République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Jijel
Faculté des Sciences Exactes et sciences de
La nature et de la vie
Département de Mathématiques
Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées

N°d'ordre :
Série :

MEMOIRE

Présenté à la Faculté des Sciences Exactes
et sciences de la nature et de la vie
Département De Mathématiques
Pour l'obtention du diplôme de

MAGISTER

Spécialité : Mathématiques

Option : ***Analyse***

Thème

Contribution aux inclusions différentielles

Par

SLAMNIA FATIHA

Soutenue le : 17/06/2010

Devant le jury :

Président :	**T. Zerzaihi**	**MC.**	Univ. Jijel
Rapporteur :	**D. Azzam-Laouir**	**Prof.**	Univ. Jijel
Examinateurs :	**A. Aibeche**	**Prof.**	Univ. Sétif
	W. Chikouche	**MC.**	Univ. Jijel

2009-2010

Table des matières

Chapitre 0

Introduction Générale

La modélisation mathématique de nombreux phénomènes physiques peut conduire à l étude des systèmes dynamiques à second membre discontinu, par exemple pour des systèmes modélisant des contacts avec interactions, des circuits électroniques (avec des diodes) ...etc, l étude de tels systèmes discontinus se fait en utilisant la théorie de **Filippov** ([**21**]) qui donne l'existence de la solution absolument continue du problème de Cauchy de la forme

$$\dot{u}(t) = f(u(t)), u(0) = u_0.$$

Les inclusions différentielles sont une généralisation des équations différentielles ordinaires et se présentent sous la forme

$$\frac{du}{dt}(t) \in F(t, u(t)),$$

où $F : [t_0, T] \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ est une multi-application. Par exemple, on supposant que $(t, u) \mapsto F(t, u)$ est semi-continue supérieurement par apport à u et mesurable par apport à t et $F(t, u)$ est fermé, convexe pour tout t et u, on a l'existence de solutions pour le problème de Cauchy de la forme

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) \in F(t, u(t)), & p.p \quad t \in [t_0, T], \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

Les inclusions différentielles découlent des frottements de Coulomb dans les systèmes mécaniques et interrupteurs idéales en électronique de puissance. Une contribution importante a été faite par **Filippov**, qui a étudié les régularisations des équations discontinues. En outre la technique de régularisation a été utilisée par **Krasovskii** dans la théorie des jeux différentiels.

La théorie des inclusions différentielles a fait de grands axes de recherches, ces dernières années, notamment ses applications à la théorie du contrôle optimal, à des problèmes de l'économie ainsi qu'à l'existence d'équilibres et à l'optimisations.

L'ensemble des travaux formant ce mémoire, présente une contribution à l'étude de l'existence (et unicité) pour les inclusions différentielles de la forme

$$(P_1)\begin{cases} \ddot{u}(t)+\gamma\dot{u}(t)\in\partial\varphi(u(t))+F(t,u(t)), \quad p.p \quad t\in[0,T] \\ u(0)=-u(T), \dot{u}(0)=-\dot{u}(T). \end{cases}$$

Concernant le second ordre,

où $F:[0,T]\times H\rightrightarrows H$ une multi-application mesurable semi-continue supérieurement à valeurs convexes compactes et non vides et $\varphi:H\to]-\infty,+\infty]$ une fonction paire, convexe et semi-continue inférieurement (s.c.i) et $\gamma\in\mathbb{R}$.

et

$$(P_2)\begin{cases} -\dot{u}(t)\in\partial\varphi(u(t))+F(t,u(t)), \quad p.p \quad t\in[0,T] \\ u(0)=u_0. \end{cases}$$

Concernant le premier ordre,

où $\varphi:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ une fonction convexe, λ-Lipschitzienne ($\lambda>0$) et $F:[0,T]\times\mathbb{R}^d\rightrightarrows\mathbb{R}^d$ une multi-application $\mathfrak{L}([0,1])\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-mesurable à valeurs non vides compactes et semi continue mixte.

Aizicovici et Pavel (voir [1]) on fait une étude originale pour le problème (P_1) avec $f(t,u(t))=f(t)$ (f est indépendante de l'état), en supposant $\varphi:H\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction convexe semi-continue inférieurement (s.c.i), $\gamma\in\mathbb{R}$ et $f\in\mathbb{L}^2_H([0,T])$.

L'inclusion différentielle (P_2) a été étudiée par plusieurs auteurs (voir [5], [16], [18], [19], [22], [23]).

Ce mémoire est composé de trois chapitres.

Le premier est consacré à des notions de base que nous avons utilisé tout au long de ce travail.

Dans le chapitre 2, on rappelle le résultat d'existence et d'unicité de Aizicovici-Pavel [1]. Ensuite on étudie l'existence et l'unicité des solutions pour (P_1) avec F une multi-application semi-continue supérieurement en dimension finie.

Nous terminons ce chapitre par un résultat d' existence des solutions pour (P_1) avec une hypothèse supplémentaire sur φ en dimension infinie.

Dans le dernier chapitre, un résultat d'existence est donné pour l'inclusion différentielle du premier ordre (P_2) avec F une multi-application semi-continue mixte, pour des problèmes perturbés avec des opérateurs maximaux monotones. On peut voir dans la littérature les travaux de **[5]**, **[16]**, **[18]**, **[19]** et **[23]**. La technique employée dans la démonstration du résultat de ce chapitre consiste à utiliser l'existence d'une multi-sélection pour les multi-application semi-continues mixtes et une méthode standard du théorème du point fixe de Kakutani-Ky Fan.

Chapitre 1

Notations et préliminaires

Dans ce chapitre, nous résumons les notations et les concepts de base liés à l'étude des multi-applications (multi-fonctions), ainsi que les résultats que nous avons utilisé dans ce mémoire.

1.1 Notations

Soient E un espace de Banach, E' son dual topologique, $\langle .,. \rangle$ leur produit de dualité, et $\|.\|$ la norme de E.

On note par

$\sigma(E, E')$ la topologie faible sur E.

E_σ l'espace de Banach E muni de la topologie faible.

$\overline{B}_E$ la boule unité fermée de E.

$\overline{A}$ la fermeture de A (pour tout sous ensemble A de E).

$co(A)$ l'enveloppe convexe de A.

$\delta(., A)$ la fonction indicatrice de A, définie par

$$\delta(x, A) = \begin{cases} 0, & si \quad x \in A \\ +\infty, & si \quad x \notin A. \end{cases}$$

$\delta^*(.,A)$ la fonction polaire de $\delta(.,A)$, appelée aussi fonction support de A, définie sur E' par

$$\delta^*(x',A) = \sup_{x\in A}\langle x',x\rangle, \quad \forall x' \in E'.$$

1_A la fonction caractéristique d'une partie A d'un ensemble donné, définie par

$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & si \quad x \in A; \\ 0, & si \quad x \notin A. \end{cases}$$

$\mathfrak{L}(I)$ la tribu de Lebesgue sur I (I un ensemble compact de $\mathbb{R}$).

μ ou dt la mesure de Lebesgue.

$\mathbb{C}_H([0,1])$ l'espace de Banach de toutes les applications $u : [0,1] \longrightarrow H$ muni de la norme *sup*.

$\mathbb{C}_0$ l'espace de toutes les suites convergentes vers 0.

$\mathbb{C}^1_H([0,1])$ l'espace de Banach des fonctions continues $u : [0,1] \longrightarrow H$ ayant une dérivée première continue, muni de la norme $\|u\|_{\mathbb{C}^1_H([0,T])} = max\{\max_{t\in[0,1]}\|u(t)\|, \max_{t\in[0,1]}\|u'(t)\|\}$.

$\mathbb{L}^p_H([0,1]) = \{f : [0,1] \longrightarrow H, \ f \ mesurable \ et \ (\int_0^1 |f(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} < +\infty\}$ où $p \in [0,+\infty[$, l'espace des classes d'équivalence des fonctions mesurables sur $[0,1]$. telles que

$x \mapsto |f(x)|^p$ intégrable sur $[0,1]$

$epi(f)$ épigraphe de f définie par

$$epi(f) = \{(x,r) \in E \times \mathbb{R}; \ \ f(x) \leq r\}.$$

$\mathcal{P}_f(X)$ l'ensemble des parties fermées d'un ensemble X.

$\mathcal{P}_k(X)$ l'ensemble des parties compactes de X.

$\lim_{n\to\infty} \sup A_n$ l'ensemble des points d'accumulation des suites (x_n) telles que $x_n \in A_n$.

$\mathbf{L}^1_E(I)$ l'espace des applications Lebesgue Bochner-intégrables définies sur I à valeurs dans l'espace de Banach E.

Soit H un espace de Hilbert et soit A un sous ensemble fermé convexe de H.

On note par

$Proj_A(x)$, la projection de $x \in H$ sur A, définie par

$y \in Proj_A(x) \Longleftrightarrow y \in \ A \ \ et \ \ \langle x-y, y-a\rangle \geq 0, \forall a \in A \Longleftrightarrow d(x,A) = \|x-y\|.$

$N_A(y)$ le cône normal à A au point y (il s'agit du cône des normales sortantes), défini par

$$\varsigma \in N_A(y) \Longleftrightarrow y \in A \ \ et \ \ \langle \varsigma, y\rangle = \delta^*(\varsigma, A)$$

et nous avons

$$y \in Proj_A(x) \Longleftrightarrow x - y \in N_A(y).$$

1.2 Quelques notations de mesurabilité

Définition 1.2.1 *Soient X un ensemble non vide, Σ une famille de sous ensembles de X. Alors Σ est dite une tribu sur X si*

1. $\emptyset \in \Sigma$,
2. $A \in \Sigma \Rightarrow X \backslash A \in \Sigma$,
3. $A_n \in \Sigma, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup\limits_n A_n \in \Sigma.$

Le couple (X, Σ) est appelé espace mesurable, et les éléments de Σ sont appelés ensembles mesurables.
Si la troisième relation est vraie pour les unions finies seulement, on dit que Σ est une algèbre sur X.
Si X est un espace topologique, la tribu Borélienne sur X notée $\mathfrak{B}(X)$, est la plus petite tribu contenant la topologie de X .

Définition 1.2.2 *Soient $(X_1, \Sigma_1), (X_2, \Sigma_2)$ deux espaces mesurables et g une fonction définie sur X_1 à valeurs dans X_2, on dit que g est (Σ_1, Σ_2)-mesurable si*
pour tout $A \in \Sigma_2, g^{-1}(A) \in \Sigma_1$.
Si X_2 est un espace topologique, une fonction $(\Sigma_1, \mathcal{B}(X))$-mesurable est dite fonction Borélienne.

Définition 1.2.3 *Soit (X, Σ) un espace mesurable et M un espace métrique.*
Alors une fonction $g : X \longrightarrow M$ est dite fortement mesurable ou Bochner mesurable si g est $(\Sigma, \mathcal{B}(M))$-mesurable et $g(X)$ est séparable.

Définition 1.2.4 *Soit (X,Σ) un espace mesurable et M un espace métrique Alors une fonction $f : X \longrightarrow M$ est Σ-étagée (resp. dénombrablement Σ-étagée) si f est $(\Sigma, \mathcal{B}(M)$-mesurable et $f(X)$ fini (resp. dénombrable).*

Lemme 1.2.1 *Sous les notations de la définition* 1.2.4 *nous avons les caractérisations suivantes*

- *f est Bochner mesurable,*
- *il existe une suite de fonctions Σ-étagées définies sur X à valeurs dans M, convergeant simplement vers f,*
- *il existe une suite de fonctions dénombrablement Σ-étagées définies sur X à valeurs dans M, convergeant uniformément sur X vers f.*

On donne dans ce qui suit quelques notions sur les mesures.

Définition 1.2.5 *Soit (X,Σ) un espace mesurable. Alors l'application $\nu : \Sigma \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est une mesure sur X si*

1. *$\nu(\emptyset) = 0$,*
2. *$\nu(\bigcup\limits_n A_n) = \sum\limits_n \nu(A)$, pour toute suite dénombrable d'éléments de Σ deux à deux disjoints.*

Le triplet (X,Σ,ν) est appelé espace mesuré.
Si $\nu(A) \geq 0$, pour tout $A \in \Sigma$, on dit que ν est une mesure positive et on note $\nu \geq 0$, ou que l'espace (X,Σ,ν) est positif.
Si $\nu(A) < \infty$, pour tout $A \in \Sigma$, on dit que ν est une mesure finie ou que l'espace (X,Σ,ν) est fini.
Si X est un espace topologique, la mesure $\nu : \mathcal{B}(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est appelée mesure Borélienne.
On dit que ν est une mesure de probabilité si $\nu(X) = 1$.

