République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'enseignement Supérieur
Et de La Recherche Scientifique
Université de Jijel

Faculté des Sciences Exactes
et
des sciences de la nature et de la vie
Département de Physique

THESE

Présentée pour obtenir le diplôme de

Doctorat en sciences

Option

Physique Théorique

Par

Nadia Chine

Thème

Solution des problèmes relatifs à deux ondes et à un champ gravitationnel par l'approche de la mécanique quantique stochastique

Devant le Jury :

Soutenu le : 18/10/2012

Président :	Kh. Nouicer	Prof	Univ. Jijel
Rapporteur :	L. Chetouani	Prof	UM. Constantine
Examinateurs :	T. Boudjedaa	Prof	Univ. Jijel
	A. Bounames	Prof	Univ. Jijel
	M. Merad	Prof	Univ. Oum El Bouaghi
	A. Lecheheb	Prof	UM. Constantine

Table des matières

Chapitre 1

Introduction générale

En 1981 Parisi et Wu [1] a introduit une nouvelle approche équivalente à la mécanique quantique standard qu'est la mécanique quantique stochastique (MQS), ce formalisme récent-à cheval sur les intégrales de chemins et les équations différentielles stochastiques est aussi un outil de compréhension de la mécanique quantique. Bien que sa formulation soit simple, il n'a pas eu cependant le mérite d'être développé comme le sont actuellement les autres approches. Brièvement le principe sur lequel est bâti la MQS est le suivant : on se donne un système physique qui interagit avec son environnement. L'interaction est en général modélisée par un bruit choisi blanc de préférence pour l'affecter de poids de type gaussien (processus de Wiener). Sa variable dynamique devient alors aléatoire et son évolution est décrite par une équation dite de Langevin. C'est ainsi que des quantités physiques s'obtiennent à partir de la solution de cette équation.

A cette formulation, il est ajouté en plus de l'équation de Langevin qui décrit la relation entre la variable et le bruit, une notion plus commode de probabilité (réelle). Cette probabilité est solution d'une équation connue dite de Fokker-Planck (FP). C'est une équation du 1er ordre par rapport au temps et qui se ramène à celle de Schrödinger par une simple rotation de Wick.

Par ailleurs dans l'approche de Parisi et Wu la description nécessite l'introduction d'un temps supplémentaire qui est fictif [2]. En prenant la limite à l'infini, ce temps fictif permet du point de vue statistique de trouver un certain équilibre (thermique). En principe, les résultats de la MQ habituelle doivent émerger naturellement puisque à l'équilibre la probabilité prend la forme standard de Feynman de poids en $exp(Action)$.

Dans cette approche la détermination de quantités physiques à partir de probabilités réelles (la somme est égale à 1) constitue le principal avantage. C'est l'aspect le plus important de la MQS par rapport à la mécanique quantique habituelle qui utilise des quantités complexes comme l'amplitude de probabilité pour les mêmes définitions.

En mécanique quantique non relativiste, nous connaissons seulement deux articles [3] et [4] où des applications ont été faites pour ce formalisme stochastique.

Il s'agit de la détermination exacte de l'amplitude de transition pour des actions uniquement quadratiques. C'est ainsi que les cas de la particule libre, soumise à une force harmonique et à un champ magnétique constant ont été traités respectivement dans les espaces de phases et de configurations. Le cas relatif à la variable de Grassmann a été en outre considéré.

Pour les cas non exacts nécessitant un traitement perturbatif, Nakazato à donné la méthode.

C'est pour cette raison que nous voulons à travers cette thèse ajouter à cette liste bien réduite de cas solubles par la mécanique quantique stochastique (MQS) le cas non quadratique suivant : il s'agit du problème d'une particule relativiste, sans spin régie donc par l'équation de Klein Gordon soumise à l'action combinée de deux champs d'ondes électromagnétique planes et orthogonales. Le champ en question est décrit simplement par un potentiel vecteur donné par la superposition suivante $V_\mu = A_\mu(\varphi) + B_\mu(\chi)$ où $\varphi = kx$, $\chi = Kx$ et $k \neq K$. Ce champ est en outre assujetti à la condition de jauge de Lorentz, c'est à dire que : $kA = KB = 0$, avec le caractère relatif aux photons $k^2 = K^2 = 0$ ainsi que les conditions d'orthogonalité des deux champs d'ondes planes c'est à dire : $AB = kK = KA = kB = 0$.

La solution du même problème avec une seule onde peuvent être trouvé dans [5] et [6].

Ensuite, nous avons considéré le cas d'une onde gravitationnelle faible où nous avons utilisé l'approximation de champ faible et la linéarisation des équations d'Einstein de la relativité générale. Dans cette approximation, la métrique $g_{\mu\nu}(x)$ qui décrit le champ de la gravité est considérée comme petite perturbation par rapport à la métrique plate de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$[7],

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x), \tag{1.1}$$

et

$$g^{\mu\nu}(x) = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}(x), \tag{1.2}$$

où les termes d'ordre $h_{\mu\nu}^2$, $h_{\mu\nu}^3$, ... sont négligés ($h_{\mu\nu} \ll 1$).

En outre, pour obtenir la solution des équations d'Einstein linéarisées, il est commode d'utiliser la condition suivante [8]

$$g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = 0, \tag{1.3}$$

qui se réduit dans l'approximation de champ faible à la jauge de Lorentz

$$\partial_\lambda h^{\lambda}{}_{\mu} = \frac{1}{2}\partial_\mu h, \tag{1.4}$$

où

$$h(x) = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}(x). \tag{1.5}$$

La solution onde plane est alors donnée par

$$h_{\mu\nu}(k.x) = a_{\mu\nu} f(k.x), \tag{1.6}$$

où f est une fonction arbitraire de la variable $(k_\mu x^\mu)$. k étant le vecteur de propagation de l'onde (avec $k^2 = 0$).

En plus de la condition de jauge de Lorentz qui se réduit dans le cas de l'onde plane à

$$k^\mu h_{\mu\nu}(k.x) = k^\nu h_{\mu\nu}(k.x) = 0, \tag{1.7}$$

nous supposons que la quantité h est nulle (i.e. $h(k.x) = 0$ et le tenseur $h_{\mu\nu}$ est symétrique

$$h_{\mu\nu}(k.x) = h_{\nu\mu}(k.x). \tag{1.8}$$

La linéarisation des équations d'Einstein de la relativité générale est une manière simple d'étudier l'interaction de la matière avec un champ gravitationnel faible.

Cette thèse est organisée comme suit : le prochain chapitre sera consacré à la formulation de la MQS [3]. Au chapitre 3, nous montrons à partir des équations de Langevin comment calculer les fonctions de Green relatives à une particule de KG (spin 0) en utilisant la formulation du propagateur par la MQS donnée par [3]. Le calcul est d'abord fait dans l'espace des phases, le mouvement étant régi par l'hamiltonien. Grâce aux caractéristiques de deux ondes électromagnétique planes, le traitement perturbatif [4] se simplifie énormément. Avec quelques itérations l'action ainsi que le facteur de fluctuation sont déterminés. Le calcul est effectué pour une particule relativiste soumise à l'action combinée de deux champs d'ondes électromagnétique planes et orthogonales. Le même problème est encore repris au chapitre 4 mais cette fois ci dans l'espace de configuration. Le lagrangien est utilisé à la place de l'hamiltonien. Nous avons ainsi une seule équation de Langevin à considérer. Comme précédemment l'action classique et le facteur de fluctuation sont recalculés et la fonction de Green alors déterminée à l'équilibre thermique. Ensuite le chapitre 5 est consacré encore au calcul de la fonction de Green, nous montrons à partir des équations de Langevin relatives aux champs comment calculer les fonctions de Green relatives à une particule de KG (spin 0) et de Dirac (spin 1/2) soumise à l'onde plane gravitationnelle par la méthode de quantification stochastique de Parisi-Wu. Le calcul utilise la voie directe de résolution d'équations. Nous obtenons la fonction de corrélation des deux champs qui se reduit à la fonction de Green à la limite d'équilibre thermique.

Enfin, nous terminons par une conclusion.

Chapitre 2

Formalisme de la mécanique stochastique

Dans ce chapitre, nous présentons le fondement statistique de l'approche de la mécanique stochastique

2.1 Les équations de Langevin et Fokker-planck

2.1.1 Equation de Langevin

L'équation de base de la mécanique stochastique est l'équation de Langevin. C'est une équation différentielle au premier ordre par rapport au temps s

$$\frac{dx(s)}{ds} = f(x(s)) + \eta(s), \tag{2.1}$$

où f est une fonction arbitraire de la variable $x(s)$ et $\eta(s)$ est une variable aléatoire qu'on appelle bruit.

Le bruit η est choisi blanc pour les deux propriétés suivantes :

a- moyenne nulle

$$\langle \eta(s) \rangle = 0, \tag{2.2}$$

b- et le produit de corrélation égal à une fonction de Dirac δ

$$\langle \eta(s)\eta(s') \rangle = \Omega\delta(s - s'). \tag{2.3}$$

La solution de l'équation de Langevin (2.1) est simple

$$x(s) = x_0 + \int_0^s d\tau f(x(\tau)) + \int_0^s d\tau \eta(\tau), \tag{2.4}$$

elle est évidement fonction du bruit.

Nous avons choisi comme condition initiale $x(0) = x_0$ à l'instant $s = 0$.

La moyenne se réduit à

$$\langle x(s) \rangle = x_0 + \int_0^s d\tau \left\langle f(x(\tau)) \right\rangle . \tag{2.5}$$

Rappelons que la moyenne d'une grandeur $F(x(s))$ est la suivante :

$$\langle F(x(s)) \rangle = \int \mathcal{D}\eta F(x(s)) \exp\left[\frac{-1}{2\Omega}\int \eta^2 ds\right], \tag{2.6}$$

où

$$\mathcal{D}\eta = \prod_{i=1}^{N} d\eta(s_i). \tag{2.7}$$

Avec cette définition montrons que $\langle \eta(s) \rangle = 0$.

En effet, utilisons la procédure de la source $j(s)$ en revenant à la définition de la moyenne

$$\left\langle \exp\left[\int j(s)\eta(s)ds\right]\right\rangle = \int \mathcal{D}\eta \exp\left[\int j(s)\eta(s)ds\right]\exp\left[\frac{-1}{2\Omega}\int \eta^2 ds\right]. \tag{2.8}$$

Notons que

$$-\frac{1}{2\Omega}\eta^2 + j\eta = -\frac{1}{2\Omega}\left(\eta - \Omega j\right)^2 + \frac{\Omega}{2}j^2, \tag{2.9}$$

et effectuons le changement $\eta' \longrightarrow \eta$ défini par

$$\eta' = \eta - \Omega j. \tag{2.10}$$

Comme la mesure $\mathcal{D}\eta$ reste inchangée

$$\mathcal{D}\eta' = \mathcal{D}\eta, \tag{2.11}$$

la moyenne se calcule (2.8)

$$\left\langle \exp\left[\int j(s)\eta(s)ds\right]\right\rangle = \exp\left[\frac{\Omega}{2}\int j^2(s)ds\right]\int \mathcal{D}\eta \exp\left[-\int \frac{1}{2\Omega}\eta^2 ds\right]$$

$$= \exp\left[\frac{\Omega}{2}\int j^2(s)ds\right] . \tag{2.12}$$

Faisons agir l'opérateur $\dfrac{\delta}{\delta j(\tau)}$ sur la dernière équation

$$\left\langle \eta(\tau) \exp\left[\int j(s)\eta(s)ds\right]\right\rangle = \Omega j(\tau) \exp\left[\frac{\Omega}{2}\int j^2(s)ds\right]. \tag{2.13}$$

Fixons $j = 0$, nous avons

$$\langle \eta(\tau)\rangle = 0. \tag{2.14}$$

Faisons agir une 2ème fois l'opérateur $\dfrac{\delta}{\delta j(\omega)}$ sur l'égalité ci-dessus, et posons encore $j = 0$, nous aboutissons à

$$\langle \eta(\tau)\eta(\omega)\rangle = \Omega\delta(\tau - \omega). \tag{2.15}$$

Un bruit blanc est caractérisé par les deux propriétés(2.14), (2.15).

2.1.2 L'équation de Fokker-Planck

Utilisons l'équation de Langevin (2.1) et sa solution (2.4), ainsi que la moyenne de la grandeur $F(x(s))$ donnée par l'équation (2.6). Introduisons la probabilité $P(x, s)$ de trouver la particule à la position x et à l'instant s pour définir d'une façon standard la moyenne

$$\langle F(x(s))\rangle = \int dx F(x)P(x, s) \tag{2.16}$$

avec bien sûr la condition de normalisation

$$\int dx P(x, s) = 1. \tag{2.17}$$

Cette représentation a pour principal avantage de manipuler une seule intégrale au lieu de plusieurs (infinité) d'intégrales.

Cette probabilité a une expression égale à

$$P(x, s) = \langle \delta(x(s) - x)\rangle . \tag{2.18}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} dx F(x)P(x, s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx F(x) \langle \delta(x(s) - x)\rangle \\
&= \int dx F(x) \int \mathcal{D}\eta\delta(x(s) - x) \exp\left[\frac{-1}{2\Omega}\int \eta^2 ds\right] \\
&= \iint dx\mathcal{D}\eta F(x)\delta(x(s) - x) \exp\left[\frac{-1}{2\Omega}\int \eta^2 ds\right].
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Grâce à l'identité suivante

$$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a). \tag{2.20}$$

l'équation précédente (2.19) devient

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} dx F(x) P(x,s) &= \iint dx \mathcal{D}\eta F(x(s))\delta(x(s)-x) \exp\left[\frac{-1}{2\Omega}\int \eta^2 ds\right] \\
&= \int \mathcal{D}\eta F(x(s)) \exp\left[\frac{-1}{2\Omega}\int \eta^2 ds\right] \int dx \delta(x(s)-x) \\
&= \int \mathcal{D}\eta F(x(s)) \exp\left[\frac{-1}{2\Omega}\int \eta^2 ds\right] \\
&= \langle F(x(s))\rangle . \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que $P(x,s)$ obéit à l'équation de Fokker-Planck.

Pour cela calculons d'abord

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial P(x,s)}{\partial s}\right|_{x\ fix\acute{e}} &= \frac{\partial}{\partial s}\langle \delta(x(s)-x)\ \rangle \\
&= \left\langle \frac{\partial x(s)}{ds}\frac{\partial}{\partial x(s)}\delta(x(s)-x)\ \right\rangle \\
&= \left\langle (f(x(s)) + \eta(s))\frac{\partial}{\partial x(s)}\delta(x(s)-x)\ \right\rangle \\
&= -\frac{\partial}{\partial x}\langle f(x(s))\delta(x(s)-x)\rangle - \frac{\partial}{\partial x}\langle \eta(s)\delta(x(s)-x)\rangle , \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

où la propriété suivante a été utilisée

$$f(x)\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-a) \ = -f(x)\frac{\partial}{\partial a}\delta(x-a), \tag{2.23}$$

Le premier terme de l'équation (2.22) est aussi égal

$$\frac{\partial}{\partial x}\langle f(x(s))\delta(x(s)-x)\rangle = \frac{\partial}{\partial x}f(x)P(x,s), \tag{2.24}$$

où la relation a été utilisée

$$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a). \tag{2.25}$$

Reste à calculer $-\frac{\partial}{\partial x}\langle \eta(s)\delta(x(s)-x)\ \rangle$.

Il faut l'exprimer en fonction de $P(x,s)$.

Notons que $\delta(x(s)-x)$ dépend de $\eta(s)$, puisque la solution d'équation de Langevin $x(s)$ est une fonction du bruit.

Si nous changeons $\delta(x(s)-x) \longrightarrow G(\eta(s))$, et introduisons la procédure de la source

$$\langle \exp\left[j(s)\eta(s)ds\right] G(\eta(s))\rangle = \exp\left[\frac{\Omega}{2}\int j^2(s)ds\right] \langle G(\eta(s)+\Omega j(s))\rangle . \tag{2.26}$$

et faisons agir l'opérateur $\left.\frac{\delta}{\delta j(\omega)}\right|_{j=0}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\langle \eta(\omega)G(\eta(s))\rangle &= \Omega\left\langle \delta(\omega-s)\frac{\partial\ \ G(\eta(s))}{\partial\eta(s)}\right\rangle \\ &= \Omega\left\langle \frac{\partial\eta(s)}{\partial\eta(\omega)}\frac{\partial\ \ G(\eta(s))}{\partial\eta(s)}\right\rangle \\ &= \Omega\left\langle \frac{\partial\ \ G(\eta(s))}{\partial\eta(\omega)}\right\rangle ,\end{aligned} \tag{2.27}$$

Alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\langle \eta(s)\delta(x(s)-x)\rangle &= \frac{\partial}{\partial x}\Omega\left\langle \frac{\partial x(s)}{\partial\eta(s)}\frac{\partial\ \delta(x(s)-x)}{\partial x(s)}\right\rangle \\ &= -\Omega\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\langle\ \delta(x(s)-x)\frac{\partial x(s)}{\partial\eta(s)}\right\rangle .\end{aligned} \tag{2.28}$$

Or la solution de l'équation de Langevin est

$$x(s) = x_0 + \int_0^s d\tau f(x(\tau)) + \int_0^s d\tau\eta(\tau), \tag{2.29}$$

sa dérivée par rapport au bruit donne

$$\begin{aligned}\frac{\partial x(s)}{\partial\eta(s)} &= \int_0^s d\tau\frac{\partial f(x(\tau))}{\partial\eta(s)} + \int_0^s d\tau\frac{\partial\eta(\tau)}{\partial\eta(s)} \\ &= \theta(\tau-s)\Big|_0^s \\ &= \theta(0) = 1/2,\end{aligned} \tag{2.30}$$

le terme $\int_0^s d\tau\frac{\partial f(x(\tau))}{\partial\eta(s)}$ est nul à cause du principe de causalité (la position à l'instant t étant déterminée par les forces avant τ et non après τ).

Alors il apparaît une dérivée du deuxième ordre dans (2.28)

$$\frac{\partial}{\partial x}\langle \eta(s)\delta(x(s)-x)\rangle = -\frac{\Omega}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}P(x,s), \tag{2.31}$$

Finalement à partir de (2.24), (2.31) et (2.22) nous avons

$$\left.\frac{\partial P\left(x,s\right)}{\partial s}\right|_{x\ fix\acute{e}} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[f(x)P(x,s)\right] + \frac{\Omega}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}P(x,s). \tag{2.32}$$

qui est l'équation de Fokker-Planck.

La ressemblance avec l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial s} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}, \tag{2.33}$$

est évidente si on fait subir au temps une rotation de Wick

$$s \longrightarrow -is, \tag{2.34}$$

avec les changements

$$\left\{\begin{array}{c} \Omega = \dfrac{\hbar}{m} \\ f(x) = 0 \end{array}\right. . \tag{2.35}$$

2.2 Mécanique stochastique de Parisi-Wu

Après avoir donné un aperçu comment générer une équation probabiliste de Fokker-Planck à partir d'une équation classique (Langevin) et montrer le lien existant avec l'équation de Schrödinger nous allons étendre le formalisme au cas où nous avons affaire à un champ $\phi(x)$ ou tout simplement une variable $x(s)$.

Cette extension ou méthode de quantification est dûe à Parisi et Wu.

Succinctement la formulation consiste à

- associer au temps réel s un temps u fictif. La variable dynamique devient alors une fonction de deux variables : $x(s) \rightarrow x(s,u)$.

