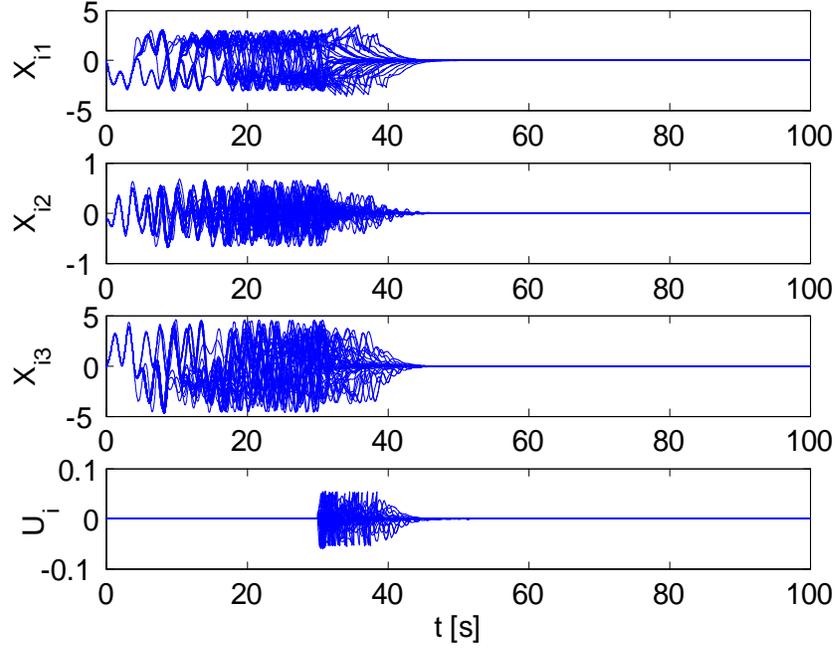
Pour un choix de  $k_1 = -1.25$ ,  $\mathbf{K} = (-1.25, 0, 0)^T$  et à partir des conditions initiales  $x_i(0) = (-0.1, -0.1, -0.1)^T$ , les résultats obtenus suite à l'application de la loi de contrôle prédictif sont représentés par les figures (4.4) et (4.5). Le contrôle est activé pour  $t > 30s$ .

Pour de petites valeurs prises par l'entrée de commande  $\mathbf{u}_i$ , Les variables d'états dans tous les nœuds du réseau seront assez proches du point d'équilibre en question, dont tous les nœuds vont se stabiliser après un régime transitoir.

## 2. Aux points fixes $\bar{x}_{2,3}$

De la même manière, la variable d'état  $x_{i1}$  est linéarisé autour de  $\bar{x}_{2,3}$  par

$$\delta \dot{x}_{i1} = [\alpha(-1 - m_1) + k_1(\alpha(-1 - m_1) - 1)] \delta x_{i1}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.34)$$



**Fig. 4.5.** Contrôle prédictif du circuit de Chua au point d'équilibre  $\bar{x}_1$ , pour 50 nœuds.

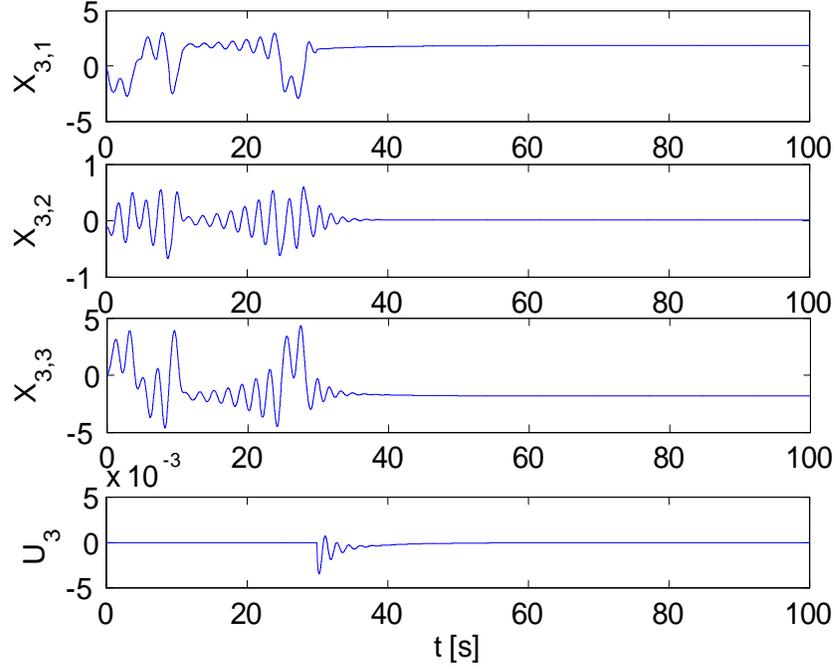
Par contre, dans ce cas,  $k_1$  doit satisfaire l'inégalité

$$|\alpha(-1 - m_1) + k_1(\alpha(-1 - m_1) - 1)| < 1 \quad (4.35)$$

Alors

$$-1 < k_1 < -0.523 \quad (4.36)$$

En choisissant  $\mathbf{K} = (-0.96, 0, 0)^T$  et à partir des mêmes conditions initiales du cas précédent, les résultats de simulation aux nœuds  $i = 3$  et  $i = 1$ , pour stabiliser le système sur les points d'équilibres  $\bar{x}_2$  et  $\bar{x}_3$  sont illustrés dans les figures (4.6) et (4.8) respectivement. Autrement, la figure (4.7) montre la stabilité de 11 nœuds sur  $\bar{x}_2$  et la figure (4.9), celles de 39 autres nœuds sur  $\bar{x}_3$ . Ainsi, le contrôle est activé à  $t > 30s$ .



**Fig. 4.6.** Contrôle prédictif du RDC de type Chua au point d'équilibre  $\bar{x}_2$ , pour un seul nœud.

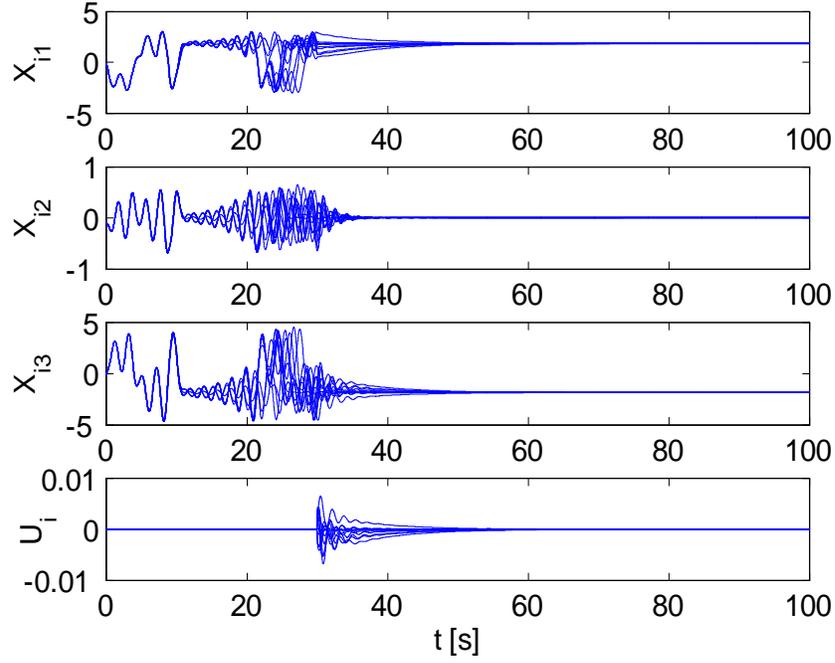
#### 4.6.2.2 Réseau invariant d'échelle à nœuds chaotiques de type Chen

Les caractéristiques du réseau dynamique invariant d'échelle à nœuds chaotiques sont détaillées dans la partie (3.4). Les équations d'état du RDC à nœuds chaotiques de Chen sont données par la relation (3.14).

L'entrée de commande sera appliquée à la variable  $x_{i2}$ , or  $\mathbf{K} = (0, k_2, 0)^T$ . Elle est définie comme suit

$$u_i(t) = \begin{cases} \mathbf{u}_{i1}(t) = 0 \\ \mathbf{u}_{i2}(t) = k_2(\dot{\mathbf{x}}_{i2}(t) - x_{i2}(t)) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ \mathbf{u}_{i3}(t) = 0 \end{cases} \quad (4.37)$$

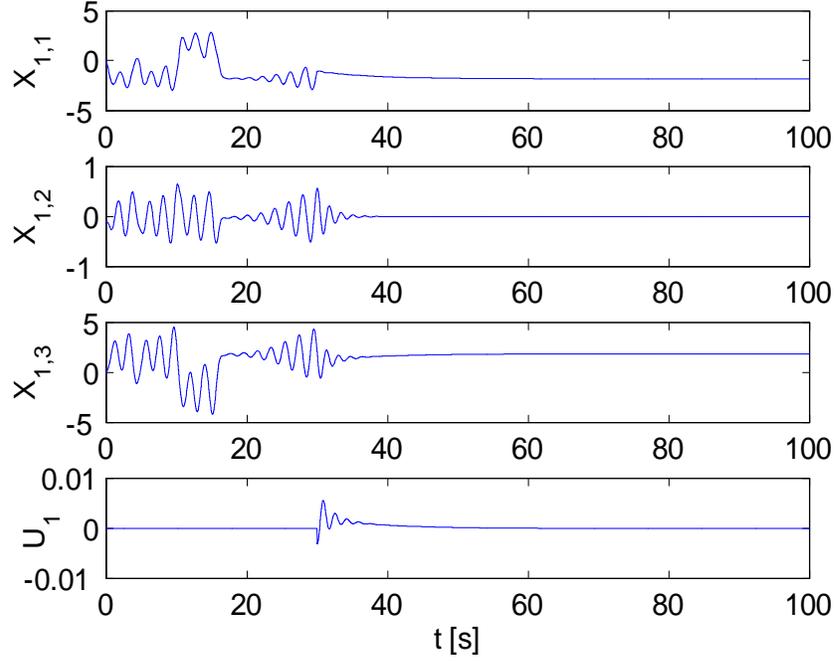
Le réseau dynamique complexe sous contrôle prédictif est alors donné par



**Fig. 4.7.** Contrôle prédictif du RDC de type Chua au point d'équilibre  $\bar{x}_2$ , pour 11 nœuds.

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \dot{x}_{i1} \\ \dot{x}_{i2} \\ \dot{x}_{i3} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a(x_{i2} - x_{i1}) + \gamma \sum_{j=1}^N g_{ij}x_{j1} \\ (c - a - x_{i3})x_{i1} + cx_{i2} + \gamma \sum_{j=1}^N g_{ij}x_{j2} + k_2(\dot{x}_{i2} - x_{i2}) \\ x_{i1}x_{i2} - bx_{i3} + \gamma \sum_{j=1}^N g_{ij}x_{j3} \end{pmatrix}, \\
 &= \begin{pmatrix} a(x_{i2} - x_{i1}) + \gamma \sum_{j=1}^N g_{ij}x_{j1} \\ (k_2 + 1)((c - a - x_{i3})x_{i1} + cx_{i2}) - k_2x_{i2} + \gamma \sum_{j=1}^N g_{ij}x_{j2} \\ x_{i1}x_{i2} - bx_{i3} + \gamma \sum_{j=1}^N g_{ij}x_{j3} \end{pmatrix}, \\
 i &= 1, 2, \dots, N,
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

La variable d'état  $x_{i2}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) est linéarisée autour de  $\bar{x}$  par



**Fig. 4.8.** Contrôle prédictif du RDC de type Chua au point d'équilibre  $\bar{x}_3$ , pour un seul nœud.

$$\begin{aligned}
 \delta \dot{x}_{i2} &= \left. \frac{\partial \dot{x}_{i2}}{\partial x_{i2}} \right|_{x_{i2}=\bar{x}} \delta x_{i2}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\
 &= \left. \frac{\partial \left[ (k_2 + 1)((c - a - x_{i3})x_{i1} + cx_{i2}) - k_2x_{i2} + \gamma \sum_{j=1}^N g_{ij}x_{j2} \right]}{\partial x_{i2}} \right|_{x_{i2}=\bar{x}} \delta x_{i2}
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

sachant que  $\gamma \sum_{j=1}^N g_{ij}x_{j2}$  est une constante.

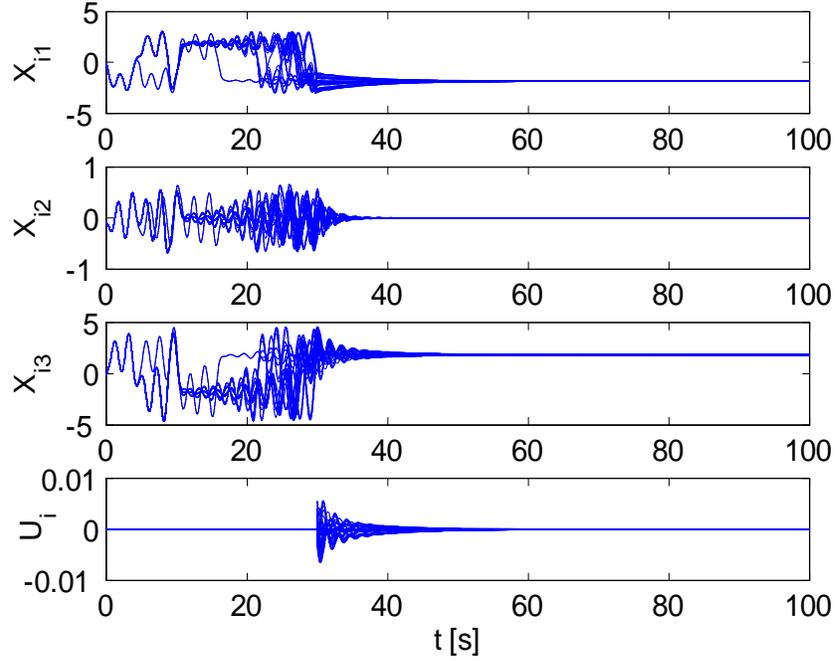
**Aux points fixes  $\bar{x}_{2,3}$**

La variable d'état  $x_{i2}$  est linéarisé autour de  $\bar{x}_{2,3}$  par

$$\delta \dot{x}_{i2} = [c + k_2(c - 1)] \delta x_{i2}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \tag{4.40}$$

