REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

LABORATOIRE DE MATHEMATIQUES PURES ET APPLIQUEES
(L.M.P.A)

UNIVERSITE DE JIJEL

N° d'ordre: ....
Série: ....

THESE

Présentée à La Faculté Des Sciences
Département De Mathématiques
pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité: Mathématiques
Option: Analyse

Par

LOUNIS SABRINA

Thème

INCLUSIONS DIFFERENTIELLES DU SECOND ORDRE AVEC SECOND MEMBRE NON CONVEXE

Soutenue le: 29 / 10 / 2009
Devant le jury:

Président:	A. Aibeche	Professeur	Université De Sétif
Directeur de thèse:	D. Azzam-Laouir	Professeur	Université De Jijel
Examinateur:	S. Djebali	Professeur	E.N.S De Kouba
Examinateur:	M. Benchohra	Professeur	Université De Sidi Bel Abes
Examinateur:	T. Zerzaihi	Maitre de conférence (A)	Université De Jijel
Examinateur:	T. Haddad	Maitre de conférence (A)	Université De Jijel

Table des matières

Introduction Générale **3**

1 Notations et Préliminaires **6**

1.1 Notations 6

1.2 Préliminaires 7

1.2.1 Quelques notions de mesurabilité 7

1.2.2 La distance de Hausdorff 8

1.2.3 Multi-applications et sélections 9

1.2.4 Mesurabilité des multi-applications 9

1.2.5 Quelques concepts de continuité 13

1.2.6 Quelques théorèmes du point fixe 17

1.2.7 Quelques théorèmes de convergence 18

1.2.8 Quelques résultats de compacité 20

2 Résultats d'existence de solutions pour une inclusion différentielle du second ordre avec une perturbation non convexe **21**

2.1 Résultat d'existence de solutions sous la semicontinuité inférieure de la multi-application H 23

2.2 Résultat d'existence de solutions sous la semicontinuité mixte de la multi-application H 40

3 Résultats d'existence de solutions pour une inclusion différentielle du second ordre avec retard **49**

3.1 Résultat d'existence de solutions sous la semicontinuité inférieure de la multi-application H 51

3.2 Résultat d'existence de solutions sous la semicontinuité mixte de la multi-application H 65

4 Résultats d'existence de solutions pour une inclusion différentielle du second ordre gouvernée par un opérateur maximal monotone et une

perturbation à valeurs non convexes **75**
4.1 Résultat d'existence pour l' inclusion différentielle $(\mathcal{P}_F)$ quand F est bornée par une fonction de $\mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}([0,1])$ 79
4.2 Résultat d'existence pour l'inclusion différentielle $(\mathcal{P}_F)$ quand F est à croissance linéaire 88

Bibliographie **94**

Introduction Générale

Ces dernières années beaucoup de travaux on été consacrés à l'étude des équations et inclusions différentielles vu leurs large applications dans de nombreux domaines de mathématiques, de phisique, et même en économétrie.

Après une grande et large étude des équations et inclusions différentielles du premier ordre, les équations différentielles non linéaires du second ordre de la forme

$$\ddot{u}(t) = f(t, u(t), \dot{u}(t)), \tag{1}$$

ont fait l'objet de nombreux travaux de recherche où les auteurs ont essayé de généraliser ou d'élargir au second ordre les résultats existants au premier ordre, nous citons par exemple les travaux de Hartman [25] qui a fait une étude très détaillée pour l'équation (1) avec des conditions aux limites en deux points, ces travaux ont été généralisés par Gupta [23] avec des conditions aux limites en trois points.

L'existence de solutions pour les inclusions différentielles du second ordre de la forme

$$\ddot{u}(t) \in F(t, u(t), \dot{u}(t)), \tag{2}$$

avec des conditions aux limites en deux points et trois points ont été étudiées dans un espace de dimension finie par Ibrahim-Gomaa [24] et Marano [29]. Dernièrement Azzam-Castaing-Thibault [5], ont généralisé le résultat d'existence de solutions pour l'inclusion différentielle (2) à un espace de Banach séparable.

Observons que l'existence de solutions pour les inclusions différentielles avec les conditions aux limites de la forme

$$\begin{cases} a_1 u(t_0) - a_2 \dot{u}(t_0) = c_1 \\ b_1 u(T) - b_2 \dot{u}(T) = c_2 \end{cases} \tag{3}$$

a été étudié dans la litérature, voir [12] et [18] et leurs références, avec $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2 \geq 0$, $a_1 + b_1 > 0$ et $a_2 + b_2 > 0$ qui est une condition suffisante pour pouvoire construire la fonction de Green pour le problème aux limites considéré.

Des résulats d'existence de solutions de problème avec un second membre à valeurs non convexes ont été établis par plusieurs auteurs. Nous citons par exemple les travaux de Tolstonogov [30], Fryskowski-Górniowicz [22] et Olech [26] pour le premier ordre et dans le cas de la dimension finie, un travail de Averna-Marano [2] pour le second ordre toujours dans un espace de dimension finie et dernièrement un travail de Azzam-Lounis [6] pour le second ordre dans le contexte d'un espace de Banach séparable.

L'existence de solutions pour l'inclusion différentielle du second ordre gouvernée par un opérateur maximal monotone de la forme

$$-\ddot{u}(t) \in A(t)u(t) + F(t, u(t), \dot{u}(t)),$$

avec des conditions aux limites en trois points a été étudiée par plusieurs auteurs. Nous citons par exemple les travaux de Azzam-Castaing-Thibault [5], quand le second membre F est à valeurs non vides convexes compactes semicontinue supérieurement, un travail de Cellina-Marchi [16] concernant les multi-applications à valeurs non convexes et un travail de Colombo-Fonda-Orsenal [17] quand le second membre F est semicontinue inférieurement. Pour le premier ordre nous citons un travil de Castaing-Ibrahim [14].

L'ensemble des travaux de cette thèse est une contribution, dans le même esprit des travaux antérieurs, à l'étude de certaines classes d'inclusions différentielles avec des conditions aux limites en trois points et avec somme de deux perturbations dont l'une est semicontinue mixte.

On présentera dans cette introduction, d'une manière brève les grandes lignes de cette contribution. Cette thèse est composée de quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, on énnonce quelques notions de base qui nous seront utiles par la suite ainsi que quelques résultats préliminaires utilisés dans la démonstration de nos théorèmes d'existence.

Le deuxième chapitre est constitué de deux parties, dans la première on donne un résultat d'exisence de solutions pour une inclusion différentielle du second ordre avec des conditions aux limites en trois points de la forme

$$(\mathcal{P}_{F,H}) \qquad \begin{cases} \ddot{u}(t) \in F(t, u(t), \dot{u}(t)) + H(t, u(t), \dot{u}(t)); \quad p.\ p.\ t \in [0,1], \\ u(0) = 0;\ u(\theta) = u(1), \end{cases}$$

où E est un espace de Banach séparabe, $F : [0,1] \times E \times E \rightrightarrows E$ une multi-application semicontinue supérieurement sur $E \times E$ et $H : [0,1] \times E \times E \rightrightarrows E$ une multi-application semicontinue inférieurement. Dans la seconde partie, nous étudions le même problème d'existence avec H semicontinue mixte et E un espace de dimension finie. La méthode employée dans la démonstration de ce problème consiste à utiliser l'existence de multi-sélections pour les multi-applications semicontinues mixte.

Dans le troisième chapitre, nous nous sommes interéssés à l'étude de l'existence de solutions pour une inclusion différentielle avec retard de la forme

$$(\mathcal{P}_r)\begin{cases} \ddot{u}(t) \in F(t, u(t), u(h(t)), \dot{u}(t)) + H(t, u(t), u(h(t)), \dot{u}(t)); \quad p.\ p.\ t \in [0,1], \\ u(t) = \varphi(t),\ \forall t \in [0,1], \\ u(0) = 0;\ u(\theta) = u(1), \end{cases}$$

qui est une extension au cas avec retard des résultats présentés dans le deuxième chapitre.

Le quatrième chapitre comporte deux sections, la première consiste à traiter l'existence de solutions pour une inclusion différentielle du second ordre gouvernée par un opérateur maximal monotone avec une perturbation semicontinue mixte bornée dans $\mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}([0,1])$ dans un espace de dimension finie de la forme

$$(\mathcal{P}_F)\begin{cases} -\ddot{u}(t) \in A(t)u(t) + F(t, u(t), \dot{u}(t)), \quad p.\ p.\ t \in [0,1], \\ u(0) = 0,\ u(\theta) = u(1). \end{cases}$$

Dans la seconde section, on traite le même problème mais dans le cas où F est à croissance linéaire.

Les résultats du deuxième chapitre ont fait l'objet d'une publication avec les professeurs Dalila Azzam-Laouir et Lionel Thibault parue dans "Applicable Analysis" [8]. Aussi, les résultats du quatrième chapitre on fait l'objet d'une publication avec le professeur Dalila Azzam-Laouir à paraitre dans "Topological methods for Nonlinear Analysis".

Chapitre 1

Notations et Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons des notions de base, quelques résultats fondamentaux sur les multi-applications, des théorèmes de convergence et de compacité. Une partie de ce chapitre est consacrée à la semicontinuité ainssi qu'au principe du point fixe.

1.1 Notations

Soient E un espace de Banach séparable, E' son dual topologique, $\langle .,. \rangle$ leur produit de dualité et $\|.\|$ la norme de E.

On note par

• $\sigma(E, E')$ la topologie faible sur E, E_σ l'espace de Banach E muni de la topologie faible.

• $\overline{\mathbf{B}}_E(0, 1)$ ou $\overline{\mathbf{B}}_E$ la boule unité fermée de E.

• Si A est un ensemble de E alors $\overline{A}$ est la fermeture de A.

• $\mathcal{L}([0, 1])$ la tribu de Lebesgue sur $[0, 1]$.

• $\mathcal{B}(E)$ la tribu de Borel sur E.

• $\mathbf{C}_E([0, 1])$ l'espace de Banach de toutes les applications continues $u : [0, 1] \to E$, muni de la norme sup.

• $\mathbf{C}^1_E([0, 1])$ l'espace de Banach de toutes les applications continues $u : [0, 1] \to E$ ayant une dérivée continue $\dot{u}$, muni de la norme

$$\|u\|_{\mathbf{C}^1} = \max\{\max_{t\in[0,1]} \|u(t)\|, \max_{t\in[0,1]} \|\dot{u}(t)\|\}.$$

• $d\mu(t)$ ou dt la mesure de Lebesgue.

• $\mathbf{L}^1_E([0, 1])$ l'espace des applications Lebesgue-Bochner intégrables définies sur $[0, 1]$ à valeurs dans l'espace de Banach E, c'est à dire, les applications f Lebesgue-Bochner intégrables et telles que $\int\limits_{[0,1]} f d\mu$ est finie.

• $\mathbf{W}^{2,1}_{B,E}([0,1])$ l'espace de toutes les applications $u \in \mathbf{C}_E([0,1])$ ayant une dérivée première absolument continue et une dérivée seconde faible dans $\mathbf{L}^1_E([0,1])$.
Lorsque E est de dimension finie $\mathbf{W}^{2,1}_{B,E}([0,1]) := \mathbf{W}^{2,1}_E([0,1])$.
• $\delta(\cdot, A)$ la fonction indicatrice d'un sous ensemble A de E, définie par

$$\delta(x, A) = \begin{cases} 0 & si\ x \in A \\ +\infty & si\ x \notin A. \end{cases}$$

• la fonction polaire de $\delta(\cdot, A)$ appelée aussi fonction support de A, est la fonction $\delta^*(\cdot, A)$, définie sur E' par

$$\delta^*(\xi, A) = \sup_{x\in A} \langle \xi, x\rangle, \forall \xi \in E'.$$

• χ_A la fonction caractéristique d'une partie A d'un ensemble donné, définie par

$$\chi_A(t) = \begin{cases} 1 & si\ t \in A \\ 0 & si\ t \notin A. \end{cases}$$

• Soit A un sous ensemble d'un espace vectoriel X, on note par $co(A)$ et on l'appelle l'envellope convexe de A l'intersection de tous les sous ensembles convexes contenant A et par $\overline{co}(A)$ et on l'appelle fermeture de l'envellope convexe de A l'intersection de tous les sous ensembles convexes fermés de X contenant A.

1.2 Préliminaires

1.2.1 Quelques notions de mesurabilité

Les définitions et les résultats que nous allons ennoncer sont pris de la référence [3].

Définition 1.2.1 *Soient X un ensemble non vide, Σ une famille de sous ensembles de X. Alors Σ est dite une tribu sur X si*

1. $\emptyset \in \Sigma$,
2. $A \in \Sigma \Longrightarrow X \setminus A \in \Sigma$,
3. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma \Longrightarrow \bigcup_n A_n \in \Sigma$.

Le couple (X, Σ) est appelé espace mesurable, et les éléments de Σ sont appelés ensembles mesurables.
Si la troisième relation est vraie pour les unions finies seulement, on dit alors que Σ est une algèbre sur X.
Si X est un espace topologique, la tribu Borélienne sur X, notée $\mathcal{B}(X)$ est la plus petite tribu contenant la topologie de X.

Définition 1.2.2 *Soient (X_1, Σ_1), (X_2, Σ_2) deux espaces mesurables et g une application définie sur X_1 à valeurs dans X_2, on dit que g est (Σ_1, Σ_2)-mesurable si pour tout $A \in \Sigma_2$ $g^{-1}(A) \in \Sigma_1$.*
Si X_2 est un espace topologique, une application $(\Sigma_1, \mathcal{B}(X_2))$-mesurable est dite application borélienne.

Définition 1.2.3 *Soient (X, Σ) un espace mesurable et Y un espace métrique. Alors une fonction $g : X \to Y$ est dite fortement mesurable ou Bochner mesurable si g est $(\Sigma, \mathcal{B}(Y))$-mesurable et $g(X)$ est séparable.*

Définition 1.2.4 *Soient (X, Σ) un espace mesurable et Y un espace métrique, on dit que la fonction $f : X \to Y$ est Σ-étagée (resp. dénombrablement Σ-étagée) si f est $(\Sigma, \mathcal{B}(Y))$-mesurable et $f(X)$ est fini (resp. dénombrable).*

Lemme 1.2.5 *Sous les notations de la Définitin 1.2.4, nous avons les caractérisations suivantes :*
- *f est Bochner mesurable,*
- *il existe une suite de fonctions Σ-étagées définies sur X à valeurs dans Y, convergeant simplement vers f,*
- *il existe une suite de fonctions dénombrablement Σ-étagées définies sur X à valeurs dans Y, convergeant uniformément sur X vers f.*

1.2.2 La distance de Hausdorff

Définition 1.2.6 *Soient A, B deux sous ensembles d'un espace métrique (X, d), l'écart entre A et B est défini par*

$$e(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B),$$

avec

$$d(a, B) = \inf_{b \in B} d(a, b),$$

et la distance de Hausdorff entre A et B est définie par

$$\mathcal{H}(A, B) = \max\{e(A, B), e(B, A)\}.$$

Propriétés élémentaires
1) $e(A, \emptyset) = \infty$ si $A \neq \emptyset$,
2) $e(\emptyset, B) = 0$,
3) $e(A, B) = 0 \iff A \subset \overline{B}$,
4) $e(A, B) \leq e(A, C) + e(C, B)$, C un sous ensemble de X,
5) $\mathcal{H}(A, B) = 0 \iff \overline{A} = \overline{B}$,
6) $\mathcal{H}(A, B) \leq \mathcal{H}(A, C) + \mathcal{H}(C, B)$.

Si on note par $P_f(X)$, l'ensemble des parties fermées de X, alors $P_f(X)$ muni de la distance de Hausdorff $\mathcal{H}$, est un espace métrique.
Notons que
• si (X,d) est un espace métrique complet, alors $(P_f(X),\mathcal{H})$ l'est aussi,
• si X est séparable, l'ensemble des parties compactes de X, noté $P_k(X)$ muni de $\mathcal{H}$ est aussi séparable.

1.2.3 Multi-applications et sélections

Définition 1.2.7 *Soient X et Y deux ensembles non vides. Une multi-application (ou fonction multivoque) F définie sur X à valeurs dans Y est une fonction qui à chaque élément $x \in X$ associe un sous ensemble $F(x)$ de Y, on note $F : X \rightrightarrows Y$ ou $F : X \to \mathcal{P}(Y)$, ($\mathcal{P}(Y)$ est l'ensemble des parties de Y).*
Le domaine, le graphe et l'image de la multi-application $F : X \rightrightarrows Y$ sont donnés par

$$Dom(F) = \{x \in X \;/F(x) \neq \emptyset\},$$

$$gph(F) = \{(x,y) \in X \times Y :\; x \in Dom(F),\; y \in F(x)\},$$
$$Im(F) = \bigcup_{x \in Dom(F)} F(x).$$

Définition 1.2.8 *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On appelle sélection de F toute application $f : X \to Y$ vérifiant*

$$f(x) \in F(x),\; \forall x \in X.$$

1.2.4 Mesurabilité des multi-applications

Pour une étude très détaillée sur la mesurabilité des multi-applications on peut se référer à [15] et [13].

Définition 1.2.9 *Soient (J,Σ) un espace mesurable, X un espace métrique et $\Gamma : J \rightrightarrows X$. On dit que Γ est $(\Sigma,\mathcal{B}(X))$-mesurable ou tout simplement Σ-mesurable si pour tout ouvert V de X,*
$$\Gamma^{-1}(V) = \{t \in J/\; \Gamma(t) \cap V \neq \emptyset\} \in \Sigma.$$

Lemme 1.2.10 *Soient (J,Σ) un espace mesurable, X un espace métrique complet séparable et $\Gamma : J \rightrightarrows X$ une multi-application à valeurs non vides fermées. Considérons les propriétés suivantes*

(i) $\Gamma^{-1}(B) \in \Sigma$, *pour tout Borélien* B *de* X,
(ii) $\Gamma^{-1}(C) \in \Sigma$, *pour tout fermé* C *de* X,
(iii) $\Gamma^{-1}(V) \in \Sigma$, *pour tout ouvert* V *de* X,
(iv) *il existe une suite* $(\sigma_n)_n$ *de sélections mesurables de* Γ *telle que*

$$\forall t \in J,\ \Gamma(t) = \overline{\{\sigma_n(t)\}}_{n\in\mathbb{N}},$$

(v) $\forall x \in X$, *la fonction distance* $d(x, \Gamma(\cdot))$ *est mesurable,*
(vi) *le graphe de* Γ *appartient à* $\Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$.
Alors ***(i)*** $\Longrightarrow$ ***(ii)*** $\Longrightarrow$ ***(iii)*** $\Longrightarrow$ ***(v)*** $\Longrightarrow$ ***(vi)***.
Si Γ *est à valeurs non vides complètes alors* ***(iii)*** $\Longleftrightarrow$ ***(v)*** $\Longleftrightarrow$ ***(iv)***.
Si Γ *est à valeurs non vides compactes alors* ***(iii)*** $\Longrightarrow$ ***(i)***.
Si X *est un espace de Banach séparable et* Γ *est à valeurs convexes compactes, alors la mesurabilité de* Γ *est équivalente à la mesurabilité de la fonction support* $\delta^*(x', \Gamma(\cdot))$, *pour tout* $x' \in X'$.

Remarque 1.2.11 *La suite* $(\sigma_n)_n$ *dans la relation* ***(iv)*** *est dite une représentation de Castaing de la multi-application* $\Gamma(\cdot)$.

Lemme 1.2.12 *Soit* (J, Σ, ν) *un espace mesuré avec* $\nu \geq 0$, σ*-finie et* Σ ν*-complète. Soient* X *un espace métrique complet et* $\Gamma : J \rightrightarrows X$ *une multi-application à valeurs non vides fermées. Alors*

$$\textbf{\textit{(i)}} \Longleftrightarrow \textbf{\textit{(ii)}} \Longleftrightarrow \textbf{\textit{(iii)}} \Longleftrightarrow \textbf{\textit{(iv)}} \Longleftrightarrow \textbf{\textit{(v)}} \Longleftrightarrow \textbf{\textit{(vi)}}.$$

Théorème 1.2.13 *Soit* (T, Σ) *un espace mesurable, soient* X *et* Y *deux espace métriques séparables. Soient* $\Gamma_1 : T \rightrightarrows X$ *et* $\Gamma_2 : T \rightrightarrows Y$ *deux multi-applications* Σ*-mesurables, alors la multi-application* $\Gamma : T \rightrightarrows X \times Y$ *définie par* $\Gamma(t) = (\Gamma_1(t) \times \Gamma_2(t))$ *est* Σ*-mesurable.*

Théorème 1.2.14 *Soient* (T, Σ) *un espace mesurable,* X *un espace de Banach séparable et* $(\Gamma_i)_{i\in I}$ *une famille de multi-applications* Σ*-mesurables définies de* T *dans* X. *Si* I *est fini alors la multi-application* Γ *définie par* $\Gamma(t) = \sum\limits_{i\in I} \Gamma_i(t)$ *est* Σ*-mesurable.*

Démonstration. On va démontrer ce théorème pour $I = \{1, 2\}$. Soit V un ouvert de X, alors

$$\begin{aligned} \Gamma^{-1}(V) &= \{t \in T :\ \Gamma(t) \bigcap V \neq \emptyset\} \\ &= \{t \in T :\ (\Gamma_1(t) + \Gamma_2(t)) \bigcap V \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Posons

$$W = \{(y_1, y_2) \in X \times X :\ y_1 + y_2 \in V\}.$$

Remarqoons que $W = h^{-1}(V)$ où

$$\begin{array}{rcl} h : X \times X & \rightarrow & X \\ (y_1, y_2) & \mapsto & h(y_1, y_2) = y_1 + y_2 \end{array}$$

est une application continue.
Comme V est un ouvert de X alors W est un ouvert de $X \times X$. Par suite et grâce au Théorème 1.2.13

$$\begin{array}{rcl} \Gamma^{-1}(V) & = & \{t \in T : \ \Gamma(t) \bigcap V \neq \emptyset\} \\ & = & \{t \in T : \ (\Gamma_1(t) \times \Gamma_2(t)) \bigcap W \neq \emptyset\} \in \Sigma, \end{array}$$

on conclut donc que Γ est Σ-mesurable. ■

Théorème 1.2.15 *(Théorème d'existence de sélections mesurables).*
Soient (J, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique complet séparable et $F : J \rightrightarrows X$ une multi-application Σ-mesurable à valeurs fermées. Alors F admet au moins une sélection mesurable.

Définition 1.2.16 *Soit (J, Σ) un espace mesurable. Une multi-application $\Gamma : J \rightrightarrows X$ est dite intégrablement bornée ou scalairement intégrable si Γ est mesurable et la fonction $t \mapsto |\Gamma(t)|$ appartient à $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}(J)$ où $|\Gamma(t)| = \sup_{x \in \Gamma(t)} \|x\|$.*

Définition 1.2.17 *Soient (J, Σ, ν) un espace mesuré fini, X un ensemble métrique séparable et $\Gamma : J \rightrightarrows X$ une multi-application à valeurs non vides fermées. Alors l'ensemble de toutes les sélections Bochner-Lebesgue-intégrables de Γ est défini par*

$$\mathbf{S}^1_{\Gamma} = \{f \in \mathbf{L}^1_X(J) / \ f(t) \in \Gamma(t), \ \nu. \ p.p\}.$$

Il est clair que $\mathbf{S}^1_{\Gamma}$ est fermé (puisque Γ est à valeurs fermées). En utilisant le théorème de sélection d'Aumann (voir [31] Théorème 5.10), on peut voir que $\mathbf{S}^1_{\Gamma}$ est non vide si et seulement si la fonction

$$t \mapsto \inf_{x \in \Gamma(t)} \|x\|$$

appartient à $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}(J)$. C'est le cas lorsque la fonction

$$t \mapsto |\Gamma(t)| = \sup_{x \in \Gamma(t)} \|x\|$$

appartient à $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}(J)$.

Définition 1.2.18 *Soit (J, Σ, ν) un espace mesuré et soit $\Gamma : J \rightrightarrows E$ une multi-application intégrablement bornée. Alors on définit l'intégrale de Γ par*

$$\int_J \Gamma(t) d\nu(t) = \{\int_J f(t) d\nu(t) / \ f \in \mathbf{S}^1_\Gamma\}.$$

Théorème 1.2.19 *Soit (J, Σ, ν) un espace mesuré $\nu \geq 0$, σ-finie est Σ ν-complète. Soient E un espace de Banach séparable et $\Gamma : J \rightrightarrows E$ une multi-application intégrablement bornée à valeurs non vides convexes compactes. Alors $\mathbf{S}^1_\Gamma$ est convexe $\sigma(\mathbf{L}^1_E(J), \mathbf{L}^\infty_{E'}(J))$-compact et l'intégrale multivoque $\int_J \Gamma(t) d\nu(t)$ est norme-compacte.*

Définition 1.2.20 *Soit (J, Σ, ν) un espace mesuré positif . On dit qu'un sous ensemble N de J est ν-négligeable s'il existe $A \in \Sigma$ tel que $N \subset A$ et $\nu(A) = 0$.*

Définition 1.2.21 *Soit (J, Σ, ν) un espace mesuré positif. Alors la tribu complétée Σ_ν de Σ est la tribu engendrée par Σ et tous les ensembles négligeables,*

$$\Sigma_\nu = \{A \cup N : \ A \in \Sigma, \ N \in \mathcal{N}\},$$

$\mathcal{N}$ est l'ensemble des parties ν-négligeables de J.
On note par $\widetilde{\Sigma}$ l'intersection de toutes les tribus complétées de Σ, c'est à dire, $\widetilde{\Sigma} = \bigcap \Sigma_\nu$.

Théorème 1.2.22 *Soient (T, Σ) un espace mesurable et E un espace de Banach séparable. Soient $f : T \to E$ une application mesurable et $\rho : T \to [0, \infty[$ une fonction mesurable. Alors*
1) $t \mapsto \overline{B}(f(t), \rho(t))$ est une multi-application mesurable.
2) Considérons $(T, \widetilde{\Sigma}, \nu)$ un espace mesuré positif avec ν σ-finie. Soit $\Gamma : T \rightrightarrows E$ une multi-application mesurable à valeurs non vides fermées, alors

$$t \mapsto \Xi(t) = \{x \in \Gamma(t) : \|f(t) - x\| = d(f(t), \Gamma(t))\},$$

est $\widetilde{\Sigma}$-mesurable ou $\Xi(t)$ est éventuellement vide.

Démonstration. (Voir [15] et [4]).
1) Posons $G(t) = \overline{\mathbf{B}}(f(t), \rho(t))$, alors $G(t) = f(t) + \rho(t)\overline{\mathbf{B}}(0, 1)$. D'autre part E est un espace de Banach séparable et donc $\overline{\mathbf{B}}(0, 1)$ est séparable, d'où $\overline{\mathbf{B}}(0, 1) = \overline{\{x_n\}_n}$.
Considérons maintenant l'application $g_n : T \to E$ définie par $g_n(t) = f(t) + \rho(t)x_n$, comme ρ est mesurable alors $\rho(\cdot)x_n$ est mesurable et comme f est mesurable et E un espace de Banach alors g_n est mesurable.
De plus

$$\begin{aligned} \overline{\{g_n(t)\}_n} &= \overline{\{f(t) + \rho(t)x_n\}_n} \\ &= f(t) + \rho(t)\overline{\{x_n\}_n} \\ &= f(t) + \rho(t)\overline{\mathbf{B}}(0, 1) = G(t). \end{aligned}$$

Donc G admet une représentation de Castaing et par suite G est mesuarble (Lemme 1.2.11).
2) Montrons maintenant que si Ξ est à valeurs non vides alors elle est $\widetilde{\Sigma}$-mesurable.

$$\begin{aligned}
\mathrm{gph}(\Xi) &= \{(t,x) \in T \times E : \ x \in \Xi(t)\} \\
&= \{(t,x) \in T \times E : \ x \in \Gamma(t) \ et \ \|f(t) - x\| = d(f(t), \Gamma(t))\} \\
&= \{(t,x) \in T \times E : \ x \in \Gamma(t)\} \bigcap \{(t,x) \in T \times E : \ \|f(t) - x\| = d(f(t), \Gamma(t))\} \\
&= \mathrm{gph}(\Gamma) \bigcap \mathrm{gph}(H),
\end{aligned}$$

où H est la multi-application définie de T à valeurs dans E par $H(t) = G(t) = \overline{\mathbf{B}}(f(t), \rho(t))$, avec $\rho(t) = d(f(t), \Gamma(t))$. D'après 1) H est Σ-mesurable et comme Γ est Σ-mesurable, alors d'après le Lemme 1.2.11 $\mathrm{gph}(\Gamma)$, $\mathrm{gph}(H) \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(E)$ et donc $\mathrm{gph}(\Xi) \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(E)$ et par conséquent Ξ est $\widetilde{\Sigma}$-mesurable. ■

Remarque 1.2.23 *Si E est un espace de dimension finie ou si $\Gamma(\cdot)$ est à valeurs compactes alors Ξ est à valeurs non vides.*

1.2.5 Quelques concepts de continuité

Pour plus de détails sur la semicontinuité supérieure et la semicontinuité inférieure des multi-applications voir [1] et [27].