Définition 1.2.6 *Soit X un espace topologique séparé et ν une mesure Borélienne. Alors ν est dite régulière si pour tout $A \in \mathcal{B}(X)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert C et un fermé G de X, tels que $G \subset A \subset C$ et $\nu(C \backslash G) \leq \varepsilon$.*

Une mesure Borélienne finie et régulière est appelée mesure de Radon.

Définition 1.2.7 *Soit (X, Σ, ν) un espace mesuré avec $\nu \geq 0$. Soit Z un sous ensemble de X , on dit que Z est ν-négligeable (s'il n'y a pas confusion), s'il existe $A \in \Sigma$ tel que $Z \subset A$ et $\nu(A) = 0$.*
On dit qu'une propriété sur X est vraie ν- presque partout (ν.p.p) si l'ensemble ou elle n'est pas vérifiée est ν-négligeable.
La tribu ν-complétée de Σ notée Σ_ν est la tribu engendrée par Σ et les ensembles ν-négligeables, c'est à dire
$\Sigma_\nu = \{A \cup Z / \ \ A \in \Sigma$ et Z ensemble ν-négligeable $\}$.
La tribu Σ est dite complète si $\Sigma = \Sigma_\nu$, c'est à dire si tout ensemble ν-négligeable appartient à Σ.

1.2.1 Mesures de Borel et mesures de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

Soient t_0, t_1 deux nombres réels tels que $t_0 < t_1$, $J = [t_0, t_1]$ et Σ la famille des sous ensembles de J de la forme $t_0 = [t_0, t_0],]t', t''[$, pour $t_0 \leq t' \leq t'' \leq t_1$, et les unions finies de ces intervalles. Il est clair que Σ est une algèbre sur J. On définit $\nu : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ par $\nu(t_0) = 0, \nu(]t', t''[) = t'' - t'$ et $\nu(\bigcup_{j=1}^{k} A_j) = \sum_{j=1}^{k} \nu(A_j)$, avec $k \in \mathbb{N}$ et A_j des intervalles disjoints de la forme considérée.

Dans la suite de ce travail, pour tout ensemble compact I de $\mathbb{R}$, on note par :

(i) $\mathfrak{L}(I)$ la tribu de Lebesgue sur I,

(ii) μ ou dt la mesure de Lebesgue,

(iii) $\mathbb{L}^1_E(I)$ l'espace des applications Lebesgue Bochner-intégrables définies sue I à valeurs dans l'espace de Banach E, c'est à dire, les applications Lebesgue Bochner-mesurables et telles que $\int f d\mu$ est finie.

1.3 Fonctions univoques

1.3.1 Généralités sur les Fonctions univoques

Définition 1.3.1 *(**Les fonctions absolument continues**)*
On dit q'une fonction $f : [a,b] \to E$ est absolument continue si ;
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ *tel que pour toute partition dénombrable de $[a,b]$ par des intervalles disjoints $[a_k, b_k]$ vérifiant* $\sum_k (b_k - a_k) < \delta$ *nous avons*

$$\sum_k \|f(b_k) - f(a_k)\| < \varepsilon$$

Théorème 1.3.1 *Une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est absolument continue s'l existe une fonction g intégrable sur $[0,T]$ (au sens de Lebesgue) telle que pour tout $t \in [0,T]$*

$$f(t) - f(0) = \int_0^t g(s)ds.$$

Une fonction absolument continue est continue et admet une dérivée presque partout.

Définition 1.3.2 *(**Fonction de Carathéodory**)*
Soient (T, Σ) un espace mesuré, X et Y deux espaces métriques et soit $f : T \times X \to Y$. On dit que f est de Carathéodory si elle est mesurable par rapport à $t \in T$ et continue par rapport à $x \in X$.

Définition 1.3.3 *(**Convexité**)*
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

- *Pour tout $x, y \in E, [x,y] = \{z = \lambda x + (1-\lambda)y, 0 \leq \lambda \leq 1\}$ le segment de droite qui relie x et y.*
- *$A \subset E$, A est dite convexe si $[x,y] \subset A, \forall x, y \in A$.*
- *Une combinaison convexe (finie) des points $x_1, x_2, ...x_n$ de E est l'élément de E représenté par $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ et $\lambda_i \geq 0$, $\forall i = \overline{1.n}$.*
- *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe si*

$$\forall x, y \in I, \forall \lambda \leq \in [0,1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Proposition 1.3.2 *Soit f une application de l'espace de Banach E à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est semi-continue inférieurement (s.c.i) si et seulement si son épigraphe* $epi(f) = \{(x,r) \in E \times \mathbb{R} / \ f(x) \leq r\}$ *est fermé*
Nous avons aussi, f s.c.i au point $a \in E$ si et seulement si
$\liminf_{x \to a} f(x) \geq a$.

Définition 1.3.4 *Soit (J, Σ) un espace mesurable et $f : \ G \times E \to]-\infty, +\infty[$, On dit que f est un intégrande normal si*

- *f est $\Sigma \otimes \mathcal{B}(E)$-mesurable,*
- *pour tout $t \in J$ fixé, $f(t,.)$ est s.c.i*

Définition 1.3.5 *On dit que f est un intégrande normal convexe si f est un intégrande normale et pour tout $t \in J$ fixé, $f(t,.)$ est convexe, c'est à dire*
$f(t, \alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y), \ \forall x, y \in E \quad \text{et} \quad \forall \alpha \in [0,1]$.
C'est équivalent aussi à dire que $epi(f)$ est convexe.
Nous avons aussi $f(t,.)$convexe $\Longleftrightarrow$ $epi(f(t,.))$ convexe.

Définition 1.3.6 *(**L'enveloppe convexe**)*
Soit $A \subset E$, l'enveloppe convexe de A est l'ensemble de toutes les combinaisons convexes (finies) des éléments de A. C'est le plus petit convexe qui contient A.

Définition 1.3.7 *(**Fonction localement Lipschitzienne**)*
On dit que $f : E \to \mathbb{R}$ est une fonction localement Lipschitzienne sur E s'il existe $A \subset E$, A borné tel que

$$\forall (x,y) \in A, \exists M > 0, \|f(x) - f(y)\| \leq M \|x - y\|.$$

Définition 1.3.8 *(**Fonction mesurable**)*
Soit (E, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique $\mathbf{B}(X)$ la tribu Borélienne sur X,

$$f : (E, \Sigma) \to X.$$

On dit que f est Σ-mesurable si $\ \forall B \in \mathbf{B}(X), \ f^{-1}(B) \in \Sigma$.

Proposition 1.3.3 *Soit $(E, \theta_1), (F, \theta_2)$ deux espaces topologiques, soit $f : E \to F$ une fonction, si f continue alors elle est mesurable de $(E, \mathbf{B}(\theta_1))$ vers $(F, \mathbf{B}(\theta_2))$.*
L'inverse de cette proposition n'est pas vrai.

1.4 Quelques notations de sous différentiabilité

Définition 1.4.1 *Soit E un espace de Banach réel. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors f est localement M-Lipschitzienne si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad |f(y) - f(z)| \leq M\|y - z\| \quad \forall y, z \in \mathbb{B}(x, \varepsilon).$$

Définition 1.4.2 *(**Dérivée directionnelle**)*
Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitzienne sur E, la dérivée directionnelle généralisée de f en x dans la direction h, est définie par

$$f^{\circ}(x, v) = \lim_{\substack{y \to x \\ \varepsilon \downarrow 0}} \ \sup \frac{f(y + \varepsilon v) - f(y)}{\varepsilon}$$

Proposition 1.4.1 *Soit f une fonction M-Lipschitzienne au point $x \in E$. Alors*

1. *La fonction $v \mapsto f^{\circ}(x, v)$ est finie, positivement homogène, sous additive et satisfait $|f^{\circ}(x, v)| \leq M\|v\|$.*
2. *$f^{\circ}(x, v)$ est semi-continue supérieurement.*
3. *$f^{\circ}(x, -v) = (-f)^{\circ}(x, v)$.*

Définition 1.4.3 ***Sous différentiel** (**Gradient Généralisé**)*
Le sous différentiel (gradient généralisé) au sens se Clarke de f en $x \in E$, est défini par

$$\partial f(x) = \{\varsigma \in E^*, \langle \varsigma, v \rangle \leq f^{\circ}(x, v), \forall v \in E\},$$

on note par $\|\varsigma\|_*$ la norme dans E^* tel que

$$\|\varsigma\|_* = sup\{\langle \varsigma, v \rangle, v \in E, \|v\| \leq 1\}.$$

Définition 1.4.4 *Soit $\mathbb{R}^d$ un espace euclidien avec le produit scalaire $\langle ., . \rangle$ et la norme $\|.\|$. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Le sous différentiel de cette fonction $\partial f : \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}$ est défini par*

$$\partial f(x) = \{\varsigma \in \mathbb{R}^d, f(y) - f(x) \geq \langle \varsigma, y - x \rangle, \forall y \in \mathbb{R}^d\}.$$

Définition 1.4.5 *Soit $f : E \to \mathbb{R} \bigcup \{\infty\}$ une fonction convexe s.c.i tell que $D(\varphi) = \{x \in E, \varphi(x) \leq \infty\}$. Le sous différentiel de cette fonction est l'ensemble suivant*

$$\partial f(x) = \{\varsigma \in E^*, f(y) - f(x) \geq \langle y - x, \varsigma \rangle, \forall y \in E\}.$$

Proposition 1.4.2 *Soit f une fonction localement Lipschitzienne convexe, alors la définition du sous différentiel $\partial f(x)$ coïncide avec celle au sens de l'analyse convexe, et $f^{\circ}(x, v)$ coïncide avec $f'(x, v)$ pour tout v.*

Proposition 1.4.3 *Soit f une fonction Lipschitzienne de l'ensemble ouvert convexe U dans E. Alors f est convexe sur U ssi ∂f est monotone sur U i.e., ssi*

$$\langle x-y, \varsigma-\varsigma' \rangle \geq 0 \qquad \forall x, y \in U, \varsigma \in \partial f(x), \varsigma' \in \partial f(y).$$

Lemme 1.4.4 *Soit f une fonction convexe M-Lipschitzienne. Alors*

1. $\forall x \in E, \exists \delta > 0, M > 0,$ *tel que* $\partial f(y) \subset M\overline{\mathbb{B}}$ *pour tout* $y \in x + M\overline{\mathbb{B}}$.
2. $\forall x : [0,T] \to E$ *une fonction Lipschitzienne nous avons*

$$\frac{d}{dt}(f \circ x)(t) = \langle \partial f(x(t)), \dot{x}(t) \rangle \quad \textit{pourtout } t \in [0,T].$$

La preuve de la partie 1 dans le lemme est standard et déduite directement de la définition du sous différentiel. La seconde partie est un résultat de Brezis [11] ou Brezis [12].

Proposition 1.4.5 *Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction M-Lipschitzienne. Alors*

(a) $\partial f(x)$ *est un sous ensemble non vide, convexe et* $faiblement^*$*-compact de* E^**, et* $\|\varsigma\|_* \leq M$ *pour tout* $\varsigma \in \partial f(x)$.

(b) *pour tout* $v \in E$ *nous avons*

$$f^\circ(x,v) = \max\{\langle \varsigma, v \rangle ; \varsigma \in \partial f(x)\}.$$

(c) $\varsigma \in \partial f(x)$ *si seulement si* $f^\circ(x,v) \geq \langle \varsigma, v \rangle \;\; \forall v \in E$.

(d) *si* (x_n) *et* (ς_n) *sont deux suites de* E *et* E^* *tells que* $\varsigma_n \in \partial f(x_n)$ *pour tout* n*, et si* x_n *converge vers* x *et* ς_n *converge* $faiblement^*$ *vers* ς*, alors* $\varsigma \in \partial f(x)$.

(e) *Si E est un espace de dimension finie, alors $\partial f(x)$ est semi-continu supérieurement au point x.*

Proposition 1.4.6 *Soit f une fonction Lipschitzienne. Alors*

(a) *si f est strictement différentielle au point x, alors f est régulière au point x,*

(b) *si f est convexe, alors f est est régulière.*

1.5 Multi-applications et Sélections

1.5.1 Généralités sur les Multi-applications

Définition 1.5.1 *Soient X, Y deux ensembles non vides. Une multi-application (ou fonction multivoque) F définie sur X à valeurs dans Y est une fonction qui à chaque élément $x \in X$ associe un sous ensemble $F(x)$ de Y, on note $F : X \rightrightarrows Y$ ou $F : X \to P(Y)$, ($P(Y)$ est l'ensemble des parties de Y).*
Le domaine, le graphe et l'image de la multi-application $F :\rightrightarrows Y$ sont donnés par
$D(F) = Dom(F) = \{x \in X/F(x) \neq \emptyset\}$
$gr(F) = \{(x, y) \in X \times Y/x \in D(F), y \in F(x)\}$
$Im(F) = \bigcup_{x \in D(F)} F(x)$.

