

530.2/24

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



جامعة جيجل
المكتبة المركزية
رقم العدد: 529



UNIVERSITE DE JIJEL
FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET SCIENCES DE LA NATURE ET DE LA VIE
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre :
Série :

MEMOIRE

Présenté pour obtenir le diplôme de

Doctorat En Sciences

OPTION

Physique Théorique

Par

Falek Mokhtar

THEME

Traitement de certains problèmes via la théorie
de Duffin-Kemmer-Petiau

Soutenu le : 13/10/2011

Devant le Jury :

Président :	Kh. Nouicer	Prof	Univ. Jijel
Rapporteur :	M. Merad	Prof	Univ. Oum El Bouaghi
Examineur :	L. Chetouani	Prof	Univ. Constantine
	A. Lecheheb	Prof	Univ. Constantine
	A. Bounames	Prof	Univ. Jijel
	K. Khounfias	MC.A	Univ. Skikda

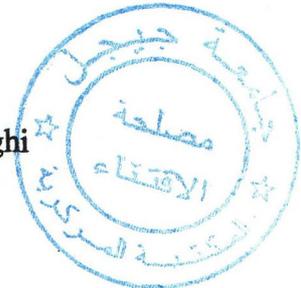


Table des matières

1	Introduction générale	3
2	Formalisme de Duffin-Kemmer-Petiau dans l'espace Commutatif	8
2.1	Introduction	8
2.2	L'oscillateur harmonique de DKP	10
3	Formalisme de Duffin-Kemmer-Petiau dans l'espace non commutatif	15
3.1	Introduction	15
3.2	Applications :	18
3.2.1	L'oscillateur de DKP pour spin-0	18
3.2.2	L'oscillateur de DKP pour spin-1	24
4	Formalisme de Duffin-Kemmer-Petiau dans l'espace courbé	27
4.1	Introduction	27
4.2	L'équation de DKP à (1+1) dimensions	30
4.2.1	Cas du spin-1	31
4.2.2	Cas du spin-0	37
4.3	L'équation scalaire de DKP à (1+3) dimensions	39
5	Formalisme de Duffin-Kemmer-Petiau en présence de la longueur minimale	52
5.1	Introduction	52
5.2	L'oscillateur de DKP unidimensionnel en présence de la longueur minimale . . .	56
5.2.1	Cas de l'oscillateur de DKP pour spin-1	58
5.2.2	Cas de l'oscillateur de DKP pour spin-0	62

5.3	L'oscillateur de DKP à trois dimensions en présence de la longueur minimale . .	63
5.3.1	Cas du spin-0	64
5.3.2	Cas du spin-1	70
6	Formalisme de Schrodinger en présence de la longueur minimale	81
6.1	Introduction	81
6.2	Equation de Schrodinger en interaction avec un potentiel linéaire dependant du temps en présence de la longueur minimale	82
7	Conclusion générale	90

Chapitre 1

Introduction générale

Comme il est bien connu en mécanique quantique relativiste, les équations de Klein-Gordon (KG) et de Dirac ont été introduites pour décrire d'une manière covariante la dynamique d'une seule particule douée respectivement de spin-0 et $\frac{1}{2}$ [1][2]. L'équation de Klein-Gordon a été rejetée à cause des solutions à normes négatives qui ne peuvent définir des densités de probabilité de la particule. Cette difficulté a été en fait surmontée par Pauli et Weisskopf qui ont pu l'utiliser comme équation de base de la théorie des champs des bosons à spin-0. L'équation de continuité est alors interprétée comme loi de conservation de densité quadridimensionnelle charge-courant. La deuxième candidate qui est l'équation de Dirac, a été au contraire appliquée avec succès et les solutions à énergies négatives ont été interprétées comme étant des antiparticules associées aux particules. Cependant, comme il est connu, cette interprétation n'est valable qu'en présence des champs faibles et lentement variables. Sinon, l'équation de Dirac est considérée comme une équation de base de la théorie des champs des fermions de spin- $\frac{1}{2}$. De cette manière, on conclut que les deux équations sont ainsi confrontées aux mêmes problèmes de la physique à plusieurs corps. Néanmoins, le rôle que joue l'équation de Dirac comme étant une théorie à une particule a été omise pour l'équation de Klein-Gordon. De ce fait, l'équation de Feshbach-Villars [3] vient remédier à la situation en tentant de restituer ce rôle à l'équation de Klein-Gordon. La dérivée seconde, qui était le grand défaut présent dans l'équation, est évitée au moyen d'une fonction d'onde à deux composantes dans laquelle les deux signes de la charge sont mis d'une manière explicite dans la théorie (symétrie de charge). Par conséquent, l'interprétation probabiliste est reconstruite et les solutions négatives représentent encore des antiparticules.

En plus des équations citées, il existe une autre équation relativiste dite équation de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) décrivant la dynamique des particules scalaires et vectorielles de spin respectivement 0 et 1 [4][5][6]. Cette équation de DKP est covariante, du premier ordre par rapport au temps et similaire à celle de Dirac. En plus, bien qu'elle contient toute information sur le système des particules scalaires de spin 0 mais elle n'est pas complètement équivalente à celle de KG sauf dans le cas où l'interaction est absente. Autrement, sa forme quadratique contient un terme supplémentaire non physique peut être dû aux mélanges des secteurs de spin 0 et 1 contrairement à celle de Dirac.

Durant les dernières années, au niveau d'une échelle microscopique de haute énergie, beaucoup de théories ont été consacrées à l'étude des problèmes de théorie quantique des champs caractérisée par la non localité des processus physiques, pour absorber les infinis entachant les théories de champs standards. Notamment, la théorie de la géométrie non commutative qui a été suggérée que n'importe quel schémas d'unification des interactions fondamentales de la physique devrait en principe contenir des effets de la non commutativité de l'espace décrivant la non localité des phénomènes quantiques. Ceci est l'un des arguments récemment proposé par la théorie des cordes dans le but d'unifier la physique. En plus, selon le mathématicien Alain Connes, cette non commutativité de l'espace est considérée comme étant une généralisation de la dualité entre espace géométrique et algèbre au cas plus général où l'algèbre n'est plus commutative. Cela nous conduit à modifier deux concepts fondamentaux des mathématiques, ceux d'espace et de symétrie et à adapter l'ensemble des outils mathématiques, dont le calcul infinitésimal et la cohomologie à ces nouveaux paradigmes. A cet égard, plusieurs travaux ont vu le jour dans l'espoir de donner à cette non commutativité de l'espace un aspect concret. Leur domaine d'application s'étend de la théorie des champs à la mécanique quantique. Parmi ces travaux citons, la théorie en Φ^4 non commutative [7] où les aspects perturbatifs des théories de champ non commutative ont été largement étudiés par le calcul des actions effectives et des fonctions de Green à deux points, l'extraction de la mécanique quantique noncommutative à partir de la théorie du champs quantique noncommutative dans le cas non relativiste [8], et la théorie électrodynamique quantique(*QED*) non commutative [9] dans laquelle Calmet a fait le calcul des anomalies des moments magnétiques de spin. En plus ce domaine d'application peut s'étendre également au cas de la mécanique quantique relativiste, par exemple, l'équa-

tion de Dirac pour une particule de spin $\frac{1}{2}$ en interaction avec un champ électromagnétique constant qui a été étudié explicitement dans la géométrie non commutative [10], où le taux de production de paires de particules a été bien déterminé par la méthode usuelle de Bogolubov, et le problème de l'oscillateur de KG et de Dirac qui a été étudié et discuté par Mirza dans l'espace non commutatif [11], où il a montré que le problème des deux oscillateurs déformés a un comportement similaire au problème de Landau dans un espace commutatif.

En d'autre part, on sait bien qu'au sein de la relativité générale, l'espace temps courbé décrivant la gravité comme une propriété géométrique de l'espace-temps, a connu un grand progrès au cours de ces dernières années grâce à, notamment, la compréhension de l'expansion de l'espace et à la forme de l'univers. D'une manière plus précise, la notion de cette courbure de l'espace qui a été produite par la distribution de la matière peut s'étendre également au monde microscopique (mécanique quantique), où il est possible de déterminer le comportement d'un objet quantique en présence de gravité, prédire le mouvement d'une particule dans un champ gravitationnel. A cet effet, l'extension de la théorie quantique des champs ordinaire dans l'espace-temps courbe a suscité un intérêt considérable en raison d'une forte motivation pour la théorie unifiée de la gravitation et la mécanique quantique (gravité quantique). De ce fait, plusieurs problèmes ont été étudiés dans le cadre de cette version gravitationnelle de la mécanique quantique : l'équation non relativiste d'une particule de Schrodinger se mouvant dans un champ gravitationnel constant qui a été résolue exactement par le formalisme quantique d'hamiltonien [12], par le formalisme classique de Feynman [13], et les équations relativistes de KG et de Dirac qui ont été étudiées intensivement dans un champ gravitationnel constant par Khorami [14], dans deux modèles différents de l'espace-temps de Robertson-Walker(RW) [15] dans laquelle Moradi a élucidé le comportement de spin dans l'univers en expansion, par le calcul de la densité de création de particules scalaires et de Dirac via la technique des transformations de Bogolubov.

Vu à l'intérêt courant d'absorber les divergences apparaissant dans l'unification des quatre interactions fondamentales de la physique, qui rendent la théorie des champs quantiques non renormalisable, plusieurs scénarios ont été proposés pour résoudre ce genre de problèmes, notamment le formalisme de la mécanique quantique en présence d'une longueur minimale qui a été développé par Kempf et ses collaborateurs [16][17]. Ce formalisme peut être vu comme

étant un régulateur de divergence, en particulier, il permet l'absorption des divergences ultraviolettes connues en théorie des champs quantiques [18], où la notion de la longueur minimale est décrite comme une échelle microscopique (ou résolution) indépassable, inatteignable et invariante [19][20] à partir de laquelle la gravité commencerait à présenter des effets quantiques. En plus, cette longueur est supposée être proche de la longueur de Planck, elle est considérée comme une limite naturelle exprimant la nature non ponctuelle des particules élémentaires en monde microparticule [21], telle que la dimension des particules dans la théorie des cordes [22][23], qui est considérée comme une longueur de corde, au-dessous de laquelle la résolution de l'espace devient impossible. Récemment, plusieurs problèmes ont été étudiés dans le cadre de cette version déformée de la mécanique quantique : le problème de l'atome d'hydrogène qui a été étudié perturbativement par Brau [24] et par Benczik [25] dans la quasi-représentation de configuration, le problème du potentiel singulier qui a été étudié en détail dans le formalisme de la mécanique quantique non relativiste avec un principe d'incertitude généralisé [26], et l'équation de Pauli pour une particule chargée de spin $\frac{1}{2}$ sous l'action d'un champ magnétique constant qui a été traité également dans ce formalisme, où les propriétés thermodynamiques du système à haute température ont été examinées [27]...ect. En plus, l'extension relativiste de ce problème est limitée malgré certaines tentatives, parmi eux nous citons : l'équation de Dirac en présence d'une longueur minimale dans la référence [28], où l'oscillateur de Dirac à une dimension a été résolu exactement ; à trois dimensions, ce problème a été résolu en utilisant la mécanique quantique supersymétrique [29], et l'équation de KG à (1+1) dimension en interaction avec des potentiels linéaires (scalaires et vectoriels) qui a été traité aussi dans ce formalisme [30].

Le but de cette thèse est de traiter principalement quelques problèmes de la mécanique quantique relativiste pour les Bosons scalaires et vectoriels, gouvernés par l'équation de DKP et ceci via trois formalismes différents. En premier lieu, on considère l'étude du problème de l'oscillateur harmonique de DKP dans le cadre de la géométrie noncommutative à l'intérêt de comprendre et d'examiner l'effet de la géométrie noncommutative sur les systèmes relativistes avec spin. En second lieu, nous suggérons de traiter l'équation relativiste de la particule du DKP évoluant dans un espace courbé, doté d'une métrique de RW, ensuite nous essayons de déterminer le taux de création de particules scalaires et vectorielles en présence de la gravité par la méthode des transformations de Bogolubov. Finalement, à l'ordre d'examiner l'effet de la

longueur minimale sur les systèmes relativistes avec spin, on suggère le traitement du problème de l'oscillateur de DKP dans le cadre de la nouvelle algèbre de Heisenberg modifiée. Dans le même contexte du troisième formalisme, nous proposons d'étudier la dynamique d'un système non relativiste dépendant du temps de masse variable se mouvant dans un potentiel linéaire en présence de la longueur minimale suivant deux approches simples, à savoir l'équation de Schrodinger et les integrales de chemin.

Ce mémoire est organisé comme suit : le prochain chapitre est considéré comme un bref rappel au formalisme de la théorie de Duffin-Kemmer-Petiau dans l'espace commutatif, en mettant l'accent sur l'étude de l'oscillateur harmonique du DKP habituel. Le troisième chapitre est consacré au traitement du problème de l'oscillateur du DKP donné par la substitution non minimale dans l'espace non commutatif. Dans le but d'élucider l'effet de la géométrie non commutative sur la mécanique quantique de DKP, nous illustrerons la résolution du problème en question pour les deux cas de spin et nous les comparerons avec le cas d'une particule de DKP soumise à l'action d'un champ magnétique constant dans l'espace ordinaire. Dans le quatrième chapitre, nous examinerons les effets gravitationnels sur les systèmes relativistes avec spin, en résolvant l'équation du DKP pour une particule de spin 1 et spin 0 évoluant dans un espace courbe, doté d'une métrique de Robertson-Walker à (1+1) et à (1+3) dimensions. Comme une application physique, nous calculerons le taux de création de particules du DKP avec la présence de la gravité par la méthode usuelle des transformations de Bogolubov. Le cinquième chapitre est consacré à l'étude du problème de l'oscillateur bosonique de DKP à une dimension et à trois dimensions dans le cadre de la mécanique quantique déformé par le formalisme de Kempf et ses collaborateurs [16], en se basant essentiellement sur le principe d'incertitude de Heisenberg généralisé (GUP) qui implique l'existence d'une incertitude minimale non nulle sur la position. Dans le sixième chapitre, nous suggérerons d'étudier la dynamique d'un système non relativiste de masse variable $m(t)$ se mouvant dans un potentiel linéaire dépendant du temps dans le cadre de la même version déformée de la mécanique quantique que chapitre précédent, via deux approches différentes, à savoir l'équation de Schrodinger et les integrales de chemin.

Le dernier chapitre sera consacré à un récapitulatif des principaux résultats et à nos conclusions générales.

Chapitre 2

Formalisme de

Duffin-Kemmer-Petiau dans l'espace

Commutatif

2.1 Introduction

L'équation de Duffin-Kemmer-Petiau décrit la dynamique des particules scalaires et vectorielles de spin respectivement 0 et 1. Elle est covariante, du premier ordre par rapport au temps et similaire à celle de Dirac. Elle obéit à une algèbre plus compliquée possédant trois représentations irréductibles respectivement, une représentation triviale à une dimension, cinq dimensions associées au spin 0 et à 10 dimensions associées au spin 1. En plus, cette équation de DKP contient toute information sur le système des particules scalaires de spin 0 mais elle n'est pas complètement équivalente à celle de Klein-Gordon (KG) sauf dans le cas où l'interaction est absente. Autrement, sa forme quadratique contient un terme supplémentaire non physique peut être dû aux mélanges des secteurs de spin 0 et 1 contrairement à celle de Dirac. Peut être à cause de ce défaut majeur cette équation est restée pendant des années sans aucune importance. Maintenant l'équivalence est établie en montrant que cette contradiction est seulement apparente et peut être élucidée par une interprétation correcte de la théorie DKP. Récemment, il y a eu un intérêt spécial pour cette théorie, qui est devenue une tâche primordiale de la mé-

canique quantique relativiste et a connue un développement énorme. A cet égard, beaucoup de problèmes ont été solutionnés, par exemple le champ central avec ou sans spin ; l'espace temps courbé ; champ gravitationnel extérieur ; potentiel step. etc...

Dans ce chapitre, nous nous proposons de donner des éléments et des représentations essentiels relatifs au boson scalaire et vectoriel de DKP qui nous seront utiles par la suite, en partant de l'équation de DKP :

$$[i\beta^\mu D_\mu - m] \psi(r) = 0, \quad (2.1)$$

avec $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ et les β^μ sont des matrices singulières vérifiant les relations de commutation suivantes

$$\beta^\mu \beta^v \beta^\lambda + \beta^\lambda \beta^v \beta^\mu = g^{\mu v} \beta^\lambda + g^{v\lambda} \beta^\mu. \quad (2.2)$$

Où l'équation adjointe de (2.1) est donnée par

$$[i(\partial_\mu - ieA_\mu)] \bar{\psi}(x, t) \beta^\mu + m \bar{\psi}(x, t) = 0, \quad (2.3)$$

avec $\bar{\psi} = \psi^+ (2\beta_0^2 - \mathbf{1})$.

De (2.1) et (2.3), il est facile d'obtenir l'équation de continuité suivante

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad (2.4)$$

où $J^\mu \equiv \bar{\psi} \beta^\mu \psi$.

1) Pour le cas du spin 0, la représentation associée est à 5 dimensions, dont les matrices sont données explicitement par

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta} & \tilde{\mathbf{0}} \\ \tilde{\mathbf{0}}_T & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \beta \equiv \beta^i = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{0}} & \rho^i \\ -\rho_T^i & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.5)$$

avec, $\mathbf{0}$, $\tilde{\mathbf{0}}$ sont respectivement des matrices nulles de dimensions $2 \times 2, 2 \times 3$

et

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \rho^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \rho^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \rho^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

2) Dans le deuxième cas d'une particule de spin 1, la représentation associée est à 10 dimensions et les matrices β^μ , sont données par

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \text{ et } \beta^i \equiv \beta^i = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & e_i & \bar{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -is_i \\ -e_i^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \bar{0}^T & -is_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.7)$$

où les matrices s_i sont les matrices usuelles (3×3) du spin 1, qui sont définies comme suit :

$$s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, s_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

et $\mathbf{0}$ et $\mathbf{1}$, sont respectivement la matrice nulle et la matrice unité de dimensions (3×3) et les matrices $\bar{0}$ et e_i sont définies comme suit :

$$\bar{0} = (000), e_1 = (100), e_2 = (010), e_3 = (001). \quad (2.9)$$

Dans le prochain chapitre, nous étudierons le système de l'oscillateur harmonique de DKP dans l'espace non-commutatif en utilisant le formalisme de la mécanique quantique déformée, développé au troisième chapitre. Pour ceci, nous aurons besoin de connaître la forme de l'équation de l'oscillateur de DKP ordinaire ainsi que ses valeurs propres de l'énergie dans l'espace commutatif pour ce système.

2.2 L'oscillateur harmonique de DKP

En raison de l'intérêt courant pour les systèmes relativistes et des travaux récents sur l'oscillateur de Dirac [31], nous présentons pour un scalaire ou un boson de masse m , l'équation de DKP d'une particule libre dans un espace commutatif obtenue en employant un potentiel externe et linéaire avec une substitution non minimale, $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - im\omega n^0 \mathbf{r}$, où ω est la fréquence

et $n^0 = 2\beta^{0^2} - 1$ comme suit

$$[c\boldsymbol{\beta} \cdot (\mathbf{p} - im\omega n^0 \mathbf{r}) + mc^2] \Psi = i\hbar\beta^0 \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad (2.10)$$

où $(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - im\omega n^0 \mathbf{r})$ est le potentiel externe que nous présentons avec la substitution non minimale

Ce dernier, ne conserve que le moment angulaire total $J = L + S$.

$$[\boldsymbol{\beta}\eta^0 \cdot \mathbf{r}, J] = 0. \quad (2.11)$$

Dans la représentation spin-0, la fonction d'onde Ψ de système prend la forme suivante

$$\Psi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \Phi \\ i\boldsymbol{\psi} \end{pmatrix}, \text{ avec } \Phi \equiv \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}, \text{ et } \boldsymbol{\psi} \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

dont les états stationnaires de l'équation de DKP (2.10) peuvent être réécrites comme suit

$$mc^2\Phi_1 = E\Phi_2 + ic(\mathbf{p} + im\omega\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\psi}, \quad (2.13)$$

$$mc^2\boldsymbol{\psi} = ic(\mathbf{p} - im\omega\mathbf{r}) \Phi_1, \quad (2.14)$$

$$mc^2\Phi_2 = E\Phi_1, \quad (2.15)$$

éliminant par substitution Φ_2 et $\boldsymbol{\psi}$ en faveur de Φ_1 , nous aurons une équation équivalente à celle de Klein-Gordon à 3-dim

$$(E^2 - m^2c^4) \Phi_1 = [c^2 (\mathbf{p}^2 + m^2\omega^2\mathbf{r}^2) - 3\hbar\omega mc^2] \Phi_1, \quad (2.16)$$

d'où les valeurs propres de l'énergie sont données par

$$E_{n_x n_y n_z}^2 = 2mc^2\hbar\omega \left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2} \right) + m^2c^4 - 3mc^2\hbar\omega. \quad (2.17)$$

En utilisant la relation $E = \varepsilon + mc^2$ avec la limite non-relativiste $\varepsilon \ll mc^2$ dans l'équation

(2.16), on obtiendra

$$\varepsilon \Phi_1 = \left[\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \mathbf{r}^2 - \frac{3}{2} \hbar \omega \right] \Phi_1, \quad (2.18)$$

par conséquence, on peut définir l'expression de $\Phi_1(\mathbf{r})$ à 2 - dim comme suit

$$(E^2 - m^2 c^4) \Phi_1 = [c^2 ((p_x^2 + p_y^2) + m^2 \omega^2 (x^2 + y^2)) - 2 \hbar \omega m c^2] \Phi_1 \quad (2.19)$$

d'où les valeurs propres de l'énergie sont définies par

$$E_{n_x n_y}^2 = 2 m c^2 \hbar \omega (n_x + n_y + 1) + m^2 c^4 - 2 m c^2 \hbar \omega \quad (2.20)$$

où la limite non-relativiste de l'équation (2.19) est donnée par

$$(\varepsilon + \hbar \omega) \Phi_1 = \left[\frac{(p_x^2 + p_y^2)}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2) \right] \Phi_1, \quad \varepsilon = E - m c^2. \quad (2.21)$$

De la même manière que spin 0, nous présentons l'état dynamique de système Ψ , pour le cas d'une particule de spin 1, comme un spineur de dimension 10 qui s'écrit

$$\Psi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} i\varphi \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{C}(\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \text{ avec } \mathbf{A} \equiv \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} \equiv \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}, \mathbf{C} \equiv \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

où l'état stationnaire de l'équation du mouvement (2.10) peut être décomposée sous la forme suivante

$$c(\mathbf{p} - im\omega\mathbf{r}) e_i \mathbf{B} + imc^2 \varphi = 0, \quad (2.23)$$

$$c(\mathbf{p} + im\omega\mathbf{r}) (-is_i) \mathbf{C} + mc^2 \mathbf{A} = E \mathbf{B}, \quad (2.24)$$

$$ic(\mathbf{p} + im\omega\mathbf{r}) (-e_i^t) \varphi + mc^2 \mathbf{B} = E \mathbf{A}, \quad (2.25)$$

$$c(\mathbf{p} - im\omega\mathbf{r}) (-is_i) \mathbf{A} + mc^2 \mathbf{C} = 0, \quad (2.26)$$

ce système d'équations peut être convertis a

$$mc^2\boldsymbol{\varphi} = ic\mathbf{p}^- \cdot \mathbf{B}, \quad (2.27)$$

$$mc^2\mathbf{A} = E\mathbf{B} - c\mathbf{p}^+ \times \mathbf{C}, \quad (2.28)$$

$$mc^2\mathbf{B} = E\mathbf{A} + ic\mathbf{p}^+ \boldsymbol{\varphi}, \quad (2.29)$$

$$mc^2\mathbf{C} = -c\mathbf{p}^+ \times \mathbf{A}, \quad (2.30)$$

d'où, \times indique le produit vectoriel

$$\mathbf{p}^+ = (\mathbf{p} + im\omega\mathbf{r}), \text{ et } \mathbf{p}^- = (\mathbf{p} - im\omega\mathbf{r}) \quad (2.31)$$

Eliminant par substitution respective $\boldsymbol{\varphi}$ et \mathbf{C} dans l'équation ((2.27), (2.29)), ((2.28), (2.30)) ensuite eliminant \mathbf{B} en faveur de \mathbf{A} , on aboutira à

$$(E^2 - m^2c^4)\mathbf{A} = -c^2\mathbf{p}^+ \times (\mathbf{p}^- \times \mathbf{A}) + c^2\mathbf{p}^+ (\mathbf{p}^- \cdot \mathbf{A}) - \frac{1}{m^2}\mathbf{p}^+ [\mathbf{p}^- \cdot [\mathbf{p}^+ \times (\mathbf{p}^- \times \mathbf{A})]], \quad (2.32)$$

l'évaluation des deux premiers termes de l'équation (2.32), pour lequel, $(S_m)_{kl} = -i\varepsilon_{klm}$, (ε_{klm} symbole de Levi-Civita), seront définis comme suit

$$\mathbf{p}^+ \times (\mathbf{p}^- \times \mathbf{A}) = \mathbf{p}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{p}^2\mathbf{A} + m^2\omega^2(\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{r}^2\mathbf{A}) + m\omega\left(2\hbar + \frac{1}{\hbar}\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}\right)\mathbf{A}, \quad (2.33)$$

et

$$\mathbf{p}^+ (\mathbf{p}^- \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{p}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}) + m^2\omega^2\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}) - m\omega\left(\hbar + \frac{1}{\hbar}\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}\right)\mathbf{A}. \quad (2.34)$$

Injectons les deux expressions (2.33), (2.34) dans l'équation (2.32), nous aboutissons

$$(E^2 - m^2c^4)\mathbf{A} = \left[c^2(\mathbf{p}^2 + m^2\omega^2\mathbf{r}^2) - 3\hbar m\omega c^2 - \frac{2}{\hbar}\omega m c^2 \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \right] \mathbf{A} - \frac{1}{m^2}\mathbf{p}^+ [\mathbf{p}^- \cdot [\mathbf{p}^+ \times (\mathbf{p}^- \times \mathbf{A})]], \quad (2.35)$$

où \mathbf{L} , \mathbf{S} sont respectivement les moments angulaires d'orbite et de spin.

Nous remarquons dans la limite non relativiste que le troisième terme de l'équation (2.35) est négligeable, puisqu'il est de l'ordre $\frac{1}{m^3}$, de sorte que l'expression de \mathbf{A} peut être réécrite

comme suit

$$\varepsilon \mathbf{A} = \left[\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \mathbf{r}^2 - \frac{3}{2}\hbar\omega - \frac{1}{\hbar}\omega \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \right] \mathbf{A}. \quad (2.36)$$

On note que ce dernier résultat est exactement similaire à celui de l'oscillateur harmonique de Dirac [32].

Nous notons également que la solution exacte pour le problème de l'oscillateur harmonique de DKP dans l'espace commutatif a été obtenue par la technique des vecteurs harmoniques sphériques [33].

Chapitre 3

Formalisme de

Duffin-Kemmer-Petiau dans l'espace non commutatif

3.1 Introduction

Il est bien connu que la théorie quantique des champs est fondamentalement non locale. La manifestation de cette non localité des phénomènes devient très apparente dans les hautes énergies. Par conséquent, n'importe quel schémas d'unification des interactions de la physique devrait en principe contenir des effets de la non commutativité de l'espace décrivant la non localité des processus physiques. Ceci est l'un des arguments récemment suggérés par la théorie des cordes dans le but d'unifier la physique. En plus, cette non commutativité de l'espace pourrait en principe absorber les infinis entachant les théories de champs standards. C'est à dire qu'on serait ainsi ramené à une renormalisation à la Planck dans laquelle à la place des échanges rayonnement-matière quantifiées, on aurait des corrélations spatiales quantifiées.