- régir l'évolution de cette variable au moyen de ce temps fictif u L'évolution est maintenant décrite par l'équation de Langevin

$$\frac{\partial}{\partial u}x(s,u) = f(x(s,u)) + \eta(s,u), \tag{2.36}$$

avec

$$f(x(s,u)) = i\frac{\delta S}{\delta x(s,u)}, \tag{2.37}$$

où S représente l'action relative au système et $\eta(t,s))$ un bruit choisi encore blanc à cause de ses deux propriétés :

a- moyenne nulle

$$\langle \eta(s,u) \rangle = 0. \tag{2.38}$$

b- le produit de corrélation égal au produit de deux fonctions δ

$$\langle \eta(s,u)\eta(s',u') \rangle = \Omega\delta(s-s^{'})\delta(u-u'). \tag{2.39}$$

La moyenne $\langle (*) \rangle$ se calcule comme d'habitude : c'est une somme sur tous les bruits possibles que nous affectons d'un poids gaussien

$$\langle (*) \rangle = \int D\eta \ (*) \exp\left[\frac{-1}{2\Omega}\int \eta^2(s,u)dsdu\right], \tag{2.40}$$

Sous forme discrète

$$\langle (*) \rangle = \lim_{N\to\infty} \mathcal{N} \int \prod_n^N d\eta\,(s_n,u_n) \exp\left[\frac{-1}{2\Omega}\sum_n^N \varepsilon\sigma\eta^2(s_n,u_n)\right], \tag{2.41}$$

$\mathcal{N}$ étant une constante fixée de façon à avoir $\langle 1 \rangle = 1$.

- pour $u \longrightarrow \infty$, on dit que nous sommes à l'équilibre et nous obtenons alors les quantités physiques de la mécanique quantique.

La généralisation pour un champ est évidente.

Pour un système décrit par un champ $\phi(x)$ (scalaire) où $x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (s, \overrightarrow{r})$ est un 4-vecteur, la procédure s'adapte encore :

- le champ $\phi(x)$ se modifie en le faisant dépendre d'une autre variable u temps fictif :

$\phi = \phi(x,u)$ et l'équation de Langevin régissant l'évolution de ce champ est

$$\frac{\partial}{\partial s}\phi(x,u) = i\frac{\delta S}{\delta\phi(x,u)} + \eta(x,u), \tag{2.42}$$

tandis que la moyenne se définit comme suit

$$\langle F(\phi(x),u) \rangle = \int D\eta(x,u) F(\phi(x),u) \exp\left[\frac{-1}{2\Omega}\int \eta^2(x,u)d^4xdu\right]. \tag{2.43}$$

L'équilibre est atteint pour $u \longrightarrow \infty$.

Revenons à la variable x.La moyenne en mécanique quantique se définit par

$$\langle x(s_1)x(s_2)\rangle = \frac{\langle x_f, s_f \mid T(x(s_1)x(s_2)) \mid x_i, s_i\rangle}{\langle x_f, s_f \mid x_i, s_i\rangle}, \tag{2.44}$$

qui est exactement la moyenne en mécanique stochastique

$$\frac{\langle x_f, s_f \mid T(x(s_1)x(s_2)) \mid x_i, s_i\rangle}{\langle x_f, s_f \mid x_i, s_i\rangle} = \lim_{u\longrightarrow\infty} \langle x(s_1,u)x(s_2,u)\rangle\,, \tag{2.45}$$

Cette moyenne peut être encore définie via l'introduction d'une probabilité $P\,[x,u]$,

$$\langle x(s_1,u)x(s_2,u)\rangle = \int_{x_i,x_f} Dxx(s_1)x(s_2)P\,[x,u]\,, \tag{2.46}$$

$$x(s_f) = x_f, \quad x(s_i) = x_i, \tag{2.47}$$

et cette probabilité P est solution de l'équation habituelle de Fokker- Plank, mais cette fois ci généralisée.

$$\frac{\partial}{\partial u}P\,[x,u] = \int_{-\infty}^{+\infty} ds\frac{\delta}{\delta x(s)}\left(\frac{\delta}{\delta x(s)} - i\frac{\delta}{\delta x(s)}\right)P\,[x,u]\,, \tag{2.48}$$

Comme auparavant la normalisation est maintenant

$$\langle 1\rangle = \int_{s_a}^{s_b} DxP\,[x,u] = 1. \tag{2.49}$$

A la limite d'équilibre ($u \to \infty$), la fonction de corrélation (2.46) devient exactement le propagateur de Feynman

$$\begin{aligned}\lim_{u\longrightarrow\infty} \langle x(s_1,u)x(s_2,u)\rangle &= \frac{\displaystyle\int Dxx(s_1)x(s_2)e^{iS}}{\displaystyle\int D_x e^{iS}} \\ &= \langle 0|\,Tx(s_1)x(s_2)\,|0\rangle\,. \end{aligned}\tag{2.50}$$

2.3 Formulation stochastique du propagateur

En mécanique quantique, le calcul de la section efficace par exemple nécessite la connaissance de l'amplitude de transition ou propagateur. Sa détermination est donc essentielle. Le but de ce chapitre est de voir comment le détérminer par la mécanique stochastique (SQM) de Parisi et Wu.

Donnons la formulation stochastique pour calculer le propagateur.

Relions d'abord l'amplitude de transition $\langle x_f, s_f | x_i, s_i \rangle$ à la valeur moyenne de l'hamiltonien H [3].

Considérons d'abord un vecteur d'état de Heisenberg vérifiant

$$|x_i, s_i\rangle = T \exp\left[i \int_{s_0}^{s_i} H(s) ds \right] |x_i, s_0\rangle \,, \tag{2.51}$$

où $H(s)$ est l'hamiltonien qui régit la dynamique du système.

Dérivons par rapport au temps s, nous obtenons l'équation d'évolution

$$\frac{\partial}{\partial s_i} |x_i, s_i\rangle = iH(s_i) |x_i, s_0\rangle \,. \tag{2.52}$$

En multipliant à gauche par le bra $\langle x_f, s_f|$

$$\frac{\partial}{\partial s_i} \ln \langle x_f, s_f \mid x_i, s_i\rangle = i \frac{\langle x_f, s_f| H(s_i) |x_i, s_0\rangle}{\langle x_f, s_f \mid x_i, s_i\rangle}, \tag{2.53}$$

et en intégrant, l'amplitude se calcule

$$\langle x_f, s_f \mid x_i, s_i\rangle = c \exp\left[i \int^{s} \lim_{u \longrightarrow \infty} \langle H(s_i, u)\rangle \, ds_i \right]. \tag{2.54}$$

Nous voyons qu'elle se calcule en déterminant la moyenne stochastique $\langle H(s_i, u)\rangle$. La constante c étant indépendante de s_i que nous fixons par la condition

$$\lim_{\lambda \longrightarrow 0} \langle x_f, s_f \mid x_i, s_i\rangle = \delta(x_f - x_i), \qquad \lambda = (s_f - s_i) \,. \tag{2.55}$$

Associons maintenant à l'opérateur hamiltonien $\hat{H}$ un hamiltonien classique. Effectuons d'abord la séparation suivante

$$\begin{cases} x = x_{cl} + x_Q \\ p = p_{cl} + p_Q \end{cases} , \tag{2.56}$$

L'hamiltonien $H(s,u)$ suivant [3] et également en deux parties

$$H(s,u) = H_{cl}(s,u) + H_Q(s,u). \tag{2.57}$$

Alors la moyenne de l'hamiltonien $H(s,u)$ est comme suit

$$\langle H(s,u)\rangle = \langle H_{cl}(s)\rangle + \langle H_Q(s,u)\rangle \,. \tag{2.58}$$

- le premier terme est une partie classique indépendante du temps fictif u est reliée à l'action classique (calculée suivant le chemin classique)

$$\frac{\partial S_{cl}}{\partial s_i} = H_{cl}(s_i). \tag{2.59}$$

- et le deuxième terme contient des déviations à cause des bruits qui ont dévié la particule de sa trajectoire classique. En principe ce terme donne un facteur dit de fluctuation.

Le propagateur est alors égal à

$$\langle x_f, s_f \mid x_i, s_i \rangle = c \exp\left[iS_{cl}\right] \exp\left[i \int^{s_i} \lim_{u \longrightarrow \infty} \langle H_Q(s_i, u) \rangle \, ds_i\right]. \tag{2.60}$$

Finalement la détermination du propagateur passe par le calcul

- de la partie classique

- et de la partie relative aux fluctuations quantiques $\langle H_Q(s_i, u) \rangle$.

Pour des actions quadratiques, cette moyenne $\langle H_Q(s_i, u) \rangle$ a été calculée [3]. C'est ainsi que les cas relatifs à la particule libre, soumise à une force harmonique ou à un champ magnétique ont été considérés exactement en utilisant l'espace des configurations et l'espace des phases. Le cas où la variable est de type Grassmman a été considéré pour calculer le facteur de fluctuation.

Notre but dans le chapitre suivant est d'ajouter à la liste des propagateurs calculables suivant cette approche (MQS) le propagateur relatif à une particule relativiste soumise à l'action de deux ondes planes et orthogonales. Considérons la solution de ce problème d'abord dans l'espace des phases.

Chapitre 3

Formulation dans l'espace des phases

3.1 Propagateur d'une particule de spin 0 dans le champ de deux ondes planes et orthogonales

Notre but dans ce chapitre, est de calculer la fonction de Green pour une particule scalaire (spin 0) relativiste chargée soumise à l'action combinée de deux champs d'ondes planes, que nous prenons pour faciliter les calculs, orthogonales, et tout ceci suivant l'approche de la MQS.

La fonction de Green $\Delta(x_b, x_a)$ en question est solution de l'équation de Klein Gordon

$$(\pi^2 - m^2)\Delta(x_b, x_a) = \delta^4(x_b - x_a). \tag{3.1}$$

Avec un temps propre λ, $\Delta(x_b, x_a)$ peut être représentée sous la forme d'une intégrale

$$\Delta(x_b, x_a) = \frac{1}{2i}\int_0^\infty d\lambda \exp\left[\frac{-im^2\lambda}{2}\right] K(x_b, x_a; \lambda), \tag{3.2}$$

faisant intervenir un noyau K ou propagateur dont nous proposons de le calculer içi.

Le mouvement nous l'étudions dans l'espace des phases. Il est donc naturel d'utiliser le formalisme hamiltonien avec évidemment les deux variables $(x_Q\ , p_Q)$ qui deviennent des variables aléatoires dans l'approche de la MQS.

Au chapitre 2, il a été montré que l'expression du propagateur à calculer

$$\langle x_f, s_f \mid x_i, s_i\rangle = c\exp\left[iS_{cl}\right]\exp\left[i\int_0^s \lim_{u\longrightarrow\infty}\langle H_Q(s_i, u)\rangle\, ds_i\right], \tag{3.3}$$

passe par la détermination de la partie classique et de la partie relative aux fluctuations quantiques $\langle H_Q(s_i,u)\rangle$.

Commençons par la partie classique.

3.1.1 Calcul de l'action classique $\mathbf{S}_{cl.}$

L'hamiltonien qui régit le mouvement de la particule de spin 0 est

$$H = -\frac{1}{2}\left(p - eV\right)^2, \tag{3.4}$$

et l'action est la suivante

$$S = -\int_{s_a}^{s_b} ds \left[p(s)\dot{x}(s) - \frac{1}{2}\left(p(s) - eV\right)^2\right], \tag{3.5}$$

où V est un potentièl vecteur donné par la superposition suivante

$$V_\mu = A_\mu(kx) + B_\mu(Kx). \tag{3.6}$$

Dans toute la suite nous designons par kx par ϕ et Kx par χ.

Soit maintenant la trajectoire classique d'équation x_{cl}. Cette équation se détermine par les deux équations d'Hamilton, puisque nous somme dans l'espace des phases.

$$\begin{aligned}
\dot{p}_{cl\mu} &= \frac{\partial H}{\partial x^\mu} = \left(p_{cl} - eA_{cl} - eB_{cl}\right).\left(ek_\mu \frac{dA_{cl}}{d\phi} + eK_\mu \frac{dB}{d\chi}\right), \\
\dot{x}_{cl\mu} &= -\frac{\partial H}{\partial p^\mu} = p_{cl\mu} - eA_{cl\mu} - eB_{cl\mu}.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

En éliminant l'impulsion, respectivement

$$p_{cl\mu} = \dot{x}_{cl\mu} + eA_{cl\mu} + eB_{cl\mu}. \tag{3.8}$$

Alors, l'équation qui donne la trajectoire classique est

$$\frac{d}{ds}(\dot{x}_\mu + eA_\mu + eB_\mu) = e\left(p_{cl} - eA_{cl} - eB_{cl}\right).\left(k_\mu \frac{dA_{cl}}{d\phi} + K_\mu \frac{dB}{d\chi}\right), \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}(\dot{x}_\mu + eA_\mu + eB_\mu) &= e\dot{x}.\left(k_\mu \frac{dA_{cl}}{d\phi} + K_\mu \frac{dB}{d\chi}\right) \\
&= ek_\mu\left(\dot{x}.\frac{dA_{cl}}{d\phi}\right) + eK_\mu\left(\dot{x}.\frac{dB}{d\chi}\right),
\end{aligned} \tag{3.10}$$

où $\phi = k.x$ et $\chi = Kx$.

Intégrons une 1ère fois $/s$, il vient

$$\dot{x}_\mu + eA_\mu + eB_\mu = c_\mu + \int_{s_a}^{s} ds' \left[ek_\mu \left(\dot{x}(s').\frac{dA}{d\phi'} \right) + eK_\mu \left(\dot{x}(s').\frac{dB}{d\chi'} \right) \right], \tag{3.11}$$

ou encore

$$\dot{x}_\mu = c_\mu - e\left(A_\mu + B_\mu\right) + e \int_{s_a}^{s} ds' \left[k_\mu \left(\dot{x}(s').\frac{dA}{d\phi'} \right) + K_\mu \left(\dot{x}(s').\frac{dB}{d\chi'} \right) \right], \tag{3.12}$$

avec $\phi' = kx(s')$, $\chi' = Kx\,(s')$ et c^μ un quadri -vecteur constant.

Nous voyons que la connaissance de $\dot{x}$ au temps s nécessite au préalable la connaissance de $\dot{x}$ au temps s'.

Résolvons cette equation par itération.

En effet reutilisons l'équation pour un temps s' et en reportons la dans l'éqauation (3.12).

Il vient successivement

$$\dot{x}_\mu = c_\mu - e\left(A_\mu + B_\mu\right) + ek_\mu \int_{s_a}^{s} ds' \left(\dot{x}(s').\frac{dA}{d\phi'} \right) + eK_\mu \int_{s_a}^{s} ds' \left(\dot{x}(s').\frac{dB}{d\chi'} \right), \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_\mu \;=\;& c_\mu - e\left(A_\mu + B_\mu\right) + ek_\mu \int_{s_a}^{s} ds' \left[\left(c_\nu.\frac{dA^\nu}{d\phi'} \right) - e\left(\left(A_\nu + B_\nu\right).\frac{dA^\nu}{d\phi'} \right) \right. \\ & \left. +ek_\nu \int_{s'_a}^{s'} ds'' \left(\dot{x}(s'').\frac{dA}{d\phi''} \right).\frac{dA^\nu}{d\phi'} + eK_\upsilon \int_{s'_a}^{s'} ds'' \left(\dot{x}(s'').\frac{dB}{d\chi''} \right).\frac{dA^\nu}{d\phi'} \right] + \\ & +eK_\mu \int_{s_a}^{s} ds' \left[\left(c_\nu.\frac{dB^\nu}{d\chi'} \right) - e\left(\left(A_\nu + B_\nu\right).\frac{dB^\nu}{d\chi'} \right) + \right. \\ & \left. + ek_\nu \int_{s'_a}^{s'} ds'' \left(\dot{x}(s'').\frac{dB}{d\chi''} \right).\frac{dB^\nu}{d\chi'} + eK_\upsilon \int_{s'_a}^{s'} ds'' \left(\dot{x}(s'').\frac{dB}{d\chi''} \right).\frac{dB^\nu}{d\chi'} \right]. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Nous avons adopté la jauge de Lorentz, c'est à dire que : $kA = KB = 0$ et nous avons utilisé le caractère relatif aux photons $k^2 = K^2 = 0$ ainsi que les conditions d'orthogonalités des deux champs d'ondes planes c'est à dire $AB = kK = KA = kB = 0$, le quadri-vitesse a pour expression

$$\begin{aligned} \dot{x}_\mu \;=\;& c_\mu - e\left(A_\mu + B_\mu\right) + ek_\mu \int_{s_a}^{s} ds' \left[\left(c_\nu.\frac{dA^\nu}{d\phi'} \right) - e\left(A_\nu.\frac{dA^\nu}{d\phi'} \right) \right] \\ & +eK_\mu \int_{s_a}^{s} ds' \left[\left(c_\nu.\frac{dB^\nu}{d\chi'} \right) - e\left(B_\nu.\frac{dB^\nu}{d\chi'} \right) \right], \end{aligned} \tag{3.15}$$

ou encore

$$\begin{aligned}\dot{x}_\mu &= c_\mu - e\left(A_\mu + B_\mu\right) + k_\mu \int_{s_a}^{s} ds' \left[e\left(c_\nu . \frac{dA^\nu}{d\phi'}\right) - e^2\left(A_\nu . \frac{dA^\nu}{d\phi'}\right)\right] \\ &\quad + K_\mu \int_{s_a}^{s} ds' \left[e\left(c_\nu . \frac{dB^\nu}{d\chi'}\right) - e^2\left(B_\nu . \frac{dB^\nu}{d\chi'}\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Il nous est utile de trouver une équation simple.

Multiplions les deux membres par k^μ ensuite par K^μ alors

$$\left\{\begin{array}{l} k^\mu \dot{x}_\mu = k^\mu c_\mu = \alpha_1 \\ \\ K^\mu \dot{x}_\mu = K^\mu c_\mu = \alpha_2 \end{array}\right. , \tag{3.17}$$

et par intégration, le produit

$$\left\{\begin{array}{l} \phi = kx = k^\mu x_\mu = \alpha_1 s + \beta_1 \\ \\ \chi = Kx = K^\mu x_\mu = \alpha_2 s + \beta_2 \end{array}\right. ,, \tag{3.18}$$

est une fonction linéaire de la variable s.

En utilisant les conditions aux limites

$$\left\{\begin{array}{l} kx_a = \alpha_1 s_a + \beta_1 \\ kx_b = \alpha_1 s_b + \beta_1 \end{array}\right. , \qquad \left\{\begin{array}{l} Kx_a = \alpha_2 s_a + \beta_2 \\ Kx_b = \alpha_2 s_b + \beta_2 \end{array}\right. \tag{3.19}$$

nous pouvons tirer les valeurs des constantes α_1 et α_2

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{k^\mu (x_b - x_a)_\mu}{s_b - s_a} = \frac{(k. \triangle x)}{\lambda}, \\ \\ \alpha_2 &= \frac{K^\mu (x_b - x_a)_\mu}{s_b - s_a} = \frac{(K. \triangle x)}{\lambda}, \end{aligned} \tag{3.20}$$

on ainsi que celle de β_1 et β_2.