Par contre,  $k_2$  doit satisfaire l'inégalité

$$|c + k_2(c - 1)| < 1 \tag{4.41}$$



**Fig. 4.9.** Contrôle prédictif du RDC de type Chua au point d'équilibre  $\bar{x}_3$ , pour 39 nœuds.

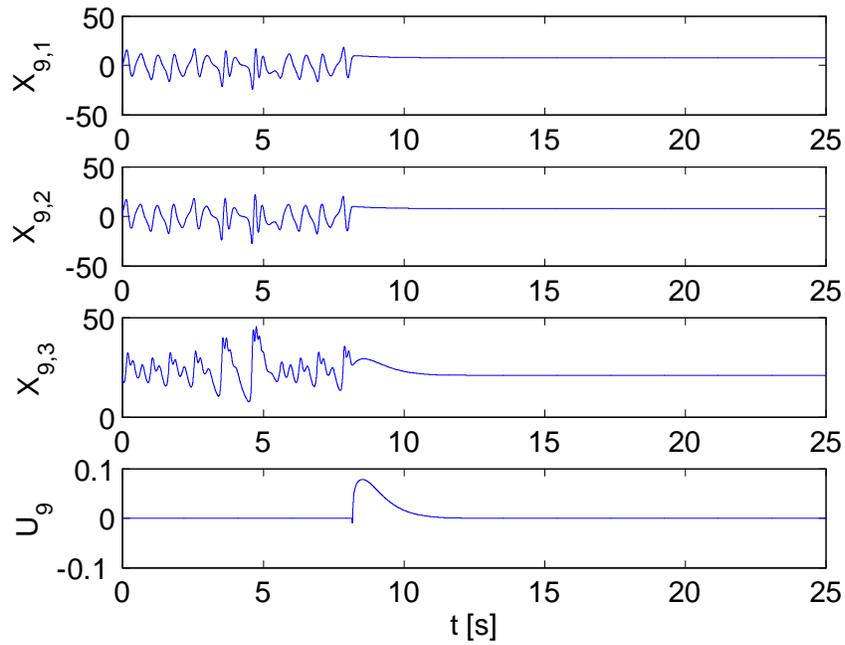
Alors

$$-1.074 < k_2 < -1 \quad (4.42)$$

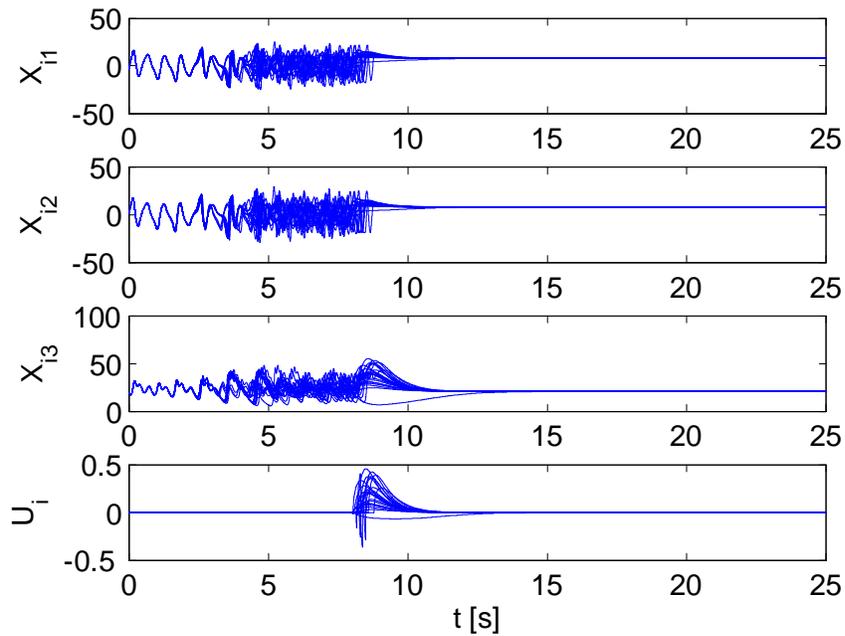
En choisissant  $\mathbf{K} = (0, -1.02, 0)^T$  et à partir des mêmes conditions initiales du cas précédent, les résultats de simulation aux nœuds  $i = 9$  et  $i = 12$ , pour stabiliser le système sur les points d'équilibres  $\bar{x}_2$  et  $\bar{x}_3$  sont illustrés dans les figures (4.10) et (4.12) respectivement. Autrement, la figure (4.11) montre la stabilité de 25 nœuds sur  $\bar{x}_2$  et la figure (4.13), celles de 25 autres nœuds sur  $\bar{x}_3$ . Ainsi, le contrôle est activé à  $t > 8s$ .

### 4.6.3 Contrôle robuste du type Pinning des RDCs invariants d'échelle

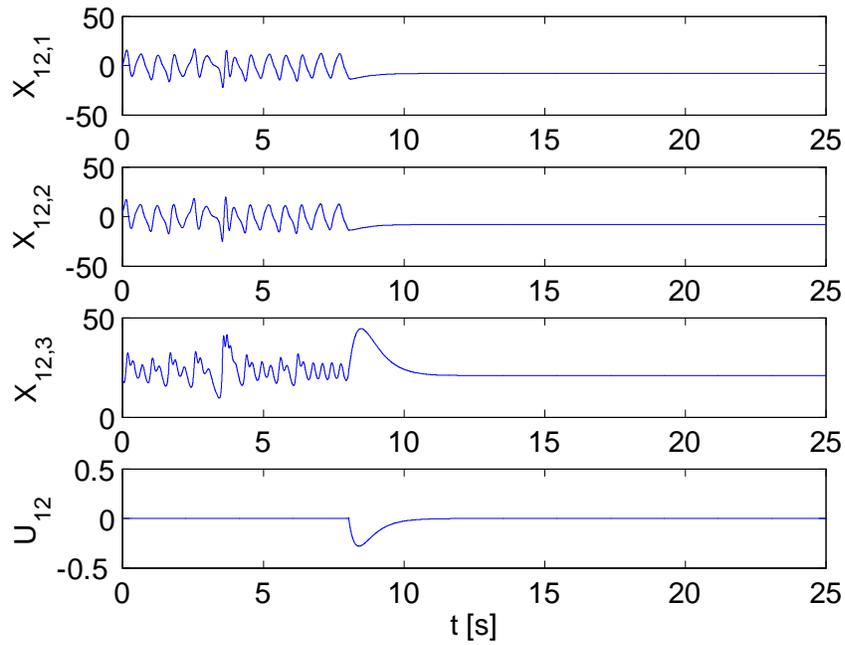
Dans cette partie, nous développons et appliquons une autre méthode de contrôle pour les mêmes réseaux invariants d'échelle dans lesquels, la matrice gain du contrôleur à retour d'état est déterminée à partir d'une nouvelle condition suffisante, et une



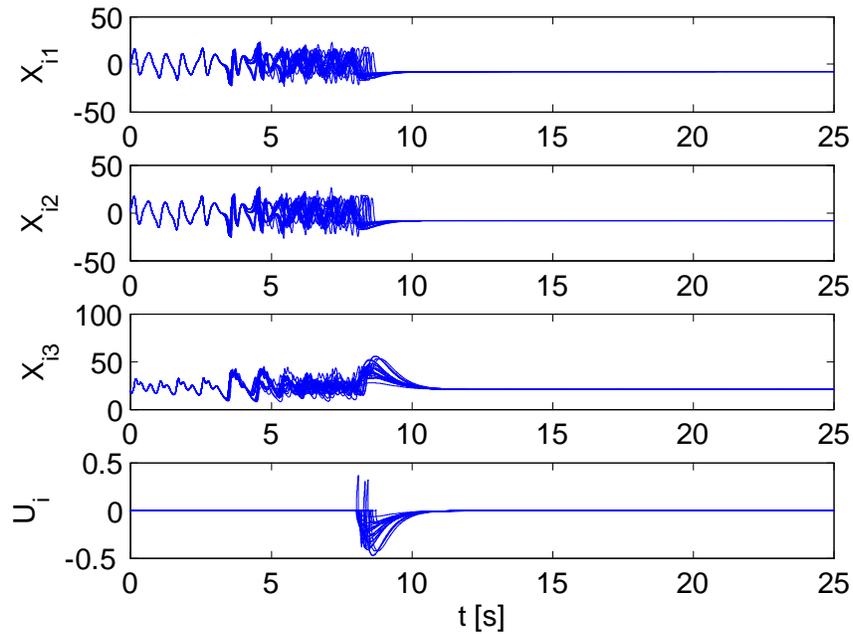
**Fig. 4.10.** Contrôle prédictif du RDC de type Chen au point d'équilibre  $\bar{x}_2$ , pour un seul nœud.



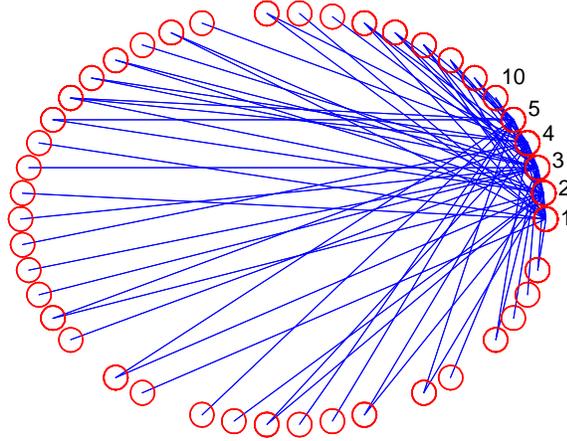
**Fig. 4.11.** Contrôle prédictif du RDC de type Chen au point d'équilibre  $\bar{x}_2$ , pour 25 nœuds.



**Fig. 4.12.** Contrôle prédictif du RDC de type Chen au point d'équilibre  $\bar{x}_3$ , pour un seul nœud.



**Fig. 4.13.** Contrôle prédictif du RDC de type Chen au point d'équilibre  $\bar{x}_3$ , pour 25 nœuds.



**Fig. 4.14.** Super-nœuds et leurs connexions dans un réseau de 50 nœuds.

stabilité asymptotique globale [69]. Cette condition est obtenue en utilisant la théorie de la matrice mesure. La méthode proposée permet d'améliorer les performances du système dans le sens de la réduction de la matrice du gain à retour d'état dans une forme diagonale. La méthode de contrôle est basée sur le concept d'épingler les nœuds de degré élevé du réseau en question (voir la figure (4.14)), alors que la loi de commande est déterminée à partir de la différence entre les états actuels et futurs des nœuds de degré élevé incontrôlés. L'entrée de commande  $\mathbf{u}_i$  est donné par

$$\mathbf{u}_{i'}(t) = \mathbf{K}[Ax_{i'}(t) - x_{i'}(t)], \quad i' = i_1, i_2, \dots, i_l, \quad (4.43)$$

d'où  $i_l$  représente les nœuds épinglés et  $\mathbf{K} = (k_1, k_2, k_3)^T$  est la matrice gain. En conséquence, l'équation d'état du réseau contrôlé est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_i(t) &= f(\mathbf{x}_i(t)) + \gamma \sum_{j=1, j \neq i}^N g_{ij} \Gamma \mathbf{x}_j(t) + \mathbf{u}_{i'}(t), \\ &= f(\mathbf{x}_i(t)) + \gamma \sum_{j=1, j \neq i}^N g_{ij} \Gamma \mathbf{x}_j(t) + \mathbf{K}[Ax_{i'}(t) - x_{i'}(t)], \end{aligned} \quad (4.44)$$

avec  $i = 1, 2, \dots, N$  et  $i' = i_1, i_2, \dots, i_l$ .

**Tab. 4.1.** Les 10 premiers nœuds et leurs nombre de connexions d'un réseau invariant d'échelle généré.

Nœud	Nombre de connexions
1	14
2	18
3	22
4	16
5	13
6	5
7	7
8	8
9	8
10	10

Nous allons appliquer le contrôleur proposé dans la relation (4.43) afin de stabiliser les modèles de réseau invariant d'échelle de types Chen et Chua, définis dans la section précédente. Où et dans un premier temps, seulement  $\delta = 4\%$  de super-nœuds ( $[\delta N]=2$ ) de degrés 18, 22, sont épinglés respectivement. Or, dans une deuxième simulation,  $\delta = 12\%$  de super-nœuds seront aussi épinglés ( $[\delta N]=6$ ) de degrés 14, 18, 22, 16, 13 et 10 respectivement (voir la figure(4.14)).

**Remarque 10** *Dans notre cas et dans la génération du réseau invariant d'échelle composé de 50 nœuds, les 6 super-nœuds résultants correspondants à  $\delta = 12\%$  sont d'ordre 1,2,3,4,5 et 10. Il est à noter que ce choix pourrait varier d'une manière aléatoire (dans le cadre de l'invariance d'échelle bien sûr), comme ça aurait dû être les nœuds 2,3,4,6,7 et 8 par exemple. Ce qui est logique, car la méthode comprend un calcul de probabilité  $p(k_i)$  de la relation (1.7).*

**Remarque 11** *On sait que la génération d'un réseau dynamique inclus un calcul de probabilité. C'est-à-dire qu'à chaque exécution, on aura un réseau distinct du précédent. Or, la comparaison entre les résultats des méthodes de commandes serait inutile.*

Donc, la solution est de générer un réseau qui sera prédéfini, le sauvegarder dans un fichier data; puis de l'utiliser comme référence.