Jusqu'à la découverte en 1925 de la mécanique quantique par Heisenberg, l'espace géométrique des états d'un système microscopique, un atome par exemple, s'est enrichi de nouvelles propriétés de ses coordonnées, comme le moment et la position, qui ne commutent plus. On fait appel à une autre topologie connue récemment par la géométrie non commutative. Le but de

cette géométrie non-commutative est de généraliser la dualité entre espace géométrique et algèbre au cas plus général où l'algèbre n'est plus commutative. Cela conduit à modifier deux concepts fondamentaux des mathématiques, ceux d'espace et de symétrie et à adapter l'ensemble des outils mathématiques adéquats. Par exemple, si nous examinons l'effet de la géométrie non commutative sur les orbites classiques de la particule, la relation de commutation sera mise en oeuvre par la modification suivante $[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta_{ij}$, qui caractérise les espaces non commutatifs et qui exprime la comparaison entre les observateurs de position qui génèrent des contraintes sévères sur la valeur du paramètre non commutatif. A cette effet, beaucoup de recherches ont été consacrées à l'étude de la mécanique quantique déformée par la géométrie non commutative de l'espace, par exemple : l'extraction de la mécanique quantique non commutative à partir de la théorie du champs quantique non commutative dans le cas nonrelativiste [8], l'effet de la non commutativité de l'espace sur la mécanique quantique [34], où le spectre énergétique d'un système général de la mécanique quantique non commutative dans un potentiel central a été corrigé par la présence du paramètre de la non commutativité, l'équation de Dirac pour une particule de spin $\frac{1}{2}$ sous l'action d'un champ électromagnétique constant qui a été étudié dans l'espace non commutatif [10], où le taux de production de paires de particules a été déterminé par la méthode usuelle de Bogolubov, et le problème de l'oscillateur de KG et de Dirac qui a été étudié et discuté par Mirza dans un espace non commutatif [11], où il a montré que le problème pour les deux oscillateurs a un comportement similaire au problème de Landau dans un espace commutatif.

A partir de la théorie quantique habituelle qui a été formulée sur des espaces commutatifs satisfaisants aux relations de commutation suivantes

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad (3.1)$$

il est facile de redéfinir cette théorie dans un autre espace non commutatif, en changeant les relations de commutation sous cette forme

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta_{ij}, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad (3.2)$$

où $\theta_{\mu\gamma}$ est un tenseur antisymétrique.

Afin d'éviter les problèmes d'unitarité et de causalité surgissants dans la théorie non commutative à un temps pareil ($\theta_{0i} = 0$, $\theta_{ij} \neq 0$), nous suggérons que toutes les composantes de temps θ_{0i} doivent être égales à zéro.

Dans le même cadre de la théorie quantique non commutative, nous notons que les modèles noncommutatifs indiqués par les relations de commutation aux dessus (3.2) peuvent être réalisées en termes de produit étoile, c'est-à-dire de remplacer directement l'algèbre commutative avec le produit habituel de fonctions par l'algèbre de Moyal avec le produit étoile

$$(f \star g)(x) = \exp\left[\frac{i}{2}\theta_{\mu\nu}\partial_{x\mu}\partial_{y\nu}\right] f(x)g(y)|_{x=y},$$

avec $f(x)$, $g(x)$ sont deux fonctions arbitraires infiniment différentiables.

Maintenant, dans le contexte de la mécanique quantique non commutative, nous suggérons de développer l'article [35], où l'on résout explicitement l'équation de l'oscillateur du DKP dans l'espace non commutatif, ci-dessous

$$[c\boldsymbol{\beta} \cdot (\mathbf{p} - i\mu\omega\eta^0\mathbf{r}) + \mu c^2] \star \Psi = i\hbar\beta^0\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right). \quad (3.3)$$

En d'autres part, il est bien connu que dans le cas où $[p_i, p_j] = 0$, la mécanique quantique non commutative peut être réduite à la mécanique quantique habituelle lorsque les opérateurs de coordonnées non-commutatives sont exprimés en termes des opérateurs de coordonnées commutatives et leurs opérateurs du moments sous la forme suivante [11]

$$x_i \rightarrow x_i - \frac{1}{2\hbar}\theta_{ij}p_j \quad \text{et} \quad p_i \rightarrow p_i, \quad i = \overline{1,3} \quad (3.4)$$

avec les paramètres du tenseur antisymétrique θ sont choisis comme

$$\theta_{ij} = \epsilon_{ijk}\theta_k \quad \text{et} \quad \theta_3 = \theta, \quad (3.5)$$

et les autres composantes égales à zéro

Sur la base de ce fait, on peut réécrire la transformation (3.4) sous la forme condensée suivante

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \frac{\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}}{2\hbar}, \quad \text{avec} \quad \theta_{12} = -\theta_{21} = \theta_3 = \theta, \quad (3.6)$$

avec \times est le produit vectoriel.

Maintenant, si en tenant compte de la transformation (3.6) représentant le passage d'un espace non commutatif vers un autre espace commutatif dans l'équation (3.3), la solution stationnaire de l'équation de l'oscillateur du DKP dans l'espace non commutatif s'écrira comme suit

$$\left[c\boldsymbol{\beta} \cdot \left(\mathbf{p} - i\mu\omega\eta^0 \left(\mathbf{r} + \frac{\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}}{2\hbar} \right) \right) + \mu c^2 \right] \tilde{\Psi} = E\beta^0 \tilde{\Psi}, \quad (3.7)$$

avec

$$\Psi(\vec{r}, t) = e^{-iEt} \tilde{\Psi}(\vec{r}). \quad (3.8)$$

3.2 Applications :

3.2.1 L'oscillateur de DKP pour spin-0

Dans le cas d'une particule scalaire de spin 0, on note que la fonction d'onde $\tilde{\Psi}(\mathbf{r})$ de l'équation (3.7) a toujours la même forme (2.12) que le cas de l'oscillateur de DKP (spin-0) ordinaire au chapitre précédent.

Injectant cette forme de $\tilde{\Psi}$ (2.12) dans l'équation (3.7), nous obtenons le système d'équations couplées suivant

$$\mu c^2 \Phi_1 = E\Phi_2 + ic \left[\mathbf{p} + i\mu\omega \left(\mathbf{r} + \frac{\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}}{2\hbar} \right) \right] \cdot \boldsymbol{\psi}, \quad (3.9)$$

$$\mu c^2 \Phi_2 = E\Phi_1, \quad (3.10)$$

$$\mu c^2 \boldsymbol{\psi} = ic \left[\mathbf{p} - i\mu\omega \left(\mathbf{r} + \frac{\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}}{2\hbar} \right) \right] \Phi_1, \quad (3.11)$$

par substitution des expressions φ_2 , $\boldsymbol{\psi}$, dans $\varphi_1(\mathbf{r})$, nous aurons une équation du second ordre

$$\begin{aligned} & c^2 \left[\left(1 + \frac{\mu^2 \omega^2 \theta^2}{4\hbar^2} \right) (p_x^2 + p_y^2) + \mu^2 \omega^2 (x^2 + y^2) - \frac{\mu^2 \omega^2 \theta}{\hbar} L_z \right] \Phi_1 \\ & = [(E^2 - \mu^2 c^4) + 3\mu\omega\hbar c^2 - \mu^2 \omega^2 c^2 z^2 - c^2 p_z^2] \Phi_1. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Maintenant, il est suitable d'exprimer les coordonnées cartésiennes (x, y, z) en fonction de co-

ordonnées cylindriques (r, φ, z) dans la prédite équation (3.12), pour obtenir

$$\begin{aligned} & \left[\hbar^2 \left(1 + \frac{\mu^2 \omega^2 \theta^2}{4\hbar^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \right. \\ & \left. - \mu^2 \omega^2 r^2 + \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \mu^2 \omega^2 z^2 + \frac{\mu^2 \omega^2 \theta}{\hbar} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \Phi_1(r, \varphi, z) \\ & = \left[-\frac{(E^2 - \mu^2 c^4)}{c^2} - 3\mu\omega\hbar \right] \Phi_1(r, \varphi, z). \end{aligned} \quad (3.13)$$

On sépare les variables radiales, angulaires et axiales de la fonction d'onde Φ_1 en posant

$$\Phi_1(r, \varphi, z) = C e^{i|m|\varphi} \frac{R(r)}{\sqrt{r}} \Psi^{osc}(z). \quad (3.14)$$

En remplaçant $\Phi_1(r, \varphi, z)$ par son expression dans l'équation (3.13), on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R(r)} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{(m^2 - \frac{1}{4})}{r^2} - \frac{\mu^2 \omega^2}{M^2} r^2 + N \right] R(r) \\ & = \frac{1}{\Psi^{osc}(z)} \left[-\frac{\hbar^2}{M^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\mu^2 \omega^2}{M^2} z^2 \right] \Psi^{osc}(z) = b, \end{aligned} \quad (3.15)$$

avec

$$M^2 = \hbar^2 \left(1 + \frac{\mu^2 \omega^2 \theta^2}{4\hbar^2} \right), \quad (3.16)$$

$$N = \frac{1}{M^2} \left(\frac{(E^2 - \mu^2 c^4)}{c^2} + 3\mu\omega\hbar + \mu^2 \omega^2 |m| \lambda \right). \quad (3.17)$$

Le terme radial est égal au terme axial si chaque équation est égale à la même constante de séparation b , les deux équations s'écrivent

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{(m^2 - \frac{1}{4})}{r^2} - \frac{\mu^2 \omega^2}{M^2} r^2 + \alpha \right) R(r) = 0, \quad (3.18)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\mu^2 \omega^2}{\hbar^2} z^2 - \beta \right) \Psi^{osc}(z) = 0. \quad (3.19)$$

avec

$$\alpha = N - b, \quad \beta = -\frac{M^2}{\hbar^2} b. \quad (3.20)$$

Pour l'équation (3.19) on pose, $z^2 = \frac{\hbar}{2\mu\omega}\rho^2$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} - \frac{1}{4}\rho^2 + n_z + \frac{1}{2}\right)\Psi^{osc}(\rho) = 0, \quad (3.21)$$

avec

$$\beta = -\frac{(2n_z + 1)\mu\omega}{\hbar}, \quad b = \frac{\mu\omega\hbar}{M^2}(2n_z + 1), \quad (3.22)$$

dont $n_z = 1, 2, 3, \dots$ est le nombre quantique principal.

Nous aurons une équation de type parabolique, possédant la même fonction que celle de Weber $D_n(\rho)$

$$D_{n_z}(\rho) = N_0 \exp\left(-\frac{\rho^2}{4}\right) H_{n_z}\left(2^{-\frac{1}{2}}\rho\right), \quad (3.23)$$

par déduction, nous obtenons

$$\Psi_{n_z}^{osc}(z) = D_{n_z}\left(\sqrt{\frac{2\mu\omega}{\hbar}}z\right) = N_0 \exp\left(-\frac{\mu\omega z^2}{2\hbar}\right) H_{n_z}\left(\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}z\right), \quad (3.24)$$

avec N_0 , est la constante de normalisation, $H_{n_z}\left(\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}z\right)$ est le polynôme d'hermite.

Pour l'équation (3.18), la fonction d'onde $R(r)$ se transforme à

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\chi^2} - \chi^2 - \frac{(m^2 - \frac{1}{4})}{\chi^2} + \varepsilon\right)R(\chi) = 0, \quad (3.25)$$

avec

$$\begin{cases} a = \sqrt{\frac{M}{\mu\omega}} \\ \chi = \frac{r}{a} \\ \varepsilon = \frac{M^2}{\mu\omega}\alpha \end{cases} \quad (3.26)$$

Maintenant, lorsque nous introduisons une nouvelle variable $\xi = \chi^2$ et une nouvelle fonction $W(\xi)$ par la relation

$$R(\chi) = e^{-\frac{\xi}{2}}\xi^\kappa W(\xi), \quad (3.27)$$

nous arrivons à

$$\left\{\xi\frac{d^2}{d\xi^2} + \left(2\kappa + \frac{1}{2} - \xi\right)\frac{d}{d\xi} + n\right\}W(\xi) = 0, \quad (3.28)$$

avec

$$\begin{cases} 4\kappa \left(\kappa - \frac{1}{2}\right) = \left(m^2 - \frac{1}{4}\right) \\ n = \frac{\varepsilon}{4} - \kappa - \frac{1}{4} \end{cases} . \quad (3.29)$$

d'où

$$\kappa = \frac{1}{2} \left(|m| + \frac{1}{2} \right) . \quad (3.30)$$

L'équation (3.28) est une équation de la fonction confluyente hyper-géométrique

$$W(\xi) = \lambda_{norm} F(-n; |m| + 1, \xi) . \quad (3.31)$$

Où la forme finale de la fonction d'onde $R(r)$, s'écrit

$$R_{n,m}(r) = \frac{\lambda_{norm}}{a^{(|m|+\frac{1}{2})}} e^{-\frac{r^2}{2a^2}} r^{|m|} F\left(-n; |m| + 1, \frac{r^2}{a^2}\right) . \quad (3.32)$$

avec

$$a^2 = \frac{\hbar}{\mu\omega} \left(1 + \frac{\mu^2\omega^2\theta^2}{4\hbar^2} \right)^{\frac{1}{2}} . \quad (3.33)$$

Alors la forme générale de l'équation (3.14), est réécrite comme

$$\Phi_{1n,n_z,m}(r, \varphi, z) = \frac{\mathbf{C} e^{i|m|\varphi}}{a^{(|m|+\frac{1}{2})}} \exp\left(\frac{-r^2}{2a^2} - \frac{\mu\omega z^2}{2\hbar}\right) r^{|m|} F\left(-n; |m| + 1, \frac{r^2}{a^2}\right) H_{n_z}\left(\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}} z\right) . \quad (3.34)$$

avec $\mathbf{C} = CN_0\lambda_{norm}$ est la constante de normalisation.

Injectant les expressions (3.30), (3.29), (3.26), (3.22), (3.17), (3.16) dans l'équation (3.20), les valeurs propres de l'énergie seront données par

$$\begin{aligned} E_{n,n_z,m}^2 &= 2\mu c^2 \hbar \omega_1 (2n + |m| + 1) + 2\mu c^2 \hbar \omega \left(n_z + \frac{1}{2} \right) \\ &\quad - \left(\frac{\mu^2 c^2 \omega^2 \theta}{\hbar} \right) |m| \hbar + \mu^2 c^4 - 3\mu c^2 \hbar \omega . \end{aligned} \quad (3.35)$$

avec $\omega_1 = \omega \left(1 + \frac{\mu^2\omega^2\theta^2}{4\hbar^2} \right)^{\frac{1}{2}}$.

Puis utilisons la relation $E = \mu c^2 + E_{nr}$ avec la limite non-relativiste $E_{nr} \ll \mu c^2$ dans

l'équation (3.35), on obtiendra

$$E_{nr} = \hbar\omega \left(1 + \frac{\mu^2\omega^2\theta^2}{4\hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}} (2n + |m| + 1) + \hbar\omega (n_z - 1) - \left(\frac{\mu^2c\omega^2\theta}{\hbar}\right) \frac{\hbar|m|}{2\mu c}. \quad (3.36)$$

Dans cette limite, nous notons que les valeurs propres de l'énergie sont les mêmes que ceux du système sous l'action d'un champ magnétique dans un espace commutatif (l'effet de Zeeman normal).

Par un calcul direct, il est aisé de déduire les autres composantes de la fonction d'onde Ψ , comme suit

$$\begin{aligned} & \Psi_{n,n_z,m}(r, \varphi, z) \equiv \\ & \Lambda \left\{ \left(\begin{array}{c} 1 \\ E \\ \frac{\mu c^2}{\mu c^2} \\ \frac{i\hbar}{\mu c} (\beta e^{i\varphi} - \gamma e^{-i\varphi}) \\ \frac{\hbar}{\mu c} (\beta e^{i\varphi} - \gamma e^{-i\varphi}) \\ \frac{2i\omega}{c} z \end{array} \right) F\left(-n; |m| + 1, \frac{r^2}{a^2}\right) H_{n_z}\left(\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}} z\right) \right. \\ & - \frac{i\hbar}{\mu c a} \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \frac{nr}{(|m|+1)a} \left(\left(1 + \frac{\mu\omega\theta}{2\hbar}\right) e^{i\varphi} + \left(1 - \frac{\mu\omega\theta}{2\hbar}\right) e^{-i\varphi} \right) H_{n_z}\left(\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}} z\right) \\ \frac{inr}{(|m|+1)a} \left(\left(1 - \frac{\mu\omega\theta}{2\hbar}\right) e^{i\varphi} - \left(1 + \frac{\mu\omega\theta}{2\hbar}\right) e^{-i\varphi} \right) H_{n_z}\left(\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}} z\right) \\ H_{n_z+1}\left(\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}} z\right) \end{array} \right) \\ & \left. \times F\left(1 - n; |m| + 2, \frac{r^2}{a^2}\right) \right\} \quad (3.37) \end{aligned}$$

avec

$$\Lambda = \frac{N e^{i|m|\varphi}}{a^{(|m|+\frac{1}{2})}} \exp\left(\frac{-r^2}{2a^2} - \frac{\mu\omega z^2}{2\hbar}\right) r^{|m|}, \quad (3.38)$$

$$\beta = \left(\frac{\mu\omega}{\hbar} - \frac{1}{a^2} \left(1 + \frac{\mu\omega\theta}{2\hbar}\right)\right) \frac{r}{2}, \quad (3.39)$$

$$\gamma = \left(\frac{\mu\omega}{\hbar} - \frac{1}{a^2} \left(1 - \frac{\mu\omega\theta}{2\hbar}\right)\right) \frac{r}{2} + \left(1 - \frac{\mu\omega\theta}{2\hbar}\right) \frac{|m|}{r}. \quad (3.40)$$

d'où les propriétés suivantes ont été utilisées

$$\frac{\partial H_n(z)}{\partial z} = 2zH_n(z) - H_{n+1}(z). \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial^m F(\alpha, \gamma, z)}{\partial z^m} = \frac{(\alpha)_m}{(\gamma)_m} F(\alpha + m, \gamma + m, z). \quad (3.42)$$

à l'intérêt de comprendre l'effet de la géométrie noncommutative dans la mécanique quantique relativiste, nous voyons qu'il est très utile de comparer ce résultat avec celui de la particule scalaire de DKP soumettant à l'action d'un champ magnétique constant dans l'espace commutatif.

Dans ce cas l'équation de DKP d'une particule scalaire de masse μ se déplaçant sous l'action d'un champ magnétique est écrite comme suit

$$\left(c\boldsymbol{\beta} \cdot \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right) + \mu c^2 \right) \psi = i\hbar\beta^0 \frac{\psi}{\partial t}, \quad (3.43)$$

pour la simplicité, nous choisissons la direction de champ magnétique suivant l'axe- z , où la jauge est fixée comme suit

$$\mathbf{A} = \mathcal{H}(-y, x, 0) \quad (3.44)$$

avec \mathcal{H} est la tensité du champ

Dans ce cas, nous utilisons la représentation spin-0, à 2-dim, où on injecte la forme $\psi(\mathbf{r})$ dans (3.43), nous arrivons au système d'équations couplées suivant

$$\mu c^2 \Phi_1 = E\Phi_2 + ic\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\psi}, \quad (3.45)$$

$$\mu c^2 \Phi_2 = E\Phi_1, \quad (3.46)$$

$$\mu c^2 \boldsymbol{\psi} = ic\mathbf{P}\Phi_1, \quad (3.47)$$

avec, $\mathbf{P} = \mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}$

Eliminons par substitution Φ_2 et $\boldsymbol{\psi}$ en faveur de Φ_1 , on aboutira à l'expression suivante de Φ_1

$$c^2 \left[(p_x^2 + p_y^2) + \left(\frac{e^2 \mathcal{H}^2}{4c^2} \right) (x^2 + y^2) - \frac{e\mathcal{H}}{c} L_z \right] \Phi_1 = (E^2 - \mu^2 c^4) \Phi_1, \quad (3.48)$$

avec, $L_z = xp_y - yp_x$.

Nous remarquons que cette équation (3.48) est exactement similaire à celle de KG en interaction avec un champ magnétique constant de Mirza [11]. Et qui est aussi semblable à l'équation (3.12) à 2-dim, où on peut tirer par une simple comparaison les relations suivantes

$$c^2 \left(1 + \frac{\mu^2 \omega^2}{4\hbar^2} \theta^2 \right) \rightarrow c^2 \quad (3.49)$$

$$c^2 \mu^2 \omega^2 \rightarrow \frac{e^2 \mathcal{H}^2}{4} \quad (3.50)$$

$$\frac{c^2 \mu^2 \omega^2 \theta}{\hbar} \rightarrow ce\mathcal{H} \quad (3.51)$$

3.2.2 L'oscillateur de DKP pour spin-1

Procédons de la même manière que le cas commutatif de spin 1, en décomposant l'équation (3.7) du mouvement sous la forme suivante

$$\mu c^2 \boldsymbol{\varphi} = -c \mathbf{p}^- \cdot \mathbf{B}, \quad (3.52)$$

$$\mu c^2 \mathbf{A} = E \mathbf{B} - c \mathbf{p}^+ \times \mathbf{C}, \quad (3.53)$$

$$\mu c^2 \mathbf{B} = E \mathbf{A} + c \mathbf{p}^+ \boldsymbol{\varphi}, \quad (3.54)$$

$$\mu c^2 \mathbf{C} = -c \mathbf{p}^- \times \mathbf{A}, \quad (3.55)$$

avec

$$\mathbf{p}^+ = \left(\mathbf{p} + i\mu\omega \left(\mathbf{r} + \frac{\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}}{2\hbar} \right) \right) \text{ et } \mathbf{p}^- = \left(\mathbf{p} - i\mu\omega \left(\mathbf{r} + \frac{\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}}{2\hbar} \right) \right). \quad (3.56)$$

Eliminant par substitution respective $\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{C}$ et \mathbf{B} en faveur de \mathbf{A} , on obtiendra

$$(E^2 - \mu^2 c^4) \mathbf{A} = -c^2 \mathbf{p}^+ \times (\mathbf{p}^- \times \mathbf{A}) + c^2 \mathbf{p}^+ (\mathbf{p}^- \cdot \mathbf{A}) - \frac{1}{\mu^2} \mathbf{p}^+ [\mathbf{p}^- \cdot [\mathbf{p}^+ \times (\mathbf{p}^- \times \mathbf{A})]], \quad (3.57)$$

l'évaluation des deux premiers termes de l'équation (3.57) donne

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^+ \times (\mathbf{p}^- \times \mathbf{A}) &= [\mathbf{p}^+ \times (\mathbf{p}^- \times \mathbf{A})]_{\theta=0} - \frac{\mu^2 \omega^2}{4\hbar^2} [\mathbf{p} \times (\boldsymbol{\theta} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{A})) + \theta^2 (p_x^2 + p_y^2) \mathbf{A}] \\ &\quad - \frac{\mu^2 \omega^2}{2\hbar} [-2\boldsymbol{\theta} (L_z + \hbar^2 S_z) \mathbf{A} - \mathbf{r} (\boldsymbol{\theta} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{A})) + \mathbf{p} \times (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{A})] \\ &\quad - \frac{\mu\omega}{2\hbar^2} [(\mathbf{S} \times \mathbf{p}) \cdot (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p})] \mathbf{A}, \end{aligned} \quad (3.58)$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}^+ (\mathbf{p}^- \cdot \mathbf{A}) &= [\mathbf{p}^+ (\mathbf{p}^- \cdot \mathbf{A})]_{\theta=0} - \frac{\mu^2 \omega^2}{4\hbar^2} [\mathbf{p} \times (\boldsymbol{\theta} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{A}))] \\
&\quad - \frac{\mu^2 \omega^2}{2\hbar} [-\mathbf{r} (\boldsymbol{\theta} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{A})) + \mathbf{p} \times (\boldsymbol{\theta} \cdot (\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}))] \\
&\quad + \frac{\mu\omega}{2\hbar^2} [(\mathbf{S} \times \mathbf{p}) \cdot (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p})] \mathbf{A}.
\end{aligned} \tag{3.59}$$

En injectant ces derniers résultats dans (3.57), nous obtenons

$$\begin{aligned}
(E^2 - \mu^2 c^4) \mathbf{A} &= c^2 [-\mathbf{p}^+ \times (\mathbf{p}^- \times \mathbf{A}) + \mathbf{p}^+ (\mathbf{p}^- \cdot \mathbf{A})]_{\theta=0} + c^2 \left[\frac{\mu^2 \omega^2}{4\hbar^2} \theta^2 (p_x^2 + p_y^2) \mathbf{A} \right] \\
&\quad - c^2 \left[\frac{\mu^2 \omega^2}{\hbar} \theta (L_z + S_z) \mathbf{A} \right] + c^2 \left[\frac{\mu\omega}{\hbar^2} (\mathbf{S} \times \mathbf{p}) \cdot (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}) \mathbf{A} \right] \\
&\quad - \frac{1}{\mu^2} \mathbf{p}^+ [\mathbf{p}^- \cdot [\mathbf{p}^+ \times (\mathbf{p}^- \times \mathbf{A})]].
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Où la forme explicite de l'expression (3.60) sera

$$\begin{aligned}
(E^2 - \mu^2 c^4) \mathbf{A} &= c^2 \left[\mathbf{p}^2 + \mu^2 \omega^2 \mathbf{r}^2 + \frac{\mu^2 \omega^2}{4\hbar^2} \theta^2 (p_x^2 + p_y^2) - \frac{\mu^2 \omega^2}{\hbar} \theta (L_z + S_z) - \frac{2\mu\omega}{\hbar} \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} - 3\mu\hbar\omega \right. \\
&\quad \left. + \frac{\mu\omega c^2}{\hbar^2} (\mathbf{S} \times \mathbf{p}) \cdot (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}) \right] \mathbf{A} - \frac{1}{\mu^2} \mathbf{p}^+ [\mathbf{p}^- \cdot [\mathbf{p}^+ \times (\mathbf{p}^- \times \mathbf{A})]],
\end{aligned} \tag{3.61}$$

avec \mathbf{L} , \mathbf{S} sont respectivement les moments angulaires d'orbite et de spin.

On notera, que le résultat final, montre que l'oscillateur de DKP dans un espace non commutatif est tout à fait semblable à une équation de DKP dans un espace commutatif, décrivant un mouvement d'un boson vectoriel sous l'action d'un champ magnétique constant suivant l'axe z .

On notera également l'existence d'un terme supplémentaire $[(\mathbf{S} \times \mathbf{p}) \cdot (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p})]$ dans la dite expression, ce dernier, possédant une interprétation, pour le cas où une particule chargée dans un espace non commutatif faisant apparaître un moment de dipôle électrique, qui est proportionnel a celui ci , $\boldsymbol{\mu}_e \propto \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}$. Il est aussi similaire au phénomène d'une particule en mouvement avec un dipôle électrique, ce phénomène crée un champ magnétique, possédant un moment magnétique

$\boldsymbol{\mu}_\mu = \left(\frac{e}{\mu c}\right) \mathbf{S}$, qui, agit réciproquement avec le dipôle électrique du particule.

$$\begin{aligned} (\mathbf{S} \times \mathbf{p}) \cdot (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}) &\propto \boldsymbol{\mu}_e \cdot (\mathbf{S} \times \mathbf{p}) \\ &\propto \boldsymbol{\mu}_\mu \cdot (\boldsymbol{\mu}_e \times \mathbf{p}). \end{aligned}$$

Finalement, à cause de la présence de ce terme supplémentaire, nous notons que la résolution exacte de l'équation (3.61) reste presque impossible par la méthode directe que nous avons utilisé précédemment.

Maintenant, si nous nous limitons au cas de deux dimensions, on remarque dans la limite non relativiste que le troisième terme de l'équation (3.61) est négligeable, puisqu'il est de l'ordre $\frac{1}{\mu^3}$, de sorte que l'expression de $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ peut être réécrite comme suit

$$\begin{aligned} E^{nr} \mathbf{A} &= \left[\left(1 + \frac{\mu^2 \omega^2}{4\hbar^2} \theta^2\right) \frac{(p_x^2 + p_y^2)}{2\mu} + \frac{\mu\omega^2}{2} (x^2 + y^2) - \frac{\mu\omega^2}{2\hbar} \theta (L_z + S_z) - \left(\frac{\omega}{\hbar} L_z S_z + \hbar\omega\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega}{2\hbar^2} \theta (p_x^2 + p_y^2) S_z \right] \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Sachant que les valeurs propres d'énergie peuvent être calculées, en introduisant les valeurs propres de S_z et L_z dans l'expression (3.62), comme suit

$$E_{n_x n_y m_l}^{nr} \simeq \hbar\omega_1 (n_x + n_y + 1) - \frac{\mu\omega^2 \theta}{2} (m_l \pm 1) \mp \hbar\omega m_l - \hbar\omega, \quad (3.63)$$

avec $\omega_1 = \omega \sqrt{\left(1 \pm \frac{\mu\omega\theta}{2\hbar}\right)^2}$.

Dans cette limite, nous observons que $E_{n_x n_y m_l}^{nr} \rightarrow 0$ pour les valeurs de $\theta = \mp \frac{2\hbar}{\mu\omega}$, qui peuvent être interprétées comme un point de résonance.

En conclusion, de ce chapitre, on notera l'existence d'une similitude entre l'oscillateur harmonique de DKP dans un espace non commutatif et une particule de DKP en interaction avec un champ magnétique constant dans un espace commutatif.