Comme il existe un lien entre le pseudo temps s et ϕ et entre s et χ

$$\left\{\begin{array}{l} d\phi = \alpha_1 ds \\ d\chi = \alpha_2 ds \end{array}\right. , \tag{3.21}$$

le 4-vecteur $\dot{x}_\mu$ s'écrit aussi

$$\begin{aligned}\dot{x}_\mu &= c_\mu - e\left(A_\mu + B_\mu\right) + \frac{k_\mu}{\alpha_1}\int_{\phi_a=\alpha_1 s_a+\beta_1}^{\phi=\alpha_1 s+\beta_1} d\phi' \left[e\left(c_\nu.\frac{dA^\nu}{d\phi'}\right) - e^2\left(A_\nu.\frac{dA^\nu}{d\phi'}\right)\right] \\ &+\frac{K_\mu}{\alpha_2}\int_{\chi_a=\alpha_2 s_a+\beta_2}^{\chi=\alpha_2 s+\beta_2} d\chi' \left[e\left(c_\nu.\frac{dB^\nu}{d\chi'}\right) - e^2\left(B_\nu.\frac{dB^\nu}{d\chi'}\right)\right].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_\mu &= c_\mu - e\left(A_\mu + B_\mu\right) + \frac{k_\mu}{\alpha_1}\left[e\left(c.A(\phi)\right) - e\left(c.A(\phi_a)\right) - \frac{e^2}{2}A^2(\phi) + \frac{e^2}{2}A^2(\phi_a)\right] \\ &+\frac{K_\mu}{\alpha_2}\left[e\left(c.B(\chi)\right) - e\left(c.B(\chi_a)\right) - \frac{e^2}{2}B^2(\chi) + \frac{e^2}{2}B^2(\chi_a)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_\mu &= D_\mu - e\left(A_\mu + B_\mu\right) + \frac{k_\mu}{\alpha_1}\left[e\left(c.A(\phi)\right) - \frac{e^2}{2}A^2(\phi)\right] + \\ &+\frac{K_\mu}{\alpha_2}\left[e\left(c.B(\chi)\right) - \frac{e^2}{2}B^2(\chi)\right],\end{aligned} \tag{3.22}$$

où nous avons posé

$$D_\mu = c_\mu - \frac{k_\mu}{\alpha_1}\left[ec.A(\phi_a) - \frac{e^2}{2}A^2(\phi_a)\right] - \frac{K_\mu}{\alpha_2}\left[e\left(c.B(\chi_a)\right) - \frac{e^2}{2}B^2(\chi_a)\right]. \tag{3.23}$$

Remarquons que $c_\mu \neq D_\mu$ mais que

$$\begin{cases} k\dot{x} = kc = kD \\ \\ A^\mu c_\mu = A^\mu D_\mu \end{cases} . \quad \begin{cases} K\dot{x} = Kc = KD \\ \\ B^\mu c_\mu = B^\mu D_\mu \end{cases} \tag{3.24}$$

Comme

$$A^\mu \dot{x}_\mu = A^\mu c_\mu - eA_\mu^2 = A^\mu D_\mu - eA_\mu^2, \quad \text{et} \quad B^\mu \dot{x}_\mu = B^\mu c_\mu - eB_\mu^2 = B^\mu D_\mu - eB_\mu^2, \tag{3.25}$$

nous pouvons encore écrire le 4-vitesse comme suit

$$\begin{aligned}\dot{x}_\mu &= D_\mu - e\left(A_\mu + B_\mu\right) + \frac{k_\mu}{\alpha_1}\left[e\left(D.A(\phi)\right) - \frac{e^2}{2}A^2(\phi)\right] + \\ &+\frac{K_\mu}{\alpha_2}\left[e\left(D.B(\chi)\right) - \frac{e^2}{2}B^2(\chi)\right].\end{aligned} \tag{3.26}$$

Intégrons cette dernière équation une deuxième fois par rapport à s nous arrivons à

$$\begin{aligned}x_\mu &= C_\mu + D_\mu s - e\int_{s_a}^{s} ds' \left(A_\mu + B_\mu\right) + \frac{k_\mu}{\alpha_1}\int_{s_a}^{s} ds' \left[e\left(D.A\right) - \frac{e^2}{2}A^2\right] + \\ &+\frac{K_\mu}{\alpha_2}\int_{s_a}^{s} ds' \left[e\left(D.B\right) - \frac{e^2}{2}B^2\right].\end{aligned} \tag{3.27}$$

où C_μ est encore un autre 4-vecteur constant.

Ces deux constantes peuvent être fixées. En effet, nous avons pour $s = s_a$

$$x_a = C_\mu + D_\mu s_a, \tag{3.28}$$

et pour $s = s_b$

$$\begin{aligned} x_b &= C_\mu + D_\mu s_b - e\int_{s_a}^{s_b} ds\,(A_\mu + B_\mu) + \frac{k_\mu}{\alpha_1}\int_{s_a}^{s_b} ds\left[e\,(D.A) - \frac{e^2}{2}A^2\right] \\ &+ \frac{K_\mu}{\alpha_2}\int_{s_a}^{s_b} ds\left[e\,(D.B) - \frac{e^2}{2}B^2\right], \end{aligned} \tag{3.29}$$

et en faisant la différence des deux équations

$$\begin{aligned} \triangle x &= x_b - x_a \\ &= D_\mu(s_b - s_a) - e\int_{s_a}^{s_b} ds\,(A_\mu + B_\mu) + \frac{k_\mu}{\alpha_1}\int_{s_a}^{s_b} ds\left[e\,(D.A) - \frac{e^2}{2}A^2\right] + \\ &+ \frac{K_\mu}{\alpha_2}\int_{s_a}^{s_b} ds\left[e\,(D.B) - \frac{e^2}{2}B^2\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle x &= D_\mu\lambda - e\int_{s_a}^{s_b} ds\,(A_\mu + B_\mu) + \frac{k_\mu}{\alpha_1}\int_{s_a}^{s_b} ds\left[e\,(D.A) - \frac{e^2}{2}A^2\right] + \\ &+ \frac{K_\mu}{\alpha_2}\int_{s_a}^{s_b} ds\left[e\,(D.B) - \frac{e^2}{2}B^2\right]. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Alors

$$\begin{aligned} D_\mu &= \frac{\triangle x}{\lambda} + \frac{e}{\lambda}\int_{s_a}^{s_b} ds\,(A_\mu + B_\mu)_\mu - \frac{k_\mu}{\lambda\alpha_1}\int_{s_a}^{s_b} ds\left[eD.A - \frac{e^2}{2}A^2\right] \\ &- \frac{K_\mu}{\lambda\alpha_2}\int_{s_a}^{s_b} ds\left[e\,(D.B) - \frac{e^2}{2}B^2\right]. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Ayant déterminé complètement la trajectoire classique, calculons l'action qui lui est relative

$$S_{cl} = -\int_{s_a}^{s_b} ds\left[\frac{1}{2}\dot{x}_{cl}^2\,(s) + eA_{cl}.\dot{x}_{cl}\,(s) + eB_{cl}.\dot{x}_{cl}\,(s)\right]. \tag{3.32}$$

Le premier terme (énergie cinétique) est simplement égal à

$$\begin{aligned} \dot{x}_\mu &= D_\mu - e\,(A_\mu + B_\mu) + \frac{k_\mu}{\alpha_1}\left[e\,(D.A(\phi)) - \frac{e^2}{2}A^2(\phi)\right] + \\ &+ \frac{K_\mu}{\alpha_2}\left[e\,(D.B(\chi)) - \frac{e^2}{2}B^2(\chi)\right]. \end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{x}_\mu^2}{2} &= \frac{D^2}{2} + \frac{e^2}{2}\left(A_\mu + B_\mu\right)^2 - eD.\left(A_\mu + B_\mu\right) + \frac{D_\mu k^\mu}{\alpha_1}\left[eD.A(\phi) - \frac{e^2}{2}A^2(\phi)\right] \\
&+ \frac{D_\mu K^\mu}{\alpha_2}\left[eD.B(\chi) - \frac{e^2}{2}B^2(\chi)\right] \\
&= \frac{D^2}{2}.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Où nous avons adopté la jauge de Lorentz, c'est à dire que : $kA = KB = 0$ et nous avons utilisé le caractère relatif aux photons $k^2 = K^2 = 0$ ainsi que les conditions d'orthogonalités des deux champs d'ondes planes c'est à dire $AB = kK = KA = kB = 0$, et nous avons utilisé aussi

$$\frac{D_\mu k^\mu}{\alpha_1} = 1, \qquad \alpha_1 = \frac{(k.\triangle x)}{\lambda}, \tag{3.35}$$

$$\frac{D_\mu K^\mu}{\alpha_2} = 1, \qquad \alpha_2 = \frac{(K.\triangle x)}{\lambda}, \tag{3.36}$$

tandis que le deuxième terme est

$$\begin{aligned}
A^\mu \dot{x}_\mu &= A^\mu\left[D_\mu - e\left(A_\mu + B_\mu\right) + \frac{k_\mu}{\alpha_1}\left(e\left(D.A(\phi)\right) - \frac{e^2}{2}A^2(\phi)\right) + \right. \\
&\left. + \frac{K_\mu}{\alpha_2}\left(e\left(D.B(\chi)\right) - \frac{e^2}{2}B^2(\chi)\right)\right] \\
&= A.D - eA^2,
\end{aligned} \tag{3.37}$$

et finalement le dernier terme est égale à

$$\begin{aligned}
B^\mu \dot{x}_\mu &= B^\mu\left[D_\mu - e\left(A_\mu + B_\mu\right) + \frac{k_\mu}{\alpha_1}\left(e\left(D.A(\phi)\right) - \frac{e^2}{2}A^2(\phi)\right) + \right. \\
&\left. + \frac{K_\mu}{\alpha_2}\left(e\left(D.B(\chi)\right) - \frac{e^2}{2}B^2(\chi)\right)\right] \\
&= B.D - eB^2,
\end{aligned} \tag{3.38}$$

reportons les résultats suivants (3.34),(3.37) et (3.38) dans l'action classique (3.32). nous obtenons

$$\begin{aligned}
S_{cl} &= -\int_{s_a}^{s_b} ds\left[\frac{D^2}{2} + eA.D - e^2A^2 + eB.D - e^2B^2\right], \\
&= -\frac{\lambda D^2}{2} - eD\int_{s_a}^{s_b} dsA + e^2\int_{s_a}^{s_b} dsA^2 - eD\int_{s_a}^{s_b} dsB + e^2\int_{s_a}^{s_b} dsB^2,
\end{aligned}$$

$$= -\frac{\lambda}{2}\left[\frac{\triangle x}{\lambda}+\frac{e}{\lambda}\int_{s_a}^{s_b} ds\,(A_\mu+B_\mu)_\mu-\frac{k_\mu}{\lambda\alpha_1}\int_{s_a}^{s_b} ds\left[eD.A-\frac{e^2}{2}A^2\right]-\frac{K_\mu}{\lambda\alpha_2}\int_{s_a}^{s_b} ds\left[e\,(D.B)-\frac{e^2}{2}B^2\right]\right]^2$$
$$-eD\int_{s_a}^{s_b} dsA+e^2\int_{s_a}^{s_b} dsA^2-eD\int_{s_a}^{s_b} dsB+e^2\int_{s_a}^{s_b} dsB^2,$$

$$S_{cl}=-\frac{\lambda}{2}\left[\frac{\triangle x^2}{\lambda^2}+\frac{e^2}{\lambda^2}\left[\int_{s_a}^{s_b} ds\,(A_\mu+B_\mu)\right]^2+2\frac{e\triangle x}{\lambda^2}\int_{s_a}^{s_b} ds\,(A_\mu+B_\mu)-2\frac{k_\mu.\triangle x}{\lambda^2\alpha_1}\int_{s_a}^{s_b} ds\left(eD.A-\frac{e^2}{2}A^2\right)\right.$$
$$\left.-2\frac{K_\mu.\triangle x}{\lambda^2\alpha 2}\int_{s_a}^{s_b} ds\left(eD.B-\frac{e^2}{2}B^2\right)\right]-eD\int_{s_a}^{s_b} dsA+e^2\int_{s_a}^{s_b} dsA^2-eD\int_{s_a}^{s_b} dsB+e^2\int_{s_a}^{s_b} dsB^2, \tag{3.39}$$

Reportons les résultats (3.35) et (3.36) dans cette dernière équation. Nous obtenons

$$\begin{aligned} S_{cl} &= -\frac{\triangle x^2}{2\lambda}-\frac{e^2}{2\lambda}\left[\int_{s_a}^{s_b} ds\,(A_\mu+B_\mu)\right]^2-\frac{e\triangle x}{\lambda}\int_{s_a}^{s_b} ds\,(A_\mu+B_\mu)\\ &\quad+\frac{(k_\mu.\triangle x)\,\lambda}{\lambda\,(k.\triangle x)}\int_{s_a}^{s_b} ds\left(eD.A-\frac{e^2}{2}A^2\right)+\frac{(K_\mu.\triangle x)\,\lambda}{\lambda\,(K.\triangle x)}\int_{s_a}^{s_b} ds\left(eD.B-\frac{e^2}{2}B^2\right)\\ &\quad-eD\int_{s_a}^{s_b} dsA+e^2\int_{s_a}^{s_b} dsA^2-eD\int_{s_a}^{s_b} dsB+e^2\int_{s_a}^{s_b} dsB^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{cl} &= -\frac{\triangle x^2}{2\lambda}-\frac{e^2}{2\lambda}\left[\int_{s_a}^{s_b} ds\,(A_\mu+B_\mu)\right]^2-\frac{e\triangle x}{\lambda}\int_{s_a}^{s_b} ds\,(A_\mu+B_\mu)+\\ &\quad\int_{s_a}^{s_b} ds\left(eD.A-\frac{e^2}{2}A^2\right)+\int_{s_a}^{s_b} ds\left(eD.B-\frac{e^2}{2}B^2\right)\\ &\quad-eD\int_{s_a}^{s_b} dsA+e^2\int_{s_a}^{s_b} dsA^2-eD\int_{s_a}^{s_b} dsB+e^2\int_{s_a}^{s_b} dsB^2,\\ &= -\frac{\triangle x^2}{2\lambda}-\frac{e^2}{2\lambda}\left[\int_{s_a}^{s_b} dsA_\mu\right]^2-\frac{e^2}{2\lambda}\left[\int_{s_a}^{s_b} dsB_\mu\right]^2-\frac{e\triangle x}{\lambda}\int_{s_a}^{s_b} ds\,(A_\mu+B_\mu)\\ &\quad+\frac{e^2}{2}\left[\int_{s_a}^{s_b} dsA^2+\int_{s_a}^{s_b} dsB^2\right]. \end{aligned} \tag{3.40}$$

et aprés quelques simplifications

$$\begin{aligned} S_{cl} &= -\frac{\triangle x^2}{2\lambda}-\frac{e\triangle x}{\lambda\alpha_1}\int_{\phi_a}^{\phi_b} d\phi A_\mu+\frac{e^2}{2\alpha_1}\int_{\phi_a}^{\phi_b} d\phi A^2-\frac{e^2}{2\lambda\alpha_1^2}\left[\int_{\phi_a}^{\phi_b} d\phi A_\mu\right]^2\\ &\quad-\frac{e\triangle x}{\lambda\alpha_2}\int_{\chi_a}^{\chi_b} d\chi B_\mu+\frac{e^2}{2\alpha_2}\int_{\chi_a}^{\chi_b} d\chi B^2-\frac{e^2}{2\lambda\alpha_2^2}\left[\int_{\chi_a}^{\chi_b} d\chi B_\mu\right]^2. \end{aligned} \tag{3.41}$$

$$S_{cl} = -\frac{(x_b - x_a)^2}{2\lambda} \quad -\frac{e(x_b - x_a)}{k(x_b - x_a)} \int_{kx_a}^{kx_b} d\phi A - \frac{e(x_b - x_a)}{K(x_b - x_a)} \int_{Kx_a}^{Kx_b} d\chi B$$
$$+\frac{\lambda e^2}{2k(x_b - x_a)} \left[\int_{kx_a}^{kx_b} d\phi A^2 - \frac{1}{k(x_b - x_a)} \left[\int_{kx_a}^{kx_b} d\phi A \right]^2 \right]$$
$$+\frac{\lambda e^2}{2K(x_b - x_a)} \left[\int_{Kx_a}^{Kx_b} d\chi B^2 - \frac{1}{K(x_b - x_a)} \left[\int_{Kx_a}^{Kx_b} d\chi B \right]^2 \right], \tag{3.42}$$

nous obtenons l'action classique.

Cette action est une fonction de x_a, s_a, x_b, s_b.

Passons au calcul du facteur de fluctuation.

3.1.2 Calcul du facteur de fluctuation

Désignons par x_Q^μ et par p_Q^μ respectivement la déviation de x^μ par rapport à la trajectoire classique x_{cl}^μ et de l'impulsion p^μ par rapport à p_{cl}^μ

$$\begin{cases} x^\mu = x_{cl}^\mu + x_Q^\mu \\ \\ p^\mu = p_{cl}^\mu + p_Q^\mu \end{cases} . \tag{3.43}$$

L'action se décompose

$$\begin{aligned} S &= -\int_{s_a}^{s_b} ds \left[p(s)\dot{x}(s) - \frac{1}{2} \left(p(s) - eA_\mu(\varphi) - eB_\mu(\chi) \right)^2 \right] \\ &= -\int_{s_a}^{s_b} ds \left[(p_{cl} + p_Q)(\dot{x}_{cl} + \dot{x}_Q) - \frac{1}{2} \left(p_{cl} + p_Q - eA_\mu(\varphi) - eB_\mu(\chi) \right)^2 \right] \\ &= S_{cl} + S_Q, \end{aligned} \tag{3.44}$$

aussi :

- une partie classique S_{cl} peut être extraite

$$S_{cl} = -\int_{s_i}^{s_f} ds \left[p_{cl}(s) \frac{dx_{cl}(s)}{ds} - \frac{1}{2} \left[p_{cl}(s) - eA_{cl} - eB_{cl} \right]^2 \right], \tag{3.45}$$

et une autre S_Q

$$S_Q = -\int_{s_i}^{s_f} ds \left[p_{cl}.\dot{x}_Q + p_Q.\dot{x}_Q - e\left[A_{cl} + B_{cl} - \left(A\left(\varphi\right) + B\left(\chi\right)\right)\right]\left(p_{cl} + p_Q\right)\right.$$
$$\left. -\frac{e^2}{2}\left[\left(A\left(\varphi\right) + B\left(\chi\right)\right)^2 - \left(A_{cl} + B_{cl}\right)^2\right] - \frac{1}{2}p_Q^2\right], \tag{3.46}$$

avec évidemment les conditions aux bords

$$x_Q(s_a) = x_Q(s_b) = 0. \tag{3.47}$$

L'hamiltonien, se décompose lui aussi en 2 parties

$$H = H_{cl} + H_Q, \tag{3.48}$$

$$H_{cl} = -\frac{1}{2}\left[p_{cl} - eA_{cl} - eB_{cl}\right]^2, \tag{3.49}$$

- et un 2ème hamiltonien

$$\begin{aligned} H_Q &= H - H_{cl} \\ &= -\frac{1}{2}p_Q^2 - p_{cl}p_Q - \frac{e^2}{2}\left[A\left(\varphi\right) + B\left(\chi\right)\right]^2 + e\left(p_{cl} + p_Q\right)\left(A\left(\varphi\right) + B\left(\chi\right)\right) \\ &\quad + \frac{e^2}{2}\left(A_{cl} + B_{cl}\right)^2 - ep_{cl}\left(A_{cl} + B_{cl}\right). \end{aligned} \tag{3.50}$$

Ajoutons, à ce niveau un temps fictif u au temps réel s, afin de passer à la MQS. Nous avons alors