1.5.2 Quelques théorèmes sur les Sélections des Multi-applications

Définition 1.5.2 *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On appelle sélection de F toute application $f : X \to Y$ vérifiant $f(x) \in F(x) \quad \forall x \in X$.*

Théorème 1.5.1 ***(théorème d'existence de sélections mesurables)*** *Soient (J, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique complet séparable et $F : J \rightrightarrows X$ une multi-application Σ-mesurable à valeurs fermées. Alors F admet au moins une sélection mesurable.*

1.6 Mesurabilité des multi-applications

Pour une étude très détallée sur la mesurabilité des multi-applications on peut se référer à [14], [17].

Définition 1.6.1 *Soient (J, Σ)un espace mesurable, X un espace métrique et $\Gamma : J \rightrightarrows X$. On dit que Γ est $(\Sigma, \mathbb{B}(X))$-mesurable ou tout simplement Σ-mesurable si pour tout ouvert V de X*
$\Gamma^{-1}(V) = \{t \in J/\Gamma(t) \bigcap V \neq \emptyset\} \in \Sigma$.

Définition 1.6.2 *Soient (J, Σ, μ) un espace mesuré fini, X un espace métrique séparable et $\Gamma : J \rightrightarrows X$ une multi-application à valeurs non vides fermées. Alors l'ensemble de*

toutes les sélections mesurable de Γ *est défini par*
$\mathcal{S}_\Gamma^1 = \{f \in \mathbb{L}_X^1(J)/f(t) \in \Gamma(t), \mu.p.p\}$.
Il est clair que $\mathcal{S}_\Gamma^1$ *est fermé. En utilisant le théorème de sélection d'Aumann, on peut voir que* $\mathcal{S}_\Gamma^1$ *est non vide si et seulement si la fonction*
$x \longmapsto \inf_{x\in\Gamma(t)} \|x\|$, *appartient à* $\mathbb{L}_{\mathbb{R}^+}^1(J)$. *C'est le cas lorsque la fonction* $t \longmapsto |\Gamma(t)| = \sup_{x\in\Gamma(t)} \|x\|$ *appartient à* $\mathbb{L}_{\mathbb{R}^+}^1(J)$.

Définition 1.6.3 *Une multi-application* $\Gamma : J \rightrightarrows X$ *est dite intégrablement bornée ou scalairement intégrable si* Γ *est mesurable et la fonction* $t \longmapsto |\Gamma(t)|$ *appartient à* $\mathbb{L}_{\mathbb{R}^+}^1(J)$.

Lemme 1.6.1 *Soient* (J, Σ) *un espace mesurable,* X *un espace métrique complet séparable et* $\Gamma : J \rightrightarrows X$ *une multi-application à valeurs non vides fermées. Considérons les propriétés suivantes*

(i) $\Gamma^{-1}(B) \in \Sigma$, *pour tout Borélien* B *de* X,

(ii) $\Gamma^{-1}(C) \in \Sigma$, *pour tout* C *de* X,

(iii) $\Gamma^{-1}(V) \in \Sigma$, *pour tout* V *de* X,

(iv) *il existe une suite* (σ_n) *de sélections mesurables de* Γ *telle que*

$$\forall t \in J, \Gamma(t) = \{\overline{\sigma_n(t)}\}_{n\in\mathbb{N}},$$

(v) $\forall x \in X$, *la fonction distance* $d(x, \Gamma(.))$ *est mesurable,*

(vi) *le graphe de* Γ *appartient à* $\Sigma \otimes \mathfrak{B}(X)$.

Alors $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (v) \Rightarrow (vi)$.
Si X *est un espace de Banach séparable et* Γ *est à valeurs convexes compactes, alors la mesurabilité de* Γ *est équivalente à la mesurabilité de la fonction support* $\delta^*(x', \Gamma(.))$, *pour tout* $x' \in X'$.

Lemme 1.6.2 *Soient* (J, Σ, ν) *un espace mesuré avec* $\nu \geq 0$, σ*-finie et* Σ ν*-complète. Soient* X *un espace métrique complet et* $\Gamma : J \rightrightarrows X$ *une mult-application à valeurs non vides fermées, alors*

$$(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v) \Leftrightarrow (vi).$$

1.7 Concepts de continuité des multi-applications

Pour plus de détails sur la semi-continuité supérieure et la semi-continuité inférieure des multi-applications voir [3] et [24].

Définition 1.7.1 *Soient X, Y deux espace topologiques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. Alors F est dite semi-continue supérieurement (s.c.s) au point $x_0 \in X$ si pour tout ouvert V de Y tel que $F(x_0) \subset V$ il existe un voisinage U de x_0 et $F(x) \subset V, \forall x \in U$. On dit que F est s.c.s sur X si elle est s.c.s en tout point $x \in X$. Nous avons les propriétés suivantes*

i) le graphe d'une multi-application s.c.s à valeurs fermées est fermé, Donc si F est s.c.s à valeurs fermées, $\limsup\limits_{x' \to x} F(x') \subset F(x)$,

ii) si Y est compact et F à valeurs compactes et $gr(F)$ est fermé dans $X \times Y$ alors F est s.c.s.

Théorème 1.7.1 *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application, alors les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) F est semi-continue inférieurement sur X.

(ii) l'ensemble $F_+^{-1}(G) := \{x \in X : F(x) \subset G\}$ est un fermé de X pour tout fermé G de Y.

(iii) l'ensemble $F^{-1}(M) := \{x \in X : F(x) \cap M \neq \emptyset\}$ est un ouvert de X pour tout ouvert M de Y.

(iv) $\overline{F_+^{-1}(U)} \subseteq F_+^{-1}(\overline{U})$ pour tout sous ensemble U de Y.

Définition 1.7.2 *Soient X, Y deux espaces topologiques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. Alors F est dite semi-continue inférieurement (s.c.i) au point $x_0 \in X$ si pour tout ouvert V de Y tel que $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$, il existe un voisinage U de x_0 et $F(U) \cap V \neq \emptyset$. On dit que F est s.c.i sur X si elle est s.c.i en tout point $x \in X$.*

Théorème 1.7.2 *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application, alors les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) F est semi-continue supérieurement sur X.

(ii) l'ensemble $F_+^{-1}(G) := \{x \in X : F(x) \subset G\}$ est un ouvert de X pour tout ouvert G de Y.

(iii) *l'ensemble* $F^{-1}(M) := \{x \in X : F(x) \cap M \neq \emptyset\}$ *est un fermé de* X *pour tout fermé* M *de* Y*.*

(iv) $\overline{F^{-1}(U)} \subseteq F^{-1}(U)$ *pour tout sous ensemble* U *de* Y*.*

Proposition 1.7.3 *Soit* $F : X \rightrightarrows Y$ *une multi-application à valeurs compactes semi-continue supérieurement sur* X*. Alors pour chaque ensemble compact* $K \subset X$*, l'image* $F(K) := \bigcup_{x\in K} F(x)$ *est un compact de* Y*.*

Théorème 1.7.4 *Soient* X, Y *deux espaces métriques et* $F : X \rightrightarrows Y$ *une multi-application à valeurs compactes. Si* Y *est compact et si le graphe de* F *est fermé dans* $X \times Y$ *alors* F *est semi-continue supérieurement.*

Théorème 1.7.5 *Soient* X, Y *deux espaces métriques et* $F : X \rightrightarrows Y$ *une multi-application à valeurs fermées et semi-continue supérieurement. Alors le graphe de* F *est fermé dans* $X \times Y$*.*

Théorème 1.7.6 ***(Théorème d'Ascoli-Arzelà)***
Soit (I, d) *un espace métrique,* (F, d') *un espace métrique complet* $H \subset \mathcal{C}(I, F)$ *muni de la topologie de la convergence uniforme Alors*
H *est relativement compact*

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} i) \;\; H \;\; est \;\; \acute{e}quicontinu \\ ii) \;\; H(x) \;\; est \;\; relativement \;\; compact \end{cases}$$

tel que, $H(x) = \{h(x)/h \in H\}$*.*

Voila une conséquence du Théorème d'Ascoli-Arzelà

Théorème 1.7.7 *Soit* I *un compact de* $\mathbb{R}$*,* $(E, \|.\|)$ *un espace de dimension finie* $(E = \mathbb{R}^n)$*, et soit* $(f_n)_n$ *une suite de fonctions absolument continues définies sur* I *à valeurs dans* E $(f_n : I \longrightarrow E)$ *telle que*

1. $\forall t \in I, \{f_n(t)\}$ *est un sous ensemble relativement compact de* E*,*
2. *il existe un fonction* $h \in \mathbb{L}^1_{\mathbb{R}^+}(I)$ *telle que* $\|\dot{f}_k(t)\| \leq h(t), p.p$ *sur* I*.*

Alors, il existe une sous suite de (f_n) *qu'on note aussi* (f_n) *convergeant vers une fonction absolument continue* $f : I \longrightarrow E$ *au sens suivant*

1. (f_n) *converge uniformément vers* f
2. $(\dot{f}_n)$ *converge faiblement* $*$ *vers* $\dot{f}$ *dans* $\mathbb{L}^1_E$.

Théorème 1.7.8 ***(théorème de la fermeture dans*** [17]***)***
Soient E *une espace de Banach séparable* X *un espace topologique et* Φ *une multi-application définie sur* $[0,T] \times X$ *à valeurs non vides convexes compactes dans* E *et telle que pour tout* $t \in [0,T]$ *fixé* $\Phi(t,.)$ *est s.c.s*
Soient x_n, x *des fonctions définies sur* $[0,T]$ *à valeurs dans* X *et* y_n, y *des fonctions définies sur* $[0,T]$ *à valeurs dans* E. *Supposons que*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$ *p.p sur* $[0,T]$

(ii) (y_n) *converge vers* y $\sigma(\mathbb{L}^1_E, \mathbb{L}^\infty_{E'})$

(iii) $y_n(t) \in \Phi(t, x_n(t))$ *p.p sur* $[0,T]$

Alors $y(t) \in \Phi(t, x(t))$ *p.p sur* $[0,T]$.

1.7.1 Quelques résultats de convergence

Les résultats suivants sont pris de la référence [20].

Théorème 1.7.9 ***(Théorème de convergence de Lebesgue)***
Si la suite (f_n) *de fonctions définies* μ*-p. p sur* H *à valeurs dans* $\overline{\mathbb{R}}$, *converge* μ*-p.p vers une fonction* f *et si de plus les* f_n *supposées* μ*-intégrables vérifient* μ*-p.p et pour tout* n *la condition*

$$|f_n(x)| \leq g(t)$$

où g *est une fonction* μ*-intégrable indépendante de* n *alors* f *est* μ*-intégrable et on a*

$$\mu(f) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(f_n).$$

Lemme 1.7.10 ***(Lemme de Fatou)*** *Soit* (f_n) *une suite majorée (resp. minorée) dans* $\mathbb{L}^1_H(\mu)$ *telle que la suite* $\mu(f_n)$ *est minorée (resp. majorée) dans* $\mathbb{R}$. *Alors la limite supérieure (resp. inférieure) de la suite* (f_n) *est* μ*-intégrable et l'on a*

$$\mu(\lim_{n\longrightarrow\infty} \sup f_n) \geq \lim_{n\longrightarrow\infty} \sup \mu(f_n)$$

$$(resp.\mu(\lim_{n\longrightarrow\infty} \inf f_n) \leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \inf \mu(f_n))$$

Théorème 1.7.11 $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$
f est semi-continue inférieurement au point $a \in H \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists V \in V(a)/\forall x \in V$
$f(x) - f(a) > -\varepsilon$
f est semi-continue supérieurement au point $a \in H \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists W \in v(a)/\forall x \in W$
$f(x) - f(a) < \varepsilon$
On dira que f est continue au point a si seulement si elle est semi-continue inférieurement et semi-continue supérieurement au point a

Proposition 1.7.12 (H, d) *un espace métrique*
$f : H \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *Alors*
f est semi-continue inférieurement au point $a \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to a} \inf f(x) \geq f(a)$
f est semi-continue supérieurement au point $a \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to a} \sup f(x) \leq f(a)$.