Chapitre 4

Formalisme de

Duffin-Kemmer-Petiau dans l'espace courbé

4.1 Introduction

Depuis longtemps, il est bien connu que l'espace temps courbé a une implication importante astrophysique et cosmologique en relativité générale, où la gravité est décrite comme une propriété géométrique de l'espace-temps, cette implication a été un grand progrès, notamment, à la compréhension de l'expansion de l'espace et la forme du l'univers. D'une manière plus générale, l'effet de cette courbure de l'espace s'étend également aux échelles microscopiques, où il est possible de déterminer le comportement d'un objet quantique en présence de gravité. Prédire le mouvement d'une particule dans un champ gravitationnel, pour cette raison l'extension de la théorie quantique des champs dans l'espace-temps courbe, qui peut être considéré comme une première approximation de la gravité quantique, a suscité un intérêt considérable en raison d'une forte motivation pour la théorie unifiée de la gravitation et la mécanique quantique (gravité quantique).

Historiquement, au niveau de la mécanique quantique non relativiste, certains problèmes ont été résolus dans ce contexte, par exemple : l'équation d'une particule de Schrodinger se mouvant

dans un champ gravitationnel constant qui a été résolue exactement dans ce formalisme [12], les intégrales de chemin pour une particule libre évoluant dans un espace courbe qui ont été considérées par Leonard dans [13], et le problème d'une particule non relativiste dans un espace courbe qui a été également étudié dans le cadre des systèmes contraints sur une hypersurface [36].

De plus, il est connu que l'extension de la théorie quantique relativiste dans l'espace-temps courbe joue un rôle important dans l'étude des effets gravitationnels, en décrivant un nouveau type d'interactions entre le spin et la gravitation dans le monde de microparticule. Par conséquent, le phénomène de la production de paire [37], qui a été discuté initialement par Schrodinger en 1939 [38] a été examiné soigneusement par Parker [39]. Dans ce contexte, on note également que la solution exacte de ce genre du problème est très exigée, car elle nous permet d'explorer la nature relativiste et spineur en même temps. Par conséquent, il est important d'élucider le comportement de spin dans l'univers en expansion. Pour ceci plusieurs problèmes relativistes ont été étudiés dans le cadre de cette version gravitationnelle de la mécanique quantique : la quantification d'un hamiltonien de la mécanique quantique dans un espace courbe [40], l'équation de Dirac, notamment le cas des neutrinos $m = 0$, qui a été étudié pour trois modèles différents de l'univers en expansion [41], les équations relativistes de KG et de Dirac qui ont été examinées dans un champ gravitationnel constant [14], l'équation de Dirac à (1+1) dimensions qui a été étudiée explicitement dans l'espace-temps courbé par la métrique de RW et ainsi par la métrique du cigare de Witten via le formalisme de tétrade [42], le cas des équations du KG et Dirac pour deux modèles de l'espace-temps de RW qui a été discuté par Moradi, en employant les solutions exactes obtenues pour calculer la densité de création de particules scalaire et de Dirac via la technique des transformations de Bogolubov [15], traitement de l'équation d'onde de KG généralisée dans l'espace-temps de Robertson-Walker via la méthode de l'opérateur invariant de Casimir qui a été récemment considérée dans [43], problème de l'équation du Dirac pour une particule de spin $\frac{1}{2}$ évoluant dans un espace courbé, doté d'une métrique de de-Sitter à (1+1) dimensions qui a été résolue également dans cette version gravitationnelle, où le taux de création de particules a été calculé par la méthode des transformations de Bogolubov [44] et l'équation de Dirac à (2+1) dimensions qui a été traitée dans le contexte de la mécanique quantique en présence de l'effet gravitationnel par la technique de séparation des variables [45].

Dans ce chapitre, nous nous essayons de développer les articles [46][47], en examinant les effets gravitationnels sur les systèmes relativistes avec spin, en d'autre terme d'étudier la mécanique quantique relativiste du DKP à $(1+1)$ dimensions et à $(1+3)$ dimensions dans le cadre de la mécanique quantique déformé par l'effet gravitationnel, en utilisant le formalisme de tetrade [48], qui est basé essentiellement sur le principe d'équivalence dans l'équation de DKP décrivant la dynamique d'un boson scalaire ou vectoriel libre de masse m dans l'espace-temps plat et qui est semblable à celle de Dirac [49], ci-dessous

$$[i\beta^\mu \partial_\mu - m] \Psi = 0, \quad (4.1)$$

où β^μ sont les matrices singulières de DKP dans l'espace de Minkowski et toutes leurs propriétés sont énumérées dans le premier chapitre.

Pour obtenir l'équation suivante du DKP généralisée dans un espace-temps courbé [50]

$$\left[i\tilde{\beta}^\mu \left(\partial_\mu + \frac{1}{2} \omega_{\mu ab} S^{ab} \right) - m \right] \Psi = 0, \quad \text{avec } S^{ab} = [\beta^a, \beta^b], \quad (4.2)$$

où $\tilde{\beta}^\mu$ sont les matrices de Kemmer dans l'espace courbe et qui sont liées à l'espace plat de Minkowski comme $\tilde{\beta}^\mu = e_{(a)}^\mu \beta^a$, avec les relations de tétrade suivantes

$$e_{(a)}^\mu e_{(b)\nu} \eta^{ab} = g^{\mu\nu}, \quad e_{(a)}^\mu e_{(b)\mu} = \eta_{ab}, \quad e_{(a)}^\mu e_\mu^{(b)} = \delta_a^b. \quad (4.3)$$

et la connexion de spin $\omega_{\mu ab}$ qui obéit aux relations

$$\omega_{\mu ab} = e_{(a)l} e_{(b)}^j \Gamma_{j\mu}^l - e_{(b)}^j \partial_\mu e_{(a)j}, \quad \omega_{\mu ab} = -\omega_{\mu ba}, \quad (4.4)$$

où $\Gamma_{j\mu}^l$ est la connexion affine, qui est écrite en fonction du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ comme suit

$$\Gamma_{j\mu}^l = \frac{1}{2} g^{l\lambda} (\partial_j g_{\mu\lambda} + \partial_\mu g_{\lambda j} - \partial_\lambda g_{\mu j}). \quad (4.5)$$

4.2 L'équation de DKP à (1+1) dimensions

Dans cette partie, nous allons présenter un calcul explicite de l'équation du DKP à (1 + 1) dimensions pour une particule bosonique de spin 1 et spin 0 évoluant dans un espace courbé, doté d'une métrique de Robertson-Walker, et comme une simple application nous allons calculer et discuter le taux de création de paires de particules en présence d'un champ gravitationnel via la méthode de transformation de Bogolubov.

Avant de commencer cette partie, il est utile de considérer que l'espace-temps de RW à deux dimensions est décrit par la métrique suivante

$$ds^2 = dt^2 - \lambda^2(t) dx^2. \quad (4.6)$$

où λ est le facteur d'échelle de l'expansion et de la contraction de l'univers.

A l'image de cette métrique (4.6), on peut simplifier les calculs en introduisant un nouveau paramètre de temps η qui s'appel "le temps conforme", donné par

$$\eta = \int \frac{dt}{\lambda(t)}. \quad (4.7)$$

Puis, la nouvelle forme de l'expression (4.6) sera réécrite comme

$$ds^2 = \lambda^2(\eta) (-d\eta^2 + dx^2). \quad (4.8)$$

Puisque l'élément de ligne est diagonal, on choisit de travailler dans la tétrade diagonale

$$e_{(a)}^\mu = \sqrt{|g^{\mu\nu}|} \delta_{a\nu}. \quad (4.9)$$

De (4.8), (4.9), les tétrades sont données par

$$e_{(a)}^\mu = \frac{1}{\lambda} \text{diag}(1, 1), \quad e_{(b)\mu} = \lambda \text{diag}(1, -1). \quad (4.10)$$

Maintenant, en inserant les expressions des tétrades (4.10) et la forme du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ (4.3) dans l'équation (4.2) à (1+1) dimensions ($\mu = 0, 1$), on obtient l'équation de DKP

généralisée dans l'espace-temps de Robertson-Walker

$$\left[\beta^0 \partial_\eta + ik\beta^1 - \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} (\beta^1)^2 \beta^0 + i\lambda m \right] \tilde{\Psi} = 0, \quad (4.11)$$

où nous avons pris

$$\Psi(\eta, x) = e^{ikx} \tilde{\Psi}(\eta). \quad (4.12)$$

4.2.1 Cas du spin-1

Afin de résoudre cette équation bidimensionnelle du DKP dans l'espace-temps de Robertson-Walker pour le cas de spin 1, nous considérons que la fonction d'onde $\tilde{\Psi}(\eta)^T$ a dix composantes $(\varphi, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ avec \mathbf{A}, \mathbf{B} , et \mathbf{C} sont des vecteurs de dimension (3×1) qui peuvent être décomposés comme suit : $\phi^T = (A_2, A_3, B_1)$, $\Phi^T = (B_2, B_3, A_1)$, $\Theta^T = (C_3, -C_2, \varphi)$ et C_1 .

où A_i, B_i , et C_i , $i = 1, 2, 3$ sont respectivement les composantes des vecteurs \mathbf{A}, \mathbf{B} , et \mathbf{C} ,

et en utilisant la représentation des matrices de DKP (β^1, β^0) pour le cas de spin 1 qui ont été mentionnées au deuxième chapitre, dans l'équation (4.11), pour obtenir le système d'équations couplées suivant

$$i\lambda m \phi = - \left[\partial_\eta + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \right] \Phi + ik\Theta, \quad (4.13)$$

$$i\lambda m \Phi = -\partial_\eta \phi, \quad (4.14)$$

$$i\lambda m \Theta = -ik\phi. \quad (4.15)$$

et la composante C_1 a disparu automatiquement ($C_1 = 0$).

Avec ce système, il est facile de vérifier que seulement les composantes de $\phi(\eta)$ qui sont indépendantes et satisfont à l'équation de type KG suivante

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + k^2 + \lambda^2 m^2 \right] \phi(\eta) = 0. \quad (4.16)$$

Les autres composantes sont déterminées par les équations de contraintes suivantes

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ \Theta \end{pmatrix} = \frac{i}{\lambda m} \begin{pmatrix} \partial_\eta \\ ik \end{pmatrix} \otimes \phi. \quad (4.17)$$

Maintenant, afin de poursuivre l'étude de cette équation du DKP généralisée (4.11) dans le cadre d'un cas exactement soluble en mécanique quantique relativiste ordinaire, nous choisissons la forme du facteur d'échelle de l'expansion et de la contraction de l'univers λ comme suit

$$\lambda(\eta) = (A + B \tanh \rho \eta)^{\frac{1}{2}} \quad A > B, \quad (4.18)$$

où A, B et ρ sont des constantes, cela correspond à l'espace de Minkowski pour $\eta \rightarrow \pm\infty$ et respectivement à la contraction et l'expansion de l'espace pour $B < 0$ et $B > 0$.

Alors, au moyen de cette substitution (4.18), l'équation différentielle pour $\phi(\eta)$ (4.16), sera réduite à

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + (k^2 + Am^2) + Bm^2 \tanh \rho \eta \right] \phi(\eta) = 0. \quad (4.19)$$

Pour réduire cette équation à une classe d'équations différentielles connues, nous utilisons la transformation suivante

$$\phi(y) = y^\nu (1-y)^\mu f(y) \quad \text{où} \quad \eta \rightarrow y = \frac{1}{2}(1 + \tanh \rho \eta), \quad (4.20)$$

qui mène l'équation (4.19) au type d'équations hypergéométriques

$$y(1-y) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + [(2\nu + 1) - (2\mu + 2\nu + 2)y] \frac{\partial f}{\partial y} - [(\mu + \nu)(\mu + \nu + 1)] f = 0, \quad (4.21)$$

où $\mu = \frac{i}{2\rho}\Omega_+$ et $\nu = \frac{i}{2\rho}\Omega_-$

avec

$$\Omega_+ = \pm [k^2 + m^2(A + B)]^{\frac{1}{2}}, \quad \Omega_- = \pm [k^2 + m^2(A - B)]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.22)$$

La solution de cette équation différentielle à $y = 0$ est donnée en termes de fonctions hypergéométriques comme suit

$$f(y) = C {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, y), \quad (4.23)$$

où

$$\alpha = 1 + \frac{i}{2\rho} (\Omega_+ + \Omega_-), \quad \beta = \frac{i}{2\rho} (\Omega_+ + \Omega_-) \quad \text{et} \quad \gamma = 1 + \frac{i\Omega_-}{\rho}. \quad (4.24)$$

Par conséquent, l'expression de $\phi(y)$ peut être écrite comme

$$\phi(y) = C_- y^\nu (1-y)^\mu {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, y) \mathbf{V}, \quad (4.25)$$

avec C_- est une constante de normalisation.

Ou bien avec l'ancienne variable η comme

$$\begin{aligned} \phi(\eta, x) &= C_- e^{ikx} \left(\frac{1}{2} (1 + \tanh \rho\eta) \right)^{\frac{i}{2\rho}\Omega_-} \left(\frac{1}{2} (1 - \tanh \rho\eta) \right)^{\frac{i}{2\rho}\Omega_+} \\ &\quad \times {}_2F_1 \left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{1}{2} (1 + \tanh \rho\eta) \right) \mathbf{V}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

où \mathbf{V} est un vecteur constant de dimension (3×1) .

Maintenant, pour déduire les autres composantes, nous devons tenir en compte la propriété hypergéométrique suivante [51]

$$\frac{d {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, y)}{dy} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} {}_2F_1(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1, y), \quad (4.27)$$

et par un calcul direct, il est aisé d'obtenir la solution finale suivante

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \phi \\ \Phi \\ \Theta \end{pmatrix} &= C_- e^{ikx} \left(\frac{1}{2} (1 + \tanh \rho\eta) \right)^{\frac{i}{2\rho}\Omega_-} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{2} (1 - \tanh \rho\eta) \right)^{\frac{i}{2\rho}\Omega_+} \left[M(\eta) {}_2F_1 \left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{1}{2} (1 + \tanh \rho\eta) \right) \right. \\ &\quad \left. + N(\eta) {}_2F_1 \left(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1, \frac{1}{2} (1 + \tanh \rho\eta) \right) \right], \end{aligned} \quad (4.28)$$

avec $M(\eta)$ et $N(\eta)$ sont des vecteurs de (9×1) composantes définies comme

$$M(\eta) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{[(\Omega_+ - \Omega_-) + (\Omega_+ + \Omega_-) \tanh \rho\eta]}{2m(A + B \tanh \rho\eta)^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{-k}{m(A + B \tanh \rho\eta)^{\frac{1}{2}}} \end{pmatrix} \otimes \mathbf{V}, \quad (4.29)$$

$$N(\eta) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{i\rho\alpha\beta}{2m\gamma(A + B \tanh \rho\eta)^{\frac{1}{2}}} (1 - \tanh^2 \rho\eta) \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{V}. \quad (4.30)$$

En d'autre part, d'une manière similaire, la solution de l'équation (4.21) qui est analytique à $y = 1$ est donnée par

$$\begin{aligned} \phi(\eta, x) &= C_+ e^{ikx} \left(\frac{1}{2} (1 + \tanh \rho\eta) \right)^{\frac{i}{2\rho}\Omega_-} \left(\frac{1}{2} (1 - \tanh \rho\eta) \right)^{\frac{i}{2\rho}\Omega_+} \\ &\times {}_2F_1 \left(\alpha, \beta, 1 + \alpha + \beta - \gamma, \frac{1}{2} (1 - \tanh \rho\eta) \right) \mathbf{V}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

A ce stade, si nous utilisons la limite $\eta \rightarrow \pm\infty$ dans la dernière forme de la fonction d'onde (4.28), nous arrivons au même résultat que l'équation bidimensionnelle de DKP pour une particule de spin 1 dans l'espace ordinaire de Minkowski.

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \Phi \\ \Theta \end{pmatrix}_{\eta \rightarrow \pm\infty} = C_{\pm} e^{i(kx \pm \Omega_{\pm} \eta)} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\pm\Omega_{\pm}}{m(A \pm B)^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{-k}{m(A \pm B)^{\frac{1}{2}}} \end{pmatrix} \otimes \mathbf{V}. \quad (4.32)$$

Maintenant, afin de déterminer le nombre de densité des particules créées dans l'espace-temps de Robertson-Walker, nous devons étudier le comportement asymptotique de la fonction d'onde $\phi(\eta)$ à $\eta \rightarrow \pm\infty$ et en utilisant la technique de transformation de Bogolioubov [52] qui rapporte entre la limite de la solution de fréquence négative ϕ_0^- à $\eta \rightarrow -\infty$ (ou $y \rightarrow 0$) (*in - region*) et la limite de la solution de fréquence positive ϕ_1^+ et $[\phi_1^+]^*$ à $\eta \rightarrow +\infty$ (ou $y \rightarrow 1$) (*out - region*)

comme suit

$$\phi_{0,k}^- = \mathbf{c}_1 \phi_{1,k}^+ + \mathbf{c}_2 \left[\phi_{1,-k}^+ \right]^*, \quad (4.33)$$

où \mathbf{c}_1 , \mathbf{c}_2 sont les coefficients de Bogolioubov qui contiennent les informations sur la création de paire, obéissant à la relation

$$|\mathbf{c}_1|^2 - |\mathbf{c}_2|^2 = 1, \quad (4.34)$$

Alors, l'étude du comportement asymptotique de la fonction d'onde à $\eta \rightarrow \pm\infty$, sera comme suit :

Pour $\eta \rightarrow -\infty$ ($y \rightarrow 0$), le comportement asymptotique de ϕ_0^- s'écrit

$$\phi_0^- = C_1 e^{i(kx - \Omega_- \eta)}, \quad (4.35)$$

où nous avons utilisé les limites

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^\nu = e^{-2\nu\rho\eta}, \quad \lim_{y \rightarrow 0} (1-y)^\mu = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow 0} {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, y) = 1. \quad (4.36)$$

Pour $\eta \rightarrow +\infty$ ($y \rightarrow 1$), le comportement asymptotique de ϕ_1^+ est écrit comme

$$\phi_1^+ = C_2 e^{i(kx + \Omega_+ \eta)}, \quad (4.37)$$

où nous avons utilisé les limites

$$\lim_{y \rightarrow 1} y^\nu = 1, \quad \lim_{y \rightarrow 1} (1-y)^\mu = e^{2\mu\rho\eta} \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow 1} {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, 1-y) = 1. \quad (4.38)$$

En utilisant la propriété hypergéométrique suivante

$$\begin{aligned} {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, y) &= a {}_2F_1(\alpha, \beta, 1 + \alpha + \beta - \gamma, 1 - y) \\ &\quad + b (1 - y)^{\gamma - \alpha - \beta} {}_2F_1(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, 1 - \alpha - \beta + \gamma, 1 - y), \end{aligned} \quad (4.39)$$

où

$$a = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha) \Gamma(\gamma - \beta)} \quad \text{et} \quad b = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}, \quad (4.40)$$

nous aurons la solution de fréquence négative ϕ_0^- qui peut être écrite en termes de ϕ_1^+ et $[\phi_1^+]^*$ comme suit

$$\phi_{0,k}^- = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{i\Omega_-}{\rho}\right) \Gamma\left(-\frac{i\Omega_+}{\rho}\right)}{\Gamma\left(\frac{i(\Omega_- - \Omega_+)}{2\rho}\right) \Gamma\left(1 + \frac{i(\Omega_- - \Omega_+)}{2\rho}\right)} \phi_{1,k}^+ + \frac{\Gamma\left(1 + \frac{i\Omega_-}{\rho}\right) \Gamma\left(\frac{i\Omega_+}{\rho}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{i(\Omega_- + \Omega_+)}{2\rho}\right) \Gamma\left(\frac{i(\Omega_- + \Omega_+)}{2\rho}\right)} [\phi_{1,-k}^+]^*. \quad (4.41)$$

En suite, à partir de (4.33) et (4.41), on obtient les coefficients Bogolioubov comme

$$\frac{|\mathbf{c}_2|^2}{|\mathbf{c}_1|^2} = \left| \frac{\Gamma\left(\frac{i\Omega_+}{\rho}\right) \Gamma\left(\frac{i(\Omega_- - \Omega_+)}{2\rho}\right) \Gamma\left(1 + \frac{i(\Omega_- - \Omega_+)}{2\rho}\right)}{\Gamma\left(-\frac{i\Omega_+}{\rho}\right) \Gamma\left(1 + \frac{i(\Omega_- + \Omega_+)}{2\rho}\right) \Gamma\left(\frac{i(\Omega_- + \Omega_+)}{2\rho}\right)} \right|^2. \quad (4.42)$$

Finalement, on obtient le nombre de densité de création de particules N en utilisant la condition de normalisation (4.34) et la dernière expression (4.42) comme suit

$$N \simeq |\mathbf{c}_2|^2 = \frac{\sinh^2 \pi \left(\frac{\Omega_- + \Omega_+}{2\rho}\right)}{\sinh^2 \pi \left(\frac{\Omega_- - \Omega_+}{2\rho}\right) - \sinh^2 \pi \left(\frac{\Omega_- + \Omega_+}{2\rho}\right)}, \quad (4.43)$$

où nous avons utilisé les relations

$$|\Gamma(iy)|^2 = \frac{\pi}{y \sinh \pi y}, \quad |\Gamma(1 + iy)|^2 = \frac{\pi y}{\sinh \pi y}. \quad (4.44)$$

Il est remarquable de noter que, selon les expressions (4.22), le résultat final du nombre de densité de création de particules N peut prendre deux types de discussions :

- Dans le cas de $\langle \Omega_- \rangle < 0$ ou $\langle \Omega_+ \rangle < 0$, où il est vraiment clair qu'il n'y a pas de création de particules à la limite au cas sans masse, mais pour les particules de masse élevée, on peut facilement montrer que la densité de la particule créée devient thermique

$$N \simeq e^{-\frac{2\pi m}{\rho} \sqrt{A-B}}, \quad A > B. \quad (4.45)$$

Dans cette expression (4.45), nous notons que le taux de création des particules dépend des paramètres du facteur d'expansion de l'univers $\lambda(\eta)$, où il croît rapidement avec $B \rangle 0 \rightarrow A$ (expansion de l'univers) et approche de zéro brusquement avec $B \langle 0$ (contraction de l'univers) et s'annule complètement pour $\rho \rightarrow 0$. Ce fait n'étonne pas puisque la présence du champ

de gravitation affecte les résultats physique. En d'autre terme, ce phénomène de création de particules est due au couplage du champ gravitationnel et du champ quantique via la masse.

- Dans les autres cas, nous aurons aucun processus de création de paire car ce sont pas des cas physique.

4.2.2 Cas du spin-0

Dans ce cas, nous procédons de la même manière que dans le cas de spin 1, en mettant $\tilde{\Psi}(\eta)^T = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5)$. L'équation de système (4.11) est réduite au système des équations suivant

$$i\lambda m\psi_1 = - \left[\partial_\eta + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \right] \psi_2 + ik\psi_3, \quad (4.46)$$

$$i\lambda m\psi_2 = -\partial_\eta\psi_1, \quad (4.47)$$

$$i\lambda m\psi_3 = -ik\psi_1, \quad (4.48)$$

et les composantes $\psi_4 = \psi_5 = 0$.

Selon cette correspondance $\psi_1 \rightarrow \phi$, $\psi_2 \rightarrow \Phi$, $\psi_3 \rightarrow \Theta$ et $(\psi_4, \psi_5) \rightarrow C_1$, la solution du système (4.46), (4.47) et (4.48), sera écrite comme

$$\begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \frac{i}{\lambda m} \begin{pmatrix} \partial_\eta \\ ik \end{pmatrix} \otimes \psi_1, \quad (4.49)$$

avec

$$\begin{aligned} \psi_1(\eta, x) &= C e^{ikx} \left(\frac{1}{2}(1 + \tanh \rho\eta) \right)^{\frac{i}{2\rho}\Omega_-} \left(\frac{1}{2}(1 - \tanh \rho\eta) \right)^{\frac{i}{2\rho}\Omega_+} \\ &\quad \times {}_2F_1 \left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{1}{2}(1 + \tanh \rho\eta) \right). \end{aligned} \quad (4.50)$$

Suivant les mêmes étapes que dans le cas précédent, on parvient au résultat final suivant

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} &= C e^{ikx} \left(\frac{1}{2} (1 + \tanh \rho\eta) \right)^{\frac{i}{2\rho}\Omega_-} \left(\frac{1}{2} (1 - \tanh \rho\eta) \right)^{\frac{i}{2\rho}\Omega_+} \\
&\times \left[K(\eta) {}_2F_1 \left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{1}{2} (1 + \tanh \rho\eta) \right) + L(\eta) \right. \\
&\times \left. {}_2F_1 \left(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1, \frac{1}{2} (1 + \tanh \rho\eta) \right) \right], \tag{4.51}
\end{aligned}$$

avec

$$K(\eta) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{[(\Omega_+ - \Omega_-) + (\Omega_+ + \Omega_-) \tanh \rho\eta]}{2m(A + B \tanh \rho\eta)^{\frac{1}{2}}} \\ -k \\ \frac{-k}{m(A + B \tanh \rho\eta)^{\frac{1}{2}}} \end{pmatrix}, \tag{4.52}$$

$$L(\eta) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{i\rho\alpha\beta}{2m\gamma(A + B \tanh \rho\eta)^{\frac{1}{2}}} (1 - \tanh^2 \rho\eta) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.53}$$

et on déduit le résultat de l'équation bidimensionnelle de DKP dans l'espace-temps de Minkowski pour une particule sans spin.

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}_{\eta \rightarrow \pm\infty} = C_{\pm} e^{i(kx \pm \Omega_{\pm} \eta)} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\pm\Omega_{\pm}}{m(A \pm B)^{\frac{1}{2}}} \\ -k \\ \frac{-k}{m(A \pm B)^{\frac{1}{2}}} \end{pmatrix}. \tag{4.54}$$

L'expression du nombre de densité de création de particules sans spin N dans l'espace-temps de Robertson-Walker est donné par

$$N \simeq |\mathbf{c}_2|^2 = \frac{\sinh^2 \pi \left(\frac{\Omega_- + \Omega_+}{2\rho} \right)}{\sinh^2 \pi \left(\frac{\Omega_- - \Omega_+}{2\rho} \right) - \sinh^2 \pi \left(\frac{\Omega_- + \Omega_+}{2\rho} \right)}. \tag{4.55}$$

4.3 L'équation scalaire de DKP à (1+3) dimensions

Dans cette dernière partie de ce chapitre, nous allons généraliser l'application précédente, en résolvant l'équation scalaire du DKP à (1+3) dimensions dans l'espace-temps de Robertson-Walker ainsi de calculer le taux de création de particules via la même méthode de Bogolubov.

Comme il a été déjà mentionné, l'équation généralisée du DKP à (1+3) dimensions pour une particule scalaire évoluant dans un espace courbé, doté d'une métrique de RW est donnée par [50].

$$\left[i\tilde{\beta}^\mu \left(\partial_\mu + \frac{1}{2}\omega_{\mu ab}S^{ab} \right) - m \right] \Psi = 0, \text{ avec } S^{ab} = [\beta^a, \beta^b]. \quad (4.56)$$

Et la métrique de l'espace-temps de RW à (1+3) dimensions par

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \sum_{i=1}^3 (dx^i)^2, \quad (4.57)$$

où $a(t)$ est le facteur de l'échelle d'expansion de l'univers.

qui peut être simplifiée au cas de l'espace de Minkowski, au moyen de changement du variable suivant

$$\eta = \int \frac{dt}{a(t)}. \quad (4.58)$$

sous cette nouvelle forme

$$ds^2 = a^2(\eta) \left(-d\eta^2 + \sum_{i=1}^3 (dx^i)^2 \right). \quad (4.59)$$

Puisque l'élément de ligne est diagonal, on choisit de travailler dans la tétrade diagonale

$$e_{(a)}^\mu = \sqrt{|g^{\mu\nu}|} \delta_{a\nu}. \quad (4.60)$$

De (4.59), (4.60), les tétrades sont données par

$$e_{(a)}^\mu = \frac{1}{a} \text{diag}(1, 1, 1, 1), \quad e_{(b)\mu} = a \text{diag}(1, -1, -1, -1). \quad (4.61)$$

Inserant les expressions des tétrades (4.61) et la forme du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ (4.3) dans l'équation (4.56), on obtient l'équation scalaire généralisée du DKP à (1+3) dimensions dans

l'espace-temps de RW

$$\left[i\beta^\mu \partial_\mu - i\frac{\dot{a}}{a} (\beta^i)^2 \beta^0 - am \right] \Psi = 0. \quad (4.62)$$

Notons que, les composantes de la fonction d'onde Ψ dans l'équation (4.62) sont simultanément des fonctions propres de J^2 et J_z respectivement avec les valeurs propres $J(J+1)$, M , où le moment angulaire total $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ qui commute avec $(\beta^i)^2 \beta^0$ et avec β^0 est une constante du mouvement.