Définition 1.2.24 *Soient X, Y deux espaces topologiques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. Alors F est dite semicontinue supérieurement (s.c.s) au point $x_0 \in X$, si pour tout ouvert V de Y tel que $F(x) \subset V$, il existe un ouvert U de X tel que $x_0 \in U$ et $F(x) \subset V$, $\forall x \in U$.*
On dit que F est s.c.s sur X si elle est s.c.s en tout point $x \in X$.

Définition 1.2.25 *Soient X, Y deux espaces topologiques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. Alors F est dite semicontinue inférieurement (s.c.i) au point $x_0 \in X$, si pour tout ouvert V de Y tel que $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$, il existe un ouvert U de X tel que $x_0 \in U$ et $F(U) \bigcap V \neq \emptyset$.*
On dit que F est s.c.i sur X si elle est s.c.i en tout point $x \in X$.

Voici quelques caractérisations de la semicontinuité supérieure et inférieure.

Proposition 1.2.26 *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application, alors les assertions suivantes sont équivalentes*
(i) *F est semicontinue supérieurement sur X,*
(ii) *l'ensemble $F_+^{-1}(G) = \{x \in X : \ F(x) \subset G\}$ est un ouvert de X pour tout ouvert G*

de Y,
(iii) *l'ensemble $F^{-1}(M) = \{x \in X : \ F(x) \cap M \neq \emptyset\}$ est un fermé de X pour tout fermé M de Y.*

Proposition 1.2.27 *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application, alors les assertions suivantes sont équivalentes*
(i) *F est semicontinue inférieurement sur X,*
(ii) *l'ensemble $F_+^{-1}(M) = \{x \in X : \ F(x) \subset M\}$ est un fermé de X pour tout fermé M de Y,*
(iii) *l'ensemble $F^{-1}(G) = \{x \in X : \ F(x) \bigcap G \neq \emptyset\}$ est un ouvert de X pour tout ouvert G de Y.*

Théorème 1.2.28 *Soient X, Y deux espaces métriques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs fermées et semicontinue supérieurement. Alors le graphe de F est fermé dans $X \times Y$.*

Théorème 1.2.29 *Soient X, Y deux espaces métriques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs compactes. Si Y est compact et si le graphe de F est fermé dans $X \times Y$ alors F est semicontinue supérieurement.*

Théorème 1.2.30 *Soient X, Y deux espaces métriques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. Alors F est semicontinue inférieurement si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ de points de X convergeant vers x_0 et pour tout $y_0 \in F(x_0)$ il existe une suite $(y_n)_n$ telle que $y_n \in F(x_n)$ et $(y_n)_n$ converge vers y_0.*

Définition 1.2.31 *Soient X, Y deux espaces métriques et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application, on dit que F est $\mathcal{H}$-semicontinue inférieurement au point $x_0 \in X$ si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ F(x_0) \subset V(F(x), \varepsilon); \ \forall x \in \mathbf{B}(x_0, \delta),$$

où

$$V(F(x), \varepsilon) = \{y \in Y : \ d(y, F(x) \leq \varepsilon\}.$$

Théorème 1.2.32 *Soient X, Y deux espaces métriques et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs compactes. Alors F est $\mathcal{H}$-semicontinue inférieurement si et seulement si F est semicontinue inférieurement.*

Les résultats que nous allons donné dans la suite sont pris de la référence [4].

Définition 1.2.33 *Soient X et Y deux espaces métriques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. Alors on définit*

$$\limsup_{x' \to x} F(x') = \{y \in Y : \liminf_{x' \to x} d(y, F(x')) = 0\}.$$

$$\liminf_{x' \to x} F(x') = \{y \in Y : \limsup_{x' \to x} d(y, F(x')) = 0\}.$$

Il est clair que

$$\liminf_{x' \to x} F(x') \subset \overline{F(x)} \subset \limsup_{x' \to x} F(x').$$

Théorème 1.2.34 *Soient X et Y deux espaces métriques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application semicotinue supérieurement à valeurs compactes, alors*

$$\limsup_{x' \to x} F(x') = F(x).$$

Pour la démonstration de ce théorème nous avons besoin du corollaire suivant

Corollaire 1.2.35 *Soient X et Y deux espaces métriques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. Si F est semicontinue inférieurement (resp. semicontinue supérieurement à valeurs compactes), alors la fonction $(x, y) \mapsto d(y, F(x))$ est semicontinue supérieurement (resp. semicontinue inférieurement) sur Dom(F).*

Démonstration du Théorème 1.2.34.
Nous avons $\overline{F(x)} \subset \limsup_{x' \to x} F(x')$ et comme F est à valeurs compactes. On a $F(x) \subset \limsup_{x' \to x} F(x')$. Il suffit donc de montrer que $\limsup_{x' \to x} F(x') \subset F(x)$.
Soit $y \in \limsup_{x' \to x} F(x')$, alors $\liminf_{x' \to x} d(y, F(x')) = 0$. Comme F est semicontinue supérieurement, d'après le Corollaire 1.2.35, la fonction $(x, y) \mapsto d(y, F(x))$ est semicontinue inférieurement sur $\mathrm{Dom}(F)$, c'est à dire,

$$\liminf_{x' \to x} d(y, F(x')) \geq d(y, F(x)),$$

et par suite $d(y, F(x)) \leq 0$, donc $d(y, F(x)) = 0$ ce qui implique $y \in \overline{F(x)} = F(x)$ et par conséquent $\limsup_{x' \to x} F(x') \subset F(x)$.$\blacksquare$

Théorème 1.2.36 *Considérons une suite de sous ensembles contenus dans un ensemble compact K d'un espace de Banach séparable E. Alors*

$$\overline{co}(\limsup_{n \to \infty} K_n) = \bigcap_{N > 0} \overline{co}(\bigcup_{n \geq N} K_n).$$

Démonstration

Montrons tout d'abord que

$$\overline{co}(\limsup_{n\to\infty} K_n) \subset \bigcap_{N>0} \overline{co}(\bigcup_{n\geq N} K_n).$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
\bigcup_{n\geq N} K_n \subset co(\bigcup_{n\geq N} K_n) \quad &\Rightarrow \quad \overline{\bigcup_{n\geq N} K_n} \subset \overline{co}(\bigcup_{n\geq N} K_n) \\
&\Rightarrow \quad \bigcap_{N>0} \overline{\bigcup_{n\geq N} K_n} \subset \bigcap_{N>0} \overline{co}(\bigcup_{n\geq N} K_n) \\
&\Rightarrow \quad \overline{co}(\bigcap_{N>0} \overline{\bigcup_{n\geq N} K_n}) \subset \overline{co} \bigcap_{N>0} \overline{co}(\bigcup_{n\geq N} K_n) \\
&\Rightarrow \quad \overline{co}(\bigcap_{N>0} \overline{\bigcup_{n\geq N} K_n}) \subset \bigcap_{N>0} \overline{co}(\bigcup_{n\geq N} K_n).
\end{aligned}$$

Comme

$$\limsup_{n\to\infty} K_n = \bigcap_{N>0} \overline{(\bigcup_{n\geq N} K_n)},$$

alors

$$\overline{co}(\limsup_{n\to\infty} K_n) \subset \bigcap_{N>0} \overline{co}(\bigcup_{n\geq N} K_n).$$

On donne la démonstration de la deuxième inclusion dans un espace de dimension finie. Posons $A = \bigcap\limits_{N>0} \overline{co}(\bigcup\limits_{n\geq N} K_n)$. Soit $x \in A$, alors $x \in \bigcap\limits_{N>0} \overline{co}(\bigcup\limits_{n\geq N} K_n)$ et par suite pour tout $N > 0$, $x \in \overline{co}(\bigcup\limits_{n\geq N} K_n)$, donc x est limite d'une suite $(v_k)_k \subset co(\bigcup\limits_{n\geq N} K_n)$ et par suite pour tout $k > 0$, $v_k = \sum\limits_{j=0}^{p} a_j^k x_{kj}$ tel que $a_j^k \geq 0$, $\sum\limits_{j=0}^{p} a_j^k = 1$ et $x_{kj} \in \bigcup\limits_{n\geq N} K_n$.
Soit $a^k = (a_0^k, a_1^k, ..., a_p^k) \in \mathbb{R}^{p+1}$, $(a^k)_k$ est une suite bornée dans $\mathbb{R}^{p+1}$, alors elle est relativement compacte et par suite on peut supposer par extraction d'une sous suite que $(a^k)_k$ converge uniformément vers $a = (a_0, a_1, ..., a_p)$ tel que $a_j \geq 0$ pour tout $j = 0, 1, ..., p$ et $\sum\limits_{j=0}^{p} a_j = 1$.
D'autre part, $(x_{kj})_k \in \bigcup\limits_{n\geq N} K_n \subset K$, qui est compact et donc par extraction d'une sous suite, on peut supposer que $(x_{kj})_k$ converge uniformément vers x_j. De plus, $(x_{kj})_{kj\geq N} \subset \bigcup\limits_{n\geq N} K_n$, donc $x_j \in \overline{\bigcup\limits_{n\geq N} K_n}$ et par suite $x_j \in \bigcap\limits_{N>0} \overline{\bigcup\limits_{n\geq N} K_n} = \limsup\limits_{n\to\infty} K_n$.

On obtient alors,

$$\begin{aligned} x = \lim_{k\to\infty} v_k &= \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{p} a_j^k x_{kj} \\ &= \sum_{j=0}^{p} a_j x_j, \end{aligned}$$

et par suite $x \in \overline{co}(\limsup_{n\to\infty} K_n)$, par conséquent $A \subset \overline{co}(\limsup_{n\to\infty} K_n)$, d'où

$$\overline{co}(\limsup_{n\to\infty} K_n) = \bigcap_{n>0} \overline{co}(\bigcup_{n\geq N} K_n). \blacksquare$$

On donne maintenant un théorème d'existence de sélection pour les multi-applications semicontinues inférieurement.

Théorème 1.2.37 *(théorème d'existence de sélections continues). Voir [10] et [21].*
Soient X un espace métrique séparable et E un espace de Banach, et soit $F : X \rightrightarrows \mathbf{L}^1_E([0,1])$ une multi-application à valeurs fermées décomposables semicontinue inférieurement. Alors F admet au moins une sélection mesurable.

Nous terminons cette section par l'ennoncé d'un théorème de Fermeture pour les multi-applications semicontinues supérieurement.

Théorème 1.2.38 *Soient E un espace de Banach séparable, X un espace topologique et Φ une multi-application définie sur $[0,T] \times X$ à valeurs non vides convexes compactes dans E et telle que pour tout $t \in [0,T]$ fixé, $\Phi(t,\cdot)$ est semicontinue supérieurement.*
Soient (x_n), x des fonctions définies de $[0,T]$ à valeurs dans X et (y_n), y des fonctions intégrables définies sur $[0,T]$ à valeurs dans E. Supposons que
(a) *$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$, p.p sur $[0,T]$,*
(b) *$(y_n)_n$ converge vers y $\sigma(\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_{E'})$,*
(c) $y_n(t) \in \Phi(t, x_n(t))$, p.p sur $[0,T]$.
Alors $y(t) \in \Phi(t, x(t))$, p.p sur $[0,T]$.

1.2.6 Quelques théorèmes du point fixe

Dans cette section, on donne quelques théorèmes du point fixe qui nous seront utiles dans la démonstration de nos résultats d'existence. pour plus de détails. Voir [27].

Théorème 1.2.39 *(Théorème du point fixe de Kakutani)*
Soient X un espace topologique séparé localement convexe, S un sous ensemble non vide convexe compact de X et $F : S \rightrightarrows S$ une multi-application semicontinue supérieurement à valeurs non vides convexes compactes. Alors F admet un point fixe dans S, c'est à dire, il existe $x \in S$ tel que $x \in F(x)$.

Théorème 1.2.40 *(Forme faible du théorème de Kakutani)*
Soient E un espace de Banach, S un sous ensemble non vide convexe faiblement compact de E et $F : S \rightrightarrows S$ une multi-application faiblement-faiblement semicontinue supérieurement et à valeurs non vides convexes faiblement compactes. Alors F admet un point fixe dans S.

Définition 1.2.41 *Soient E et F deux espaces de Banach et $A : E \to F$ un opérateur. On dit que A est compact si l'adhérence de l'image de toute partie bornée de E est compacte.*

Théorème 1.2.42 *Soient Y un espace vectoriel normé et $A : Y \rightrightarrows Y$ un opérateur multivoque compact semicontinu supérieurement à valeurs convexes compactes. Supposons qu'il existe $R > 0$ tel qu'on ait l'estimation suivante*

$$x \in \lambda Ax \ (0 < \lambda \leq 1) \Rightarrow \|x\| \leq R.$$

Alors A admet un point fixe dans la boule $\overline{\mathbf{B}}(0, R)$.

1.2.7 Quelques théorèmes de convergence

Les résultats suivants sont pris de la référence [19].

Théorème 1.2.43 *(Théorème de la convergence dominée de Lebesgue)*
Soit (E, Σ, μ) un espace mesuré. Si la suite (f_n) de fonctions définies μ-p.p sur E à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, converge μ-p.p vers une fonction f et si de plus les f_n supposées ν-intégrables vérifient μ-p.p et pour tout n la condition

$$|f_n(x)| \leq g(x),$$

où g est une fonction μ-intégrable indépendante de n. Alors f est μ-intégrable et on a

$$\mu(f) = \lim_{n\to\infty} \mu(f_n).$$

Lemme 1.2.44 *(Lemme de Fatou)*
Soit (E, Σ, ν) un espace mesuré. Soit (f_n) une suite majorée (resp. minorée) dans $\mathbf{L}^1_E(\mu)$ telle que la suite $(\mu(f_n))$ est minorée (resp. majorée) dans $\mathbb{R}$. Alors la limite supérieure (resp. inférieure) de la suite (f_n) est μ-intégrable et on a

$$\mu(\limsup_{n\to\infty} f_n) \geq \limsup_{n\to\infty} \mu(f_n)$$

(resp.

$$\mu(\liminf_{n\to\infty} f_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(f_n)).$$

Théorème 1.2.45 *Soit ϕ une fonction à valeurs réelles, définie sur $V_s \times (E \setminus A)$, où V_s est un voisinage d'un point $s \in \mathbb{R}$, E un espace de Banach séparable et $A \subset E$ est un sous ensemble μ-négligeable. Si pour chaque $t \in V_s$, la fonction $x \mapsto \phi(t,x)$ est μ-intégrable sur E et si de plus, sur $V_s \times (E \setminus A)$, la fonction ϕ admet une dérivée partielle par rapport à t vérifiant l'inégalité*

$$|\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,x)| \leq g(x),$$

où g est μ-intégrable indépendante de t, alors la fonction

$$t \mapsto \int \phi(t,x) d\mu(x)$$

est dérivable au point s et l'on a

$$\frac{d}{dt}(\int \phi(s,x) d\mu(x) = \int \frac{\partial \phi}{\partial t}(s,x) d\nu(x).$$

Théorème 1.2.46 *(Théorème d'Ascoli-Arzelà). Voir [1].*
Soient J un espace métrique compact, Y un espace métrique complet, et H un sous ensemble de $\mathbf{C}(J,Y)$, l'espace des applications continues définies sur J à valeurs dans Y, muni de la topologie de la convergence uniforme. Alors H est relativement compact si et seulement si H est equicontinu et $H(x)$ est relativement compact, avec

$$H(x) = \{f(x)/\ f \in H\}.$$

Théorème 1.2.47 *(Conséquence du Théorème d'Ascoli-Arzelà). Voir [1] et [4]*
Soient J un sous ensemble compact de $\mathbb{R}$, E un espace de dimension finie et soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions absolument continues définies sur J à valeurs dans E satisfaisant les conditions suivantes
(1) $\forall t \in J$, $(f_n)_n$ est un sous ensemble relativement compact dans E,
(2) il existe une fonction à valeurs réelles positives $h \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}(J)$ telle que

$$\|f_n(t)\| \leq h(t),\ p.p\ sur J.$$

Alors il existe une sous suite de $(f_n)_n$(qu'on note aussi (f_n)) qui converge vers une fonction absolument continue $f : J \to E$ au sens suivant
***(a)** $(f_n)_n$ converge uniformément vers f,*
***(b)** $(\dot{f}_n)_n$ converge faiblement vers $\dot{f}$ dans $\mathbf{L}^1_E(J)$, c'est à dire, $(\dot{f}_n)_n$ converge vers $\dot{f}$ $\sigma(\mathbf{L}^1_E(J), \mathbf{L}^\infty_E(J))$.*

Définition 1.2.48 *Soit (e'_n) une suite d'éléments du dual X' d'un espace topolgique X. On dit que (e'_n) sépare les points de X si pour tous $x,\ y \in X$, $x \neq y$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\langle e'_n, x\rangle \neq \langle e'_n, y\rangle.$$

Si X est un espace séparable X' admet une telle suite.

1.2.8 Quelques résultats de compacité

Les résultats suivants sont pris de la référence [3] et [27].

Théorème 1.2.49 *(Théorème de Banch Dieudonné).*
Sient E un espace de Banach, $\overline{\mathbf{B}}_{E'}$ la boule unité fermée de E'. Alors sur $\overline{\mathbf{B}}_{E'}$ la topologie de la convergence faible coincide avec la topologie de la convergence compacte.
$(\overline{\mathbf{B}}_{E'}, \sigma(E', E))$ est métrisable.

Proposition 1.2.50 *Soit K un sous ensemble borné convexe de E. Alors K est compact si et seulement si la fonction $x' \mapsto \delta^*(x', K)$ est continue sur $\overline{\mathbf{B}}_{E'}$ muni de la topologie de la convergence compacte.*

Théorème 1.2.51 *(Théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki)*
Soit E un espace de Banach. Alors la boule unité fermée de E' est compacte pour la topologie $\sigma(E', E)$.

Théorème 1.2.52 *(Théorème d'Alaoglu)*
Soit E un espace de Banach séparable et soit $M' \subset E'$, si M' est borné pour la norme de E' et fermé pour la topologie $\sigma(E', E)$. Alors M' est compact pour cette topologie.

Théorème 1.2.53 *(Théorème d'Eberlein-Smŭlian).*
Soit S un sous ensemble d'un espace de Banach. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes
(i) *S est faiblement (relativement) séquentiellement compact.*
(ii) *S est faiblement (relativement) compact.*

Théorème 1.2.54 *(Théorème de Mazur).*
Soient E un espace de Banach et A un sous ensemble compact de E. Alors $\overline{co}(A)$ est compact.

Théorème 1.2.55 *(Théorème de Banch-Mazur).*
Soit E un espace de Banach, et soit (x_n) une suite d'éléments de E convergeant faiblement vers x. Alors il existe une suite (z_n) (où z_n est une combinaison convexe des éléments $x_n,\ x_{n+1}, ...$) convergeant fortement vers x.

Théorème 1.2.56 *Soit E un espace de Banach et soit M un sous ensemble convexe de E. Alors M est faiblement fermé si et seulement si M est fortement fermé.*

Chapitre 2

Résultats d'existence de solutions pour une inclusion différentielle du second ordre avec une perturbation non convexe

Ce chapitre comporte deux sections, dans la première, nous pésentons un résultat d'existence de solutions pour une inclusion différentielle du second ordre avec des conditions aux limites en trois points de la forme

$$(\mathcal{P}_{F,H}) \qquad \begin{cases} \ddot{u}(t) \in F(t, u(t), \dot{u}(t)) + H(t, u(t), \dot{u}(t)); \quad p.\ p.\ t \in [0,1], \\ u(0) = 0;\ u(\theta) = u(1). \end{cases}$$

où E est un espace de Banach séparabe, $F : [0,1] \times E \times E \rightrightarrows E$ est une multi-application semicontinue supérieurement sur $E \times E$ et $H : [0,1] \times E \times E \rightrightarrows E$ une multi-application semicontinue inférieurement. Dans la deuxième section, nous étudions le même problème d'existence où on affaiblit l'hypothèse de semicontinuité inférieure sur H, i. e., on considère H semicontinue mixte mais pour E un espace de dimension finie.

Le premier résultat, élargit au cas d'une somme de deux perturbations le résultat prouvé dans [5] concernant l'existence de solutions pour le problème

$$(\mathcal{P}_F) \qquad \begin{cases} \ddot{u}(t) \in F(t, u(t), \dot{u}(t))); \quad p.\ p.\ t \in [0,1], \\ u(0) = 0;\ u(\theta) = u(1) \end{cases}$$

où E est un espace de Banach séparable et F une multi-application semicontinue supérieurement sur $E \times E$.

Le deuxième résultat de cette section élargit en un sens celui de l'existence de solutions pour $(\mathcal{P}_F)$ où F est semicontinue mixte prouvé dans [6] dans le contexte d'un espace de Banach séparable.

2.1 Résultat d'existence de solutions sous la semi-continuité inférieure de la multi-application H

Au début de cette section, nous donnons un lemme préliminaire où nous démontrons quelques propriétés d'une fonction de Green, dont on aura besoin avec force dans la démonstration de nos résultats d'existence de solutions.

Cette fonction a été utilisée par plusieurs auteurs pour l'étude des équations et inclusions différentielles, nous citons Hartman [25] qui a introduit une telle fonction, pour l'étude du problème avec des conditions aux limites en deux points pour une équation différentielle ordinaire du second ordre. Marano [28, 29], Ibrahim-Gomaa [24], Azzam-Castaing et Thibault [5] qui ont élargi l'étude aux problèmes avec des conditions aux limites en trois points pour une inclusion différentielle du second ordre.

Lemme 2.1.1 *(Lemme 14.1 dans [3] et Lemme 1 dans [5]) Soient E un espace de Banach séparable,* $\theta \in]0,1[$ *et* $G : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par*

$$G(t,s) = \begin{cases} -s & si\ 0 \le s \le t, \\ -t & si\ t < s \le \theta, \\ \frac{t(s-1)}{1-\theta} & si\ \theta < s \le 1, \end{cases} \tag{2.1}$$

si $0 \le t < \theta$

$$G(t,s) = \begin{cases} -s & si\ 0 \le s \le \theta, \\ \frac{(\theta(s-t)+s(t-1))}{1-\theta} & si\ \theta < s \le t, \\ \frac{t(s-1)}{1-\theta} & si\ t < s \le 1. \end{cases} \tag{2.2}$$

si $\theta \le t \le 1$.

Alors on a les résultats suivants

1) si $u \in \mathbf{W}^{2,1}_{B,E}$ *avec* $u(0) = 0$ *et* $u(\theta) = u(1)$, *alors*

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)\ddot{u}(s)ds,\ \forall t \in [0,1]. \tag{2.3}$$

2) $G(\cdot,s)$ *est dérivable sur* $[0,1]$ *pour tout* $s \in [0,1]$, *c'est à dire que* $G(\cdot,s)$ *est dérivable à droite sur* $[0,1[$ *et dérivable à gauche sur* $]0,1]$. *Sa dérivée est donnée par*

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) = \begin{cases} 0 & si\ 0 \le s \le t, \\ -1 & si\ t < s \le \theta, \\ \frac{(s-1)}{1-\theta} & si\ \theta < s \le 1, \end{cases} \tag{2.4}$$

si $0 \le t < \theta$

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) = \begin{cases} 0 & si\ 0 \le s \le \theta, \\ \frac{s-\theta}{1-\theta} & si\ \theta < s \le t, \\ \frac{(s-1)}{1-\theta} & si\ t < s \le 1. \end{cases} \tag{2.5}$$

si $\theta \leq t \leq 1$.
3) $G(\cdot,\cdot)$ *et* $\frac{\partial G}{\partial t}(\cdot,\cdot)$ *vérifient*

$$\sup_{t,s\in[0,1]} |G(t,s)| \leq 1, \qquad \sup_{t,s\in[0,1]} |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)| \leq 1. \tag{2.6}$$

(4) Soit $f \in \mathbf{L}^1_E([0,1])$ *et soit* $u_f : [0,1] \to E$ *l'application défine par*

$$u_f(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds, \forall t \in [0,1], \tag{2.7}$$

alors $u_f(0) = 0$ *et* $u_f(\theta) = u_f(1)$.
De plus, la fonction u_f *est dérivable, et sa dérivée* $\dot{u}_f$ *vérifie*

$$\lim_{h\to 0} \frac{u_f(t+h) - u_f(t)}{h} = \dot{u}_f(t) = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)ds, \tag{2.8}$$

pour tout $t \in [0,1]$.
Par conséquent, $\dot{u}_f$ *est une application continue définie de* $[0,1]$ *dans* E.

(5) la fonction $\dot{u}_f$ *est scalairement dérivable, c'est à dire, pour tout* $x' \in E'$ *la fonction scalaire* $\langle x', \dot{u}_f(\cdot)\rangle$ *est dérivable et sa dérivée faible* $\ddot{u}_f$ *est égale à* f *presque partout, i.e.,*

$$\ddot{u}_f = f, \ p.p. \tag{2.9}$$

On donne la démonstration de ce lemme pour la comodité de lecture.
Démonstration.
1) Soit $0 \leq t < \theta$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\int_0^1 G(t,s)\ddot{u}(s)ds &= \int_0^t -s\ddot{u}(s)ds + \int_t^\theta -t\ddot{u}(s)ds + \frac{t}{1-\theta}\int_\theta^1 (s-1)\ddot{u}(s)ds \\
&= [-s\dot{u}(s)]_0^t + \int_t^\theta \dot{u}(s)ds - t(\dot{u}(\theta) - \dot{u}(t)) + \frac{t}{1-\theta}[(s-1)\dot{u}(s)]_\theta^1 \\
&- \frac{t}{1-\theta}\int_\theta^1 \dot{u}(s)ds \\
&= -t\dot{u}(t) + u(t) - u(0) - t\dot{u}(\theta) + t\dot{u}(t) + t\dot{u}(\theta) - \frac{t}{1-\theta}(u(1) - u(\theta)) \\
&= u(t) - u(0),
\end{aligned}$$

et donc

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)\ddot{u}(s)ds, \ \forall t \in [0,1].$$

Soit $\theta \leq t \leq 1$. Nous avons

$$\begin{array}{rcl}
\int\limits_0^1 G(t,s)\ddot{u}(s)ds & = & \int\limits_0^\theta -s\ddot{u}(s)ds + \int\limits_\theta^t \dfrac{(\theta(s-t)+s(t-1))}{1-\theta}\ddot{u}(s)ds \\
& + & \int\limits_t^1 \dfrac{t(s-1)}{1-\theta}\ddot{u}(s)ds \\
& = & [-s\dot{u}(s)]_0^\theta + \dfrac{1}{1-\theta}[(\theta(s-t)+s(t-1))\dot{u}(s)]_\theta^t \\
& - & \dfrac{1}{1-\theta}\int\limits_\theta^t (\theta+t-1)\dot{u}(s)ds + \dfrac{t}{1-\theta}[(s-1)\dot{u}(s)]_t^1 \\
& - & \dfrac{t}{1-\theta}\int\limits_t^1 \dot{u}(s)ds \\
& = & u(t)-u(0)+\dfrac{t}{1-\theta}(u(1)-u(\theta)) \\
& = & u(t)-u(0)
\end{array}$$

d'où

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)\ddot{u}(s)ds,\ \forall t \in [0,1].$$

2) Soit $t \in [0,\theta[$. Pour tout $s \in [0,1]$, fixé et pour tout $h > 0$ assez petit, avec $t < t+h \leq \theta$, nous avons

$$\frac{G(t+h)-G(t)}{h} = \begin{cases} 0 & si\ 0 \leq s \leq t \leq t+h, \\ \frac{-t-h+t}{h} & si\ t+h \leq s \leq \theta \\ \frac{[(t+h)(s-1)-t(s-1))}{h(1-\theta)} & si\ \theta < s \leq 1 \end{cases}$$

d'où

$$\lim_{h\to 0}\frac{G(t+h)-G(t)}{h} = \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) = \begin{cases} 0 & si\ 0 \leq s \leq \theta, \\ \frac{s-\theta}{1-\theta} & si\ \theta < s \leq t, \\ \frac{(s-1)}{1-\theta} & si\ t < s \leq 1. \end{cases}$$

Soit maintenant $t \in [\theta,1]$. Pour tout $s \in [0,1]$, fixé et pour tout $h > 0$ assez petit avec $\theta \leq t < t+h < 1$, nous avons

$$\frac{G(t+h)-G(t)}{h} = \begin{cases} 0 & si\ 0 \leq s \leq \theta, \\ \frac{-\theta h+sh}{h(1-\theta)} & si\ \theta \leq s \leq t < t+h, \\ \frac{h(s-1)}{h(1-\theta)} & si\ t+h < s \leq 1 \end{cases}$$

d'où

$$\lim_{h\to 0}\frac{G(t+h)-G(t)}{h} = \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) = \begin{cases} 0 & si\ 0 \leq s \leq \theta, \\ \frac{s-\theta}{1-\theta} & si\ \theta < s \leq t, \\ \frac{(s-1)}{1-\theta} & si\ t < s \leq 1. \end{cases}$$