#### 4.6.3.1 Contrôle d'un RDC à nœuds chaotiques de type Chua

Nous choisissons, l'entrée de commande  $\mathbf{u}_{i'}$  ajoutée à la variable d'état  $\mathbf{x}_{i1}$  avec  $\mathbf{K} = (k_1, 0, 0)^T$ , d'où le RDC (4.29) peut être réécrit comme suit

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{i1} \\ \dot{x}_{i2} \\ \dot{x}_{i3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x_{i2} - x_{i1} - h(x_{i1})) + \gamma \sum_{j=1}^N g_{ij}x_{j1} + k_1(\dot{x}_{i1'} - x_{i1'}) \\ x_{i1} - x_{i2} + x_{i3} + \gamma \sum_{j=1}^N g_{ij}x_{j2} \\ -\beta x_{i2} + \gamma \sum_{j=1}^N g_{ij}x_{j3} \end{pmatrix}, \quad (4.45)$$

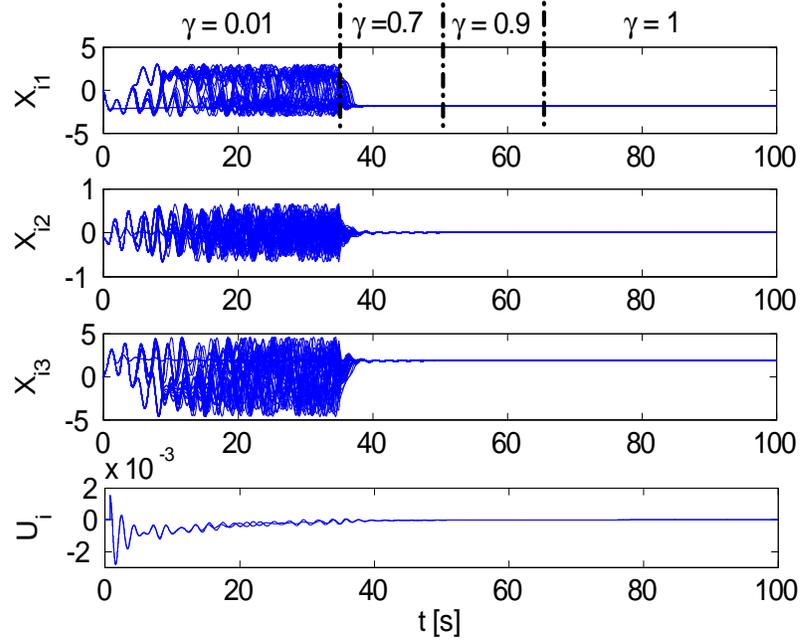
avec  $i = 1, 2, \dots, N$  et  $i' = i_1, i_2, \dots, i_l$ ,

Les figures (4.15) et (4.17) montrent les résultats du processus de stabilisation, pour le RDC de type Chua, où  $N = 50$ ,  $\mathbf{x}_i(0) = (-0.1, -0.1, -0.1)^T$ ,  $\mathbf{K} = (-0.98, 0, 0)^T$  et  $\gamma = \{0.01, 0.7, 0.9, 1\}$ . Par conséquent, tous les états des nœuds du RDC sont asymptotiquement stabilisés, sur le point d'équilibre  $(-1.8437, 0, 1.8437)^T$  souhaité, en appliquant uniquement des petites variations sur la variable d'état  $\mathbf{x}_{i1}$ . Pour une bonne visualisation des résultats, les figures (4.16) et (4.18) représentent le tracé des trois phases correspondant à deux nœuds, l'un d'eux épinglé, dont on remarque une stabilité à l'aide d'un contrôle prédictif, à l'inverse du deuxième qui ne fait que converger vers l'état du premier nœud.

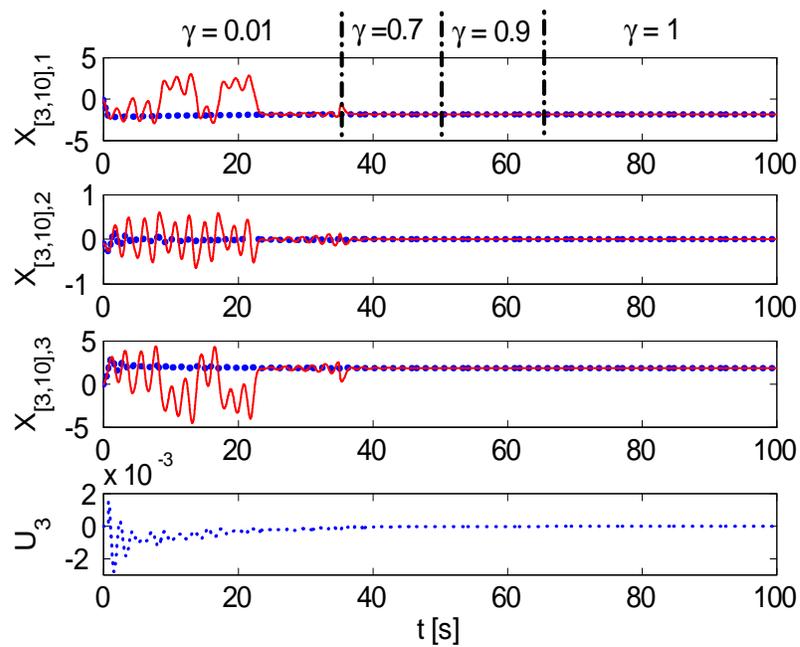
#### 4.6.3.2 Contrôle d'un RDC à nœuds chaotiques de type Chen

Dans ce cas, l'entrée de commande  $\mathbf{u}_{i'}$  ajoutée à la variable d'état  $\mathbf{x}_{i2}$  avec  $\mathbf{K} = (0, k_2, 0)^T$ , alors que le RDC (4.38) est donné par

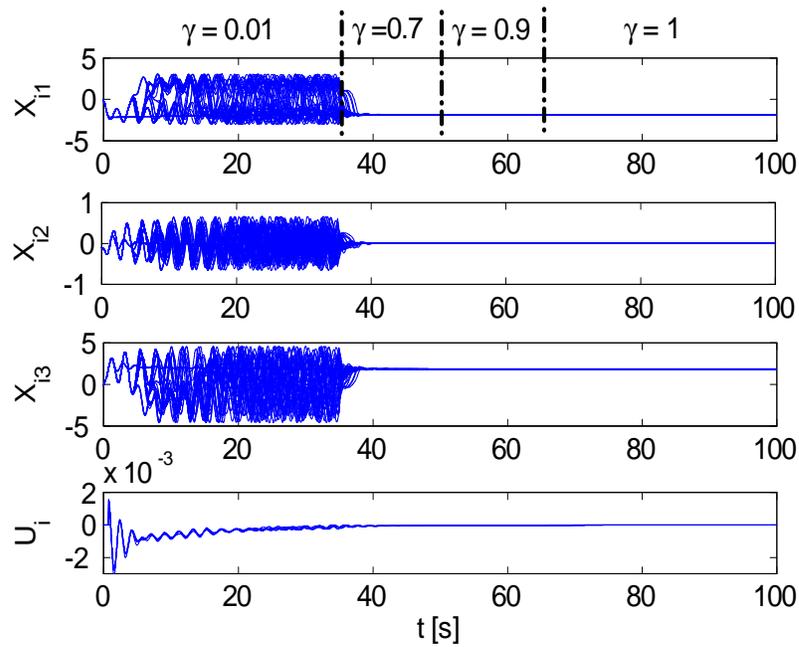
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{i1} \\ \dot{x}_{i2} \\ \dot{x}_{i3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(x_{i2} - x_{i1}) + \gamma \sum_{j=1}^N g_{ij}x_{j1} \\ (c - a - x_{i3})x_{i1} + cx_{i2} + \gamma \sum_{j=1}^N g_{ij}x_{j2} + k_2(\dot{x}_{i2'} - x_{i2'}) \\ x_{i1}x_{i2} - bx_{i3} + \gamma \sum_{j=1}^N g_{ij}x_{j3} \end{pmatrix}, \quad (4.46)$$



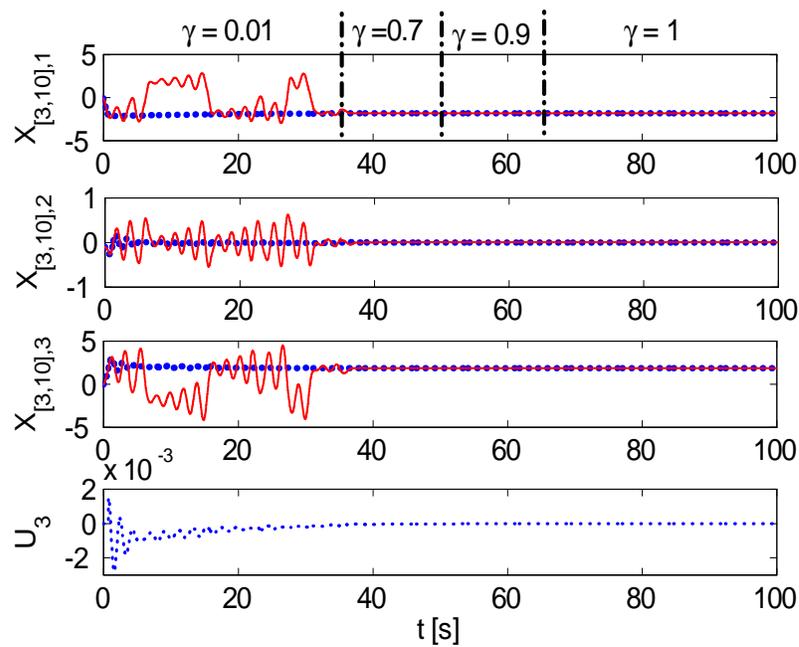
**Fig. 4.15.** Super-nœuds épinglés : 2 et 3 dans un réseau de 50 nœuds chaotiques de type Chua, avec différentes forces de couplage  $\gamma = \{0.01, 0.7, 0.9, 1\}$ .



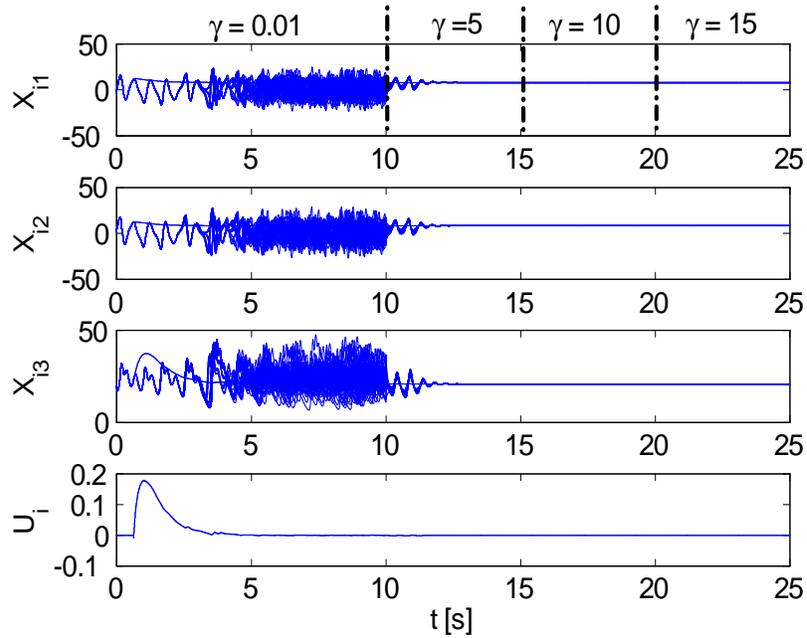
**Fig. 4.16.** Différence de convergence entre deux nœuds chaotiques de type Chua, l'un d'eux épinglé, avec différentes forces de couplage  $\gamma = \{0.01, 0.7, 0.9, 1\}$  et  $\delta = 4\%$ .



**Fig. 4.17.** Super-nœuds épinglés : 1,2,3,4,5 et 10 dans un réseau de 50 nœuds chaotiques de type Chua, avec différentes forces de couplage  $\gamma = \{0.01, 0.7, 0.9, 1\}$ .



**Fig. 4.18.** Différence de convergence entre deux nœuds chaotiques de type Chua, l'un d'eux épinglé, avec différentes forces de couplage  $\gamma = \{0.01, 0.7, 0.9, 1\}$  et  $\delta = 12\%$ .



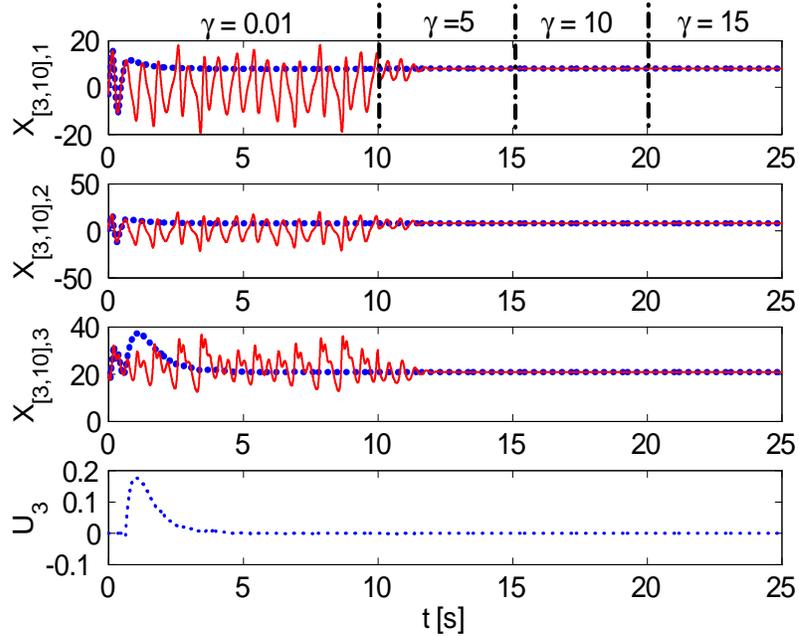
**Fig. 4.19.** Super-nœuds épinglés : 2 et 3 dans un réseau de 50 nœuds chaotiques de type Chen, avec différentes forces de couplage  $\gamma = \{0.01, 5, 10, 15\}$ .

avec  $i = 1, 2, \dots, N$  et  $i' = i_1, i_2, \dots, i_l$ .

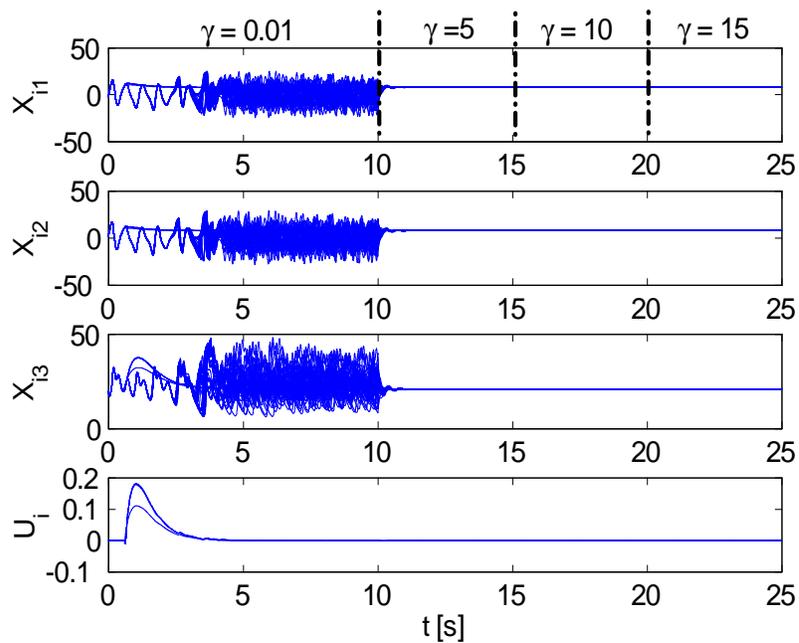
Les figures (4.19) et (4.21) montrent les résultats du processus de stabilisation, pour le RDC de type Chen pour  $N = 50$ ,  $\mathbf{x}_i(0) = (-3, 2, 20)^T$ ,  $\mathbf{K} = (0, -1.02, 0)^T$  and  $\gamma = \{0.01, 5, 10, 15\}$ . De toute évidence, tous les états des nœuds du RDC sont asymptotiquement stabilisés sur le point d'équilibre  $(7.9373, 7.9373, 21)^T$  souhaité en appliquant uniquement des petites variations sur la variable d'état  $\mathbf{x}_{i2}$ . Or, pour les deux figures (4.20) et (4.22), qui montrent le trace de trois phases correspondant à deux nœuds, le premier est contrôlé, alors que le deuxième ne fait que converger vers l'état du premier nœud.