Maintenant pour résoudre cette équation (4.62), nous utilisons la représentation de spin 0, où les cinq composantes de spineur du DKP sont données par

$$\Psi(\eta, \mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \Phi \\ i\psi \end{pmatrix}, \text{ avec } \Phi \equiv \begin{pmatrix} \phi \\ \varphi \end{pmatrix}, \text{ et } \psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}. \quad (4.63)$$

Substituant l'expression (4.63) dans l'équation (4.62), on obtient le système des équations couplées suivant

$$am\phi = i \left(\partial_\eta + \frac{3\dot{a}}{a} \right) \varphi + \vec{\nabla} \cdot \psi, \quad (4.64)$$

$$am\varphi = i\partial_\eta\phi, \quad (4.65)$$

$$am\psi = \vec{\nabla}\phi. \quad (4.66)$$

À l'intérêt de découpler ce système et éviter la complication de calcul, nous introduisons les coordonnées sphériques dans l'espace-temps de Minkowski [53], où la forme séparée pour les cinq composantes de la fonction d'onde (4.63) est donnée par [33]

$$\Psi_{JM}(\eta, \mathbf{r}) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} F_{nJ}(\eta, r) Y_{JM}(\Omega) \\ G_{nJ}(\eta, r) Y_{JM}(\Omega) \\ i \sum_L H_{nJL}(\eta, r) Y_{JL1}^M(\Omega) \end{pmatrix}, \quad (4.67)$$

avec $F_{nJ}(\eta, r)$, $G_{nJ}(\eta, r)$ et $H_{nJL}(\eta, r)$ sont des fonctions d'ondes radiales, et $Y_{JM}(\Omega)$ sont des harmoniques sphériques d'ordre J et $Y_{JL1}^M(\Omega)$ sont des vecteurs harmoniques sphériques normalisés.

Insérant la forme séparée (4.67) dans (4.64), (4.65) et (4.66), en utilisant les propriétés des vecteurs harmoniques sphériques (voir l'annex) [53], nous obtenons le système couplé suivant

$$H_0 = 0, \quad (4.68)$$

$$amG = i\partial_\eta F, \quad (4.69)$$

$$amH_{-1} = \zeta_J \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{J}{r} \right) F, \quad (4.70)$$

$$amH_{+1} = -\alpha_J \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{J+1}{r} \right) F, \quad (4.71)$$

$$amF - i \left(\partial_\eta + \frac{3\dot{a}}{a} \right) G = \zeta_J \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{J}{r} \right) H_{-1} - \alpha_J \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{J+1}{r} \right) H_{+1}, \quad (4.72)$$

où

$$\alpha_J = \sqrt{(J+1)/(2J+1)}, \quad \zeta_J = \sqrt{J/(2J+1)} \text{ et}$$

$$F_{nJ}(\eta, r) = F(\eta, r), \quad G_{nJ}(\eta, r) = G(\eta, r), \quad H_{nJJ}(\eta, r) = H_0(\eta, r), \quad H_{nJJ\pm 1}(\eta, r) = H_{\pm 1}(\eta, r). \quad (4.73)$$

En substituant (4.69), (4.70) et (4.71) dans (4.72), on obtient une équation de type KG avec un couplage minimale

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{J(J+1)}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{2\dot{a}}{a} \frac{\partial}{\partial \eta} + a^2 m^2 \right] F(\eta, r) = 0. \quad (4.74)$$

Pour résoudre cette équation, nous remplaçons la forme séparée suivante $F(\eta, r) = f(r)g(\eta)$ dans l'équation (4.74), nous aurons

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{J(J+1)}{r^2} + k \right) f(r) = 0, \quad (4.75)$$

$$\left(\frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{2\dot{a}}{a} \frac{d}{d\eta} + a^2 m^2 - k \right) g(\eta) = 0, \quad (4.76)$$

avec k est la constante de séparation.

Appliquant les changements suivants, $\rho = k^{\frac{1}{2}}r$ et $f(\rho) = \rho W(\rho)$ dans la première équation

(4.75), nous aurons la forme de l'équation de Bessel.

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} + 1 - \frac{J(J+1)}{\rho^2} \right) W(\rho) = 0. \quad (4.77)$$

où nous pouvons réécrire la solution de l'équation (4.77) à la singularité régulière $\rho = 0$ en terme de la fonction sphérique de Bessel d'ordre J comme

$$f(\rho) = N\rho j_J(\rho), \quad (4.78)$$

avec N est une constante de normalisation.

La deuxième équation (4.76) peut être réécrite comme suit

$$\left(\frac{d^2}{d\eta^2} - \frac{\dot{\mathbf{b}}}{\mathbf{b}} \frac{d}{d\eta} + \omega^2 \right) g(\eta) = 0, \quad (4.79)$$

où $a = \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}}$ et $\omega = \left(\frac{m^2}{\mathbf{b}} - k \right)^{\frac{1}{2}}$ et les conditions initiales $g(\eta_0) = g_0$, $\dot{g}(\eta_0) = \dot{g}_0$.

Avec la solution formelle de cette équation est donnée par [54]

$$g(\eta) = \chi(\eta) \exp(i\gamma(\eta)), \quad (4.80)$$

où $\gamma(\eta)$ est une fonction du temps qui peut être déterminée par la substitution de la fonction précédente dans (4.79)

$$\gamma(\eta) = C \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{\mathbf{b}}{\chi^2} d\eta' + C', \quad (4.81)$$

avec

$$C' = \gamma(\eta_0) = \arg(g(\eta_0)) \quad \text{et} \quad C = \frac{|g(\eta_0)|}{i\mathbf{b}(\eta_0)} \left[\frac{|g(\eta_0)|}{g(\eta_0)} \dot{g}(\eta_0) - \dot{\chi}(\eta_0) \right]. \quad (4.82)$$

Selon les conditions initiales $g(\eta_0)$ et $\dot{g}(\eta_0)$, un calcul direct donne

$$\dot{\chi}(\eta_0) = \left| \dot{g}(\eta_0) \right| \cos \left[\arg \dot{g}(\eta_0) - \arg g(\eta_0) \right], \quad (4.83)$$

Injectant cette dernière forme (4.83) dans l'expression de C , on trouve

$$C = \frac{|g(\eta_0)|}{i\mathbf{b}(\eta_0)} \left[\frac{|g(\eta_0)|}{g(\eta_0)} \dot{g}(\eta_0) - |\dot{g}(\eta_0)| \cos \left[\arg \dot{g}(\eta_0) - \arg g(\eta_0) \right] \right], \quad (4.84)$$

qui donne

$$g(\eta) = \tilde{C} \cdot \chi(\eta) \exp iC \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{\mathbf{b}}{\chi^2} d\eta', \quad (4.85)$$

avec $\tilde{C} = \exp iC'$ et la fonction $\chi(\eta)$ est la solution de l'équation auxiliaire

$$\ddot{\chi}(\eta) - \frac{\dot{\mathbf{b}}}{\mathbf{b}} \dot{\chi}(\eta) - \frac{C^2 \mathbf{b}^2}{\chi^3} + \omega^2 \chi(\eta) = 0. \quad (4.86)$$

Revenons à l'ancienne variable r , la fonction d'onde $F(\eta, r)$ est donnée par

$$F(\eta, r) = N^\lambda \cdot \chi(\eta) \exp \left[iC \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{1}{a^2 \chi^2} d\eta' \right] r j_J \left(k^{\frac{1}{2}} r \right), \quad (4.87)$$

où $N^\lambda = k^{\frac{1}{2}} \tilde{C}$.

Maintenant, de l'équation (4.87) et (4.69), (4.70), (4.71) et les propriétés de la fonction de Bessel, il est facile d'obtenir les autres composantes de la fonction d'onde radiale (4.67) comme suit

$$\begin{pmatrix} F \\ G \\ H_0 \\ H_{-1} \\ H_{+1} \end{pmatrix} \equiv N^\lambda \exp \left[iC \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{1}{a^2 \chi^2} d\eta' \right] \begin{pmatrix} \chi(\eta) r j_J \left(k^{\frac{1}{2}} r \right) \\ \frac{i}{am} \left[\dot{\chi} + \frac{iC}{a^2 \chi} \right] r j_J \left(k^{\frac{1}{2}} r \right) \\ 0 \\ \frac{k^{\frac{1}{2}} \zeta_J}{am} \chi(\eta) r j_{J-1} \left(k^{\frac{1}{2}} r \right) \\ \frac{k^{\frac{1}{2}} \alpha_J}{am} \chi(\eta) r j_{J+1} \left(k^{\frac{1}{2}} r \right) \end{pmatrix}. \quad (4.88)$$

Nous remarquons que si l'on fixe le paramètre $a(\eta) \rightarrow \text{constante}$, la solution (4.88) est réduite au cas standard de l'espace de Minkowski.

Avant de terminer cette section, nous proposons d'étudier l'approximation adiabatique de notre solution. Sachant que dans le mode adiabatique, les paramètres sont écrits par $\mathbf{B}(\varepsilon\eta)$, par conséquent leurs développements seront ensuite écrits en série de puissance de ε .

En conservant les quantités dominantes d'ordre 0 et 1 en ε , nous déduisons de l'équation

auxiliaire (4.86) que

$$\chi = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{C}{\omega}}. \quad (4.89)$$

Finalement, en substituant ce résultat dans l'expression de la fonction d'onde, nous aurons alors

$$\begin{pmatrix} F \\ G \\ H_0 \\ H_{-1} \\ H_{+1} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adiabat}} N^\lambda \cdot \exp \left[i \int_{\eta_0}^{\eta} \omega(\eta') d\eta' \right] \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \sqrt{\frac{C}{\omega}} r j_J \left(k^{\frac{1}{2}} r \right) \\ \frac{i \sqrt{C\omega}}{a^2 m} r j_J \left(k^{\frac{1}{2}} r \right) \\ 0 \\ \frac{k^{\frac{1}{2}} \zeta_J}{a^2 m} \sqrt{\frac{C}{\omega}} r j_{J-1} \left(k^{\frac{1}{2}} r \right) \\ \frac{k^{\frac{1}{2}} \alpha_J}{a^2 m} \sqrt{\frac{C}{\omega}} r j_{J+1} \left(k^{\frac{1}{2}} r \right) \end{pmatrix}. \quad (4.90)$$

Maintenant, pour achever l'étude de notre problème dans le cadre d'un cas exactement soluble en mécanique quantique relativiste ordinaire, nous choisissons la forme du facteur de l'échelle d'expansion de l'univers a comme suit

$$a(\eta) = (A + B \tanh \lambda \eta)^{\frac{1}{2}} \quad A > B, \quad (4.91)$$

où A, B et λ sont des constantes, cela correspond à l'espace de Minkowski pour $\eta \rightarrow \pm\infty$ et respectivement à la contraction et l'expansion de l'espace pour $B < 0$ et $B > 0$.

Alors que l'équation (4.76), sera réduite à

$$\left[\frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{B\lambda(1 - \tanh^2 \lambda \eta)}{(A + B \tanh \lambda \eta)} \frac{d}{d\eta} + (A + B \tanh \lambda \eta) m^2 - k \right] g(\eta) = 0. \quad (4.92)$$

Afin de réduire cette équation à une classe d'équations différentielles connues, nous introduisons le changement de variable suivant

$$y = \frac{1}{2}(1 + \tanh \lambda \eta), \quad (4.93)$$

où la nouvelle forme de l'équation (4.92) sera écrite comme

$$4\lambda^2 y^2 (1-y)^2 \frac{d^2 g}{dy^2} + 4\lambda^2 \left[y(y-1)(2y-1) + \frac{y^2(1-y)^2}{2(y-\alpha)} \right] \frac{dg}{dy} + [2Bm^2(y-\alpha) - k] g = 0, \quad (4.94)$$

avec $\alpha = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{A}{B}\right)$.

Cette dernière équation peut être modifiée à la forme suivante

$$\frac{d^2g}{dy^2} + \left[\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{2(y-\alpha)} \right] \frac{dg}{dy} + \frac{1}{y(y-1)(y-\alpha)} \left[\nu^2 - \mu^2 - \frac{\alpha\nu^2}{y} + \frac{(\alpha-1)\mu^2}{y-1} \right] g = 0, \quad (4.95)$$

avec les abréviations suivantes

$$\mu = \pm \frac{1}{2\lambda} [k - m^2(A+B)]^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \nu = \pm \frac{1}{2\lambda} [k - m^2(A-B)]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.96)$$

Nous notons que cette équation admet des singularités pour $y = 0, 1, \alpha, \infty$.

Au moyen de la substitution $g = y^\nu(1-y)^\mu \tilde{g}$ cette équation est réduite à une équation de type de Heun [55]

$$\frac{d^2\tilde{g}}{dy^2} + \left[\frac{2\nu+1}{y} + \frac{2\mu+1}{y-1} + \frac{1}{2(y-\alpha)} \right] \frac{d\tilde{g}}{dy} + \frac{1}{y(y-1)(y-\alpha)} \left[(\mu+\nu) \left(\mu+\nu + \frac{3}{2} \right) y + b \right] \tilde{g} = 0, \quad (4.97)$$

avec $b = -\alpha(\mu+\nu)(\mu+\nu+1) - \frac{\nu}{2}$.

Où la solution régulière à l'origine $y = 0$ de cette équation différentielle est

$$g(y) = y^\nu(1-y)^\mu H(\alpha, b; \beta, \gamma, \delta, \epsilon; y), \quad (4.98)$$

dont les paramètres $(\beta, \gamma, \delta, \epsilon)$ sont donnés par

$$\begin{cases} \beta = \mu + \nu \\ \gamma = \mu + \nu + \frac{3}{2} \\ \delta = 2\nu + 1 \\ \epsilon = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (4.99)$$

avec $H(\alpha, b; \beta, \gamma, \delta, \epsilon; y)$ est la fonction de Heun, qui est définie par la série suivante

$$H(\alpha, b; \beta, \gamma, \delta, \epsilon; y) = \left\{ 1 - \frac{b}{\delta\alpha}y + \sum_{s=2}^{+\infty} c_s y^s \right\}, \quad (4.100)$$

où les coefficients de la série c_s sont déterminés par

$$(s+2)(s+1+\delta)\alpha c_{s+2} = \{(s+1)^2(\alpha+1) + (s+1)[\delta + \epsilon - 1 + (\beta + \gamma - \delta)\alpha] - b\} c_{s+1} - (s+\beta)(s+\gamma)c_s, \quad (4.101)$$

avec les conditions initiales $c_0 = 1$, $c_1 = -\frac{b}{\delta\alpha}$ et $c_s = 0$ si $s < 0$.

Revenant aux anciennes variables (η, r) , la fonction d'onde $F(\eta, r)$ est donnée par

$$F(\eta, r) = N^\lambda \left(\frac{1}{2}(1 + \tanh \lambda\eta)\right)^\nu \left(\frac{1}{2}(1 - \tanh \lambda\eta)\right)^\mu \times H(\alpha, b; \beta, \gamma, \delta, \epsilon; \frac{1}{2}(1 + \tanh \lambda\eta)) r j_J \left(k^{\frac{1}{2}} r\right) \quad (4.102)$$

où $N^\lambda = k^{\frac{1}{2}} N$.

Maintenant, pour déduire les autres composantes de la fonction d'onde radiale (4.67), en utilisant les propriétés de la fonction de Bessel et la propriété suivante de Heun

$$(\gamma - \delta - \epsilon)H(\alpha, b + 1 - \alpha + (\alpha - 1)\gamma + \alpha\beta - \alpha\epsilon; \beta, \gamma - 1, \delta, \epsilon + 1; y) = (\beta y + \gamma - \delta - \epsilon)H(\alpha, b; \beta, \gamma, \delta, \epsilon; y) + y(y - 1) \frac{dH(\alpha, b; \beta, \gamma, \delta, \epsilon; y)}{dy}, \quad (4.103)$$

par un calcul simple, il est facile d'obtenir les solutions finales suivantes

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} F \\ G \\ H_0 \\ H_{-1} \\ H_{+1} \end{pmatrix} &\equiv N^\lambda \left(\frac{1}{2} (1 + \tanh \lambda \eta) \right)^\nu \left(\frac{1}{2} (1 - \tanh \lambda \eta) \right)^\mu \left\{ \begin{pmatrix} r j_J \left(k^{\frac{1}{2}} r \right) \\ \frac{2i\lambda\mu}{m(A+B \tanh \lambda \eta)^{\frac{1}{2}}} r j_J \left(k^{\frac{1}{2}} r \right) \\ 0 \\ \frac{k^{\frac{1}{2}} \zeta_J}{m(A+B \tanh \lambda \eta)^{\frac{1}{2}}} r j_{J-1} \left(k^{\frac{1}{2}} r \right) \\ \frac{k^{\frac{1}{2}} \alpha_J}{m(A+B \tanh \lambda \eta)^{\frac{1}{2}}} r j_{J+1} \left(k^{\frac{1}{2}} r \right) \end{pmatrix} \right. \\
&\times H(\alpha, b; \beta, \gamma, \delta, \epsilon; \frac{1}{2} (1 + \tanh \lambda \eta)) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2i\lambda(\nu-\mu)}{m(A+B \tanh \lambda \eta)^{\frac{1}{2}}} r j_J \left(k^{\frac{1}{2}} r \right) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\left. \times H(\alpha, b + 1 - \alpha + (\alpha - 1)\gamma + \alpha\beta - \alpha\epsilon; \beta, \gamma - 1, \delta, \epsilon + 1; \frac{1}{2} (1 + \tanh \lambda \eta)) \right\}. \tag{4.104}
\end{aligned}$$

D'autre part, d'une manière similaire, la solution de l'équation (4.97) qui est analytique à $y = 1$ est donnée par la combinaison linéaire de fonctions de Heun comme suit

$$\begin{aligned}
g(y) &= y^\nu (1 - y)^\mu [H(1 - \alpha, -b - \beta\gamma; \beta, \gamma, 1 + \beta + \gamma - \delta - \epsilon, \epsilon; 1 - y) \\
&+ (1 - y)^{\delta + \epsilon - \beta - \gamma} H(1 - \alpha, -b - \beta\gamma - (\delta + \epsilon - \beta - \gamma) (\delta + \epsilon - \alpha\delta) \\
&; \delta + \epsilon - \beta, \delta + \epsilon - \gamma, 1 + \delta + \epsilon - \beta - \gamma, \epsilon; 1 - y)]. \tag{4.105}
\end{aligned}$$

Maintenant, afin de déterminer le nombre de densité des particules créées dans l'espace-temps de Robertson-Walker, nous devons étudier le comportement asymptotique de la fonction d'onde $g(\eta)$ à $\eta \rightarrow \pm\infty$ et en utilisant la technique de transformation de Bogolioubov [52] qui rapporte entre la limite de la solution de fréquence négative $g_{-\infty}^-$ à $\eta \rightarrow -\infty$ (ou $y \rightarrow 0$) (*in-region*) et les deux limites de la solution de fréquence positive $g_{+\infty}^+$ et négative $g_{+\infty}^-$ à $\eta \rightarrow +\infty$ (ou $y \rightarrow 1$) (*out-region*) comme suit

$$g_{-\infty}^- = \mathbf{c}_1 g_{+\infty}^+ + \mathbf{c}_2 g_{+\infty}^-, \tag{4.106}$$

avec $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ sont les coefficients de Bogolubov qui contiennent les informations sur la création de paire, obéissant à la relation

$$|\mathbf{c}_1|^2 - |\mathbf{c}_2|^2 = 1, \quad (4.107)$$

où $g_{-\infty}^-$ qui correspond au mode de fréquence négative pour $y = 0$ peut être écrite comme

$$g_{-\infty}^- = y^\nu (1-y)^\mu H(\alpha, b; \beta, \gamma, \delta, \epsilon; y), \quad (4.108)$$

et $g_{+\infty}^\pm$ qui correspond aux modes de fréquence négative et positive pour $y = 1$ prennent les formes

$$g_{+\infty}^+ = y^\nu (1-y)^\mu H(1-\alpha, -b-\beta\gamma; \beta, \gamma, 1+\beta+\gamma-\delta-\epsilon, \epsilon; 1-y), \quad (4.109)$$

$$g_{+\infty}^- = y^\nu (1-y)^\mu (1-y)^{\delta+\epsilon-\beta-\gamma} H(1-\alpha, -b-\beta\gamma-(\delta+\epsilon-\beta-\gamma)(\delta+\epsilon-\alpha\delta); \delta+\epsilon-\beta, \delta+\epsilon-\gamma, 1+\delta+\epsilon-\beta-\gamma, \epsilon; 1-y), \quad (4.110)$$

Alors que, l'étude du comportement asymptotique de la fonction d'onde à $\eta \rightarrow \pm\infty$, sera comme suit :

Pour $\eta \rightarrow -\infty$ ($y \rightarrow 0$), la fonction d'onde aura le comportement suivant

$$g_{-\infty}^- = e^{-2\lambda\nu\eta}, \quad (4.111)$$

où nous avons utilisé les limites

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^\nu = e^{-2\lambda\nu\eta}, \quad \lim_{y \rightarrow 0} (1-y)^\mu = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow 0} H(\alpha, b; \beta, \gamma, \delta, \epsilon; y) = 1. \quad (4.112)$$

Pour $\eta \rightarrow +\infty$ ($y \rightarrow 1$), les comportements asymptotiques de $g_{+\infty}^\pm$ sont écrites comme

$$g_{+\infty}^+ = e^{2\lambda\mu\eta}, \quad g_{+\infty}^- = e^{-2\lambda\mu\eta}, \quad (4.113)$$

où nous avons utilisé également les limites suivantes

$$\lim_{y \rightarrow 1} y^\nu = 1, \quad \lim_{y \rightarrow 1} (1-y)^\mu = e^{2\lambda\mu\eta} \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow 1} H(\alpha, b; \beta, \gamma, \delta, \epsilon; 1-y) = 1. \quad (4.114)$$

A cet égard, si nous utilisons la limite $\eta \rightarrow \pm\infty$ dans la dernière forme de la fonction d'onde (4.104), nous arrivons au même résultat que l'équation scalaire de DKP à (1 + 3) dans l'espace-temps de Minkowski.comme suit :

pour $\eta \rightarrow -\infty$, nous obtenons le comportement suivant

$$\begin{pmatrix} F \\ G \\ H_0 \\ H_{-1} \\ H_{+1} \end{pmatrix}_{\eta \rightarrow -\infty} \equiv N^\lambda e^{-2\lambda\nu\eta} \begin{pmatrix} rj_J \left(k^{\frac{1}{2}}r\right) \\ \frac{2i\lambda\nu}{m(A-B)^{\frac{1}{2}}} rj_J \left(k^{\frac{1}{2}}r\right) \\ 0 \\ \frac{k^{\frac{1}{2}}\zeta_J}{m(A-B)^{\frac{1}{2}}} rj_{J-1} \left(k^{\frac{1}{2}}r\right) \\ \frac{k^{\frac{1}{2}}\alpha_J}{m(A-B)^{\frac{1}{2}}} rj_{J+1} \left(k^{\frac{1}{2}}r\right) \end{pmatrix}. \quad (4.115)$$

pour $\eta \rightarrow +\infty$, la fonction d'onde (4.104) a le comportement suivant

$$\begin{pmatrix} F \\ G \\ H_0 \\ H_{-1} \\ H_{+1} \end{pmatrix}_{\eta \rightarrow +\infty} \equiv N^\lambda \begin{pmatrix} (e^{2\lambda\mu\eta} + e^{-2\lambda\mu\eta}) rj_J \left(k^{\frac{1}{2}}r\right) \\ \frac{-2i\lambda\mu(e^{2\lambda\mu\eta} - e^{-2\lambda\mu\eta})}{m(A-B)^{\frac{1}{2}}} rj_J \left(k^{\frac{1}{2}}r\right) \\ 0 \\ \frac{k^{\frac{1}{2}}\zeta_J(e^{2\lambda\mu\eta} + e^{-2\lambda\mu\eta})}{m(A-B)^{\frac{1}{2}}} rj_{J-1} \left(k^{\frac{1}{2}}r\right) \\ \frac{k^{\frac{1}{2}}\alpha_J(e^{2\lambda\mu\eta} + e^{-2\lambda\mu\eta})}{m(A-B)^{\frac{1}{2}}} rj_{J+1} \left(k^{\frac{1}{2}}r\right) \end{pmatrix}. \quad (4.116)$$

Maintenant, à partir de la propriété suivante de la fonction de Heun qui relie les arguments y et $1 - y$,

$$\begin{aligned} H(\alpha, b; \beta, \gamma, \delta, \epsilon; y) &= D_1 H(1 - \alpha, -b - \beta\gamma; \beta, \gamma, 1 + \beta + \gamma - \delta - \epsilon, \epsilon; 1 - y) + D_2 (1 - y)^{\delta + \epsilon - \beta - \gamma} \\ &\quad \times H(1 - \alpha, -b - \beta\gamma - (\delta + \epsilon - \beta - \gamma); \delta + \epsilon - \alpha\delta \\ &\quad ; \delta + \epsilon - \beta, \delta + \epsilon - \gamma, 1 + \delta + \epsilon - \beta - \gamma, \epsilon; 1 - y), \end{aligned} \quad (4.117)$$

où les constantes D_1 et D_2 sont données par

$$D_1 = H(\alpha, b; \beta, \gamma, \delta, \epsilon; 1), \quad D_2 = H(\alpha, b - \alpha\delta [\delta + \epsilon - \beta - \gamma]; \delta + \epsilon - \beta, \delta + \epsilon - \gamma, \delta, \epsilon; 1), \quad (4.118)$$

nous déduisons que la solution de la fréquence négative $g_{-\infty}^-$ peut être écrite en termes de $g_{+\infty}^+$

et $g_{+\infty}^-$ comme suit

$$g_{-\infty}^- = H(\alpha, b; \beta, \gamma, \delta, \epsilon; 1)g_{+\infty}^+ + H(\alpha, b - \alpha\delta [\delta + \epsilon - \beta - \gamma]; \delta + \epsilon - \beta, \delta + \epsilon - \gamma, \delta, \epsilon; 1)g_{+\infty}^-. \quad (4.119)$$

Ensuite, à partir de (4.106) et (4.119), on obtient la relation entre les coefficients de Bogolubov comme

$$\frac{|\mathbf{c}_2|^2}{|\mathbf{c}_1|^2} = \left| \frac{H(\alpha, b - \alpha\delta [\delta + \epsilon - \beta - \gamma]; \delta + \epsilon - \beta, \delta + \epsilon - \gamma, \delta, \epsilon; 1)}{H(\alpha, b; \beta, \gamma, \delta, \epsilon; 1)} \right|^2. \quad (4.120)$$

Finalement, on obtient le nombre de densité de création de particules N en utilisant la condition de normalisation (4.107) et la dernière expression (4.120) comme suit

$$N \simeq |\mathbf{c}_2|^2 = \frac{|H(\alpha, b - \alpha\delta [\delta + \epsilon - \beta - \gamma]; \delta + \epsilon - \beta, \delta + \epsilon - \gamma, \delta, \epsilon; 1)|^2}{|H(\alpha, b; \beta, \gamma, \delta, \epsilon; 1)|^2 - |H(\alpha, b - \alpha\delta [\delta + \epsilon - \beta - \gamma]; \delta + \epsilon - \beta, \delta + \epsilon - \gamma, \delta, \epsilon; 1)|^2}. \quad (4.121)$$

A cette étape, il est intéressant d'étudier le nombre de densité de création de particules dans le cas standard de l'espace-temps de Minkowski ($B = 0$ ou $\alpha \rightarrow \infty$). Pour cela, nous utilisons la limite suivante [56], qui donne l'un des cas où la fonction de Heun dégénère en une fonction hypergéométrique

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} H(\alpha, \alpha l; \beta', \gamma', \delta', \epsilon'; z) \longrightarrow {}_2F_1(\xi + \sqrt{\xi^2 + l}, \xi - \sqrt{\xi^2 + l}; \delta'; z), \quad (4.122)$$

avec

$$\xi = \frac{\beta' + \gamma' - \epsilon'}{2}, \quad (4.123)$$

pour la fonction de Heun contenue dans l'expression (4.121), on trouve

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} N \simeq \frac{|{}_2F_1(\nu - \mu + 1, \nu - \mu, 2\nu + 1, 1)|^2}{|{}_2F_1(\mu + \nu + 1, \mu + \nu, 2\nu + 1, 1)|^2 - |{}_2F_1(\nu - \mu + 1, \nu - \mu, 2\nu + 1, 1)|^2}. \quad (4.124)$$

Finalement, il est facile d'obtenir le taux de création des particules en absence de gravité comme suit

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} N \simeq \left| \frac{\Gamma(2\mu)\Gamma(\nu - \mu)\Gamma(\nu - \mu + 1)}{\Gamma(-2\mu)\Gamma(\nu + \mu)\Gamma(\nu + \mu + 1) - \Gamma(2\mu)\Gamma(\nu - \mu)\Gamma(\nu - \mu + 1)} \right|^2. \quad (4.125)$$

Où les propriétés suivantes de la fonction hypergéométrique sont utilisées [51]

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} \quad \text{et} \quad z\Gamma(z) = \Gamma(1 + z). \quad (4.126)$$

A cette limite, il est remarquable de noter que, selon tous les cas de $(\mu = \pm\nu)$, Il n'y a aucune création de particules au cas limite de l'espace-temps de Minkowski, c'est une conséquence naturelle parce que le phénomène de création des particules dépend de l'accouplement de l'expansion de l'espace-temps avec le champ quantique via la masse, i.e., la production des particules a besoin beaucoup plus de changement de champ gravitationnel ($B \neq 0$).