- pour les positions avec les conditions aux limites

$$x(s) \longrightarrow x(s,u), \tag{3.51}$$

$$x(s_a,u) = x(s_b,u) = 0, \tag{3.52}$$

- et pour les impulsions

$$p(s) \longrightarrow p(s,u). \tag{3.53}$$

Leurs évolutions sont sujettes aux deux équations de Langevin

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x^\mu(s,u)}{\partial u} = i\dfrac{\delta S_Q}{\delta x^\mu(s,u)} + \eta^\mu(s,u) \\ \\ \dfrac{\partial p^\mu(s,u)}{\partial u} = i\dfrac{\delta S_Q}{\delta p^\mu(s,u)} + \xi^\mu(s,u) \end{cases}, \tag{3.54}$$

avec toujours les propriétés standard pour les bruits

$$\langle \eta^{\mu}(s,u)\rangle = 0, \ \ \langle \xi^{\mu}(s',u')\rangle = 0, \ \ \langle \eta^{\mu}(s,u)\xi_{\nu}(s',u')\rangle = 0$$
$$\langle \eta^{\mu}(s,u)\eta_{\nu}(s',u')\rangle = \langle \xi^{\mu}(s,u)\xi_{\nu}(s',u')\rangle = 2\delta^{\mu}_{\nu}\delta(s-s')\delta(u-u'). \tag{3.55}$$

Un calcul simple utilisant comme par exemple

- les dérivations

$$\frac{\delta}{\delta x_Q(s,u)}A(\phi) = \frac{dA}{d\phi}k\delta(s-s'), \tag{3.56}$$

- et la règle d'intégration bien connue

$$\int_{s_a}^{s_b} dx f(x)\delta'(x-a) = -f^{'}(a), \tag{3.57}$$

nous donne d'abord

$$\frac{\partial x_Q}{\partial u} = i\left[\dot{p}_Q + \dot{p}_{cl} + \frac{e^2}{2}\left(k\frac{dA^2}{d\varphi} + K\frac{dB^2}{d\chi}\right) - e\left(k\frac{dA}{d\varphi} + K\frac{dB}{d\chi}\right)(p_{cl}+p_Q)\right] + \eta(s,u),$$
$$\frac{\partial p_Q}{\partial u} = i\left[p_Q - \dot{x}_Q + e\left[(A_{cl}+B_{cl}) - (A(\varphi)+B(\chi))\right]\right] + \xi(s,u), \tag{3.58}$$

Sous forme de matrice, ce système d'équation nous l'écrivons

$$\frac{\partial}{\partial u}\begin{pmatrix} x_Q \\ p_Q \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial s} \\ -\frac{\partial}{\partial s} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_Q \\ p_Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{p}_{cl} + \frac{e^2}{2}\left(k\frac{dA^2}{d\varphi} + K\frac{dB^2}{d\chi}\right) - e\left(k\frac{dA}{d\varphi} + K\frac{dB}{d\chi}\right).(p_{cl}+p_Q) \\ e\left[(A_{cl}+B_{cl}) - (A(\varphi)+B(\chi))\right] \end{pmatrix}$$
$$+\begin{pmatrix} \eta(s,u) \\ \xi(s,u) \end{pmatrix}, \tag{3.59}$$

et prend la forme vectorielle suivante

$$\frac{\partial}{\partial u}\overrightarrow{X} = M\overrightarrow{X} + \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}. \tag{3.60}$$

Nous généralisons donc la solution du système suivant [4]

$$\overrightarrow{X}(s,u) = \overrightarrow{X}^{(0)}_Q(s,u) + \int_{s_a}^{s_b} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' G(s,u \mid s',u')\,\overrightarrow{w}(s',u'), \tag{3.61}$$

où $\overrightarrow{X}^{(0)}_Q$ est la solution libre qui vérifie cette équation

$$\frac{\partial}{\partial u}\overrightarrow{X}^{(0)}_Q(s,u) = M^{(0)}\overrightarrow{X}^{(0)}_Q + \overrightarrow{v}, \tag{3.62}$$

$$\overrightarrow{X}_Q^{(0)}(s,u)=\int_{s_a}^{s_b}ds'\int_{-\infty}^{+\infty}du'G(s,u\mid s',u')\,\overrightarrow{v}(s',u'), \tag{3.63}$$

et $G(s,u\mid s',u')$ la fonction de Green associée au système libre $(A=0,B=0)$.

Cette fonction de Green est de type matriciel (2×2). Nous pouvons la présenter par

$$G(s,u\mid s',u')=\begin{pmatrix} G_{11}(s,u\mid s',u') & G_{12}(s,u\mid s',u') \\ G_{21}(s,u\mid s',u') & G_{22}(s,u\mid s',u') \end{pmatrix}. \tag{3.64}$$

Les élément de la fonction de Green libre $G(s,u\mid s',u')$ qui vérifie le système d'équation de Langevin libre peuvent être trouvés dans [6].

Passons au calcul du facteur de fluctuation

$$\exp\left[i\int_0^{s_i}\lim_{u\longrightarrow\infty}\langle H_Q(s_i,u)\rangle\,ds_i\right]. \tag{3.65}$$

Tout d'abord, commençons par la moyenne de H_Q

$$\begin{aligned}\langle H_Q\rangle &= -\frac{1}{2}\left\langle p_Q^2\right\rangle-p_{cl}\langle p_Q\rangle-\frac{e^2}{2}\left[\langle A(\phi)\rangle+\langle B(\chi)\rangle\right]^2+ep_{cl}\langle A(\phi)\rangle+ep_{cl}\langle B(\chi)\rangle \\ &\quad +e\langle p_QA(\phi)\rangle++e\langle p_QB(\chi)\rangle+\frac{e^2}{2}(A_{cl}+B_{cl})^2-ep_{cl}(A_{cl}+B_{cl}).\end{aligned} \tag{3.66}$$

Il est utile de considérer 2 vecteurs de base $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e}_2$

$$\overrightarrow{X}(s,u)=\begin{pmatrix} x_Q \\ p_Q\end{pmatrix}=\overrightarrow{e_1}x_Q(s,u)+\overrightarrow{e}_2p_Q(s,u), \tag{3.67}$$

où

$$\overrightarrow{e_1}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\quad et\quad \overrightarrow{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \tag{3.68}$$

pour trouver les expressions de $x_Q(s,u)$ et de $p_Q(s,u)$

$$\begin{cases} x_Q(s,u)=\overrightarrow{e}_1^{+}\overrightarrow{X} \\ \\ p_Q(s,u)=\overrightarrow{e}_2^{+}\overrightarrow{X}\end{cases},$$

$$\begin{cases} x_Q(s,u)=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\left(\overrightarrow{X}_Q^{(0)}(s,u)+\int_{s_a}^{s_b}ds'\int_{-\infty}^{+\infty}du'G(s,u\mid s',u')\,\overrightarrow{w}(s',u')\right) \\ \\ p_Q(s,u)=\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\left(\overrightarrow{X}_Q^{(0)}(s,u)+\int_{s_a}^{s_b}ds'\int_{-\infty}^{+\infty}du'G(s,u\mid s',u')\,\overrightarrow{w}(s',u')\right)\end{cases}, \tag{3.69}$$

en fonction des bruits.

Par ailleurs les deux champs $A(\phi)$ et $B(\chi)$ contient aussi la déviation $x_Q(s,u)$. Cette déviation apparaît explicitement si on développe les deux champs en série au voisinage du chemin classique.

$$A|_{k(x_{cl}+x_Q)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(kx_Q)^n \left.\frac{d^n A}{d\varphi^n}\right|_{\varphi=kx_{cl}}, \quad B|_{K(x_{cl}+x_Q)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(Kx_Q)^n \left.\frac{d^n B}{d\chi^n}\right|_{\chi=Kx_{cl}}, \tag{3.70}$$

Il est évident que la déviation $x_Q(s,u)$ dépend du bruit, via l'équation de Langevin.

Nous avons besoin dans une 1ère étape de calculer des moyennes sur $\phi_Q = kx_Q$.

Multiplions par k les équations (3.69).

Comme $k^2 = 0$ et $kA = 0$ et à cause du fait que $k\overrightarrow{w}(s',u') = 0$

$$\begin{cases} kx_Q(s,u) = k\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\overrightarrow{X}_Q^{(0)}(s,u) \\ \\ kp_Q(s,u) = k\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\overrightarrow{X}_Q^{(0)}(s,u)\end{cases}, \quad \begin{cases} Kx_Q(s,u) = K\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\overrightarrow{X}_Q^{(0)}(s,u) \\ \\ Kp_Q(s,u) = K\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\overrightarrow{X}_Q^{(0)}(s,u)\end{cases}$$

$$\begin{cases} kx_Q(s,u) = k\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\int_{s_a}^{s_b} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' \begin{pmatrix} G_{11}(s,u \mid s',u') & G_{12}(s,u \mid s',u') \\ G_{21}(s,u \mid s',u') & G_{22}(s,u \mid s',u')\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta(s',u') \\ \xi(s',u')\end{pmatrix} \\ \\ kp_Q(s,u) = k\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\int_{s_a}^{s_b} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' \begin{pmatrix} G_{11}(s,u \mid s',u') & G_{12}(s,u \mid s',u') \\ G_{21}(s,u \mid s',u') & G_{22}(s,u \mid s',u')\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta(s',u') \\ \xi(s',u')\end{pmatrix}\end{cases}, \tag{3.71}$$

nous avons

$$\begin{cases} kx_Q(s,u) = k\int ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' \left[G_{11}(s,u \mid s',u')\,\eta(s',u') + G_{12}(s,u \mid s',u')\,\xi(s',u')\right] \\ \\ kp_Q(s,u) = k\int ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' \left[G_{21}(s,u \mid s',u')\,\eta(s',u') + G_{22}(s,u \mid s',u')\,\xi(s',u')\right]\end{cases}. \tag{3.72}$$

La dépendance du bruit dans $A(\phi)$

$$A\Big|_{k(x_{cl}+x_Q)} = \sum_n \frac{1}{n!}(kx_Q)^n \frac{d^n A}{d\phi^n}\Big|_{\phi=kx_{cl}}, \tag{3.73}$$

se trouvant au niveau des $(kx_Q(s,u))^n$, alors la moyenne est

$$\langle A(\phi)\rangle\Big|_{\phi=k\left(x_{cl}+x_Q\right)} = \sum_n \frac{1}{n!}\frac{d^n A}{d\phi^n}\Big|_{\phi=kx_{cl}} \langle (kx_Q)^n\rangle$$

$$= \sum_n \frac{1}{n!}\frac{d^n A}{d\phi^n}\left|_{\phi=kx_{cl}}\left\langle\left(k\int_{s_a}^{s_b}ds'\int_{-\infty}^{+\infty}du'\left[G_{11}\left(s,u\mid s',u'\right)\eta(s',u')+G_{12}\left(s,u\mid s',u'\right)\xi(s',u')\right]\right)^n\right\rangle\right. . \tag{3.74}$$

Pour $n=0$, il est clair que le terme de la série

$$= \frac{d^0 A}{d\phi^0}\left|_{\phi=kx_{cl}}\langle 1\rangle = A\left(\phi_{cl}\right)\right. . \tag{3.75}$$

Pour $n=1$ le 2ème terme de la série

$$\begin{aligned} &= \frac{dA}{d\phi}\left|_{\phi=kx_{cl}}\left\langle\left(k\int_{s_a}^{s_b}ds'\int_{-\infty}^{+\infty}du'\left[G_{11}\left(s,u\mid s',u'\right)\eta(s',u')+G_{12}\left(s,u\mid s',u'\right)\xi(s',u')\right]\right)\right\rangle\right. \\ &= \frac{dA}{d\phi}\left|_{\phi=kx_{cl}} k\int_{s_a}^{s_b}ds'\int_{-\infty}^{+\infty}du'\left[G_{11}\left(s,u\mid s',u'\right)\langle\eta(s',u')\rangle+G_{12}\left(s,u\mid s',u'\right)\langle\xi(s',u')\rangle\right]\right. \\ &= 0, \end{aligned} \tag{3.76}$$

est nul à cause du fait que $\langle\eta(s',u')\rangle = \langle\xi(s',u')\rangle = 0$.

Pour $n=2$ le 3ème terme de la série est aussi, nul du fait que $k^2=0$

Finalement

$$\langle A\left(\phi\right)\rangle = A\left(\phi_{cl}\right). \tag{3.77}$$

Le même raisonnement peut être fait pour $\langle A^2\left(\phi\right)\rangle$

$$\left\langle A^2\left(\phi\right)\right\rangle = A^2\left(\phi_{cl}\right). \tag{3.78}$$

même chose pour le champ

$$\langle B\left(\chi\right)\rangle = B\left(\chi_{cl}\right),\quad \left\langle B^2\left(\chi\right)\right\rangle = B^2\left(\chi_{cl}\right), \tag{3.79}$$

Calculons la moyenne de $p_Q A\left(\phi\right)$ qui est le 3 ème terme de $\langle H_Q\rangle$.

L'impulsion, comme nous pouvons le voir

$$p_{\mu Q}\left(s,u\right) = \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\left(\overrightarrow{X}_Q^{(0)}\left(s,u\right)+\int ds'\int_{-\infty}^{+\infty}du' G\left(s,u\mid s',u'\right)\overrightarrow{w}\left(s',u'\right)\right)$$

$$= \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\left(\int_{s_a}^{s_b}ds'\int_{-\infty}^{+\infty}du' G\left(s,u\mid s',u'\right)\overrightarrow{v}\left(s',u'\right)+\int_{s_a}^{s_b}ds'\int_{-\infty}^{+\infty}du' G\left(s,u\mid s',u'\right)\overrightarrow{w}\left(s',u'\right)\right)$$

$$= \int_{s_a}^{s_b}ds'\int_{-\infty}^{+\infty}du'\Big\{G_{21}\left(s,u\mid s',u'\right)\eta_\mu(s',u')+G_{22}\left(s,u\mid s',u'\right)\xi_\mu(s',u')$$

$$+G_{21(s,u|s',u')}\left[\dot{p}'_{\mu cl}-ek_{\mu}\left(p'_{cl}+p'_{Q}\right).\frac{dA'}{d\phi'}+\frac{e^{2}}{2}k_{\mu}\frac{dA^{2\prime}}{d\phi'}\right]+eG_{22}\left(s,u\mid s',u'\right)\left[A'_{\mu cl}-A'_{\mu}\left(\phi\right)\right]\Big\},\tag{3.80}$$

dépend des bruits.

Utilisons le fait que $k.A=KB=0$ et $\dot{p_{cl}}.A=0$. Alors

$$\begin{aligned}p_{\mu Q}A^{\mu}\left(\phi\right) &= \int_{s_a}^{s_b}ds'\int_{-\infty}^{+\infty}du'\left[G_{21}\left(s,u\mid s',u'\right)\eta_{\mu}(s',u')+G_{22}\left(s,u\mid s',u'\right)\xi_{\mu}(s',u')\right. \\ &\quad \left.+eG_{22}\left(s,u\mid s',u'\right)\left(A'_{\mu cl}-A'_{\mu}\left(\phi\right)\right)\right]A^{\mu}\left(\phi\right),\end{aligned}\tag{3.81}$$

et prenons la moyenne sur les bruits

$$\begin{aligned}\left\langle p_{\mu Q}A^{\mu}\left(\phi\right)\right\rangle &= \int_{s_a}^{s_b}ds'\int_{-\infty}^{+\infty}du'G_{21}\left(s,u\mid s',u'\right)\left\langle \eta_{\mu}(s',u')A^{\mu}\left(\phi\right)\right\rangle+G_{22}\left(s,u\mid s',u'\right)\left\langle \xi_{\mu}(s',u')A^{\mu}\left(\phi\right)\right\rangle \\ &\quad +eG_{22}\left(s,u\mid s',u'\right)A'_{\mu cl}\left\langle A^{\mu}\left(\phi\right)\right\rangle-eG_{22}\left(s,u\mid s',u'\right)\left\langle A'_{\mu}\left(\phi\right)A^{\mu}\left(\phi\right)\right\rangle. \\ &= \int_{s_a}^{s_b}ds'\int_{-\infty}^{+\infty}du'G_{21}\left(s,u\mid s',u'\right)\sum_{n}\frac{1}{n!}\frac{d^{n}A}{d\phi^{n}}\left|_{\phi=kx_{cl}}\right.\left\langle \eta_{\mu}(s',u')\left(kx_{Q}\right)^{n}\right\rangle \\ &\quad +G_{22}\left(s,u\mid s',u'\right)\sum_{n}\frac{1}{n!}\frac{d^{n}A}{d\phi^{n}}\left|_{\phi=kx_{cl}}\right.\left\langle \xi_{\mu}(s',u')\left(kx_{Q}\right)^{n}\right\rangle \\ &\quad +eG_{22}\left(s,u\mid s',u'\right)A'_{\mu cl}\sum_{n}\frac{1}{n!}\frac{d^{n}A}{d\phi^{n}}\left|_{\phi=kx_{cl}}\right.\left\langle \left(kx_{Q}\right)^{n}\right\rangle \\ &\quad --eG_{22}\left(s,u\mid s',u'\right)\sum_{m}\frac{1}{m!}\frac{d^{m}A}{d\phi^{m}}\left|_{\phi=kx_{cl}}\right.\sum_{n}\frac{1}{n!}\frac{d^{n}A}{d\phi^{n}}\left|_{\phi=kx_{cl}}\right.\left\langle \left(kx_{Q}\right)^{m}\left(kx_{Q}\right)^{n}\right\rangle \\ &= 0.\end{aligned}\tag{3.82}$$

Nous trouvons un résultat simple qui signifie qu'il n'y a pas de corrélation entre p_Q et x_Q.

Calculons maintenant la moyenne de p_Q

$$\begin{aligned}\left\langle p_{Q}\right\rangle &= \int_{s_a}^{s_b}ds'\int_{-\infty}^{+\infty}du'\Big\{G_{21}\left(s,u\mid s',u'\right)\left\langle \eta_{\mu}(s',u')\right\rangle+G_{22}\left(s,u\mid s',u'\right)\left\langle \xi_{\mu}(s',u')\right\rangle \\ &\quad +G_{21}\left(s,u\mid s',u'\right)\left[\dot{p}'_{\mu cl}-ek_{\mu}p'_{cl}.\left\langle\frac{dA'}{d\phi'}\right\rangle-ek_{\mu}\left\langle p'_{Q}.\frac{dA'}{d\phi'}\right\rangle+\frac{e^{2}}{2}k_{\mu}\left\langle\frac{dA^{2\prime}}{d\phi'}\right\rangle\right] \\ &\quad +eG_{22}\left(s,u\mid s',u'\right)\left[A'_{\mu cl}-\left\langle A'_{\mu}\left(\phi\right)\right\rangle\right]\Big\}, \\ &= \int_{s_a}^{s_b}ds'\int_{-\infty}^{+\infty}du'G_{21}\left[\dot{p}'_{\mu cl}-ek_{\mu}p'_{cl}.\left\langle\frac{dA'}{d\phi'}\right\rangle+\frac{e^{2}}{2}k_{\mu}\left\langle\frac{dA^{2\prime}}{d\phi'}\right\rangle\right].\end{aligned}\tag{3.83}$$

Il a été tenu compte de

$$\langle \eta(s,u) \rangle = \left\langle \xi_\mu(s,u) \right\rangle = 0 \ et \ de \ \left\langle p_Q.\frac{dA}{d\phi} \right\rangle = 0. \tag{3.84}$$

Le résultat est encore simple

$$\langle p_Q \rangle = 0. \tag{3.85}$$

Reste à calculer $\left\langle p_Q^2 \right\rangle$.