## 4.7 Conclusion

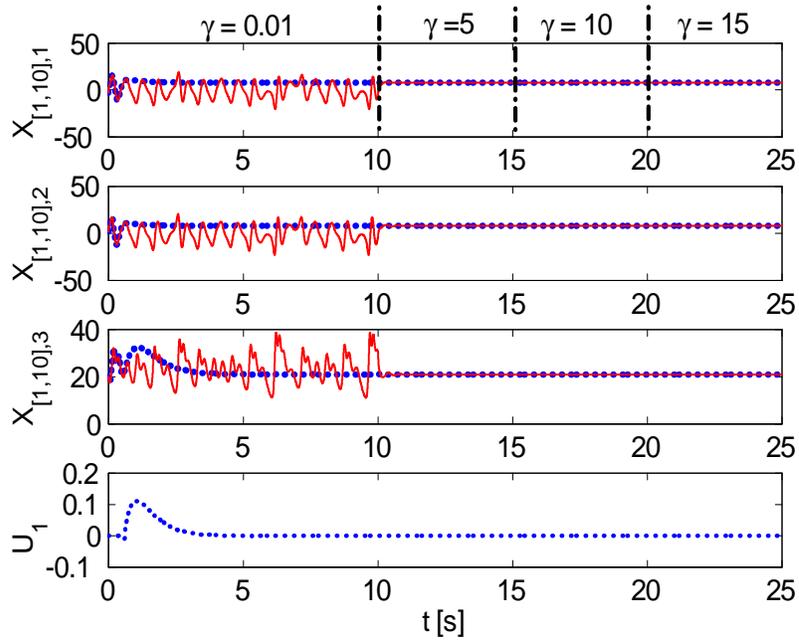
Dans ce chapitre, nous avons abordé le problème du contrôle des réseaux invariants d'échelle à base de nœuds chaotiques continus de type Chen et Chua en combinant les



**Fig. 4.20.** Différence de convergence entre deux nœuds chaotiques de type Chen, l'un d'eux épinglé, avec différentes forces de couplage  $\gamma = \{0.01, 5, 10, 15\}$  et  $\delta = 4\%$ .



**Fig. 4.21.** Super-nœuds épinglés : 1,2,3,4,5 et 10 dans un réseau de 50 nœuds chaotiques de type Chen, avec différentes forces de couplage  $\gamma = \{0.01, 5, 10, 15\}$ .



**Fig. 4.22.** Différence de convergence entre deux nœuds chaotiques de type Chen, l'un d'eux épinglé, avec différentes forces de couplage  $\gamma = \{0.01, 5, 10, 15\}$  et  $\delta = 12\%$ .

concepts du contrôle épinglant, le contrôle prédictif, ainsi que la théorie de la matrice mesure. En conséquence, nous avons déterminé de simples critères de stabilité asymptotique pour ce type de réseau. D'où, la méthode proposée permet de stabiliser tous les points d'équilibre instables inclus dans le réseau en appliquant une commande d'entrée à une seule variable d'état des nœuds de degré élevé (super-nœuds), sans avoir de valeurs prédéfinies des points d'équilibre instables. Des simulations numériques illustrent l'efficacité du procédé de la méthode de contrôle proposée. Par conséquent, nous pourrions confirmer que plus on augmente la valeur du coefficient  $\delta$ , plus la convergence du réseau dynamique sera rapide, à condition que  $0 < \delta \ll 1$ .

# Chapitre 5

## Contrôle des réseaux dynamiques complexes d'ordre élevé

### 5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons traiter un problème de stabilité des orbites périodiques instables (OPIs) pour une classe de réseaux dynamiques complexes (RDCs). Cette dernière est représentée par des réseaux BA invariants d'échelle et des nœuds chaotiques. L'idée proposée est une méthode de contrôle non linéaire, qui offre la possibilité de stabiliser les orbites périodiques instables désirées des systèmes chaotiques continus dans le réseau. Sachant que, le contrôleur proposé et développé ici, concernant les réseaux invariants d'échelle, pourraient être utilisés pour gérer une classe importante de RDCs avec différents types de nœuds. Enfin, des exemples numériques sont présentés pour démontrer l'efficacité de la stratégie du contrôle proposé.

### 5.2 Développement des RDCs D'ordre élevé

Afin de contrôler notre RDC d'ordre élevé, on se base sur le contrôle du chaos qui est un sujet important dans la science non linéaire, et peut être accompli par des approches différentes. La première méthode de contrôle a été introduit par Ott, Grebogi et Yorke connu comme méthode d'OGY [26]. C'est une méthode de contrôle à retour d'état, qui utilise le chaos dans le système dynamique afin de stabiliser une orbite périodique instable (OPI). Beaucoup d'autres méthodes et techniques ont

été développées pour contrôler des OPIs embarqués dans des systèmes chaotiques, comme la méthode de contrôle à retard d'état [27], la commande adaptative [58], le contrôle d'ordre élevé [60], le contrôle passif [62], le contrôle optimal [64], la commande prédictif [65, 66], et ainsi de suite. Nous citons, en particulier la méthode de contrôle d'ordre élevé proposé par Boukabou et Mansouri dans [60]. Cette dernière généralise la méthode de contrôle d'OGY, et stabilise tous les OPIs originaux à retard d'état d'un paramètre de contrôle. Par conséquent, l'état contrôlé converge vers l'orbite désirée, et non pas à son voisinage comme montré dans la méthode d'OGY. En comparant avec les méthodes existantes pour contrôler les OPIs, la méthode de contrôle d'ordre élevé est simple et direct, et peut être appliquée à des systèmes chaotiques continus de dimensions importantes [61, 67, 69].

Le RDC contrôlé doit être dans un domaine où il conserve toutes ses propriétés dynamiques et chaotiques. Dans ces conditions, nous proposons, de lui imposer une trajectoire définie par la méthode de contrôle. La trajectoire pour chaque nœud constitue une orbite périodique instable, or, le RDC contrôlé évoluera de manière périodique et parfaitement prédictible. D'où, les objectifs suivant sont indispensables :

- Le contrôle doit être réalisable : le contrôle doit fonctionner sur tous les nœuds chaotiques d'un RDC indépendamment du facteur temps où l'algorithme de contrôle est appliqué ;

- La transition entre l'état libre et l'état contrôlé doit être rapide : on doit pouvoir appliquer rapidement l'algorithme de contrôle et celui-ci doit être rapide et efficace ;

- Le contrôle doit être durable dans le temps : une fois que le contrôle devient effectif ainsi que tous les nœuds dans le réseau, le RDC contrôlé doit rester durablement actif ;

- Le contrôle doit être non destructif : comme nous l'avons déjà mentionné, le réseau en question doit conserver ses propriétés dynamiques et non pas être détruit ou modifié fondamentalement par le contrôle.

Il est à noter qu'à notre connaissance, aucune attention n'a été accordée à l'étude du problème de contrôle pour la stabilité des orbites périodiques instables dans réseaux invariants d'échelle à nœuds chaotiques.

### 5.3 Méthode de contrôle d'ordre élevé

L'idée principale de ce chapitre est de générer un réseau invariant d'échelle avec des nœuds de systèmes chaotiques, puis, appliquer une méthode de contrôle avec une petite perturbation afin de stabiliser les OPIs souhaités. À noter que la méthode de contrôle ne va pas créer de nouveaux OPIs de systèmes chaotiques, mais seulement un changement de leurs caractéristiques pour suivre sur la direction stable. Ceci est réalisé avec la variation d'un paramètre de contrôle, puis de forcer la trajectoire chaotique, et ainsi la réalisation de l'OPI souhaitée. À savoir, l'algorithme de contrôle ici-développé, est basé sur la reconnaissance des nœuds du réseau et leurs réponses aux petites perturbations externes. Par conséquent, il utilise la section de Poincaré pour déterminer la façon dont les nœuds se rapprochent des orbites périodiques désirées. La stratégie de contrôle est effectuée en deux étapes : Dans un premier temps, les OPIs souhaités embarqués dans chaque nœud du réseau sont identifiés en utilisant la section de Poincaré. À cet égard, parmi les multiples OPIs, choisir celui qui représente les performances désirées, à savoir, l'OPI avec la périodicité la plus élevée. Dans l'étape suivante, on détermine l'effet du paramètre de contrôle sur l'OPI choisi.

Par conséquent, nous appliquons une petite perturbation sur le paramètre de contrôle à chaque nœud du réseau, afin d'évaluer la variation d'état correspondant. Ceci permet d'obtenir une déviation  $\delta \mathbf{x}_i$  des OPIs  $\bar{\mathbf{x}}_i$  souhaitées, comme suit

$$\delta \mathbf{x}_i(t) = \mathbf{x}_i(t) - \bar{\mathbf{x}}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (5.1)$$

Ainsi, la trajectoire du réseau devrait être une direction stable. Une fois que toutes les informations nécessaires sur la section de Poincaré sont réunies, les nœuds du réseau

correspondants sont maintenus sur les orbites souhaitées par injection de petites forces appliquées et la loi de contrôle (5.2) est directement dérivée de la section de Poincaré comme suit

$$\delta p_i(t) = \left. \frac{\partial p_i}{\partial \mathbf{x}_i} \right|_{\mathbf{x}_i = \bar{\mathbf{x}}_i} \delta \mathbf{x}_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (5.2)$$

$\delta p_i(t)$  est la perturbation paramétrique autour de la valeur nominale du  $i^{\text{ème}}$  noeud.  $\left. \frac{\partial p_i}{\partial \mathbf{x}_i} \right|_{\mathbf{x}_i = \bar{\mathbf{x}}_i}$  représente l'influence d'une petite variation paramétrique au point fixe.

Cette loi de commande agit instantanément sur le réseau. Cependant, dans de certains cas réels, l'état futur d'un réseau de systèmes chaotiques dépend aussi bien de la variation paramétrique courante que des variations paramétriques précédentes ; le système va donc prendre un certain temps pour réagir à la correction et suivre la trajectoire désirée. Il semble alors raisonnable, de temporiser un petit moment avant d'imposer la loi de commande, d'où modifier le paramètre de contrôle. Ceci a pu être réalisé en intégrant dans cette loi, la valeur précédente du paramètre de contrôle. Donc, la perturbation proposée est exprimée de la manière suivante [60]

$$\delta p_i(t) = \left. \frac{\partial p_i}{\partial \mathbf{x}_i} \right|_{\mathbf{x}_i = \bar{\mathbf{x}}_i} \delta \mathbf{x}_i(t) + \xi \delta p_i(t-1), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (5.3)$$

où  $\delta \mathbf{x}_i(t)$  est la perturbation de la variables d'état autour des OPIs souhaités et  $\xi$  mesure la distance entre la trajectoire réelle et l'OPI souhaitée.

En termes de qualité, une fois le contrôle activé, tous les nœuds sont maintenus à leurs nouvelle trajectoire tout au long de leurs évolutions. Ce critère de stabilité est assuré par un bon choix du paramètre  $\xi$  pour que chaque nœud soit parfaitement contrôlé.

A partir de là, une orbite périodique est représentée par des points fixes dans la section de Poincaré, il est prévu que la trajectoire de tous les nœuds se rend au voisinage de ces points en fonction de la loi de commande. Lorsque les variables d'état atteignent cette région, le but est que la prochaine variable en question suit la

direction stable. En général, nous supposons que la loi de commande est appliquée uniquement dans un environnement local des orbites souhaitées. Ce voisinage local est défini par

$$\Delta : \|\delta \mathbf{x}_i(t)\| < 1, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (5.4)$$

Nous nous attendons à ce que, dans des applications à terme de la loi de commande (relation (5.3)), les points se trouvant dans le voisinage local des orbites périodiques désirées finirait par suivre le voisinage local et peuvent être contrôlés par la méthode de la commande proposée.

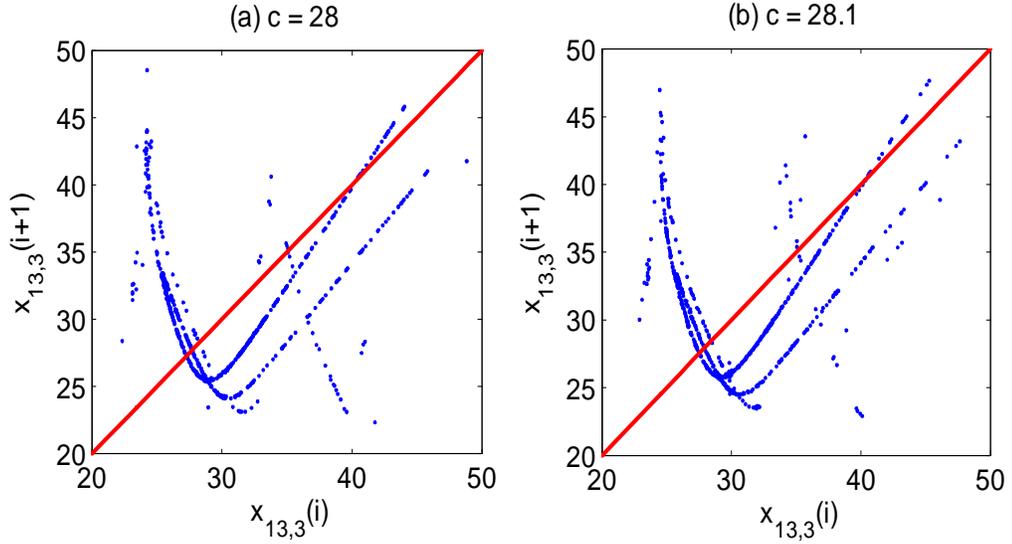
## 5.4 Application aux réseaux de systèmes d'ordre élevé

Dans ce qui suit, on génère un réseau BA invariant d'échelle, de nœuds initiaux  $m_0 = 3$ , un nombre de nœuds ajouté en chaque étape  $m = 3$ , et un nombre total de nœud  $N = 50$ , pour un but de contrôler quelques réseaux dynamiques complexes [74].