Pour conclure :

- Nous avons étudié explicitement : l'équation du DKP dans le formalisme de la mécanique quantique déformé par la présence du champ gravitationnel en considérant l'espace de Robertson-Walker ainsi que le phénomène de création de paires des particules via la méthode des transformations de Bogolubov, où les résultats que nous avons obtenus dans ce chapitre sont affectés par les effets gravitationnels.

- Les cas limites de l'espace-temps de Minkowski à (1+1) et (1+3) dimensions ont été également considérés.

- Le résultat essentiel que nous avons obtenu par l'expression du taux de création des particules en présence de la gravité est le suivant :

- ▷ Le phénomène de création des particules de DKP est dû essentiellement au couplage du champ gravitationnel et du champ quantique via la masse.

Chapitre 5

Formalisme de Duffin-Kemmer-Petiau en présence de la longueur minimale

5.1 Introduction

A l'intérêt actuel d'absorber les divergences apparaissant dans l'unification des quatre interactions fondamentales de la physique, qui rendent la théorie des champs quantiques non renormalisable. Plusieurs scénarios ont été proposés pour résoudre ce problème, notamment l'existence de la longueur minimale qui a été décrite comme une échelle microscopique (ou résolution) indépassable, inatteignable et invariante [18] à partir de laquelle la gravité commencerait à présenter des effets quantiques. Cette longueur est supposée être proche de la longueur de Planck, elle est considérée comme une limite naturelle exprimant la nature non ponctuelle des particules élémentaires en monde microparticule [19][20], telle que la dimension des particules dans la théorie des cordes [22][23], qui est considérée comme une longueur de corde, au-dessous de laquelle la résolution de l'espace devient impossible. En outre, l'introduction de la longueur minimale fondamentale dans la mécanique quantique et dans la théorie des champs quantiques est équivalente à une incertitude supplémentaire sur la mesure de la position, de sorte que l'incertitude minimale ne peut jamais être nulle. En fait, la présence de cette incertitude minimale

est basé essentiellement sur la modification de l'algèbre de Heisenberg standard en ajoutant des petites corrections aux relations de commutation canoniques de la mécanique quantique ordinaire. Cette correction a été motivée par la théorie des cordes [57], la gravitation quantique [58], la géométrie non commutative [59], et la physique des trous noirs [60], en impliquant une incertitude minimale finie dans les mesures de position, par exemple, à l'échelle de Planck. A cet égard, plusieurs travaux de recherche ont été consacrés à l'étude de cette version déformée de la mécanique quantique : Dans le cas non relativiste, certains problèmes ont été résolus dans ce cadre, par exemple, l'équation de Schrödinger qui a été résolue exactement avec l'oscillateur harmonique [61], le potentiel Coulombien qui a été étudié perturbativement par Brau [24] et par Benczik [25] dans la quasi-représentation de configuration, ainsi que son traitement dans l'espace des moments dans la référence [62], le problème du potentiel singulier qui a été étudié en détail dans le formalisme de la mécanique quantique avec un principe d'incertitude généralisé [26], et l'équation de Pauli pour une particule chargée de spin $\frac{1}{2}$ sous l'action d'un champ magnétique constant qui a été traité pareillement dans ce formalisme, où les propriétés thermodynamiques du système à haute température ont été examinées [27]...ect. En plus, l'extension relativiste de ce problème est limitée malgré certaines tentatives, parmi eux nous citons : l'équation de Dirac en présence d'une longueur minimale dans la référence [28], où l'oscillateur de Dirac à une dimension a été résolu exactement ; à trois dimensions, ce problème a été résolu en utilisant la mécanique quantique supersymétrique [29], ainsi que l'équation de Dirac généralisée, qui a été considérée récemment dans la référence [63], et l'équation de Klein–Gordon à (1+1) dimensions en interaction avec des potentiels linéaires (scalaires et vectoriels) qui a été traité également dans ce formalisme [30].

Dans ce chapitre, nous essayons de traiter et d'examiner l'effet de la longueur minimale sur les systèmes relativistes avec spin dans le cadre de la mécanique quantique déformée via le formalisme développé par Kempf et ses collaborateurs [16], en se basant essentiellement sur le principe d'incertitude de Heisenberg généralisé (GUP) qui définit une incertitude minimale non nulle $(\Delta X_i)_{\min}$ sur la position correspondant à la longueur minimale, ce principe est généré par les opérateurs de position et de moment satisfaisant aux relations de commutation tensorielles

suivantes :

$$\begin{aligned}
[X_i, P_j] &= i\hbar [(1 + \alpha P^2) \delta_{ij} + \alpha^\lambda P_i P_j], \text{ où } P^2 = \sum_{i=1}^N P_i^2, \\
[X_i, X_j] &= -i\hbar [(2\alpha - \alpha^\lambda) + (2\alpha + \alpha^\lambda) \alpha P^2] \epsilon_{ijk} L_k, \\
[P_i, P_j] &= 0,
\end{aligned} \tag{5.1}$$

où α, α^λ sont des paramètres positifs et très petits, L_k est l'opérateur de moment angulaire modifié qui s'écrit comme :

$$L_k = \frac{1}{1 + \alpha P^2} \epsilon_{ijk} X_i P_j, \tag{5.2}$$

et satisfaisant à l'algèbre usuelle

$$[P_i, L_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} P_k \quad [X_i, L_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} X_k \quad [L_i, L_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} L_k. \tag{5.3}$$

Selon l'algèbre de Heisenberg modifiée (5.1), qui implique l'existence d'une longueur minimale, et l'inégalité de Cauchy-Schwartz-Bunyakovski, nous aurons la relation d'incertitude déformée suivante

$$(\Delta X_i) (\Delta P_j) \geq \frac{\hbar}{2} |\langle (1 + \alpha P^2) \delta_{ij} + \alpha^\lambda P_i P_j \rangle|. \tag{5.4}$$

En supposant que ΔP_j ne dépend pas de j , en utilisant la définition de l'écart quadratique moyen : $(\Delta P)^2 = \langle P^2 \rangle - \langle P \rangle^2$ dans la prédite expression (5.4), on peut déduire facilement la relation d'incertitude correspondant au relations de commutation (5.1)

$$(\Delta X_i) (\Delta P_i) \geq \frac{\hbar}{2} \delta_{ij} \left[1 + (N\alpha + \alpha^\lambda) (\Delta P_j)^2 + \gamma \right] \quad i = 1, 2, 3 \dots N \tag{5.5}$$

avec γ est un paramètre positif qui dépend de la valeur moyenne du moment par la formule

$$\gamma = \alpha \sum_{k=1}^N \langle P_k \rangle^2 + \alpha^\lambda \langle P_i \rangle^2$$

La minimisation de cette dernière relation par rapport à ΔP_i (la plus petite valeur de (ΔX_i)) qui correspond à une incertitude isotropique $\Delta P_i = \Delta P$, donne une incertitude minimale dans une position donnée comme

$$(\Delta X_i)_{\min} = \hbar \sqrt{(\gamma + 1) (N\alpha + \alpha^\lambda)}. \tag{5.6}$$

Dans l'espace des moments, la représentation la plus simple des operateurs X_i et P_j qui peuvent être considérés comme des fonctions des anciens opérateurs x_i et p_j satisfaisant les relations de commutation canoniques de la mécanique quantique ordinaire : $[x_i, p_j] = i\hbar$, a la forme suivante

$$\begin{aligned} X_i &= i\hbar \left[(1 + \alpha p^2) \frac{\partial}{\partial p_i} + \alpha' p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_j} + \gamma p_i \right], \\ P_i &= p_i. \end{aligned} \quad (5.7)$$

A cet égard, il est important de noter, qu'en mécanique quantique, la représentation (5.7) doit être préserver la symétrie des opérateurs X_i et P_j , pour que leurs valeurs propres soient réelles, à travers les conditions de symétrie suivantes

$$(\langle \psi | P | \phi \rangle = \langle \psi | (P | \phi \rangle) \quad \text{et} \quad (\langle \psi | X | \phi \rangle = \langle \psi | (X | \phi \rangle). \quad (5.8)$$

avec ψ et ϕ sont des fonctions d'ondes.

Du moment où l'opérateur P n'est pas modifié, sa symétrie serait évidente, par contre, on doit modifier le produit scalaire sous la forme générale suivante pour que l'opérateur de position X soit symétrique

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^N p}{(1 + (\alpha + \alpha') p^2)^{1-\sigma}} \psi^*(p) \phi(p), \quad \sigma = \frac{\gamma - \alpha' \left(\frac{N-1}{2}\right)}{(\alpha + \alpha')}. \quad (5.9)$$

On note aussi que, la modification du produit scalaire implique une nouvelle relation de fermeture ; celle-ci devient :

$$\left\{ \begin{aligned} \int \frac{d^N p}{(1 + (\alpha + \alpha') p^2)^{1-\sigma}} |p\rangle \langle p| &= 1, \\ \langle p_j | p_{j-1} \rangle &= (1 + \beta p_j^2) \delta(p_j - p_{j-1}). \end{aligned} \right. \quad (5.10)$$

Dans ce qui suit, nous allons nous limiter seulement au cas $\alpha' = 0$, qui représente un intérêt particulier dans la réalité physique telle que la nature non ponctuelle des particules [16].

Maintenant à l'intérêt d'examiner l'effet de la longueur minimale sur le système relativiste de l'oscillateur DKP, nous suggérons dans les applications ci-dessous de développer les articles [64][65], et d'étudier en détail le problème de l'oscillateur DKP à une dimension et à trois dimensions dans le cadre de la mécanique quantique relativiste découlant de principe d'incertitude de

Heisenberg généralisé (GUP), qui a été développé précédemment.

5.2 L'oscillateur de DKP unidimensionnel en présence de la longueur minimale

Comme il a été déjà mentionné, l'équation de l'oscillateur de DKP (2.10) à une dimension qui est analogue à celle de l'oscillateur de Dirac, en employant la substitution non-minimale ($p \rightarrow p - im\omega\eta^0 x$) [33], s'écrit

$$[c\beta^1 (p - im\omega\eta^0 x) + mc^2] \Psi = i\hbar\beta^0 \partial_0 \Psi. \quad (5.11)$$

Avant de commencer l'étude de cette déformation quantique sur le problème de l'oscillateur du DKP, nous voyons qu'il est très utile de calculer l'équation de continuité de cet oscillateur déformé par la présence de la longueur minimale. Pour ceci nous écrivons l'équation (5.11) dans la représentation unidimensionnelle (5.7) des operateurs X et P dans l'espace des moments lorsque le paramètre de déformation α^λ est nul comme

$$c\beta^1 [p + m\omega\hbar\eta^0 ((1 + \alpha p^2) \partial_p + \gamma p)] \Psi(p, t) + mc^2 \Psi(p, t) - i\hbar\beta^0 \partial_0 \Psi(p, t) = 0, \quad (5.12)$$

de cette équation, il est facile de définir le spineur adjoint $\bar{\Psi}$ par

$$\bar{\Psi} = \Psi^+ \eta^0, \quad (5.13)$$

qui vérifie l'équation adjointe suivante

$$\bar{\Psi}(p, t) c\beta^1 p (1 - m\omega\hbar\eta^0 \gamma) - m\omega\hbar (1 + \alpha p^2) \partial_p \bar{\Psi}(p, t) \beta^1 \eta^0 + mc^2 \bar{\Psi}(p, t) + i\hbar \partial_0 \bar{\Psi}(p, t) \beta^0 = 0. \quad (5.14)$$

En conséquence, à partir des équations (5.12) et (5.14), on peut obtenir l'expression suivante

$$\begin{aligned} & \partial_0 (\bar{\Psi}(p, t) \beta^0 \eta^0 \Psi(p, t)) + \partial_p [icm\omega (\bar{\Psi}(p, t) \beta^1 \eta^0 \Psi(p, t))] \\ & + (2\gamma p + \alpha p^2 \partial_p) [icm\omega (\bar{\Psi}(p, t) \beta^1 \eta^0 \Psi(p, t))] = 0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Dans cette expression, nous notons que les deux premiers termes représentent l'équation de continuité habituelle de l'oscillateur DKP dans l'espace des moments (en absence de la longueur minimale) et le troisième terme représente la correction qui est due à la présence de la longueur minimale. Ceci est une conséquence naturelle, exactement comme dans le cas de la théorie non commutative [66], où les résultats physiques dépendent du paramètre de déformation de l'espace [11][35].

Dans le but d'extraire l'équation de continuité avec la présence de la longueur minimale, la dernière équation (5.15) peut être écrite comme

$$\partial_0 [(\bar{\Psi}(p, t) \beta^0 \eta^0 \Psi(p, t))] + (1 + \alpha p^2)^{1 - \frac{\gamma}{\alpha}} \partial_p \left[icm\omega (1 + \alpha p^2)^{\frac{\gamma}{\alpha}} (\bar{\Psi}(p, t) \beta^1 \eta^0 \Psi(p, t)) \right] = 0, \quad (5.16)$$

et par la transformation suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} t \rightarrow t = s \\ p \rightarrow k = g(p) = \int^p \frac{dp}{(1 + \alpha p^2)^{1 - \frac{\gamma}{\alpha}}} \end{array} \right. . \quad (5.17)$$

Il est facile d'obtenir

$$\frac{\partial J^0(k, s)}{\partial s} + \frac{\partial J(k, s)}{\partial k} = 0, \quad (5.18)$$

où

$$J^0(k, s) = [(\bar{\Psi}(k, s) \beta^0 \eta^0 \Psi(k, s))], \quad (5.19)$$

et

$$J(k, s) = icm\omega \left(1 + \alpha (g^{-1}(k))^2 \right)^{\frac{\gamma}{\alpha}} (\bar{\Psi}(k, s) \beta^1 \eta^0 \Psi(k, s)), \quad (5.20)$$

avec $g^{-1}(k)$ est la fonction inverse de $g(k)$.

Il est remarquable de noter que la composante de temps J^0 n'est pas définie positive et peut être interprétée comme une densité de charge, qui est positive pour des états d'énergie positifs et négative pour des états d'énergie négatifs [67]. Par conséquent, nous pouvons conclure que le paradoxe de Klein persiste également dans le cas de la présence de la longueur minimale et il n'y a aucune nécessité d'introduire la mer de Dirac.

Maintenant, si en tenant compte de la représentation unidimensionnelle (5.7) des operateurs

X et P dans l'espace des moments avec ($\alpha' = 0$), l'équation stationnaire de l'oscillateur du DKP à une dimension avec la présence de la longueur minimale s'écrira comme suit

$$\left[c\beta^1 \left(p + m\omega\hbar\eta^0 \left((1 + \alpha p^2) \frac{\partial}{\partial p} + \gamma p \right) \right) + mc^2 \right] \tilde{\Psi}(p) = E\beta^0 \tilde{\Psi}(p), \quad (5.21)$$

où $\Psi(p, t) = e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \tilde{\Psi}(p)$.

5.2.1 Cas de l'oscillateur de DKP pour spin-1

Afin de résoudre l'équation de l'oscillateur DKP unidimensionnel déformée (5.21) dans le cas de spin 1, nous considérons que la fonction d'onde $\tilde{\Psi}(p)^T$ a dix composantes ($\varphi, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$) avec \mathbf{A}, \mathbf{B} , et \mathbf{C} sont des vecteurs de dimension (3×1) qui peuvent être décomposés comme suit : $\phi^T = (A_2, A_3, B_1)$, $\Phi^T = (B_2, B_3, A_1)$, $\Theta^T = (C_3, -C_2, \varphi)$ et C_1 .

où A_i, B_i , et C_i , $i = 1, 2, 3$ sont respectivement les composantes des vecteurs \mathbf{A}, \mathbf{B} , et \mathbf{C} .

Et en utilisant la représentation des matrices de DKP (β^1, β^0) pour le cas de spin 1 qui ont été mentionnées au premier chapitre, dans l'équation (5.21), on obtient le système des équations couplées suivant

$$c \left[p - im\omega\hbar \left((1 + \alpha p^2) \frac{\partial}{\partial p} + \gamma p \right) \right] \phi + mc^2 \Theta = 0, \quad (5.22)$$

$$mc^2 \Phi = E\phi, \quad (5.23)$$

$$-c \left[p + im\omega\hbar \left((1 + \alpha p^2) \frac{\partial}{\partial p} + \gamma p \right) \right] \Theta + mc^2 \phi = E\Phi, \quad (5.24)$$

et la composante C_1 a disparu automatiquement ($C_1 = 0$).

Avec ce système, il est facile de vérifier que seulement les composantes de $\phi(p)$ qui sont indépendantes et satisfont à une équation de type KG

$$\begin{aligned} & \left[-m^2\omega^2\hbar^2 (1 + \alpha p^2)^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2} - 2m^2\omega^2\hbar^2 (\alpha + \gamma) p (1 + \alpha p^2) \frac{\partial}{\partial p} \right. \\ & \left. + (1 - m^2\omega^2\hbar^2\gamma (\alpha + \gamma) - m\omega\hbar\alpha) p^2 - m^2\omega^2\hbar^2\gamma \right] \phi(p) \\ & = \left(\frac{E^2 - m^2c^4}{c^2} + m\omega\hbar \right) \phi(p), \end{aligned} \quad (5.25)$$

et les autres composantes sont déterminées par les équations des contraintes suivantes

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ \Theta \end{pmatrix} = \frac{1}{mc^2} \begin{pmatrix} E \\ -c \left(p + m\omega\hbar \left((1 + \alpha p^2) \frac{\partial}{\partial p} + \gamma p \right) \right) \end{pmatrix} \otimes \phi. \quad (5.26)$$

Maintenant, pour résoudre l'équation (5.25), nous utilisons la transformation suivante

$$p \rightarrow \rho = \frac{1}{\kappa} \arctan(p\sqrt{\alpha}), \quad (5.27)$$

où $\kappa = m\omega\hbar\sqrt{\alpha}$ et la valeur de ρ change dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2\kappa}, +\frac{\pi}{2\kappa}[$ selon les valeurs de p dans l'intervalle $]-\infty, +\infty[$.

Alors, la nouvelle forme de l'équation (5.25) sera réécrite comme

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{2\kappa\gamma}{\alpha} \tan(\kappa\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} + \left(\frac{\kappa^2\gamma(\alpha + \gamma) - \alpha(1 - \kappa\sqrt{\alpha})}{\alpha^2} \right) \tan^2(\kappa\rho) + \left(\varepsilon + \frac{\kappa^2\gamma}{\alpha} \right) \right] \phi(\rho) = 0, \quad (5.28)$$

avec

$$\varepsilon = \frac{E^2 - m^2c^4}{c^2} + m\omega\hbar. \quad (5.29)$$

Pour simplifier l'équation (5.28), nous utilisons l'ansatz suivant

$$\phi(\rho) = (1 - q^2)^{\frac{1}{2}(\lambda + \frac{\gamma}{\alpha})} f(q), \quad (5.30)$$

où λ est une constante à déterminer et $q = \sin(\kappa\rho)$.

Au moyen de cette substitution (5.30), l'équation différentielle pour $f(q)$ (5.28) réduira au type de Gegenbauer

$$\left[(1 - q^2) \frac{\partial^2}{\partial q^2} - (2\lambda + 1) q \frac{\partial}{\partial q} + n(n + 2\lambda) \right] f(q) = 0, \quad (5.31)$$

où λ et n (un entier non négatif) vérifient

$$\begin{cases} \lambda(\lambda - 1) = \frac{1}{\kappa\sqrt{\alpha}} \left(\frac{1}{\kappa\sqrt{\alpha}} - 1 \right) \\ \frac{\varepsilon}{\kappa^2} - \lambda = n(n + 2\lambda) \end{cases}. \quad (5.32)$$

De la première relation de (5.32), on peut déduire alors la valeur acceptée de λ par

$$\lambda = \frac{1}{m\omega\hbar\alpha}. \quad (5.33)$$

Finalement, la solution exacte de l'équation (5.31) peut être exprimée par le polynôme de Gegenbauer comme

$$f(q) = \Lambda C_n^\lambda(q), \quad (5.34)$$

avec Λ est une constante de normalisation.

Par conséquent, l'expression de $\phi(\rho)$ devient

$$\phi_n(\rho) = \Lambda (1 - q^2)^{\frac{1}{2}(\lambda + \frac{\gamma}{\alpha})} C_n^\lambda(q) \mathbb{V}, \quad (5.35)$$

ou avec l'ancienne variable p comme

$$\phi_n(p) = \Lambda (1 + \alpha p^2)^{-\frac{1}{2}(\lambda + \frac{\gamma}{\alpha})} C_n^\lambda\left(\frac{\sqrt{\alpha}p}{\sqrt{(1 + \alpha p^2)}}\right) \mathbb{V}, \quad (5.36)$$

où \mathbb{V} est un vecteur constant de dimension (3×1) .

Lorsque, on substitue les expressions (5.29) et (5.33) dans la deuxième relation de (5.32), il est facile de montrer que le spectre énergétique E_n de l'oscillateur du DKP modifié par la présence de la longueur minimale est donné par

$$E_n = \pm mc^2 \sqrt{1 + 2n \frac{\omega\hbar}{mc^2} + \alpha \frac{\omega^2 \hbar^2 n^2}{c^2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.37)$$

qui peut être écrit sous la forme suivante

$$E_n = \pm mc^2 \sqrt{1 + 2n \frac{\hbar\Omega_n}{mc^2}}, \quad \text{avec} \quad \Omega_n = \omega \left(1 + \alpha \frac{\hbar\omega mn}{2}\right). \quad (5.38)$$

Il est remarquable de noter que, dans l'expression de spectre énergétique du système considéré, la fréquence de l'oscillateur du DKP contient une correction supplémentaire qui dépend du paramètre de déformation α et sa déviation augmente rapidement avec le nombre quantique n . Cet effet est dû essentiellement à la modification de l'algèbre de Heisenberg standard. Nous

notons également que, ce résultat explique le confinement au secteur de haute énergie. En d'autre terme, cette expression est connue en théorie noncommutative, où la déformation de l'espace affecte les résultats physiques [11][35]. Cependant, la forme de spectre énergétique peut être testée, en utilisant la limite $\alpha \rightarrow 0$, nous obtenons le résultat de l'oscillateur de DKP ordinaire.

Maintenant, pour déduire les autres composantes de la fonction d'onde $\tilde{\Psi}(p)$, tenant en compte la propriété de polynôme Gegenbauer suivante [51]

$$\frac{d}{dq} C_n^\lambda(q) = 2\lambda C_{n-1}^{\lambda+1}(q), \quad (5.39)$$

et par un calcul direct, il est facile d'obtenir la solution finale suivante

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \Phi \\ \Theta \end{pmatrix} = \Lambda (1 + \alpha p^2)^{-\frac{1}{2}(\lambda + \frac{\gamma}{\alpha})} \left[M C_n^\lambda \left(\frac{\sqrt{\alpha} p}{\sqrt{(1 + \alpha p^2)}} \right) + N(p) C_{n-1}^{\lambda+1} \left(\frac{\sqrt{\alpha} p}{\sqrt{(1 + \alpha p^2)}} \right) \right], \quad (5.40)$$

avec M et $N(p)$ sont des vecteurs de (9×1) composantes définies comme

$$M = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{E}{mc^2} \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{V} \quad \text{and} \quad N(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ \frac{1}{mc\sqrt{\alpha(1 + \alpha p^2)}} \end{pmatrix} \otimes \mathbb{V}. \quad (5.41)$$

Avant de terminer cette partie, il est utile de déterminer la constante de normalisation Λ , en appliquant la condition de normalisation suivante

$$\int \frac{dp}{(1 + \alpha p^2)^{1 - \frac{\gamma}{\alpha}}} \bar{\Psi} \beta^0 \Psi = 1, \quad (5.42)$$

qui peut aussi être écrite selon les composantes du spineur Ψ comme suit

$$\int \frac{dp}{(1 + \alpha p^2)^{1 - \frac{\gamma}{\alpha}}} 2\Re [A_1^* B_1 + A_2^* B_2 + A_3^* B_3] = 1. \quad (5.43)$$

En substituant (5.40) dans (5.43) et utilisant l'identité suivante [51]

$$\int_{-1}^{+1} dq (1 - q^2)^{\nu - \frac{1}{2}} [C_n^\nu(q)]^2 = \frac{\pi 2^{1-2\nu} \Gamma(2\nu + n)}{n! (n + \nu) [\Gamma(\nu)]^2}, \quad (5.44)$$

nous obtenons

$$\Lambda = \frac{2^{\lambda-1} \alpha^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{3\pi}} \left[\frac{E}{mc^2} \frac{\Gamma(2\lambda + n)}{n! (n + \lambda) [\Gamma(\lambda)]^2} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (5.45)$$

5.2.2 Cas de l'oscillateur de DKP pour spin-0

Dans ce cas, nous procédons de la même manière que dans le cas de spin 1, en mettant $\tilde{\Psi}(p)^T = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)$. L'équation du système (5.21) est réduite au système des équations couplées suivant

$$c \left[p - im\omega\hbar \left((1 + \alpha p^2) \frac{\partial}{\partial p} + \gamma p \right) \right] \eta_1 + mc^2 \eta_3 = 0, \quad (5.46)$$

$$mc^2 \eta_2 = E \eta_1, \quad (5.47)$$

$$-c \left[p + im\omega\hbar \left((1 + \alpha p^2) \frac{\partial}{\partial p} + \gamma p \right) \right] \eta_3 + mc^2 \eta_1 = E \eta_2, \quad (5.48)$$

et les composantes $\eta_4 = \eta_5 = 0$.

Selon cette correspondance $\eta_1 \rightarrow \phi$, $\eta_2 \rightarrow \Phi$, $\eta_3 \rightarrow \Theta$ et $(\eta_4, \eta_5) \rightarrow C_1$, la solution du système (5.46), (5.47) et (5.48), sera écrite comme

$$\begin{pmatrix} \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{mc^2} \begin{pmatrix} E \\ -c \left(p + m\omega\hbar \left((1 + \alpha p^2) \frac{\partial}{\partial p} + \gamma p \right) \right) \end{pmatrix} \otimes \eta_1, \quad (5.49)$$

avec

$$\eta_1(p) = \Lambda (1 + \alpha p^2)^{-\frac{1}{2}(\lambda + \frac{\gamma}{\alpha})} C_n^\lambda \left(\frac{\sqrt{\alpha} p}{\sqrt{(1 + \alpha p^2)}} \right). \quad (5.50)$$

Suivant les mêmes étapes que dans le cas précédent, on parvient au résultat final suivant

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \Lambda (1 + \alpha p^2)^{-\frac{1}{2}(\lambda + \frac{\gamma}{\alpha})} \left[KC_n^\lambda \left(\frac{\sqrt{\alpha} p}{\sqrt{(1 + \alpha p^2)}} \right) + L(p) C_{n-1}^{\lambda+1} \left(\frac{\sqrt{\alpha} p}{\sqrt{(1 + \alpha p^2)}} \right) \right], \quad (5.51)$$

avec

$$K = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{E}{mc^2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ \frac{1}{mc\sqrt{\alpha(1+\alpha p^2)}} \end{pmatrix}. \quad (5.52)$$

Pour ce cas de spin 0, la constante de normalisation Λ est

$$\Lambda = \frac{2^{\lambda-1}\alpha^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{E}{mc^2} \frac{\Gamma(2\lambda+n)}{n!(n+\lambda)[\Gamma(\lambda)]^2} \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (5.53)$$

où nous avons utilisé la condition de normalisation suivante

$$\int \frac{dp}{(1+\alpha p^2)^{1-\frac{2}{\alpha}}} 2\Re[\eta_1^*\eta_2] = 1, \quad (5.54)$$

et l'identité (5.44).