1.8 Quelques résultats de compacité

Les résultats suivants sont pris de la référence [5], [24] et [23].

Théorème 1.8.1 ***(Théorème de Banach Dieudonné)***
Soient E un espace de Banach, $\overline{\mathbb{B}}_{E'}$ la boule unité fermée de E'. Alors sur $\overline{\mathbb{B}}_{E'}$ la topologie de la convergence faible coïncide avec la topologie de la convergence compacte.
$(\overline{\mathbb{B}}_{E'}, \sigma(E', E))$ *est métrisable.*

Théorème 1.8.2 *Soit K un sous ensemble borné convexe de E. Alors K est compact si et seulement si la fonction $x' \mapsto \delta^\star(x', K)$ est continue sur $\overline{\mathbb{B}}_{E'}$ munie de la topologie de la convergence compacte.*

Théorème 1.8.3 ***(Théorème de Banach -Alaoglu-Bourbaki)***
Soient E un espace de Banach. Alors la boule fermée de E' est compacte pour la topologie $\sigma(E', E)$.

Théorème 1.8.4 ***(Théorème d'Alaoglu)***
Soient E un espace de Banach séparable et soit $M' \subset E'$, si M' est borné pour la norme de E' et fermé pour la topologie $\sigma(E', E)$. Alors M' est compacte pour cette topologie.

Théorème 1.8.5 ***(Théorème d'Eberlein-Smùlian)***
Soit S un sous ensemble d'un espace de Banach. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes

(i) S est faiblement (relativement) séquentiellement compact.

(ii) S est faiblement (relativement) compact.

Théorème 1.8.6 ***(Théorème de Mazure)***
Soient E un espace de Banach et A un sous ensemble compact de E. Alors $\overline{co}(A)$ est compact.

Théorème 1.8.7 *Soient E un espace de Banach et soit M un sous ensemble convexe de E. Alors M est faiblement fermé si et seulement si M est fortement fermé.*

Théorème 1.8.8 ***(Théorème de Banach-Mazur)***
Soit E un espace de Banach et soit (x_n) une suite d'éléments de E convergeant faiblement vers X,
Alors, il existe une suite (z_n) (où (z_n) est une combinaison convexe des éléments $x_n, x_{n+1}, \ldots$) convergeant fortement vers x.

1.9 Quelques Théorèmes du point fixe

On donne dans cette section quelques théorèmes du point fixe qui nous seront utiles dans les démonstrations de nos théorèmes d'existence.

Théorème 1.9.1 ***(Théorème du point fixe pour une contraction)***
Soit E un espace de Banach et f une application de la boule fermée de centre 0 et de rayon $r > 0$ dans E satisfaisant $\|f(x) - f(y)\| \leq \alpha\|x - y\|$, $\forall x, y \in \overline{\mathbb{B}}(0, r)$ avec $0 < \alpha < 1$.
Soit $m = \|f(0)\|$ telle que $m \leq r(1 - \alpha)$.
Alors f admet un unique point fixe.

Théorème 1.9.2 *Soient E un espace de Banach, S un sous ensemble convexe fermé de E et $f : S \longrightarrow S$ une application continue telle que l'image $f(S)$ est relativement compact. Alors f admet un point fixe dans S.*

Théorème 1.9.3 ***(Théorème du point fixe de Schauder-Tikhonov)***
Soient X un espace vectoriel topologique localement convexe, S un sous ensemble non vide convexe compact de X, $f : S \longrightarrow S$ une application continue.
Alors f admet un point fixe dans S.

Théorème 1.9.4 ***(Théorème du point fixe de Kakutani-Ky Fan)***
Soient X un espace topologique séparé localement convexe S un sous ensemble non vide convexe compact de X et $F : S \rightrightarrows S$ une multi-application s.c.s à valeurs non vides convexes fermées.
Alors F admet un point fixe dans S, c'est à dire, il existe $x \in S$ tel que $x \in F(x)$.

Le corollaire suivant du Théorème de Kakutani-Ky Fan nous donne la forme faible de ce dernier

Théorème 1.9.5 *Soient E un espace de Banach, S un ensemble non vide convexe faiblement compact de E et $F : S \rightrightarrows S$ une multi-application faiblement-faiblement s.c.s à valeurs non vides convexes faiblement compactes.*
Alors F admet un point fixe dans S.

Dans toute la suite de ce travail on note par

- $\mathbb{C}_E([0,1])$ l'espace de Banach de toutes les applications continues $u : [0,1] \to E$, muni de la norme sup.
- $\mathbb{W}_E^{1,1}([0,1])$ l'espace de toutes les applications $u \in \mathbb{C}_E([0,1])$ ayant une dérivée faible dans $\mathbb{L}_E^1([0,1])$.
- $\mathbb{W}_E^{2,1}([0,1])$ l'espace de toutes les applications $u \in \mathbb{C}_E([0,1])$ ayant une dérivée première absolument continue et une dérivée seconde faible dans $\mathbb{L}_E^1([0,1])$.
- $\mathbb{W}_E^{2,2}([0,1])$ l'espace de toutes les applications $u \in \mathbb{C}_E([0,1])$ ayant une dérivée première absolument continue et une dérivée seconde faible dans $\mathbb{L}_E^2([0,1])$.

Chapitre 2

Inclusions différentielles du second ordre avec des condition aux limites anti-périodiques

2.1 Introduction

Dans ce chapitre on étudie l'existence de solutions anti-périodiques pour l'inclusion différentielle

$$(P_1)\begin{cases} \ddot{u}(t) + \gamma\dot{u}(t) \in \partial\varphi(u(t)) + F(t, u(t)), \quad p.p \quad t \in [0, T] \\ u(0) = -u(T), \dot{u}(0) = -\dot{u}(T). \end{cases}$$

où $F(.,.)$ est une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs convexes dépend de l'état $u(t)$ et φ est une fonction convexe semi-continue inférieurement.
Les inclusions différentielles du second ordre avec des conditions aux limites anti-périodiques ont été étudié par beaucoup d'auteurs en dimension finie voir **[1]**, **[6]**, **[7]**, **[8]** et **[9]**. Dans [1], les auteurs on considéré le cas où $F(.,.)$ est univoque indépendante de l'état $u(t)$. Il ont prouvé un résultat d'existence et d'unicité pour le problème (P_1) en supposant que $F(t, u(t)) := f(t) \in \mathbb{L}^2_H([0, T])$ et φ est une fonction convexes s.c.i.

Dans ce chapitre nous étendons ce résultat dans deux chemins ; nous considérons le cas où f est non autonome (i.e., f dépend de t et $u(t)$) et on termine cette partie par un résultat d'unicité pour (P_1) avec $F(t, u(t)) := f(t, u(t)$ Lipschitzienne en $u(t)$.

Pour terminer ce chapitre, nous donnons une version en dimension infinie du résultat d'existence précédent, en ajoutant une hypothèse de inf-compacité sur la fonction φ.

2.2 Résultat d'existence pour une inclusion différentielle du second ordre avec des conditions aux limites anti-périodiques

Dans cette section, on se met dans un espace de dimension finie $H := \mathbb{R}^d$. On démontre un théorème d'existence de solution anti-périodiques pour une inclusion différentielle du second ordre dont le coté droit dépend de l'état. Ce résultat étend en particulier ceaux donnés dans [**15**]

Tout d'abord, nous citons quelques résultats qui seront utiles pour la démonstration de notre résultat principal.

Énonçons maintenant, le résultat d'existence de solution du problème (P_1) dans un espace de dimension finie.

2.2.1 Cas d'un espace de dimension finie

Théorème 2.2.1 *(Théorème* 2.1 *dans [**1**]) Soient H un espace de Hilbert réel, $A : D(A) \to H$ un opérateur maximal monotone et $f : \mathbb{R} \to H$ une fonction convexe anti -périodique semi-continue inférieurement et $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe, paire et semi-continue inférieurement.*

1. *Si $b \neq 0$ et $A = \partial\varphi$ et φ pair, Alors il existe une solution unique dans $\mathbb{W}^{2,2}_{loc}(\mathbb{R}, H)$*

pour le problème

$$(P_f)\begin{cases} f(t) \in -a\ddot{u}(t) + b\dot{u}(t) + Au(t), \quad p.p \quad t \in [0,T] \\ u(0) = -u(T), \dot{u}(0) = -\dot{u}(T). \end{cases}$$

2. *Si $b = 0$, $a > 0$ et φ impair, Alors le problème (P_f) admet un solution unique.*

Lemme 2.2.2 *(Lemme 3.1 dans **[15]**) Soient H un espace de Hilbert séparable et soit $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ une fonction à valeurs convexes semi-continue supérieur.*
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}}, (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telle que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}\cup+\infty}$ est une suite de fonction mesurable définies sur $[0,T]$ à valeurs dans H, $\varphi(u_n(t))$ est finie pour tout $n \in \mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ et pour tout $t \in [0,T]$, $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans $L^1_H([0,T])$ vérifiant

(i) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}}$ converge fortement vers $u_\infty \in H$.

(ii) $\xi_n \in \partial\varphi(u_n(t))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque pour tout $t \in [0,T]$ et $(\xi)_n$ converge vers $\xi_\infty \in L^1_H([0,T])$ par rapport à topologie faible $\sigma(L^1_H, L^\infty_H)$.
Alors

$$\xi_\infty(t) \in \partial\varphi(u_\infty(t)).$$

Lemme 2.2.3 *(Lemme 3.2 dans **[15]**) Soient H un espace de Hilbert séparable et soit $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ une fonction à valeurs convexes semi-continue supérieur.*
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}}, (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telle que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}}$ est une suite dans $L^2_H([0,T])$, $\varphi(u_n(t))$ est finie pour tout $n \in \mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ et pour tout $t \in [0,T]$, $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans $L^2_H([0,T])$ vérifiant

(i) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}}$ converge fortement vers $u_\infty \in L^2_H([0,T])$.

(ii) $\xi_n \in \partial\varphi(u_n(t))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque pour tout $t \in [0,T]$ et $(\xi)_n$ converge vers $\xi_\infty \in L^2_H([0,T])$ par rapport à topologie faible $\sigma(L^2_H, L^2_H)$.
Alors

$$\xi_\infty(t) \in \partial\varphi(u_\infty(t)).$$

Nous sommes maintenant en mesure de donner notre principal théorème d'existence dans cette section.

Théorème 2.2.4 *Soit H un espace de Banach séparable et soit $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ une fonction paire, convexe et semi-continue inférieurement (s.c.i) et soit $\gamma \in \mathbb{R}$.*
Soit $F : [0,T] \times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs non vides convexes compactes satisfaisant les hypothèses suivantes

(H_1) F *est mesurable en* t,

(H_2) $F(t,.)$ *est semi-continue supérieurement,*

(H_3) *il existe une fonction* $r \in \mathbb{L}^2_{\mathbb{R}^+}([0,T])$ *telle que* $F(t,u(t)) \in \Gamma(t) := r(t)\overline{\mathbb{B}}_H(0,1)$ *pour tout* $(t,u) \in [0,T] \times H$.

Alors le problème

$$(P_1)\begin{cases} \ddot{u}(t) + \gamma\dot{u}(t) \in \partial\varphi(u(t)) + F(t,u(t)), & p.p \quad t \in [0,T], \\ u(0) = -u(T), \dot{u}(0) = -\dot{u}(T). \end{cases}$$

admet au moins une solution dans $\mathbb{W}^{2,2}_H([0,T])$.

Démonstration.