Donc, $G(\cdot, s)$ est dérivable à droite sur $[0,1[$, et sa dérivée est donnée par les relations (2.4) et (2.5).
De la même façon on démontre que $G(\cdot, s)$ est dérivable à gauche sur $]0,1]$, et sa dérivée est donnée par les relations (2.4) et (2.5).
3) D'après la définiton de G, pour $0 \le t < \theta < s \le 1$,

$$|G(t,s)| = |t\frac{s-1}{1-\theta}| = t\frac{1-s}{1-\theta} \le t\frac{1-\theta}{1-\theta} \le 1,$$

pour $\theta < s \le t \le 1$

$$\begin{aligned} |G(t,s)| &= \frac{(\theta(s-t) + s(t-1))}{1-\theta} \\ &\le \theta\frac{t-s}{1-\theta} + s\frac{1-t}{1-\theta} \\ &\le \frac{t-s}{1-\theta} + \frac{1-t}{1-\theta} \\ &\le \frac{1-s}{1-\theta} \\ &\le 1, \end{aligned}$$

et pour $\theta \le t < s \le 1$

$$|G(t,s)| = |t\frac{s-1}{1-\theta}| = t\frac{1-s}{1-\theta} \le 1.$$

On conclut que

$$\sup_{t,s\in[0,1]} |G(t,s)| \le 1.$$

D'après les relations (2.4) et (2.5), il est facile de vérifier que

$$\sup_{t,s\in[0,1]} |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)| \le 1.$$

4) Soit $f \in \mathbf{L}^1_E([0,1])$ et soit $u_f : [0,1] \to E$ l'application définie par

$$u_f(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds, \forall t \in [0,1],$$

on voit bien que $u_f(0) = 0$ et d'après la définition de G

$$u_f(1) = \int_0^\theta -sf(s)ds + \int_\theta^1 \theta\frac{s-1}{1-\theta}f(s)ds = u_f(\theta).$$

Comme

$$u_f(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds, \forall\, t \in [0,1],$$

et

$$\sup_{t,s\in[0,1]} |G(t,s)| \leq 1,$$

le théorème de Lebesgue nous donne la continuté de u_f sur $[0,1]$.
On veut démontrer maintenant que u_f est dérivable. En effet,
a) la fonction $G(t,\cdot)f(\cdot)$ est Lebesgue-intégrable pour tout $t \in [0,1]$,
b) d'après 2), la fonction $G(\cdot,s)$ est dérivable pour tout $s \in [0,1]$, fixé,
c)

$$\|\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)\| \leq \|f(s)\|, \ \textit{pour tout}\ (t,s) \in [0,1]\times[0,1],$$

les propriétés a), b) et c) nous permettent de conclure, d'après le Théorème 1.2.43 chapitre 1, que u_f est dérivable et que sa dérivée $\dot{u}_f$ est donnée par

$$\dot{u}_f(t) = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)ds, \ \forall t \in [0,1].$$

5) les relations (2.4) et (2.8) nous donnent

$$\dot{u}_f(t) = \int_\theta^t f(s)ds + \frac{1}{1-\theta}\int_\theta^1 (s-1)f(s)ds,$$

pour $0 \leq t < \theta$. D'où pour tout $x' \in E'$,

$$\begin{aligned}
\langle x', \ddot{u}_f(t)\rangle &= \frac{\partial}{\partial t}\langle x', \dot{u}_f(t)\rangle \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\langle x', \int_\theta^t f(s)ds + \frac{1}{1-\theta}\int_\theta^1 (s-1)f(s)ds\rangle \\
&= \langle x', \frac{\partial}{\partial t}\int_\theta^t f(s)ds + \frac{1}{1-\theta}\int_\theta^1 (s-1)f(s)ds\rangle \\
&= \langle x', f(t)\rangle,
\end{aligned}$$

pour presque tout $t \in [0,\theta[$.
Soit (e'_n) une suite d'éléments de E' qui sépare les points de E. Alors nous avons $\langle e'_n, \ddot{u}_f(t)\rangle = \langle e'_n, f(t)\rangle$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour presque tout $t \in [0,\theta[$. On conclut donc que $\ddot{u}_f = f$ sur $[0,\theta[$.
Les relations (2.5) et (2.8) nous donnent

$$\dot{u}_f(t) = \frac{1}{1-\theta}\int_\theta^t (s-\theta)f(s)ds + \frac{1}{1-\theta}\int_t^1 (s-1)f(s)ds,$$

pour tout $\theta \leq t \leq 1$, d'où pour tout $x' \in E'$, nous avons

$$\langle x', \ddot{u}_f(t)\rangle = \langle x', \frac{t-\theta}{1-\theta} f(t) + \frac{1-t}{1-\theta} f(t)\rangle = \langle x', f(t)\rangle,$$

pour presque tout $t \in [\theta, 1]$. Par suite $\ddot{u}_f(t) = f(t)$, p. p. $t \in [\theta, 1]$.
Par conséquent

$$\ddot{u}_f(t) = f(t), \ p.p. \ t \in [0,1]. \ \blacksquare$$

On donne maintenant une conséquence du Lemme 2.1.1 qui nous sera aussi utile par la suite.

Proposition 2.1.2 *Soit E un espace de Banach séparable et soit $f : [0,1] \to E$ une application continue (respectivement dans $\mathbf{L}^1_E([0,1])$). Alors l'application $u_f : [0,1] \to E$ définie par*

$$u_f(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s) ds,$$

est la solution unique dans $\mathbf{C}^2_E([0,1])$ (respectivement dans $\mathbf{W}^{2,1}_{B,E}([0,1])$) de l'équation différentielle

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} \ddot{u}(t) = f(t); & \forall t \in [0,1], \\ u(0) = 0; & u(\theta) = u(1). \end{cases}$$

Démonstration
Si $0 \leq t < \theta$, nous avons

$$u_f(t) = \int_0^t -s f(s) ds + \int_t^\theta -t f(s) ds + \int_\theta^1 t \frac{s-1}{1-\theta} f(s) ds,$$

d'où

$$\dot{u}_f(t) = -t f(t) - \int_t^\theta f(s) ds + t f(t) + \int_\theta^1 \frac{s-1}{1-\theta} f(s) ds,$$

et donc

$$\ddot{u}_f(t) = f(t),$$

avec $u_f(0) = 0$, et $u_f(\theta) = u_f(1)$.
Si $0 < \theta < t \leq 1$, nous avons

$$u_f(t) = \int_0^\theta -s f(s) ds + \int_\theta^t \frac{\theta(s-t) + s(t-1)}{1-\theta} f(s) ds + \int_t^1 \frac{t(s-1)}{1-\theta} f(s) ds,$$

d'où

$$\dot{u}_f(t) = \int_\theta^t \frac{s-\theta}{1-\theta} f(s) ds + \frac{t(t-1)}{1-\theta} f(t) + \int_t^1 \frac{s-1}{1-\theta} f(s) ds - \frac{t(t-1)}{1-\theta} f(t),$$

et donc
$$\ddot{u}_f(t) = f(t),$$
avec $u_f(0) = 0$ et $u_f(\theta) = u_f(1)$. On conclut donc que u_f est solution de $(\mathcal{P})$.
Unicité de la solution
Soient $u_f,\ v_f$ deux solutions de $(\mathcal{P})$. Alors
$$\ddot{u}_f(t) = \ddot{v}_f(t) = f(t),\ \forall t \in [0,1].$$
D'aprés (2.3) du Lemme 2.1.1
$$\begin{aligned} u_f(t) &= \int_0^1 G(t,s)\ddot{u}_f(s)ds \\ &= \int_0^1 G(t,s)\ddot{v}_f(s)ds \\ &= v_f(t),\ \forall t \in [0,1], \end{aligned}$$
d'où l'unicité de la solution. ■

Nous sommes maintenant en mesure de donner notre principal théorème d'existence de cette section.

Théorème 2.1.3 *Soient E un espace de Banach séparable et $F : [0,1] \times E \times E \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs convexes compactes, mesurable sur $[0,1]$ et semicontinue supérieurement sur $E \times E$. Soit $H : [0,1] \times E \times E \rightrightarrows E$ une autre multi-application à valeurs non vides compactes, semicontinue inférieurement sur $E \times E$ et de graphe mesurable. Supposons que, (pour $i = 1,2$), il existe une multi-application $\Gamma_i : [0,1] \rightrightarrows E$ mesurable, à valeurs convexes compactes, et intégrablement bornée, telles que $F(t,x,y) \subset \Gamma_1(t)$ et $H(t,x,y) \subset \Gamma_2(t)$ pour tout $(t,x,y) \in [0,1] \times E \times E$. Alors l'inclusion différentielle*
$$(\mathcal{P}_{F,H}) \qquad \begin{cases} \ddot{u}(t) \in F(t,u(t),\dot{u}(t)) + H(t,u(t),\dot{u}(t)); & p.p.\ t \in [0,1], \\ u(0) = 0;\ u(\theta) = u(1) \end{cases}$$
admet au moins une solution dans $\mathbf{W}^{2,1}_{B,E}([0,1])$.

Démonstration.
Etape 1.
Prenons $\overline{co}(\{0\} \cup \Gamma_i(t))$, on peut supposer que $0 \in \Gamma_i(t)$ pour tout $t \in [0,1]$ et $i = 1,2$.

Considérons la multi-application $\Gamma : [0,1] \rightrightarrows E$ définie par $\Gamma(t) = \Gamma_1(t) + \Gamma_2(t)$. Γ admet les mêmes propriétés que Γ_1 et Γ_2. En effet, montrons tout d'abord que $\Gamma(t)$ est convexe pour tout $t[0,1]$.

Soient $v,\ w \in \Gamma(t)$ et $\lambda \in]0,1[$, alors il existe $v_i,\ w_i \in \Gamma_i(t)$, $(i=1,2)$, tels que $v = v_1 + v_2$ et $w = w_1 + w_2$ nous avons,

$$\begin{array}{rcl} \lambda v + (1-\lambda)w & = & \lambda(v_1+v_2) + (1-\lambda)(w_1+w_2) \\ & = & \lambda v_1 + (1-\lambda)w_1 + \lambda v_2 + (1-\lambda)w_2, \end{array}$$

comme $\Gamma_i(t)$ est convexe, on conclut alors que $\lambda v_i + (1-\lambda)w_i \in \Gamma_i(t)$ $(i=1,2)$, et par suite $\lambda v + (1-\lambda)w \in \Gamma(t)$.

Montrons maintenant que $\Gamma(t)$ est compact. Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de $\Gamma(t)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $v_n \in \Gamma_1(t)$ et $w_n \in \Gamma_2(t)$ tels que $u_n = v_n + w_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, comme $\Gamma_i(t)$, $(i=1,2)$, est compact, on peut extraire de (v_n) et (w_n) des sous suites (v_{n_k}) et $(w_{n_{k'}})$ qui convergent vers $v \in \Gamma_1(t)$ et $w \in \Gamma_2(t)$ respectivement, d'où la suite $(u_{n_{k''}})$ tel que $u_{n_{k''}} = v_{n_k} + w_{n_{k'}}$, converge vers $u = v + w$, et par conséquent $\Gamma(t)$ est compact.

Remarquons d'autre part que Γ est mesurable, car Γ et somme de deux multi-applications mesurables définies sur E qui est un espace de Banach séparable (Théorème 1.2.14 chapitre 1).

Finalement montrons que Γ est intégrablement bornée. D'après la définition 1.2.16, il suffit de montrer que la fonction $t \mapsto |\Gamma(t)| = \sup\limits_{x\in\Gamma(t)} \|x\|$ appartient à $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1])$.

$$\begin{array}{rcl} |\Gamma(t)| & = & \sup\limits_{x\in\Gamma(t)} \|x\| = \sup\limits_{x_1\in\Gamma_1(t),\, x_2\in\Gamma_2(t)} \|x_1+x_2\| \\ & \leq & \sup\limits_{x_1\in\Gamma_1(t)} \|x_1\| + \sup\limits_{x_2\in\Gamma_2(t)} \|x_2\| \\ & = & |\Gamma_1(t)| + |\Gamma_2(t)|, \end{array}$$

comme Γ_i est intégrablement bornée, alors $t \mapsto |\Gamma_i(t)|$ appartient à $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1])$ et par conséquent $t \mapsto |\Gamma(t)|$ appartient à $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1])$.

Considérons maintenant l'inclusion différentielle

$$(\mathcal{P}_\Gamma) \qquad \begin{cases} \ddot{u}(t) \in \Gamma(t) & p.p.\ t \in [0,1] \\ u(0) = 0; & u(\theta) = u(1). \end{cases}$$

Montrons que l'ensemble des solutions de l'inclusion différentielle $(\mathcal{P}_\Gamma)$ est non vide et convexe compact dans l'espace de Banach $\mathbf{C}^1_E([0,1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathbf{C}^1}$. Soit

$$\mathbf{S}^1_\Gamma = \{f \in \mathbf{L}^1_E([0,1]),\ f(t) \in \Gamma(t),\ \forall\, t \in [0,1]\}.$$

Par le Théorème 1.2.18 chapitre 1, on sait que $\mathbf{S}^1_\Gamma$ est un sous ensemble convexe $\sigma(\mathbf{L}^1_E([0,1]), \mathbf{L}^\infty_{E'}([0,1])$-compact de $\mathbf{L}^1_E([0,1])$.

De plus, la multi-application intégrale

$$\int_0^1 \Gamma(t)dt = \{\int_0^1 f(t)dt,\ f \in \mathbf{S}^1_\Gamma\}$$

est convexe compacte par rapport à la topologie induite par la norme de E. Pour la démonstration de ces deux résultats on peut voir la référence [15].

D'après le Lemme 2.1.1 et la Proposition 2.1.2, l'ensemble des solutions de $(\mathcal{P}_\Gamma)$ est non vide et est caractérisé par

$$\mathbf{X}_\Gamma = \{u_f : [0,1] \to E : \ u_f(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds, \ \forall t \in [0,1], \ f \in \mathbf{S}^1_\Gamma\}.$$

$\mathbf{X}_\Gamma$ est convexe. En effet, soient $u_{f_1}, \ u_{f_2} \in \mathbf{X}_\Gamma$ et $\lambda \in]0,1[$. Comme $u_{f_1}, \ u_{f_2} \in \mathbf{X}_\Gamma$, alors

$$u_{f_1}(t) = \int_0^1 G(t,s)f_1(s)ds, \ \forall t \in [0,1]$$

et

$$u_{f_2}(t) = \int_0^1 G(t,s)f_2(s)ds, \ \forall t \in [0,1]$$

avec $f_1, \ f_2 \in \mathbf{S}^1_\Gamma$.
Par conséquent

$$\begin{aligned}
(\lambda u_{f_1} + (1-\lambda)u_{f_2})(t) &= \lambda u_{f_1}(t) + (1-\lambda)u_{f_2}(t) \\
&= \lambda \int_0^1 G(t,s)f_1(s)ds + (1-\lambda)\int_0^1 G(t,s)f_2(s)ds \\
&= \int_0^1 G(t,s)(\lambda f_1(s) + (1-\lambda)f_2(s))ds \\
&= \int_0^1 G(t,s)(\lambda f_1 + (1-\lambda)f_2)(s)ds,
\end{aligned}$$

comme $f_1, f_2 \in \mathbf{S}^1_\Gamma$ et comme $\mathbf{S}^1_\Gamma$ est convexe on obtient, $\lambda f_1 + (1-\lambda)f_2 \in \mathbf{S}^1_\Gamma$. On conclut alors que, $\lambda u_{f_1} + (1-\lambda)u_{f_2} \in \mathbf{X}_\Gamma$, d'où la convexité de $\mathbf{X}_\Gamma$.

Montrons maintenant que $\mathbf{X}_\Gamma$ est compact. Soient $t, \ \tau \in [0,1]$, nous avons pour tout

$u_f \in \mathbf{X}_\Gamma$

$$\begin{aligned}
\|u_f(t) - u_f(\tau)\| &= \|\int_0^1 G(t,s)f(s)ds - \int_0^1 G(\tau,s)f(s)ds\| \\
&\leq \int_0^1 |G(t,s) - G(\tau,s)| \|f(s)\| ds \\
&\leq \int_0^1 |G(t,s) - G(\tau,s)| |\Gamma(s)| ds,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|\dot{u}_f(t) - \dot{u}_f(\tau)\| &= \|\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)ds - \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(\tau,s)f(s)ds\| \\
&\leq \int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) - \frac{\partial G}{\partial t}(\tau,s)| \|f(s)\| ds \\
&\leq \int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) - \frac{\partial G}{\partial t}(\tau,s)| |\Gamma(s)| ds.
\end{aligned}$$

Ces deux inégalités montrent que $\mathbf{X}_\Gamma$ et $\{\dot{u}_f : \ u_f \in \mathbf{X}_\Gamma\}$ sont equicontinus dans $\mathbf{C}_E([0,1])$, grâce à l'uniforme continuité de G et $\frac{\partial G}{\partial t}$ et le fait que Γ est intégrablement bornée. De plus, les ensembles $\mathbf{X}_\Gamma(t) = \{u_f(t) : \ u_f \in \mathbf{X}_\Gamma\}$ et $\{\dot{u}_f(t) : \ u_f \in \mathbf{X}_\Gamma\}$ sont relativement compacts. En effet, d'après les propriétés de la fonction G, on voit bient que les multi-applications intégrales $G(t,\cdot)\Gamma(\cdot)$ et $\frac{\partial G}{\partial t}(t,\cdot)\Gamma(\cdot)$ vérifient les mêmes hypothèses qu'on a supposées sur la multi-application $\Gamma(\cdot)$, et par suite en utilisant le Théorème 1.2.18 on conclut que les multi-applications intégrales $\int_0^1 G(t,s)\Gamma(s)ds$ et $\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\Gamma(s)ds$ sont fortement compactes. D'autre part, nous avons

$$\overline{\mathbf{X}_\Gamma(t)} \subset \int_0^1 G(t,s)\Gamma(s)ds,$$

et

$$\overline{\{\dot{u}_f(t) : \ u_f \in \mathbf{X}_\Gamma\}} \subset \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\Gamma(s)ds.$$

On conclut alors que $\mathbf{X}_\Gamma(t)$ et $\{\dot{u}_f(t) : \ u_f \in \mathbf{X}_\Gamma\}$ sont relativement compacts.

D'après le théorème d'Ascoli-Arzelà, $\mathbf{X}_\Gamma$ et $\{\dot{u}_f : \ u_f \in \mathbf{X}^1_\Gamma\}$ sont relativement compacts dans $\mathbf{C}_E([0,1])$ et par conséquent $\mathbf{X}_\Gamma$ est relativement compact dans $(\mathbf{C}^1_E([0,1]), \|\cdot\|_{\mathbf{C}^1})$.

Montrons maintenant que $\mathbf{X}_\Gamma$ est fermé dans $(\mathbf{C}^1_E([0,1]), \|\cdot\|_{\mathbf{C}^1})$. Soit $(u_{f_n})_n$ une suite d'éléments de $\mathbf{X}_\Gamma$ convergeant uniformément vers ζ dans $(\mathbf{C}^1_E([0,1]), \|\cdot\|_{\mathbf{C}^1})$. Comme $\mathbf{S}^1_\Gamma$ est faiblement compact dans $\mathbf{L}^1_E([0,1])$ et $(f_n)_n \subset \mathbf{S}^1_\Gamma$, on peut extraire une sous suite notée aussi $(f_n)_n$ qui converge $\sigma(\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_{E'})$ vers une application $f \in \mathbf{S}^1_\Gamma$. En particulier, pour tout $x' \in E'$ et pour tout $t \in [0,1]$, nous avons

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \langle x', \int_0^1 G(t,s) f_n(s) ds\rangle &= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \langle G(t,s)x', f_n(s)\rangle ds \\ &= \int_0^1 \langle G(t,s)x', f(s)\rangle ds \\ &= \langle x', \int_0^1 G(t,s) f(s) ds\rangle, \qquad (2.10)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \langle x', \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) f_n(s) ds\rangle &= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \langle \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)x', f_n(s)\rangle ds \\ &= \int_0^1 \langle \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)x', f(s)\rangle ds \\ &= \langle x', \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) f(s) ds\rangle, \qquad (2.11)\end{aligned}$$

les multi-applications intégrales $\int_0^1 G(t,s)\Gamma(s)ds$ et $\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\Gamma(s)ds$, $(t \in [0,1])$, étant fortement compactes, les relations (2.10) et (2.11) montrent que $(u_{f_n}(\cdot)) = (\int_0^1 G(\cdot,s)f(s)ds)$ et $(\dot{u}_{f_n}(\cdot)) = (\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(\cdot,s)f(s)ds)$ convergent simplementment vers $u_f(\cdot)$, $\dot{u}_f(\cdot)$ respectivement pour E muni de la topologie forte. Comme $(u_{f_n})_n$ converge uniformément vers ζ dans $(\mathbf{C}^1_E([0,1]), \|\cdot\|_{\mathbf{C}^1})$, on conclut que $u_f = \zeta$, d'où la compacité de $\mathbf{X}_\Gamma$ dans $\mathbf{C}^1_E([0,1])$.

Etape 2.

Soit $\Phi : \mathbf{X}_\Gamma \rightrightarrows \mathbf{L}^1_E([0,1])$ la multi-application définie par

$$\Phi(u_f) = \{v \in \mathbf{L}^1_E([0,1]) : \ v(t) \in H(t, u_f(t), \dot{u}_f(t)), \ p.\ p.\ sur[0,1]\}.$$

Montrons que Φ admet une sélection continue pour $\mathbf{X}_\Gamma$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathbf{C}^1}$.

Montrons tout d'abord que $\Phi(u_f)$ est non vide. Pour tout $u_f \in \mathbf{X}_\Gamma$, considérons l'application

$$\begin{array}{rcl} h : [0,1] & \to & [0,1] \times E \times E \\ t & \mapsto & (t, u_f(t), \dot{u}_f(t)) \end{array}$$

comme $u_f(\cdot)$ et $\dot{u}_f(\cdot)$ sont continues on conclut que l'application h est mesurable. D'autre part, $H(t, u_f(t), \dot{u}_f(t)) = (H \circ h)(t)$.
Soit

$$\begin{array}{rcl} P : [0,1] & \rightrightarrows & E \\ t & \mapsto & P(t) = (H \circ h)(t) \end{array}$$

P est mesurable. En effet, soit V un ouvert de E nous avons

$$\begin{array}{rcl} P^{-1}(V) & = & \{t \in [0,1] : \ P(t) \bigcap V \neq \emptyset\} \\ & = & \{t \in [0,1] : \ H(h(t)) \bigcap V \neq \emptyset\} \\ & = & \{t \in [0,1] : \ h(t) \in H^{-1}(V)\} \\ & = & \{t \in [0,1] : \ t \in h^{-1}(H^{-1}(V))\} \\ & = & h^{-1}(H^{-1}(V)). \end{array}$$

H étant $\mathcal{L}([0,1]) \otimes \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(E)$-mesurable et V ouvert de E, alors $H^{-1}(V) \in \mathcal{L}([0,1]) \otimes \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(E)$ et comme h est mesurable on aura $h^{-1}(H^{-1}(V)) \in \mathcal{L}([0,1])$, c'est à dire, $P^{-1}(V) \in \mathcal{L}([0,1])$ et par conséquent P est mesurable, à valeurs fermées, par le théorème d'existence de sélection mesurable (Théorème 1.2.15 chapitre 1), P admet une sélection mesurable, i. e., il existe une application mesurable $v : [0,1] \to E$ telle que $v(t) \in P(t) = H(t, u_f(t), \dot{u}_f(t))$ et comme $H(t, u_f(t), \dot{u}_f(t)) \subset \Gamma_2(t)$ et Γ_2 intégrablement bornée on conclut que $v \in \mathbf{L}^1_E([0,1])$ et donc $v \in \Phi(u_f)$, d'où la non vacuité de $\Phi(u_f)$.

Montrons maintenant que $\Phi(u_f)$ est fermé. Fixons $u_f \in \mathbf{X}_\Gamma$ et soit $(v_n)_n$ une suite d'éléments de $\Phi(u_f)$ convergeant vers $v \in \mathbf{L}^1_E([0,1])$, alors par extraction d'une sous suite on peut supposer que $(v_n)_n$ converge presque partout vers v. D'autre part, nous avons $v_n \in \Phi(u_f)$, alors $v_n(t) \in H(t, u_f(t), \dot{u}_f(t))$ et comme H est à valeurs compactes, on conclut donc que $v(t) \in H(t, u_f(t), \dot{u}_f(t))$ p. p. $t \in [0,1]$, et par suite $v \in \Phi(u_f)$, c'est à dire, $\Phi(u_f)$ est fermé.

Montrons maintenant que les valeurs de Φ sont décomposables. Soit $u_f \in \mathbf{X}_\Gamma$ et soient $v,\ w \in \Phi(u_f)$ et soit $A \in \mathcal{L}([0,1])$, alors

$$
\begin{aligned}
(v\chi_A + (1-\chi_A)w)(t) &= v(t)\chi_A(t) + (1-\chi_A(t))w(t) \\
&= \begin{cases} v(t) \in H(t, u_f(t), \dot{u}_f(t)), & t \in A \\ w(t) \in H(t, u_f(t), \dot{u}_f(t)), & t \notin A \end{cases}
\end{aligned}
$$

ce qui montre que $v\chi_A + (1-\chi_A)w \in \Phi(u_f)$, et par suite $\Phi(u_f)$ est décomposable.

Donc, pour montrer que Φ admet une sélection continue il suffit de montrer que Φ est semicontinue inférieurement, en utilisant le théorème d'existence de sélection continue (Théorème 1.2.37 chapitre 1).

Soit $u_{f_0} \in \mathbf{X}_\Gamma$, $v_0 \in \Phi(u_{f_0})$ et soit $(u_{f_n})_n$ une suite d'éléments de $\mathbf{X}_\Gamma$ convergeant vers u_{f_0} dans $(\mathbf{C}^1_E([0,1]), \|\cdot\|_{\mathbf{C}^1})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t \mapsto H(t, u_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t)$ admet un graphe mesurable, et par suite elle est mesurable car la σ-algèbre $\mathcal{L}([0,1])$ est complète, alors, d'après le Théorème 1.2.22 chapitre 1, la multi-application $\Lambda_n : [0,1] \rightrightarrows E$ définie par

$$
\Lambda_n(t) = \{w \in H(t, u_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t)) : \ \|w - v_0(t)\| = d(v_0(t), H(t, u_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t))\}
$$

est mesueable et à valeurs non vides (car les valeurs de H sont compactes). Montrons que les valeurs de Λ_n sont fermées. Fixons $t \in [0,1]$ et soit $(w_m)_m$ une suite d'éléments de $\Lambda_n(t)$ convergeant vers w dans E, alors $w_m \in H(t, u_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t))$ et $\|w_m - v_0(t)\| = d(v_0(t), H(t, u_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t))$. H est à valeurs compactes, donc $\lim_{m\to\infty} w_m \in H(t, u_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t))$ et par suite $w \in H(t, u_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t))$, de plus

$$
\lim_{m\to\infty} \|w_m - v_0(t)\| \ = \ \lim_{m\to\infty} d(v_0(t), H(t, u_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t))
$$

et par suite

$$
\|w - v_0(t)\| \ = \ d(v_0(t), H(t, u_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t))
$$

on conclut donc que $w \in \Lambda_n(t)$. D'après le théorème d'existence de sélection mesurable (Théorème 1.2.15 chapitre 1), il existe une application mesurable $v_n : [0,1] \to E$ telle que $v_n(t) \in \Lambda_n(t)$ pour tout $t \in [0,1]$, c'est à dire, $v_n(t) \in H(t, u_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t)$ p. p, et comme $v_0(t) \in H(t, u_{f_0}(t), \dot{u}_{f_0}(t))$ p. p, on aura

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|v_n(t) - v_0(t)\| &= \lim_{n\to\infty} d(v_0(t), H(t, u_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t)) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \mathcal{H}(H(t, u_{f_0}(t), \dot{u}_{f_0}(t)), H(t, u_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t))) = 0
\end{aligned}
$$

car H est semicontinue inférieurement sur $E \times E$ et par suite $\mathcal{H}$-semicontinue inférieurement (Théorème 1.2.32 chapitre 1). La suite $(v_n)_n$ converge ponctuellement vers v_0 et comme $v_n(t) \in H(t, u_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t)) \subset \Gamma_2(t)$ alors $\|v_n(t)\| \leq |\Gamma_2(t)|$ et Γ_2 est intégrablement bornée,

en utilisant le thèorème de la convergence dominée de Lebesgue on conclut que $(v_n)_n$ converge fortement vers v_0 dans $\mathbf{L}^1_E([0,1])$. Par le Théorème 1.2.30, on conclut que Φ est semicontinue inférieurement. Le théorème d'existence de sélection continue (Théorème 1.2.37 chapitre 1) nous donne l'existence d'une application continue $\phi : \mathbf{X}_\Gamma \to \mathbf{L}^1_E([0,1])$ telle que $\phi(u_f) \in \Phi(u_f)$ pour tout $u_f \in \mathbf{X}_\Gamma$, et par suite $\phi(u_f)(t) \in H(t, u_f(t), \dot{u}_f(t))$ pour presque tout $t \in [0,1]$.
Etape 3.
Remarquons que pour toutes applications Lebesgue-masurables $v : [0,1] \to E$ et $w : [0,1] \to E$, il existe une sélection Lebesgue-mesurable $\zeta \in \mathbf{S}^1_{\Gamma_1}$ telle que $\zeta(t) \in F(t, v(t), w(t))$, presque partout. En effet, il existe (v_n) et (w_n) convergeant ponctuellement vers v et w respectivement pour E muni de la topologie forte. Notons que la multi-application $F(\cdot, v_n(\cdot), w_n(\cdot))$ est mesurable. Soit ζ_n une sélection mesurable de $F(\cdot, v_n(\cdot), w_n(\cdot))$. Comme $\zeta_n(t) \in F(t, v_n(t), w_n(t)) \subset \Gamma_1(t)$ pour tout $t \in [0,1]$ et comme $\mathbf{S}^1_{\Gamma_1}$ est $\sigma(\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_{E'})$-compact, alors d'après le Théorème d'Eberlein-Smŭlian (Théorème 1.2.53 chapitre 1), on peut extraire de (ζ_n) une sous suite (ζ_m) qui converge $\sigma(\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_{E'})$ vers une application $\zeta \in \mathbf{S}^1_{\Gamma_1}$.