5.3 L'oscillateur de DKP à trois dimensions en présence de la longueur minimale

Dans cette partie, nous allons généraliser l'application précédente, en résolvant l'équation de l'oscillateur du DKP à trois dimensions dans le formalisme de la mécanique quantique avec un principe d'incertitude généralisé.

D'après l'équation de l'oscillateur du DKP (2.10) à trois dimensions qui est analogue à celle de l'oscillateur de Dirac, en employant la substitution non-minimale ($\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - im\omega n^0 \mathbf{r}$) [33] dans l'espace commutatif, qui est donnée par

$$[c\boldsymbol{\beta} \cdot (\mathbf{p} - im\omega n^0 \mathbf{r}) + mc^2] \Psi = i\hbar\beta^0 \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (5.55)$$

et la représentation (5.7) des opérateurs X_i et P_j dans l'espace des moments lorsque les deux paramètres de déformations α et γ sont nuls, où en exprimant les opérateurs X_i et P_j en termes des opérateurs de coordonnées commutatives et leurs opérateurs du moments sous la forme

$$\mathbf{r} \rightarrow (1 + \alpha \mathbf{p}^2) \mathbf{r} \quad \text{et} \quad \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}, \quad (5.56)$$

l'équation stationnaire de l'oscillateur du DKP modifiée s'écrit

$$[c\boldsymbol{\beta} \cdot (\mathbf{p} - im\omega\eta^0 (1 + \alpha\mathbf{p}^2) \mathbf{r}) + mc^2] \tilde{\Psi}(\mathbf{p}) = E\beta^0 \tilde{\Psi}(\mathbf{p}). \quad (5.57)$$

où $\Psi(\mathbf{p}, t) = e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \tilde{\Psi}(\mathbf{p})$ et $\mathbf{r} = i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial p_x}, \frac{\partial}{\partial p_y}, \frac{\partial}{\partial p_z} \right)$.

On note ici que, les composantes de la fonction d'onde $\Psi(\mathbf{p})$ dans l'équation (5.57) sont simultanément des fonctions propres de J^2 et J_z et respectivement avec les valeurs propres $J(J+1)$, M , où le moment angulaire total $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ qui commute avec le potentiel externe de l'équation (5.57) et avec β^0 est une constante du mouvement.

5.3.1 Cas du spin-0

Dans le cas d'une particule scalaire de spin 0, on note que la fonction d'onde $\Psi(\mathbf{p})$ de l'équation (5.57) a toujours la même forme (2.12) que le cas de l'oscillateur de DKP (spin-0) ordinaire au premier chapitre

$$\Psi(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \Phi(\mathbf{p}) \\ i\psi(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \text{ avec } \Phi \equiv \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}, \text{ et } \psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \quad (5.58)$$

En substituant cette forme (5.58) dans l'équation (5.57), nous obtenons le système des équations couplées suivant

$$mc^2\Phi_1 = E\Phi_2 + ic(\mathbf{p} + im\omega(1 + \alpha\mathbf{p}^2)\mathbf{r}) \cdot \psi, \quad (5.59)$$

$$mc^2\psi = ic(\mathbf{p} - im\omega(1 + \alpha\mathbf{p}^2)\mathbf{r}) \Phi_1, \quad (5.60)$$

$$mc^2\Phi_2 = E\Phi_1. \quad (5.61)$$

Lorsque ce système est découplé en faveur de Φ_1

$$c^2 \left[(1 - 3m\omega\hbar\alpha) \mathbf{p}^2 + m^2\omega^2 (1 + \alpha\mathbf{p}^2)^2 \mathbf{r}^2 + 2im^2\omega^2\hbar\alpha (1 + \alpha\mathbf{p}^2) (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) - 3m\omega\hbar \right] \Phi_1 = (E^2 - m^2c^4) \Phi_1, \quad (5.62)$$

le problème peut être converti directement au cas de l'oscillateur de Klein-Gordon, où la limite non relativiste est donnée par

$$E^{nr} \Phi_1 = \left[\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 (1 + \alpha \mathbf{p}^2)^2 \mathbf{r}^2 + i m \omega^2 \hbar \alpha (1 + \alpha \mathbf{p}^2) (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) - \frac{3}{2} \omega \hbar (1 + \alpha \mathbf{p}^2) \right] \Phi_1, \quad (5.63)$$

avec $E^{nr} = E - mc^2$.

Afin d'obtenir la solution exacte de l'équation (5.57), nous introduisons les coordonnées sphériques dans l'espace des moments [53], où la forme séparée pour les cinq composantes de la fonction d'onde (5.58) est donnée par [33]

$$\Psi_{JM}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} F_{nJ}(p) Y_{JM}(\Omega) \\ G_{nJ}(p) Y_{JM}(\Omega) \\ i \sum_L H_{nJL}(p) Y_{JL1}^M(\Omega) \end{pmatrix}, \quad (5.64)$$

avec $F_{nJ}(p)$, $G_{nJ}(p)$ et $H_{nJL}(p)$ sont des fonctions d'ondes radiales, $Y_{JM}(\Omega)$ sont des harmoniques sphériques d'ordre J , et $Y_{JL1}^M(\Omega)$ sont des vecteurs harmoniques sphériques normalisés, où $L = J \pm 1, J$.

On note ici, qu'il est très important d'achever la définition de la parité de la fonction d'onde, par l'opérateur paritaire qui est donné par $\Pi = \eta^0 P^{(0)}$, où $P^{(0)}$ est l'opérateur de la "parité orbitale" ($P^{(0)} f(p) = f(-p)$), et la forme explicite de $\eta^0 = 2\beta^{0^2} - 1$, pour arriver a

$$\Pi \Psi_{JM}(r) = \eta^0 P^{(0)} \Psi_{JM}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} P^{(0)} \Phi(\mathbf{p}) \\ -P^{(0)} \psi(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = (-1)^J \Psi_{JM}(\mathbf{p}). \quad (5.65)$$

Donc, à partir de cette définition paritaire (5.65), on conclut que la fonction d'onde $\Psi_{JM}(\mathbf{p})$ a une parité bien définie de $(-1)^J$.

Maintenant, lorsque on insère la forme de $\Psi_{JM}(\mathbf{p})$ dans (5.59), (5.60), (5.61) et en utilisant les propriétés des vecteurs harmoniques sphériques dans la représentation- p de l'espace des moments (voir l'annex).

Nous obtenons le système des équations couplées suivant

$$H = 0, \quad (5.66)$$

$$mc^2 G = EF, \quad (5.67)$$

$$mc^2 H_{-1} = ic\zeta_J \left[\hbar m\omega (1 + \alpha p^2) \left(\frac{d}{dp} + \frac{J+1}{p} \right) + p \right] F, \quad (5.68)$$

$$mc^2 H_{+1} = -ic\xi_J \left[\hbar m\omega (1 + \alpha p^2) \left(\frac{d}{dp} - \frac{J}{p} \right) + p \right] F, \quad (5.69)$$

$$mc^2 F - EG = ic \left[\xi_J \left(\hbar m\omega (1 + \alpha p^2) \left(\frac{d}{dp} + \frac{J+2}{p} \right) - p \right) H_{+1} - \zeta_J \left(\hbar m\omega (1 + \alpha p^2) \left(\frac{d}{dp} - \frac{J-1}{p} \right) - p \right) H_{-1} \right], \quad (5.70)$$

et

$$\xi_J = \sqrt{(J+1)/(2J+1)}, \quad \zeta_J = \sqrt{J/(2J+1)} \quad \text{et} \\ F_{nJ}(p) = F \quad G_{nJ}(p) = G \quad H_{nJJ}(p) = H \quad H_{nJJ\pm 1}(p) = H_{\pm 1}, \quad (5.71)$$

à partir des susdites équations, si nous insérons les équations (5.67), (5.68) et (5.69) dans l'équation (5.70), on obtient l'équation radiale différentielle suivante

$$\left[\left((1 + \alpha p^2) \frac{d}{dp} \right)^2 + (1 + \alpha p^2)^2 \left(\frac{2}{p} \frac{d}{dp} - \frac{J(J+1)}{p^2} \right) + \frac{3}{\hbar m\omega} (1 + \alpha p^2) - \frac{p^2}{(\hbar m\omega)^2} + \varepsilon \right] F(p) = 0, \quad (5.72)$$

avec

$$\varepsilon = \frac{E^2 - m^2 c^4}{(\hbar m\omega c)^2}. \quad (5.73)$$

Maintenant, pour simplifier les calculs, on introduit le changement de variable suivant

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arctan(p\sqrt{\alpha}). \quad (5.74)$$

pour que la nouvelle forme de l'équation (5.72) sera réécrite comme

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2\sqrt{\alpha}}{\tan(\sqrt{\alpha}\rho)} (1 + \tan^2(\sqrt{\alpha}\rho)) \frac{d}{d\rho} - \frac{J(J+1)\alpha}{\tan^2(\sqrt{\alpha}\rho)} (1 + \tan^2(\sqrt{\alpha}\rho))^2 + \left(\eta - \frac{\alpha}{\kappa^4} \right) \tan^2(\sqrt{\alpha}\rho) + (\varepsilon + \eta) \right] F(\rho) = 0, \quad (5.75)$$

avec

$$\kappa = \sqrt{\hbar m \omega \alpha}, \quad \eta = \frac{3}{\hbar m \omega}. \quad (5.76)$$

et au moyen de la substitution suivante

$$F(\rho) = (1 - q^2)^{\frac{\lambda}{2}} q^J f(q), \quad (5.77)$$

où λ est une constante à déterminer et $q = \sin(\sqrt{\alpha}\rho)$.

L'équation différentielle pour $f(q)$ peut être écrite comme

$$\left[(1 - q^2) \frac{d^2}{dq^2} + \left(\frac{2(J+1)}{q} - (2(\lambda + J) + 1)q \right) \frac{d}{dq} + \left(\frac{\varepsilon + \eta}{\alpha} - J(2J+1) - \lambda(2J+3) \right) \right] f = 0 \quad (5.78)$$

avec λ vérifie

$$\lambda(\lambda - 3) - J(J+1) + \frac{\eta}{\alpha} - \frac{1}{\kappa^4} = 0. \quad (5.79)$$

où les solutions de cette équation sont données par

$$\lambda = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + J(J+1) - \frac{\eta}{\alpha} + \frac{1}{\kappa^4}}. \quad (5.80)$$

De l'expression (5.77), il est remarquable de noter que la fonction $F(\rho)$ doit être non singulière à $q = \pm 1$, ce qui implique alors la valeur acceptée de λ est

$$\lambda = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} + J(J+1) - \frac{\eta}{\alpha} + \frac{1}{\kappa^4}}. \quad (5.81)$$

De plus, nous notons que l'équation (5.78) possède trois points singuliers $q = 0, 1, -1$.

Pour réduire cette équation (5.78) à une classe d'équations différentielles connues avec une solution polynomiale, nous utilisons un nouveau changement de variable $z = 2q^2 - 1$ et imposons

la condition suivante

$$\frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon + \eta}{\alpha} - J(2J + 1) - \lambda(2J + 3) \right) = n(n + a + b + 1), \quad (5.82)$$

où n est un entier non négatif et a, b sont définis par

$$a = \lambda - \frac{3}{2} \quad b = J + \frac{1}{2}, \quad (5.83)$$

dans l'équation (5.78), pour obtenir la forme suivante

$$(1 - z^2) \frac{d^2 f}{dz^2} + [(b - a) - (a + b + 2)z] \frac{df}{dz} + n(n + a + b + 1)f = 0. \quad (5.84)$$

où la solution exacte est donnée par le polynôme de Jacobi

$$f(z) = P_n^{(a,b)}(z). \quad (5.85)$$

En retournant à l'ancienne variable p , la fonction d'onde radiale $F_{nJ}(p)$ est réécrite comme

$$F(p) = C (1 + \alpha p^2)^{-\left(\frac{\lambda+J}{2}\right)} (\alpha p^2)^{\frac{J}{2}} P_n^{\left(\lambda-\frac{3}{2}, J+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{\alpha p^2 - 1}{\alpha p^2 + 1} \right), \quad (5.86)$$

où C est une constante de normalisation qui sera déterminée ultérieurement.

En substituant les équations (5.73), (5.76) et (5.83) dans la condition (5.82), on obtient le spectre énergétique de l'oscillateur DKP à 3-dimensions en présence de la longueur minimale par

$$E_{n,J}^2 = m^2 c^4 + \hbar m \omega c^2 \left[2 \left(2n + J + \frac{3}{2} \right) \sqrt{1 - 3\hbar m \omega \alpha + \left(\frac{9}{4} + J(J + 1) \right) (\hbar m \omega \alpha)^2} \right. \\ \left. + \hbar m \omega \alpha \left(\left(2n + J + \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{9}{4} + J(J + 1) \right) - 3 \right], \quad (5.87)$$

où n est le nombre quantique principal.

A cette expression, il est remarquable de noter que le spectre énergétique contient une correction supplémentaire qui dépend du paramètre de déformation α et sa déviation grandit

rapidement avec n^2 . Cet effet est dû à la modification de l'algèbre standard de Heisenberg qui affecte les résultats physiques comme dans le cas de la théorie non commutative [11][35].

En outre, cette forme de spectre énergétique qui explique le confinement au secteur de haute énergie, peut être testée; en utilisant la limite $\alpha \rightarrow 0$, nous obtenons le résultat exact de l'oscillateur ordinaire de DKP [33]. Ainsi, si nous nous limitons au cas unidimensionnel, nous aurons le même résultat que le cas de l'oscillateur DKP à une dimension en présence de la longueur minimale dans l'application précédente [65].

Maintenant, il est facile d'utiliser la propriété suivante du polynôme de Jacobi [51] pour déterminer les autres composantes de la fonction d'onde $\Psi_{nJ}(\mathbf{p})$.

$$\frac{dP_n^{(a,b)}(y)}{dy} = \frac{1}{2} (n + a + b + 1) P_{n-1}^{(a+1,b+1)}(y). \quad (5.88)$$

Où le résultat finale est donné par

$$G = C \frac{E}{mc^2} (1 + \alpha p^2)^{-\left(\frac{\lambda+J}{2}\right)} (\alpha p^2)^{\frac{J}{2}} P_n^{\left(\lambda-\frac{3}{2}, J+\frac{1}{2}\right)}, \quad (5.89)$$

$$H = 0, \quad (5.90)$$

$$\begin{aligned} H_{-1} = & iC \zeta_J \frac{\hbar\omega}{c} (1 + \alpha p^2)^{-\left(\frac{\lambda+J}{2}\right)} (\alpha p^2)^{\frac{J}{2}} \\ & \times \left[\left((J+1-\lambda) \alpha p + \frac{p}{\hbar m \omega} + \frac{2J+1}{p} \right) P_n^{\left(\lambda-\frac{3}{2}, J+\frac{1}{2}\right)} + \left(\frac{2(n+\lambda+J)\alpha p}{(1+\alpha p^2)} \right) P_{n-1}^{\left(\lambda-\frac{1}{2}, J+\frac{3}{2}\right)} \right], \end{aligned} \quad (5.91)$$

$$\begin{aligned} H_{+1} = & iC \xi_J \frac{\hbar\omega}{c} (1 + \alpha p^2)^{-\left(\frac{\lambda+J}{2}\right)} (\alpha p^2)^{\frac{J}{2}} \\ & \times \left[\left((J+\lambda) \alpha p - \frac{p}{\hbar m \omega} \right) P_n^{\left(\lambda-\frac{3}{2}, J+\frac{1}{2}\right)} - \left(\frac{2(n+\lambda+J)\alpha p}{(1+\alpha p^2)} \right) P_{n-1}^{\left(\lambda-\frac{1}{2}, J+\frac{3}{2}\right)} \right]. \end{aligned} \quad (5.92)$$

Avant de terminer cette application, nous déterminons la constante de normalisation C par la condition de normalisation suivante

$$\int \frac{d^3p}{(1 + \alpha p^2)} \bar{\Psi} \beta^0 \Psi = 1. \quad (5.93)$$

qui peut aussi être écrite selon les composantes du spineur Ψ

$$\int \frac{p^2 dp}{(1 + \alpha p^2)} \Re [F^* G] = \frac{1}{2}. \quad (5.94)$$

Insérant (5.86) et (5.89) dans (5.94) et en utilisant l'identité suivante

$$\int_{-1}^{+1} dy (1 - y)^a (1 + y)^b \left[P_n^{(a,b)}(y) \right]^2 = \frac{2^{a+b+1} \Gamma(a + n + 1) \Gamma(b + n + 1)}{n! (a + b + 1 + 2n) \Gamma(a + b + n + 1)}, \quad (5.95)$$

nous obtenons

$$C = \alpha^{\frac{3}{4}} \left[\frac{mc^2 n! (2n + \lambda + j) \Gamma(n + \lambda + j)}{E \Gamma(n + \lambda - \frac{1}{2}) \Gamma(n + j + \frac{3}{2})} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.96)$$

5.3.2 Cas du spin-1

Passons de la même manière que dans le cas de spin 0, sauf que la fonction d'onde dans ce cas de spin 1 est écrite comme un vecteur de dix composantes notées par $\Psi(\mathbf{p})^T = (i\varphi, \mathbf{A}(\mathbf{p}), \mathbf{B}(\mathbf{p}), \mathbf{C}(\mathbf{p}))$, où A_i , B_i et C_i $i = 1, 2, 3$ sont respectivement les composantes des vecteurs $\mathbf{A}(\mathbf{p})$, $\mathbf{B}(\mathbf{p})$ et $\mathbf{C}(\mathbf{p})$.

En substituant cette forme de la fonction d'onde $\Psi(\mathbf{p})$ dans l'équation (5.57), nous obtenons le système des équations couplées suivant

$$mc^2 \varphi = -c\mathbf{p}^- \cdot \mathbf{B}, \quad (5.97)$$

$$mc^2 \mathbf{A} = E\mathbf{B} - c\mathbf{p}^+ \times \mathbf{C}, \quad (5.98)$$

$$mc^2 \mathbf{B} = E\mathbf{A} + c\mathbf{p}^+ \varphi, \quad (5.99)$$

$$mc^2 \mathbf{C} = -c\mathbf{p}^- \times \mathbf{A}, \quad (5.100)$$

avec

$$\mathbf{p}^+ = (\mathbf{p} + im\omega (1 + \alpha \mathbf{p}^2) \mathbf{r}) \quad \text{et} \quad \mathbf{p}^- = (\mathbf{p} - im\omega (1 + \alpha \mathbf{p}^2) \mathbf{r}). \quad (5.101)$$

Afin de découpler le susdit système, nous éliminons φ , \mathbf{B} et \mathbf{C} en terme de \mathbf{A} , et nous obtenons

$$(E^2 - m^2c^4) \mathbf{A} = -c^2 \mathbf{p}^+ \times (\mathbf{p}^- \times \mathbf{A}) + c^2 \mathbf{p}^+ (\mathbf{p}^- \cdot \mathbf{A}) - \frac{1}{m^2} \mathbf{p}^+ [\mathbf{p}^- \cdot [\mathbf{p}^+ \times (\mathbf{p}^- \times \mathbf{A})]]. \quad (5.102)$$

Par un calcul direct, l'évaluation des deux premiers termes de l'équation (5.102) donne

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^+ \times (\mathbf{p}^- \times \mathbf{A}) &= \mathbf{p} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{p}^2 \mathbf{A} + m^2 \omega^2 (1 + \alpha \mathbf{p}^2)^2 [\mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{r}^2 \mathbf{A}] \\ &\quad + 2im^2 \omega^2 \hbar \alpha (1 + \alpha \mathbf{p}^2) [\mathbf{r} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}) - (i\hbar + \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{A}] \\ &\quad + m\omega (1 + \alpha \mathbf{p}^2) \left[2\hbar + \frac{1}{\hbar} \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \right] \mathbf{A}, \end{aligned} \quad (5.103)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^+ (\mathbf{p}^- \cdot \mathbf{A}) &= \mathbf{p} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}) + m^2 \omega^2 (1 + \alpha \mathbf{p}^2)^2 \mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}) \\ &\quad + 2im^2 \omega^2 \hbar \alpha (1 + \alpha \mathbf{p}^2) \mathbf{p} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}) - m\omega (1 + \alpha \mathbf{p}^2) \left[\hbar + \frac{1}{\hbar} \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \right] \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (5.104)$$

En substituant les derniers termes de l'équation (5.102), on obtient

$$\begin{aligned} (E^2 - m^2c^4) \mathbf{A} &= c^2 \left[\mathbf{p}^2 + m^2 \omega^2 (1 + \alpha \mathbf{p}^2)^2 \mathbf{r}^2 + 2m^2 \omega^2 \alpha (1 + \alpha \mathbf{p}^2) [i\hbar (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}] \right. \\ &\quad \left. - m\omega (1 + \alpha \mathbf{p}^2) \left[3\hbar + \frac{2}{\hbar} \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \right] \right] \mathbf{A} - \frac{1}{m^2} \mathbf{p}^+ [\mathbf{p}^- \cdot [\mathbf{p}^+ \times (\mathbf{p}^- \times \mathbf{A})]], \end{aligned} \quad (5.105)$$

où \mathbf{L} et \mathbf{S} sont respectivement les moments angulaire d'orbite et de spin.

Dans la limite non relativiste, le dernier terme de (5.105) est négligeable, puisqu'il est de l'ordre $\frac{1}{m^3}$, de sorte que l'expression de \mathbf{A} devient

$$\begin{aligned} E^{nr} \mathbf{A} &= \left[\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 (1 + \alpha \mathbf{p}^2)^2 \mathbf{p}^2 + m\omega^2 \hbar \alpha (1 + \alpha \mathbf{p}^2) [i\hbar (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}] \right. \\ &\quad \left. - \omega (1 + \alpha \mathbf{p}^2) \left[\frac{3}{2} \hbar + \frac{1}{\hbar} \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \right] \right] \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (5.106)$$

Nous remarquons ici que l'expression (5.106) caractérise l'oscillateur harmonique habituel plus un accouplement spin-orbite et une correction supplémentaire d'interaction (spin-orbite), qui dépend du paramètre de déformation α . Par conséquent, cette correction est due à l'influence de la déformation spatiale sur le système physique avec spin comme le cas de l'oscillateur de Dirac avec l'incertitude minimale non nulle [29][28]. Nous notons aussi que cette correction

est absente dans le premier cas de l'oscillateur de DKP du spin 0 en présence de la longueur minimale (5.63) comme le cas de KG.

Maintenant, pour obtenir une solution exacte de l'équation (5.57), dans le cas de spin 1, nous utilisons la forme spatiale dans l'espace des moments pour les dix composantes de la fonction d'onde $\Psi(\mathbf{p})$ qui sont séparées comme suit

$$\Psi_{JM}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} i\phi_{nJ}(p) Y_{JM}(\Omega) \\ \sum_L F_{nJL}(p) Y_{JL1}^M(\Omega) \\ \sum_L G_{nJL}(p) Y_{JL1}^M(\Omega) \\ \sum_L H_{nJL}(p) Y_{JL1}^M(\Omega) \end{pmatrix}. \quad (5.107)$$

Avec l'opérateur de parité est définie par $\Pi = \eta^0 P^{(0)}$, étant donné que la parité de Y_{JM} et $Y_{J,J,1}^M$, est $(-1)^J$ et pour ceux de $Y_{J,J+1,1}^M$, et $Y_{J,J-1,1}^M$, est $(-1)^{J+1}$, la forme paritaire s'écrit alors comme suit

$$\Pi \Psi_{JM}(\mathbf{p}) = \eta^0 P^{(0)} \Psi_{JM}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -iP^{(0)}\varphi \\ P^{(0)}\mathbf{A}(\mathbf{p}) \\ P^{(0)}\mathbf{B}(\mathbf{p}) \\ -P^{(0)}\mathbf{C}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{cases} (-1)^J \Psi_{JM}(\mathbf{p}) \\ (-1)^{J+1} \Psi_{JM}(\mathbf{p}) \end{cases}. \quad (5.108)$$

La substitution de la forme $\Psi_{JM}(\mathbf{p})$ (5.107) dans l'équation.(5.97), (5.98), (5.99) et (5.100) mène à dix équations radiales différentielles couplées qui peuvent être réduites aux deux classes découplées et associées aux parités $(-1)^J$ (*naturelle*) et $(-1)^{J+1}$ (*non naturelle*), comme ils sont exposées dans [33][68].