### 5.4.1 Réseaux de systèmes d'ordre élevé de type Chen

Le système de Chen, ainsi que son réseau dynamique complexe ont déjà été représentés dans la chapitre précédent, dans les relations (3.8) et (3.14) respectivement, en plus de leurs caractéristiques. On suppose que toutes les variables d'état du système sont couplés, à savoir,  $\Gamma = \text{diag}(1, 1, 1)$ . Ainsi, les équations d'état du *RDC* avec des nœuds de type Chen sont données par la relation (3.14). Les variables d'état dans le réseau sont représentés avec  $a = 35$ ,  $b = 3$ ,  $c = 28$ ,  $N = 50$  et on suppose que  $\xi = 0.2$ .

Pour illustrer l'effet du changement paramétrique sur la variation des variable d'état, on va tracer la section de Poincaré d'un seul nœud. Prenons l'exemple du 13<sup>ème</sup> nœud comme le montre la Figure (5.1). La trajectoire du système correspondant au nœud en question est enveloppée par un état chaotique. Afin de contrôler et stabiliser le système sur son orbite périodique instable, la section de Poincaré correspond à



**Fig. 5.1.** Section de Poincaré au 13<sup>ème</sup> nœud du réseau de système de Chen. (a)  $c=28$  et (b)  $c=28.1$

l'ensemble des points de l'attracteur, tel que ce dernier soit au maximum. Or  $X_{13,3} = X_{13,3\max}$ .

Le point fixe correspond à l'intersection de la courbe du 13<sup>ème</sup> nœud avec la diagonale. La variable d'état  $x_3$  du point fixe obtenu, est

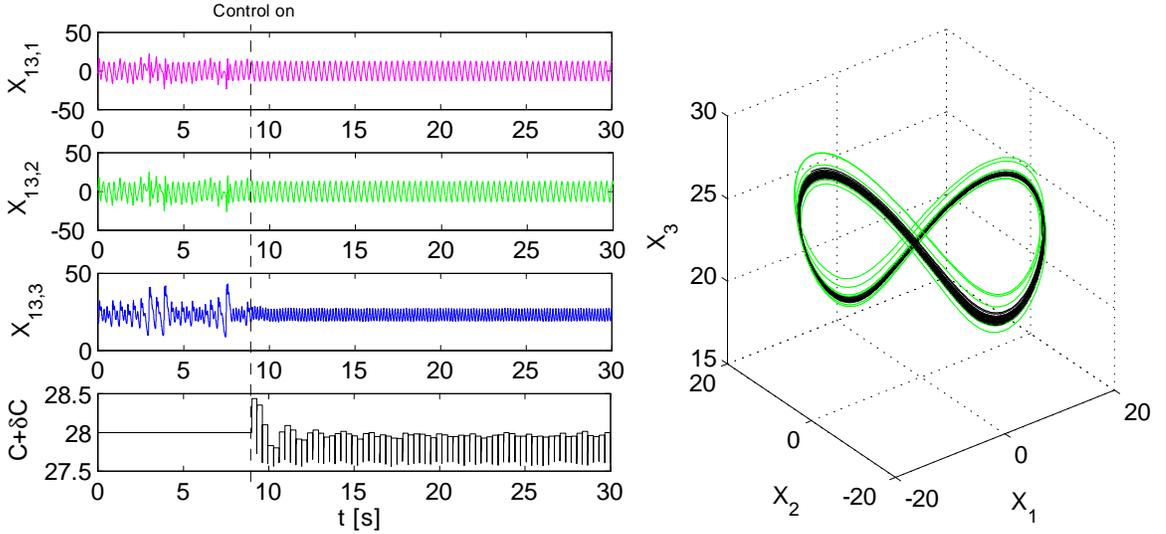
$$x_{13,3} = 27.23 \quad (5.5)$$

Pour déterminer l'influence du paramètre  $c$  sur la loi de commande, nous choisissons une valeur proche qui est de  $c = 28.10$ , on obtient

$$x_{13,3} = 27.47 \quad (5.6)$$

La loi de commande sera représentée comme suit

$$\begin{aligned} \delta c_{13}(t) &= \left. \frac{\partial C_{13}}{\partial x_{13,3}} \right|_{x_{13,3}=\bar{x}} (x_3(t) - x_{13,3}) + \xi \delta c_{13}(t-1) \\ &= \frac{28.10 - 28}{27.47 - 27.23} (x_3(t) - \bar{x}) + \xi \delta c_{13}(t-1) \end{aligned} \quad (5.7)$$



**Fig. 5.2.** Stabilisation de l'OPI souhaité dans le RDC de Chen, pour le (a)=13<sup>ème</sup> nœud. Temps de réponse et portrait de phase respectivement

or

$$\delta c_{13}(t) = 0.417(x_3(t) - \bar{x}) + \xi \delta c_{13}(t - 1) \quad (5.8)$$

La région d'activation du contrôle est définie par

$$(x_3(t) - x_{13,3})^2 + (x_1(t) - x_{13,1})^2 < 1 \quad (5.9)$$

avec  $x_{13,1} = 12$ . Et pour terminer avec le 13<sup>ème</sup> nœud, le résultat du contrôle est illustré dans la figure (5.2).

On peut remarquer dans la figure (5.2), que le contrôle génère un train d'impulsions afin de stabiliser le chaos sur l'une de ses orbites périodiques instables (OPI). Chaque impulsion est activée automatiquement de telle sorte, pour une amplitude déterminée par la section de Poincaré à chaque passage par le point fixe, l'orbite du nœud choisi converge vers l'OPI désirée. La méthode fonctionne par l'application des impulsions périodiques aux variables du nœud désiré.

**Tab. 5.1.** Les résultats de l'influence des changements paramétriques sur la variation des variables d'état pour certains nœuds de types Chen

Nœud	Nombre de connexions	Etat $x_{i3}$ : $c = 28$	Etat $x_{i3}$ : $c = 28.1$	$\frac{\partial C}{\partial x_{i3}}$
3	22	27.76	27.94	0.558
7	7	27.31	27.54	0.444
13	4	27.23	27.47	0.417
18	5	27.31	27.55	0.416
20	3	27.26	27.49	0.442
23	6	27.24	27.46	0.473
31	5	27.68	27.84	0.646
35	3	27.67	27.86	0.531
42	3	27.26	27.48	0.474
50	3	27.65	27.84	0.524

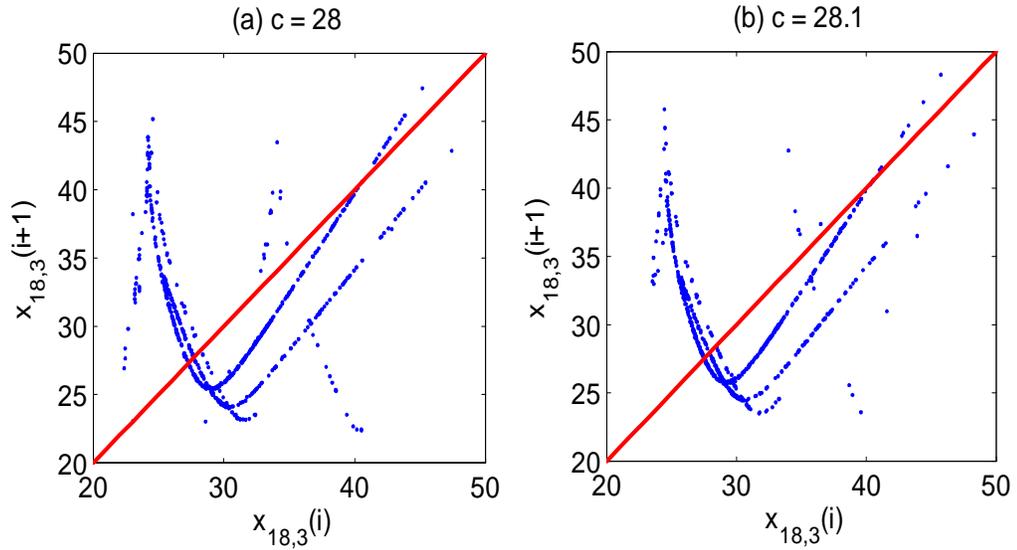
Les résultats de l'influence des changements paramétriques sur la variation des variables d'état, concernant les différents nœuds du réseau de Chen sont mentionnés dans la Table (5.1).

Pour plus de détails, on va présenter les résultats de deux autres exemples, correspondants aux 18<sup>ème</sup> et 31<sup>ème</sup> nœud respectivement.

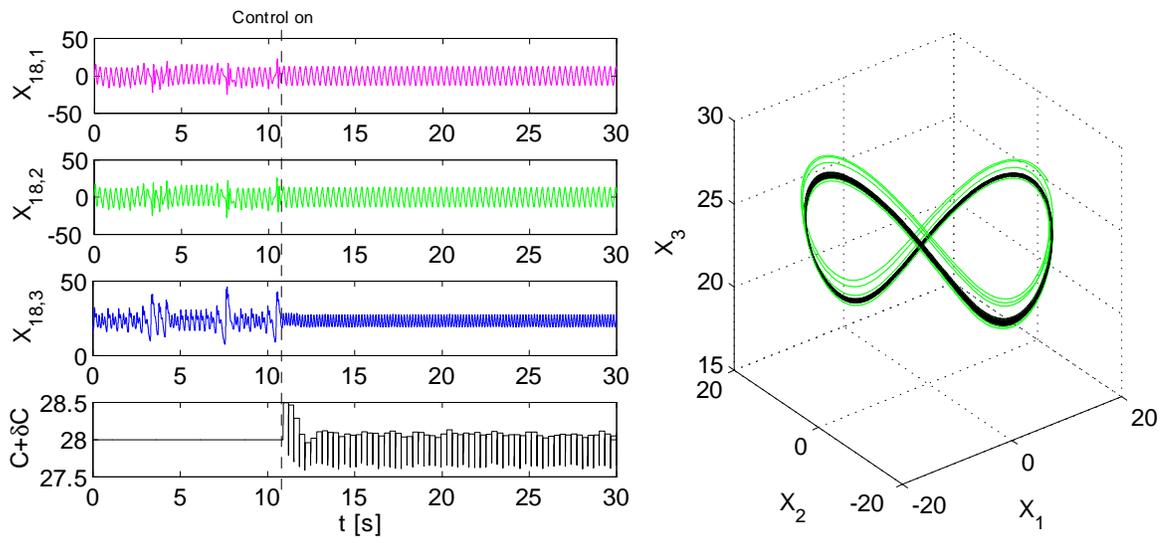
La génération du réseau dynamique complexe se fait d'une manière aléatoire. Donc, on pourrait avoir pas mal de réseau généré. Dans notre cas, on a choisi l'un de ces cas, puis on a appliqué la méthode de commande sur tous les nœuds du réseau choisi. Ainsi l'orbite de chaque nœud converge vers son orbite périodique instable. D'où cette stratégie de contrôle testée sur le réseau dynamique complexe de Chen, s'avère robuste et concluante.

#### 5.4.2 Réseaux de systèmes d'ordre élevé de type Rössler

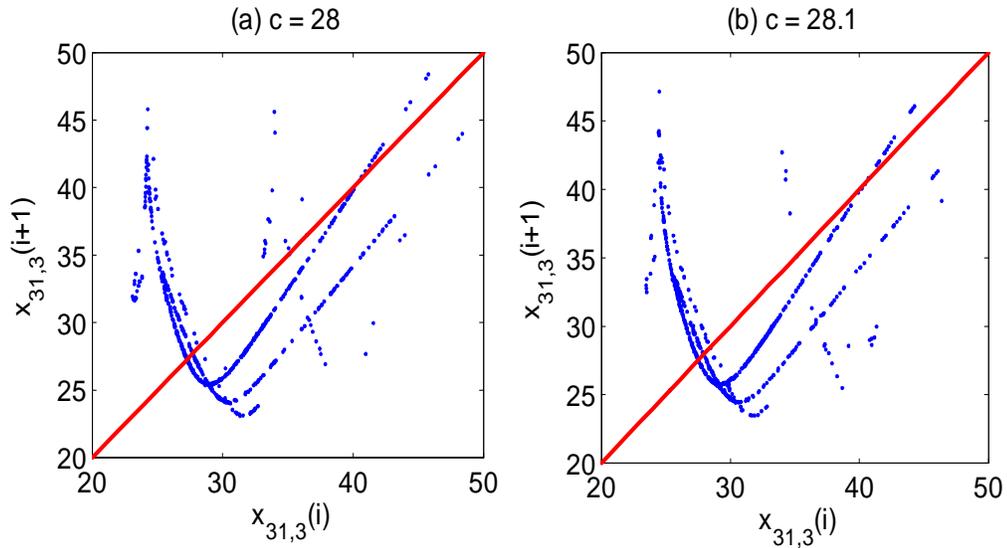
Considérons un *RDC* invariant d'échelle où les différents nœuds sont représentés par le système chaotique de Rössler. Par conséquent, un seul nœud est décrit par



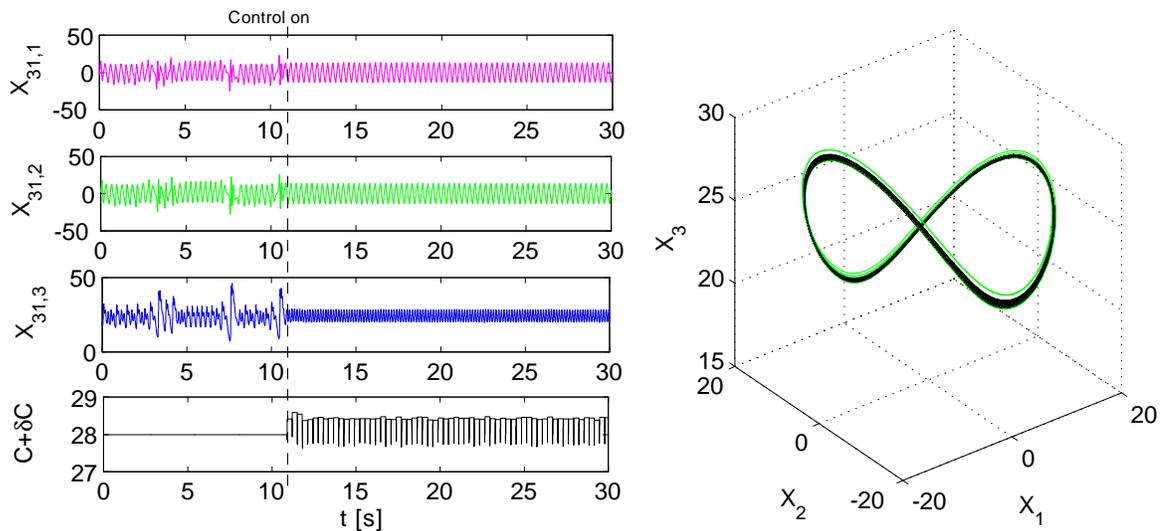
**Fig. 5.3.** Section de Poincaré au 18<sup>ème</sup> nœud du réseau de système de Chen. (a)  $c=28$  et (b)  $c=28.1$