Comme

$$\begin{aligned} p_{\mu Q} &= k_\mu \int_{s_a}^{s_b} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' \left[\frac{e^2}{2} G_{21}\left(s,u \mid s',u'\right) \frac{dA^{2\prime}}{d\phi'} - eG_{21}\left(s,u \mid s',u'\right) \left(p'_{cl} + p'_Q\right) . \frac{dA'}{d\phi'} \right] \\ &+ \int_{s_a}^{s_b} ds' \int_{s_a}^{s_b} du' \Big\{ G_{21}\left(s,u \mid s',u'\right) \eta_\mu(s',u') + G_{22}\left(s,u \mid s',u'\right) \xi_\mu(s',u') \\ &+ eG_{22}\left(s,u \mid s',u'\right) \left[A'_{\mu cl} - A'_\mu\left(\phi\right) \right] + G_{21}\left(s,u \mid s',u'\right) \dot{p}'_{\mu cl} \Big\}, \end{aligned} \tag{3.86}$$

$$\begin{aligned}
p_{\mu Q}^2 &= \int_{s_a}^{s_b} ds' ds'' \int_{-\infty}^{+\infty} du' du'' \Big\{ 2k_\mu \left[\frac{e^2}{2} G_{21}(s,u \mid s',u')\, G_{21}(s',u' \mid s'',u'') \frac{dA^{2\prime}}{d\phi'} \eta^\mu(s'',u'') \right. \\
&\left. -eG_{21}(s,u \mid s',u')\, G_{21}(s',u' \mid s'',u'')\, p'_Q . \frac{dA'}{d\phi'} \eta^\mu(s'',u'') \right] \\
&+2k_\mu \left[\frac{e^2}{2} G_{21}(s,u \mid s',u')\, G_{22}(s',u' \mid s'',u'') \frac{dA^{2\prime}}{d\phi'} \xi^\mu(s'',u'') \right. \\
&-eG_{21}(s,u \mid s',u')\, G_{22}(s',u' \mid s'',u'') \\
&\left. \times\, p'_Q . \frac{dA'}{d\phi'} \xi^\mu(s'',u'') \right] + G_{21}(s,u \mid s',u')\, G_{21}(s',u' \mid s'',u'')\, \eta_\mu(s',u') \eta^\mu(s'',u'') \\
&+2eG_{22}(s,u \mid s',u')\, G_{21}(s',u' \mid s'',u'') \left[A'_{\mu cl} - A'_\mu(\phi) \right] \eta^\mu(s'',u'') \\
&+G_{22}(s,u \mid s',u')\, G_{22}(s',u' \mid s'',u'')\, \xi_\mu(s',u') \xi^\mu(s'',u'') \\
&+2eG_{22}(s,u \mid s',u')\, G_{22}(s',u' \mid s'',u'')\, \xi_\mu(s',u') \left[A^{\mu\prime\prime}_{cl} - A^{\mu\prime\prime}(\phi) \right] \\
&+e^2 G_{22}(s,u \mid s',u')\, G_{22}(s,u \mid s',u') \left[A^{\mu\prime}_{cl} - A^{\mu\prime}(\phi) \right] \left[A''_{\mu cl} - A''_\mu(\phi) \right] \Big\}, \qquad (3.87)
\end{aligned}$$

et après quelques manipulations

$$\begin{aligned}
\left\langle p_Q^2 \right\rangle &= \int_{s_a}^{s_b} ds' ds'' \int_{-\infty}^{+\infty} du' du'' \Big\{ G_{21}(s,u \mid s',u')\, G_{21}(s',u' \mid s'',u'') \left\langle \eta_\mu(s',u') \eta^\mu(s'',u'') \right\rangle \\
&+G_{22}(s,u \mid s',u')\, G_{22}(s',u' \mid s'',u'') \left\langle \xi_\mu(s',u') \xi^\mu(s'',u'') \right\rangle \Big\} \\
&= 2 \int ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' \left[G_{21}^2(s,u \mid s',u') + G_{22}^2(s,u \mid s',u') \right]. \qquad (3.88)
\end{aligned}$$

Substituons les équations (3.77), (3.78), (3.82) (3.85) et (3.88) dans (3.66) nous obtenons

$$\langle H_Q \rangle = -\frac{1}{2} \left\langle p_Q^2 \right\rangle$$

$$\langle H_Q \rangle = -\int_{s_a}^{s_b} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' \left(G_{21}^2 \left(s, u \mid s', u' \right) + G_{22}^2 \left(s, u \mid s', u' \right) \right), \tag{3.89}$$

c'est à dire que la moyenne de H_Q calculée avec le champ d'une onde plane est égale à la moyenne sans champ (libre)

$$\langle H_Q \rangle \left|_{A\neq 0, B\neq 0} = \langle H_Q \rangle \right|_{A=0, B=0} . \tag{3.90}$$

Le propagateur dans ce cas est

$$\langle x_f, s_f \mid x_i, s_i \rangle = c \exp \left[iS_{cl} \right] \exp \left[i \int_0^{s_i} \lim_{u \longrightarrow \infty} \langle H_Q(s_i, u) \rangle \, ds_i \right]$$

$$\begin{aligned} \langle x_f, s_f \mid x_i, s_i \rangle &= c \exp \left[iS_{cl} \right] \\ &\times \exp \left[-i \int_0^{s_i} \lim_{u \longrightarrow \infty} \left(\int_{s_a}^{s_b} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' \left(G_{21}^2 \left(s, u \mid s', u' \right) + G_{22}^2 \left(s, u \mid s', u' \right) \right) \right) ds_i \right] . \end{aligned} \tag{3.91}$$

Où seul intervient la fonction de Green $G\left(s, u \mid s', u'\right)$ relative au système de Langevin libre (sans champ).

3.1.3 Conclusion

Le problème des particules relativistes de Klein Gordon en interaction avec le champ relatif à deux ondes planes et orthogonales a été résolu dans le formalisme stochastique de Parisi et Wu et ceci dans l'espace des phases. Le calcul du propagateur a été effectué en deux étapes. Nous avons d'abord déterminé l'action classique en utilisant le chemin classique et ensuite le facteur de fluctuation. Grâce aux propriétés de l'onde plane et un traitement perturbatif, la solution obtenue est analytique et exacte.

Recalculons le propagateur en considérant cette fois ci l'espace de configuration.

Chapitre 4

Formulation dans l'espace de configuration

4.1 Propagateur d'une particule de spin 0 dans le champ de deux ondes planes et orthogonales

Il est plus avantageux de calculer le propagateur dans l'espace de configuration et donc d'utiliser le formalisme lagrangien au lieu du formalisme hamiltonien qui nécessite deux variables stochastiques (x_Q, p_Q) au lieu d'une seule qui est x_Q .

Effectuons le passage de l'espace des phases à l'espace des configurations.

Notons d'abord qu'en terme de moyenne, nous avons en général

$$\langle H_Q(s_i,u)\rangle = -\left\langle p_Q(s_i,u)\frac{\partial x_Q(s_i,u)}{\partial s}\right\rangle + \langle L_Q(s_i,u)\rangle\,, \tag{4.1}$$

avec

$$\langle L_Q(s_i,u)\rangle = -\frac{1}{2}\lim_{s_1,s_2\longrightarrow s_i}\frac{\partial}{\partial s_1}\frac{\partial}{\partial s_2}\langle x_Q(s_1,u)x_Q(s_2,u)\rangle - eA_{cl}\lim_{s\longrightarrow s_i}\frac{\partial}{\partial s}\langle x_Q(s,u)\rangle - eB_{cl}\lim_{s\longrightarrow s_i}\frac{\partial}{\partial s}\langle x_Q(s,u)\rangle\,, \tag{4.2}$$

et la moyenne de $H_Q(s_i,u)$ pour des V quadratiques est égale dans ce cas

$$\begin{aligned}\lim_{u\longrightarrow\infty}\langle H_Q(s_i,u)\rangle &= -\lim_{u\longrightarrow\infty}\left\langle p_Q(s_i,u)\frac{\partial x_Q(s_i,u)}{\partial s}\right\rangle - \frac{1}{2}\lim_{s_1,s_2\longrightarrow s_i}\frac{\partial}{\partial s_1}\frac{\partial}{\partial s_2}\lim_{u\longrightarrow\infty}\langle x_Q(s_1,u)x_Q(s_2,u)\rangle \\ &\quad - eA_{cl}\lim_{s\longrightarrow s_i}\frac{\partial}{\partial s}\lim_{u\longrightarrow\infty}\langle x_Q(s,u)\rangle - eB_{cl}\lim_{s\longrightarrow s_i}\frac{\partial}{\partial s}\lim_{u\longrightarrow\infty}\langle x_Q(s,u)\rangle\,. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Pour une particule libre par exemple, les deux variables stochastiques se calculent par les deux équations de Langevin qui les régissent

$$\frac{\partial p_Q(s,u)}{\partial u} = i\frac{\delta S_Q}{\delta p_Q(s,u)} + \eta_Q(s,u), \tag{4.4}$$

avec

$$S_Q = \int_{s_a}^{s_b} ds \left(p_Q \frac{\partial x_Q}{\partial s} + H_Q \right), \qquad H_Q = -\frac{1}{2}\left[p_Q - eA(\phi) - eB(\chi)\right]^2. \tag{4.5}$$

Alors

$$\frac{\partial p_Q(s,u)}{\partial u} = i\left(\frac{\partial x_Q}{\partial s} - p_Q + eA(\phi) + eB(\chi) \right) + \eta_Q(s,u). \tag{4.6}$$

Il est facile de s'assurer que dans le produit

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial x_Q(s',u)}{\partial s}\frac{\partial p_Q(s,u)}{\partial u} \right\rangle &= i\left\langle \frac{\partial x_Q(s',u)}{\partial s}\frac{\partial x_Q(s,u)}{\partial s} \right\rangle - i\left\langle p_Q(s,u)\frac{\partial x_Q(s',u)}{\partial s} \right\rangle \\ &+ieA_{cl}\left\langle \frac{\partial x_Q(s',u)}{\partial s} \right\rangle + ieB_{cl}\left\langle \frac{\partial x_Q(s',u)}{\partial s} \right\rangle + \left\langle \eta_Q(s,u)\frac{\partial x_Q(s',u)}{\partial s} \right\rangle, \end{aligned} \tag{4.7}$$

le 1èr et le 6ème terme sont nuls à la limite $u \longrightarrow \infty$ et que le 3ème terme est simplement égal à

$$\left\langle p_Q(s,u)\frac{\partial x_Q(s',u)}{\partial s} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial x_Q(s',u)}{\partial s}\frac{\partial x_Q(s,u)}{\partial s} \right\rangle + eA_{cl}\left\langle \frac{\partial x_Q(s',u)}{\partial s} \right\rangle + eB_{cl}\left\langle \frac{\partial x_Q(s',u)}{\partial s} \right\rangle. \tag{4.8}$$

Autrement dit la substitution de p_Q par $\dfrac{\partial x_Q(s',u)}{\partial s}$ est permise uniquement à l'équilibre $(\lim\limits_{u\longrightarrow\infty})$.

Ainsi donc (4.3)

$$\lim_{u\longrightarrow\infty}\langle H_Q(s_i,u)\rangle = \frac{1}{2}\lim_{s_1,s_2\longrightarrow s_i}\frac{\partial}{\partial s_1}\frac{\partial}{\partial s_2}\lim_{u\longrightarrow\infty}\langle x_Q(s_1,u)x_Q(s_2,u)\rangle, \tag{4.9}$$

et le propagateur dans ce cas est égale à [3]

$$\langle x_f, s_f \mid x_i, s_i\rangle = c\exp\left[iS_{cl}\right]\exp\left[i\frac{1}{2}\int_0^s \lim_{s_1,s_2\longrightarrow s_i}\frac{\partial}{\partial s_1}\frac{\partial}{\partial s_2}\lim_{u\longrightarrow\infty}\langle x_Q(s_1,u)x_Q(s_2,u)\rangle\, ds_i \right]. \tag{4.10}$$

Cette expression dans l'espace de configuration est valable pour la particule relativiste sans spin

Revenons à notre problème qui est celui de deux ondes planes et orthogonales.

Notre particule relativiste est sans spin. Dans la formulation intégrale de chemins [13], il est facile de montrer que les chemins sont affectés d'un poids en $exp(iS)$ où

$$\begin{aligned} S &= \int_{s_a}^{s_b} dsL\left[x(s), \dot{x}(s)\right] \\ &= -\int_{s_a}^{s_b} ds\left[\frac{1}{2}\dot{x}^2(s) + eA\dot{x}(s) + eB\dot{x}(s)\right], \end{aligned} \tag{4.11}$$

contient l'action dans le système des coordonnées

$$x^\mu = x^\mu(s), \tag{4.12}$$

paramétrisé par la variable s.

Suivant la MQS il est nécessaire d'abord de calculer S_{cl} et ensuite le facteur de fluctuation.

4.1.1 Calcul de l'action classique $\mathbf{S}_{cl}$

Cherchons au sens de la mécanique classique la trajectoire suivie par notre particule relativiste.

L'équation de la trajectoire se détermine à partir de l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{ds}(\dot{x}_\mu + eA_\mu + eB_\mu) = ek\dot{x}.\frac{dA}{d\phi} + eK.\frac{dB}{d\chi}, \tag{4.13}$$

où $\phi = k.x$ et $\chi = K.x$.

Nous voyons que

- l'équation de la trajectoire

- ainsi que l'action classique

sont les mêmes que celles déjà trouvées au chapitre précédent.

Par conséquent, il est inutile de refaire les calculs qui se trouvent dans le chapitre 3.

L'action classique est

$$\begin{aligned} S_{cl} = -\frac{(x_b - x_a)^2}{2\lambda} \quad & -\frac{e(x_b - x_a)}{k(x_b - x_a)}\int_{kx_a}^{kx_b} d\phi A - \frac{e(x_b - x_a)}{K(x_b - x_a)}\int_{Kx_a}^{Kx_b} d\chi B \\ & + \frac{\lambda e^2}{2k(x_b - x_a)}\left[\int_{kx_a}^{kx_b} d\phi A^2 - \frac{1}{k(x_b - x_a)}\left[\int_{kx_a}^{kx_b} d\phi A\right]^2\right], \\ & + \frac{\lambda e^2}{2K(x_b - x_a)}\left[\int_{Kx_a}^{Kx_b} d\chi B^2 - \frac{1}{K(x_b - x_a)}\left[\int_{Kx_a}^{Kx_b} d\chi B\right]^2\right], \end{aligned} \tag{4.14}$$

4.1.2 Calcul du facteur de fluctuation

Désignons par x_Q^μ la déviation de x^μ par rapport à la trajectoire classique x_{cl}^μ

$$x^\mu = x_{cl}^\mu + x_Q^\mu. \tag{4.15}$$

Avec cette décomposition l'action S

$$\begin{aligned} S &= -\int_{s_a}^{s_b} ds \left[\frac{1}{2}\dot{x}^2(s) + eA(\phi)\dot{x}(s) + eB(\chi)\dot{x}(s)\right] \\ &= -\int_{s_a}^{s_b} ds \left[\frac{1}{2}\left(\dot{x}_{cl} + \dot{x}_Q\right)^2 + eA(\phi)\left(\dot{x}_{cl} + \dot{x}_Q\right) + eB(\chi)\left(\dot{x}_{cl} + \dot{x}_Q\right)\right] \\ &= S_{cl} + S_Q, \end{aligned} \tag{4.16}$$

est donc la somme de 2 actions : l'une classique

$$S_{cl} = -\int_{s_a}^{s_b} ds \left[\frac{1}{2}\dot{x}_{cl}.\dot{x}_{cl} + eA(\phi_{cl}).\dot{x}_{cl} + eB(\chi_{cl}).\dot{x}_{cl}\right], \tag{4.17}$$

et d'une autre S_Q ($S_Q = S - S_{cl}$) qui contient les termes restants

$$\begin{aligned} S_Q &= -\int_{s_a}^{s_b} ds \left[\frac{1}{2}\dot{x}_Q.\dot{x}_Q + \dot{x}_{cl}.\dot{x}_Q + eA(\phi).(\dot{x}_{cl} + \dot{x}_Q) - eA(\phi_{cl}).\dot{x}_{cl} + \right. \\ &\quad \left. + eB(\chi)\left(\dot{x}_{cl} + \dot{x}_Q\right) - eB(\chi_{cl}).\dot{x}_{cl}\right] \\ &= -\int_{s_a}^{s_b} ds \left[\frac{1}{2}\dot{y}^2 + \dot{x}_{cl}.\dot{y} + eA(\phi).(\dot{x}_{cl} + \dot{y}) - eA(\phi_{cl}).\dot{x}_{cl} + eB(\chi)\left(\dot{x}_{cl} + \dot{y}\right) - eB(\chi_{cl}).\dot{x}_{cl}\right], \end{aligned} \tag{4.18}$$

avec évidemment les conditions aux bords

$$x_Q(s_a) = x_Q(s_b) = 0. \tag{4.19}$$

Notons par $x_Q = y$,

$$\phi_{cl} = kx_{cl}, \quad \chi_{cl} = Kx_{cl}, \tag{4.20}$$

et par

$$\phi = k\left(x_{cl} + x_Q\right), \quad \chi = K\left(x_{cl} + x_Q\right) \tag{4.21}$$

A ce niveau nous ajoutons au temps réel s, le temps fictif u :

$$y(s) \to y(s,u) \text{ avec } y(s_a,u) = y(s_b,u) = 0. \tag{4.22}$$

L'équation de Langevin qui régit le mouvement y^μ est la suivante

$$\frac{\partial y^\mu(s,u)}{\partial u} = i\frac{\delta S_Q}{\delta y^\mu(s,u)} + \eta^\mu(s,u), \tag{4.23}$$

avec comme propriétés pour les bruits

$$\begin{cases} \langle \eta^\mu(s,u)\rangle = 0 \\ \langle \eta^\mu(s,u)\eta^\nu(s',u')\rangle = 2g^{\mu\nu}\delta(s-s')\delta(u-u') \end{cases}. \tag{4.24}$$

Développons l'équation de Langevin

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(s,u)}{\partial u} &= -i\frac{\delta}{\delta y(s,u)}\int_{s_a}^{s_b} ds' \left[\frac{1}{2}\dot{y}^2 + \dot{x}_{cl}.\dot{y} + eA(\phi).(\dot{x}_{cl}+\dot{y}) - eA(\phi_{cl}).\dot{x}_{cl} + \right. \\ & \left. + eB(\chi).(\dot{x}_{cl}+\dot{y}) - eB(\chi_{cl}).\dot{x}_{cl}\right] + \eta(s,u), \end{aligned} \tag{4.25}$$

en utilisant les dérivations suivantes

$$\begin{cases} \dfrac{\delta}{\delta y(s,u)}A(\phi_{cl}).\dot{x}_{cl} = 0, \\ \\ \dfrac{\delta}{\delta y(s,u)}B(\chi_{cl}).\dot{x}_{cl} = 0, \end{cases} \tag{4.26}$$

et

$$\frac{\delta}{\delta y(s,u)}A(\phi) = \frac{dA}{d\phi}k\delta(s-s'), \qquad \frac{\delta}{\delta y(s,u)}B(\chi) = \frac{dB}{d\chi}K\delta(s-s') \tag{4.27}$$

ainssi que la règle connue

$$\int_{s_a}^{s_b} dx f(x)\delta'(x-a) = -f'(a). \tag{4.28}$$

Nous obtenons successivement

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(s,u)}{\partial u} &= -i\int_{s_a}^{s_b} ds' \left[\dot{y}\frac{\partial}{\partial s'}\delta(s-s') + \dot{x}_{cl}\frac{\partial}{\partial s'}\delta(s-s') + e\frac{\delta}{\delta y(s,u)}A(\phi).(\dot{x}_{cl}+\dot{y}) \right. \\ & \left. +eA(\phi)\frac{\partial}{\partial s'}\delta(s-s') + e\frac{\delta}{\delta y(s,u)}B(\chi).(\dot{x}_{cl}+\dot{y}) + eB(\chi)\frac{\partial}{\partial s'}\delta(s-s')\right] + \eta(s,u), \end{aligned} \tag{4.29}$$

et finalement l'équation de Langevin est la suivante

$$\frac{\partial y(s,u)}{\partial u} = i\left[\frac{\partial^2}{\partial s^2}(y+x_{cl}) - ek\frac{dA}{d\phi}.(\dot{x}_{cl}+\dot{y}) + e\frac{\partial A}{\partial s} - eK\frac{dB}{d\chi}.(\dot{x}_{cl}+\dot{y}) + e\frac{\partial B(\chi)}{\partial s}\right] + \eta(s,u). \tag{4.30}$$

Supposons que la solution y est la superposition de deux solutions. L'une sans la présence du champ A_μ c'est à dire :

- libre : $y^{(0)}(s,u)$

- plus la partie restante $y'(s,u)$:

$$y(s,u) = y^{(0)}(s,u) + y^{'}(s,u). \tag{4.31}$$

Décomposons la solution libre $y^{(0)}(s,u)$ encore en deux termes

$$y^{(0)}(s,u) = y_{cl}^{(0)}(s) + y_{Q}^{(0)}(s,u), \tag{4.32}$$

où le premier terme désigne $y_{cl}^{(0)}(s)$ la solution de l'équation classique.