Par le Théorème de Banach-Mazur (Théorème 1.2.55 chapitre 1), il existe une suite (z_k) où z_k est une combinaison convexe de $\{\zeta_m :\ m \geq k\}$ telle que $(z_k(t))$ converge vers $\zeta(t)$ presque partout, alors

$$\begin{aligned} \zeta(t) &\in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\{z_k(t), z_{k+1}(t), ...\}},\ p.\ p \\ &\subset \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{co}\{\zeta_m(t)/\ m \geq k\},\ p.\ p \\ &\subset \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{co}\{\bigcup_{m\geq k} F(t, v_m(t), w_m(t))\},\ p.\ p. \end{aligned}$$

D'après le Théorème 1.2.36 chapitre 1,

$$\bigcap_{k\geq 1} \overline{co}\{\bigcup_{m\geq k} F(t, v_m(t), w_m(t))\} = \overline{co}\{\limsup_{m\to\infty} F(t, v_m(t), w_m(t))\},\ p.\ p$$

comme F est semicontinue supérieurement sur $E \times E$ et à valeurs compactes on obtient d'après le Théorème 1.2.34 chapitre 1

$$\limsup_{m\to\infty} F(t, v_m(t), w_m(t)) = F(t, v(t), w(t)),\ p.\ p$$

par suite

$$\zeta(t) \in \overline{co}\{F(t, v(t), w(t))\},\ p.\ p$$

comme F est à valeurs convexes fermées, on déduit que

$$\zeta(t) \in F(t, v(t), w(t)),\ p.\ p.$$

Etape 4.

Considérons la multi-application $\Psi : \mathbf{S}^1_\Gamma \rightrightarrows \mathbf{L}^1_E([0,1])$ définie par

$$\Psi(f) = \{g \in \mathbf{L}^1_E([0,1]) :\ g(t) \in F(t, u_f(t), \dot{u}_f(t)) + \phi(u_f)(t)\ p.\ p\ t \in [0,1]\}$$

où $u_f(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds$ et $\dot{u}_f(t) = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)ds$, pour tout $t \in [0,1]$. D'après l'étape 3, comme $\phi(u_f) \in \mathbf{L}^1_E([0,1])$ pour tout $u_f \in \mathbf{X}_\Gamma$, alors pour toute sélection mesurable h de $F(\cdot, u_f(\cdot), \dot{u}_f(\cdot))$, l'application $g : [0,1] \to E$ définie par $g(t) := h(t) + \phi(u_f)(t)$ appartient à $\mathbf{S}^1_\Gamma$ car $g(t) \in \Gamma_1(t) + \Gamma_2(t) = \Gamma(t)$ et par suite Ψ est à valeurs non vides contenues dans $\mathbf{S}^1_\Gamma$.

D'autre part, $\Psi(f)$ est un sous ensemble convexe faiblement compact. En effet, fixons $f \in \mathbf{S}^1_\Gamma$ et soient $g_1,\ g_2 \in \Psi(f)$ et soit $\lambda \in]0,1[$, alors, $g_1(t) - \phi(u_f)(t) \in F(t, u_f(t), \dot{u}_f(t))$ et $g_2(t) - \phi(u_f)(t) \in F(t, u_f(t), \dot{u}_f(t))$, comme les valeurs de F sont convexes on conclut que

$$\lambda(g_1(t) - \phi(u_f)(t)) + (1-\lambda)(g_2(t) - \phi(u_f)(t)) \in F(t, u_f(t), \dot{u}_f(t)),$$

donc

$$\lambda g_1(t) + (1-\lambda)g_2(t) - \phi(u_f)(t) \in F(t, u_f(t), \dot{u}_f(t)),$$

et par suite

$$(\lambda g_1 + (1-\lambda)g_2)(t) \in F(t, u_f(t), \dot{u}_f(t)) + \Phi(u_f)(t),$$

d'où

$$\lambda g_1 + (1-\lambda)g_2 \in \Psi(f),$$

ce qui montre la convexité des valeurs de Ψ.

Montrons maintenant la compacité faible des valeurs de Ψ. Soit $(g_n)_n$ une suite d'éléments de $\Psi(f)$, c'est à dire,

$$g_n(t) \in F(t, u_f(t), \dot{u}_f(t)) + \phi(u_f)(t) \subset \Gamma_1(t) + \Gamma_2(t) = \Gamma(t)$$

alors,

$$g_n(t) \in \Gamma(t),$$

et donc $(g_n)_n \subset \mathbf{S}^1_\Gamma$, on peut donc supposer par extraction d'une sous suite que $(g_n)_n$ converge $\sigma(\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_{E'})$ vers $g \in \mathbf{S}^1_\Gamma$. D'autre part, nous avons $g_n(t) - \phi(u_f)(t) \in F(t, u_f(t), \dot{u}_f(t))$, en utilisant le théorème de fermeture (Théorème 1.2.38 chapitre 1), on conclut que $g(t) - \phi(u_f)(t) \in F(t, u_f(t), \dot{u}_f(t))$, et par conséquent $g \in \Psi(f)$.

Il nous reste donc à montrer que la multi-application $\Psi : \mathbf{S}^1_\Gamma \rightrightarrows \mathbf{S}^1_\Gamma$ est semicontinue supérieurement où $\mathbf{S}^1_\Gamma$ est muni de la topologie faible $\sigma(\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_{E'})$, ou ce qui est équivalent à montrer que le graphe de Ψ défini par

$$\mathrm{gph}(\Psi) = \{(f,g) \in \mathbf{S}^1_\Gamma \times \mathbf{S}^1_\Gamma : \; g \in \Psi(f)\},$$

est séquentiellement faiblement fermé dans $\mathbf{S}^1_\Gamma \times \mathbf{S}^1_\Gamma$.

Soit (f_n, g_n) une suite d'éléments de $\mathrm{gph}(\Psi)$ convergeant vers $(f,g) \in \mathbf{S}^1_\Gamma \times \mathbf{S}^1_\Gamma$, i.e., $g_n(t) \in F(t, u_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t)) + \phi(u_{f_n})(t)$. Nous avons pour tout $x' \in E'$ et tout $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \langle x', u_{f_n}(t)\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle x', \int_0^1 G(t,s) f_n(s) ds\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \langle G(t,s)x', f_n(s)\rangle ds \\
&= \int_0^1 \langle G(t,s)x', f(s)\rangle ds \\
&= \langle x', \int_0^1 G(t,s) f(s) ds\rangle \\
&= \langle x', u_f(t)\rangle,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \langle x', \dot{u}_{f_n}(t)\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle x', \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) f_n(s) ds\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \langle \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)x', f_n(s)\rangle ds \\
&= \int_0^1 \langle \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)x', f(s)\rangle ds \\
&= \langle x', \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) f(s) ds\rangle \\
&= \langle x', \dot{u}_f(t)\rangle.
\end{aligned}$$

Donc $(u_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t))$ converge vers $(u_f(t), \dot{u}_f(t))$ pour E muni de la topologie $\sigma(E, E')$. Comme $\int_0^1 G(t,s)\Gamma(s) ds$ et $\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\Gamma(s) ds$ sont compactes par rapport à la topologie forte on conclut donc que $(u_{f_n}(\cdot), \dot{u}_{f_n}(\cdot))$ converge ponctuellement vers $(u_f(\cdot), \dot{u}_f(\cdot))$. La compacité des ensembles $\mathbf{X}_\Gamma$ et $\{\dot{u}_f : \ u_f \in \mathbf{X}_\Gamma\}$ dans $\mathbf{C}_E([0,1])$, nous donne la convergeance de $(u_{f_n})_n$ vers u_f dans $(\mathbf{C}_E^1([0,1]), \|\cdot\|_{\mathbf{C}^1})$. Comme $g_n(t) - \phi(u_{f_n})(t) \in F(t, u_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t))$, par la continuité de l'application ϕ et le théorème de fermeture (Théorème 1.2.38 chapitre 1), on conclut que $g(t) - \phi(u_f)(t) \in F(t, u_f(t), \dot{u}_f(t))$, c'est à dire $(f, g) \in \mathrm{gph}(\Psi)$, d'où la semicontinuité supérieure de Ψ.

En appliquant le théorème du point fixe de Kakutani (Théorème 1.2.40 chapitre 1) sur la multi-application Ψ, on a l'existence de $f \in \mathbf{S}_\Gamma^1$ telle que $f \in \Psi(f)$, c'est à dire,

$$f(t) \in F(t, u_f(t), \dot{u}_f(t)) + \phi(u_f)(t), \ p.\ p.\ t \in [0,1],$$

et par suite, puisque $\phi(u_f)(t) \in H(t, u_f(t), \dot{u}_f(t))$, on aura

$$f(t) \in F(t, u_f(t), \dot{u}_f(t)) + H(t, u_f(t), \dot{u}_f(t)), \ p.\ p.\ t \in [0,1].$$

Par les relations (2.7) et (2.9) on conclut que

$$\ddot{u}_f(t) \in F(t, u_f(t), \dot{u}_f(t)) + H(t, u_f(t), \dot{u}_f(t)), \ p.\ p.\ t \in [0,1].$$

avec $u_f(0) = 0, \ u_f(\theta) = u_f(1)$, c'est à dire u_f est solution de notre problème $(\mathcal{P}_{F,H})$. ■

2.2 Résultat d'existence de solutions sous la semi-continuité mixte de la multi-application H

Dans cette section, nous étudions dans un espace de dimension finie un résultat d'existence de solutions pour le problème $(\mathcal{P}_{F,H})$ sous la condition de la semicontinuité mixte de la multi-application H et en utilisant un théorème d'existence d'une multi-sélection semicontiue supérieurement à valeurs convexes pour la multi-application H, en se basant sur le théorème suivant.

Théorème 2.2.1 *(Théorème 2.1 dans [30]).*
Soit E un espace de dimension finie et soit $F : [0,1] \times E \rightrightarrows E$ une mult-application satisfaisant les conditions suivantes
$(\mathcal{H}_1)$ F est $\mathcal{L}([0,1]) \otimes \mathcal{B}(E)$-mesurable,
$(\mathcal{H}_2)$ pour tout $t \in [0,1]$, en chaque point $x \in E$ tel que $F(t,x)$ est convexe, $F(t,\cdot)$ est semicontinue supérieurement, et lorsque $F(t,x)$ est non convexe, $F(t,\cdot)$ est semicontinue inférieurement sur un voisinage de x,
$(\mathcal{H}_3)$ il existe une fonction de Carathéodory $f : [0,1] \times E \to \mathbb{R}^+$ qui est intégrablement bornée et telle que

$$F(t,x) \cap \overline{\mathbf{B}}(0, f(t,x)) \neq \emptyset,$$

pour tout $(t,x) \in [0,1] \times E$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout ensemble compact $\mathcal{K} \subset \mathbf{C}_E([0,1])$, il existe une multi-application $\Phi : \mathcal{K} \rightrightarrows \mathbf{L}^1_E([0,1])$ à valeurs non vides fermées convexes et de graphe fortement-faiblement séquentiellement fermé telle que pour tout $u \in \mathcal{K}$ et $v \in \Phi(u)$ nous avons

$$v(t) \in F(t, u(t)),$$

et

$$\|v(t)\| \leq f(t, u(t)) + \varepsilon,$$

pour presque tout $t \in [0,1]$.

Nous sommes maintenant en mesure de donner notre deuxième résultat d'existence de solutions de ce chapitre.

Théorème 2.2.2 *Soient E un espace de dimension finie, $F : [0,1] \times E \times E \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs non vides convexes fermées, Lebesgue-mesurable sur $[0,1]$ et semicontinue supérieurement sur $E \times E$ et telle que $F(t,x,y) \subset \overline{\mathbf{B}}_E(0, \rho_1(t))$, pour tout $(t,x,y) \in [0,1] \times E \times E$ et pour une certaine fonction positive $\rho_1 \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1])$. Soit $H : [0,1] \times E \times E \rightrightarrows E$ une autre multi-application à valeurs non vides fermées satisfaisant les conditions suivantes*
(i) *H est $\mathcal{L}([0,1]) \otimes \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(E)$-mesurable ;*

(ii) *pour chaque* $t \in [0,1]$*, en tout point* $(x,y) \in E \times E$ *tel que* $H(t,x,y)$ *est convexe* $H(t,\cdot,\cdot)$ *est semicontinue supérieurement, et lorsque* $H(t,x,y)$ *est non convexe* $H(t,\cdot,\cdot)$ *est semicontinue inférieurement sur un voisinage de* (x,y) *;*
(iii) $H(t,x,y) \subset \overline{\mathbf{B}}_E(0,\rho_2(t))$ *pour tout* $(t,x,y) \in [0,1] \times E \times E$*, pour une certaine fonction positive* $\rho_2 \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1])$*.*

Alors, l'inclusion différentielle $(\mathcal{P}_{F,H})$ *admet au moins une solution dans* $\mathbf{W}^{2,1}_E([0,1])$*.*

Démonstration.
Etape 1.
Soit $m_i(\cdot) = \rho_i(\cdot) + \frac{1}{2}$ $(i = 1,2)$, $m = m_1 + m_2$ et

$$\mathcal{K} = \{u \in \mathbf{W}^{2,1}_E([0,1]) : \ u(t) = \int_0^1 G(t,s)\ddot{u}(s)ds, \ \forall t \in [0,1]; \ \|\ddot{u}(t)\| \leq m(t) \ p.\ p.\}.$$

$\mathcal{K}$ est un sous ensemble convexe compact de $\mathbf{C}^1_E([0,1])$. En effet, soit $v, \ w \in \mathcal{K}$ et $\lambda \in]0,1[$, alors

$$v(t) = \int_0^1 G(t,s)\ddot{v}(s)ds, \ \forall t \in [0,1] \ et \ \|\ddot{v}(t)\| \leq m(t),$$

et

$$w(t) = \int_0^1 G(t,s)\ddot{w}(s)ds, \ \forall t \in [0,1] \ et \ \|\ddot{w}(t)\| \leq m(t).$$

Alors,

$$\begin{aligned}
(\lambda v + (1-\lambda)w)(t) &= \lambda v(t) + (1-\lambda)w(t) \\
&= \lambda \int_0^1 G(t,s)\ddot{v}(s)ds + \int_0^1 G(t,s)\ddot{w}(s)ds \\
&= \int_0^1 G(t,s)(\lambda\ddot{v} + (1-\lambda)\ddot{w})(s),
\end{aligned}$$

comme

$$\begin{aligned}
\|(\lambda\ddot{v} + (1-\lambda)\ddot{w})(t)\| &\leq \lambda\|\ddot{v}(t)\| + (1-\lambda)\|\ddot{w}(t)\| \\
&\leq \lambda m(t) + (1-\lambda)m(t) = m(t),
\end{aligned}$$

alors $\lambda v + (1-\lambda)w \in \mathcal{K}$, d'où la convexité de $\mathcal{K}$.

Montrons maintenant que $\mathcal{K}$ est compact. Nous avons pour tout $t,\ \tau \in [0,1]$ et pour tout $u \in \mathcal{K}$

$$\begin{aligned}
\|u(t)-u(\tau)\| &= \|\int_0^1 G(t,s)\ddot{u}(s)ds - \int_0^1 G(\tau,s)\ddot{u}(s)ds\| \\
&\leq \int_0^1 |G(t,s)-G(\tau,s)|\|\ddot{u}(s)\|ds \\
&\leq \int_0^1 |G(t,s)-G(\tau,s)|m(s)ds,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|\dot{u}(t)-\dot{u}(\tau)\| &= \|\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\ddot{u}(s)ds - \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(\tau,s)\ddot{u}(s)ds\| \\
&\leq \int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)-\frac{\partial G}{\partial t}(\tau,s)|\|\ddot{u}(s)\|ds \\
&\leq \int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)-\frac{\partial G}{\partial t}(\tau,s)|m(s)ds.
\end{aligned}$$

Comme G est uniformément continue et $m \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1])$, on conclut que les ensembles $\mathcal{K}$ et $\{\dot{u},\ u \in \mathcal{K}\}$ sont equicontinus.
D'autre part,

$$\begin{aligned}
\|u(t)\| &= \|\int_0^1 G(t,s)\ddot{u}(s)ds\| \\
&\leq \int_0^1 |G(t,s)|\|\ddot{u}(s)\|ds \\
&\leq \int_0^1 \|\ddot{u}(s)\|ds \\
&\leq \int_0^1 m(s)ds = \|m\|_{\mathbf{L}^1_R},
\end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
\|\dot{u}(t)\| &= \|\int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\ddot{u}(s)ds\| \\
&\leq \int_0^1 ||\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)|\|\ddot{u}(s)\|ds \\
&\leq \int_0^1 \|\ddot{u}(s)\|ds \\
&\leq \int_0^1 m(s)ds = \|m\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}}.
\end{aligned}
$$

Ces deux inégalités nous donnent la compacité des ensembles $\mathcal{K}(t)$ et $\{\dot{u}(t),\ u \in \mathcal{K}\}$ dans E. D'après le théorème d'Ascoli-Arzelà (Théorème 1.2.46 chapitre 1), les ensembles $\mathcal{K}$ et $\{\dot{u},\ u \in \mathcal{K}\}$ sont relativement compacts dans $\mathbf{C}_E([0,1])$ et par suite $\mathcal{K}$ est relativement compact dans $\mathbf{C}^1_E([0,1])$.

Montrons maintenant que $\mathcal{K}$ est fermé. Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{K}$ convergeant vers $u \in \mathbf{C}^1_E([0,1])$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(t) = \int_0^1 G(t,s)\ddot{u}_n(s)ds$ pour tout $t \in [0,1]$ et $\|\ddot{u}_n(t)\| \leq m(t)$ p. p.
Comme $\|\ddot{u}_n(t)\| \leq m(t)$, alors $\frac{\|\ddot{u}_n(t)\|}{m(t)} \leq 1$, posons $g_n(t) = \frac{\ddot{u}_n(t)}{m(t)}$, alors $g_n \in \mathbf{L}^\infty_E([0,1])$. D'après le Théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki (Théorème 1.2.51 chapitre 1) $\overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{L}^\infty_E}$ est $\sigma(\mathbf{L}^\infty_E, \mathbf{L}^1_E)$-compacte, on peut donc extraire de $(g_n)_n$ une sous suite qu'on note aussi $(g_n)_n$ qui converge $\sigma(\mathbf{L}^\infty_E, \mathbf{L}^1_E)$ vers une application $g \in \mathbf{L}^\infty_E([0,1])$ vérifiant $\|g(t)\| \leq 1$.

Montrons maintenant que $(\ddot{u}_n)_n$ converge $\sigma(\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_E)$ vers $\ddot{u}$. Soit $y \in \mathbf{L}^\infty_E([0,1])$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \langle \ddot{u}_n, y\rangle_{\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_E} &= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \langle \ddot{u}_n(t), y(t)\rangle dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \langle m(t) g_n(t), y(t)\rangle dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \langle g_n(t), m(t) y(t)\rangle dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle g_n, my\rangle_{\mathbf{L}^\infty_E, \mathbf{L}^1_E} \\
&= \langle g, my\rangle_{\mathbf{L}^\infty_E, \mathbf{L}^1_E} \\
&= \int_0^1 \langle g(t), m(t) y(t)\rangle dt \\
&= \int_O^1 \langle m(t) g(t), y(t)\rangle dt \\
&= \langle mg, y\rangle_{\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_E} \\
&= \langle v, y\rangle_{\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_E}.
\end{aligned}$$

Alors $(\ddot{u}_n)_n$ converge vers $v = mg$ pour la topologie $\sigma(\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_E)$.

D'autre part l'égalité

$$\dot{u}_n(t) - \dot{u}_n(s) = \int_s^t \ddot{u}_n(\tau) d\tau$$

nous donne

$$\lim_{n\to\infty} (\dot{u}_n(t) - \dot{u}_n(s)) = \lim_{n\to\infty} \int_s^1 \ddot{u}_n(\tau) d\tau$$

et par suite

$$\dot{u}(t) - \dot{u}(s) = \int_s^t v(s) ds,$$

comme $\dot{u}$ est absolument continue on obtient $v = \ddot{u}$, on conclut donc que $(\ddot{u}_n)_n$ converge $\sigma(\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_E)$ vers $\ddot{u}$ vérifiant $\|\ddot{u}(t)\| \leq m(t)$. En particulier, nous avons pour tout $t \in [0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 G(t,s) \ddot{u}_n(s) ds = \int_0^1 G(t,s) \ddot{u}(s) ds,$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \dot{u}_n(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\ddot{u}_n(s)ds = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\ddot{u}(s)ds.$$

Comme $(u_n)_n$ converge uniformément vers u, on conclut donc que $u(t) = \int_0^1 G(t,s)\ddot{u}(s)ds$ pour tout $t \in [0,1]$, alors $u \in \mathcal{K}$ d'où la compacité de $\mathcal{K}$.

En appliquant le Théorème 2.2.1, on obtient l'existence d'une multi-application $\Phi_i : \mathcal{K} \rightrightarrows \mathbf{L}^1_E([0,1])$, $(i = 1,2)$ à valeurs non vides convexes fermées et de graphe fortement-faiblement séquentiellement fermé telle que pour tout $u \in \mathcal{K}$ et tout $\phi \in \Phi_1(u)$, nous avons

$$\phi(t) \in F(t, u(t), \dot{u}(t)) \quad et \quad \|\phi(t)\| \leq m_1(t) \ p.\ p, \tag{2.12}$$

et pour tout $u \in \mathcal{K}$ et tout $\psi \in \Phi_2(u)$

$$\psi(t) \in H(t, u(t), \dot{u}(t)) \quad et \quad \|\psi(t)\| \leq m_2(t) \ p.\ p. \tag{2.13}$$

Considérons, pour $i = 1,2$, la multi-application $\Psi_i : \mathcal{K} \rightrightarrows \mathbf{C}^1_E([0,1])$ définie par

$$\Psi_i(u) = \{v \in \mathbf{C}^1_E([0,1]) : \ v(t) = \int_0^1 G(t,s)\gamma(s)ds, \ \forall t \in [0,1], \ \gamma \in \Phi_i(s)\}.$$

Fixons $u \in \mathcal{K}$, pour tout $v \in \Psi_i(u)$ et pour presque tout $t \in [0,1]$, nous avons par la relation (2.9), $\ddot{v}(t) = \gamma(t)$ et donc $\|\ddot{v}(t)\| \leq m_i(t)$, ce qui montre que $\Psi_i(u) \subset \mathcal{K}$.
D'autre part, $\Psi_i(u)$ est convexe grâce à la convexité des valeurs de Φ_i.

Montrons maintenant que $\Psi_i(u)$ est compact dans $(\mathbf{C}^1_E([0,1]), \|\cdot\|_{\mathbf{C}^1})$. Comme $\Psi_i(u) \subset \mathcal{K}$ et $\mathcal{K}$ est compact, il suffit de montrer que $\Psi_i(u)$ est fermé dans $(\mathbf{C}^1_E([0,1]), \|\cdot\|_{\mathbf{C}^1})$. Fixons $u \in \mathcal{K}$, soit $(v_n)_n$ une suite d'éléments de $\Psi_i(u)$ convergeant vers $v \in \mathbf{C}^1_E([0,1])$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\gamma_n \in \Phi_i(u)$ telle que $v_n(t) = \int_0^1 G(t,s)\gamma_n(s)ds$ pour tout $t \in [0,1]$. D'après (2.12) et (2.13), on peut extraire de $(\gamma_n)_n$ une sous suite qu'on note aussi $(\gamma_n)_n$ qui converge $\sigma(\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_E)$ vers une application $\gamma \in \Phi_i(u)$, car $\Phi_i(u)$ est $\sigma(\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_E)$-fermé grâce au Théorème 1.2.56 chapitre 1. En particulier, pour tout $t \in [0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} v_n(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 G(t,s)\gamma_n(s)ds \quad = \quad \int_0^1 G(t,s)\gamma(s)ds.$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \dot{v}_n(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\gamma_n(s)ds \quad = \quad \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\gamma(s)ds.$$

Comme (v_n) converge uniformément vers v dans $(\mathbf{C}^1_E([0,1]), \|\cdot\|_{\mathbf{C}^1})$, alors $v(\cdot) = \int\limits_0^1 G(\cdot,s)\gamma(s)ds$ et $v \in \mathbf{W}^{2,1}_E([0,1])$, et par suite $v \in \Phi_i(u)$, donc $\Psi_i(u)$ est fermé dans $\mathbf{C}^1_E([0,1])$, par conséquent $\Psi_i(u)$ est la compact dans $\mathbf{C}^1_E([0,1])$.

On va démontrer maintenant que $\Psi_i : \mathcal{K} \rightrightarrows \mathcal{K}$ est semicontinue supérieurement ce qui est équivalent à montrer (voir Théorème 1.2.29, chapitre 1) que le graphe de Ψ_i défini par

$$\mathrm{gph}(\Psi_i) = \{(u,v) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K} : \ v \in \Psi_i(u)\},$$

est fermé dans $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$. Soit $(u_n, v_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathrm{gph}(\Psi_i)$ convergeant vers $(u,v) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe une certaine application $\gamma_n \in \Phi_i(u_n)$ telle que

$$v_n(t) = \int\limits_0^1 G(t,s)\gamma_n(s)ds, \ \forall t \in [0,1].$$

Comme $\gamma_n \in \Phi_i(u_n)$, les relations (2.12) et (2.13) nous donnent l'existence d'une sous suite notée aussi $(\gamma_n)_n$ qui converge $\sigma(\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_E)$ vers une application $\gamma \in \mathbf{L}^1_E([0,1])$ vérifiant $\|\gamma(t)\| \leq m(t)$. De plus,

$$\lim_{n\to\infty} v_n(t) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 G(t,s)\gamma_n(s)ds = \int\limits_0^1 G(t,s)\gamma(s)ds, \ \forall t \in [0,1],$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \dot{v}_n(t) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\gamma_n(s)ds = \int\limits_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\gamma(s)ds, \ \forall t \in [0,1],$$

comme $(v_n)_n$ converge uniformément vers v, alors $v(\cdot) = \int\limits_0^1 G(\cdot,s)\gamma(s)ds$. D'autre part, $\gamma_n \in \Phi_i(u_n)$, alors $(u_n, \gamma_n) \in \mathrm{gph}(\Phi_i)$ et comme Φ_i est de graphe fortement-faiblement séquentiellement fermé, alors $(u,\gamma) \in \mathrm{gph}(\Phi_i)$ et par suite $\gamma \in \Phi_i(u)$, ce qui montre que $(u,v) \in \mathrm{gph}(\Psi_i)$, d'où la semicontinuité supérieure de Ψ_i.

Etape 2.

Pour tout $u \in \mathcal{K}$, posons $\Psi(u) = \Psi_1(u) + \Psi_2(u)$. Fixons $u \in \mathcal{K}$ et soit $v \in \Psi(u)$. Alors $v = v_1 + v_2$ avec $v_i(t) = \int\limits_0^1 G(t,s)\ddot{v}_i(s)ds, \ \forall t \in [0,1]$ et $\|\ddot{v}_i(t)\| \leq m_i(t)$, p. p $(i = 1,2)$. Par suite

$$\begin{aligned}
v(t) &= v_1(t) + v_2(t) \\
&= \int\limits_0^1 G(t,s)\ddot{v}_1(s)ds + \int\limits_0^1 G(t,s)\ddot{v}_2(s)ds \\
&= \int\limits_0^1 G(t,s)(\ddot{v}_1(s) + \ddot{v}_2(s))ds \\
&= \int\limits_0^1 G(t,s)\ddot{v}(s)ds.
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\|\ddot{v}(t)\| &= \|\ddot{v}_1(t) + \ddot{v}_2(t)\| \\
&\leq \|\ddot{v}_1(t)\| + \|\ddot{v}_2(t)\| \\
&\leq m_1(t) + m_2(t) = m(t).
\end{aligned}$$

Alors $v \in \mathcal{K}$ c'est à dire $\Psi(u) \subset \mathcal{K}$.