**Fig. 5.4.** Stabilisation de l'OPI souhaité dans le RDC de Chen, pour le (b)=18<sup>ème</sup> nœud. Temps de réponse et portrait de phase respectivement



**Fig. 5.5.** Section de Poincaré au 31<sup>ème</sup> nœud du réseau de système de Chen. (a)  $c=28$  et (b)  $c=28.1$



**Fig. 5.6.** Stabilisation de l'OPI souhaité dans le RDC de Chen, pour le (a)=31<sup>ème</sup> nœud. Temps de réponse et portrait de phase respectivement

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(x_2 + x_3) \\ x_1 + ax_2 \\ b + (x_1 - c)x_3 \end{pmatrix}, \quad (5.10)$$

à savoir que  $a = 0.398$ ,  $b = 2$ , et  $c = 4$ . Et la matrice Jacobienne du système de Chen est donnée par

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ x_3 & 0 & x_1 - c \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Au points fixes  $\bar{x}_{1,2}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ x_3 & 0 & x_1 - c \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Les deux points fixes symétriques sont données par

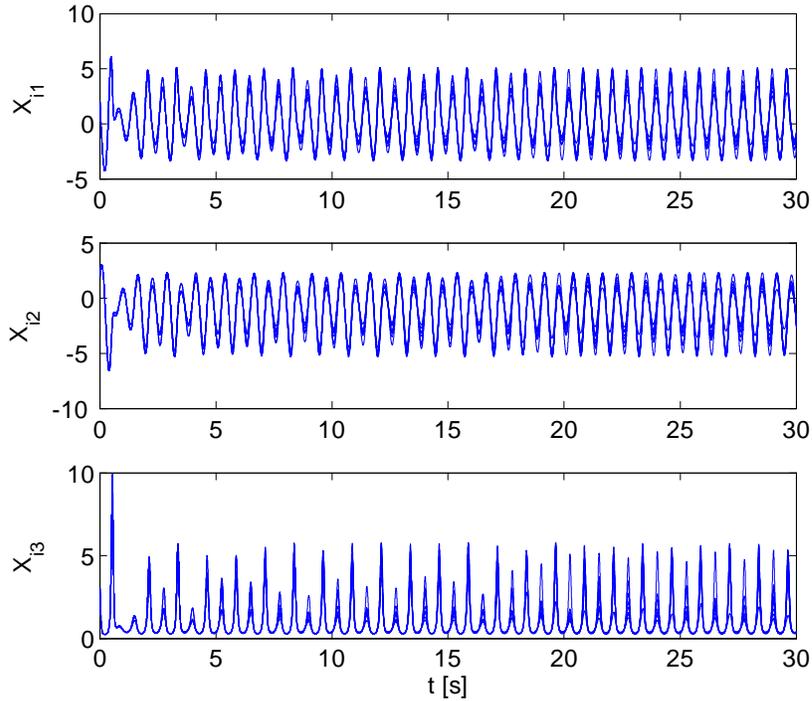
$$\begin{aligned} \bar{x}_2 &= \left[ \frac{c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}, -\frac{c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}, \frac{c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} \right]^T = [3.790, -9.522, 9.522]^T, \\ \bar{x}_3 &= \left[ \frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}, -\frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}, \frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} \right]^T = [0.210, -0.527, 0.527]^T, \end{aligned} \quad (5.13)$$

ainsi, on remarque que système de Rössler d'admet pas de de point d'équilibre à l'origine.

Afin de construire un réseau invariant d'échelle de la figure (5.7) générée, supposons que toutes les variables d'état du système sont couplés, à savoir,  $\Gamma = \text{diag}(1, 1, 1)$ .

Ainsi, les équations d'état du *RDC* avec des nœuds de type Rössler sont données par

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{i1} \\ \dot{x}_{i2} \\ \dot{x}_{i3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(x_{i2} + x_{i1}) + \gamma \sum_{j=1}^N g_{ij}x_{j1} \\ x_{i1} + ax_{i2} + \gamma \sum_{j=1}^N g_{ij}x_{j2} \\ b + (x_{i1} - c)x_{i3} + \gamma \sum_{j=1}^N g_{ij}x_{j3} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (5.14)$$



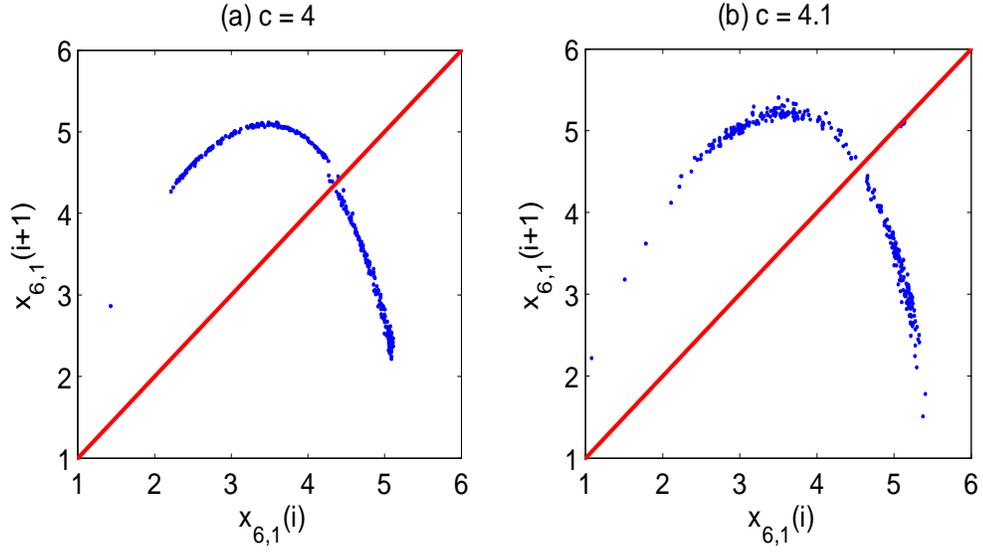
**Fig. 5.7.** Représentation d'un réseau invariant d'échelle de type Rössler, avec  $N=50$  nœuds.

Prenons l'exemple du 6<sup>ème</sup> nœud comme le montre la Figure (5.8). Pour contrôler et stabiliser le système sur son orbite périodique instable, la section de Poincaré correspond à l'ensemble des points  $X_{6,1} = X_{6,1\max}$ . Le point fixe correspond à l'intersection de la courbe du 6<sup>ème</sup> nœud avec la diagonale (comme présenté dans la figure (5.8)).

La variable d'état  $x_1$  du point fixe obtenu, est

$$x_{6,1} = 4.2856 \quad (5.15)$$

Pour déterminer l'influence du paramètre  $c$  sur la loi de commande, nous choisissons une valeur proche qui est de  $c = 4.10$ , on obtient



**Fig. 5.8.** Section de Poincaré au 6<sup>ème</sup> nœud du réseau de système de Rössler. (a)  $c=4$  et (b)  $c=4.1$

$$x_{6,1} = 4.6745 \quad (5.16)$$

D'où la loi de commande sera représentée comme suit

$$\begin{aligned} \delta c_6(t) &= \left. \frac{\partial C_6}{\partial x_{6,1}} \right|_{x_{6,1}=\bar{x}} (x_1(t) - x_{6,1}) + \xi \delta c_6(t-1) \\ &= \frac{4.10 - 4}{4.6745 - 4.2856} (x_1(t) - x_{6,1}) + \xi \delta c_6(t-1) \end{aligned} \quad (5.17)$$

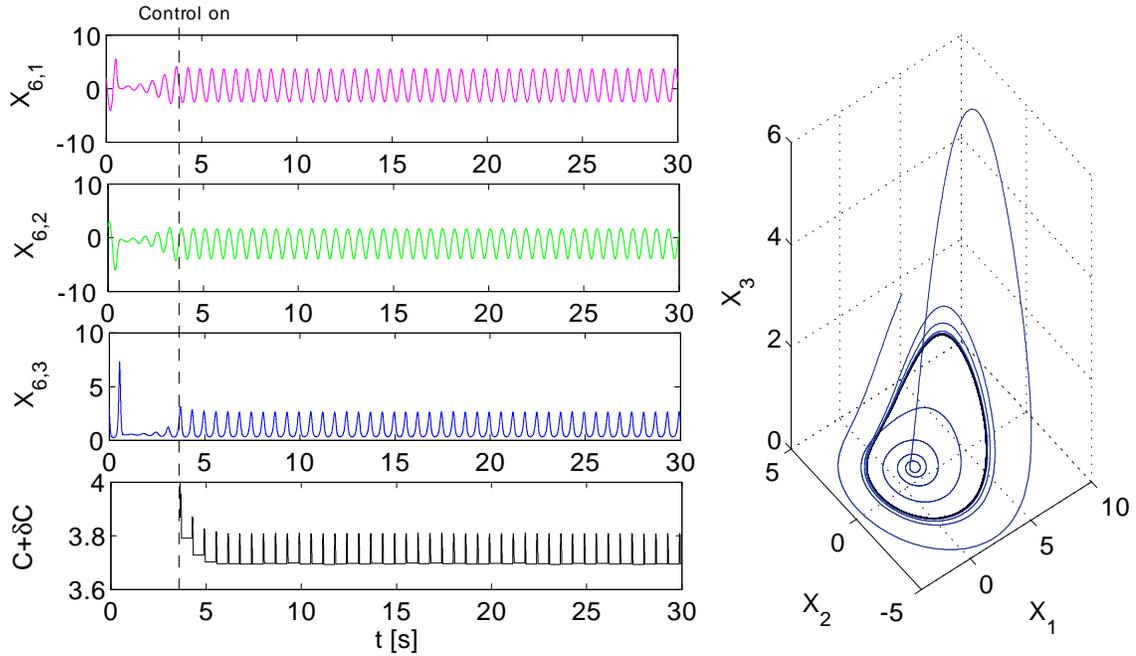
or

$$\delta c_6(t) = 0.257(x_1(t) - x_{6,1}) + \xi \delta c_6(t-1) \quad (5.18)$$

La région d'activation du contrôle est définie par

$$(x_1(t) - x_{6,1})^2 + (x_2(t) - x_{6,2})^2 < 1 \quad (5.19)$$

Et pour terminer avec le 6<sup>ème</sup> nœud, le résultat du contrôle est illustré dans la figure (5.9). Comme dans le cas de Chen, la figure (5.9) du 6<sup>ème</sup> nœud du *RDC* de



**Fig. 5.9.** Stabilisation de l'OPI souhaité dans le RDC de Rössler, pour le 6<sup>ème</sup> nœud. Temps de réponse et portrait de phase respectivement

Rössler, montre que le contrôle génère un train d'impulsions afin de stabiliser le chaos sur l'une de ses orbites périodiques instables (OPI). l'orbite du nœud choisi converge vers l'OPI désirée. Et la méthode fonctionne aussi par application d'impulsions périodiques aux variables du nœud désiré.

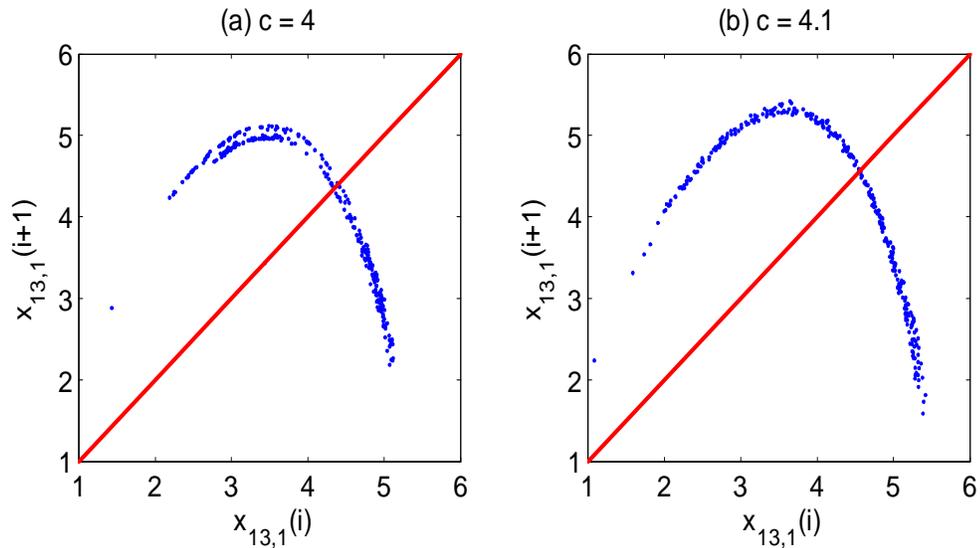
Les résultats de l'influence des changements paramétriques sur la variation des variables d'état concernant les différents nœuds du réseau de Rössler sont mentionnés dans la Table (5.2).

Et pour plus de détails, on va présenter les résultats de deux autres exemples, correspondants aux 13<sup>ème</sup> et 27<sup>ème</sup> nœud respectivement.