Puisque

$$\frac{d^2}{ds^2} y_{cl}^{(0)}(s) = 0,$$

il est clair que $y_{cl}^{(0)}(s) = 0$.

En effet par intégration nous avons

$$y_{cl}^{(0)}(s) = as + b, \tag{4.33}$$

et comme il y a une deuxième conditions aux limites

$$\left\{ \begin{array}{c} y_{cl}^{(0)}(s_a) = as_a + b = 0 \\ et \\ y_{cl}^{(0)}(s_b) = as_b + b = 0 \end{array} \right. , \tag{4.34}$$

alors

$$a = b = 0, \tag{4.35}$$

et par conséquent

$$y_{cl}^{(0)}(s) = 0. \tag{4.36}$$

La déviation $y_Q^{(0)}(s,u)$ par rapport au libre est régie maintenant par l'équation de Langevin suivante

$$\frac{\partial}{\partial u} y_Q^{(0)}(s,u) = i \frac{\partial^2}{\partial s^2} y_Q^{(0)}(s,u) + \eta(s,u), \tag{4.37}$$

avec toujours les conditions aux limites

$$y_Q^{(0)}(s_a,u) = y_Q^{(0)}(s_b,u) = 0. \tag{4.38}$$

Désignons par $G^{(0)}(s,s';u-u')$ la fonction de Green libre. Elle est solution de

$$\left(\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial^2}{\partial s^2}\right)G^{(0)}(s,s';u-u')=\delta(s-s')\delta(u-u'), \tag{4.39}$$

les conditions aux limites sont

$$G^{(0)}(s,s';u-u')=0, \qquad pour \quad s\,(ou\ s')=s_a,s_b \ \ ou \ \ u<u'. \tag{4.40}$$

Il est facile de trouver l'expression de $G^{(0)}(s,s';u-u')$

$$G^{(0)}(s,s';u-u')=\theta(u-u')\frac{2}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{\lambda}(s-s_i)\sin\frac{n\pi}{\lambda}(s'-s_i)\exp\left[\frac{in^2\pi^2}{\lambda^2}(u-u')\right]. \tag{4.41}$$

D'où la solution de l'équation libre de Langevin (4.37) est

$$y_Q^{(0)}(s,u)=\int_{s_a}^{s_b}ds'\int_{-\infty}^{+\infty}du'G^{(0)}(s,s';u-u')\eta(s',u'), \tag{4.42}$$

et finalement la solution de l'équation de Langevin en présence du champ $(A_\mu(\phi)\neq 0, B_\mu(\chi)\neq 0)$ (4.30) est la suivante

$$\begin{aligned} y(s,u) &= y_Q^{(0)}(s,u)+i\int_{s_a}^{s_b}ds'\int_{-\infty}^{+\infty}du'G^{(0)}(s,s';u-u')\times \\ &\left[\ddot{x_{cl}}(s')-ek\frac{dA}{d\phi'}.(\dot{x}_{cl}+\dot{y})+e\frac{\partial A}{\partial s'}-eK\frac{dB}{d\chi'}.(\dot{x}_{cl}+\dot{y})+e\frac{\partial B}{\partial s'}\right]. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Grâce aux proprietés de la jauge $kA=KB=0$, ainsi que le caractère relatif aux photons $k^2=K^2=0$ et les conditions d'orthogonalités des deux champs d'ondes planes c'est à dire $AB=kK=KA=kB=0$, nous pouvons trouver la solution $y(s,u)$ par une simple itération.

Notons d'abord que

$$k\ddot{x}_{cl}=0, \quad K\ddot{x}_{cl}=0$$

et aussi

$$k.\dot{y}(s,u)=k.\dot{y}_Q^{(0)}(s,u), \qquad K.\dot{y}(s,u)=K.\dot{y}_Q^{(0)}(s,u). \tag{4.44}$$

En passant par la dérivée suivante

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial s} &= \frac{dA}{d\phi}\Big|_{k(x+y)}k.\left(\dot{x}_{cl}+\dot{y}(s,u)\right) \\ &= \frac{dA}{d\phi}\Big|_{k(x+y)}k.\left(\dot{x}_{cl}+\dot{y}_Q^{(0)}(s,u)\right). \end{aligned} \tag{4.45}$$

même chose pour le champ $B(\chi)$

$$\frac{\partial B}{\partial s} = \frac{dB}{d\chi}\left|_{K(x+y)}\right. K.\left(\dot{x}_{cl} + \dot{y}_Q^{(0)}(s,u)\right). \tag{4.46}$$

Alors la solution de l'équation (4.30) est

$$\begin{aligned}
y(s,u) \;=\;& y_Q^{(0)}(s,u) + i\int_{s_a}^{s_b} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' G^{(0)}(s,s';u-u') \times \\
& \left[\ddot{x}_{cl}(s') + e\frac{dA}{d\phi'}\left|_{k(x+y)}\right. k.\left(\dot{x}_{cl}(s') + \dot{y}_Q^{(0)}(s',u')\right) + e\frac{dB}{d\chi'}\left|_{K(x+y)}\right. \times K.\left(\dot{x}_{cl}(s') + \dot{y}_Q^{(0)}(s',u')\right)\right] \\
& -iek\int_{s_a}^{s_b} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' G^{(0)}(s,s';u-u')\frac{dA}{d\phi'}\left|_{k(x+y)}\right. \times \\
& \left[\dot{x}_{cl}(s') + \dot{y}_Q^{(0)}(s',u') + i\int_{s_a}^{s_b} ds'' \int_{-\infty}^{+\infty} du'' \frac{\partial}{\partial s'} G^{(0)}(s',s'';u'-u'')\left(\ddot{x}_{cl}(s'') + e\frac{\partial A}{\partial s''}\right)\right] \\
& -ieK\int_{s_a}^{s_b} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' G^{(0)}(s,s';u-u')\frac{dB}{d\chi'}\left|_{K(x+y)}\right. \times \\
& \left[\dot{x}_{cl}(s') + \dot{y}_Q^{(0)}(s',u') + i\int_{s_a}^{s_b} ds'' \int_{-\infty}^{+\infty} du'' \frac{\partial}{\partial s'} G^{(0)}(s',s'';u'-u'')\left(\ddot{x}_{cl}(s'') + e\frac{\partial B}{\partial s''}\right)\right].
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Nous sommes alors en position de calculer la fonction de corrélation libre à deux points

$\langle y(s_1,u_1).y(s_2,u_2)\rangle$

$$
\begin{aligned}
&\langle y(s_1,u_1).y(s_2,u_2)\rangle = \\
=\; &\Bigg\langle \Bigg\{ y_Q^{(0)}(s_1,u_1) + i\int_{s_a}^{s_b} ds'_1 \int_{-\infty}^{+\infty} du'_1 G^{(0)}(s_1,s'_1;u_1-u'_1) \\
&\times\left[\ddot{x_{cl}}(s'_1) + e\frac{dA}{d\phi'_1}\,|_{k(x+y)}\; k.\left(\dot{x}_{cl}(s'_1)+\dot{y}_Q^{(0)}(s'_1,u'_1)\right) + e\frac{dB}{d\chi'_1}\Big|_{K(x+y)} \times K.\left(\dot{x}_{cl}(s'_1)+\dot{y}_Q^{(0)}(s'_1,u'_1)\right)\right] \\
&-iek\int_{s_a}^{s_b} ds'_1 \int_{-\infty}^{+\infty} du'_1 G^{(0)}(s_1,s'_1;u_1-u'_1)\frac{dA}{d\phi'_1}\,|_{k(x+y)} \\
&\left[\dot{x}_{cl}(s'_1)+\dot{y}_Q^{(0)}(s'_1,u'_1) + i\int_{s_a}^{s_b} ds''_1\int_{-\infty}^{+\infty} du''_1\frac{\partial}{\partial s'_1}G^{(0)}(s'_1,s''_1;u'_1-u''_1)\left(\ddot{x_{cl}}(s''_1)+e\frac{\partial A}{\partial s''_1}\right)\right] \\
&-ieK\int_{s_a}^{s_b} ds'_1 \int_{-\infty}^{+\infty} du'_1 G^{(0)}(s_1,s'_1;u_1-u'_1)\frac{dB}{d\chi'_1}\Big|_{K(x+y)} \times \\
&\left[\dot{x}_{cl}(s'_1)+\dot{y}_Q^{(0)}(s'_1,u'_1) + i\int_{s_a}^{s_b} ds''_1\int_{-\infty}^{+\infty} du''_1\frac{\partial}{\partial s'_1}G^{(0)}(s'_1,s''_1;u'_1-u''_1)\left(\ddot{x_{cl}}(s''_1)+e\frac{\partial B}{\partial s''_1}\right)\right]\Bigg\} \\
&\times\Bigg\{ y_Q^{(0)}(s_2,u_2) + i\int_{s_a}^{s_b} ds'_2 \int_{-\infty}^{+\infty} du'_2 G^{(0)}(s_2,s'_2;u_2-u'_2) \\
&\times\left[\ddot{x_{cl}}(s'_2) + e\frac{dA}{d\phi'_2}\,|_{k(x+y)}\; k.\left(\dot{x}_{cl}(s'_2)+\dot{y}_Q^{(0)}(s'_2,u'_2)\right) + e\frac{dB}{d\chi'_2}\Big|_{K(x+y)} \times K.\left(\dot{x}_{cl}(s'_2)+\dot{y}_Q^{(0)}(s'_2,u'_2)\right)\right] \\
&-iek\int_{s_a}^{s_b} ds'_2 \int_{-\infty}^{+\infty} du'_2 G^{(0)}(s_2,s'_2;u_2-u'_2)\frac{dA}{d\phi'_2}\,|_{k(x+y)} \\
&\left[\dot{x}_{cl}(s'_2)+\dot{y}_Q^{(0)}(s'_2,u'_2) + i\int_{s_a}^{s_b} ds''_2\int_{-\infty}^{+\infty} du''_2\frac{\partial}{\partial s'_2}G^{(0)}(s'_2,s''_2;u'_2-u''_2)\left(\ddot{x_{cl}}(s''_2)+e\frac{\partial A}{\partial s''_2}\right)\right] \\
&-ieK\int_{s_a}^{s_b} ds'_2 \int_{-\infty}^{+\infty} du' G^{(0)}(s_2,s'_2;u_2-u'_2)\frac{dB}{d\chi'}\Big|_{K(x+y)} \times \\
&\left[\dot{x}_{cl}(s'_2)+\dot{y}_Q^{(0)}(s'_2,u'_2) + i\int_{s_a}^{s_b} ds''_2\int_{-\infty}^{+\infty} du''_2\frac{\partial}{\partial s'_2}G^{(0)}(s'_2,s''_2;u'_2-u''_2)\left(\ddot{x_{cl}}(s''_2)+e\frac{\partial B}{\partial s''_2}\right)\right]\Bigg\}\Bigg\rangle. \quad (4.48)
\end{aligned}
$$

Utilisons le fait que $k^2 = K^2 = 0$ et $kA = KB = 0$ ainsi que la propriété de la moyenne

$$< y_Q^{(0)}(s,u) >= 0, \quad \text{et} \quad k\ddot{x_{cl.}}(s) = 0, \tag{4.49}$$

pour simplifier. Alors le produit de corrélation devient

$$
\begin{aligned}
&\langle y(s_1,u_1).y(s_2,u_2)\rangle \\
= \;& \left\langle y_Q^{(0)}(s_1,u_1).y_Q^{(0)}(s_{2,}u_2)\right\rangle - \int_{s_a}^{s_b} ds_1' ds_2' \int_{-\infty}^{+\infty} du_1' du_2' G^{(0)}(s_1,s_1';u_1-u_1')G^{(0)}(s_2,s_2';u_2-u_2') \\
&\times \left\langle \left[\ddot{x_{cl}}^{\mu}(s_1') + e\frac{dA^{\mu}}{d\phi_1'}\,|_{k(x+y)}\, k.\left(\dot{x}_{cl}(s_1') + \dot{y}_Q^{(0)}(s_1',u_1')\right) + e\frac{dB}{d\chi_1'}\,\Big|_{K(x+y)} \times K.\left(\dot{x}_{cl}(s_1') + \dot{y}_Q^{(0)}(s_1',u_1')\right)\right]\right. \\
&\times \left.\left[\ddot{x_{cl}}_{\mu}(s_2') + e\frac{dA_{\mu}}{d\phi_2'}\,|_{k(x+y)}\, k.\left(\dot{x}_{cl}(s_2') + \dot{y}_Q^{(0)}(s_2',u_2')\right) + e\frac{dB}{d\chi_2'}\,\Big|_{K(x+y)} \times K.\left(\dot{x}_{cl}(s_2') + \dot{y}_Q^{(0)}(s_2',u_2')\right)\right]\right\rangle \\
&+ie\int_{s_a}^{s_b} ds_2' \int_{-\infty}^{+\infty} du_2' G^{(0)}(s_2,s_2';u_2-u_2') \\
&\left\langle y_Q^{(0)\mu}(s_1,u_1)\left[\frac{dA_{\mu}}{d\phi_2'}\,|_{k(x+y)}\, k.\left(\dot{x}_{cl}(s_2') + \dot{y}_Q^{(0)}(s_2',u_2')\right) + e\frac{dB}{d\chi_2'}\,|_{k(x+y)} \times K.\left(\dot{x}_{cl}(s_2') + \dot{y}_Q^{(0)}(s_2',u_2')\right)\right]\right\rangle \\
&-iek_{\mu}\int_{s_a}^{s_b} ds_2' \int_{-\infty}^{+\infty} du_2' G^{(0)}(s_2,s_2';u_2-u_2') \times \left\langle y_Q^{(0)\mu}(s_1,u_1)\frac{dA}{d\phi_2'}\,|_{k(x+y)}\right. \\
&\times \left.\left[\dot{x}_{cl}(s_2') + \dot{y}_Q^{(0)}(s_2',u_2') + i\int_{s_a}^{s_b} ds_2'' \int_{-\infty}^{+\infty} du_2'' \frac{\partial}{\partial s_2'} G^{(0)}(s_2',s_2'';u_2'-u_2'')\left(\ddot{x_{cl}}(s_2'') + e\frac{\partial A}{\partial s_2''}\right)\right]\right\rangle \\
&-ieK_{\mu}\int_{s_a}^{s_b} ds_2' \int_{-\infty}^{+\infty} du_2' G^{(0)}(s_2,s_2';u_2-u_2') \times \left\langle y_Q^{(0)\mu}(s_1,u_1)\frac{dB}{d\chi_2'}\,|_{K(x+y)}\right. \\
&\times \left.\left[\dot{x}_{cl}(s_2') + \dot{y}_Q^{(0)}(s_2',u_2') + i\int_{s_a}^{s_b} ds_2'' \int_{-\infty}^{+\infty} du_2'' \frac{\partial}{\partial s_2'} G^{(0)}(s_2',s_2'';u_2'-u_2'')\left(\ddot{x_{cl}}(s_2'') + e\frac{\partial B}{\partial s_2''}\right)\right]\right\rangle \\
&-ie\int_{s_a}^{s_b} ds_1' \int_{-\infty}^{+\infty} du_1' G^{(0)}(s_1,s_1';u_1-u_1') \\
&\left\langle\left[\frac{dA^{\mu}}{d\phi_1'}\,|_{k(x+y)}\, k.\left(\dot{x}_{cl}(s_1') + \dot{y}_Q^{(0)}(s_1',u_1')\right) + e\frac{dB}{d\chi_1'}\,\Big|_{K(x+y)} \times K.\left(\dot{x}_{cl}(s_1') + \dot{y}_Q^{(0)}(s_1',u_1')\right)\right] y_{Q\mu}^{(0)}(s_{2,}u_2)\right\rangle \\
&-ie\int_{s_a}^{s_b} ds_1' \int_{-\infty}^{+\infty} du_1' G^{(0)}(s_1,s_1';u_1-u_1') \\
&\times \left\langle \frac{dA}{d\phi_1'}\,|_{k(x+y)}\,.\left[\dot{x}_{cl}(s_1') + \dot{y}_Q^{(0)}(s_1',u_1') + i\int_{s_a}^{s_b} ds_1'' \int_{-\infty}^{+\infty} du_1'' \frac{\partial}{\partial s_1'} G^{(0)}(s_1',s_1'';u_1'-u_1'')\right.\right. \\
&\left.\left.\left(\ddot{x_{cl}}(s_1'') + e\frac{\partial A}{\partial s_1''}\right)\right] k^{\mu} y_{Q\mu}^{(0)}(s_{2,}u_2)\right\rangle . \\
&-ie\int_{s_a}^{s_b} ds_1' \int_{-\infty}^{+\infty} du_1' G^{(0)}(s_1,s_1';u_1-u_1') \\
&\times \left\langle \frac{dB}{d\chi_1'}\,|_{K(x+y)}\,.\left[\dot{x}_{cl}(s_1') + \dot{y}_Q^{(0)}(s_1',u_1') + i\int_{s_a}^{s_b} ds_1'' \int_{-\infty}^{+\infty} du_1'' \frac{\partial}{\partial s_1'} G^{(0)}(s_1',s_1'';u_1'-u_1'')\right.\right. \\
&\left.\left.\left(\ddot{x_{cl}}(s_1'') + e\frac{\partial B}{\partial s_1''}\right)\right] K^{\mu} y_{Q\mu}^{(0)}(s_{2,}u_2)\right\rangle .
\end{aligned}
\tag{4.50}
$$

Après quelques manipulations, le produit de corrélation devient respectivement égal à

$$
\begin{aligned}
\langle y(s_1,u_1).y(s_2,u_2)\rangle &= \left\langle y_Q^{(0)}(s_1,u_1).y_Q^{(0)}(s_{2,}u_2)\right\rangle \\
&= \int_{s_a}^{s_b} ds_1' ds_2' \int_{-\infty}^{+\infty} du_1' du_2' G^{(0)}(s_1,s_1';u_1-u_1')G^{(0)}(s_2,s_2';u_2-u_2') < \eta^\mu(s_1',u_1')\eta_\mu(s \\
&= 8\int_{s_a}^{s_b} ds_1' \int_{-\infty}^{+\infty} du_1' G^{(0)}(s_1,s_1';u_1-u_1')G^{(0)}(s_2,s_1';u_2-u_1'),
\end{aligned}
$$

(la contraction sur les indices μ conduit à un facteur 4 en plus).