Montrons maintenant que $\Psi(u)$ est convexe compact. Soient $v,\ w \in \Psi(u)$ et $\lambda \in]0,1[$, alors $v = v_1 + v_2$ et $w = w_1 + w_2$ tels que $v_i \in \Psi_i(u)$ et $w_i \in \Psi_i(u)$, $i = 1, 2$, et donc

$$\begin{aligned}
\lambda v + (1-\lambda)w &= \lambda(v_1 + v_2) + (1-\lambda)(w_1 + w_1) \\
&= \lambda v_1 + (1-\lambda)w_1 + \lambda v_2 + (1-\lambda)w_2,
\end{aligned}$$

comme $\Psi_i(u)$, $i = 1, 2$, est convexe, alors $\lambda v_i + (1-\lambda)w_i \in \Psi_i(u)$ et par suite $\lambda v + (1-\lambda)w \in \Psi(u)$, d'où la convexité de $\Psi(u)$.

Montrons maintenant que $\Psi(u)$ est compact. Comme $\Psi(u) \subset \mathcal{K}$ qui est compact, il suffit de montrer que $\Psi(u)$ est fermé. Fixons $u \in \mathcal{K}$, soit $(v_n)_n$ une suite d'éléments de $\Psi(u)$ convergeant vers $v \in \mathbf{C}^1_E([0,1])$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v^1_n + v^2_n$ tel que $v^i_n \in \Psi_i(u)$. $(v^i_n)_n \subset \Psi_i(u)$, et $\Psi_i(u)$ est compact, on peut donc supposer par extraction d'une sous suite que $(v^i_n)_n$ converge uniformément vers $v_i \in \Psi_i(u)$.
D'autre part,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} v_n(t) &= \lim_{n\to\infty} (v^1_n(t) + v^2_n(t)) \\
&= \lim_{n\to\infty} v^1_n(t) + \lim_{n\to\infty} v^2_n(t) \\
&= v_1(t) + v_2(t) \\
&= (v_1 + v_2)(t),
\end{aligned}$$

comme $(v_n)_n$ converge uniformément vers v on conclut que $v = v_1 + v_2 \in \Psi_1(u) + \Psi_2(u) = \Psi(u)$ et par suite $\Psi(u)$ est fermé, d'où la compacité de $\Psi(u)$.

Montrons que $\Psi : \mathcal{K} \rightrightarrows \mathcal{K}$ est semicontinue supérieurement ce qui est équivalent à montrer que le graphe de Ψ défini par

$$\mathrm{gph}(\Psi) = \{(u, v) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K} : \ v \in \Psi(u)\},$$

est fermé dans $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$. Soit $(u_n, v_n)_n$ une suite d'éléments de gph(Ψ) convergeant vers $(u, v) \in \mathbf{C}^1_E([0, 1])$. Alors $v_n = v^1_n + v^2_n$ tel que

$$v^i_n \in \Psi_i(u_n) \subset \mathcal{K} \tag{2.14}$$

$(i = 1, 2)$, comme $\mathcal{K}$ est compact, par extraction de sous suites, on peut supposer que $(v^i_n)_n$ converge vers v_i dans $(\mathbf{C}^1_E([0, 1]), \| \cdot \|_{\mathbf{C}^1})$, $(i = 1, 2)$. D'autre part, comme Ψ_i est semicontinue supérieurement, d'après le Théorème 1.2.29 chapitre 1, son graphe est fermé dans $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$ et par suite par la relation (2.14), la convergence de $(u_n)_n$ vers u et la convergence de $(v^i_n)_n$ vers v_i, on conclut que $v_i \in \Psi_i(u)$. Par conséquent $v = v_1 + v_2 \in \Psi_1(u) + \Psi_2(u) = \Psi(u)$. D'où la semicontinuité supérieure de Ψ.

En appliquant le théorème du point fixe de Kakutani (Théorème 1.2.39 chapitre 1), on obtient l'existence d'un point fixe $u \in \Psi(u)$, c'est à dire $u = u_1 + u_2$ tel que $u_1 \in \Psi_1(u)$ et $u_2 \in \Psi_2(u)$, et par la définition de Ψ_1 et Ψ_2 on obtient

$$\ddot{u}_1(t) \in F(t, u(t), \dot{u}(t)), p.\ p.\ t \in [0, 1]$$

$$\ddot{u}_2(t) \in H(t, u(t), \dot{u}(t)), p.\ p.\ t \in [0, 1]$$

avec $u_i \in \mathbf{W}^{2,1}_E([0, 1])$ et $u_i(t) = \int_0^1 G(t, s)\ddot{u}_i(s)ds$, pour tout $t \in [0, 1]$.
Par conséquent

$$\ddot{u}(t) \in F(t, u(t), \dot{u}(t)) + H(t, u(t), \dot{u}(t)),\ p.\ p.\ t \in [0, 1]$$

avec $u(0) = 0$ et $u(\theta) = u(1)$, et par suite u est solution de notre problème considéré, ce qui achève la démonstration du théorème. ■

Chapitre 3

Résultats d'existence de solutions pour une inclusion différentielle du second ordre avec retard

L'existence de solutions pour un problème différentielle du second ordre avec retard a été discutée dans la litérature, par exemple, l'équation différentielle du second ordre avec retard de la forme

$$\ddot{u}(t) = f(t, u(t), u(h(t)), \dot{u}(t)),\ \forall t \in [0,1],$$

avec les conditions

$$\begin{aligned} u(t) &= \varphi(t) \quad \forall t \in [-r, 0] \\ u(T) &= B \end{aligned}$$

où $h : [0,1] \to [-r, 1]$ tel que $t - r \leq h(t) \leq t$ et $\varphi : [-r, 0]$ avec $r > 0$, a été étudié dans [20]. Dans un travail récent de Azzam-Haddad [7], ce type de problème avec retard a été généralisé à une inclusion différentielle avec des conditions aux limites en trois points de la forme

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) \in F(t, u(t), u(h(t)), \dot{u}(t)), & p.\ p.\ t \in [0,1] \\ u(t) = \varphi(t),\ \forall t \in [-r, 0] \\ u(0) = 0;\ u(\theta) = u(1), \end{cases}$$

où $F : [0,1] \times E \times E \times E \rightrightarrows E$ est une multi-application à valeurs non vides convexes compactes semicontinue supérieurement sur $E \times E \times E$ et E un espace de Banach séparable.

Dans ce chapitre, on établit deux résulats d'existence de solutions pour l'inclusion différentielle du second ordre avec retard de la forme

$$(\mathcal{P}_r) \begin{cases} \ddot{u}(t) \in F(t, u(t), u(h(t)), \dot{u}(t)) + H(t, u(t), u(h(t)), \dot{u}(t)), & p.\ p.\ t \in [0,1] \\ u(t) = \varphi(t),\ \forall t \in [-r, 0] \\ u(0) = 0;\ u(\theta) = u(1), \end{cases}$$

dans un espace de Banach séaprable E, où F est une multi-application semicontinue supérieurement sur $E \times E \times E$ et H une autre multi-application semicontinue inférieurement. Dans la deuxième section, on considère E de dimension finie et H semicontinue mixte.

3.1 Résultat d'existence de solutions sous la semi-continuité inférieure de la multi-application H

On donne notre premier résultat d'existence de solutions pour $(\mathcal{P}_r)$ lorsqu'on considère H semicontinue inférieurement et E un espace de Banach séparable.

Théorème 3.1.1 *Soit E un espace de Banach séparable et soit $F : [0,1] \times E \times E \times E \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs convexes compactes, semicontinue supérieurement sur $E \times E \times E$, et mesurable sur $[0,1]$. Soit $H : [0,1] \times E \times E \times E \rightrightarrows E$ une autre multi-application à valeurs non vides compactes, semicontinue inférieurement sur $E \times E \times E$ et admet un graphe mesurable. Supposons que, pour $i = 1, 2$, il existe une multi-application $\Gamma_i : [0,1] \rightrightarrows E$ mesurable à valeurs convexes compactes, et intégrablement bornée, c'est à dire, il existe une application $k_i \in \mathbf{L}^1_E([0,1])$ telle que $\|v_i\| \leq |k_i(t)|$ p. p. $t \in [0,1]$ pour tout $v_i \in \Gamma_i(t)$, telle que $F(t,x,y,z) \subset \Gamma_1(t)$ et $H(t,x,y,z) \subset \Gamma_2(t)$ pour tout $(t,x,y,z) \in [0,1] \times E \times E \times E$. Soit r un nombre réel positif et soient $h : [0,1] \to [-r,t]$ une fonction continue et $\varphi \in \mathbf{C}_E([-r,0])$ avec $\varphi(0) = 0$. Alors l'inclusion différentielle*

$$(\mathcal{P}_r) \begin{cases} \ddot{u}(t) \in F(t,u(t),u(h(t)),\dot{u}(t)) + H(t,u(t),u(h(t)),\dot{u}(t)), & p.\ p.\ t \in [0,1] \\ u(t) = \varphi(t),\ \forall t \in [-r,0], \\ u(0) = 0;\ u(\theta) = u(1), \end{cases}$$

admet de solutions dans $\mathbf{X} := \mathbf{C}_E([-r,1]) \bigcap \mathbf{W}^{2,1}_E([0,1])$ muni de la norme

$$\|h\|_{\mathbf{X}} = \max\{\max_{t\in[-r,1]} \|h(t)\|, \max_{t\in[0,1]} \|\dot{h}(t)\|\};$$

Démonstration.
Etape 1.
Prenons $\overline{co}(\{0\} \cup \Gamma_i(t)$, on peut supposer que $0 \in \Gamma_i(t)$ pour tout $t \in [0,1]$ et $i = 1, 2$.

Considérons la multi-application $\Gamma : [0,1] \rightrightarrows E$ définie par $\Gamma(t) = \Gamma_1(t) + \Gamma_2(t)$, on a vu dans la démonstration du Théorème 2.1.3 chapitre 2, que la multi-application Γ est mesurable à valeurs convexes compactes et intégrablement bornée.

Considérons l'ensemble

$$\mathbf{X}_\Gamma = \{u_f : [-r,1] \to E :\ u_f(t) = \varphi(t),\ \forall t \in [-r,0]\ et\ u_f(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds,\ \forall t \in [0,1],\ f \in \mathbf{S}^1_\Gamma\},$$

où $\mathbf{S}^1_\Gamma$ est l'ensemble des sélections Lebesgue-Bochner intégrables de Γ qui est $\sigma(\mathbf{L}^1_E([0,1]), \mathbf{L}^\infty_{E'}([0,1])$-compact. Il est clair que l'ensemble $\mathbf{X}_\Gamma$ est convexe, montrons qu'il est compact dans

$(\mathbf{X}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}})$. Soient $t,\ \tau \in [0,1]$, nous avons pour tout $u_f \in \mathbf{X}_\Gamma$

$$\begin{aligned}
\|u_f(t) - u_f(\tau)\| &= \|\int_0^1 G(t,s)f(s)ds - \int_0^1 G(\tau,s)f(s)ds\| \\
&\leq \int_0^1 |G(t,s) - G(\tau,s)|\|f(s)\|ds \\
&\leq \int_0^1 |G(t,s) - G(\tau,s)||\Gamma(s)|ds,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|\dot{u}_f(t) - \dot{u}_f(\tau)\| &= \|\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)ds - \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(\tau,s)f(s)ds\| \\
&\leq \int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) - \frac{\partial G}{\partial t}(\tau,s)|\|f(s)\|ds \\
&\leq \int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) - \frac{\partial G}{\partial t}(\tau,s)||\Gamma(s)|ds.
\end{aligned}$$

Ces deux inégalités montrent que $\mathbf{X}_\Gamma$ et $\{\dot{u}_f :\ u_f \in \mathbf{X}_\Gamma\}$ sont equicontinus dans $\mathbf{C}_E([0,1])$, grâce à l'uniforme continuité de G et $\frac{\partial G}{\partial t}$ et le fait que Γ est intégrablement bornée. Comme $\varphi \in \mathbf{C}_E([-r,0])$, alors $\mathbf{X}_\Gamma$ est équicontinu dans $\mathbf{X}$. De plus les ensembles $\mathbf{X}_\Gamma(t) = \{u_f(t) : u_f \in \mathbf{X}_\Gamma\}$ et $\{\dot{u}_f(t) :\ u_f \in \mathbf{X}_\Gamma\}$ sont relativement compacts. En effet, d'après les propriétés de la fonction G, on voit bien que les multi-applicatons $G(t,\cdot)\Gamma(\cdot)$ et $\frac{\partial G}{\partial t}(t,\cdot)\Gamma(\cdot)$ vérifient les mêmes hypothèses qu'on a sur la multi-application $\Gamma(\cdot)$, et par suite en utilisant le Théorème 1.2.18, on conclut que les multi-applications intégrales $\int_0^1 G(t,s)\Gamma(s)ds$ et $\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\Gamma(s)ds$ sont fortement compactes. D'autre part, nous avons

$$\overline{\mathbf{X}_\Gamma(t)} \subset \int_0^1 G(t,s)\Gamma(s)ds,$$

et

$$\overline{\{\dot{u}_f(t) :\ u_f \in \mathbf{X}_\Gamma\}} \subset \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\Gamma(s)ds.$$

Donc $\mathbf{X}_\Gamma(t)$, $t \in [-r,1]$, et $\{\dot{u}_f(\tau) :\ u_f \in \mathbf{X}_\Gamma\}$, $\tau \in [0,1]$, sont relativement compacts. D'après le théorème d'Ascoli-Arzelà $\mathbf{X}_\Gamma$ et $\{\dot{u}_f :\ u_f \in \mathbf{X}_\Gamma\}$ sont relativement compacts dans $\mathbf{C}_E([-r,1])$ et par conséquent $\mathbf{X}_\Gamma$ est relativement compact dans $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}})$. Montrons maintenant que $\mathbf{X}_\Gamma$ est fermé dans $((\mathbf{X}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}})$.

Soit $(u_{f_n})_n$ une suite d'éléments de $\mathbf{X}_\Gamma$ convergeant uniformément vers u dans $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}})$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$u_{f_n}(t) = \int_0^1 G(t,s) f_n(s) ds, \forall t \in [0,1],$$

et $u_{f_n}(t) = \varphi(t)$ pour tout $t \in [-r, 0]$. Comme $(f_n)_n \subset \mathbf{S}^1_\Gamma$ qui est faiblement compact dans $\mathbf{L}^1_E([0,1])$, on peut lui extraire une sous suite qui converge $\sigma(\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_{E'})$ vers une application $f \in \mathbf{S}^1_\Gamma$. En particulier, pour chaque $x' \in E'$ et pour tout $t \in [0,1]$, nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \langle x', \int_0^1 G(t,s) f_n(s) ds \rangle &= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \langle G(t,s)x', f_n(s)\rangle ds \\ &= \int_0^1 \langle G(t,s)x', f(s)\rangle ds \\ &= \langle x', \int_0^1 G(t,s) f(s) ds \rangle, \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \langle x', \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) f_n(s) ds \rangle &= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \langle \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)x', f_n(s)\rangle ds \\ &= \int_0^1 \langle \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)x', f(s)\rangle ds \\ &= \langle x', \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) f(s) ds \rangle, \end{aligned} \tag{3.2}$$

les multi-applications intégrales $\int_0^1 G(t,s)\Gamma(s)ds$ et $\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\Gamma(s)ds$, $(t \in [0,1])$, sont fortement compactes, les relations (3.1) et (3.2) montrent que $(u_{f_n}(\cdot) = (\int_0^1 G(\cdot,s)f(s)ds)$ et $(\dot{u}_{f_n}(\cdot)) = (\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(\cdot,s)f(s)ds)$ convergent simplementment vers $u_f(\cdot)$ et $\dot{u}_f(\cdot)$ respectivement pour E muni de la topologie forte. Comme $(u_{f_n})_n$ converge uniformément vers u

dans $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}})$, on conclut que

$$u(t) = u_f(t) = \int\limits_0^1 G(t,s)f(s)ds, \ \forall t \in [0,1],$$

et $u_f(t) = \varphi(t)$ pour tout $t \in [-r,0]$ et par suite $u \in \mathbf{X}_\Gamma$, donc $\mathbf{X}_\Gamma$ est compact dans $\mathbf{X}$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathbf{X}}$.

Considérons maintenant la multi-application $\Phi : \mathbf{X}_\Gamma \rightrightarrows \mathbf{L}^1_E([0,1])$ définie par

$$\Phi(u_f) = \{v \in \mathbf{L}^1_E([0,1]) : \ v(t) \in H(t, u_f(t), u_f(h(t)), \dot{u}_f(t)), \ p.\ p\ sur\ [0,1]\}.$$

En se basant sur le théorème d'existence d'une sélection continue (Théorème 1.2.37 chapitre 1) on va montrer que Φ admet une sélection continue dans $\mathbf{X}_\Gamma$.

Montrons tout d'abord que $\Phi(u_f)$ est non vide. Pour tout $u_f \in \mathbf{X}_\Gamma$, considérons l'application

$$\begin{array}{rcl} g : [0,1] & \to & [0,1] \times E \times E \times E \\ t & \mapsto & (t, u_f(t), u_f(h(t)), \dot{u}_f(t)) \end{array}$$

comme $h(\cdot)$, $u_f(\cdot)$ et $\dot{u}_f(\cdot)$ sont continues on conclut que la fonction g est mesurable. D'autre part, $H(t, u_f(t), u_f(h(t)), \dot{u}_f(t)) = (H \circ h)(t)$.
Soit

$$\begin{array}{rcl} P : [0,1] & \rightrightarrows & E \\ t & \mapsto & P(t) = (H \circ g)(t) \end{array}$$

P est mesurable. En effet, soit V un ouvert de E nous avons

$$\begin{array}{rcl} P^{-1}(V) & = & \{t \in [0,1] : \ P(t) \bigcap V \neq \emptyset\} \\ & = & \{t \in [0,1] : \ H(g(t)) \bigcap V \neq \emptyset\} \\ & = & \{t \in [0,1] : \ g(t) \in H^{-1}(V)\} \\ & = & \{t \in [0,1] : \ t \in g^{-1}(H^{-1}(V))\} \\ & = & g^{-1}(H^{-1}(V)). \end{array}$$

H étant $\mathcal{L}([0,1]) \otimes \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(E)$-mesurable et V ouvert de E, alors $H^{-1}(V) \in \mathcal{L}([0,1]) \otimes \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(E)$ et comme g est mesurable on aura $g^{-1}(H^{-1}(V)) \in \mathcal{L}([0,1])$, c'est à dire, $P^{-1}(V) \in \mathcal{L}([0,1])$ et par conséquent P est mesurable, à valeurs fermées, par le théorème d'existence de sélection mesurable (Théorème 1.2.15 chapitre 1), P admet une sélection mesurable, i. e., il existe une application mesurable $v : [0,1] \to E$ telle que $v(t) \in P(t) = H(t, u_f(t), u_f(h(t)), \dot{u}_f(t))$ et comme $H(t, u_f(t), u_f(h(t)), \dot{u}_f(t)) \subset \Gamma_2(t)$ et Γ_2 intégrablement bornée on conclut que $v \in \mathbf{L}^1_E([0,1])$ et donc $v \in \Phi(u_f)$, d'où la non vacuité de $\Phi(u_f)$.

Montrons maintenant que $\Phi(u_f)$ est fermé. Fixons $u_f \in \mathbf{X}_\Gamma$ et soit $(v_n)_n$ une suite d'éléments de $\Phi(u_f)$ convergeant vers $v \in \mathbf{L}^1_E([0,1])$, alors par extraction d'une sous suite on peut supposer que $(v_n)_n$ converge presque partout vers v. D'autre part, nous avons $v_n \in \Phi(u_f)$, alors $v_n(t) \in H(t, u_f(t), u_f(h(t)), \dot{u}_f(t))$ et comme H est à valeurs compactes, on conclut donc que $v(t) \in H(t, u_f(t), u_f(h(t)), \dot{u}_f(t))$ pour tout $t \in [0,1]$, et par suite $\Phi(u_f)$ est fermé.

Montrons maintenant que les valeurs de Φ sont décomposables. Soient $v,\ w \in \Phi(u_f)$ et soit $A \in \mathcal{L}([0,1])$, alors

$$\begin{aligned} (v\chi_A + (1-\chi_A)w)(t) &= v(t)\chi_A(t) + (1-\chi_A(t))w(t) \\ &= \begin{cases} v(t) \in H(t, u_f(t), u_f(h(t)), \dot{u}_f(t)) & t \in A \\ w(t) \in H(t, u_f(t), u_f(h(t)), \dot{u}_f(t)) & t \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

ce qui montre que $v\chi_A + (1-\chi_A)w \in \Phi(u_f)$, et par suite $\Phi(u_f)$ est décomposable.

Donc, pour montrer que Φ admet une sélection continue il suffit de montrer que Φ est semicontinue inférieurement, en utilisant le théorème d'existence de sélection continue (Théorème 1.2.37 chapitre 1).

Soit $u_{f_0} \in \mathbf{X}_\Gamma$, $v_0 \in \Phi(u_{f_0})$ et soit $(u_{f_n})_n$ une suite d'éléments de $\mathbf{X}_\Gamma$ convergeant vers u_{f_0} dans $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t \mapsto H(t, u_{f_n}(t), u_{f_n}(h(t)), \dot{u}_{f_n}(t)$ admet un graphe mesurable, et par suite elle est mesurable car la σ-algèbre $\mathcal{L}([0,1])$ est complète, alors, d'après le Théorème 1.2.28 chapitre 1, la multi-application $\Lambda_n : [0,1] \rightrightarrows E$ définie par

$$\Lambda_n(t) = \{w \in H(t, u_{f_n}(t), u_{f_n}(h(t)), \dot{u}_{f_n}(t)) : \ \|w - v_0(t)\| = d(v_0(t), H(t, u_{f_n}(t), u_{f_n}(h(t)), \dot{u}_{f_n}(t))\}$$

est mesurable à valeurs non vides car H est à valeurs compactes. Montrons que les valeurs de Λ_n sont fermées. Fixons $t \in [0,1]$ et soit $(v_m)_m$ une suite d'éléments de $\Lambda_n(t)$ convergeant vers v dans E, alors $w_m \in H(t, u_{f_n}(t), u_{f_n}(h(t), \dot{u}_{f_n}(t))$ et $\|w_m - v_0(t)\| = d(v_0(t), H(t, u_{f_n}(t), u_{f_n}(h(t)), \dot{u}_{f_n}(t))$, H est à valeurs compactes, donc $\lim\limits_{m\to\infty} w_m \in H(t, u_{f_n}(t), u_{f_n}(h(t)), \dot{u}_{f_n}(t))$ et par suite $w \in H(t, u_{f_n}(t), u_{f_n}(h(t)), \dot{u}_{f_n}(t))$, de plus

$$\lim_{m\to\infty} \|w_m - v_0(t)\| \ = \ \lim_{m\to\infty} d(v_0(t), H(t, u_{f_n}(t), u_{f_n}(h(t)), \dot{u}_{f_n}(t))$$

et par suite

$$\|w - v_0(t)\| \;=\; d(v_0(t), H(t, u_{f_n}(t), u_{f_n}(h(t)), \dot{u}_{f_n}(t))$$

on conclut donc que $w \in \Lambda_n(t)$ et donc $\Lambda_n(t)$ est fermé.

D'après le théorème d'existence de sélection mesurable (Théorème 1.2.15 chapitre 1), il existe une application mesurable $v_n : [0,1] \to E$ telle que $v_n(t) \in \Lambda_n(t)$ pour tout $t \in [0,1]$, ce qui montre que $v_n(t) \in H(t, u_{f_n}(t), u_{f_n}(h(t)), \dot{u}_{f_n}(t))$ et

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|v_n(t) - v_0(t)\| &= \lim_{n\to\infty} d(v_0(t), H(t, u_{f_n}(t), u_{f_n}(h(t)), \dot{u}_{f_n}(t)) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \mathcal{H}(H(t, u_{f_0}(t), u_{f_0}(h(t))\dot{u}_{f_0}(t)), H(t, u_{f_n}(t), u_{f_n}(h(t)), \dot{u}_{f_n}(t))) = 0\end{aligned}$$

car H est semicontinue inférieurement sur $E \times E \times E$ et par suite $\mathcal{H}$-semicontinue inférieurement (Théorème 1.2.32 chapitre 1). La suite $(v_n)_n$ converge ponctuellement vers v_0 et comme $v_n(t) \in H(t, u_{f_n}(t), u_f(h(t)), \dot{u}_{f_n}(t)) \subset \Gamma_2(t)$ alors $\|v_n(t)\| \leq |\Gamma_2(t)|$ et Γ_2 est intégrablement bornée, en utilisant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue on conclut que $(v_n)_n$ converge fortement vers v_0 dans $\mathbf{L}^1_E([0,1])$. Par le Théorème 1.2.30, on conclut que Φ est semicontinue inférieurement. Le théorème d'existence de sélection continue (Théorème 1.2.37 chapitre 1) nous donne l'existence d'une application continue $\phi : \mathbf{X}_\Gamma \to \mathbf{L}^1_E([0,1])$ telle que $\phi(u_f) \in \Phi(u_f)$ pour tout $u_f \in \mathbf{X}_\Gamma$, et par suite $\phi(u_f)(t) \in H(t, u_f(t), u_f(h(t)), \dot{u}_f(t))$ pour presque tout $t \in [0,1]$.

Considérons maintenant, la multi-application $\Psi : \mathbf{S}^1_\Gamma \rightrightarrows \mathbf{L}^1_E([0,1])$ définie par

$$\Psi(f) = \{g \in \mathbf{L}^1_E([0,1]) : \; g(t) \in F(t, u_f(t), u_f(h(t)), \dot{u}_f(t)) + \phi(u_f)(t) \; p,\; p \; sur[0,1]\}.$$

Remarquons que pour toutes applications Lebesgue-mesurables $v : [0,1] \to E$, $w : [-r,1] \to E$ et $\nu : [0,1] \to E$, il existe une sélection Lebesgue-mesurable $\zeta \in \mathbf{S}^1_{\Gamma_1}$ telle que $\zeta(t) \in F(t, v(t), w(h(t)), \nu(t))$, presque partout. En effet, il existe $(v_n)_n$, $(w_n)_n$ et $(\nu_n)_n$ convergeant ponctuellement vers v, w et ν respectivement pour E muni de la topologie forte. Notons que la multi-application $F(\cdot, v_n(\cdot), w_n(h(\cdot)), \nu_n(\cdot))$ est mesurable. Soit ζ_n une sélection mesurable de $F(\cdot, v_n(\cdot), w_n(h(\cdot)), \nu_n(\cdot))$. Comme $\zeta_n(t) \in F(t, v_n(t), w_n(h(t)), \nu_n(t)) \subset \Gamma_1(t)$ pour tout $t \in [0,1]$ et comme $\mathbf{S}^1_{\Gamma_1}$ est $\sigma(\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_{E'})$-compact, alors d'après le Théorème d'Eberlein-Smǔlian, on peut extraire de (ζ_n) une sous suite (ζ_m) qui converge $\sigma(\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_{E'})$ vers une application $\zeta \in \mathbf{S}^1_{\Gamma_1}$.

Par le Théorème de Banach-Mazur (Théorème 1.2.55 chapitre 1), il existe une suite (z_k) où z_k est une combinaison convexe de $\{\zeta_m : \; m \geq k\}$ telle que $(z_k(t))$ converge vers

$\zeta(t)$ presque partout, alors

$$\begin{aligned}
\zeta(t) &\in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\{z_k(t), z_{k+1}(t), ...\}}, \ p.\ p \\
&\subset \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{co}\{\zeta_m(t)/\ m \geq k\}, \ p.\ p \\
&\subset \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{co}\{\bigcup_{m\geq k} F(t, v_m(t), w_m(h(t)), \nu_m(t))\}, \ p.\ p.
\end{aligned}$$

D'après le Théorème 1.2.36 chapitre 1,

$$\bigcap_{k\geq 1} \overline{co}\{\bigcup_{m\geq k} F(t, v_m(t), w_m(h(t)), \nu_m(t))\} = \overline{co}\{\limsup_{m\to\infty} F(t, v_m(t), w_m(h(t)), \nu_m(t))\}, \ p.\ p$$

comme F est semicontinue supérieurement sur $E \times E \times E$ et à valeurs compactes on obtient d'après le théorème 1.2.34

$$\limsup_{m\to\infty} F(t, v_m(t), w_m(h(t)), \nu_m(t)) = F(t, v(t), w(h(t)), \nu(t)), \ p.\ p$$

par suite

$$\zeta(t) \in \overline{co}\{F(t, v(t), w(h(t)), \nu(t))\}, \ p.\ p$$

comme F est à valeurs convexes fermées, on déduit que

$$\zeta(t) \in F(t, v(t), w(h(t)), \nu(t)), \ p.\ p.$$

Alors pour toute sélection mesurable ζ de $F(\cdot, u_f(\cdot), u_f(h(\cdot)), \dot{u}_f(\cdot))$, l'application $g : [0,1] \to E$ définie par $g(t) := \zeta(t) + \phi(u)(t)$ appartient à $\mathbf{S}^1_\Gamma$ car $g(t) \in \Gamma_1(t) + \Gamma_2(t) = \Gamma(t)$ et par suite Ψ est à valeurs non vides. $\Psi(f)$ est un sous ensemble convexe faiblement compact. En effet, soient $g_1,\ g_2 \in \Psi(f)$, alors, $g_1(t) - \phi(u_f)(t) \in F(t, u_f(t), u_f(h(t)), \dot{u}_f(t))$ et $g_2(t) - \phi(u_f)(t) \in F(t, u_f(t), u_f(h(t)), \dot{u}_f(t))$, comme les valeurs de F sont convexes on conclut que

$$\lambda(g_1(t) - \phi(u_f)(t)) + (1-\lambda)(g_2(t) - \phi(u_f)(t)) \in F(t, u_f(t), u_f(h(t)), \dot{u}_f(t)),$$

donc

$$\lambda g_1(t) + (1-\lambda)g_2(t) - \psi(u_f)(t) \in F(t, u_f(t), u_f(h(t)), \dot{u}_f(t)),$$

et par suite

$$(\lambda g_1 + (1-\lambda)g_2)(t) \in F(t, u_f(t), u_f(h(t)), \dot{u}_f(t)) + \phi(u_f)(t),$$

d'où

$$\lambda g_1 + (1-\lambda)g_2 \in \Psi(f),$$

ce qui montre la convexité des valeurs de Ψ.