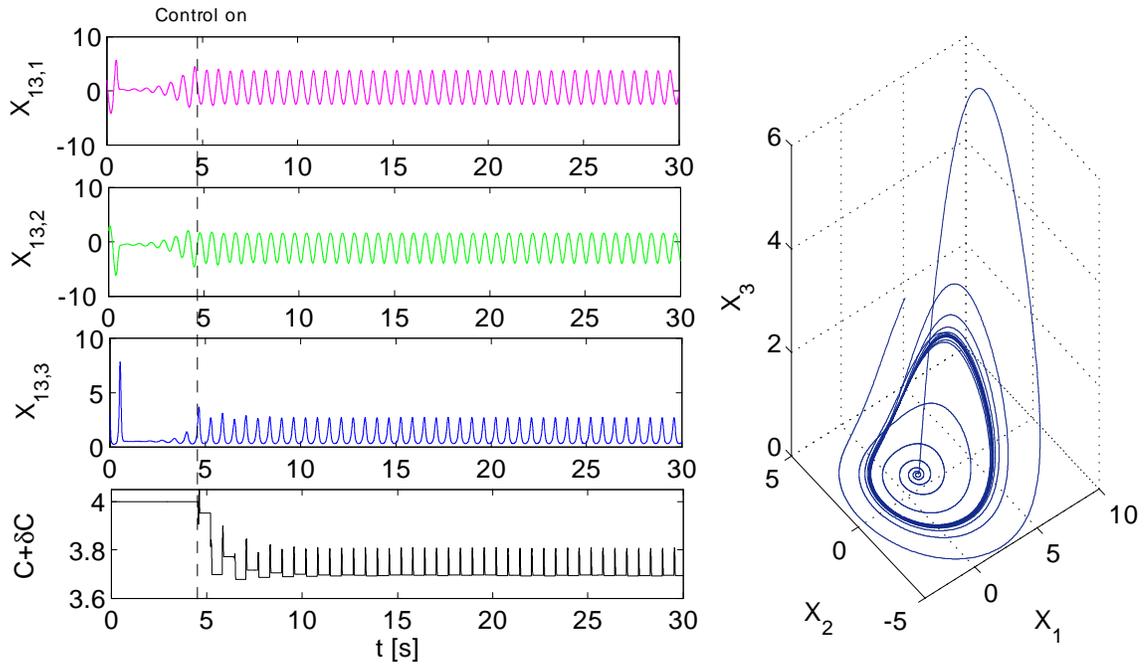
Les résultats illustrés des trois nœuds choisis, à savoir le 6<sup>ème</sup>, 13<sup>ème</sup> ainsi que le 27<sup>ème</sup> montrent que chacun d'eux converge vers son orbite périodique instable. Dire, que tous les nœuds du réseau dynamique complexe (RDC) de Rossler suivent le même objectif. D'où, cette stratégie s'avère aussi robuste et concluante.

**Tab. 5.2.** Les résultats de l'influence des changements paramétriques sur la variation des variables d'état pour certains nœuds de types Rössler

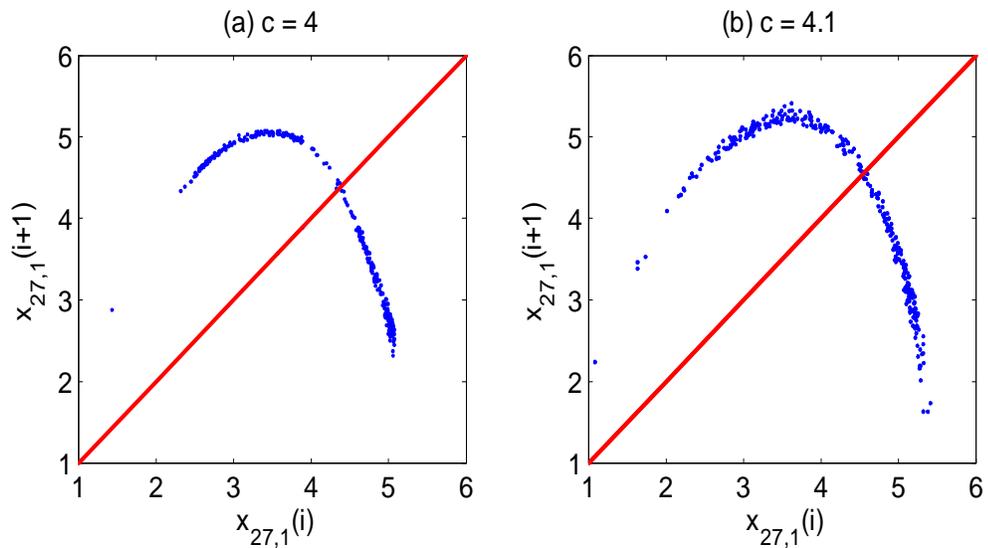
Nœud	Nombre de connexions	Etat $x_{i1} : c = 4$	Etat $x_{i1} : c = 4.1$	$\frac{\partial C}{\partial x_{i1}}$
6	5	4.2856	4.6745	0.257
13	4	4.3173	4.6994	0.262
20	3	4.3342	4.7050	0.270
24	4	4.2839	4.6559	0.269
27	4	4.3386	4.7257	0.258
28	3	4.3180	4.6514	0.300
30	4	4.3518	4.7039	0.284
39	4	4.3483	4.7045	0.281
44	3	4.3326	4.6700	0.296
49	3	4.3917	4.7091	0.315



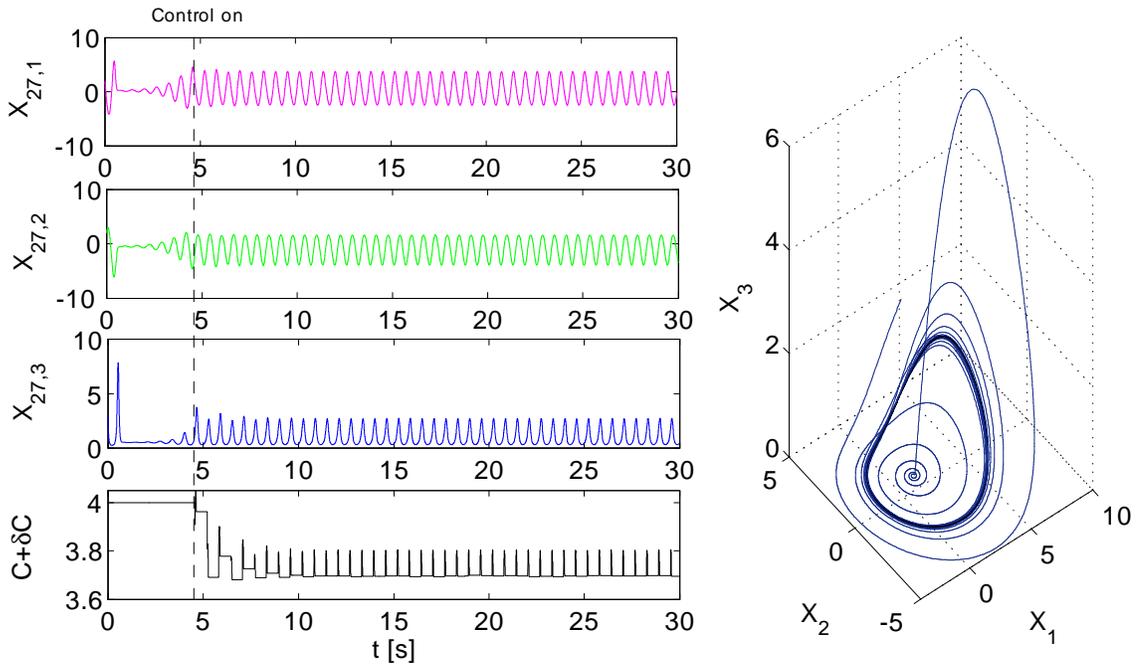
**Fig. 5.10.** Section de Poincaré au 13<sup>ème</sup> nœud du réseau de système de Rössler. (a)  $c=4$  et (b)  $c=4.1$



**Fig. 5.11.** Stabilisation de l'OPI souhaité dans le RDC de Rössler, pour le 13<sup>ème</sup> nœud. Temps de réponse et portrait de phase respectivement



**Fig. 5.12.** Section de Poincaré au 27<sup>ème</sup> nœud du réseau de système de Rössler. (a)  $c=4$  et (b)  $c=4.1$



**Fig. 5.13.** Stabilisation de l'OPI souhaité dans le RDC de Rössler, pour le 27<sup>ème</sup> nœud. Temps de réponse et portrait de phase respectivement

## 5.5 Conclusion

Dans les résultats obtenus, on montre bien une stabilisation des orbites périodiques instables sur tous les nœuds chaotiques d'un réseau dynamique complexe non linéaire et continu en particulier.

Notre contribution était l'élaboration d'une méthode de contrôle appliquée à tous les systèmes chaotiques constituant un réseau dynamique complexe, qui s'est avéré efficace et concluante.

Sachant que la méthode proposée préserve le principe de contrôle de la méthode originale d'OGY qui exige seulement des petites perturbations d'un paramètre de contrôle, pour bute de stabiliser l'orbite périodique instable du nœud concerné. On remarque que la prise en compte des perturbations paramétrique précédente est indispensable. Après avoir déterminé la section de Poincaré, un choix délicat du paramètre de stabilisation assure le retardement du contrôle. Parr la suite, l'algorithme de

contrôle proposé est appliqué à plusieurs réseaux dynamiques complexes non linéaires, montre bien son efficacité de stabilité pour les orbites périodiques instables.

# Conclusion générale

Le travail réalisé dans le cadre de cette thèse avait comme objectif, d'étudier et de développer les différentes méthodes de contrôle, des réseaux dynamiques complexes à nœuds chaotiques non linéaires et à temps continu.

Il est à noter que le choix optimal concernant les méthodes utilisées dans notre simulation est celui issu du modèle de Barabási et Albert, qui se base sur l'attachement préférentiel.

Les réseaux aléatoires et petit-monde des modèles d'Erdős et Renyi et celui de Watts et Strogatz respectivement, ne sont pas concernés par nos simulations, ainsi, ils sont mentionnés pour un état de l'art plus ou moins robuste. Ce qui est logique, car le choix de l'un des deux types de réseaux en question, et en vue de leurs distributions des liens, les nœuds peuvent avoir les mêmes caractéristiques, à savoir le nombre de connexions, d'où le terme "super-nœud" qui n'est pas vraiment exploitable dans ces modèles. C'est-à-dire : de faire un choix aléatoire ou bien spécifique de nœuds aboutira à des résultats similaires dans le cadre du contrôle des réseaux dynamiques complexes.

En vue du manque et limitation des méthodes de contrôle des réseaux dynamiques, pour la stabilisation des points d'équilibres instables. Et avant d'entamer nos objectifs, nous nous sommes basé sur quelques méthodes de contrôles déjà présentes dans la littérature.

La stabilisation des points fixes instables dans les systèmes chaotiques, dont nous avons généralisé le contrôle au chapitre 4 sur un réseau dynamique complexe à nœuds chaotiques, puis d'appliquer un modèle de contrôle prédictif sur tous les nœuds dans le réseau. Le résultat était concluant, où tous les nœuds étaient stabilisés vers l'un des points fixes instables du système. Mais il reste l'inconvénient de contrôler tous les nœuds, un par un, ce qui aboutit à une solution gênante.

Pour avoir recours à ce problème, nous avons opté pour le contrôle épinglant (pinning control) du réseau dynamique complexe continu, qui a pour rôle, de dériver quelques conditions de stabilité vers le point d'équilibre instable en épinglant seulement une petite fraction de nœuds. Cette méthode de contrôle a donnée de bons résultats en ce qui concerne la stabilité de tous les nœuds du système dynamique. Seulement, son inconvénient réside dans la loi de contrôle, où elle utilise les caractéristiques du point fixe instable comme une donnée prédéfinie. Alors ce qu'on souhaite, c'est d'avoir une stabilité sans prendre en compte le point fixe dans la loi de contrôle.

Pour remédier à ce problème, nous avons utilisé dans le chapitre 4, une nouvelle méthode qui se base sur le contrôle épinglant, ainsi que le contrôle prédictif, d'où la solution proposée s'avère très efficace et tous les nœuds du réseau dynamique se sont stabilisés autour du point d'équilibre instable.

Dans le cas de la stabilité des réseaux dynamiques complexes d'ordre élevé, nous nous sommes basé sur le contrôle des systèmes chaotiques continus d'ordre élevé, puis de généraliser la méthode sur tout un réseau à l'aide d'une matrice de connexion. Elle associe la méthode d'OGY avec celle du contrôle à retard d'état, et aux orbites périodes instables à stabiliser, des zones de contrôle définies l'intérieur d'un cercle unité. L'orbite périodique instable pourrait être stabilisé à l'aide du paramètre  $\xi$ , qui assure la stabilité dans la plus part des cas, grâce à un choix délicat. Ainsi, la généralisation de cette méthode sur les réseaux dynamiques complexes à nœuds chaotique se révèle très efficace.

Plusieurs perspectives dans le cadre de ce travail pourraient être envisagées. Prenant l'exemple d'utiliser un réseau dynamique complexe à plusieurs types de systèmes chaotiques.

Une autre proposition, à propos du contrôle des orbites périodiques instables, c'est qu'au lieu d'appliquer un contrôle global sur tous les nœuds du réseau dynamique, trouver un compromis qui permet de maîtriser seulement quelques nœuds, au lieu du réseau en entier.

Les problèmes cités ci-haut, présentent actuellement l'objectif de notre étude.