On appelle q'une fonction $u : [0,T] \longrightarrow H$ est une solution pour le problème (P_1) s'il existe une fonction $h \in \mathbb{L}^2_H([0,T])$ telle que

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) + \gamma\dot{u}(t) \in \partial\varphi(u(t)) + F(t,u(t)), & p.p \quad t \in [0,T], \\ h(t) \in F(t,u(t)), \quad p.p \quad t \in [0,T], \\ u(0) = -u(T), \dot{u}(0) = -\dot{u}(T). \end{cases}$$

On note par $\mathbf{S}^2_\Gamma$ l'ensemble de toute sélection de $\mathbb{L}^2_H([0,T])$ pour Γ.

$$\mathbf{S}^2_\Gamma := \{f \in \mathbb{L}^2_H([0,T]);\ \ f(t) \in \Gamma(t) \ \ p.p \ \ t \in [0,T]\}.$$

D'après le théorème 2.1 dans [1], pour tout $f \in \mathbf{S}^2_\Gamma$, il existe une solution unique u_f dans $\mathbb{W}^{2,2}_H([0,T])$ pour

$$\begin{cases} \ddot{u}_f(t) + \gamma\dot{u}_f(t) \in f(t,u_f(t)) + \partial\varphi(u_f(t)), & p.p \quad t \in [0,T], \\ u_f(0) = -u_f(T), \dot{u}_f(0) = -\dot{u}_f(T). \end{cases}$$

pour tout $f \in \mathbf{S}^2_\Gamma$, on définie la multi-application $\Psi : \mathbf{S}^2_\Gamma \rightrightarrows \mathbb{L}^2_H$ par

$$\Psi(f) = \{g \in \mathbf{S}^2_\Gamma \subset \mathbb{L}^2_H,\ g \in F(t,u_f(t)) \ \ p.p \ \ t \in [0,T]\}.$$

Il est clair que $\Psi(f)$ est un ensemble non vide convexe faiblement compact dans $\mathbf{S}^2_\Gamma$. D'après ce qui procède, nous avons besoin de prouver que la multi-application

$\Psi : \mathbf{S}_\Gamma^2 \rightrightarrows \mathbf{S}_\Gamma^2$ à valeurs convexes faiblement compactes admet un point fixe. D'après le théorème du point fixe de Kakutani-Ky Fan, il suffit de prouver que Ψ est semi-continue supérieurement lorsque $\mathbf{S}_\Gamma^2$ est muni de la topologie faible de $\mathbb{L}_H^2([0,T])$.

Comme $\mathbb{L}_H^2([0,T])$ est séparable, alors $\mathbf{S}_\Gamma^2$ est compact métrisable pour la topologie faible de $\mathbb{L}_H^2([0,T])$. Par conséquent, il revient à montrer que le graphe de Ψ, définie par

$$gph(\Psi) := \{(f,g) \in \mathbf{S}_\Gamma^2 \times \mathbf{S}_\Gamma^2 : g \in \Psi(f)\},$$

est faiblement sequentiellement fermé dans $\mathbf{S}_\Gamma^2 \times \mathbf{S}_\Gamma^2$.

soient (f_n, g_n) une suite d'éléments du graphe de Ψ convergeant vers

$(f,g) \in \mathbf{S}_\Gamma^2 \times \mathbf{S}_\Gamma^2$.

Selon la définition de Ψ, il résulte que u_{f_n} est une solution de $\mathbb{W}_H^{2,2}([0,T])$ pour

$$\begin{cases} \ddot{u}_{f_n}(t) + \gamma \dot{u}_{f_n}(t) \in f_n(t) + \partial\varphi(u_{f_n}(t)), & t \in [0,T] \\ u_{f_n}(T) = -u_{f_n}(0),\ \dot{u}_{f_n}(T) = -\dot{u}_{f_n}(0). \end{cases}$$

avec $f_n \in \mathbf{S}_\Gamma^2$ et $g_n(t) \in F(t, u_{f_n})$ $p.p$ $t \in [0,T]$.

En tenant compte de l'anti-périodicité de $\dot{u}_{f_n}, u_{f_n}$ et les estimation ([2], lemme 2.2)

$$\|\ddot{u}_{f_n}\|_{\mathbb{L}_H^2([0,T])} \leq \|f_n\|_{\mathbb{L}_H^2([0,T])} \leq \|r\|_{\mathbb{L}_H^2([0,T])}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

on obtient

$$\sup_{n\geq 1} \|\dot{u}_{f_n}\|_{\mathbb{C}_H([0,T])} < +\infty \ \ et \ \ \sup_{n\geq 1} \|u_{f_n}\|_{\mathbb{C}_H([0,T])} < +\infty.$$

Alors $(\ddot{u}_{f_n})$ converge faiblement dans $\mathbb{L}_H^2([0,T])$ vers la fonction $w \in \mathbb{L}_H^2([0,T])$ et $\dot{u}_{f_n}$ converge ponctuellement vers la fonction v.

On a

$$\begin{aligned} v(t) &:= \lim_{n\to+\infty} \dot{u}_{f_n}(t) \\ &= \lim_{n\to+\infty} [\dot{u}_{f_n}(0) + \int_0^t \ddot{u}_{f_n}(s)ds] \\ &= \lim_{n\to+\infty} \dot{u}_{f_n}(0) + \int_0^t w(s)ds, \quad \forall t \in [0,T]. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} u(t) &:= \lim_{n\to+\infty} u_{f_n}(t) \\ &= \lim_{n\to+\infty} [u_{f_n}(0) + \int_0^t \dot{u}_{f_n}(s)ds] \\ &= \lim_{n\to+\infty} u_{f_n}(0) + \int_0^t v(s)ds, \quad \forall t \in [0,T]. \end{aligned}$$

on conclut que $u \in \mathbb{W}_H^{2,2}([0,T])$ avec $\dot{u} = v$ et $\ddot{u} = w$ et satisfait les conditions anti-périodiques ; $u(T) = -u(0); \dot{u}(T) = -\dot{u}(0)$.

De plus, (u_{f_n}) converge ver u et $(\dot{u}_{f_n})$ converge ver v pour la topologie faible de $\mathbb{L}_H^2([0,T])$.

En appliquant le lemme 3.1 dans [15] à l'inclusion

$$\ddot{u}_{f_n}(t) + \gamma \dot{u}_{f_n}(t) - f_n(t) \in \partial\varphi(u_{f_n}(t)),$$

on trouve

$$\ddot{u}(t) + \gamma \dot{u}(t) - f(t) \in \partial\varphi(u(t)), \quad p.p.$$

parceque $\ddot{u}_{f_n}(t) + \gamma \dot{u}_{f_n}(t) - f_n(t)$ converge faiblement vers $\ddot{u}(t) + \gamma \dot{u}(t) - f(t)$ et (u_{f_n}) converge ponctuellement vers u. L'unicité donne $u = u_f$.

De plus comme $g_n(t) \in F(t, u_{f_n}(t))$ *p.p* le résultat de fermeture (Théorème (1.5.7)). donne $g(t) \in F(t, u_f(t))$ *p.p.* □

Nous concluons cette partie avec un résultat d'existence et d'unicité relié au théorème précédant. Tout d'abord nous montrons une inégalité de type Poincaré pour les fonctions anti-périodiques.

Lemme 2.2.5 *Soit* $H = \mathbb{R}^d$. *Soit* $w : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ *satisfaisant*
$w(t) = w(0) + \int_0^t \dot{w}(s)ds, \quad \forall t \in [0,T]$ *avec* $w(T) = -w(0)$,
$\dot{w}(t) = \dot{w}(0) + \int_0^t \ddot{w}(s)ds, \quad \forall t \in [0,T]$ *avec* $\dot{w}(T) = -\dot{w}(0), \quad \ddot{w} \in \mathbb{L}_H^2([0,T])$.
Alors, nous avons les inégalités suivantes

(a) $\|w\|_{\mathbb{C}_H([0,T])} \leq \frac{\sqrt{T}}{2} \|\dot{w}\|_{\mathbb{L}_H^2([0,T])}$,

(b) $\int_0^T \|w(t)\|^2 dt \leq \frac{T^2}{\pi^2} \int_0^T \|\dot{w}(t)\|^2 dt$.

Démonstration.

(a) comme $w(t) = w(0) + \int_0^t \dot{w}(s)ds$ et

$w(t) = w(T) - \int_t^T \dot{w}(s)ds, \quad \forall t \in [0,T],$

par addition on obtient

$$2w(t) = \int_0^t \dot{w}(s)ds - \int_t^T \dot{w}(s)ds, \quad \forall t \in [0,T].$$

Alors, on a

$$2\|w(t)\| \quad \leq \quad \int_0^t \|\dot{w}(s)\|ds + \int_t^T \|\dot{w}(s)\|ds = \int_0^T \|\dot{w}(s)\|ds, \quad \forall t \in [0,T].$$

L'inégalité de Holder donne

$$\|w(t)\|_{\mathbb{C}_H([0,T])} = \sup_{t\in[0,T]} |w(t)| \leq \frac{\sqrt{T}}{2}\|\dot{w}(t)\|_{\mathbb{L}^2_H([0,T])}.$$

(b) prolongeons w et $\dot{w}$ par anti-périodicité

$w(t+T) = -w(t) \ et \ \dot{w}(t+T) = -\dot{w}(t), \ t \in \mathbb{R}.$

Alors w est $2T$-périodique. En effet,

on a $w(t+2T) = w(t+T+T) = -w(t+T) = w(t),$

d'une façons similaire pour $\dot{w}$.

Maintenant, comme w est $2T$-périodique, T-anti-périodique le résultat prouvé dans

([2] page 10) assure que w a l'expression de Fourier

$$w(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} w_n^1 cos(\frac{(2n-1)\pi t}{T}) + w_n^2 sin(\frac{(2n-1)\pi t}{T}, \quad \forall t \in [0,2T].$$

ici w_n^1, w_n^2 sont des coefficients de Fourier. Alors nous avons

$$\dot{w}(t) = \frac{\pi}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} -(2n-1)w_n^1 sin(\frac{(2n-1)\pi t}{T}) + (2n-1)w_n^2 cos(\frac{(2n-1)\pi t}{T}, \quad \forall t \in [0,2T].$$

L'égalité de Parseval donne

$$\frac{1}{2T}\int_0^{2T} \|w(t)\|^2 dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\|w_n^1\|^2 + \|w_n^2\|^2).$$

De plus on a

$$2T\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\|w_n^1\|^2+\|w_n^2\|^2)\leq 2T\sum_{n\in\mathbb{Z}}(2n-1)^2(\|w_n^1\|^2+\|w_n^2\|^2).$$

Donc, $\int_0^{2T}\|w(t)\|^2dt\leq \frac{T^2}{\pi^2}\int_0^{2T}\|\dot{w}(t)\|^2dt.$

On observe que $\|w(t)\|^2$ et $\|\dot{w}(t)\|^2$ sont T-anti-périodiques parceque

$$\begin{aligned}\|w(t+T)\|^2 &= \|-w(t)\|^2\\ &= \|w(t)\|^2.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\|\dot{w}(t+T)\|^2 &= \|-\dot{w}(t)\|^2\\ &= \|\dot{w}(t)\|^2.\end{aligned}$$

On conclut que

$$\int_0^{2T}\|w(t)\|^2dt=2\int_0^{T}\|w(t)\|^2dt.$$

et

$$\int_0^{2T}\|\dot{w}(t)\|^2dt=2\int_0^{T}\|\dot{w}(t)\|^2dt.$$

Finalement, on obtient l'inégalité désirée

$$\int_0^{2T}\|w(t)\|^2dt\leq\frac{T_2}{\pi^2}\int_0^{T}\|\dot{w}(t)\|^2dt.$$

Le théorème suivant est notre résultat d'existence et d'unicité.

Théorème 2.2.6 *Soit $H=\mathbb{R}^d, \gamma\in\mathbb{R}$. Soit $\varphi: H\longrightarrow]-\infty,+\infty]$ une fonction paire, convexe et semi-continue inférieurement. Soit $f:\mathbb{R}\times H\longrightarrow H$ une fonction de Carathéodory satisfaisant*

(H_1) $\exists L>0$ *tel que* $\|f(t,x)-f(t,y)\|\leq L\|x-y\|, (t,x,y)\in\mathbb{R}\times H\times H,$ *pour tout* $(t,x,y)\in\mathbb{R}\times H\times H.$

(H_2) *il existe un fonction* $r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ $\mathbb{L}^2_{\mathbb{R}}$*-intégrable*
avec $\|f(t,x)\| \leq r(t), \ \forall (t,x) \in \mathbb{R} \times H,$ *pour tout* $(t,x) \in \mathbb{R} \times H.$

(H_3) *Si* $0 < T < \frac{\pi}{\sqrt{L}}$.

Alors l'inclusion

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) + \gamma \dot{u}(t) \in f(t,u(t)) + \partial\varphi(u(t)), & t \in [0,T] \\ u(T) = -u(0), \ \dot{u}(T) = -\dot{u}(0). \end{cases}$$

admet une unique solution anti-périodique dans $\mathbb{W}^{2,2}_H([0,T])$.

Démonstration .

L'existence d'une solution anti-périodique dans $\mathbb{W}^{2,2}_H([0,T])$ assurée par le théorème précédant.