Reportons les expressions des fonctions de Green $G^{(0)}$

$$
\begin{aligned}
&\langle y(s_1,u_1).y(s_2,u_2)\rangle \\
&= \frac{32}{\lambda^2}\sum_{n,l}\sin\frac{n\pi}{\lambda}(s_1-s_i)\sin\frac{l\pi}{\lambda}(s_2-s_i)\int_{-\infty}^{+\infty} du_1'\theta(u_1-u_1')\theta(u_2-u_1') \\
&\times\int_{s_a}^{s_b} ds_1' \sin\frac{n\pi}{\lambda}(s_1'-s_i)\sin\frac{l\pi}{\lambda}(s_1'-s_i)\exp\left[\frac{in^2\pi^2}{\lambda^2}(u_1-u_1')\right]\exp\left[\frac{il^2\pi^2}{\lambda^2}(u_2-u_1')\right],
\end{aligned}
\tag{4.52}
$$

et calculons l'intégrale sur s_1'.

Comme

$$
\int_0^\lambda ds\cos\frac{m\pi}{\lambda}s = \lambda\delta_{m,0}, \tag{4.53}
$$

alors

$$
\int_{s_a}^{s_b} ds_1' \sin\frac{n\pi}{\lambda}(s_1'-s_i)\sin\frac{l\pi}{\lambda}(s_1'-s_i) = \frac{\lambda}{2}\delta_{n,l}. \tag{4.54}
$$

En remplaçant dans la dernière expression, il vient

$$
\begin{aligned}
&\langle y(s_1,u_1).y(s_2,u_2)\rangle \\
&= \frac{16}{\lambda}\sum_n \sin\frac{n\pi}{\lambda}(s_1-s_i)\sin\frac{n\pi}{\lambda}(s_2-s_i)\int_{-\infty}^{+\infty} du'\theta(u_1-u')\theta(u_2-u')\exp\left[\frac{in^2\pi^2}{\lambda^2}(u_1+u_2-2u')\right] \\
&= \sum_n \frac{8i\lambda}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{\lambda}(s_1-s_i)\sin\frac{n\pi}{\lambda}(s_2-s_i)\exp\left[\frac{in^2\pi^2}{\lambda^2}\left|u_1-u_2\right|\right],
\end{aligned}
\tag{4.55}
$$

et à la limite $u_1 = u_2 \longrightarrow \infty$ l'exponentielle disparait. Il reste à calculer la série $\sum_n$.

Transformons $\left[\sin\frac{n\pi}{\lambda}(s_1-s_i)\sin\frac{n\pi}{\lambda}(s_2-s_i)\right]$ en $\left[\frac{1}{2}\cos\frac{n\pi}{\lambda}(s_1-s_2)-\cos\frac{n\pi}{\lambda}(s_1+s_2-2s_i)\right]$ et utilisons l'identité suivante

$$\sum\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi x}{2}+\frac{x^2}{4},\qquad [0\leq x\leq 2\pi]\,, \tag{4.56}$$

nous obtenons le résultat simple pour le produit de corrélation

$$\lim_{u_1=u_2\longrightarrow\infty}\langle y(s_1,u_1).y(s_2,u_2)\rangle=\frac{4i}{\lambda}(s_2-s_i)(s_f-s_1). \tag{4.57}$$

En dérivant 2 fois/ $s_1$et s_2 et à l'équilibre

$$\lim_{u\to\infty}\langle H_Q(s_i,u)\rangle=\frac{1}{2}\lim_{s_1,s_2\to s_i}\frac{\partial}{\partial s_1}\frac{\partial}{\partial s_2}\lim_{u\to\infty}\langle y(s_1,u_1).y(s_2,u_2)\rangle\,, \tag{4.58}$$

$$\lim_{u\to\infty}\langle H_Q(s_i,u)\rangle=-\frac{2i}{\lambda}, \tag{4.59}$$

nous obtenons pour le propagateur $K(x_b,x_a;\lambda)$ l'expression

$$\begin{aligned}K(x_b,x_a;\lambda)&=c\exp\left[iS_{cl}\right]\exp\left[i\int_0^s-\frac{2i}{\lambda}ds_i\right]\\&=c\exp\left[iS_{cl}\right]\exp\left[-2\log\lambda\right]\\&=\frac{c}{\lambda^2}\exp\left[iS_{cl}\right].\end{aligned} \tag{4.60}$$

Fixons la constante c. Comme elle est indépendante de s_i et s_f.

A la limite $\lambda=s_f-s_i\longrightarrow 0$

$$\lim_{\lambda\to 0}K(x_b,x_a;\lambda)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{c}{\lambda^2}\exp\left[-i\frac{(x_b-x_a)^2}{2\lambda}\right]=\delta^4(x_b-x_a). \tag{4.61}$$

Par intégration sur x_b sur la gaussienne et de la fonction δ, nous pouvons voir que

$$c=\frac{i}{(2\pi)^2}. \tag{4.62}$$

D'où le propagateur

$$\begin{aligned}K(x_b,x_a;\lambda)=&\frac{i}{(2\pi)^2}\frac{1}{\lambda^2}\exp\left\{-\frac{ie(x_b-x_a)}{k(x_b-x_a)}\int_{kx_a}^{kx_b}d\phi A-\frac{ie(x_b-x_a)}{K(x_b-x_a)}\int_{Kx_a}^{Kx_b}d\chi B-\frac{i(x_b-x_a)^2}{2\lambda}\right.\\&+\frac{i\lambda e^2}{2k(x_b-x_a)}\times\left[\int_{kx_a}^{kx_b}d\phi A^2-\frac{1}{k(x_b-x_a)}\left[\int_{kx_a}^{kx_b}Ad\phi\right]^2\right]\\&\left.+\frac{i\lambda e^2}{2K(x_b-x_a)}\left[\int_{Kx_a}^{Kx_b}d\chi B^2-\frac{1}{K(x_b-x_a)}\left[\int_{Kx_a}^{Kx_b}d\chi B\right]^2\right]\right\},\end{aligned} \tag{4.63}$$

et finalement la fonction de Green relative à la particule de Klein-Gordon soumise à l'onde plane

$$\begin{aligned}\triangle(x_b, x_a) &= \frac{1}{8\pi^2}\exp\left\{-i\frac{e(x_b-x_a)}{k(x_b-x_a)}\int_{kx_a}^{kx_b} d\phi A - i\frac{e(x_b-x_a)}{K(x_b-x_a)}\int_{Kx_a}^{Kx_b} d\chi B\right\} \\ &\times \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2}\exp\left\{-i\frac{m^2\lambda}{2} - i\frac{(x_b-x_a)^2}{2\lambda}\right. \\ &+\frac{i\lambda e^2}{2k(x_b-x_a)}\left[\int_{kx_a}^{kx_b} d\phi A^2 - \frac{1}{k(x_b-x_a)}\left[\int_{kx_a}^{kx_b} d\phi A\right]^2\right] \\ &\left.+\frac{i\lambda e^2}{2K(x_b-x_a)}\left[\int_{Kx_a}^{Kx_b} d\chi B^2 - \frac{1}{K(x_b-x_a)}\left[\int_{Kx_a}^{Kx_b} d\chi B\right]^2\right]\right\}. \qquad (4.64)\end{aligned}$$

Cette expression a la même forme exacte que celle obtenue par l'approche path integral [14].

4.1.3 Conclusion

Nous avons réussi encore une fois à calculer la fonction de Green pour des particules relativistes de Klein Gordon en interaction avec le champ relatif à deux ondes planes et orthogonales en utilisant le formalisme stochastique de Parisi et Wu et ceci dans l'espace de configuration. Le calcul du propagateur a été effectué en deux étapes. D'abord nous avons trouvé la même action classique. Ensuite le facteur de fluctuation. Le calcul itératif et perturbatif a permi d'obtenir la fonction de Green sous forme compacte et notre résultat par cette approche est comparable à celui obtenu par l'approche des intégrales de chemins [14].

Par conséquent notre propagateur est le même que celui déterminé dans l'espace des phases.

Chapitre 5

Propagateur d'une particule relativiste dans le champ d'une onde gravitationnelle plane

Dans ce chapitre, nous nous proposons de résoudre le problème des particules relativistes soumises au champ de l'onde gravitationnelle plane par l'utilisation de la méthode de quantification stochastique de Parisi-Wu (SQM) [1, 2].

La métrique $g_{\mu\nu}(x)$ qui décrit le champ de la gravité est considérée comme petite perturbation par rapport à la métrique plate de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$[7],

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x), \tag{5.1}$$

et

$$g^{\mu\nu}(x) = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}(x), \tag{5.2}$$

où les termes d'ordre $h^2_{\mu\nu}$, $h^3_{\mu\nu}$, ... sont négligés ($h_{\mu\nu} \ll 1$).

En outre, pour obtenir la solution des équations d'Einstein linéarisées, il est commode d'utiliser la condition suivante [8]

$$g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = 0, \tag{5.3}$$

qui se réduit dans l'approximation de champ faible à la jauge de Lorentz

$$\partial_\lambda h^{\lambda}{}_{\mu} = \frac{1}{2}\partial_\mu h, \tag{5.4}$$

où

$$h(x) = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}(x). \tag{5.5}$$

La solution onde plane est alors donnée par

$$h_{\mu\nu}(k.x) = a_{\mu\nu} f(k.x), \tag{5.6}$$

où f est une fonction arbitraire de la variable $(k_\mu x^\mu)$. k étant le vecteur de propagation de l'onde (avec $k^2 = 0$).

En plus de la condition de jauge de Lorentz qui se réduit dans le cas de l'onde plane à

$$k^\mu h_{\mu\nu}(k.x) = k^\nu h_{\mu\nu}(k.x) = 0, \tag{5.7}$$

nous supposons que la quantité h est nulle (i.e. $h(k.x) = 0$ et le tenseur $h_{\mu\nu}$ est symétrique

$$h_{\mu\nu}(k.x) = h_{\nu\mu}(k.x). \tag{5.8}$$

Récemment, le problème d'une particule massive relativiste en présence du champ faible d'une onde gravitationnelle plane a été considéré dans [15, 16, 17]. Nous obtenons les fonctions de corrélation pour les particules sans spin et de spin (1/2) qui sont réduites aux fonctions de Green à la limite d'équilibre thermique.

5.1 Particule de Klein Gordon

Pour une particule de KG, en présence d'un champ gravitationnelle faible, la fonction de Green doit être solution de l'équation

$$\left[\left(i\partial_\mu - i\frac{1}{2} h_{\mu\nu}(k.x)\partial^\nu\right)^2 - m^2\right] G(x_b, x_a) = \delta^4(x_b - x_a). \tag{5.9}$$

Suivant la MQS de Parisi Wu, la fonction de Green $G(x_b, x_a)$ à calculer ou fonction de corrélation relative aux deux champs ϕ et son conjugué ϕ^* à l'équilibre thermique est la suivante [2]

$$G(x_b, x_a) = \lim_{u_a = u_b \to \infty} \left\langle \phi(x_b, u_b)\phi^*(x_a, u_a)\right\rangle . \tag{5.10}$$

Pour cela

1- nous définissons d'abord l'action relative pour un champ complexe de Klein Gordon en présence du champ de l'onde gravitationnelle

$$S = -\int d^4x \; \left[\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - h_{\mu\nu}(k.x)\partial^\mu \phi \partial^\nu \phi^* - \left(m^2 - i\epsilon\right) \phi \phi^*\right]. \tag{5.11}$$

2- nous ajoutons au temps réel s un temps u fictif en modifiant

$$\phi(x) \longrightarrow \phi(x, u), \tag{5.12}$$

et écrivons les deux équations de Langevin régissant l'évolution du champ ϕ et de son conjugué ϕ^* [2].

Il est nécessaire de connaître l'expression des champs ϕ et ϕ^* qui sont solutions des équations de Langevin

$$\frac{\partial \phi\,(x, u)}{\partial u} = i\frac{\delta S}{\delta \phi^*(x, u)} + \eta(x, u), \tag{5.13}$$

$$\frac{\partial \phi^*\,(x, u)}{\partial u} = -i\frac{\delta S^*}{\delta \phi(x, u)} + \eta^*(x, u), \tag{5.14}$$

où S^* a la même forme que S avec le changement $m^2 - i\epsilon \rightarrow m^2 + i\epsilon$. Les bruits $\eta(x, u)$ et $\eta^*(x, u)$ vérifient

$$\langle \eta(x, u) \rangle = \langle \eta^*(x, u) \rangle = 0 \tag{5.15}$$

$$\langle \eta(x, u)\eta^*(x', u') \rangle = 2\delta^4(x - x')\delta(u - u'). \tag{5.16}$$

Explicitement, par l'utilisation de la propriété $\partial_\mu h^\mu_\nu = 0$, les deux équations de Langevin s'écrivent

$$\frac{\partial \phi(x, u)}{\partial u} = -i\left[\partial_\mu \partial^\mu - h_{\mu\nu}(k.x)\partial^\mu \partial^\nu + \left(m^2 - i\epsilon\right)\right] \phi + \eta(x, u), \tag{5.17}$$

et

$$\frac{\partial \phi^*\,(x, u)}{\partial u} = i\left[\partial_\mu \partial^\mu - h_{\mu\nu}(k.x)\partial^\mu \partial^\nu + \left(m^2 + i\epsilon\right)\right] \phi^* + \eta^*(x, u). \tag{5.18}$$

Ces deux équations sont conjuguées l'une de l'autre, il suffit donc de solutionner une seule équation.

La solution générale de la première équation est la suivante

$$\phi(x, u) = \phi_0(x, u) + \int_{-\infty}^{\infty} du' \int d^4x' \mathcal{G}(x - x'; u - u')\eta(x', u'), \tag{5.19}$$

où $\phi_0 = \phi(x,u)|_{u=0}$ est une solution particulière et $\mathcal{G}(x-x';u-u')$ la nouvelle fonction de Green solution de

$$\left[\frac{\partial}{\partial u} + i\partial_\mu\partial^\mu - ih_{\mu\nu}(k.x)\partial^\mu\partial^\nu + i\left(m^2 - i\epsilon\right)\right]\mathcal{G}(x-x';u-u')$$
$$= \delta(u-u')\delta^4(x-x'), \tag{5.20}$$

Choisissons $\phi_0 = 0$, pour simplifier. Alors la forme de la solution est plus simple :

$$\phi(x,u) = \int_{-\infty}^{\infty} du' \int d^4x'\mathcal{G}(x-x';u-u')\eta(x',u'). \tag{5.21}$$

Pour obtenir $\mathcal{G}(x-x';u-u')$, il suffit de trouver la solution de l'équation (5.20) sans la fonction δ du seconde membre et nous ajoutons ensuite un terme contenant la fonction $\theta(u)$ qui vérifie $\dfrac{d\theta(u)}{du} = \delta(u)$.

Cherchons alors la solution de l'équation

$$\left[\frac{\partial}{\partial u} + i\partial_\mu\partial^\mu - ih_{\mu\nu}(k.x)\partial^\mu\partial^\nu + i\left(m^2 - i\epsilon\right)\right]\Phi(x,u) = 0. \tag{5.22}$$

Supprimons les dérivées $\dfrac{\partial}{\partial u}$ et ∂_μ qui se trouvent dans l'équation en definissant une nouvelle fonction $\tilde{\phi}(p,\varphi,u)$ via la transformée de Fourier

$$\Phi(x,u) = i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp\left(-ip.x\right)\tilde{\phi}(p,\varphi,u), \tag{5.23}$$

avec $\varphi = k.x$, l'équation (5.22) devient

$$\frac{\partial\tilde{\phi}(p,\varphi,u)}{\partial u} = \tag{5.24}$$
$$\left[i\left(p^2 - h_{\mu\nu}(\varphi)p^\mu p^\nu - \left(m^2 - i\epsilon\right)\right)\tilde{\phi}(p,\varphi,u) + 2\left(pk\right)\frac{\partial\tilde{\phi}(p,\varphi,u)}{\partial\varphi}\right],$$

c'est une équation différentielle du premier ordre par rapport à φ.

Après quelques arrangements, nous obtenons pour $\mathcal{G}(x;u)$ et $\mathcal{G}^*(x;u)$ les expressions suivantes

$$\mathcal{G}(x;u) = \theta(u)\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp\left[i\left(p^2 - m^2 + i\epsilon\right)u - ip.x - i\frac{p_\mu p_\nu}{2p.k}\int^{k.x} h^{\mu\nu}(\varphi)d\varphi\right], \tag{5.25}$$

et

$$\mathcal{G}^*(x;u) = \theta(u)\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp\left[-i\left(p^2 - m^2 - i\epsilon\right)u + ip.x + i\frac{p_\mu p_\nu}{2p.k}\int^{k.x} h^{\mu\nu}(\varphi)d\varphi\right]. \tag{5.26}$$

Ayant calculé la fonction de Green passons au calcul du produit de corrélation. Ici nous pouvons voir que la limite d'équilibre thermique ($u_a = u_b \to \infty$) existe. Par conséquence la fonction de corrélation à cette limite prend la forme suivante

$$\begin{aligned} G(x_b, x_a) &= \lim_{u_a = u_b \to \infty} \langle \phi(x_b, u_b) \phi^*(x_a, u_a) \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \exp\left[-ip\,(x_b - x_a) - i\frac{p_\mu p_\nu}{2p.k} \int_{k.x_a}^{k.x_b} h^{\mu\nu}(\varphi) d\varphi \right]. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Par intégration sur p^0 nous obtenons

$$\begin{aligned} G(x_b, x_a) = -i\theta\,(t_b - t_a) \int d^3p \phi_{\mathbf{p}}^{(+)}\,(x_b)\, \phi_{\mathbf{p}}^{*(+)}\,(x_a) \\ + i\theta\,(t_a - t_b) \int d^3p \phi_{\mathbf{p}}^{(-)}\,(x_b)\, \phi_{\mathbf{p}}^{*(-)}\,(x_a)\,, \end{aligned} \quad (5.28)$$

où les fonctions d'onde $\phi_{\mathbf{p}}^{(+)}\,(x)$ et $\phi_{\mathbf{p}}^{(-)}\,(x)$ sont données par

$$\phi_{\mathbf{p}}^{(+)}\,(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{p^0} \right)^{1/2} \exp\left\{ -ip.x - i\frac{p_\mu p_\nu}{2p.k} \int_c^{k.x} h^{\mu\nu}(\varphi) d\varphi \right\}, \quad (5.29)$$

et

$$\phi_{\mathbf{p}}^{(-)}\,(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{p^0} \right)^{1/2} \exp\left\{ ip.x - i\frac{p_\mu p_\nu}{2p.k} \int_c^{k.x} h^{\mu\nu}(\varphi) d\varphi \right\}. \quad (5.30)$$

avec

$$p^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \quad (5.31)$$

Cette expression est exactement la même que celle qui se trouve dans les références [15] et [16].