Pour les états de parité naturelle $(-1)^J$, les équations radiales différentielles appropriées

sont

$$mc^2 G_0 = EF_0, \quad (5.109)$$

$$mc^2 H_{-1} = -ic\xi_J \left(\hbar m\omega (1 + \alpha p^2) \left(\frac{d}{dp} + \frac{J+1}{p} \right) + p \right) F_0, \quad (5.110)$$

$$mc^2 H_{+1} = -ic\zeta_J \left(\hbar m\omega (1 + \alpha p^2) \left(\frac{d}{dp} - \frac{J}{p} \right) + p \right) F_0, \quad (5.111)$$

$$mc^2 F_0 - EG_0 = ic \left[\xi_J \left(\hbar m\omega (1 + \alpha p^2) \left(\frac{d}{dp} - \frac{J-1}{p} \right) - p \right) H_{-1} + \zeta_J \left(\hbar m\omega (1 + \alpha p^2) \left(\frac{d}{dp} + \frac{J+2}{p} \right) - p \right) H_{+1} \right], \quad (5.112)$$

avec la notation suivante

$$R_{nJJ}(p) = R_0 \quad R_{nJJ\pm 1}(p) = R_{\pm 1} \quad R \equiv F, G, H. \quad (5.113)$$

A ce stade, nous éliminons G_0 , H_{+1} , H_{-1} , en faveur de F_0 , pour obtenir l'équation différentielle du second ordre suivante

$$\left[\left((1 + \alpha p^2) \frac{d}{dp} \right)^2 + (1 + \alpha p^2)^2 \left(\frac{2}{p} \frac{d}{dp} - \frac{J(J+1)}{p^2} \right) + \frac{1}{\hbar m\omega} (1 + \alpha p^2) - \frac{p^2}{(\hbar m\omega)^2} + \varepsilon \right] F_0 = 0. \quad (5.114)$$

Par un calcul simple, il est facile de résoudre cette équation et d'obtenir les solutions exactes

de la fonction d'onde (5.114) associée à la parité $(-1)^J$

$$F_0 = C^\lambda (1 + \alpha p^2)^{-\left(\frac{\lambda'+J}{2}\right)} (\alpha p^2)^{\frac{J}{2}} P_n^{\left(\lambda' - \frac{3}{2}, J + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{\alpha p^2 - 1}{\alpha p^2 + 1}\right), \quad (5.115)$$

$$G_0 = C^\lambda \frac{E}{mc^2} (1 + \alpha p^2)^{-\left(\frac{\lambda'+J}{2}\right)} (\alpha p^2)^{\frac{J}{2}} P_n^{\left(\lambda' - \frac{3}{2}, J + \frac{1}{2}\right)}, \quad (5.116)$$

$$H_{-1} = -iC^\lambda \xi_J \frac{\hbar\omega}{c} (1 + \alpha p^2)^{-\left(\frac{\lambda'+J}{2}\right)} (\alpha p^2)^{\frac{J}{2}} \times \left[\left((J + 1 - \lambda') \alpha p + \frac{p}{\hbar m \omega} + \frac{2J + 1}{p} \right) P_n^{\left(\lambda' - \frac{3}{2}, J + \frac{1}{2}\right)} + \left(\frac{2(n + \lambda' + J) \alpha p}{(1 + \alpha p^2)} \right) P_{n-1}^{\left(\lambda' - \frac{1}{2}, J + \frac{3}{2}\right)} \right], \quad (5.117)$$

$$H_{+1} = iC^\lambda \zeta_J \frac{\hbar\omega}{c} (1 + \alpha p^2)^{-\left(\frac{\lambda'+J}{2}\right)} (\alpha p^2)^{\frac{J}{2}} \times \left[\left((J + \lambda') \alpha p - \frac{p}{\hbar m \omega} \right) P_n^{\left(\lambda' - \frac{3}{2}, J + \frac{1}{2}\right)} - \left(\frac{2(n + \lambda' + J) \alpha p}{(1 + \alpha p^2)} \right) P_{n-1}^{\left(\lambda' - \frac{1}{2}, J + \frac{3}{2}\right)} \right]. \quad (5.118)$$

En utilisant les transformations (5.74) et (5.77) de la même manière que (5.72) dans l'équation (5.114) avec λ' vérifie

$$\lambda' (\lambda' - 3) - J(J + 1) + \frac{1}{\hbar m \omega \alpha} - \frac{1}{\kappa^4} = 0. \quad (5.119)$$

Suivant le même raisonnement que dans le cas de spin 0, la racine acceptée de l'équation (5.119) est donnée par

$$\lambda' = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} + J(J + 1) - \frac{1}{\hbar m \omega \alpha} + \frac{1}{\kappa^4}}, \quad (5.120)$$

et le spectre énergétique correspondant est

$$E_{n,J}^2 = m^2 c^4 + \hbar m \omega c^2 \left[2 \left(2n + J + \frac{3}{2} \right) \sqrt{1 - \hbar m \omega \alpha + \left(\frac{9}{4} + J(J + 1) \right) (\hbar m \omega \alpha)^2} + \hbar m \omega \alpha \left(\left(2n + J + \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{9}{4} + J(J + 1) \right) - 1 \right]. \quad (5.121)$$

A cette parité, la constante de normalisation C^λ peut être donnée par

$$C^\lambda = \alpha^{\frac{3}{4}} \left[\frac{m c^2 n! (2n + \lambda' + j) \Gamma(n + \lambda' + j)}{E \Gamma(n + \lambda' - \frac{1}{2}) \Gamma(n + j + \frac{3}{2})} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (5.122)$$

où nous avons utilisé la condition de normalisation suivante

$$\int \frac{p^2 dp}{(1 + \alpha p^2)} \Re [F_0^* G_0] = \frac{1}{2}. \quad (5.123)$$

Pour les états de parité non-naturelle $(-1)^{J+1}$, le système approprié est

$$mc^2 F_{+1} - EG_{+1} = ic\zeta_J \left(\hbar m\omega (1 + \alpha p^2) \left(\frac{d}{dp} - \frac{J}{p} \right) - p \right) H_0, \quad (5.124)$$

$$mc^2 F_{-1} - EG_{-1} = ic\xi_J \left(\hbar m\omega (1 + \alpha p^2) \left(\frac{d}{dp} + \frac{J+1}{p} \right) - p \right) H_0, \quad (5.125)$$

$$\begin{aligned} imcH_0 &= \zeta_J \left(\hbar m\omega (1 + \alpha p^2) \left(\frac{d}{dp} + \frac{J+2}{p} \right) + p \right) F_{+1} \\ &+ \xi_J \left(\hbar m\omega (1 + \alpha p^2) \left(\frac{d}{dp} - \frac{J-1}{p} \right) + p \right) F_{-1}, \end{aligned} \quad (5.126)$$

$$mc^2 G_{+1} - EF_{+1} = ic\xi_J \left(\hbar m\omega (1 + \alpha p^2) \left(\frac{d}{dp} - \frac{J}{p} \right) - p \right) \phi, \quad (5.127)$$

$$mc^2 G_{-1} - EF_{-1} = -ic\zeta_J \left(\hbar m\omega (1 + \alpha p^2) \left(\frac{d}{dp} + \frac{J+1}{p} \right) - p \right) \phi, \quad (5.128)$$

$$\begin{aligned} imc\phi &= \xi_J \left(\hbar m\omega (1 + \alpha p^2) \left(\frac{d}{dp} + \frac{J+2}{p} \right) + p \right) G_{+1} \\ &- \zeta_J \left(\hbar m\omega (1 + \alpha p^2) \left(\frac{d}{dp} - \frac{J-1}{p} \right) + p \right) G_{-1}. \end{aligned} \quad (5.129)$$

Pour atteindre les solutions exactes des équations radiales différentielles associées à la parité $(-1)^{J+1}$, nous écrivons les équations (5.124), (5.125), (5.126), (5.127), (5.128), (5.129) sous la forme condensé suivante

$$\begin{pmatrix} F_{+1} \\ G_{+1} \end{pmatrix} = \frac{-ic}{(E^2 - m^2 c^4)} \left(\hbar m\omega (1 + \alpha p^2) \left(\frac{d}{dp} - \frac{J}{p} \right) - p \right) \begin{pmatrix} \xi_J E & \zeta_J mc^2 \\ \xi_J mc^2 & \zeta_J E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ H_0 \end{pmatrix}, \quad (5.130)$$

$$\begin{pmatrix} F_{-1} \\ G_{-1} \end{pmatrix} = \frac{-ic}{(E^2 - m^2 c^4)} \left(\hbar m\omega (1 + \alpha p^2) \left(\frac{d}{dp} + \frac{J+1}{p} \right) - p \right) \begin{pmatrix} -\zeta_J E & \xi_J mc^2 \\ -\zeta_J mc^2 & \xi_J E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ H_0 \end{pmatrix}, \quad (5.131)$$

$$2(1 + \alpha p^2) \sqrt{J(J+1)} W E H_0 = \left[\left((1 + \alpha p^2) \frac{d}{dp} \right)^2 + (1 + \alpha p^2)^2 \left(\frac{2}{p} \frac{d}{dp} - \frac{J(J+1)}{p^2} \right) - \frac{3(1 + \alpha p^2)}{\hbar m \omega} - \frac{p^2}{(\hbar m \omega)^2} + \frac{E^2 - m^2 c^4}{(\hbar m \omega c)^2} \right] \phi, \quad (5.132)$$

$$2(1 + \alpha p^2) \sqrt{J(J+1)} W E \phi = \left[\left((1 + \alpha p^2) \frac{d}{dp} \right)^2 + (1 + \alpha p^2)^2 \left(\frac{2}{p} \frac{d}{dp} - \frac{J(J+1)}{p^2} \right) - \frac{(1 + \alpha p^2)}{\hbar m \omega} - \frac{p^2}{(\hbar m \omega)^2} + \frac{E^2 - m^2 c^4}{(\hbar m \omega c)^2} \right] H_0, \quad (5.133)$$

avec

$$W = \frac{\omega \hbar}{(\hbar m \omega c)^2} (1 + \hbar m \omega \alpha). \quad (5.134)$$

Maintenant, selon la procédure de diagonalisation

$$\begin{pmatrix} \phi \\ H_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\gamma(\gamma+1)}} \begin{pmatrix} (\gamma+1) & k \\ k & -(\gamma+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_+ \\ R_- \end{pmatrix}, \quad (5.135)$$

où

$$\gamma = \sqrt{1 + k^2} \quad \text{et} \quad k = 2\sqrt{J(J+1)} \frac{E}{m c^2} (1 + \hbar m \omega \alpha) \quad (5.136)$$

les deux équations radiales différentielles (5.132), (5.133), peuvent être découplées comme suit

$$\left[\left((1 + \alpha p^2) \frac{d}{dp} \right)^2 + (1 + \alpha p^2)^2 \left(\frac{2}{p} \frac{d}{dp} - \frac{J(J+1)}{p^2} \right) - \frac{(2 + \gamma)(1 + \alpha p^2)}{\hbar m \omega} - \frac{p^2}{(\hbar m \omega)^2} \right] R_+ = \frac{m^2 c^4 - E^2}{(\hbar m \omega c)^2} R_+, \quad (5.137)$$

$$\left[\left((1 + \alpha p^2) \frac{d}{dp} \right)^2 + (1 + \alpha p^2)^2 \left(\frac{2}{p} \frac{d}{dp} - \frac{J(J+1)}{p^2} \right) - \frac{(2 - \gamma)(1 + \alpha p^2)}{\hbar m \omega} - \frac{p^2}{(\hbar m \omega)^2} \right] R_- = \frac{m^2 c^4 - E^2}{(\hbar m \omega c)^2} R_-. \quad (5.138)$$

A cette parité, on résout les équations (5.137), (5.138) exactement de la même manière que l'équation (5.72) dans le cas de spin 0 en tenant compte les mêmes transformations (5.74),

(5.77). Où les fonctions d'ondes relativistes des spineurs R_+ , R_- sont données par le polynôme de Jacobi comme

$$R_+(p) = C_+ (1 + \alpha p^2)^{-\left(\frac{\lambda_+ + J}{2}\right)} (\alpha p^2)^{\frac{J}{2}} P_n^{\left(\lambda_+ - \frac{3}{2}, J + \frac{1}{2}\right)}\left(\frac{\alpha p^2 - 1}{\alpha p^2 + 1}\right), \quad (5.139)$$

$$R_-(p) = C_- (1 + \alpha p^2)^{-\left(\frac{\lambda_- + J}{2}\right)} (\alpha p^2)^{\frac{J}{2}} P_n^{\left(\lambda_- - \frac{3}{2}, J + \frac{1}{2}\right)}\left(\frac{\alpha p^2 - 1}{\alpha p^2 + 1}\right), \quad (5.140)$$

avec

$$\lambda_{\pm}(\lambda_{\pm} - 3) - J(J + 1) - \frac{(2 \pm \gamma)}{\hbar m \omega \alpha} - \frac{1}{(\hbar m \omega \alpha)^2} = 0. \quad (5.141)$$

Passant de la même manière que dans le cas de spin 0, les valeurs acceptées de λ_{\pm} pour l'équation (5.141) sont

$$\lambda_{\pm} = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} + J(J + 1) + \frac{(2 \pm \gamma)}{\hbar m \omega \alpha} + \frac{1}{(\hbar m \omega \alpha)^2}}. \quad (5.142)$$

et C_+ , C_- sont les constantes de normalisation.

Par un calcul direct, la détermination des autres composantes est simple et la solution finale

des équations associées à la parité $(-1)^{J+1}$ sont données par

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \phi \\ H_0 \\ F_+ \\ G_+ \\ F_- \\ G_- \end{pmatrix} &= \frac{\epsilon (\alpha p^2)^{\frac{J}{2}}}{\sqrt{2\gamma(\gamma+1)}} \left\{ C_+ (1 + \alpha p^2)^{-\left(\frac{\lambda_+ + J}{2}\right)} \begin{pmatrix} \frac{(\gamma+1)}{\epsilon} \\ \frac{k}{\epsilon} \\ [\xi_J E (\gamma + 1) + \zeta_J m c^2 k] \Gamma_+ \\ [\xi_J m c^2 (\gamma + 1) + \zeta_J E k] \Gamma_+ \\ [\zeta_J E (\gamma + 1) - \xi_J m c^2 k] \Lambda_+ \\ [\zeta_J m c^2 (\gamma + 1) - \xi_J E k] \Lambda_+ \end{pmatrix} P_n^{(\lambda_+ - \frac{3}{2}, J + \frac{1}{2})} \right. \\
&- \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ [\xi_J E (\gamma + 1) + \zeta_J m c^2 k] \sigma_+ \\ [\xi_J m c^2 (\gamma + 1) + \zeta_J E k] \sigma_+ \\ [-\zeta_J E (\gamma + 1) + \xi_J m c^2 k] \sigma_+ \\ [-\zeta_J m c^2 (\gamma + 1) + \xi_J E k] \sigma_+ \end{pmatrix} P_{n-1}^{(\lambda_+ - \frac{1}{2}, J + \frac{3}{2})} + C_- (1 + \alpha p^2)^{-\left(\frac{\lambda_- + J}{2}\right)} \times \\
&\left. \left[\begin{pmatrix} \frac{k}{\epsilon} \\ -\frac{(\gamma+1)}{\epsilon} \\ [\xi_J E k - \zeta_J m c^2 (\gamma + 1)] \Gamma_- \\ [\xi_J m c^2 k - \zeta_J E (\gamma + 1)] \Gamma_- \\ [\zeta_J E k + \xi_J m c^2 (\gamma + 1)] \Lambda_- \\ [\zeta_J m c^2 k + \xi_J E (\gamma + 1)] \Lambda_- \end{pmatrix} P_n^{(\lambda_- - \frac{3}{2}, J + \frac{1}{2})} \right. \right. \\
&\left. \left. - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ [\xi_J E k - \zeta_J m c^2 (\gamma + 1)] \sigma_- \\ [\xi_J m c^2 k - \zeta_J E (\gamma + 1)] \sigma_- \\ [\zeta_J E k + \xi_J m c^2 (\gamma + 1)] \sigma_- \\ [\zeta_J m c^2 k + \xi_J E (\gamma + 1)] \sigma_- \end{pmatrix} P_{n-1}^{(\lambda_- - \frac{1}{2}, J + \frac{3}{2})} \right] \right\}. \tag{5.143}
\end{aligned}$$

avec

$$\epsilon = \frac{i\hbar m\omega c}{(E^2 - m^2c^4)}, \quad \Gamma_{\pm}(p) = (J + \lambda_{\pm})\alpha p + \frac{p}{\hbar m\omega}$$

et $\sigma_{\pm}(p) = \frac{2(n + \lambda_{\pm} + J)\alpha p}{(1 + \alpha p^2)}, \quad \Lambda_{\pm}(p) = (J + 1 - \lambda_{\pm})\alpha p - \frac{p}{\hbar m\omega} + \frac{2J + 1}{p}. \quad (5.144)$

A ce stade, nous notons que les constantes de normalisation C_+ , C_- peuvent être obtenues facilement en employant les relations d'orthogonalités de polynôme de Jacobi et la condition de normalisation suivante

$$\int \frac{p^2 dp}{(1 + \alpha p^2)} \Re [F_+^* G_+ + F_-^* G_-] = \frac{1}{2}. \quad (5.145)$$

Finalement, selon la condition de quantification (5.82) et l'équation (5.142), on obtient l'équation de l'énergie relativiste en fonction de E_+ et E_- par rapport aux fonctions d'ondes R_+ et R_- pour toutes les valeurs de α comme suit

$$E_+^2 - m^2c^4 - \hbar m\omega c^2 \left[2 \left(2n + J + \frac{3}{2} \right) \right. \\ \times \sqrt{1 + \left(2 + \sqrt{1 + \frac{4E_+^2}{m^2c^4} (1 + \hbar m\omega\alpha)^2 J(J+1)} \right) \hbar m\omega\alpha + \left(\frac{9}{4} + J(J+1) \right) (\hbar m\omega\alpha)^2} \\ \left. + \hbar m\omega\alpha \left(\left(2n + J + \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{9}{4} + J(J+1) \right) + \left(2 + \sqrt{1 + \frac{4E_+^2}{m^2c^4} (1 + \hbar m\omega\alpha)^2 J(J+1)} \right) \right] \\ = 0, \quad (5.146)$$

$$E_-^2 - m^2c^4 - \hbar m\omega c^2 \times \left[2 \left(2n + J + \frac{3}{2} \right) \right. \\ \times \sqrt{1 + \left(2 - \sqrt{1 + \frac{4E_-^2}{m^2c^4} (1 + \hbar m\omega\alpha)^2 J(J+1)} \right) \hbar m\omega\alpha + \left(\frac{9}{4} + J(J+1) \right) (\hbar m\omega\alpha)^2} \\ \left. + \hbar m\omega\alpha \left(\left(2n + J + \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{9}{4} + J(J+1) \right) + \left(2 - \sqrt{1 + \frac{4E_-^2}{m^2c^4} (1 + \hbar m\omega\alpha)^2 J(J+1)} \right) \right] \\ = 0. \quad (5.147)$$

En notant ici que la forme finale des équations de l'énergie (5.146), (5.147) dépend du paramètre de déformation α , cette forme est due à l'introduction de l'algèbre modifiée de Heisenberg

qui affecte les résultats physiques comme dans le cas de la théorie non-commutative [11][35]. Maintenant, nous proposons d'étudier comment les effets des fluctuations quantiques du champ gravitationnel affectent le système au premier ordre en α , par conséquent, l'évolution sera écrite en série de puissance, en conservant les quantités dominantes d'ordre 0 et 1 en α , on déduit la forme simplifiée suivante

$$E_+^2 = E_-^2 = m^2 c^4 + \hbar m \omega c^2 \left[(4n + 2J + 5) + \hbar m \omega \alpha \left(\left(2n + J + \frac{5}{2} \right)^2 + \frac{5}{4} + J(J + 1) \right) + 2 \left(\frac{\hbar \omega}{m c^2} \right) J(J + 1) [1 + \hbar m \omega \alpha (4n + 2J + 5)] \pm \Delta \right], \quad (5.148)$$

où

$$\Delta = (2J + 1) \left[(1 + \hbar m \omega \alpha (4n + 2J + 5)) \left(1 + \frac{a_1 \hbar \omega}{a_0 m c^2} + \frac{a_2}{a_0} \left(\frac{\hbar \omega}{m c^2} \right)^2 \right) + \hbar m \omega \alpha \left(\left(\frac{5}{4} + \frac{a_2}{a_0} + (4n + 2J + 5) \frac{a_1}{4a_0} - \frac{5}{4a_0} \right) \frac{\hbar \omega}{m c^2} + (4n + 2J + 5) \frac{a_2}{a_0} \left(\frac{\hbar \omega}{m c^2} \right)^2 - \frac{2}{a_0} \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (5.149)$$

avec

$$a_0 = (2J + 1)^2, \quad a_1 = 4J(J + 1)(4n + 2J + 5) \quad \text{et} \quad a_2 = 4J^2(J + 1)^2. \quad (5.150)$$

Cependant, la forme du spectre énergétique de l'oscillateur de DKP à 3-dimensions en présence de la longueur minimale peut être testée. En utilisant la limite $\alpha \rightarrow 0$, on obtient les spectres énergétiques de l'oscillateur ordinaire de DKP à 3-D, qui coïncident exactement avec ceux obtenus par [33] dans le cas où la longueur minimale est absente.

La conclusion que nous pouvons tirer de ce chapitre est que l'effet de la longueur minimale affecte tous les résultats physiques comme dans le cas de la théorie non-commutative. Bien que, les expressions de spectre énergétique de l'oscillateur harmonique du DKP déformé via le formalisme de Kempf pour les deux cas de spin 0 et 1 dans l'espace des moments, contiennent une correction quantique supplémentaire qui dépend du paramètre de déformation α , et sa déviation croît rapidement avec le nombre quantique n .

Chapitre 6

Formalisme de Schrodinger en présence de la longueur minimale

6.1 Introduction

Comme il a été mentionné dans l'introduction du chapitre précédant, plusieurs problèmes non relativistes ont été abordés dans le cadre de la mécanique quantique déformée via le formalisme de Kempf et ses collaborateurs [16]. Le traitement de ces systèmes, dépendants du temps dans la mécanique quantique habituelle, a suscité également un intérêt considérable en raison de leur fortes applications dans de différents domaines de physique tels que la phase géométrique de Berry [69], l'effet de Aharonov-Bohm en physique moléculaire [70], l'optique quantique [71] et l'information quantique [72]. A cet effet, plusieurs méthodes de résolution analytique et approximative ont été consacrées à l'étude de ce genre de systèmes, incluant la méthode de Lewis-Riesenfeld (L-R) qui est basée sur l'opérateur invariant dans la mécanique quantique non relativiste [73], la méthode standard de séparation des variables [74], le formalisme des intégrales de chemin [75] et la méthode supersymétrique [76]. A cet égard, il est utile de noter que le traitement des systèmes dépendants du temps en présence de la longueur minimale reste presque inexploré dans tous les domaines de recherche. Par conséquent, dans cette partie, nous proposons d'étudier la dynamique d'un système de masse variable $m(t)$ se mouvant dans un potentiel linéaire dépendant du temps en présence de la longueur minimale.

6.2 Equation de Schrodinger en interaction avec un potentiel linéaire dependant du temps en présence de la longueur minimale

Dans ce chapitre, nous avons l'intention de développer l'article [77], pour étudier en détail la dynamique d'un système non relativiste dependant du temps en présence de la longueur minimale, et de montrer comment incorporer le principe d'incertitude de Heisenberg généralisé (GUP), impliquant l'existence d'une incertitude minimale non nulle sur la position, dans l'équation de Schrodinger en interaction avec un potentiel linéaire à (1+1) dimensions et ceci via deux approches différentes, à savoir l'équation de Schrodinger et les integrales de chemin.

D'après l'expression de l'hamiltonien d'une particule de masse variable dependante du temps $m(t)$, soumettante à l'action d'un potentiel linéaire dependant du temps, qui est donné par

$$H = \frac{p^2}{2m(t)} + xf(t) \quad (6.1)$$

d'où $f(t)$ est une force extérieure dependante de temps, et la représentation unidimensionnelle (5.7) des operateurs X et P dans l'espace des moments lorsque les deux paramètres de déformations α et γ sont nuls, l'équation de Schrodinger modifiée s'écrit

$$\left[\frac{p^2}{2m(t)} + if(t) (1 + \alpha p^2) \frac{\partial}{\partial p} \right] \psi(p, t) = i \frac{\partial \psi(p, t)}{\partial t}. \quad (6.2)$$

Pour absorber le terme d'interaction dans la prédite équation, nous utilisons les transformations suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} t \rightarrow s = t \\ p \rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arctan(\sqrt{\alpha}p) + \int_0^t f(\tau) d\tau \end{array} \right. , \quad (6.3)$$

qui peuvent être écrites sous cette forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} + f(s) \frac{\partial}{\partial k} \\ (1 + \alpha p^2) \frac{\partial}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial k} \end{array} \right. . \quad (6.4)$$

Puis on substitue les formes finales des transformations (6.3) et (6.4) dans l'équation (6.2), on

trouve

$$i \frac{\partial \psi(k, s)}{\partial s} = \frac{1}{2m(s)\alpha} \tan^2 \sqrt{\alpha} \left(k - \int_0^s f(\tau) d\tau \right) \psi(k, s). \quad (6.5)$$

Il est remarquable de noter que notre système peut être converti au cas d'une particule de Schrodinger libre avec une masse effective, dont la solution est

$$\psi(k, s) = \psi_0(k) \exp \left\{ -i \int_0^s \frac{1}{2m(\lambda)\alpha} \tan^2 \sqrt{\alpha} \left(k - \int_0^\lambda f(\tau) d\tau \right) d\lambda \right\} \quad (6.6)$$

En outre, l'expression (6.6) avec l'ancienne variable peut être réécrit comme,

$$\begin{aligned} \psi(p, t) = & \\ & \psi_0 \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arctan(\sqrt{\alpha}p) + \int_0^t f(\tau) d\tau \right) \exp \left[\left\{ -i \int_0^t \frac{1}{2m(\lambda)\alpha} \right. \right. \\ & \left. \left. \tan^2 \left(\arctan(\sqrt{\alpha}p) + \sqrt{\alpha} \int_0^t f(\tau) d\tau - \sqrt{\alpha} \int_0^\lambda f(\tau) d\tau \right) d\lambda \right\} \right] \end{aligned} \quad (6.7)$$

à l'image de cette expression, nous notons que la forme finale de la fonction d'onde (6.7) dépend du paramètre de déformation α , ce fait n'étonne pas puisque l'introduction de l'algèbre de Heisenberg modifiée affecte les résultats physiques comme dans le cas de la théorie noncommutative [78].

Maintenant, pour étudier comment les effets des fluctuations quantiques dû au champ gravitationnel influent sur le système au premier ordre en α , nous écrivons l'évolution de l'expression (6.7) en série de puissance de α , en conservant les quantités dominantes d'ordre 0 et 1, on obtient la forme simplifiée suivante

$$\begin{aligned} \psi(p, t) = & \psi_0 \left(p - \frac{\alpha}{3} p^3 + \int_0^t f(\tau) d\tau \right) \times \\ & \exp \left[-i \left\{ \int_0^t \left[\frac{1}{2m(\lambda)} \left(p + \int_0^t f(\tau) d\tau - \int_0^\lambda f(\tau) d\tau \right)^2 + \frac{\alpha}{3m(\lambda)} \left(p + \int_0^t f(\tau) d\tau - \int_0^\lambda f(\tau) d\tau \right)^4 \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$-\frac{\alpha}{3m(\lambda)} p^3 \left(p + \int_0^t f(\tau) d\tau - \int_0^\lambda f(\tau) d\tau \right) d\lambda \Bigg\}. \quad (6.8)$$

Cependant, il est utile de tester cette expression (6.8) de la fonction d'onde dépendante du temps, en utilisant la limite $\alpha \rightarrow 0$, pour obtenir le résultat suivant

$$\psi(p, t) = \psi_0 \left(p + \int_0^t f(\tau) d\tau \right) \exp \left\{ -i \int_0^t \frac{1}{2m(\lambda)} \left(p + \int_0^t f(\tau) d\tau - \int_0^\lambda f(\tau) d\tau \right)^2 d\lambda \right\} \quad (6.9)$$

qui est exactement le même résultat que le cas ordinaire (l'absence de la longueur minimale et m est une constante) [79].

Ici, on note que ψ_0 est une fonction arbitraire d'une seule variable, qui joue le rôle du paquet d'onde initial avec une valeur de coordonnée déplacée. En général, elle prend l'amplitude Gaussienne habituelle dans l'espace des moments [79]. Par exemple dans la diffraction matière-onde, où l'état initial d'un cas de barrière d'absorption totale est donné par un cut-off d'onde plane [80]

$$\psi_0(x, t = 0) = \theta(-x) \exp(ipx). \quad (6.10)$$

Il est remarquable que la forme de la fonction d'onde (6.7) vérifie

$$|\psi(p, t)|^2 = \left| \psi_0 \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arctan(\sqrt{\alpha}p) + \int_0^t f(\tau) d\tau \right) \right|^2 \quad (6.11)$$

et donne la relation suivante, correspondante à un mouvement classique soumis à l'action d'une force dépendante du temps

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arctan(\sqrt{\alpha}p) \right\rangle_t = \left\langle \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arctan(\sqrt{\alpha}p) \right\rangle_0 - \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (6.12)$$

Où $\langle \cdot \rangle_t$ et $\langle \cdot \rangle_0$ sont respectivement les valeurs moyennes à l'instant t et $t = 0$.

Avant de terminer cette partie où nous avons utilisé la formulation de Schrodinger de la mécanique quantique non relativiste pour trouver l'expression générale de la fonction d'onde du

problème précédent, nous sommes intéressés à la résolution de ce même problème par la formulation de Feynman appelée formalisme des intégrales de chemin, en se basant essentiellement sur le concept de propagateur quantique qui représente l'amplitude de probabilité de transition d'un point de l'espace temps à un autre point.