Supposons que (u_1) et (u_2) sont deux solutions pour le problème considéré,

$$\begin{cases} \ddot{u}_1(t) + \gamma \dot{u}_1(t) \in f(t,u_1(t)) + \partial\varphi(u_1(t)), & t \in [0,T] \\ u_1(T) = -u_1(0), \ \dot{u}_1(T) = -\dot{u}_1(0). \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \ddot{u}_2(t) + \gamma \dot{u}_2(t) \in f(t,u_2(t)) + \partial\varphi(u_2(t)), & t \in [0,T] \\ u_2(T) = -u_2(0), \ \dot{u}_2(T) = -\dot{u}_2(0). \end{cases}$$

On pose

$$v_1(t) = \ddot{u}_1(t) + \gamma \dot{u}_1(t) - f(t,u_1(t)), \ v_1 \in \partial\varphi(u_1(t)) \ t \in [0,T],$$

$$v_2(t) = \ddot{u}_2(t) + \gamma \dot{u}_2(t) - f(t,u_2(t)), \ v_2 \in \partial\varphi(u_2(t)) \ t \in [0,T],$$

$$w_{1,2}(t) = u_1(t) - u_2(t), \quad \forall t \in [0,T].$$

Alors, nous avons

$$(\star) \quad \ddot{w}_{1,2}(t) + \gamma \dot{w}_{1,2}(t) - f(t,u_1(t)) + f(t,u_2(t)) = v_1(t) - v_2(t), \quad \forall t \in [0,T]$$

avec $w_{1,2}(T) = -w_{1,2}(0)$ et $\dot{w}_{1,2}(T) = \dot{w}_{1,2}(0)$.

Multiplions $(\star)$ par $w_{1,2}(t)$ et avons intégrons sur $[0,T]$ nous obtenons

$$(\star\star) \quad \int_0^T \langle w_{1,2}(t), \ddot{w}_{1,2}(t)\rangle dt + \gamma \int_0^T \langle w_{1,2}(t), \dot{w}_{1,2}(t)\rangle dt + \int_0^T \langle w_{1,2}(t), f(t,u_2(t)) - f(t,u_1(t))\rangle dt = \langle w_{1,2}(t), v_1(t) - v_2(t)\rangle$$

mais,

$$(\star\star) = \langle w_{1,2}(T), \ddot{w}_{1,2}(T)\rangle - \langle w_{1,2}(0), \ddot{w}_{1,2}(0)\rangle - \int_0^T \langle \dot{w}_{1,2}(t), \dot{w}_{1,2}(t)\rangle dt + \int_0^T \langle u_1(t) - u_2(t), f(t,u_2(t)) - f(t,u_1(t))\rangle dt.$$

par anti-périodicité

$$\langle w_{1,2}(T), \ddot{w}_{1,2}(T)\rangle - \langle w_{1,2}(0), \ddot{w}_{1,2}(0)\rangle = 0,$$

et

$$\int_0^T \langle w_{1,2}(t), \dot{w}_{1,2}(t)\rangle dt = 0.$$

Alors

$$-\int_0^T \langle \dot{w}_{1,2}(t), \dot{w}_{1,2}(t)\rangle dt + \int_0^T \langle u_1(t) - u_2(t), f(t,u_2(t)) - f(t,u_1(t))\rangle dt = \langle w_{1,2}(t), v_1(t) - v_2(t)\rangle$$

La monotonie du sous-différentiel de φ $(\partial\varphi)$ et $(\star\star)$ donnent

$$\begin{aligned}
\|\dot{w}_{1,2}\|^2_{\mathbb{L}^2_H(0,T)} &\leq \int_0^T \|w_{1,2}(t)\|\|f(t,u_2(t)) - f(t,u_1(t))\|dt \\
&\leq L\int_0^T \|w_{1,2}(t)\|\|w_{1,2}(t)\|\|w_{1,2}(t)\|dt \\
&\leq L\int_0^T \|w_{1,2}(t)\|^2 dt \\
&\leq \frac{LT^2}{\pi^2}\int_0^T \|\dot{w}_{1,2}(t)\|^2 dt \\
&< \frac{L}{L}\int_0^T \|\dot{w}_{1,2}(t)\|^2 dt \\
&< \|\dot{w}_{1,2}\|^2_{\mathbb{L}^2_H(0,T)}.
\end{aligned}$$

En utilisant l'estimation (b).

par conséquent $\|\dot{w}_{1,2}\|^2_{\mathbb{L}^2_H(0,T)} = 0$.

L'inégalité (a) donne $w_{1,2}(t) = u_1(t) - u_2(t) = 0,$ pour tout $t \in [0,T]$.

D'où l'unicité de solution. □

Nous donnons une version en dimension infinie pour le résultat d'existence précédent tout en ajoutant une hypothèse de inf-compacité sur la fonction φ.

2.2.2 Cas d'un espace de Hilbert de dimension infinie

Proposition 2.2.7 *Soit H un espace de Hilbert séparable, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\varphi : H \longrightarrow [0,+\infty]$ une fonction paire, convexe, s.c.i satisfaisant : $\varphi(0) = 0$ et pour tous $M, L > 0$, l'ensemble $\{x \in D(\varphi) : \|x\| \leq M, \varphi(x) \leq L\}$ est compact. Soit $F : [0,T] \times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs non vides convexes compactes satisfaisant les hypothèses du théorème précédant. alors le problème (p_1) admet aux moins une solution dans $\mathbb{W}^{2,2}_H([0,T])$.*

Démonstration.

En utilisant les notations de la démonstration du théorème 2.2.4, on obtient

$$\ddot{u}_{f_n}(t) + \gamma \dot{u}_{f_n}(t) - f_n(t) \in \partial\varphi(u_{f_n}(t)) \quad p.p \;\; t \in [0,T],$$

pour tout $f_n \in \mathbf{S}^2_\Gamma$.

L'absolument continuité de $\varphi(u_{f_n}(.))$ et la règle de composition (voir [12]) donnent

$$\begin{aligned} \langle \ddot{u}_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t)\rangle + \langle \gamma \dot{u}_{f_n}(t) - f_n(t), \dot{u}_{f_n}(t)\rangle &= \langle \partial\varphi(u_{f_n}(t)), \dot{u}_{f_n}(t)\rangle \\ &= \frac{d}{dt}\varphi(u_{f_n}(t)) \end{aligned}$$

pour tout $f_n \in \mathbf{S}^2_\Gamma$. Donc

$$\begin{aligned} \sup_{n\geq 1} \int_0^T |\frac{d}{dt}\varphi(u_{f_n}(t))|dt &= \sup_{n\geq 1} \int_0^T |\langle \ddot{u}_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t)\rangle + \langle \gamma \dot{u}_{f_n}(t) - f_n(t), \dot{u}_{f_n}(t)\rangle|dt \\ &< +\infty \end{aligned}$$

On applique la définition classique du sous-différentielle de la fonction convexe φ, on obtient

$$\varphi(u_{f_n}(t)) - \varphi(0) \leq \langle u_{f_n}(t), \ddot{u}_{f_n}(t) + \gamma \dot{u}_{f_n}(t) - f_n(t)\rangle.$$

et par suite

$$\varphi(u_{f_n}(t)) + \langle -u_{f_n}(t), \ddot{u}_{f_n}(t) + \gamma \dot{u}_{f_n}(t) - f_n(t)\rangle \leq \varphi(0) = 0$$

Alors, $\sup\limits_{n\geq 1}|\varphi(u_{f_n})|_{\mathbb{L}^1_{\mathbb{R}([0,T])}} < +\infty$.
Maintenant, on va montrer que

$$|\varphi(u_{f_n}(t))| \leq L \ \ pour \ \ t \in [0,T], \quad (L \in \mathbb{R}^*_+).$$

pour tout $t \in [0,T]$, nous avons

$$\begin{aligned}\varphi(u_{f_n}(0)) &\leq |\varphi(u_{f_n}(t)) - \varphi(u_{f_n}(0))| \\ &\leq \int_0^T |\frac{d}{dt}\varphi(u_{f_n}(t))|dt + \varphi(u_{f_n}(t)).\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\varphi(u_{f_n}(0)) &\leq \sup_{n\geq 1}\int_0^T |\frac{d}{dt}\varphi(u_{f_n}(t))|dt + \frac{1}{T}\int_0^T \varphi(u_{f_n}(t)) \\ &< +\infty.\end{aligned}$$

d'où,

$$M := \sup_{n\geq 1}\sup_{t\in[0,T]}\|u_{f_n}(t)\| < +\infty, L := \sup_{n\geq 1}\sup_{t\in[0,T]}\varphi(u_{f_n}(t)) < +\infty.$$

par conséquent, l'inf-compacité de φ donne la relative compacité de la suite $(u_{f_n}(t))$ pour la norme de H.

Ensuite pour terminer la démonstration, on reprend les mêmes étapes utilisées dans le théorème précédent. $\square$

Chapitre 3

Inclusion différentielle du premier ordre gouvernée par un sous différentiel et avec une perturbation semi continue mixte.

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on donne un nouveau résultat d'existence pour un problème de Cauchy du premier ordre, gouverné par un sous différentiel et une perturbation semi continue mixte dans un espace de dimension finie de la forme

$$(P_2)\begin{cases} -\dot{u}(t) \in \partial\varphi(u(t)) + F(t, u(t)), \quad p.p \quad t \in [0,T] \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

où $F : [0,T] \times \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ est une multi-application semi-continue mixte et à croissance linéaire, $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe, Lipschitzienne et le sous différentielle de cette fonction $\partial\varphi : \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}$ définie par

$$\partial\varphi(x) = \{\varsigma \in \mathbb{R}^d, f(y) - f(x) \geq \langle\varsigma, y - x\rangle, \forall y \in \mathbb{R}^d\}.$$

On donne maintenant notre résultat principal dans ce chapitre, c'est à dire l'existence de solutions pour le problème (P_2) sous la condition de la semi-continuité mixte de la multi-application F et en utilisant un théorème d'existence d'une multi-sélection semi-continue supérieurement à valeurs convexes pour la multi-application $F,$ en se basant sur le théorème suivant.

Théorème 3.1.1 ***(théorème** 2.1 **dans [25])***
Soit $\mathbb{R}^d$ un espace de dimension finie et soit $F : [0,T] \times \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ une multi-application satisfaisant les conditions suivantes

(H_1) *F est $\mathfrak{L}([0,T]) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-mesurable,*

(H_2) *pour tout $t \in [0,T]$, en chaque point $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $F(t,x)$ est convexe, $F(t,.)$ est semi-continue supérieurement, et lorsque $F(t,x)$ est non convexe, $F(t,.)$ est semi-continue inférieurement sur un voisinage de x,*

(H_3) *il existe une fonction de Carathéodory $f : [0,T] \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^+$ qui est intégrablement bornée et telle que*

$$F(t,x) \cap \overline{\mathbf{B}}(0, f(t,x)) \neq \emptyset,$$

pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$.

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout ensemble compact $\mathbf{K} \subset \mathbb{C}_{\mathbb{R}^d}([0,T])$, il existe une multi-application $\phi : \mathbf{K} \rightrightarrows \mathbb{L}^1_{\mathbb{R}^d}([0,T])$ à valeurs non vides fermées convexes et de graphe fortement faiblement séquentiellement fermé telle que pour tout $u \in \mathbf{K}$ et $v \in \phi(u)$ nous avons

$$v(t) \in F(t, u(t)),$$

et

$$\|v(t)\| \leq f(t, u(t)) + \varepsilon,$$

pour presque tout $t \in [0,T]$.

3.2 Résultat d'existence de solutions pour une inclusion différentielle du premier ordre gouvernée par un sous différentiel et avec une perturbation semi continue mixte.

On donne une application du théorème précédant aux inclusions différentielles du premier ordre. Ceci, en se basant sur une idée donnée dans [**23**], voir aussi [**22**].

Théorème 3.2.1 *Soient $H = \mathbb{R}^d$ un espace du dimension finie, $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe, λ-Lipschitzienne $(\lambda > 0)$. Soit $F : [0,T] \times \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ une multi-application à valeurs non vides compactes satisfaisant les conditions suivantes*

(i) F *est* $\mathfrak{L}([0,1]) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$*-mesurable,*

(ii) *pour tout $t \in [0,1]$, en tout point $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $F(t,x)$ est convexe, $F(t,.)$ est semi-continue supérieurement, et lorsque $F(t,x)$ est non convexe, $F(t,.)$ est semi-continue inférieurement sur un voisinage de x,*

(iii) $F(t,u(t)) \subset (\alpha(t) + \beta(t)\|u\|)\overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^d}(0,1)$,
pour certaines fonctions $\alpha, \beta \in \mathbb{L}^1_{\mathbb{R}}([0,T])$.