Montrons maintenant la compacité faible des valeurs de Ψ. Fixons $f \in \mathbf{S}^1_\Gamma$ et soit $(g_n)_n$ une suite d'éléments de $\Psi(f)$, c'est à dire,

$$g_n(t) \in F(t, u_f(t), u_f(h(t)), \dot{u}_f(t)) + \psi(u_f)(t) \subset \Gamma_1(t) + \Gamma_2(t) = \Gamma(t)$$

alors,

$$g_n(t) \in \Gamma(t),$$

et donc $(g_n)_n \subset \mathbf{S}^1_\Gamma$, on peut donc supposer par extracion d'une sous suite que $(g_n)_n$ converge $\sigma(\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_{E'})$ vers $g \in \mathbf{S}^1_\Gamma$.

D'autre part, nous avons $g_n(t) - \phi(u_f)(t) \in F(t, u_f(t), u_f(h(t)), \dot{u}_f(t))$, en utilisant le théorème de fermeture (Théorme 1.2.38 chapitre 1) on conclut que $g(t) - \phi(u_f)(t) \in F(t, u_f(t), u_f(h(t)), \dot{u}_f(t))$, et par conséquent $g \in \Psi(f)$, d'où la compacité faible des valeurs de Ψ.

Etape 2.

D'après la relation (2.9) du Lemme 2.1.1 remarquons que pour tout $u_f \in \mathbf{X}_\Gamma$, $\ddot{u}_f = f$ presque partout. Considérons l'opérateur $\mathcal{A}$ défini sur $\mathbf{X}_\Gamma$ par

$$\begin{aligned} \mathcal{A}u_f &= \{v \in \mathbf{X} : \ v = \varphi \ sur\ [-r, 0] \ et \\ & \qquad v(t) = \int_0^1 G(t,s)g(s)ds, \ \forall t \in [0,1], \ g \in \Psi(f)\}. \end{aligned}$$

$\mathcal{A}$ applique $\mathbf{X}_\Gamma$ dans lui même. En effet, fixons $u_f \in \mathbf{X}_\Gamma$ et soit $v \in \mathcal{A}u_f$ alors il existe $g \in \Psi(f)$ telle que

$$v(t) = \int_0^1 G(t,s)g(s)ds, \ \forall t \in [0,1],$$

et $v(t) = \varphi(t)$ pour tout $t \in [-r, 0]$, comme $g \in \Psi(f)$ alors $g \in \mathbf{S}^1_\Gamma$ et par suite $v \in \mathbf{X}_\Gamma$, on conclut donc que $\mathcal{A}u_f \subset \mathbf{X}_\Gamma$ et donc $\mathcal{A}$ applique $\mathbf{X}_\Gamma$ dans lui même.

Montrons maintenant que $\mathcal{A}u_f$ est convexe, en effet, fixons $u_f \in \mathbf{X}_\Gamma$ et soient $v_1, \ v_2 \in \mathcal{A}u_f$ et $\lambda \in]0, 1[$, alors

$$v_1 \in \mathcal{A}u_f \iff \begin{cases} v_1(t) = \varphi(t); & \forall t \in [-r, 0]; \\ v_1(t) = \int_0^1 G(t,s)g_1(s)ds; & \forall t \in [0,1], \ g_1 \in \Psi(f), \end{cases}$$

et

$$v_2 \in \mathcal{A}u_f \iff \begin{cases} v_2(t) = \varphi(t); & \forall t \in [-r, 0]; \\ v_2(t) = \int_0^1 G(t,s)g_2(s)ds; & \forall t \in [0,1], \ g_2 \in \Psi(f). \end{cases}$$

Sur $[-r,0]$ nous avons

$$\begin{aligned}(\lambda v_1+(1-\lambda)v_2)(t) &= \lambda v_1(t)+(1-\lambda)v_2(t)\\ &= \lambda\varphi(t)+(1-\lambda)\varphi(t)=\varphi(t),\end{aligned}$$

sur $[0,1]$

$$\begin{aligned}(\lambda v_1+(1-\lambda)v_2)(t) &= \lambda v_1(t)+(1-\lambda)v_2(t)\\ &= \lambda\int_0^1 G(t,s)g_1(s)ds+(1-\lambda)\int_0^1 G(t,s)g_2(s)ds\\ &= \int_0^1 G(t,s)(\lambda g_1+(1-\lambda)g_2)(s)ds.\end{aligned}$$

Comme $g_1,\ g_2\in\Psi(f)$, et comme $\Psi(f)$ est convexe on conclut alors que $\lambda g_1+(1-\lambda)g_2\in\Psi(f)$ et par suite $\lambda v_1+(1-\lambda)v_2\in\mathcal{A}u_f$.

Montrons que $\mathcal{A}u_f$ est compact. Comme $\mathcal{A}u_f\subset\mathbf{X}_\Gamma$ qui est compact il suffit de montrer que $\mathcal{A}u_f$ est fermé dans $\mathbf{X}_\Gamma$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathbf{X}}$. Fixons $u_f\in\mathbf{X}_\Gamma$, soit $(v_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}u_f$ qui converge vers v dans $(\mathbf{X}_\Gamma,\|\cdot\|_{\mathbf{X}}$, alors, pour chaque $n\in\mathbb{N}$, il existe $g_n\in\Psi(f)$ telle que

$$v_n(t)=\int_0^1 G(t,s)g_n(s)ds,\ \forall t\in[0,1],$$

et $v_n(t)=\varphi(t)$ pour tout $t\in[-r,0]$. Comme $\Psi(f)$ est $\sigma(\mathbf{L}^1_E,\mathbf{L}^\infty_{E'})$-compact, on peut supposer par extraction d'une sous suite que (g_n) converge $\sigma(\mathbf{L}^1_E([0,1]),\mathbf{L}^\infty_{E'}([0,1]))$ vers une application $g\in\Psi(f)$, en particulier, pour chaque $x'\in E'$ et pour tout $t\in[0,1]$ nous avons

$$\begin{aligned}\lim_{n\infty}\langle x',\int_0^1 G(t,s)g_n(s)ds\rangle &= \lim_{n\infty}\int_0^1\langle G(t,s)x',g_n(s)\rangle ds\\ &= \int_0^1\langle G(t,s)x',g(s)\rangle ds\\ &= \langle x',\int_0^1 G(t,s)g(s)ds\rangle\end{aligned}$$

grâce à la compacité de la multi-application intégrale $\int_0^1 G(t,s)\Gamma(s)ds$, $(t\in[0,1])$, nous obtenons la convergence ponctuelle de $(v_n(\cdot))=(\int_0^1 G(\cdot,s)g_n(s)ds)$ vers $v(\cdot)=\int_0^1 G(t,s)g(s)ds$

pour E muni de la topologie forte. D'une manière analogue on montre que $(\dot{v}_n(\cdot)) = (\int\limits_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(\cdot,s)g_n(s)ds)$ converge ponctuellement vers $\int\limits_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(\cdot,s)g(s)ds$ pour E muni de la topolgie forte, comme (v_n) converge uniformément dans $\mathbf{X}_\Gamma$ vers v, alors

$$v(t) = \int_0^1 G(t,s)g(s)ds, \ \forall t \in [0,1],$$

et $v(t) = \varphi(t)$ pour tout $t \in [-r,0]$, et comme $g \in \Psi(f)$ on obtient $v \in \mathcal{A}u_f$ ce qui montre que $\mathcal{A}u_f$ est fermé dans $\mathbf{X}_\Gamma$.

Montrons maintenant que $\mathcal{A}$ est un opérateur compact. Soit S un ensemble borné de $\mathbf{X}_\Gamma$ et soit $u_f \in S$, pour tout $v \in \mathcal{A}u_f$, il existe $g \in \Psi(u_f)$ telle que

$$v(t) = \int_0^1 G(t,s)g(s)ds, \ \forall t \in [0,1],$$

et $v(t) = \varphi(t)$ pour tout $t \in [-r,0]$. Observons que pour tout
$t, \ \tau \in [0,1]$, nous avons

$$\begin{aligned}
\|v(t)-v(\tau)\| &= \|\int_0^1 G(t,s)g(s)ds - \int_0^1 G(\tau,s)g(s)ds\| \\
&\leq \int_0^1 |G(t,s)-G(\tau,s)|\|g(s)\|ds \\
&\leq \int_0^1 |G(t,s)-G(\tau,s)||k(s)|ds,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|\dot{v}(t)-\dot{v}(\tau)\| &= \|\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)g(s)ds - \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(\tau,s)g(s)ds\| \\
&\leq \int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) - \frac{\partial G}{\partial t}(\tau,s)|\|g(s)\|ds \\
&\leq \int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) - \frac{\partial G}{\partial t}(\tau,s)||k(s)|ds.
\end{aligned}$$

grâce à l'uniforme continuité de G et $\frac{\partial G}{\partial t}$ et comme $k = k_1 + k_2 \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1])$ car Γ est intégrablement bornée, alors quand $t \to \tau$,

$$\int_0^1 |G(t,s) - G(\tau,s)||k(s)|ds \to 0,$$

et

$$\int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) - \frac{\partial G}{\partial t}(\tau,s)||k(s)|ds \to 0.$$

Par suite les ensembles $\mathcal{A}(S) = \{v \in \mathcal{A}u_f,\ u_f \in S\}$, $\{\dot{v} :\ v \in \mathcal{A}(S)\}$ sont equicontinus dans $\mathbf{C}_E([0,1])$, comme $\varphi \in \mathbf{C}_E([-r,0])$, alors $\mathcal{A}(S)$ est equicontinu dans $\mathbf{X}_\Gamma$.

De plus, les ensembles $\mathcal{A}(S)(t)$, $(t \in [-r,1])$, et $\{\dot{v}(\tau) :\ v \in \mathcal{A}(S)\}$, $(\tau \in [0,1])$, sont relativement compacts, car

$$\overline{\mathcal{A}(S)(t)} \subset \int_0^1 G(t,s)\Gamma(s)ds,$$

et

$$\overline{\{\dot{v}(t) :\ v \in (S)\}} \subset \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\Gamma(s)ds.$$

En appliquant le Théorème d'Ascoli-Arzelà (Théorème 1.2.46 chapitre 1), on obtient la compacité relative de $\mathcal{A}(S)$ dans $\mathbf{X}_\Gamma$ et par suite $\mathcal{A}$ est compact (Définition 1.2.41 chapitre 1).

D'autre part, le graphe de $\mathcal{A}$

$$\mathrm{gph}(\mathcal{A}) = \{(u_f, v) \in \mathbf{X}_\Gamma \times \mathbf{X}_\Gamma :\ v \in \mathcal{A}u_f\},$$

est fermé dans $\mathbf{X}_\Gamma \times \mathbf{X}_\Gamma$ quand $\mathbf{X}_\Gamma$ est muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathbf{X}}$. En effet, soit (u_{f_n}, v_n) une suite d'éléments de gph($\mathcal{A}$) qui converge uniformément vers $(w,v) \in \mathbf{X}_\Gamma \times \mathbf{X}_\Gamma$. Comme $v_n \in \mathcal{A}u_{f_n}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $g_n \in \Psi(f_n) \subset \mathbf{S}^1_\Gamma$ telle que

$$v_n(t) = \int_0^1 G(t,s)g_n(s)ds,\ \forall t \in [0,1],$$

et $v_n(t) = \varphi(t)$ pour tout $t \in [-r,0]$. Comme $\mathbf{S}^1_\Gamma$ est $\sigma(\mathbf{L}^1_E([0,1]), \mathbf{L}^\infty_{E'}([0,1]))$-compact et comme $(f_n)_n \subset \mathbf{S}^1_\Gamma$, $(g_n)_n \subset \mathbf{S}^1_\Gamma$, on peut extraire de $(g_n)_n$ (resp. $(f_n)_n$) une sous suite qui converge $\sigma(\mathbf{L}^1_E([0,1]), \mathbf{L}^\infty_{E'}([0,1]))$ vers $g \in \mathbf{S}^1_\Gamma$ (resp. $(f \in \mathbf{S}^1_\Gamma)$). En utilisant les arguments de démonstration de la compacité des valeurs de $\mathcal{A}$, on peut voir que $(u_{f_n})_n$ converge vers u_f dans $\mathbf{X}_\Gamma$ et par suite $u_f = w$, comme $g_n(t)-\phi(u_{f_n})(t) \in F(t, u_{f_n}(t), u_{f_n}(h(t)), \dot{u}_{f_n}(t))$ et $F(t,\cdot,\cdot,\cdot)$ est semicontinue supérieurement à valeurs convexes compactes et ψ est continue, on conclut alors que $g(t) - \phi(u_f)(t) \in F(t, u_f(t), u_f(h(t)), \dot{u}_f(t))$ et par suite $g \in \Phi(f)$. D'autre part, nous avons pour tout $x' \in E'$ et tout $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \langle x', v_n(t)\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle x', \int_0^1 G(t,s) g_n(s) ds\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \langle G(t,s)x', g_n(s)\rangle ds \\
&= \int_0^1 \langle G(t,s)x', g(s)\rangle ds \\
&= \langle x', \int_0^1 G(t,s) g(s) ds\rangle,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \langle x', \dot{v}_n(t)\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle x', \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) g_n(s) ds\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \langle \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)x', g_n(s)\rangle ds \\
&= \int_0^1 \langle \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)x', g(s)\rangle ds \\
&= \langle x', \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) g(s) ds\rangle.
\end{aligned}$$

Donc $(v_n(\cdot), \dot{v}_n(\cdot))$ converge vers $(\int_0^1 G(\cdot,s)g(s)ds, \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(\cdot,s)g(s)ds)$ pour E muni de la topologie $\sigma(E,E')$. Comme $\int_0^1 G(t,s)\Gamma(s)ds$ et $\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\Gamma(s)ds$ sont compactes par rapport à la topologie forte on conclut que $(v_n(\cdot), \dot{v}_n(\cdot))$ converge ponctuellement vers $(\int_0^1 G(\cdot,s)g(s)ds, \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(\cdot,s)g(s)ds)$. La compacité des ensembles $\mathbf{X}_\Gamma$ et $\{\dot{v} : \ v \in \mathbf{X}_\Gamma\}$ dans

$\mathbf{X}$, nous donne la convergeance de $(v_n)_n$ vers $\int\limits_0^1 G(t,s)g(s)ds$ dans $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}})$, alors

$$v(t) = \int\limits_0^1 G(t,s)g(s)ds, \ \forall t \in [0,1],$$

et $v(t) = \varphi(t)$ pour tout $t \in [-r, 0]$. Ce qui montre que $v \in \mathcal{A}$ et donc gph$(\mathcal{A})$ est fermé. Par conséquent $\mathcal{A}$ est semicontinu supérieurement.

Montrons maintenant qu'il existe $R > 0$ tel qu'on ait

$$u_f \in \lambda \mathcal{A} u_f \ (0 < \lambda \leq 1) \quad \Longleftrightarrow \quad \|u_f\|_{\mathbf{X}} \leq R.$$

Nous avons $u_f \in \lambda \mathcal{A} u_f \iff \exists g \in \Psi(f)$ *telle que*

$$\begin{cases} u_f(t) = \lambda \int\limits_0^1 G(t,s)g(s)ds, & \forall t \in [0,1], \\ u_f(t) = \lambda\varphi(t), & \forall t \in [-r, 0]. \end{cases}$$

Pour tout $t \in [0,1]$, nous avons

$$\|u_f(t)\| \leq \int\limits_0^1 |G(t,s)| \|g(s)\| ds,$$

comme Γ est intégrablement bornée, on conclut alors que

$$\|u_f(t)\| \leq \int\limits_0^1 |k(s)| ds = \|k\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}}$$

et

$$\begin{aligned} \|\dot{u}_f(t)\| &\leq \int\limits_0^1 \left|\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\right| \|g(s)\| ds \\ &\leq \int\limits_0^1 |k(s)| ds = \|k\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}}. \end{aligned}$$

D'autre part, nous avons pour tout $t \in [-r, 0]$

$$\begin{aligned} \|u_f(t)\| &= \|\lambda\varphi(t)\| \\ &\leq \lambda\|\varphi(t)\| \\ &\leq \|\varphi\|_{\mathbf{C}_E([-r,0])}. \end{aligned}$$

D'après les inégalités précédentes

$$\|u_f\|_{\mathbf{X}} \leq \max\{\|k\|_{\mathbf{L}^1}, \|\varphi\|_{\mathbf{C}_E([-r,0])}\} = R,$$

donc il existe $R > 0$ tel que

$$u_f \in \mathcal{A}u_f \iff \|u_f\|_{\mathbf{X}} \leq R.$$

Par conséquent d'après le Théorème 1.2.42 chapitre 1, $\mathcal{A}$ admet un point fixe dans $\overline{\mathbf{B}}(0, R)$, c'est à dire, il exite $u_f \in \overline{\mathbf{B}}(0, R)$ tel que $u_f \in \mathcal{A}u_f$ et par suite, il existe $f \in \Psi(f)$ telle que

$$u_f(t) = \int_0^1 G(t, s)f(s)ds, \forall t \in [0, 1],$$

et $u_f(t) = \varphi(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$ par conséquent d'aprés les relations (2.3) et (2.9) du Lemme 2.1.1 on conclut que

$$\ddot{u}_f(t) \in F(t, u_f(t), u_f(h(t)), \dot{u}_f(t)) + H(t, u_f(t), u_f(h(t)), \dot{u}_f(t)),\ p.\ p.\ t \in [0, 1],$$

et

$$u_f(t) = \varphi(t)\ \forall t \in [-r, 0],$$

avec $u_f(0) = 0$ et $u_f(\theta) = u_f(1)$, ce qui montre que u_f est solution de notre inclusion différentielle $(\mathcal{P}_r)$. ■

3.2 Résultat d'existence de solutions sous la semi-continuité mixte de la multi-application H

Dans cette section, nous donnons notre deuxième résultat de ce chapitre lorsqu'on considère la muti-application H semicontinue mixte.

Théorème 3.2.1 *Soient E un espace de dimension finie, $F : [0,1] \times E \times E \times E \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs non vides convexes fermées, Lebesgue-mesurable sur $[0,1]$ et semicontinue supérieurement sur $E \times E \times E$ et telle que $F(t,x,y,z) \subset \overline{\mathbf{B}}_E(0,\rho_1(t))$, pour tout $(t,x,y,z) \in [0,1] \times E \times E \times E$, et pour une certaine fonction positive $\rho_1 \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1])$. Soit $H : [0,1] \times E \times E \times E \rightrightarrows E$ une autre multi-application à valeurs non vides fermées satisfaisant les conditions suivantes*
(i) *H est $\mathcal{L}([0,1]) \otimes \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(E)$-mesurable ;*
(ii) *pour chaque $t \in [0,1]$, en tout point $(x,y,z) \in E \times E \times E$ tel que $H(t,x,y,z)$ est convexe $H(t,\cdot,\cdot,\cdot)$ est semicontine supérieureent, et quand $H(t,x,y,z)$ n'est pas convexe $H(t,\cdot,\cdot,\cdot)$ est semicontinue inférieurement sur un voisinage de (x,y,z),*
(iii) *$H(t,x,y,z) \subset \rho_2(t)\overline{\mathbf{B}}_E(0,1)$ pour tout $(t,x,y,z) \in [0,1] \times E \times E \times E$, et pour une certaine fonction positive $\rho_2 \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1])$. Soit r un réel positif et soient $h : [0,1] \to [-r,t]$ une fonction continue et $\varphi \in \mathbf{C}_E([-r,0])$ avec $\varphi(0) = 0$. Alors l'inclusion différentielle*

$$(\mathcal{P}_r) \begin{cases} \ddot{u}(t) \in F(t,u(t),u(h(t)),\dot{u}(t)) + H(t,u(t),u(h(t)),\dot{u}(t)), \qquad p.\ p.\ t \in [0,1] \\ u(t) = \varphi(t),\ \forall t \in [-r,0], \\ u(0) = 0;\ u(\theta) = u(1), \end{cases}$$

admet des solutions dans $\mathbf{X} := \mathbf{C}_E([-r,1]) \bigcap \mathbf{W}^{2,1}_E([0,1])$.

Démonstration.
<u>*Etape 1.*</u>
Soit $m_i(\cdot) = \rho_i(\cdot) + \frac{1}{2}$ $(i = 1,2)$, $m = m_1 + m_2$ et

$$\mathcal{K} = \{u \in \mathbf{X} :\ u(t) = \varphi(t)\ \forall t \in [-r,0]\ et\, u(t) = \int_0^1 G(t,s)\ddot{u}(s)ds,\ \forall t \in [0,1];\ \|\ddot{u}(t)\| \leq m(t)\ p.\ p\}.$$

Il est clair que $\mathcal{K}$ est un sous ensemble convexe. Montrons maintenant que $\mathcal{K}$ est compact. Nous avons pour tout $t,\ \tau \in [0,1]$ et tout $u \in \mathcal{K}$

$$\begin{aligned}
\|u(t)-u(\tau)\| &= \|\int_0^1 G(t,s)\ddot{u}(s)ds - \int_0^1 G(\tau,s)\ddot{u}(s)ds\| \\
&\leq \int_0^1 |G(t,s)-G(\tau,s)|\|\ddot{u}(s)\|ds \\
&\leq \int_0^1 |G(t,s)-G(\tau,s)|m(s)ds,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|\dot{u}(t)-\dot{u}(\tau)\| &= \|\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\ddot{u}(s)ds - \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(\tau,s)\ddot{u}(s)ds\| \\
&\leq \int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) - \frac{\partial G}{\partial t}(\tau,s)|\|\ddot{u}(s)\|ds \\
&\leq \int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) - \frac{\partial G}{\partial t}(\tau,s)|m(s)ds.
\end{aligned}$$

grâce à l'uniforme continuité de G et $\frac{\partial G}{\partial t}$ et comme $m \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}$, on conclut que les ensembles $\mathcal{K}$ et $\{\dot{u},\ u \in \mathcal{K}\}$ sont équicontinus dans $\mathbf{C}_E([0,1])$ et comme $\varphi \in \mathbf{C}_E([-r,0])$ alors $\mathcal{K}$ est équicontinu dans $\mathbf{X}$.
D'autre part,

$$\begin{aligned}
\|u(t)\| &= \|\int_0^1 G(t,s)\ddot{u}(s)ds\| \\
&\leq \int_0^1 |G(t,s)|\|\ddot{u}(s)\|ds \\
&\leq \int_0^1 \|\ddot{u}(s)\|ds \\
&\leq \int_0^1 m(s)ds = \|m\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}},
\end{aligned}$$

pour $t \in [0,1]$, et pour $t \in [-r,0]$ nous avons

$$\begin{aligned}
\|u(t)\| &= \|\varphi(t)\| \\
&\leq \|\varphi\|_{\mathbf{C}_E([-r,0])}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|\dot{u}(t)\| &= \|\int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial t}(t;s)\ddot{u}(s)ds\| \\
&\leq \int_0^1 ||\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)|\|\ddot{u}(s)\|ds \\
&\leq \int_0^1 \|\ddot{u}(s)\|ds \\
&\leq \int_0^1 m(s)ds = \|m\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}}.
\end{aligned}$$

Ces inégalités montrent que les ensembles $\mathcal{K}(t)$, $(t \in [-r,1])$ et $\{\dot{u}(\tau),\ u \in \mathcal{K}\}$, $(\tau \in [0,1])$ sont relativement compacts dans E. D'après le théorème d'Ascoli-Arzelà (Théorème 1.2.44 chapitre 1), les ensembles $\mathcal{K}$ et $\{\dot{u},\ u \in \mathcal{K}\}$ sont relativement compactes dans $\mathbf{C}_E([-r,1])$ et $\mathbf{C}_E([0,1])$ respectivement et par suite $\mathcal{K}$ est relativement compact dans $\mathbf{X}$.

Montrons maintenant que $\mathcal{K}$ est fermé dans $\mathbf{X}$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathbf{X}}$. Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{K}$ convergeant vers u dans $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}})$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n(t) = \int_0^1 G(t,s)\ddot{u}_n(s)ds,\ \forall t \in [0,1],$$

$\|\ddot{u}_n(t)\| \leq m(t)$ et $u_n(t) = \varphi(t)$ pour tout $t \in [-r,0]$.

Comme $\|\ddot{u}_n(t)\| \leq m(t)$, alors $\frac{\|\ddot{u}_n(t)\|}{m(t)} \leq 1$, posons $g_n(t) = \frac{\ddot{u}_n(t)}{m(t)}$, alors $g_n \in \mathbf{L}^\infty_E([0,1])$. D'après le Théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki (Théorème 1.2.49 chapitre 1) $\overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{L}^\infty_E}$ est $\sigma(\mathbf{L}^\infty_E, \mathbf{L}^1_E)$-compacte, on peut donc extraire de $(g_n)_n$ une sous suite qu'on note aussi $(g_n)_n$ qui converge $\sigma(\mathbf{L}^\infty_E, \mathbf{L}^1_E)$ vers une application $g \in \mathbf{L}^\infty_E([0,1])$ vérifiant $\|g(t)\| \leq 1$.

Montrons maintenant que $(\ddot{u}_n)_n$ converge $\sigma(\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_E)$ vers $\ddot{u}$. Soit $y \in \mathbf{L}^\infty_E([0,1])$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \langle \ddot{u}_n, y\rangle_{\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_E} &= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \langle \ddot{u}_n(t), y(t)\rangle dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \langle m(t)g_n(t), y(t)\rangle dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \langle g_n(t), m(t)y(t)\rangle dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle g_n, my\rangle_{\mathbf{L}^\infty_E, \mathbf{L}^1_E} \\
&= \langle g, my\rangle_{\mathbf{L}^\infty_E, \mathbf{L}^1_E} \\
&= \int_0^1 \langle g(t), m(t)y(t)\rangle dt \\
&= \int_O^1 \langle m(t)g(t), y(t)\rangle dt \\
&= \langle mg, y\rangle_{\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_E} \\
&= \langle v, y\rangle_{\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_E}.
\end{aligned}$$

Alors $(\ddot{u}_n)_n$ converge vers $v = mg$ pour la topologie $\sigma(\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_E)$.

D'autre part l'égalité

$$\dot{u}_n(t) - \dot{u}_n(s) = \int_s^t \ddot{u}_n(\tau)d\tau$$

nous donne

$$\lim_{n\to\infty} (\dot{u}_n(t) - \dot{u}_n(s)) = \lim_{n\to\infty} \int_s^1 \ddot{u}_n(\tau)d\tau$$

et par suite

$$\dot{u}(t) - \dot{u}(s) = \int_s^t v(s)ds,$$

comme $\dot{u}$ est absolument continue on obtient $v = \ddot{u}$, on conclut donc que $(\ddot{u}_n)_n$ converge $\sigma(\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_E)$ vers $\ddot{u}$ vérifiant $\|\ddot{u}(t)\| \leq m(t)$. En particulier, nous avons pour tout $t \in [0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 G(t,s)\ddot{u}_n(s)ds = \int_0^1 G(t,s)\ddot{u}(s)ds,$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \dot{u}_n(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\ddot{u}_n(s)ds = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\ddot{u}(s)ds.$$

Comme $(u_n)_n$ converge uniformément vers u, on conclut donc que $u(t) = \int_0^1 G(t,s)\ddot{u}(s)ds$ pour tout $t \in [0,1]$, alors $u \in \mathcal{K}$ d'où la compacité de $\mathcal{K}$.