A ce stade, pour construire le propagateur quantique correspondant à l'Hamiltonian (6.1) via la représentation des intégrales de chemin dans l'espace des moments, nous suivons la méthode standard où l'on subdivise l'intervalle de temps T en $N + 1$ intervalles infinitésimaux égaux, $\varepsilon = \frac{T}{N+1}$, puis on applique la formule du Trotter, pour obtenir

$$\widehat{U} = \lim_{N \rightarrow \infty} [e^{-i\varepsilon H}]^{N+1}. \quad (6.13)$$

ensuite nous insérons les relations de fermeture (5.10) relatives aux variables p entre chaque paire d'opérateur d'évolution infinitesimal $\widehat{U}(\varepsilon)$. Il vient alors l'expression du propagateur de système précédant comme suit

$$\begin{aligned} K(p_b, p_a, T, 0) &= (p_b | U(T) | p_a) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^N \frac{dp_j}{1 + \alpha p_j^2} \prod_{j=1}^{N+1} \langle p_j | \exp -i\varepsilon \left(\frac{p_j^2}{2m(t_j)} + x f(t_j) \right) | p_{j-1} \rangle \end{aligned} \quad (6.14)$$

ou bien sous cette forme

$$\begin{aligned} K(p_b, p_a, T, 0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^N \frac{dp_j}{1 + \alpha p_j^2} \\ &\quad \prod_{j=1}^{N+1} \exp \left(-i\varepsilon \frac{p_j^2}{2m(t_j)} \right) \langle p_j | \exp \left(\varepsilon f(t_j) (1 + \alpha p_j^2) \frac{\partial}{\partial p_j} \right) | p_{j-1} \rangle \end{aligned} \quad (6.15)$$

où nous avons utilisé (5.7), avec $p_0 = p_a$ et $p_{N+1} = p_b$

A ce niveau, pour évaluer cette expression (6.15), il est facile de démontrer que l'évolution de dernier terme à l'ordre 1 en ε s'écrit

$$\langle p_j | \exp \left(\varepsilon f(t_j) (1 + \alpha p^2) \frac{\partial}{\partial p_j} \right) | p_{j-1} \rangle = \langle p_j | \left(1 + \varepsilon f(t_j) (1 + \alpha p_j^2) \frac{\partial}{\partial p_j} \right) | p_{j-1} \rangle, \quad (6.16)$$

En introduisant la représentation intégrale de $\langle p_j | p_{j-1} \rangle$ donnée par

$$\langle p_j | p_{j-1} \rangle = \int \frac{d\lambda_j}{2\pi} (1 + \alpha p_j^2) \exp(i\lambda_j \Delta p_j) \quad (6.17)$$

dans l'équation (6.15), l'expression du propagateur devient

$$K(p_b, p_a, T, 0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \prod_{j=1}^N \frac{dp_j}{1 + \alpha p_j^2} \prod_{j=1}^{N+1} (1 + \alpha p_j^2) \frac{d\lambda_j}{2\pi} \exp \left\{ i \left[\lambda_j \Delta p_j - \varepsilon \frac{p_j^2}{2m(t_j)} - i2\varepsilon \alpha p_j f(t_j) + \varepsilon \lambda_j f(t_j) (1 + \alpha p_j^2) \right] \right\} \quad (6.18)$$

qui peut être réécrite sous cette forme

$$K(p_b, p_a, T, 0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 + \alpha p_b^2) \int \prod_{j=1}^N dp_j \prod_{j=1}^{N+1} \frac{d\lambda_j}{2\pi} \exp \left\{ -i\varepsilon \frac{p_j^2}{2m(t_j)} + 2\varepsilon \alpha p_j f(t_j) \right\} \exp \{ i\lambda_j [\Delta p_j + \varepsilon f(t_j) (1 + \alpha p_j^2)] \}. \quad (6.19)$$

Par une intégration directe sur $\{\lambda_j\}$, nous obtenons ce nouveau résultat

$$K(p_b, p_a, T, 0) = \lim_{N \rightarrow \infty} (1 + \alpha p_b^2) \int \prod_{j=1}^N dp_j \prod_{j=1}^{N+1} \exp \left\{ -i\varepsilon \frac{p_j^2}{2m(t_j)} + 2\varepsilon \alpha p_j f(t_j) \right\} \delta(\Delta p_j + \varepsilon f(t_j) (1 + \alpha p_j^2)). \quad (6.20)$$

Notons que l'intégration sur $\{\lambda_j\}$ donne une fonction de delta δ . Cette fonction limite les valeurs possibles de p_j pour les valeurs possibles de l'intégration et reflète l'équation du mouvement suivante dans la forme continue

$$\frac{dp}{dt} = -f(t) (1 + \alpha p^2) \quad (6.21)$$

ce qui explique l'évolution classique de l'impulsion d'une particule soumise à une force variable,

dont la solution est

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \tan \left[\arctan(\sqrt{\alpha} p_0) - \sqrt{\alpha} \int_0^t f(\tau) d\tau \right]. \quad (6.22)$$

Ce résultat concorde exactement avec l'équation classique que l'on a trouvé dans (6.12), ceci est une conséquence naturelle de la formulation de Feynman, où son chemin intuitif est de décrire la dynamique quantique via les trajectoires et en même temps de déduire la limite classique.

Pour examiner la possibilité de la construction d'un opérateur invariant, nous pouvons déterminer les opérateurs décrivant les équations du mouvement par

$$\frac{d\hat{p}}{dt} = \frac{1}{i} [\hat{p}, \hat{H}] = -f(t) (1 + \alpha \hat{p}^2). \quad (6.23)$$

et

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{1}{i} [\hat{x}, \hat{H}] = \frac{1}{m(t)} (1 + \alpha \hat{p}^2) \hat{p}, \quad (6.24)$$

où la première équation est l'analogie de l'équation du mouvement (6.21) en terme d'opérateur.

En résolvant les deux équations ci-dessus, l'espace et les opérateurs de moment peuvent être obtenus en termes de conditions initiales, données par

$$\hat{p}(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \tan \left[\arctan(\sqrt{\alpha} \hat{p}_0) - \sqrt{\alpha} \int_0^t f(\tau) d\tau \right]. \quad (6.25)$$

et

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) = \hat{x}_0 + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\alpha} m(\lambda)} \left[1 + \tan^2 \left(\arctan(\sqrt{\alpha} \hat{p}_0) - \sqrt{\alpha} \int_0^\lambda f(\tau) d\tau \right) \right] \\ \times \tan \left(\arctan(\sqrt{\alpha} \hat{p}_0) - \sqrt{\alpha} \int_0^\lambda f(\tau) d\tau \right) d\lambda. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Maintenant, pour effectuer les intégrations sur p dans (6.20), nous voyons que l'expression dans delta n'est pas linéaire. En conséquence, nous utilisons cette formule [81]

$$\delta(g(p)) = \frac{\delta(p - p_r)}{|g'(p_r)|} \quad (6.27)$$

où p_r sont les racines de $g(p) = 0$ (et la prime indique la dérivation), donc la fonction delta est

réduite à

$$\frac{\delta(p_j - F(p_0, t_j, j\varepsilon))}{1 + 2\varepsilon\alpha f(t_j)p_j} \quad (6.28)$$

où $F(p_0, t_j, j\varepsilon)$ est la solution de l'équation du mouvement au temps $j\varepsilon$ donnée en moment initial p_0 .

Substituant l'équation (6.28) dans (6.20), on obtient

$$K(p_b, p_a, T, 0) = \lim_{N \rightarrow \infty} (1 + \alpha p_b^2) \int \prod_{j=1}^N dp_j \prod_{j=1}^{N+1} \delta(p_j - F(p_0, t_j, j\varepsilon)) \exp \left\{ -i\varepsilon \frac{p_j^2}{2m(t_j)} \right\} \quad (6.29)$$

où le terme $2\varepsilon\alpha p_j f(t_j)$ qui se trouve dans l'exponentiel de l'expression (6.20) est absorbé totalement par le terme du dénominateur de (6.28).

Finalement, grâce à la présence de $N + 1$ deltas qui simplifient le calcul des intégrales en p , l'expression finale de l'amplitude de transition via la représentation des intégrales de chemin en présence de la longueur minimale se réduit à

$$K(p_b, p_a, T, 0) = (1 + \alpha p_b^2) \delta \left(p_b - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \tan \left[\arctan(\sqrt{\alpha} p_a) - \sqrt{\alpha} \int_0^T f(t) dt \right] \right) \times \exp \left\{ -i \int_0^T \frac{1}{2m(t)\alpha} \tan^2 \left[\arctan(\sqrt{\alpha} p_a) - \sqrt{\alpha} \int_0^t f(\tau) d\tau \right] dt \right\} \quad (6.30)$$

Maintenant, si nous considérons que la valeur de α est très petite, la forme du propagateur (6.30) sera simplifiée comme

$$K(p_b, p_a, T, 0) = (1 + \alpha p_b^2) \delta \left(p_b - p_a + \int_0^T f(t) dt + \alpha \left[\frac{1}{3} \left(\int_0^T f(t) dt \right)^3 + p_a^2 \int_0^T f(t) dt - p_a \left(\int_0^T f(t) dt \right)^2 \right] \right) \exp \left[-i \left\{ \int_0^T \left[\frac{1}{2m(t)} \left(p_a - \int_0^t f(\tau) d\tau \right)^2 + \frac{\alpha}{3m(t)} \left(p_a - \int_0^t f(\tau) d\tau \right)^4 - \frac{\alpha}{3m(t)} p^3 \left(p_a - \int_0^t f(\tau) d\tau \right) \right] dt \right\} \right]. \quad (6.31)$$

où nous avons effectué un développement de Taylor au premier ordre en α dans l'expression

(6.30).

A l'image de ce dernier résultat, si on suppose que $\alpha \rightarrow 0$, la forme limite de (6.31) s'écrit facilement comme

$$K(p_b, p_a, T, 0) = \delta\left(p_b - p_a + \int_0^T f(t) dt\right) \exp\left\{-i \int_0^T \frac{1}{2m(t)} \left(p_a - \int_0^t f(\tau) d\tau\right)^2 dt\right\} \quad (6.32)$$

et pour $f(t)$ égale à une constante, on obtient directement le résultat ordinaire des intégrales de chemin dans l'espace des moments et l'évolution de moment devient une translation uniforme

$$p_b = p_a - ft \quad (6.33)$$

Comme nous l'avons déjà désigné, le choix arbitraire de la condition initiale de l'équation différentielle (6.21) donne en général un résultat incommode pour l'équation de propagation et la solution donnée dans l'équation (6.22) permet cette condition pour $p_0 = p(0)$. En effet, si ce résultat est appliqué dans

$$\Psi(p, t) = \int \frac{dp_a}{1 + \alpha p_a^2} K(p, p_a, t) \Psi(p_a, 0), \quad (6.34)$$

nous obtenons exactement la même fonction d'onde que la forme donnée par (6.7).

Bien que les deux méthodes donnent les mêmes résultats, l'avantage de la formulation de Feynman est sa façon intuitive pour décrire la dynamique quantique via les trajectoires et en même temps d'en déduire la limite classique.

Chapitre 7

Conclusion générale

Dans cette thèse, nous avons étudié principalement la mécanique quantique relativiste du Duffin-Kemmer-Petiau suivant trois formalismes de déformations différents.

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté les outils fondamentaux de la théorie de DKP dans l'espace commutatif en mettant l'accent sur l'étude de l'oscillateur harmonique du DKP habituel.

Dans le troisième chapitre, nous avons généralisé cette même théorie de DKP dans l'espace non commutatif, en traitant le problème de l'oscillateur du DKP donné par la substitution non minimale dans l'espace non commutatif. Le calcul a été effectué pour le cas de spin 0 et a été comparé avec le cas d'une particule scalaire de DKP soumetante à l'action d'un champ magnétique constant dans l'espace ordinaire. Pour le cas de spin 1, nous avons constaté que le problème est équivalent au cas d'un boson vectoriel de DKP se mouvant dans un champ magnétique constant avec un terme supplémentaire qui dépend du paramètre de la noncommutativité.

Dans le quatrième chapitre, nous avons présenté explicitement le calcul de l'équation du DKP pour une particule de spin 1 et spin 0 évoluant dans un espace courbe, doté d'une métrique de RW à (1+1) dimensions. Dans les deux cas de spin, la solution exacte est obtenue et le taux de création de particules en présence de la gravité a été déterminé par la méthode des transformations de Bogolubov. Dans le même contexte, l'équation scalaire du DKP à (1+3) dimensions a été également résolue en utilisant la technique des vecteurs harmoniques sphériques, où la solution analytique est une fonction de Heun qui se réduit à une fonction hypergéométrique dans certains cas particuliers. Le résultat principal que nous avons aboutis dans ce chapitre

est que le phénomène de création de particules de DKP a été due essentiellement au couplage du champ gravitationnel et de champ quantique via la masse.

Dans le cinquième chapitre, les problèmes de l'oscillateur bosonique de DKP à une dimension et à trois dimensions ont été étudiés dans l'espace des moments, en appliquant le formalisme de la mécanique quantique en présence d'une longueur minimale, introduite comme une incertitude supplémentaire sur la position, pour examiner l'effet de la longueur minimale sur les systèmes relativistes avec spin. Dans le cas unidimensionnel, nous avons exposé une solution exacte de l'oscillateur de DKP déformé via le formalisme de Kempf, où les fonctions d'ondes et le spectre énergétique sont bien déterminés en contenant une correction quantique supplémentaire dépendant du paramètre de déformation pour les deux cas de spin. Dans le cas tridimensionnel, nous avons généralisé l'étude du problème précédent, en résolvant l'équation de l'oscillateur du DKP à trois dimensions en présence de la longueur minimale via la technique des vecteurs harmoniques sphériques. Finalement, nous avons conclu que l'introduction de l'algèbre de Heisenberg modifiée dans la théorie quantique de DKP affecte tous les résultats physiques comme dans le cas de la théorie non commutative.

Le sixième chapitre est consacré à l'étude d'un système non relativiste de masse variable $m(t)$ se mouvant dans un potentiel linéaire dépendant du temps dans le cadre de la même version déformée de la mécanique quantique que chapitre précédent, via deux approches différentes, à savoir l'équation de Schrodinger et les integrales de chemin. Dans les deux méthodes, nous avons trouvé la même expression de la fonction d'onde qui est dépendante également du paramètre de déformation.

En conclusion, tout les résultats obtenus concordent exactement a celles de la littérature dans le cas où les paramètres de déformation sont nuls.

Annexe

propriétés du vecteur harmonique sphérique

Afin de découpler les systèmes précédents, concernant les problèmes du DKP à trois dimensions et éviter la complication des calculs, il est utile d'introduire la notion des vecteurs harmoniques sphériques [53] définis par

$$Y_{JL_1}^M(\theta, \vartheta) = \sum_{mq} Y_{Lm}(\theta, \vartheta) e_{1q} \langle JM | Lm1q \rangle \quad (7.1)$$

qui sont vecteurs propres de J^2 et J_Z :

$$\begin{aligned} J^2 Y_{JL_1}^M &= J(J+1) Y_{JL_1}^M \\ J_Z Y_{JL_1}^M &= M Y_{JL_1}^M \end{aligned}$$

vérifient la relation d'orthogonalité suivante

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi [Y_{JL_1}^M(\theta, \vartheta)]^* \cdot Y_{J'L_1}^M(\theta, \vartheta) \sin \theta d\theta d\vartheta = \delta_{JJ'} \delta_{LL'} \delta_{MM'}, \quad (7.2)$$

où $Y_{Lm}(\theta, \vartheta)$ et $\langle JM | Lm1q \rangle$ sont respectivement les harmoniques sphériques usuelles et les coefficients de Clebsch-Gordon, associés aux nombres quantiques ($q = \pm 1, 0$, et $m = M - q$), et e_{1q} sont des vecteurs unitaires liés aux vecteurs (e_{1x} , e_{1y} , et e_{1z}) par la combinaison linéaire

suivante

$$\begin{aligned}
e_{1+1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(e_{1x} + ie_{1y}) \\
e_{10} &= e_{1z} \\
e_{1-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{1x} - ie_{1y})
\end{aligned} \tag{7.3}$$

satisfaisant les propriétés suivantes

$$\begin{aligned}
e_q^* &= (-1)^q e_{1-q}, \quad q = \pm 1, 0 \\
e_q^* \cdot e_{q'} &= (-1)^q e_{1q} \cdot e_{1-q'} = \delta_{qq'}
\end{aligned} \tag{7.4}$$

Avant de citer les propriétés du vecteur harmonique sphérique, il est important de noter que ces propriétés qui sont données dans la représentation- r de l'espace des configurations[53], sont aussi valables dans la représentation- p de l'espace des moments :

$$\begin{aligned}
\nabla (f(r) Y_{JM}) &= -\xi_J \left(\frac{d}{dr} - \frac{J}{r} \right) f(r) Y_{J,J+1,1}^M \\
&\quad + \zeta_J \left(\frac{d}{dr} + \frac{J+1}{r} \right) f(r) Y_{J,J-1,1}^M
\end{aligned} \tag{7.5}$$

$$\frac{\mathbf{r}}{r} (f(r) Y_{JM}) = -\xi_J f(r) Y_{J,J+1,1}^M + \zeta_J f(r) Y_{J,J-1,1}^M \tag{7.6}$$

$$\nabla \cdot (f(r) Y_{J,J+1,1}^M) = -\xi_J \left(\frac{d}{dr} + \frac{J+2}{r} \right) f(r) Y_{JM} \tag{7.7}$$

$$\nabla \cdot (f(r) Y_{J,J,1}^M) = 0 \tag{7.8}$$

$$\nabla \cdot (f(r) Y_{J,J-1,1}^M) = \zeta_J \left(\frac{d}{dr} - \frac{J-1}{r} \right) f(r) Y_{JM} \tag{7.9}$$

$$\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot (f(r) Y_{J,J+1,1}^M) = -\xi_J f(r) Y_{JM} \tag{7.10}$$

$$\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot (f(r) Y_{J,J,1}^M) = 0 \tag{7.11}$$

$$\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot (f(r) Y_{J,J-1,1}^M) = \zeta_J f(r) Y_{JM} \tag{7.12}$$

et

$$\nabla \times (f(r) Y_{J,J+1,1}^M) = i\zeta_J \left(\frac{d}{dr} + \frac{J+2}{r} \right) f(r) Y_{J,J,1}^M \quad (7.13)$$

$$\nabla \times (f(r) Y_{J,J-1,1}^M) = i\xi_J \left(\frac{d}{dr} - \frac{J-1}{r} \right) f(r) Y_{J,J,1}^M \quad (7.14)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times (f(r) Y_{J,J,1}^M) &= i\zeta_J \left(\frac{d}{dr} - \frac{J}{r} \right) f(r) Y_{J,J+1,1}^M \\ &\quad + i\xi_J \left(\frac{d}{dr} + \frac{J+1}{r} \right) f(r) Y_{J,J-1,1}^M \end{aligned} \quad (7.15)$$

$$\frac{\mathbf{r}}{r} \times (f(r) Y_{J,J+1,1}^M) = i\zeta_J f(r) Y_{J,J,1}^M \quad (7.16)$$

$$\frac{\mathbf{r}}{r} \times (f(r) Y_{J,J-1,1}^M) = i\xi_J f(r) Y_{J,J,1}^M \quad (7.17)$$

$$\frac{\mathbf{r}}{r} \times (f(r) Y_{J,J,1}^M) = i [\zeta_J f(r) Y_{J,J+1,1}^M + \xi_J f(r) Y_{J,J-1,1}^M]. \quad (7.18)$$

Avec

$$\xi_J = \sqrt{(J+1)/(2J+1)}, \quad \zeta_J = \sqrt{J/(2J+1)} \quad (7.19)$$

Bibliographie

- [1] J. D. Bjorken and S.D. Relativistic Quantum Mechanics. (New Drell York,1964).
- [2] E. Durand "Mecanique Quantique ; tome II : Spin et Relativité" Ed. Masson (1976).
- [3] H. Feshbach and F. Villars. Rev. Mod. Phys.30, (1958) 24 ; M.Merad, L. Chetouani and A. Bounames, Phys.Lett. A 267, (2000) 225 ; T. Boudjedaa, L. Chetouani, M.Merad, Il Nuovo Cimento B 114, 11, (1999) 1261 ; T. Boudjedaa, L. Chetouani, M.Merad, Chin. J. Pys. Vol. 38, 6, (2000) 1019 ; M.Merad,T. Boudjedaa, L. Chetouani, Tur. J. phys. 25, (2001) 159.
- [4] G.Petiau, Acad.R. Belg.Cl. Sci. Mem. Collect. 16, (1936) 2.
- [5] N.Kemmer, Proc. R. Soc. London, Ser. A 166, (1938) 127 ; 173, (1939) 91.
- [6] R.J. Duffin. Phys.Rev. 54, (1938) 1114.
- [7] A.Mieu, M.M Sheikh-Jabbari, JHEP 0101, (2001) 025.
- [8] P.M. Ho and H.C. Kao, Phys. Rev. Lett. 88, (2002) 151602.
- [9] X. Calmet Eur.Phys.J.C 50, (2007) 113.
- [10] N.Chair and M.M. Sheikh-Jabbari, Phys.Lett. B504, (2001), 141.
- [11] B. Mirza and M. Mohadesi, Commun. Theor. Phys. (Bei-jing, China) 42, (2004) 664.
- [12] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, Quantum Mechanics Non-relativistic Theory, (Pergamon Press, Oxford, 1977).
- [13] L. Parker, Phys. Rev. D 19, (1979) 438.
- [14] M Khorrami, M Alimohammadi and A Shariati. Annals of Phys 304, (2003) 91.
- [15] S. Moradi, Int. J. Theor. Phys,47, (2008) 2807.
- [16] A Kempf, Gianpiero Mangano, and Robert B. Mann, Phys. Rev. D 52, (1995) 1108.

- [17] H. Hinrichsen and A. Kempf, *J. Math. Phys.* 37, (1996) 2121.
- [18] A. Kempf, *J. Math. Phys.* 38, 1344 (1997) and, A. Kempf, *Phys. Rev. D* 55, (1997) 7909.
- [19] S. Hossenfelder, *Phys. Rev. D* 65, (2002) 125028 ; S. Hossenfelder, *Mod. Phys. Lett. A* 37, (2004) 379.
- [20] M. Fontanini, E. Spallucci, and T. Padmanabhan, *Phys. Lett. B* 633, (2006) 627.
- [21] A. Kempf, *J. Phys. A : Math. Gen.* 30, (1997) 2093.
- [22] D. Amati, M. Ciafaloni, and G. Veneziano, *Phys. Lett. B* 216, (1989) 41.
- [23] S. Hossenfelder, *Class. Quantum Grav.* 23, (2006) 1815.
- [24] F. Brau, *J. Phys. A : Math. Gen.* 32, (1999) 7691.
- [25] S. Benczik, L. N. Chang, D. Minic, and T. Takeuchi, *Phys. Rev. A* 72, (2005) 012104.
- [26] D. Bouaziz and M. Bawin, *Phys. Rev. A* 76, (2007) 032112 ; D. Bouaziz and M. Bawin, *Phys. Rev. A* 78, (2008) 032110.
- [27] Kh. Nouicer, *J. Math. Phys.* 47, (2006) 122102.
- [28] Kh. Nouicer, *J. Phys. A : Math. Gen.* 39, (2006) 5125.
- [29] C. Quesne et al, *J. Phys. A : Math. Gen.* 38, (2005) 1747.
- [30] T. K. Jana and P. Roy, *Phys. Lett. A* 373, (2009) 1239 ; M. Merad, F. Zeroual and H. Benzair, *EJTP* 7, N 23, (2010) 41.
- [31] M. Moshinsky,A. Szczepaniak, *J.phys. A : Math.Gen.* 22, (1989) 821 ; V. Kukulín,G. Loyola and M. Moshinsky, *phys. Lett.* A158, (1991) 19.
- [32] M. Moshinsky,A. Szczepaniak, *J.phys. A : Math.Gen.* 22, (1989) 817.
- [33] Y.Nedjadi and R.c.Barrett, *J. Phys. A : Math.Gen.* 27, (1994) 4301.
- [34] J. Gamboa, M. Loeweand, J.C. Rojas. *Phys.Rev. D*64, (2001) 067901.
- [35] M. Falek and M. Merad, *Commun. Theor. Phys.* 50, (2008) 587.
- [36] T Homma, T Inamoto, T Miyazaki, *Phys. Rev. D* 42, N. 6, (1990) 2049.
- [37] D R. Brill and J A. Wheeler, *Rev. Mod. Phys* vol 29,N. 3, (1957) 465 ; V. M.Villalba, *Prog. Theor. Phys*, V. 90, N. 4, (1993) 851 ; *Int. J.Theo. Phy*, 36, (1997) 1321.
- [38] E. Schrodinger, *Physica* 6, (1939) 899.

- [39] L. Parker, *Phys. Rev.* 183, (1969) 1057; *Phys. Rev. D* 3, (1971) 346.
- [40] M. Domingos, M. H. Caldeira, *Found. Physics*,14, (1984) 607.
- [41] A.O. Barut, I.H. Duru, *Phys. Rev. D* 36, (1987) 3705.
- [42] A. Sinha, R. Roychoudhury, *Int J. Theo. Phy*, 33, (1994) 1511.
- [43] D. Gomes and E. Capelas De Oliveira, *Int. J of Math and Mathematical Sciences* 69, (2004) 3775.
- [44] A. Havare, T. Yetkin ,M. Korunur and K.Sogut ,. *Nucl. Phys B* 682, (2004) 457.
- [45] Y. Sucu and N.Unal, *J. Math. Phys.* 48, (2007) 052503.
- [46] M. Falek and M. Merad, *Cent. Eur. J. Phys.* 8, (2010) 408.
- [47] M. Falek and M. Merad, *Int. Journal of Modern Phys A*, 25, (2010) 2747.
- [48] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology : Principles and Applications of the General Theory of Relativity* (Wiley ; New York, 1972).
- [49] Y. Nedjadi and R.C. Barrett, *J. Phys. A : Math. Gen.* 31, (1998) 6717; L. Chetouani, M. Merad, T. Boudjedaa, and A. Lecheheb, *Int. J. Theor. Phys.* 43, (2004) 1147; M. Merad, H. Bada, and A. Lecheheb, *Czech. J. Phys.* 56, (2006) 765.
- [50] J.T. Lunardi, B.M. Pimentel, and R.G. Teixeira, in :“Geometrical Aspects of Quantum Fields”, eds. A.A.Bytsenko, A.E. Goncalves, and B.M. Pimentel, World Scientific, Singapore, gr-qc/9909033, (2001) 111; Yu.V. Pavlov, *Gravitation and Cosmology*, V. 12, N. 2-3, (2006) 205.
- [51] I S. Gradshteyn and I M Ryzhik *Tables of Integrals, Series and Products* (New York : Academic, 1980).
- [52] N.D. Birrel, P.C.W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1982).
- [53] E. H. Hill, *Am. J. Phys.* 22, (1954) 211 ; A. R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1957).
- [54] C. I. Um, K. H. Yeon and T. F. George, *Phys. Rep.* 362, (2002) 63.
- [55] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions*, Vol. III (McGraw-Hill, New York, 1955).

- [56] C. Snow, *Hypergeometric and Legendre Functions with Applications to Integral Equations of Potential Theory*, Applied Mathematics Series, Vol. 19 (National Bureau of Standards, 1952).
- [57] G. Veneziano, *Euro. phys. Lett.* 2, (1986) 199; D. Amati, M.Ciafaloni and G.Veneziano, *Phys. Lett. B* 197, (1987) 81; K.Konishi, G.Paffuti and P. Provero, *Phys. Lett. B* 234, (1990) 276; M.Kato, *Phys. Lett. B* 245, (1990) 43; R.Guida, K.Konishi and P.Provero, *Mod. Phys. Lett. A* 6, (1991) 1487; D J.Gross and P F.Mende, *Nucl. Phys. B* 303, (1988) 407.
- [58] L J. Garay, *Int. J. Mod. Phys. A* 10, (1995)145.
- [59] S. Capozziello, G. Lambiase and G.Scarpetta, *Int. J. Theor. Phys.* 39, (2000) 15.
- [60] F. Scardigli, *Phys. Lett. B* 452, (1999) 39; F. Scardigli and R. Casadio, *Class.Quantum Gravity* 20, (2003) 3915.
- [61] L. N. Chang, D. Minic, N. Okamura, and T. Takeuchi, *Phys. Rev. D* 65, (2002) 125027.
- [62] R. Akhoury and Y.P.Yao, *Phys. Lett. B* 572, 37, (2003) 42 .
- [63] K. Nozari and M. Karami, *Mod. Phys. Lett. A* 20, (2005) 3095.
- [64] M. Falek and M. Merad, *J. Math. Phys.* 50, (2009) 023508.
- [65] M. Falek and M. Merad, *J. Math. Phys.* 51, (2010) 033516.
- [66] A. Eftekharzadeh and B. L. Hu, *Braz. J. Phys.* 35, (2005) 333.
- [67] R. Guertin and T. L. Wilson, *Phys. Rev. D* 15, (1977) 1518.
- [68] D. A. Kulikov, R. S. Tutik, and A. P. Yaroshenko, *Mod. Phys. Lett. A* 26, (2004) 12.
- [69] M. Berry, *R. Proc. Soc. Lond. A* 392 (1984) 45; C M. Cheng and P C W. Fung. *J. Phys. A : Math. Gen.*21, (1988) 4115; Y Z. Laiy, J Q. Liangzxc, H J W M. Kirstenz and J G. Zhou. *J. Phys. A : Math. Gen.* 29, (1996) 1773.
- [70] C A. Mead *Rev. Mod. Phys.* 64, (1992) 51.
- [71] C C. Gerry *Phys. Rev. A* 31, (1985) 2721.
- [72] C E. Creffield and G. Platero. *Phys. Rev. B* 65, (2002) 113304.
- [73] H R Jr. Lewis and W B. Riesenfeld. *J. Math. Phys.*10, (1969) 1458.

- [74] C J. Efthimiou and D. Spector Phys. Rev. A 49, (1994) 2301.
- [75] L. Chetouani, L. Guechi and T F. Hammann Phys. Rev.A 40, (1989) 1157; J B. Xu, X S. Zhang and S B. Li Phys. Scr. 56 (1997) 225.
- [76] B F. Samsonov. J. Phys. A : Math. Gen. 33, (2000) 591.
- [77] M. Merad and F. Falek, Phys. Scr. 79, (2009) 015010.
- [78] L. Chetouani, M. Merad, T. Boudjedaa and A. Lecheheb, Acta. Phys. Slov. 55, (2005) 379.
- [79] P G. Luan and C STang Phys. Rev. A 71, (2005) 014101.
- [80] A. del Campo and J G. Muga. J. Phys. A : Math. Gen. 39, (2006) 5897.
- [81] A. Anderson and S. Anderson, Ann. Phys., NY 199, (1990) 155.