Alors le problème (P_2) *admet au moins une solution.*

Démonstration.

<u>**Étape** 1</u>

Soit $\varepsilon > 0$ et $u_0 \in \mathbb{R}^d$ fixé. Soit $r(.) : [0,T] \to \mathbb{R}$ la solution absolument continue de l équation différentielle

$$(3.1)\begin{cases} \dot{r}(t) = \delta(t) + \beta(t)r(t); \\ r(0) = 0. \end{cases}$$

avec $\delta(t) = \varepsilon + \alpha(t) + \beta(t)\|u_0\| + \beta(t)t\lambda$. Nous observons que

$$r(t) = \int_0^t \delta(s)exp(\int_s^t \beta(r)dr)ds \quad \forall t \in [0,T] \quad (3.2)$$

et

$$\dot{r}(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0,T]$$

puisque φ est λ-Lipschitzienne dans $\mathbb{R}^d$,

$$\partial f(u) = \{\varsigma \in \mathbb{R}^d, f(y) - f(u) \geq \langle \varsigma, y-u \rangle, \forall y \in \mathbb{R}^d\} \subset \lambda \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^d} \ \ \forall u \in \mathbb{R}^d.$$

Étape 2

Soit $m_0(t) = \lambda + \dot{r}(t)$ et

$$K := \big\{u \in \mathbb{C}([0,T],\mathbb{R}^d) : \ u(t) = u_0 + \int_0^t \dot{u}(s)ds, \ \|\dot{u}(t)\| \leq m_0(t) \ \ \forall t \in [0,T]\big\}.$$

K est un ensemble convexe compact de $\mathbb{C}([0,T],\mathbb{R}^d)$. En effet, soient u_1, $u_2 \in K$ et $\alpha \in [0,1]$, alors

$$u_1 = u_0 + \int_0^t \dot{u}_1(s)ds, \ \forall t \in [0,T] \ et \ \|\dot{u}_1(t)\| \leq m_0(t),$$

et

$$u_2 = u_0 + \int_0^t \dot{u}_2(s)ds, \ \forall t \in [0,T] \ et \ \|\dot{u}_2(t)\| \leq m_0(t).$$

Alors,

$$\begin{aligned}(\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2)(t) &= \alpha u_1(t) + (1-\alpha)u_2(t) \\ &= \alpha u_1(0) + (1-\alpha)u_2(0) + \int_0^t [\alpha \dot{u}_1(s) + (1-\alpha)\dot{u}_2(s)]ds \\ &= (\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2)(0) + \int_0^t (\alpha \dot{u}_1 + (1-\alpha)\dot{u}_2)(s)ds,\end{aligned}$$

comme

$$\begin{aligned}\|(\alpha \dot{u}_1 + (1-\alpha)\dot{u}_2)(t)\| &\leq \alpha\|\dot{u}_1(t)\| + (1-\alpha)\|\dot{u}_2(t)\| \\ &\leq \alpha m_0(t) + (1-\alpha)m_0(t) = m_0(t),\end{aligned}$$

alors $\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2 \in K$, d'où la convexité de K.

On doit montrer que K est compact.

Nous avons pour tout $t_1, t_2 \in [0,T]$ et pour tout $u \in K$

$$\begin{aligned}
\|u(t_2) - u(t_1)\| &= \|u_0 + \int_0^{t_2} \dot{u}(s)ds - u_0 - \int_0^{t_1} \dot{u}(s)ds\| \\
&= \| \int_0^{t_2} \dot{u}(s)ds - \int_0^{t_1} \dot{u}(s)ds\| \\
&= \| \int_0^{t_2} \dot{u}(s)ds + \int_{t_1}^{0} \dot{u}(s)ds\| \\
&= \| \int_{t_1}^{t_2} \dot{u}(s)ds\| \\
&\leq \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{u}(s)\|ds \\
&\leq \int_{t_1}^{t_2} m_0(s)ds,
\end{aligned}$$

Comme $m_0 \in \mathbb{L}^1([0,T],\mathbb{R}^d))$, on conclut que l'ensemble K est équicontinu.

D'autre part, pour tout $t \in [0,T]$, on a

$$\begin{aligned}
\|u(t)\| &= \|u_0 + \int_0^{T} \dot{u}(s)(s)ds\| \\
&\leq \|u_0\| + \int_0^{T} \|\dot{u}(s)(s)\|ds \\
&\leq \|u_0\| + \int_0^{T} m_0(s)ds = \|u_0\| + \|m_0\|_{\mathbb{L}^1([0,T],\mathbb{R})} < \infty.
\end{aligned}$$

Alors $u(t)$ est borné dans $\mathbb{R}^d$ qui est de dimension finie.

D'après le théorème d'Ascoli-Arzelà (Théorème 1.5.7 chapitre 1), l'ensemble $K(t)$ est relativement compact dans $\mathbb{C}_H([0,T])$ et par suite K est relativement compact dans $\mathbb{C}_H([0,T])$.

Montrons maintenant que K est fermé.

Soient $(u_n)_n$ une suite d'élément de K convergeant uniformément vers $u \in \mathbb{C}([0,T],\mathbb{R}^d)$, nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n(t) = u_n(0) + \int_0^t \dot{u}_n(s)(s)ds \quad pourtout \;\; t \in [0,T]$$

et

$$\|\dot{u}_n(t)\| \leq m_0(t) \;\; p.p.$$

En posant $g_n(t) = \frac{\dot{u}_n(t)}{m_0(t)}$, on aura

$\|g_n(t)\| = \frac{\|\dot{u}_n(t)\|}{m_0(t)} \leq 1.$

Alors $(g_n)_n \subset \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{L}^\infty_{\mathbb{R}^d}}(0,1)$.

Comme $\overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{L}^\infty_{\mathbb{R}^d}}(0,1)$ est $faiblelement^*$ compact (Théorème 1.6.3 dans le chapitre 1).

Donc on peut extraire à (g_n) une sous suite notée aussi (g_n) et qui converge $faiblelement^*$

vers $g \in \mathbb{L}^\infty_{\mathbb{R}^d}([0,T])$ et donc la suite $(\dot{u}_n)$ converge $faiblelement^*$ vers une fonction

$w = m_0 g$.En effet

comme $g_n \rightharpoonup^* g$ on aura

$$\forall z(.) \in \mathbb{L}^1_{\mathbb{R}^d}([0,T]) \ \ \langle g_n(.), z(.)\rangle \longrightarrow \langle g(.), z(.)\rangle \qquad (\star).$$

Soit

$$y(.) \in \mathbb{L}^\infty_{\mathbb{R}^d}([0,T]) \quad \langle \dot{u}_n(.), y(.)\rangle = \langle m_0(.)g_n(.), y(.)\rangle = \langle g_n(.), m_0(.)y(.)\rangle.$$

puisque $\forall y(.) \in \mathbb{L}^\infty_{H'}([0,T]) = \mathbb{L}^\infty_H([0,T]) \subset \mathbb{L}^1_H([0,T])$ et

$m_0(.) \in \mathbb{L}^1_H([0,T]) \Longrightarrow m_0(.)y(.) \in \mathbb{L}^\infty_H([0,T])$.

Par $(\star)$ en posant $z(.) = m_0(.)y(.)$

on aura $\langle g_n(.), m_0(.)y(.)\rangle \longrightarrow \langle g(.), m_0(.)y(.)\rangle$.

Alors $\forall y(.) \in \mathbb{L}^\infty_{\mathbb{R}^d}([0,T])$ $\langle \dot{u}_n(.), y(.)\rangle \longrightarrow \langle m_0(.)g(.), y(.)\rangle$ c'est à dire $\dot{u}_n \rightharpoonup m_0 g = w$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} \langle \dot{u}_n(s), y(s)\rangle = \langle w(s), y(s)\rangle$

et par suite $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^T \langle \dot{u}_n(s), y(s)\rangle ds = \int_0^T \langle w(s), y(s)\rangle ds,$

en particulier pour $y(.) = I_{[0,T]}(.)e_j$, (e_j) est une base de H.

On a $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^T \langle \dot{u}_n(s), I_{[0,T]}(s)e_j\rangle ds = \int_0^T \langle w(s), I_{[0,T]}(s)e_j\rangle ds,$

alors $\langle \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^T \dot{u}_n(s), I_{[0,T]}(s)e_j\rangle ds = \langle \int_0^T w(s), I_{[0,T]}(s)e_j\rangle ds,$

Donc $\langle \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^T \dot{u}_n(s), e_j\rangle ds = \langle \int_0^T w(s), e_j\rangle ds,$ pour $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \int_0^T \dot{u}_n(s)ds = \int_0^T w(s)ds.$

Comme

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow\infty} u_n(t) = u(t) &= u_0 + \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_0^T \dot{u}_n(s) \\
&= u_0 + \int_0^T \lim_{n\longrightarrow\infty} \dot{u}_n(s)ds \\
&= u_0 + \int_0^T w(s)ds.
\end{aligned}$$

On conclut que $\dot{u} = w$ et par suite

$$u(t) = u_0 + \int_0^T \dot{u}(s)ds, \quad \|\dot{u}(t)\| \leq m_0(t) \ p.p.$$

donc, $u \in K$.

d'où la compacité de K.

Étape 3

En appliquant le Théorème 3.1.1 sur F, on obtient l'existence d'une multi-application $\phi : K \rightrightarrows \mathbb{L}^1([0,T], \mathbb{R}^d)$ à valeurs fermées non vides, convexes et de graphe fortement faiblement séquentiellement fermé telle que pour tout $u \in K$, et tout $\psi \in \phi(u)$, nous avons

$$\psi(t) \in F(t, u(t))$$

et

$$\begin{aligned}
\|\psi(t)\| &\leq \alpha(t) + \beta(t)\|u(t)\| + \varepsilon, \quad p.p \\
&\leq \alpha(t) + \beta(t)(\|u_0\| + \int_0^t \|\dot{u}(s)\| + \varepsilon \\
&\leq \alpha(t) + \beta(t)(\|u_0\| + \int_0^t m_0(s)ds + \varepsilon \\
&\leq \alpha(t) + \beta(t)(\|u_0\| + \int_0^t (\lambda + \dot{r}(s)ds + \varepsilon \\
&\leq \alpha(t) + \beta(t)\|u_0\| + \lambda\beta(t)T + \beta(t)r(t) + \varepsilon = \delta(t) + \beta(t)r(t) = \dot{r}(t) \qquad (3.3).
\end{aligned}$$

Étape 4

Considérons la multi-application $\Gamma : K \rightrightarrows \mathbb{C}([0,T],\mathbb{R}^d)$ définie par

$$\Gamma(u) := \left\{ v \in \mathbb{C}([0,T],\mathbb{R}^d) : \ v(t) = u_0 + \int_0^t (w(s) - \psi(s))ds, \ \forall t \in [0,T]; w(t) \in -\partial\varphi(u(t)) \ \ et \ \psi \in \phi(u). \right\}$$

Soit $u \in K$, pour tout $v \in \Gamma(u)$ et pour presque tout $t \in [0,T]$, par la définition de Γ, on a

$$\dot{v}(t) = w(t) - \psi(t) \ \ p.p \ \ t \in [0,T]. \qquad (3.4)$$

pour tout $\psi \in \phi(u)$ et pour tout application w Lebesgue mesurable satisfiant $w(t) \in -\partial\varphi(u(t))$.

par la relation (3.4) nous avons

$$\begin{aligned} \|\dot{v}(t)\| &= \|w(t) - \psi(t)\| \\ &\leq \|w(t)\| + \|\psi(t)\| \\ &\leq \lambda + \|\psi(t)\|. \end{aligned}$$

et d'après la relation (3.4) nous avons $\|\dot{v}(t)\| \leq \lambda + \dot{r}(t) = m_0(t)$.

de plus $v(.)$ est absolument continue.

donc, $v \in K$.

d'où, $\Gamma(u) \subset K$ pour tout $u \in K$, $e.i.$ $\Gamma : K \rightrightarrows K$.

D'après la définition de Γ il est clair que $\Gamma(u)$ est non vide pour tout $u \in K$.

En effet, F est une multi-application mesurable et à valeurs fermées. Alors d'après le théorème d'existence de sélections mesurables (Théorème 1.3.1 chapitre 1), F admet une sélections mesurable. φ est une fonction convexe et λ-Lipschitzienne, alors le sous différentiel $\partial\varphi(u)$ est mesurable et à valeurs fermées non vide. D'après le théorème d'existence de sélections mesurables (Théorème 1.3.1 chapitre 1), $\partial\varphi$ admet une sélections mesurable .