D'après le Théorème 2.2.1, il existe une multi-application $\Phi_i : \mathcal{K} \rightrightarrows \mathbf{L}^1_E([0,1])$,$(i = 1,2)$, à valeurs non vides convexes fermées et de graphe fortement-faiblement séquentiellement fermé telle que pour tout $u \in \mathcal{K}$ et tout $\phi \in \Phi_1(u)$ pour presque tout $t \in [0,1]$, nous avons

$$\phi(t) \in F(t, u(t), u(h(t)), \dot{u}(t)) \quad et \quad \|\phi(t)\| \leq m_1(t) \tag{3.3}$$

et pour tout $u \in \mathcal{K}$ et pour tout $\psi \in \Phi_2(u)$

$$\psi(t) \in H(t, u(t), u(h(t)), \dot{u}(t)) \quad et \quad \|\psi(t)\| \leq m_2(t). \tag{3.4}$$

Pour tout $u \in \mathcal{K}$, considérons la multi-application $\Phi : \mathcal{K} \rightrightarrows \mathbf{L}^1_E([0,1])$ définie par $\Phi(u) = \Phi_1(u)+\Phi_2(u)$, la multi-application Φ possède les mêmes propriétés que Φ_i, $i = 1,2$. En effet, pour tout $u \in \mathcal{K}$, $\Phi(u)$ est convexe grâce à la convexité de Φ_i, $i = 1,2$. Montrons maintenant que $\Phi(u)$ est fermé dans $\mathbf{X}$. Fixons $u \in \mathcal{K}$ et soit $(v_n)_n$ une suite d'éléments de $\Phi(u)$ qui converge $\sigma(\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_E)$ vers v, alors $v_n = v^1_n + v^2_n$ tel que $v^i_n \in \Phi_i(u)$, et donc $\|v^i_n(t)\| \leq m_i(t)$, on peut supposer par extraction d'une sous suite que (v^i_n) converge $\sigma(\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_E)$ vers une application v vérifiant $\|v_i(t)\| \leq m_i(t)$ p. p. Comme $(v^i_n)_n \subset \Phi_i(u)$ et comme $\Phi_i(u)$ est $\sigma(\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_E)$ fermé on conclut que $v_i \in \Phi_i(u)$, $i = 1,2$.

D'autre part, $(v_n)_n$ converge $\sigma(\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_E)$ vers v, alors $v = v_1 + v_2 \in \Phi_1(u) + \Phi_2(u) = \Phi(u)$ et par suite Φ est $\sigma(\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_{E'})$ fermé et puisque Φ est convexe, alors d'après le Théorème 1.2.56 chapitre 1, $\Phi(u)$ est fermé. Observons que $\|\phi(t)\| \leq m(t)$, $\forall \phi \in \Phi(u)$.

Montrons maintenant que le graphe de Φ défini par

$$\mathrm{gph}(\Phi) = \{(u,v) \in \mathcal{K} \times \mathbf{L}^1_E([0,1]) : \; v \in \Phi(u)\},$$

est fortement-faiblement séquentiellement fermé dans $\mathcal{K} \times \mathbf{L}^1_E([0,1])$. Soit $(u_n, v_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathrm{gph}(\Phi)$ convergeant vers $(u,v) \in \mathcal{K} \times \mathbf{L}^1_E([0,1])$ telle que $(u_n)_n$ converge fortement vers u et $(v_n)_n$ converge $\sigma(\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_E)$ vers v. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in \Phi(u_n)$ et par suite $v_n = v^1_n + v^2_n$ tel que $v^i_n \in \Phi_i(u)$. D'après les relations (3.3) et (3.4) $\|v^i_n(t)\| \leq m_i(t)$, on peut supposer donc par extraction d'une sous suite que $(v^i_n)_n$ converge $\sigma(\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_E)$ vers

une application v_i vérifiant $\|v_i(t)\| \leq m_i(t)$.
D'autre part, comme $v_n^i \in \Phi_i(u_n)$, alors $(u_n, v_{n_i}) \in \text{gph}(\Phi_i)$ et comme Φ_i est de graphe fortement-faiblement séquentiellement fermé on déduit alors que $(u, v_i) \in \text{gph}(\Phi_i)$ et par suite $v_i \in \Phi_i(u)$, comme $(v_n)_n$ converge $\sigma(\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_E)$ vers v on conclut que $v = v_1 + v_2 \in \Phi_1(u) + \Phi_2(u) = \Phi(u)$, alors $v \in \Phi(u)$ et par conséquent $(u, v) \in \text{gph}(\Phi)$, donc $\text{gph}(\Phi)$ est fortement-faiblement séquentiellement fermé.
Etape 2.
Considérons l'opératur $\mathcal{A}$ défini sur $\mathcal{K}$ par

$$\begin{aligned}\mathcal{A}u &= \{v \in \mathbf{X} : \; v(t) = \varphi(t) \; sur \; [-r, 0] \; et \\ &\quad v(t) = \int_0^1 G(t,s)\phi(s)ds, \; \forall t \in [0,1], \; \phi \in \Phi(u)\}.\end{aligned}$$

Montrons que $\mathcal{A}u \subset \mathcal{K}$. Fixons $u \in \mathcal{K}$ et soit $v \in \mathcal{A}u$, alors il existe $\phi \in \Phi(u)$ telle que

$$v(t) = \int_0^1 G(t,s)\phi(s)ds, \; \forall t \in [0,1],$$

et $v(t) = \varphi(t)$ pour tout $t \in [-r, 0]$. D'aprés la relation (2.9) du Lemme 2.1.1 $\ddot{v} = \phi$ presque partout et par suite $v(t) = \int_0^1 G(t,s)\ddot{v}(s)ds$ pour tout $t \in [0,1]$ et pour presque tout $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}\|\ddot{v}(t)\| &= \|\phi(t)\| \\ &\leq m(t)\end{aligned}$$

Par conséquent $v \in \mathcal{K}$, ce qui montre que $\mathcal{A}$ est défini de $\mathcal{K}$ dans lui même.

Il est clair que $\mathcal{A}u$ est convexe, Montrons donc que $\mathcal{A}u$ est compact dans $\mathcal{K}$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathbf{X}}$. Comme $\mathcal{A}u \subset \mathcal{K}$ et $\mathcal{K}$ compact il suffit donc de montrer que $\mathcal{A}u$ est fermé dans $\mathcal{K}$. Fixons $u \in \mathcal{K}$ et soit (v_n) une suite d'éléments de $\mathcal{A}u$ convergeant vers $v \in \mathcal{K}$, alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $\phi_n \in \Phi(u)$ telle que

$$v_n(t) = \int_0^1 G(t,s)\phi_n(s)ds, \; \forall t \in [0,1],$$

et $v_n(t) = \varphi(t)$ pour tout $t \in [-r, 0]$. $\|\phi_n(t)\| \leq m(t)$ p. p, alors on peut lui extraire une sous suite qui converge $\sigma(\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_{E'})$ vers une application $\phi \in \mathbf{L}^1_E([0,1])$. Comme
$\phi_n \in \Phi(u)$, et $\Phi(u)$ est $\sigma(\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_{E'})$-fermé, on conclut que $\phi \in \Phi(u)$. De plus

$$\lim_{n\to\infty} v_n(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 G(t,s)\phi_n(s)ds = \int_0^1 G(t,s)\phi(s)ds, \; \forall t \in [0,1],$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \dot{v}_n(t) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\phi_n(s)ds = \int\limits_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\phi(s)ds,\ \forall t \in [0,1],$$

comme $(v_n)_n$ converge vers v dans $\mathcal{K}$, alors $v(t) = \int\limits_0^1 G(t,s)\phi(s)ds,\ \forall t \in [0,1]$, et $v(t) = \varphi(t)$ pour tout $t \in [-r,0]$ et par suite $v \in \mathcal{A}u$, on déduit donc que $\mathcal{A}u$ est fermé, d'où la compacité de $\mathcal{A}u$.

Montrons maintenant que $\mathcal{A}$ est un opérateur compact. Soit S un ensemble borné dans $\mathcal{K}$ et $u \in S$, pour tout $v \in \mathcal{A}u$, il existe $\phi \in \Phi(u)$ telle que

$$v(t) = \int\limits_0^1 G(t,s)\phi(s)ds, \forall t \in [0,1],$$

et $v(t) = \varphi(t)$ pour tout $t \in [-r,0]$. Observons que pour tout
$t,\ \tau \in [0,1]$ nous avons

$$\begin{aligned}
\|v(t) - v(\tau)\| &= \|\int\limits_0^1 G(t,s)\phi(s)ds - \int_0^1 G(\tau,s)\phi(s)ds\| \\
&\le \int\limits_0^1 |G(t,s) - G(\tau,s)|\|\phi(s)\|ds \\
&\le \int\limits_0^1 |G(t,s) - G(\tau,s)|m(s)ds,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|\dot{v}(t) - \dot{v}(\tau)\| &= \|\int\limits_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\phi(s)ds - \int\limits_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(\tau,s)\phi(s)ds\| \\
&\le \int\limits_0^1 |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) - \frac{\partial G}{\partial t}(\tau,s)|\|\phi(s)\|ds \\
&\le \int\limits_0^1 |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) - \frac{\partial G}{\partial t}(\tau,s)|m(s)ds.
\end{aligned}$$

grâce à l'uniforme continuité de G et $\frac{\partial G}{\partial t}$ et comme $m \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}([0,1])$, alors

$$\int\limits_0^1 |G(t,s) - G(\tau,s)|m(s)ds \to 0,$$

et

$$\int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) - \frac{\partial G}{\partial t}(\tau,s)|m(s)ds \to 0,$$

quand $t \to \tau$, ce qui montre que $\mathcal{A}(S)$ et $\{\dot{v} : \ v \in \mathcal{A}(S)\}$ sont equicontinus dans $\mathbf{C}_E([0,1])$ comme $\varphi \in \mathbf{C}_E([-r,0])$, on conclut alors que $\mathcal{A}(S)$ est equicontinu dans $\mathbf{X}$. comme $\mathcal{A}(S)(t)$, $(t \in [-r,1])$,et $\{\dot{v}(\tau) : \ v \in \mathcal{A}(S)\}$, $(\tau \in [0,1])$, sont relativement compacts, en appliquant alors le Théorème d'Ascoli-Arzelà, nous obtenons la compacité relative de $\mathcal{A}(S)$ dans $\mathbf{X}$, d'où la compacité de l'opérateur $\mathcal{A}$.

Montrons maintenant que $\mathcal{A}$ est semicontinue supérieurement, c'est à dire, montrons que le graphe de $\mathcal{A}$ défini par

$$\mathrm{gph}(\mathcal{A}) = \{(u,v) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K} : \ v \in \mathcal{A}u\},$$

est fermé dans $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$. Soit (u_n, v_n) une suite d'éléments de $\mathrm{gph}(\mathcal{A})$ convergeant uniformément vers $(u,v) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$. Comme $v_n \in \mathcal{A}u_n$, alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $\phi_n \in \Phi(u_n)$ telle que

$$v_n(t) = \int_0^1 G(t,s)\phi_n(s)ds, \ \forall t \in [0,1],$$

et $v_n(t) = \varphi(t)$ pour tout $t \in [-r,0]$. Comme $\phi_n \in \Phi(u_n)$, alors $\|\phi_n(t)\| \leq m(t)$, on peut supposer par extraction d'une sous suite que $(\phi_n)_n$ converge $\sigma(\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_{E'})$ vers une application $\phi \in \mathbf{L}^1_E([0,1])$.

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} \phi_n \in \Phi(u_n) &\Rightarrow (u_n, \phi_n) \in \mathrm{gph}(\Phi) \\ &\Rightarrow (u, \phi) \in \mathrm{gph}(\Phi) \\ &\Rightarrow \phi \in \Phi(u), \end{aligned}$$

car $\mathrm{gph}(\Phi)$ est fortement-faiblement séquentiellement fermé.

De plus,

$$\lim_{n\to\infty} v_n(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 G(t,s)\phi_n(s)ds = \int_0^1 G(t,s)\phi(s)ds, \ \forall t \in [0,1],$$

$$\lim_{n\to\infty} \dot{v}_n(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\phi_n(s)ds = \int_0^1 G(t,s)\phi(s)ds, \ \forall t \in [0,1],$$

comme $(v_n)_n$ converge uniformément vers v, alors $v(\cdot) = \int\limits_0^1 G(\cdot, s)\phi(s)ds$ et $v(\cdot) = \varphi(\cdot)$ sur $[-r, 0]$, et comme $\phi \in \Phi(u)$ alors $(u, v) \in \mathrm{gph}(\mathcal{A})$, d'où la semicontinuité supérieure de $\mathcal{A}$.

Montrons maintenant qu'il existe $R > 0$ tel qu on ait

$$u \in \lambda\mathcal{A}u \ (0 < \lambda \leq 1) \quad \Longleftrightarrow \quad \|u\|_{\mathbf{X}} \leq R.$$

$$u \in \lambda\mathcal{A}u \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\phi \in \Phi(u)$$

tel que

$$\begin{cases} u(t) = \lambda \int\limits_0^1 G(t, s)\phi(s)ds, & \forall t \in [0, 1], \\ u(t) = \lambda\varphi(t), & \forall t \in [-r, 0]. \end{cases}$$

Pour tout $t \in [0, 1]$, nous avons

$$\begin{aligned} \|u(t)\| &= \|\lambda \int_0^1 G(t, s)\phi(s)ds\| \\ &\leq \lambda \int_0^1 |G(t, s)|\|\phi(s)\|ds \\ &\leq \int_0^1 m(s)ds = \|m\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1])}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|\dot{u}(t)\| &= \|\lambda \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t, s)\phi(s)ds\| \\ &\leq \lambda \int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial t}(t, s)|\|\phi(s)\|ds \\ &\leq \int_0^1 m(s)ds = \|m\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1])}. \end{aligned}$$

D'autre part, nous avons pour tout $t \in [-r, 0]$

$$\begin{aligned} \|u(t)\| &= \|\lambda\varphi(t)\| \\ &\leq \lambda\|\varphi(t)\| \\ &\leq \|\varphi\|_{\mathbf{C}_E([-r,0])}. \end{aligned}$$

D'après les inégalités précédentes

$$\|u\|_{\mathbf{X}} \leq \max\{\|m\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}}, \|\varphi\|_{\mathbf{C}_E([-r,0])}\} = R.$$

Par conséquent d'après le Théorème 1.2.42 chapitre 1, on obtient l'existence d'un point fixe $u \in \mathcal{A}(u)$, c'est à dire, il existe $\phi \in \Phi(u)$ telle que

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)\phi(s)ds, \ \forall t \in [0,1],$$

et $u(t) = \varphi(t)$ pour tout $t \in [-r, 0]$. D'après la définition de Φ on obtient $\phi = \phi_1 + \phi_2$ tel que $\phi_i \in \Phi_i(u)$, $(i = 1, 2)$ et la définition de Φ_i on obtient

$$\phi_1(t) \in F(t, u(t), u(h(t)), \dot{u}(t)), p.\ p.\ t \in [0,1]$$

$$\phi_2(t) \in H(t, u(t), u(h(t)), \dot{u}(t)), p.\ p.\ t \in [0,1]$$

et par suite

$$\phi(t) \in F(t, u(t), u(h(t)), \dot{u}(t)) + H(t, u(t), u(h(t)), \dot{u}(t)), p.\ p.\ t \in [0,1].$$

Par la relation (2.9) du Lemme 2.1.1, $\ddot{u} = \phi$ on conclut alors que

$$\ddot{u}(t) \in F(t, u(t), u(h(t)), \dot{u}(t)) + H(t, u(t), u(h(t)), \dot{u}(t)), p.\ p.\ t \in [0,1],$$

et $u(t) = \varphi(t)$ pour tout $t \in [-r, 0]$ avec $u(0) = 0$ et $u(\theta) = u(1)$, et par suite u est solution de notre problème considéré. ∎

Chapitre 4

Résultats d'existence de solutions pour une inclusion différentielle du second ordre gouvernée par un opérateur maximal monotone et une perturbation à valeurs non convexes

On démontre dans ce chapitre un nouveau résultat d'existence pour une inclusion différentielle du second ordre gouvernée par un opérateur maximal monotone et une perturbation à valeus non convexes avec des conditions aux limites en trois points dans un espace de dimension finie, de la forme

$$(\mathcal{P}_F)\begin{cases} -\ddot{u}(t) \in A(t)u(t) + F(t, u(t), \dot{u}(t)), \quad p.\, p.\; t \in [0,1], \\ u(0) = 0,\; u(\theta) = u(1). \end{cases}$$

où $F : [0,1] \times E \times E \rightrightarrows E$ une multi-application semicontinue mixte bornée par une fonction de $\mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}([0,1])$ et $A(t) : \mathrm{D}(A(t)) \subset E \rightrightarrows E$ un opérateur maximal monotone. Dans la deuxième section, nous étudions le même problème d'existence mais dans le cas où F est à croissance linéaire.

Rappelons qu'un opérateur $A : \mathrm{D}(A) \subset E \rightrightarrows E$, est monotone si, pour tout $t \in [0,1]$, $\lambda > 0$ et pour tous $x_1,\ x_2 \in \mathrm{D}(A)$, $y_1 \in Ax_1$ et $y_2 \in Ax_2$ nous avons

$$\|x_1 - x_2\| \leq \|(x_1 - x_2) + \lambda(y_1 - y_2)\|. \tag{4.1}$$

Si de plus, $\mathcal{R}(I_E + \lambda A) = E$ on dit que A est maximal monotone.

$$\mathrm{D}(A) := \{x \in E :\ Ax \neq \emptyset\}$$

est le domaine de A,

$$\mathcal{R}(A) = \bigcup_{x \in E} Ax$$

est le rang de A et I_E est l'identité de E.

Dans ce qui suit, nous donnons quelques résultats sur les opérateurs maximaux monotones qui nous seront utiles dans la démonstration de nos théorèmes. Pour plus de détails sur les opérateurs maximaux monotones on peut se référer à [9], [32] et [11].

Définition 4.0.2 *Soient $A : D(A) \subset E \rightrightarrows E$ un opérateur et $\lambda > 0$. Alors*
a) *l'opérateur $J_\lambda : D(J_\lambda) \subset E \rightrightarrows E$ défini par*

$$J_\lambda A = (I_E + \lambda A)^{-1},$$

où $D(J_\lambda A) = (I_E + \lambda A)$, est appelé la résolvante de A,
b) *l'opérateur $A_\lambda : D(A_\lambda) \subset E \rightrightarrows E$ défini par*

$$A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I_E - J_\lambda A),$$

où $D(A_\lambda) = (I_E + \lambda A)$, est appelé l'approximation Yosida de A.

Lemme 4.0.3 *Un opérateur $A : D(A) \subset E \rightrightarrows E$ est maximal monotone si et seulement si pour tout $\lambda > 0$, la résolvante J_λ de A est univoque non-expansive, c'est à dire J_λ est univoque et vérifie la relation*

$$\|J_\lambda Ax - J_\lambda Ay\| \leq \|x - y\|, \ \forall x, \ y \in \mathcal{R}(I_E + \lambda A).$$

Proposition 4.0.4 *Si $A : D(A) \subset E \rightrightarrows E$ est maximal monotone et $\lambda > 0$, alors*
1) A_λ est univoque, monotone et Lipschitzien de rapport $\frac{2}{\lambda}$ sur $\mathcal{R}(I_E + \lambda A)$,
2) $A_\lambda x \in AJ_\lambda Ax$, $\forall x \in \mathcal{R}(I_E + \lambda A)$,
3)

$$\frac{1}{\lambda}\|J_\lambda Ax - x\| = \|A_\lambda x\| \leq |Ax|_0 = \inf\{\|y\|, \ y \in Ax\}, \ \forall x \in \mathcal{R}(I_E + \lambda A) \cap D(A) \quad (4.2)$$

Théorème 4.0.5 *Soit E un espace de Banach qui a son dual topologique uniformément convexe. Alors le graphe de tout opérateur maximal monotone $A : D(A) \subset E \rightrightarrows E$ est fortement-faiblement séquentiellement fermé.*

Lemme 4.0.6 *Soit H un espace de Hilbert séparable et $A(t) : H \rightrightarrows H$, $(t \in [0,1])$, un opérateur maximal monotone satisfaisant la condition suivante*
$(\mathcal{H})$ pour tout $x \in E$ et tout $\lambda > 0$, la fonction $t \mapsto (I_E + \lambda A(t))^{-1}x$ est Lebesgue-mesurable

et il existe une fonction $\overline{g} \in \mathbf{L}^2_H([0,1])$ *telle que* $t \mapsto (I_E + \lambda A(t))^{-1}\overline{g}(t)$ *appartient à* $\mathbf{L}^2_H([0,1])$.

Soient $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *deux suites dans* $\mathbf{L}^2_H([0,1])$ *vérifiant*
(i) $(u_n)_n$ *converge fortement vers* $u \in \mathbf{L}^2_H([0,1])$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $v \in \mathbf{L}^2_H([0,1])$ *par rapport à la topologie faible* $\sigma(\mathbf{L}^2_H, \mathbf{L}^2_H)$ *;*
(ii) $v_n(t) \in A(t)u_n(t)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et presque pour tout* $t \in [0,1]$.
Alors $v(t) \in A(t)u(t)$, *p.p.* $t \in [0,1]$.

Démonstration.
Soit $I_{\mathbf{L}^2_H}$ l'identité de $\mathbf{L}^2_H([0,1])$ et soit

$$\mathcal{A} : \mathbf{L}^2_H([0,1]) \rightrightarrows \mathbf{L}^2_H([0,1])$$

l'opérateur défini par

$$v \in \mathcal{A}u \iff v(t) \in A(t)u(t),\ p.\ p.\ t \in [0,1].$$

Comme A est monotone, $\mathcal{A}$ l'est aussi. En effet, soient $u_1,\ u_2 \in \mathrm{D}(\mathcal{A})$, $v_1 \in \mathcal{A}u_1$, $v_2 \in \mathcal{A}u_2$, $t \in [0,1]$ et $\lambda > 0$. Nous avons $u_1,\ u_2 \in \mathrm{D}(\mathcal{A})$ et donc $u_1(t),\ u_2(t) \in \mathrm{D}(A(t))$ pour tout $t \in [0,1]$ et

$$\begin{aligned}
\|u_1 - u_2\|^2_{\mathbf{L}^2_E([0,1])} &= \int_0^1 \|(u_1(t) - u_2(t))\|^2 dt \\
&\leq \int_0^1 \|u_1(t) - u_2(t) + \lambda(v_1(t) - v_2(t)\|^2 dt \\
&= \|u_1 - u_2 + \lambda(v_1 - v_2)\|^2_{\mathbf{L}^2_E([0,1])}.
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que $\mathcal{A}$ est maximal monotone, c'est à dire on doit démontrer que pour tout $\lambda > 0$

$$\mathcal{R}(I_{\mathbf{L}^2_H} + \lambda\mathcal{A}) = \mathbf{L}^2_H([0,1]).$$

Soit $\lambda > 0$ et soit $g \in \mathbf{L}^2_H([0,1])$. D'aprés l'hypothèse $(\mathcal{H})$, il existe $\overline{g} \in \mathbf{L}^2_H([0,1])$ telle que la fonction

$$\overline{h} : t \mapsto (I_H + \lambda A(t))^{-1}\overline{g}(t)$$

appartient à $\mathbf{L}^2_H([0,1])$.

Considérons la fonction $h : t \mapsto (I_E + \lambda A(t))^{-1}g(t)$, nous avons

$$\begin{aligned}
\|h\|_{\mathbf{L}^2_H} &\leq \|h - \overline{h}\|_{\mathbf{L}^2_H} + \|\overline{h}\|_{\mathbf{L}^2_H} \\
&\leq \|g - \overline{g}\|_{\mathbf{L}^2_H} + \|\overline{h}\|_{\mathbf{L}^2_H},
\end{aligned}$$

du fait que J_λ est non-expansive.

Comme g, $\overline{g}$ sont des fonctions de $\mathbf{L}^2_H([0,1])$, on déduit que h est Lebesgue-mesurable et appartient à $\mathbf{L}^2_H([0,1])$. D'autre part, nous avons

$$\begin{array}{rcl} & h(t) = (I_H + \lambda A(t))^{-1} g(t) & \forall\, t \in [0,1] \\ \Longleftrightarrow & g(t) \in (I_H + \lambda A(t)) h(t) & \forall\, t \in [0,1] \\ \Longleftrightarrow & g \in (h + \lambda \mathcal{A} h) & \\ \Longleftrightarrow & h \in (I_{\mathbf{L}^2_H} + \lambda \mathcal{A})^{-1} g, & \end{array}$$

c'est à dire, $\forall g \in \mathbf{L}^2_H([0,1])$, $\exists h \in \mathbf{L}^2_H([0,1])$ telle que $h \in (I_{\mathbf{L}^2_H} + \lambda \mathcal{A})^{-1} g$, d'où

$$\mathcal{R}(I_{\mathbf{L}^2_H} + \lambda \mathcal{A}) = \mathbf{L}^2_H([0,1]).$$

Donc, $\mathcal{A}$ est un opérateur maximal monotone sur l'espace de Hilbert $\mathbf{L}^2_H([0,1])$. Par conséquent d'aprés le théorème 4.0.8, le graphe de $\mathcal{A}$ est fortement-faiblement séquentiellement fermé. Comme la suite $(u_n)_n$ converge fortemet vers u dans $\mathbf{L}^2_H([0,1])$, et la suite $(v_n)_n$ converge faiblement vers v, on conclut que $v \in \mathcal{A}u$ et donc $v(t) \in A(t)u(t)$, presque partout.

4.1 Résultat d'existence pour l' inclusion différentielle $(\mathcal{P}_F)$ quand F est bornée par une fonction de $\mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}([0,1])$

Dans cette section, on établit un résultat d'existence de solutions pour l'inclusion différentielle $(\mathcal{P}_F)$ quand F est semicontinue mixte et bornée par une fonction positive de $\mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}([0,1])$.

Théorème 4.1.1 *Soient E un espace de dimension finie, $A(t) : E \rightrightarrows E$, $(t \in [0,1])$ un opérateur maximal monotone et $F : [0,1] \times E \times E \rightrightarrows E$ une multi-application satisfaisant les conditions suivantes*
(i) *F est $\mathcal{L}([0,1]) \otimes \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(E)$-mesurable ;*
(ii) *pour chaque $t \in [0,1]$, en tout point $(x,y) \in E \times E$ tel que $F(t,x,y)$ est convexe $F(t,\cdot,\cdot)$ est semicontine supérieurement, et lorsque $F(t,x,y)$ est non convexe $F(t,\cdot,\cdot)$ est semicontinue inférieurement sur un voisinage de (x,y) ;*
(iii) *$F(t,x,y) \subset \rho_1(t)\overline{\mathbf{B}}_E(0,1)$ pour tout $(t,x,y) \in [0,1] \times E \times E$, pour une certaine fonction positive $\rho_1 \in \mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}([0,1])$.*
Supposons que les hypothèses suivantes sont aussi satisfaites
(H1) *pour chaque $x \in E$ et pour chaque $\lambda > 0$, l'applicaton $t \mapsto (I_E + \lambda A(t))^{-1}x$ est Lebesgue-mesurable et il existe $\overline{g} \in \mathbf{L}^2_E([0,1])$ telle que $t \mapsto (I_E + \lambda A(t))^{-1}\overline{g}(t)$ appartient à $\mathbf{L}^2_E([0,1])$;*
(H2) *il existe une fonction positve $\rho_2 \in \mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}([0,1])$ telle que*

$$|A(t)x|_0 \leq \rho_2(t), \ \forall (t,x,y) \in [0,1] \times E \times E.$$

Alors, il existe au moins une solution dans $\mathbf{W}^{2,1}_E([0,1])$ pour le problème

$$(\mathcal{P}_F) \begin{cases} -\ddot{u}(t) \in A(t)u(t) + F(t,u(t),\dot{u}(t)), & p.p. \ t \in [0,1], \\ u(0) = 0, \ u(\theta) = u(1). \end{cases}$$

Démonstration.
<u>*Etape 1*</u>.
Soient $m_i = \rho_i + \frac{1}{2}$ $(i = 1,2)$, $m = m_1 + m_2$ et

$$\mathbf{S} = \{f \in \mathbf{L}^2_E([0,1]) : \|f(t)\| \leq m(t), p.\ p.\ t \in [0,1]\}.$$

Il est clair que $\mathbf{S}$ est un sous ensemble convexe. Montrons que $\mathbf{S}$ est $\sigma(\mathbf{L}^2_E, \mathbf{L}^2_E)$-compact. Soit $(f_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathbf{S}$, alors pour presque tout $t \in [0,1]$, $\|f_n(t)\| \leq m(t)$ et donc $\frac{\|f_n(t)\|}{m(t)} \leq 1$, c'est à dire $\frac{f_n(t)}{m(t)} \in \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{L}^2_E}$. Comme $\mathbf{L}^2_E([0,1])$ est un espace réflexif, alors $\overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{L}^2}$ est compacte pour la topologie $\sigma(\mathbf{L}^2, \mathbf{L}^2)$, on peut donc extraire de (f_n) une sous suite qu'on note aussi (f_n) convergeant $\sigma(\mathbf{L}^2, \mathbf{L}^2)$ vers une fonction f vérifiant $\|f(t)\| \leq m(t)$ p. p. $t \in [0,1]$, d'où la compacité faible de $\mathbf{S}$ dans $\mathbf{L}^2_E([0,1])$.