5.2 Particule de Dirac

Dans cette partie nous calculons la fonction de Green pour une particule de spin 1/2 soumise à encore à l'onde gravitationnelle plane. La fonction de Green $S(x_b, x_a)$ associée à ce problème est la solution de l'équation de Dirac suivante

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{i}{2} h^{\mu\nu}(k.x_b) \gamma_\mu \partial_\nu - m \right) S(x_b, x_a) = \delta^4(x_b - x_a). \quad (5.32)$$

Il est préférable de passer par le carré de l'équation linéaire ou équation quadratique au lieu de trouver $S(x_b, x_a)$ à partir de l'équation linéaire.

La fonction de Green $S_1(x_b, x_a)$ à calculer est solution maintenant de l'équation

$$\begin{aligned}&\left(\partial_\mu \partial^\mu - h_{\mu\nu}(k.x_b)\partial^\mu \partial^\nu + \frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu} k_\mu h'_{\nu\rho}(k.x_b)\,\partial^\rho - m^2\right) S_1(x_b, x_a)\\ &= \delta^4(x_b - x_a),\end{aligned} \tag{5.33}$$

et le passage de $S_1(x_b, x_a)$ à $S(x_b, x_a)$ s'effectue au moyen de la relation

$$S(x_b, x_a) = \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{i}{2} h^{\mu\nu}(k.x_b)\gamma_\mu \partial_\nu + m\right) S_1(x_b, x_a), \tag{5.34}$$

avec la convention

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right]. \tag{5.35}$$

Pour calculer la fonction de Green en MQS, nous devons

- d'abord considérer deux champs : ψ et son adjoint $\overline{\psi}$ $\left(\overline{\psi} = \psi^+ \gamma^0\right)$.
- et ensuite calculer la fonction de corrélation suivant Parisi Wu qui est définie par

$$S_1(x_b, x_a) = \lim_{u_a = u_b \to \infty} \left\langle \psi(x_b, u_b)\bar{\psi}(x_a, u_a)\right\rangle. \tag{5.36}$$

Les champs ψ et son adjoint $\overline{\psi}$ sont maintenant des variables de Grassmann.

Leurs évolutions sont régies par deux équations différentielles de Langevin

$$\frac{\partial \psi\,(x,u)}{\partial u} = i\frac{\delta S}{\delta \bar{\psi}(x,u)} + \eta(x,u), \tag{5.37}$$

et

$$\frac{\partial \bar{\psi}\,(x,u)}{\partial u} = -i\frac{\delta S^*}{\delta \psi(x,u)} + \bar{\eta}(x,u), \tag{5.38}$$

où η et $\bar{\eta}$ sont deux bruits blancs de Grassmann qui verifient les propriétés suivantes

$$\int d\eta(x,u) = \int d\bar{\eta}(x,u) = 0, \quad \int d\eta\eta(x,u) = \int d\bar{\eta}\bar{\eta}(x,u) = 1, \tag{5.39}$$

$$\eta^2(x,u) = \bar{\eta}^2(x,u) = 0, \quad \eta(x,u)\bar{\eta}(x,u) = -\bar{\eta}(x,u)\eta(x,u), \tag{5.40}$$

et

$$\langle \eta(x,u)\rangle = \langle \bar{\eta}(x,u)\rangle =< \eta^2(x,u) >=< \bar{\eta}^2(x,u) >= 0$$

$$\langle \eta(x,u)\bar{\eta}(x',u')\rangle = 2\delta^4(x-x')\delta(u-u'). \tag{5.41}$$

A l'équation (5.33) nous associons l'action

$$\begin{aligned} S &= -\int d^4x \left[\partial_\mu\bar{\psi}\partial^\mu\psi - h_{\mu\nu}(k.x)\partial^\mu\bar{\psi}\partial^\nu\psi - \bar{\psi}\left(m^2 - i\epsilon\right)\psi \right. \\ & \left. +\frac{i}{4}k_\mu h'_{\nu\rho}(k.x)\left(\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\overleftrightarrow{\partial^\rho}\psi\right)\right]. \end{aligned} \tag{5.42}$$

Explicitement, par l'utilisation de la propriété $\partial_\mu h^\mu_\nu = 0$ ou bien $k^\mu h_{\mu\nu}(k.x) = 0$, les deux équations de Langevin s'écrivent

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\psi(x,u)}{\partial u} = \\ &\left[-i\partial^\mu\partial_\mu\psi + ih_{\mu\nu}(k.x)\partial^\mu\partial^\nu\psi - i\left(m^2 - i\epsilon\right)\psi - \frac{i}{2}k_\mu h'_{\nu\rho}(k.x)\sigma^{\mu\nu}\partial^\rho\psi\right] + \eta(x,u), \end{aligned} \tag{5.43}$$

et

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\bar{\psi}(x,u)}{\partial u} = \\ &\left[i\partial^\mu\partial_\mu\bar{\psi} - ih_{\mu\nu}(k.x)\partial^\mu\partial^\nu\bar{\psi} + i\left(m^2 + i\epsilon\right)\bar{\psi} - \frac{i}{2}k_\mu h'_{\nu\rho}(k.x)\partial^\rho\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\right] + \bar{\eta}(x,u). \end{aligned} \tag{5.44}$$

Il est évident qu'il suffit de solutionner une seule équation puisque ces deux équations sont conjuguées l'une de l'autre. La solution générale de la première équation est donnée par

$$\psi(x,u) = \psi_0(x,0) + \int_{-\infty}^{\infty} du' \int d^4x'\mathcal{G}_1\left(x-x';u-u'\right)\eta\left(x',u'\right), \tag{5.45}$$

où $\psi_0(x,0) = \psi(x,u)|_{u=0}$ une solution particulière choisie $\psi_0(x,0) = 0$ et la fonction de Green $\mathcal{G}_1(x-x';u-u')$ est solution de l'équation

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial}{\partial u} - i\left(-\partial^\mu\partial_\mu + h_{\mu\nu}(k.x)\partial^\mu\partial^\nu - \left(m^2 - i\epsilon\right) + \frac{i}{2}k_\mu h'_{\nu\rho}(k.x)\sigma^{\mu\nu}\partial^\rho\right)\right] \\ &\mathcal{G}_1(x-x';u-u') = \delta(u-u')\delta^4(x-x'). \end{aligned} \tag{5.46}$$

Comme auparavant $\mathcal{G}_1$, s'obtient :

- à partir de l'équation sans les fonctions δ du seconde membre

- et en ajoutant la fonction $\theta(u)$ à la solution trouvée précédemment.

Résolvons donc cette équation.

Pour cela, effectuons le remplacement de $\mathcal{G}_1$ par Ψ : $\mathcal{G}_1 \to \Psi$ pour alléger les notations et résolvons l'équation

$$\left[\frac{\partial}{\partial u} - i\left(-\partial^\mu\partial_\mu + h_{\mu\nu}(k.x)\,\partial^\mu\partial^\nu - \left(m^2 - i\epsilon\right) + \frac{i}{2}k_\mu h'_{\nu\rho}(kx)\,\sigma^{\mu\nu}\partial^\rho\right)\right]\Psi(x,u) = 0, \quad (5.47)$$

supprimons maintenant les dérivées qui se trouvent dans l'équation précédente en passant à une nouvelle fonction

$$\Psi(x,u) \to \widetilde{\psi}(p,\phi,u), \quad (5.48)$$

au moyen de

$$\Psi(x,u) = i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp(-ip.x)\,\tilde{\psi}(p,\varphi,u). \quad (5.49)$$

L'équation (5.47) devient alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tilde{\psi}(p,\varphi,u)}{\partial u} &= i\left(p^2 - h_{\mu\nu}(\varphi)p^\mu p^\nu - \left(m^2 - i\epsilon\right) + \frac{1}{2}k_\mu h'_{\nu\rho}(\varphi)\,\sigma^{\mu\nu}p^\rho\right)\tilde{\psi}(p,\varphi,u)\\ &\quad -2i\,(p.k)\,\frac{\partial\tilde{\psi}(p,\varphi,u)}{\partial\varphi}. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Après quelques manipulations, nous obtenons les expressions de $\mathcal{G}_1(x;u)$ et $\bar{\mathcal{G}}_1(x;u) \equiv \gamma^0\mathcal{G}_1^+(x;u)\gamma^0$

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_1(x;u) &= \theta(u)\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\times \\ &\exp\left[i\left(p^2 - m^2 + i\epsilon\right)u - ip.x - i\frac{p_\mu p_\nu}{2p.k}\int^{k.x} h^{\mu\nu}(\varphi)d\varphi + \frac{k_\mu p^\sigma}{4p.k}h_{\nu\sigma}(k.x)\,\gamma^\mu\gamma^\nu\right],\end{aligned} \quad (5.51)$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_1^+(x;u) &= \theta(u)\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\times \\ &\exp\left[-i\left(p^2 - m^2 - i\epsilon\right)u + ip.x + i\frac{p_\mu p_\nu}{2p.k}\int^{k.x} h^{\mu\nu}(\varphi)d\varphi - \frac{k_\mu p^\sigma}{4p.k}h_{\nu\sigma}(k.x)\,\gamma^\mu\gamma^\nu\right],\end{aligned} \quad (5.52)$$

et par conséquent le produit de corrélation (5.36), en utilisant (5.41), (5.51) et (5.52)

$$\begin{aligned}S_1(x_b,x_a) &= \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &\exp\left\{-ip.(x_b - x_a) + i\frac{1}{2p.k}\int_{k.x_a}^{k.x_b} d\varphi\left(p_\mu p_\nu h^{\mu\nu}(\varphi) + \frac{k_\mu p^\sigma}{2}h'_{\nu\sigma}(\varphi)\,\gamma^\mu\gamma^\nu\right)\right\}.\end{aligned} \quad (5.53)$$

A ce niveau il faut symétriser cette expression pour pouvoir extraire les fonctions d'onde associées. C'est ainsi que nous employons la propriété suivante des matrices γ

$$\hat{a}\hat{b} + \hat{b}\hat{a} = (\gamma^\mu a_\mu)(\gamma^\nu b_\nu) + (\gamma^\nu b_\nu)(\gamma^\mu a_\mu) = (\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu) a_\mu b_\nu = 2\eta^{\mu\nu} a_\mu b_\nu = 2a.b, \tag{5.54}$$

avec $\hat{k} = \gamma^\mu k_\mu$. Cette propriété nous permet d'écrire, pour $k^2 = 0$, $\hat{k}\hat{a} = -\hat{a}\hat{k}$,

$$\exp\left[\frac{\hat{k}\left(\hat{b} - \hat{a}\right)}{4p.k}\right] = 1 + \frac{\hat{k}\left(\hat{b} - \hat{a}\right)}{4p.k}. \tag{5.55}$$

Comme

$$\left(1 + \frac{\hat{k}\left(\hat{b} - \hat{a}\right)}{4p.k}\right) = \left(1 - \frac{\hat{k}\hat{a}}{4p.k}\right)\left(1 + \frac{\hat{k}\hat{b}}{4p.k}\right), \tag{5.56}$$

nous pouvons avoir

$$\begin{aligned} S_1(x_b, x_a) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip.(x_b - x_a)} \left(1 + \frac{k_\mu p^\sigma}{4p.k} h_{\nu\sigma}(k.x_b)\gamma^\mu\gamma^\nu\right) \\ \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \exp\left\{i\frac{p_\mu p_\nu}{2p.k}\int_{k.x_a}^{k.x_b} h^{\mu\nu}(\varphi)d\varphi\right\} \\ \left(1 - \frac{k_\mu p^\sigma}{4p.k} h_{\nu\sigma}(k.x_a)\gamma^\mu\gamma^\nu\right). \end{aligned} \tag{5.57}$$

Maintenant, nous incorporons la dernière expression de $S_1(x_b, x_a)$ dans l'équation (5.34) pour obtenir l'expression finale de $S(x_b, x_a)$

$$\begin{aligned} S(x_b, x_a) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip.(x_b - x_a)} \left(1 + \frac{k_\mu p^\sigma}{4p.k} h_{\nu\sigma}(k.x_b)\gamma^\mu\gamma^\nu\right) \\ \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \exp\left\{i\frac{p_\mu p_\nu}{2p.k}\int_{k.x_a}^{k.x_b} h^{\mu\nu}(\varphi)d\varphi\right\} \\ \left(1 - \frac{k_\mu p^\sigma}{4p.k} h_{\nu\sigma}(k.x_a)\gamma^\mu\gamma^\nu\right). \end{aligned} \tag{5.58}$$

Afin de déterminer les fonctions d'onde, intégrons d'abord sur l'énergie p^0 et utilisons ensuite les projecteurs des états d'énergie positive et négative [20]

$$\Lambda_+(p) = \sum_s u(p,s)\bar{u}(p,s) = \frac{\hat{p} + m}{2m}, \tag{5.59}$$

et

$$\Lambda_-(p) = -\sum_s v(p,s)\bar{v}(p,s) = \frac{-\hat{p} + m}{2m}. \tag{5.60}$$

Nous obtenons, alors pour $S^c(x_b, x_a)$ la forme suivante

$$S^c(x_b, x_a) = -i\theta\left(t_b - t_a\right)\int d^3p \sum_s \psi_{s,\mathbf{p}}^{(+)}\left(x_b\right)\bar{\psi}_{s,\mathbf{p}}^{(+)}\left(x_a\right) + i\theta\left(t_a - t_b\right)\int d^3p \sum_s \psi_{s,\mathbf{p}}^{(-)}\left(x_b\right)\bar{\psi}_{s,\mathbf{p}}^{(-)}\left(x_a\right), \tag{5.61}$$

où les fonctions d'onde $\psi_{s,\mathbf{p}}^{(+)}(x)$ et $\psi_{s,\mathbf{p}}^{(-)}(x)$ sont données par

$$\psi_{s,\mathbf{p}}^{(+)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left(\frac{m}{p^0}\right)^{1/2}\left(1 + \frac{k_\mu p^\sigma}{4p.k}h_{\nu\sigma}(k.x)\gamma^\mu\gamma^\nu\right) u(p,s) \times \exp\left\{-ip.x - i\frac{p_\mu p_\nu}{2p.k}\int_c^{k.x} h^{\mu\nu}(\varphi)d\varphi\right\}, \tag{5.62}$$

et

$$\psi_{s,\mathbf{p}}^{(-)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left(\frac{m}{p^0}\right)^{1/2}\left(1 - \frac{k_\mu p^\sigma}{4p.k}h_{\nu\sigma}(k.x)\gamma^\mu\gamma^\nu\right) v(p,s) \times \exp\left\{ip.x - i\frac{p_\mu p_\nu}{2p.k}\int_c^{k.x} h^{\mu\nu}(\varphi)d\varphi\right\}. \tag{5.63}$$

Nous remarquons ici que les solutions obtenues ont une structure semblable à la structure des solutions de Volkov correspondant à l'onde plane électromagnétique [21]. Cela est dû au fait que l'interaction dépend seulement du variable $k.x$ et de la propriété $k^2 = 0$.

5.3 Conclusion

Dans le formalisme de la quantification stochastique, nous avons résolu le problème des particules relativistes en présence du champ faible de l'onde plane gravitationnelle. En résolvant les équations de Langevin nous avons pu déterminer à l'équilibre thermique et d'une manière directe les fonctions de Green associées aux particules de Klein Gordon et de Dirac. Les solutions sont obtenues d'une manière analytique et exacte, grâce aux propriétés de l'onde gravitationnelle plane. Les résultats obtenus sont identiques à ceux obtenus par différentes approches [15, 16, 17]. La conclusion essentielle est que même dans l'espace-temps de Minkowski nous pouvons appliquer la méthode de quantification stochastique de Parisi-Wu.

Chapitre 6

Conclusion générale

Dans cette thèse, nous avons présenté les notions fondamentales du formalisme de la mécanique quantique stochastique de Parisi et Wu, la fonction de Green relative à une particule relativiste, sans spin et soumise à l'action combinée de deux champs d'ondes électromagnétique planes et orthogonales a été déterminée suivant cette approche et ceci dans l'espace des phases et de configurations.

Dans l'espace des phases, l'action classique pour une particule de KG a été d'abord extraite et le facteur de fluctuation a été ensuite déterminé exactement en résolvant les équations de Langevin pour x_Q et p_Q. Notons que le traitement perturbatif de type matriciel a été nécessaire pour cela.

En suivant la même démarche précédente, la fonction de Green relative à KG a été recalculée pour la 2ème fois dans l'espace des configurations. L'action classique une fois extraite, le facteur de fluctuation a été encore retrouvé grâce à un calcul itératif et grâce à l'espace de configuration, nous avons utilisé une seule équation de Langevin au lieu de deux pour l'espace des phases. Dans les deux espaces, la fonction de Green obtenue par cette nouvelle approche est exactement la même que celle obtenue suivant l'approche des intégrales de chemins [14].

Nous avons aussi traité le problème des particules relativistes en présence du champ faible de l'onde plane gravitationnelle en utilisant la méthode de quantification stochastique de Parisi-Wu. C'est ainsi qu'en solutionnant les équations de Langevin, nous avons calculé directement les fonctions de Green (ou fonction de corrélation) à l'équilibre thermique relatives à l'équation de KG (*spin* 0) et à l'équation de Dirac (*spin* 1/2) .Les solutions sont obtenues d'une manière analytique et exacte, grâce aux propriétés de l'onde gravitationnelle plane. Les résultats obtenus sont identiques à ceux obtenus par différentes approches [15, 16, 17].

Le problème est de savoir à l'avenir si cette approche a d'autres possibilités et la même puissance que les autres méthodes de quantification existantes.

Bibliographie

[1] G.Parisi et Y.-S. Wu, Sci. Sin. 24 (1981), 483.

[2] Namiki M, *Stochastic Quantization* (Springer-Verlag, Heidelberg, 1992).

[3] H. Hüffel et H. Nakazato, Mod. Phys. Lett. A9 (1994), 2953.

[4] K. Yuasa et H. Nakazato, lanl.arXiv.org :hep-th-9610209.

[5] N. Chine and L. Chetouani, Czech. J. Phys. 56 (2006) 565 ; Turk. J. Phys. 31 (2007) 1.

[6] Z. Lehtihet and L. Chetouani, Eur. Phys. J. C42 (2005) 243.

[7] Schutz B. F., A first course in general relativity (Cambridge University Press, 1995)

[8] Weinberg S., Gravitation and Cosmology (John Wiley and Sons, New York 1972)

[9] Fukuda R. and Higurashi H., Phys. Lett. B 202 (1988) 541.

[10] Nakazato H. and Yamanaka Y., Phys. Rev. D **34** (1986) 492.

[11] Nakazato H., Prog. Theor. Phys. **77** (1987) 20.

[12] Lehtihet Z and Chetouani L 2008 Cent. Eur. J. Phys. 6 372

[13] T. Boudjedaa, L. Chetouani, L. Guechi et T. F. Hammann Physica Scripta. 46 289 (1992).

[14] Taleb-Hacine Skander, Thèse de Magister, Université Mentouri, Constantine (2007).

[15] Barducci A. and Giachetti R., J. Phys. A 38 (2005) 1615.

[16] Vaidya A.N., Farina C., Guimaraes M.S. and Neves M., J. Phys. A : Math. Theor. **40** (2007) 9149.

[17] Haouat S. and Chetouani L., Eur. Phys. J. C **53** (2008) 289.

[18] Landau L.D. and Lifshitz E.M., The Classical theory fields (Pergamon Press 1987)

[19] Pustovoit V.I. and Chernozatonskii L.A., JETP, Vol **34** (1981) 229.

[20] Bjorken J. D., and Drell S. D., Relativistic Quantum Fields (Mc Graw Hill, New York, 1965).

[21] D.M. Volkov, Zeits. Phys. **94** (1935) 25.