Donc, $\Gamma(u)$ est non vide pour tout $u \in K$.

Montrons que $\Gamma(u)$ est convexe. Soient $v_1, v_2 \in \Gamma(u)$ et $\alpha \in [0,1]$,

d'après la définition de $\Gamma(u)$ on a

$$v_1 = u_0 + \int_0^t (w_1(s) - \psi_1(s))ds, \ \ \forall t \in [0,T]; w_1 \in \mathbb{L}^1([0,T], \mathbb{R}^d), w_1(t) \in -\partial\varphi(u(t)) \ \ et \ \ \psi_1 \in \phi(u)$$

et

$$v_2 = u_0 + \int_0^t (w_2(s) - \psi_2(s))ds, \ \ \forall t \in [0,T]; w_2 \in \mathbb{L}^1([0,T], \mathbb{R}^d), w_2(t) \in -\partial\varphi(u(t)) \ \ et \ \ \psi_2 \in \phi(u)$$

alors,

$$\begin{aligned}(\alpha v_1 + (1-\alpha)v_2)(t) &= \alpha v_1(t) + (1-\alpha)v_2(t) \\ &= u_0 + \int_0^t [(\alpha w_1(s) + (1-\alpha)w_2(s)) + (\alpha\psi_1(s) + (1-\alpha)\psi_2(s))]ds\end{aligned}$$

Comme $\phi(u)$ et $\partial\varphi(u)$ sont convexes, on aura

$\alpha v_1(t) + (1-\alpha)v_2(t) = u_0 + \int_0^t (w_3(s) - \psi_3(s))ds, \ \ \forall t \in [0,T];$

$w_3 = \alpha w_1(s) + (1-\alpha)w_2(s) \in \mathbb{L}^1([0,T], \mathbb{R}^d), w_3(t) \in -\partial\varphi(u(t)) \ \ et$

$\psi_3 = \alpha\psi_1(s) + (1-\alpha)\psi_2(s) \in \phi(u).$

donc, $\alpha v_1 + (1-\alpha)v_2 \in \Gamma(u)$,

d'où la convexité de $\Gamma(u)$.

Montrons maintenant que $\Gamma(u)$ est compact dans $\mathbb{C}([0,T], \mathbb{R}^d, \|\|_{\mathbb{C}})$.

Comme $\Gamma(u) \subset K$ et K est compact, il suffit de montrer que $\Gamma(u)$ est fermé.

Soit $u \in K$ et soit $(v_n)_n$ une suite d'éléments de $\Gamma(u)$ convergeant vers $v \in \mathbb{C}([0,T], \mathbb{R}^d)$,

alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $w_n \in -\partial\varphi(u)$ et $\psi_n \in \phi(u_n)$ telle que

$$v_n = u_0 + \int_0^t (w_n(s) - \psi_n(s))ds,$$

comme

$$\psi_n(t) \in F(t, u_n(t)), e.i \ \ \psi_n \in \phi(u_n)$$

par la relation $\|\psi_n(t)\| \leq \dot{r}(t)$, il y a une sous suite de (ψ_n) noté aussi (ψ_n) converge $\sigma(\mathbb{L}^1_H([0,T]), \mathbb{L}^\infty_H([0,T]))$ vers $\psi \in \mathbb{L}^1_H([0,T])$.

Et comme (u_n) converge fortement vers u et le graphe de ϕ est séquentiellement fermé, nous avons $\psi \in \phi(u)$, c'est à dire $\psi(t) \in F(t, u(t))$.

D'autre part, comme $w_n \in -\partial\varphi(u_n(t))$, par la relation

$$\|w_n(t)\| \leq \lambda,$$

il y a une sous suite de (w_n) notée aussi (w_n) converge faiblement vers w et (u_n) converge fortement vers u et la semi-continue supérieurement de $\partial\varphi$, en utilisant le théorème de la fermeture (théorème (1.5.7) chapitre 1), on conclut que $w(t) \in -\partial\varphi(u(t))$.

Nous avons

$$\begin{aligned} v(t) &= \lim_{n\to+\infty} v_n(t) = u_0 + \lim_{n\to+\infty} \int_0^t (w_n(s) - \psi_n(s))ds \\ &= u_0 + \int_0^t \lim_{n\to+\infty} (w_n(s) - \psi_n(s))ds \\ &= u_0 + \int_0^t (w(s) - \psi(s))ds, \text{ où } \ w(s) \in -\partial(u(s)) \text{ et } \psi(s) \in \phi(u(s)). \end{aligned}$$

alors, $v \in \Gamma(u)$, donc $\Gamma(u)$ est fermé,

par conséquent $\Gamma(u)$ est compact dans $\mathbb{C}([0,T], \mathbb{R}^d)$.

On va démontrer maintenant la semi-continue supérieurement de $\Gamma : K \rightrightarrows K$.

Pour ça, il suffit de montrer que le graphe de Γ définie par

$$gph(\Gamma) = \{(u,v) \in K \times K, v \in \Gamma(u)\},$$

est fermé dans $K \times K$,

Soit $(u_n, v_n)_n$ une suite d'éléments de $gph(\Gamma)$ convergeant vers $(u,v) \in K \times K$.

Alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe une certaine application $w_n(t) \in -\partial(u_n(t))$ avec $\|w_n(t)\| \leq \lambda$ et $\psi_n(t) \in \phi(u_n(t))$

$$v_n(t) = u_0 + \int_0^t (w_n(s) - \psi_n(s))ds, \quad \forall t \in [0,T].$$

comme $\|w_n(t)\| \leq \lambda$, on obtient l'existence d'une sous suite notée aussi $(w_n)_n$ qui converge vers une fonction $w(.)$, vérifiant $\|w(t)\| \leq \lambda$.

En effet,

comme (u_n) converge uniformément vers u et la semi-continue supérieur de $\partial\varphi(.)$, d'après le théorème de la fermeture, on obtient

$$w(t) \in -\partial\varphi(u(t)) \ \ pourtoutt \in [0, T],$$

d'autre part $\|\psi_n(t)\| \leq \dot{r}(t) \quad p.p \ \ t \in [0, T]$ nous donnent l'existence d'une sous suite notée aussi $(\psi_n)_n$ qui converge vers ψ vérifiant $\|\psi(t)\| \leq \dot{r}(t)$.

En effet,

on a $\psi_n \in \phi(u_n)$, alors $(u_n, \psi_n) \in gph(\phi)$ et comme ϕ est de graphe fortement faible séquentiellement fermé, alors $(u, \psi) \in gph(\phi)$ et par suite $\psi \in \phi(u)$,

de plus (v_n) converge uniformément vers v, alors

$$v(t) = u_0 + \int_0^t (w(s) - \psi(s))ds, \quad w(s) \in -\partial\varphi(u(s)) \ \ et \ \ \psi(s) \in \phi(u(s))$$

Ce qui montre que $(u, v) \in gph(\Gamma)$,

Donc, le graphe de Γ est fermé. D'où la semi-continue supérieure de Γ.

En appliquant le Théorème du point fixe de Kakutani-Kay Fan

(Théorème (1.7.4) chapitre 1) sur la multi-application Γ, on obtient l'existence d'une point fixe $u \in \Gamma(u)$, c'est à dire

$$u(t) = u_0 + \int_0^t (w(s) - \psi(s))ds \ \ p.p \ \ t \in [0, T]$$

et par suite, puisque $u(.)$ est absolument continue

$$i.e \ u(t) = u_0 + \int_0^t \dot{u}(s)ds \ \ p.p \, t \in [0, T]$$

alors

$$\dot{u}(t) = w(t) - \psi(t), \quad w(t) \in -\partial\varphi(u(t)), \psi(t) \in \phi(u(t)),$$

donc,

$$-\dot{u}(t) \in \partial\varphi(u(t)) + \psi(t) \quad avec \quad u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^d$$

on conclut que

$$-\dot{u}(t) \in \partial\varphi(u(t)) + F(t, u(t)) \;\; p.p \; t \in [0, T] \quad avec \quad u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^d.$$

donc, $u(.)$ est une solution de l'inclusion différentielle considérée. $\square$

Conclusion et quelques perspectives

Conclusion

Le travail présenté dans ce mémoire concerne des résultats d'existence pour les inclusions différentielles du second ordre aux espaces de dimension finie et de dimension infinie. Aussi, nous avons démontré un théorème d'existence pour une inclusion différentielle du premier ordre avec une perturbation semi continue mixte aux espaces de dimension finie.

quelques perspectives

- Théorème de sélection dans un espace de dimension infinie.
- Théorème d'existence pour une inclusion différentielle du premier ordre avec une perturbation semi continue mixte aux espaces de dimension infinie.

Bibliographie

[1] S. Aizicovici and N.H. Pavel, Anti - periodic solution to a class of non linear differential equations in Hilbert space -J- Fun -Anal. 99 (1991) 387-408

[2] F. Antonacci and P. Margone, Second order non autonomuous systems with symetric potential dramging sign, rendiconti di Matematica, Serie VIZ, 18, 18 (1998), 367-379

[3] A.P. Aubin et A. Cellina, 1984, Differential Inclusion, *Spring-Verlag, Berln* MR 91d :49001

[4] D. Azzam-Laouir, 2008, Polycopie sur l'analyse multivoque, *Universitéé De Jijel*

[5] D. Azzam-Laouir, Contribution à l'étude de problèmes d'évolution du second ordre, Thèse de doctorat d'état, Constantine, Juin 2003.

[6] D. Azzam-Laouir, C. Castaing and L. Thibault, 2002, Three boundary value problems for second order differential inclusions in Banach spaces. *Control Cybernet, Vol.* 31 No. 3, pp. 659-693.

[7] D. Azzam - Laouir, S. Lounis and L. Thibault, Existence of solutions for nonconvex second order differential inclusions with nonconvex perturbations, Applicable Analysis .86(2007),1199-1210.

[8] D. Azzam - Laouir and S. Lounis, Existence solutions for a cass of second- order differential inclusions, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, Vol 6, Number 2, (2005).

[9] D. Azzam - Laouir and T. Haddad, Existence result for delay second order differential inclusion, Discussiones Mathematicae, differential inclusions, Control and Optimization 28 (2008).

[10] M. Bounkhel and T. Haddad, existenceof viable solutions for nonconvex differential inclusions, vol.2005, no.50,pp.1-10

[11] H. Brezis, Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial differential equations, in 'Contributions to Nonlinear Functional Anajysis ' (E.Zaratonello, Ed.), Academic Press, New York, 1971, pp. 101-156.

[12] H. Brezis, Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert, in 'Math. Studies ,' Vol.5, North -Holland, Amsterdam, 1973.

[13] C. castaing, 1965, sur une extension du théorème de Lyapounov, *C.R.Acad.SC.Paris* t.206. Groupe1 3838-3841.

[14] C. castaing, Quelques résultats de compacité liés à l'intégration. Colloque Anal.Fonct. (parution original) (1971). Bultin de la société mathématique de France, 31-32, 73-81 (1972).

[15] C. Castaing and T. Haddad, Relaxation and bolza problem involving a second order evolution inclusion (2008).

[16] C. Castaing and A.G. Ibrahim, Functial evolution equation governed by m-accretive operators, Adv.Math.Econ.,Vol 5 (2003), 23-54.

[17] C. Castaing and M. Valadier, Convex analysis and measurable multifonctions, Lectures Notes in Mth, 580 Spring-Verlag, Berlin (1977).

[18] A. Cellina and M.V Marchi, Non-convex perturbations of maximal monotone differential inclusion, Isr.G-Math, 46 (1983), 1-11.

[19] G. Colombo, A. Fonda and A. Ornelas, lower semicontinous perturbations of maximal monotone differential inclusion, Isreal J-Math, 61 (1988), 211-218. [8]

[20] R. Descombes, Cours d'analyse, Librairie Vuibert, Paris, (1962).

[21] A.F. Filippov. Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides. Kluwer Academic Publishers, 1988.

[22] T. Haddad, A. Jourani and L. Thibault, Reduction of sweeping process to unconstrained differential inclusion (2000).

[23] T. Haddad and L. Thibault, Mixed upper semicontinuous perturbation of nonconvex sweeping process, to appear.

[24] M. Kisieliwicz, Differential inclusion and optimal control, PWN-Polish Scientific Publishers, Kluwer Academic Publishers, Dortrech / Boston / London.

[25] A.A. Tolstonogov, Solutions of a differential inclusion with unbounded right- hand side (1987).