# Annexe A

## Model de Barabási-Albert

```
% FONCTION Matlab : RESEAU INVARIANT D'ECHELLE
function [A] = gen_RIE(n,n0,m) % RIE : RESEAU INVARIANT D'ECHELLE
if n0 == 1 % POSSIBILITE DE DIVISION PAR 0 (k=0...)
    tfaible = true;
else % OK
    tfaible = false;
end

% CREATION D'UNE MATRICE VIDE
A = logical(sparse(n,n));
% INITIALISATION DES CLUSTER
A(1:n0,1:n0) = true(n0,n0) - speye(n0,n0);
for t = 1:n-n0
    if tfaible
        pcum = 1;
        if t > 1
            tfaible = false;
            % IL EXISTE 2 NOEUDS ET 1 LIENS : p_a = ( 1/2 , 1/2 )
            pcum = [0.5 1];
        end
    end
end
```

```
else % NON tfaible ? UTILISE p_a_i = deg_i / sum(deg)
    deg = sum( A(1:n0 + t - 1 , 1:n0 + t - 1) , 2); % DEGREES DES NOEUDS
    Pk = deg / sum(deg);
    pcum = cumsum( deg / sum(deg) ); % PROB CUM
end
% GENERATION DES m NOUVEAUX LIENS
for j = 1:m
    suivant = false;
    while ~suivant % TANTQUE NON suivant PLACER NOUVEAU LIEN
        % DETERMINER LE TRAGET DU NOUVEAU LIEN
        temp = find(pcum>rand);
        % TESTER SI PEUT-ON PLACER CE LIEN
        if ~A(temp(1),n0+t)
            suivant = true;
        end
    end
    % PLACER LES LIENS
    A(temp(1),n0+t) = true;
    A(n0+t,temp(1)) = true;
end
end
```

# Annexe B

## Modèle de Watts-Strogatz

```
% Fonction Matlab : RESEAU petit-monde (SMALL-WORLD)
function [A] = gen_sw(n,k_init,p) % sw : SMALL--WORLD
A = logical(sparse(n,n));
for k=1:k_init/2
    A = A | spdiags(ones(n,1),k,n,n);
    A = A | spdiags(ones(n,1),(n-k),n,n);
end
[i,j] = find(A);
compt = 0;
for curr=1:length(i)
    if rand <= p
        compt = compt+1;
        % TROUVER UNE FOCALISATION POUR UN NOUVEAU LIEN
        l = 1;
        j_at = randperm(n);
        %
        while A(i(curr),j_at(l))||A(j_at(l),i(curr))||( j_at(l)==i(curr))
            l = l+1;
        end
    end
end
```

```
% TROUVER LE CANDIDAT
% CREER NOUVEAU LIEN DANS LE TRIANGLE DE LA PARTIE SUP
if i(curr) > j_at(1)
    A(j_at(1),i(curr)) = true;
else
    A(i(curr),j_at(1)) = true;
end
% SUPPRESSION DES LIENS PRECEDANTS
A(i(curr),j(curr)) = false;
end
end
% AJOUTER LA TRANSPONSEE = MATRICE COMPLETE, SYMM, ADJ
A = A | A';
end
```

# Annexe C

## Modèle d'Erdős-Renyi

```
% FONCTION Matlab : RESEAU ALEATOIRE
function [A] = gen_er(n,p) % er : Erd\U{151}s-RENYI
% DISTINCTION ENTRE n PAIRE ET IMPAIRE ...
if mod(n,2)
    n1 = floor(n/2);
    n2 = n1 + 1; % n IMPAIRE
else
    n1 = n/2;
    n2 = n1;
end % n PAIRE
% TOP BLOCK GAUCHE
R = rand(n1,n1); % GENERER UNE MATRICE R
T = sparse(triu(R,1)); % GARDER LE TRIANGLE DE LA PARTIE SUP
clear R;
[ii1,jj1] = find(T>(1-p)); % SPECIFIER LES LIENS
clear T;
% TOP BLOCK DROIT
R = rand(n1,n2); [ii2,jj2] = find(R>(1-p));
clear R;
```

```
% BLOCK DROIT
R = rand(n2,n2);
T = sparse(triu(R,1));
clear R;
[ii3,jj3] = find(T>(1-p));
clear T;

% COMBINER LES INDICES
ii = [ii1 ; ii2; ii3+n1];
jj = [jj1 ; jj2+n1 ; jj3+n1];

% CREER A + TRANSPONSEE = MATRICE COMPLETE, SYMM, ADJ
A = sparse(ii,jj,true(1,length(ii)),n,n);
A = A | A';
```

# Bibliographie

- [1] F. Zaidi. Analyse, Structure et Organisation des réseaux Complexes. PhD thesis, Université de Bordeaux I, 2010.
- [2] L. Euler, *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* (1759) Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin.
- [3] A. L. Barabási, E. Bonabeau. L'ère d'internet : Les enjeux d'un réseau global. Revue d'information scientifique N°66, pp. 50-54, ISSN 0153-4092, 2010.
- [4] A. Barabási, E. Bonabeau, Les réseaux invariants d'échelle, L'ère d'Internet, Dossier Pour La Science N°66. pp. 50-54, 2010.
- [5] D. Watts, S. Strogatz. Collective dynamics of small-world networks. *Nature*, 393 :440.442, 1998.
- [6] A. L. Barabási, R. Albert. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286 :509.512, 1999.
- [7] A. Barrat, M. Weigt (2000), On the properties of small-world network models, *European Physical Journal B* 13, 547-560.
- [8] J. Travers, S. Milgram. An experimental study of the small world problem. *Nature*, 32 :425.443, 1969.
- [9] A. Reka, A. Barabási. Statistical mechanics of complex networks. *Mod.Phys*, 74 :47.97, 2002.
- [10] C. Moore, M. E. J. Newman. Epidemics and percolation in small-world networks. *Phys. Rev*, 61 :5678.5682, 1999.
- [11] S. Delre, W. Jager. Diffusion dynamics in small world networks with heterogeneous consumers. *Computational and Mathematical Organization Theory*, 13 :185.202, 2007.
- [12] Herbert, A. Simon. On a class of skew distribution functions. *Biometrika*, 42 :425.440, 1955.
- [13] S. Dorogovtsev, J. Mendes. Evolution of networks. *Advances in Physics* 51, 4 (2002), 1079-1187.
- [14] A. L. Barabási, E. Bonabeau. *Scientific american*. 2003.
- [15] S. Milgram, J. Travers. An experimental study of the small-world problem. *Sociometry*, 32 :425.443, 1969.

- [16] J. H. Albert. REKA, A. Barabási, Diameter of the world wide web, *Nature*, 401 :130.131, 1999.
- [17] M. Faloutsos, P. Faloutsos, C. Faloutsos, On power-law relationships of the Internet topology, *Association for Computing Machinery*, pp 251-262, 1999.
- [18] H. Ebel, L. Mielsch, S. Bornholdt, Scale-free topology of e-mail networks, *American Physical Society*, Volume 66, N°3, 2002.
- [19] G. Grimvall , P. Jacobsson, T. Thedeen , eds (2003), *Risker i tekniska system*, Studentlitteratur, Lund.
- [20] A. Holmgren (2004), *Vulnerability Analysis of Electric Power Delivery Networks*, Licentiate thesis, in press, Department of Land and Water Resources Engineering, Royal Institute of Technology (KTH).
- [21] U. Dellgar, T. Thedéen, A. Holmgren, S. Molin et al. (2000), *Den tekniska infrastrukturens sarbarhet, funktion och sakerhet TIS*, Overstyrelsen for civil beredskap.
- [22] U.S.Canada PSOTF (2003), *Interim report : Causes of the August 14th blackout in the United States and Canada*.
- [23] E. Lorenz, Deterministic Nonperiodic Flow, *Journal of the Atmospheric Sciences*, American Meteorological Society, volume 20 N°2, pp. 130-141, 1963.
- [24] R. A. Axelrod, W. D. Hamilton, 1984. The Evolution of Cooperation, *Science*, Vol. 211, No. 4489 (Mar. 27, 1981), pp. 1390-1396.
- [25] S. Wolfram, Universality and complexity in cellular automata, *Physica D : Non-linear Phenomena*, 10 (1984) 1-35.
- [26] E. Ott, C. Grebogi, J. A. Yorke [1990] Controlling chaos, *Physical Review Letters* 64, pp. 1196-1199.
- [27] K. Pyragas [1992], Continues control of chaos by self-controlling feedback, *Physics Letters A*170, pp. 421-428.
- [28] A. Boukabou, Méthodes de contrôle des systèmes chaotiques d'ordre élevé et leur application pour la synchronisation : Contribution à l'élaboration de nouvelles approches. PhD thesis, Université de Constantine, 2006.
- [29] T. Y. Li, J. A. Jorke, [1975] Period three implies chaos, *American Mathematical Monthly*, 82, pp. 481-485.
- [30] R.L. Devaney [1987] *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. (Addison-Wesley, New York).
- [31] E. R. Hunt [1991] Stabilizing high-period orbits in a chaotic system : The diode resonator, *Physical Review Letters* 67, pp. 1953-1955.
- [32] X. Yu, G. Chen, Y. Xia, Y. Song, Z. Cao, [2001] An invariant-manifold-based method for chaos control, *IEEE Transaction on Circuits and Systems-I* 48, pp. 930-937.
- [33] W. L. Ditto , S. N. Rauseau , M. L. Spano [1990] Experimental control of chaos *Physical Review Letters* 65, pp. 3211-3214.

- [34] V. Petrov, V. Gaspar, J. Masere, K. Showalter [1993] Controlling chaos in the Belousov- Zhabotinsky reaction, *Nature* 361, pp. 240-242.
- [35] S. Bielawski, D. Derozier, P. Glorieux [1993] Experimental characterization of unstable periodic orbits by controlling chaos, *Physical Review A* 47, pp. 2492-2495.
- [36] J. Singer, Y. Z. Wang, H. H. Bau [1991] Controlling a chaotic system, *Physical Review Letters* 66, pp. 1123-1126.
- [37] Rodriguez, H., Ortega, R., Escobar G. & Barabanov N. [2000] “A robustly stable output feedback saturated controller for the boost DC-to-DC converter,” *Systems and Control Letters* 40, pp. 1-8.
- [38] J. Q. Fang, G. Chen, X. S. Luo [2002] Complexity analysis and control strategy for beam halo-chaos in ADS, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 12, pp. 917-930.
- [39] P. Saha, S. Banerjee, A. R. Chowdhury [2003] On the study of control and anticontrol in magnetoconvection, *Physics Letters A* 306, pp. 211-226.
- [40] G. Chen, T. Ueta, Yet another chaotic attractor, *Int. J. Bifurcation Chaos* 9 (1999) 1465-1466.
- [41] H. Su, X. Wang, *Pinning control of complex networked systems : Synchronization, Consensus and Flocking of Networked Systems via Pinning*, Springer Heidelberg New York, 2013.
- [42] SvK (2003), The black-out in southern Sweden and eastern Denmark, 23 September, 2003 preliminary report, Svenska Kraftnat, <http://www.svk.se/web/Page.aspx?id=5586> (March 2004).
- [43] UCTE (2003), Interim report of the investigation committee on the 28 September 2003 blackout in Italy, Union for the Co-ordination of Transmission of Electricity, [http://www.ucte.org/publications/library/e\\_default\\_2003.asp](http://www.ucte.org/publications/library/e_default_2003.asp) (March 2004).
- [44] A. G. H. Zhang. Using the small-world model to improve freenet performance. *Computer Networks (Amsterdam, Netherlands :1999)*, 46 :555.574, 2004.
- [45] J. Lu, X. Yu, G. Chen, W. Yu, *Complex Systems and Networks : Dynamics, Controls and Applications*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2016.
- [46] K. Kaneko, *Coupled Map Lattices*, WorldScientific Pub. Co., Singapore, 1992.
- [47] L. O. Chua, L. Yang, Cellular neural networks : Theory, *IEEE Trans. Circuits Syst.* 35 (1988) 1257–1272.
- [48] X. Wang, G. Chen, Pinning control of scale-free dynamical networks, *Physica A* 310 (2002) 521–531.
- [49] X. Li, X. Wang, G. Chen, Pinning a complex dynamical network to its equilibrium, *IEEE Trans. Circuits Syst. I* 51 (2004) 2074–2087.
- [50] L. Y. Xiang, Z.X. Liu, Z.Q. Chen, F. Chen, Z.Z. Yuan, Pinning control of complex dynamical networks with general topology, *Physica A* 379 (2007) 298–306.
- [51] Z. Li, G. Chen, Global synchronization and asymptotic stability of complex dynamical networks, *IEEE Trans. Circuits and Syst. II* 53 (2006) 28–33.

- [52] W. J. Yuan, X.S. Luo, P.Q. Jiang, B.H. Wang, J.Q. Fang, Stability of a complex dynamical network model, *Physica A* 374 (2007) 478–482.
- [53] X. Liu, J. Wang, L. Huang, Stabilization of a class of dynamical complex networks based on decentralized control, *Physica A* 383 (2007) 733–744.
- [54] Z. Duan, J. Wang, G. Chen, L. Huang, Stability analysis and decentralized control of a class of complex dynamical networks, *Automatica* 44 (2008) 1028–1035.
- [55] Y. Wang, Y. Fan, Q. Wang, Y. Zhang, Stabilization and synchronization of complex dynamical networks with different dynamics of nodes via decentralized controllers, *IEEE Trans. Circuits and Syst.* I59 (2012) 1786–1795.
- [56] J. Yao, Z.H. Guan, D.J. Hill, Passivity-based control and synchronization of general complex dynamical networks, *Automatica* 45 (2009) 2107–2113.
- [57] Q. J. Zhang, J.A. Lu, Impulsively control complex networks with different dynamical nodes to its trivial equilibrium, *Comput. Mathematics with Appl.* 57 (2009) 1073–1079.
- [58] C. Hua, X. Guan, Adaptive control for chaotic systems, *Chaos Solit Fract.* 22 (2004) 55–60.
- [59] C. Hua, X. Guan, P. Shi, Adaptive feedback control for a class of chaotic systems, *Chaos Solit. Fract.* 23 (2005) 757–765.
- [60] A. Boukabou, N. Mansouri, Controlling chaos in higher-order dynamical systems, *Int. J. Bifurcation Chaos* 14 (2004) 4019–4025.
- [61] A. Boukabou, N. Mekircha, Generalized chaos control and synchronization by nonlinear high-order approach, *Math. Comput. Simul.* 82 (2012) 2268–2281.
- [62] K. Kemih, Control of nuclear spin generator system based on passive control, *Chaos Solit. Fract.* 41 (2009) 1897–1901.
- [63] X. Chen, C. Liu, Passive control on a unified chaotic system, *Nonlinear Analysis : Real World Appl.* 11 (2010) 683–687.
- [64] K. Merat, J. A. Chekan, H. Salarieh, A. Alasty, Linear optimal control of continuous time chaotic systems, *ISA Transactions* 53 (2014) 1209–1215.
- [65] T. Ushio, S. Yamamoto, Prediction-based control of chaos, *Phys. Lett. A* 264 (1999) 30–35.
- [66] A. Boukabou, A. Chebbah, N. Mansouri, Predictive control of continuous chaotic systems, *Int. J. Bifurcation Chaos* 18 (2008) 587–592.
- [67] A. Boukabou, B. Sayoud, H. Boumaiza, N. Mansouri, Control of n-scroll Chua’s circuit, *Int. J. Bifurcation Chaos* 19 (2009) 3813–3822.
- [68] R. Bitmead, M. Gevers, V. Wertz, *Adaptive Optimal Control : The Thinking GPC*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1990.
- [69] S. Hadeif, A. Boukabou. Control of multi-scroll Chen system. *J. Franklin Institute* 351 (2014) 2728–2741.
- [70] T. Ushio, S. Yamamoto [1998], Delayed feedback control with nonlinear estimation in chaotic discrete-time systems, *Physics Letters. A* 247, pp. 112–118.

- [71] S. Yamamoto, T. Hino, T. Ushio [2001], Dynamic delayed feedback controllers for chaotic discrete-time systems, *IEEE Transaction on Circuits and Systems-I* 48, pp. 785-789.
- [72] A. Boukabou, N. Mansouri [2005], Predictive control of high dimensional chaos, *Nonlinear Phenomena in Complex Systems* 8, pp. 258-265.
- [73] M. Vidyasagar, *Nonlinear System Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1993.
- [74] M. Arbid, A. Boukabou, Controlling unstable periodic orbits in complex dynamical networks with chaotic nodes, *Optik - International Journal for Light and Electron Optics*, 128 (2017) 148-155.