Considérons maintenant l'ensemble

$$\mathbf{X} = \{u_f : [0,1] \to E : \quad u_f(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds, \ \forall t \in [0,1], \ f \in \mathbf{S}\}.$$

L'ensemble $\mathbf{X}$ est convexe compact dans $(\mathbf{C}^1_E([0,1]), \|\cdot\|_{\mathbf{C}^1})$. En effet, soient $u_{f_1}, \ u_{f_2} \in \mathbf{X}$ et $\lambda \in]0,1[$ alors

$$u_{f_1}(t) = \int_0^1 G(t,s)f_1(s)ds, \ \forall t \in [0,1],$$

$$u_{f_2}(t) = \int_0^1 G(t,s)f_2(s)ds, \ \forall t \in [0,1],$$

alors

$$\begin{aligned}
(\lambda u_{f_1} + (1-\lambda)u_{f_2})(t) &= \lambda u_{f_1}(t) + (1-\lambda)u_{f_2}(t) \\
&= \lambda \int_0^1 G(t,s)f_1(s)ds + (1-\lambda)\int_0^1 G(t,s)f_2(s)ds \\
&= \int_0^1 G(t,s)(\lambda f_1(s) + (1-\lambda)f_2(s))ds \\
&= \int_0^1 G(t,s)(\lambda f_1 + (1-\lambda)f_2)(s)ds,
\end{aligned}$$

comme $f_1, \ f_2 \in \mathbf{S}$ et comme $\mathbf{S}$ est convexe, alors $\lambda f_1 + (1-\lambda)f_2 \in \mathbf{S}$ et par conséquent $\lambda u_{f_1} + (1-\lambda)u_{f_2} \in \mathbf{X}$, d'où la convexité de $\mathbf{X}$.

Montrons maintenant la compacité de $\mathbf{X}$ dans $(\mathbf{C}^1_E, \|\cdot\|_{\mathbf{C}^1})$.
Soient $t, \tau \in [0,1]$, nous avons pour tout $u_f \in \mathbf{X}$

$$\begin{aligned}
\|u_f(t) - u_f(\tau)\| &= \|\int_0^1 G(t,s)f(s)ds - \int_0^1 G(\tau,s)f(s)ds\| \\
&\leq \int_0^1 |G(t,s) - G(\tau,s)|\|f(s)\|ds \\
&\leq \int_0^1 |G(t,s) - G(\tau,s)|m(s)ds,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|\dot{u}_f(t)-\dot{u}_f(\tau)\| &= \|\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)ds - \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(\tau,s)f(s)ds\| \\
&\leq \int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) - \frac{\partial G}{\partial t}(\tau,s)|\|f(s)\|ds \\
&\leq \int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) - \frac{\partial G}{\partial t}(\tau,s)|m(s)ds,
\end{aligned}$$

comme $m \in \mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}([0,1])$ et G est uniformément continue ces deux inégalités montrent que $\mathbf{X}$ et $\{\dot{u}_f,\ u_f \in \mathbf{X}\}$ sont équicontinus dans $\mathbf{C}_E([0,1])$. De plus, les ensemble $\mathbf{X}(t) = \{u_f(t),\ u_f \in \mathbf{X}\}$ et $\{\dot{u}_f(t),\ u_f \in \mathbf{X}\}$ sont relativement compacts car il sont bornés dans l'espace de dimension finie E, en effet, pour tout $u_f \in \mathbf{X}$ nous avons

$$\begin{aligned}
\|u_f(t)\| &= \|\int_0^1 G(t,s)f(s)ds\| \\
&\leq \int_0^1 |G(t,s)|\|f(s)\|ds \\
&\leq \int_0^1 m(s)ds = \|m\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|\dot{u}_f(t)\| &= \|\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)ds\| \\
&\leq \int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)|\|f(s)\|ds \\
&\leq \int_0^1 m(s)ds = \|m\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}}.
\end{aligned}$$

Par conséquent $\mathbf{X}$ et $\{\dot{u}_f,\ u_f \in \mathbf{X}\}$ sont relativement compacts dans $\mathbf{C}_E([0,1])$ ou ce qui est équivalent à dire que $\mathbf{X}$ est relativement compact dans $\mathbf{C}^1_E([0,1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathbf{C}^1}$.

Montrons que $\mathbf{X}$ est fermé dans $\mathbf{C}^1_E([0,1])$. Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathbf{X}$ convergeant vers $u \in \mathbf{C}^1_E([0,1])$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une suite $(f_n)_n \subset \mathbf{S}$ telle que $u_{f_n}(t) = \int_0^1 G(t,s)f_n(s)ds$ pour tout $t \in [0,1]$. Comme $\mathbf{S}$ est $\sigma(\mathbf{L}^2_E, \mathbf{L}^2_E)$-compact, on peut extraire de (f_n) une sous suite notée aussi (f_n) qui converge $\sigma(\mathbf{L}^2, \mathbf{L}^2)$ vers une certaine application $f \in \mathbf{S}$, et par suite elle converge $\sigma(\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_E)$ vers f, en particulier

$$\lim_{n\to\infty} u_{f_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 G(t,s)f_n(s)ds = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \dot{u}_{f_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f_n(s)ds = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)ds$$

et donc $(u_{f_n}(.), \dot{u}_{f_n}(.))$ converge vers $(u_f(.), \dot{u}_f(.))$. Comme (u_{f_n}) converge dans $\mathbf{C}^1_E([0,1])$ vers u, alors d'aprés le Lemme 2.1.1 chapitre 2, on déduit que $u = u_f$, i.,e., $u(t) = u_f(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds\ \forall t \in [0,1]$ et $u \in \mathbf{W}^{2,1}_E([0,1])$. Ceci implique que $\mathbf{X}$ est fermé dans $(\mathbf{C}^1_E([0,1]), \|\cdot\|_{\mathbf{C}^1})$ et par suite la compacité de $\mathbf{X}$ dans $\mathbf{C}^1_E([0,1])$.

Etape 2.

D'aprés le Théorème 2.2.1, il existe une multi-application $\Phi : \mathbf{X} \rightrightarrows \mathbf{L}^2_E([0,1])$ à valeurs non vides convexes fermées et de graphe fortement faiblement séquentiellement fermé telle que pour tout $u \in \mathbf{X}$ et pour tout $g \in \Phi(u)$ nous avons

$$g(t) \in F(t, u(t), \dot{u}(t)) \ \texttt{et}\ \|g(t)\| \le m_1(t) \tag{4.3}$$

pour presque tout $t \in [0,1]$. Remarquons, par la relation (4.3), que pour tout $u \in \mathbf{X}$, $\Phi(u)$ est $\sigma(\mathbf{L}^2_E, \mathbf{L}^2_E)$-compact.

Considérons maintenant la multi-application $\Psi : \mathbf{X} \rightrightarrows \mathbf{C}^1_E([0,1])$ définie par

$$\begin{aligned}\Psi(v) \ &= \ \{u : [0,1] \to E :\ \exists f \in \mathbf{S}/\ u(t) = u_f(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds,\ \forall t \in [0,1],\\ &\quad -f(t) \in A(t)u(t) + g(t),\ p.p\ et\ g \in \Phi(v)\}.\end{aligned}$$

Montrons que pour tout $v \in \mathbf{X}$, $\Psi(v)$ est non vide. Soit (λ_n) une suite décroissante dans $]0,1[$, telle que $\lambda_n \to 0$ quand $n \to \infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons l'application $f_n : [0,1] \to E$ définie par

$$f_n(t) = -A_{\lambda_n}(t)v(t) - g(t).$$

D'après l'hypothèse (**H2**) et la condition ***(iii)*** et la relation (4.2), nous avons

$$\begin{aligned}\|f_n(t)\| &\leq \|A_{\lambda_n}(t)u(t)\| + \|g(t)\| \\ &\leq |A(t)u(t)|_0 + \|g(t)\| \\ &\leq m_2(t) + m_1(t) = m(t)\end{aligned}$$

c'est à dire $(f_n)_n \subset \mathbf{S}$ et comme $\mathbf{S}$ est $\sigma(\mathbf{L}^2_E([0,1]), \mathbf{L}^2_E([0,1]))$-compact, on peut lui extraire une sous suite notée aussi (f_n) qui converge $\sigma(\mathbf{L}^2_E([0,1]), \mathbf{L}^2_E([0,1]))$ vers une application $f \in \mathbf{S}$.

D'autre part, nous avons pour tout $t \in [0,1]$, d'aprés 2) de la Propsiton 4.0.7,

$$-f_n(t) - g(t) = A_{\lambda_n}(t)v(t) \in A(t)J_{\lambda_n}A(t)v(t).$$

Montrons que $(J_{\lambda_n}A(\cdot)v(\cdot))_n$ converge vers $v(\cdot)$ dans $\mathbf{L}^2_E([0,1])$. Nous avons pour tout $t \in [0,1]$ et en utilisant la relation (4.2)

$$\begin{aligned}\|J_{\lambda_n}A(t)v(t) - v(t)\| &= \|\lambda_n A_{\lambda_n}(t)v(t)\| \\ &= \lambda_n \|A_{\lambda_n}(t)v(t)\| \\ &\leq \lambda_n |A(t)v(t)|_0 \\ &\leq \lambda_n m_2(t).\end{aligned}$$

Comme $\lambda_n \to 0$, on conclut que

$$\|J_{\lambda_n}A(t)v(t) - v(t)\| \to 0,\ quand\ n \to \infty.$$

Or

$$\begin{aligned}\|J_{\lambda_n}A(t)v(t)\| &= \|J_{\lambda_n}A(t)v(t) - v(t) + v(t)\| \\ &\leq \|v(t)\| + \|J_{\lambda_n}A(t)v(t) - v(t)\| \\ &\leq \int_0^1 |G(t,s)|m(s)ds + \lambda_n m_2(t) \\ &\leq \int_0^1 m(s)ds + \lambda_n m_2(t) \\ &< \|m\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}} + m_2(t),\end{aligned}$$

ceci, en utilisant le fait que $v \in \mathbf{X}$ et $\lambda_n < 1$ pour tout $\in \mathbb{N}$. Comme $m,\ m_2 \in \mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}([0,1])$, en utilisant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue (Théorème 1.2.41 chapitre

1), on conclut que $J_{\lambda_n}A(\cdot)v(\cdot)$ converge vers $v(\cdot)$ dans $\mathbf{L}^2_E([0,1])$.

Comme $(f_n+g)_n$ converge $\sigma(\mathbf{L}^2_E([0,1]),\mathbf{L}^2_E([0,1]))$ vers $f+g$ et $(J_{\lambda_n}A(\cdot)v(\cdot))_n$ converge fortement vers $v(\cdot)$ dans $\mathbf{L}^2_E([0,1])$ et comme

$$-(f_n+g)(t) \in A(t)J_{\lambda_n}A(t)v(t),\ p.\ p.\ t \in [0,1]$$

on conclut par le Lemme 4.0.6 que

$$-f(t)-g(t) \in A(t)v(t),\ p.\ p.\ t \in [0,1]$$

c'est à dire

$$-f(t) \in A(t)v(t)+g(t),\ p.p.\ t \in [0,1].$$

Comme $f \in \mathbf{S}$, on conclut que l'application $u_f : [0,1] \to E$ définie par $u_f(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds$, appartient à $\Psi(v)$, d'où la non vacuité de $\Psi(v)$.

Montrons maintenant que $\Psi(v) \subset \mathbf{X}$. Soit $u \in \Psi(v)$, alors il existe $f \in \mathbf{S}$ tel que $u(t) = u_f(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds$ pour tout $t \in [0,1]$ et donc Ψ applique $\mathbf{X}$ dans lui même. Remarquons aussi que, pour tout $v \in \mathbf{X}$, $\Psi(v)$ est un sous ensemble convexe fermé de $\mathbf{X}$. En effet, soient $u_{f_1},\ u_{f_2} \in \Psi(v)$ et $\lambda \in]0,1[$ alors,

$$\begin{aligned}
(\lambda u_{f_1}+(1-\lambda)u_{f_2})(t) &= \lambda u_{f_1}(t)+(1-\lambda)u_{f_2}(t)\\
&= \lambda\int_0^1 G(t,s)f_1(s)ds+(1-\lambda)\int_0^1 G(t,s)f_2(s)ds\\
&= \int_0^1 G(t,s)(\lambda f_1(s)+(1-\lambda)f_2(s))ds\\
&= \int_0^1 G(t,s)(\lambda f_1+(1-\lambda)f_2)(s)ds,
\end{aligned}$$

avec $\lambda f_1+(1-\lambda)f_2 \in \mathbf{S}$, puisque $\mathbf{S}$ est convexe, d'autre part, nous avons

$$-f_1(t) \in A(t)v(t)+g_1(t),\ p.p.\ t \in [0,1],$$

et

$$-f_2(t) \in A(t)v(t)+g_2(t),\ p.p.\ t \in [0,1],$$

avec $g_1,\ g_2 \in \Phi(v)$ comme $\Phi(v)$ est convexe $g = \lambda g_1+(1-\lambda)g_2 \in \Phi(v)$. Aussi l'opérateur $A(t)$ est maximal monotone, alors ses images sont convexes et par conséquent

$$-(\lambda f_1+(1-\lambda)f_2)(t) \in A(t)v(t)+g(t),\ p.p\ t \in [0,1],$$

et par suite

$$\lambda u_{f_1} + (1-\lambda)u_{f_2} \in \Psi(v),$$

d'où la convexité de $\Psi(v)$.

Soit maintenant (u_{f_n}) une suite d'éléments de $\Psi(v) \subset \mathbf{X}$ convergeant vers w dans $(\mathbf{C}^1_E([0,1]), \|\cdot\|_{\mathbf{C}^1})$, c'est à dire, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} u_{f_n}(t) &= \int_0^1 G(t,s) f_n(s) ds, \forall t \in [0,1], \quad f_n \in \mathbf{S}, \\ -f_n(t) &\in A(t)v(t) + g_n(t), \ p\ .p \ \ et \ \ g_n \in \Phi(v). \end{aligned}$$

Comme $(f_n) \subset \mathbf{S}$ qui est $\sigma(\mathbf{L}^2_E, \mathbf{L}^2_E)$-compact, on peut lui extraire une sous suite qui converge $\sigma(\mathbf{L}^2_E, \mathbf{L}^2_E)$ vers une application $f \in \mathbf{S}$. D'autre part, la convergence $\sigma(\mathbf{L}^2_E, \mathbf{L}^2_E)$ de $(f_n)_n$ vers f implique la convergence faible dans $\mathbf{L}^1_E$, en particulier nous avons pour tout $t \in [0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} u_{f_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 G(t,s) f_n(s) ds = \int_0^1 G(t,s) f(s) ds,$$

$$\lim_{n\to\infty} \dot{u}_{f_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) f_n(s) ds = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) f(s) ds,$$

alors $(u_{f_n}(.), \dot{u}_{f_n}(.))$ converge vers $(u_f(.), \dot{u}_f(.))$ comme $(u_{f_n})_n$ converge dans $\mathbf{C}^1_E([0,1])$ vers w, on conclut que $w(\cdot) = u_f(\cdot)$.

De plus, $(g_n)_n \subset \Phi(v)$, comme $\Phi(v)$ est $\sigma(\mathbf{L}^2_E, \mathbf{L}^2_E)$-compact, on peut supposer par extraction d'une sous suite que $(g_n)_n$ converge $\sigma(\mathbf{L}^2_E, \mathbf{L}^2_E)$ vers une application g vérifiant $\|g(t)\| \leq m_1(t)$ et telle que $g \in \Phi(v)$ grâce à la convexité de $\Phi(v)$.
D'autre part, $(f_n + g_n)_n$ converge $\sigma(\mathbf{L}^2_E, \mathbf{L}^2_E)$ vers $f + g$ et

$$-(f_n + g_n)(t) \in A(t)v(t), \ p.p. \ t \in [0,1],$$

on déduit alors par le Lemme 4.0.6 que

$$-(f+g)(t) \in A(t)v(t), \ p.p. \ t \in [0,1],$$

c'est à dire

$$-f(t) \in A(t)v(t) + g(t), \ p.pt \in [0,1],$$

et par suite $u_f \in \Psi(v)$, et donc $\Psi(v)$ est fermé dans $\mathbf{X}$ qui est compact, d'où la compacité de $\Psi(v)$.

Montrons maintenant que Ψ est semicontinue supérieurement ou en utilisant le Théorème 1.2.29 chapitre 1, que le graphe de Ψ

$$\mathrm{gph}(\Psi) = \{(v, u) \in \mathbf{X} \times \mathbf{X} : \ u \in \Psi(v)\},$$

est fermé dans $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$. Soit $(v_n, u_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathrm{gph}(\Psi)$ qui converge vers (v, u) dans $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$, $u_n \in \Psi(v_n) \subset \mathbf{X}$, et donc il existe $(f_n)_n \subset \mathbf{S}$ telle que

$$u_n(t) = u_{f_n}(t) = \int_0^1 G(t, s) f_n(s) ds, \ \forall t \in [0, 1],$$

et

$$-f_n(t) \in A(t) v_n(t) + g_n(t) \ p.\, p \ \ et \ \ g_n \in \Phi(v_n),$$

la suite $(f_n)_n \subset \mathbf{S}$ et donc par extraction d'une sous suite on peut supposer que $(f_n)_n$ converge $\sigma(\mathbf{L}^2_E, \mathbf{L}^2_E)$ vers une certaine application $f \in \mathbf{S}$. Aussi, la suite $(g_n)_n \subset m_1(t)\overline{B}_E(0, 1)$ comme $m_1 \in \mathbf{L}^2_E([0, 1])$, par extraction d'une sous suite, on peut supposer que $(g_n)_n$ converge $\sigma(\mathbf{L}^2_E, \mathbf{L}^2_E)$ vers une certaine applicaion $g \in m_1(t)\overline{B}_E(0, 1)$.

De plus, nous avons $g_n \in \Phi(v_n)$, alors $(v_n, g_n) \in \mathrm{gph}(\Phi)$, comme le graphe de Φ est fortement-faiblement séquentiellement fermé, on conclut que $(v, g) \in \mathrm{gph}(\Phi)$, c'est à dire $g \in \Phi(v)$.

La convergence $\sigma(\mathbf{L}^2_E, \mathbf{L}^2_E)$ de $(f_n)_n$ vers f implique la convergence faible dans $\mathbf{L}^1_E([0, 1])$, en particulier nous avons pour tout $t \in [0, 1]$

$$\lim_{n\to\infty} u_{f_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 G(t, s) f_n(s) ds = \int_0^1 G(t, s) f(s) ds = u_f(t),$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \dot{u}_{f_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t, s) f_n(s) ds = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t, s) f(s) ds = \dot{u}_f(t),$$

et par suite, $(u_{f_n}(.), \dot{u}_{f_n}(.))$ converge vers $(u_f(.), \dot{u}_f(.))$, comme $(u_{f_n})_n$ converge dans $(\mathbf{C}^1_E([0, 1]), \|\cdot\|_{\mathbf{C}^1})$ vers w, on conclut alors que $w(\cdot) = u_f(\cdot)$.
Comme $(v_n)_n \subset \mathbf{X}$ converge vers v dans $(\mathbf{C}^1_E([0, 1]), \|\cdot\|_{\mathbf{C}^1})$ et comme $v_n(t) = \int_0^1 G(t, s)\gamma_n(s) ds, \ \forall t \in$

$[0,1]$ avec $\gamma_n \in \mathbf{S}$, on aura

$$\begin{aligned}\|v_n(t)\| &\le \int_0^1 |\gamma_n(s)|ds \\ &\le \int_0^1 m(s)ds \\ &= \|m\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}},\end{aligned}$$

on conclut que $(v_n)_n$ est bornée dans $\mathbf{L}^2_E([0,1])$. Par conséquent $(v_n)_n$ converge fortement vers v dans $\mathbf{L}^2_E([0,1])$.
En utilisant ces arguments, le fait que

$$-f_n(t) \in A(t)v_n(t) + g_n(t),\ p.\ p,$$

et le Lemme 4.0.9, on conclut que

$$-f(t) \in A(t)v(t) + g(t),\ p.\ p,$$

c'est à dire $(v,u) \in \mathrm{gph}(\Psi)$, d'où la semicontinuité supérieure de Ψ.

En appliquant le Théorème du point fixe de Kakutani (Théorème 1.2.39 chapitre 1), on obtient l'existence d'un point fixe u pour la multi-application Ψ, i. e., $u \in \Psi(u)$. Donc il existe $f \in \mathbf{S}$, tel que

$$u(t) = u_f(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds,\ \forall t \in [0,1],$$

$$-f(t) \in A(t)u(t) + g(t)\ p.\ p\ et\ g \in \Phi(u),$$

ce qui est équivallent à dire grâce à les relations (2.7) et (2.9) du Lemme 2.1.1 que $\ddot{u}(t) = f(t)$ p. p avec $u(0) = 0$, $u(\theta) = u(1)$ et evec la relation (4.3) on conclut que

$$\begin{cases} -\ddot{u}(t) \in A(t)u(t) + F(t, u(t), \dot{u}(t)), & p.p\ t \in [0,1], \\ u(0) = 0,\ u(\theta) = u(1). \end{cases}$$

Ce qui achève la démonsration de notre théorème. ■

4.2 Résultat d'existence pour l'inclusion différentielle $(\mathcal{P}_F)$ quand F est à croissance linéaire

Dans cette section, nous présentons un autre résultat d'existence de solutions pour le problème $(\mathcal{P}_F)$ quand on remplace la condition ***(iii)*** et l'hypothèse **(H2)** par la condition ***(v)*** et l'hypothèse **(H3)** suivantes
(v) il existe une fonction positive $m_1 \in \mathbf{L}^{\mathbf{2}}_{\mathbb{R}}([0,1])$ et deux fonctions positives $p,\ q \in \mathbf{L}^{\mathbf{2}}_{\mathbb{R}}([0,1])$ vérifiant $\|p+q\|_{\mathbf{L}^{\mathbf{1}}_{\mathbb{R}}} < 1$, telles que

$$F(t,x,y) \subset (m_1(t) + p(t)\|x\| + q(t)\|y\|)\overline{\mathbf{B}}_E,\ \forall (t,x,y) \in [0,1] \times E \times E,$$

(H3) il existe une fonction positve $m_2 \in \mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}([0,1])$ telle que

$$\|A(t)x\| = \sup\{\|y\|,\ y \in A(t)x\} \leq m_2(t),$$

pour tout $(t,x,y) \in [0,1] \times E \times E$.
Pour la démonstration de notre résultat d'existence nous avons besoin du lemme suivant

Lemme 4.2.1 *Supposons que les conditions **(i)**, **(ii)**, **(v)** et les hypothèses (**H1**) et **(H3)** sont satisfaites. Si v est une solution du problème $(\mathcal{P}_F)$, alors pour tout $t \in [0,1]$ nous avons*

$$\|v(t)\| \leq \alpha,\ \|\dot{v}(t)\| \leq \alpha$$

où $\alpha = \frac{\|m\|_{\mathbf{L}^{\mathbf{1}}_{\mathbb{R}}}}{1-\|p+q\|_{\mathbf{L}^{\mathbf{1}}_{\mathbb{R}}}}$, et $m = m_1 + m_2$.

Démonstration.
Supposons que v est solution de l'inclusion différentielle $(\mathcal{P}_F)$, c'est à dire,

$$\begin{cases} -\ddot{v}(t) \in A(t)v(t) + F(t,v(t),\dot{v}(t)), & p.p\ t \in [0,1], \\ v(0) = 0,\ v(\theta) = v(1). \end{cases}$$

Par la condition ***(v)*** et l'hypothèse **(H3)** nous avons

$$\begin{aligned} \|\ddot{v}(t)\| &\leq \|A(t)v(t)\| + \|F(t,v(t),\dot{v}(t))\| \\ &\leq m_2(t) + m_1(t) + p(t)\|v(t)\| + q(t)\|\dot{v}(t)\| = m(t) + p(t)\|v(t)\| + q(t)\|\dot{v}(t)\|. \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
\|v(t)\| &= \|\int_0^1 G(t,s)\ddot{v}(s)ds\| \\
&\leq \int_0^1 |G(t,s)|\|\ddot{v}(s)\|ds \\
&\leq \int_0^1 (m(s)+p(s)\|v(s)\|+q(s)\|\dot{v}(s)\|)ds \\
&\leq \int_0^1 (m(s)+p(s)\|v\|_{\mathbf{C}^1}+q(s)\|v\|_{\mathbf{C}^1})ds \\
&\leq \|m\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}}+(\|p+q\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}})\|v\|_{\mathbf{C}^1}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|\dot{v}(t)\| &= \|\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\ddot{v}(s)ds\| \\
&\leq \int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)|\|\ddot{v}(s)\|ds \\
&\leq \int_0^1 (m(s)+p(s)\|v(s)\|+q(s)\|\dot{v}(s)\|)ds \\
&\leq \int_0^1 (m(s)+p(s)\|v\|_{\mathbf{C}^1}+q(s)\|v\|_{\mathbf{C}^1})ds \\
&\leq \|m\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}}+(\|p+q\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}})\|v\|_{\mathbf{C}^1}
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\|v\|_{\mathbf{C}^1} &\leq \|m\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}}+(\|p+q\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}})\|v\|_{\mathbf{C}^1} \\
(1-\|p+q\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}})\|v\|_{\mathbf{C}^1} &\leq \|m\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}} \\
\|v\|_{\mathbf{C}^1} &\leq \frac{\|m\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}}}{1-\|p+q\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}}} := \alpha
\end{aligned}$$

ce qui montre les estimations

$$\|v(t)\| \leq \alpha,\ \|\dot{v}(t)\| \leq \alpha.$$

Nous sommes maintenant en mesure de donner notre deuxième résultat d'existence de ce chapitre.

Théorème 4.2.2 *Soient E un espace de dimension finie, $A(t) : E \rightrightarrows E$, $(t \in [0,1])$ un opérateur maximal monotone et $F : [0,1] \times E \times E \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs fermées, satisfaisant les conditions suivantes*
(i) *F est $\mathcal{L}([0,1]) \otimes \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(E)$-mesurable ;*
(ii) *pour chaque $t \in [0,1]$, et tout $(x,y) \in E \times E$ tel que $F(t,x,y)$ est convexe $F(t,\cdot,\cdot)$ est semicontinue supérieurement, et quand $F(t,x,y)$ est non convexe $F(t,\cdot,\cdot)$ est semi-continue inférieurement sur sur un voisinage de (x,y) ;*
(v) *il existe une fonction positive $m_1 \in \mathbf{L}^{\mathbf{2}}_{\mathbb{R}}([0,1])$ et deux fonctions positives p, $q \in \mathbf{L}^{\mathbf{2}}_{\mathbb{R}}([0,1])$ vérifiant $\|p+q\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}} < 1$, telles que*

$$F(t,x,y) \subset (m_1(t) + p(t)\|x\| + q(t)\|y\|)\overline{\mathbf{B}}_E(0,1), \ \forall (t,x,y) \in [0,1] \times E \times E.$$

Supposons que les hypothèses suivantes sont aussi satisfaites
(H1) *pour chaque $x \in E$ et pour chaque $\lambda > 0$, l'application $t \mapsto (I_E + \lambda A(t))^{-1}x$ est Lebesgue-mesurable et il existe $\overline{g} \in \mathbf{L}^2_E([0,1])$ tel que $t \mapsto (I_E + \lambda A(t))^{-1}\overline{g}(t)$ appartient à $\mathbf{L}^2_E([0,1])$;*
(H3) *il existe une fonction positive $m_2 \in \mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}([0,1])$ telle que*

$$\|A(t)x\| = \sup\{\|y\|, \ y \in A(t)x\} \leq m_2(t),$$

pour tout $(t,x,y) \in [0,1] \times E \times E$. Alors, l'inclusion différentielle

$$(P_F) \begin{cases} -\ddot{u}(t) \in A(t)u(t) + F(t, u(t), \dot{u}(t)), & p.p.\ t \in [0,1], \\ u(0) = 0; \ u(\theta) = u(1), \end{cases}$$

admet au moins une solution dans $\mathbf{W}^{2,1}_E([0,1]$.

Démonstration.
Considérons l'application $\pi_\kappa : [0,1] \times E \to E$ définie par

$$\pi_\kappa(t,x) = \begin{cases} x & si\ \|x\| \leq \kappa \\ \frac{\kappa x}{\|x\|} & si\ \|x\| > \kappa \end{cases}$$

et considérons la multi-application $F_0 : [0,1] \times E \times E \rightrightarrows E$ définie par

$$F_0(t,x,y) = F(t, \pi_\alpha(t,x), \pi_\alpha(t,y)).$$

Alors F_0 hérite les propriétés ***(i)*** et ***(ii)*** supposées sur F. En effet, F_0 est mesurable car

$$\begin{aligned} F_0(t,x,y) &= F(t, \pi_\alpha(t,x), \pi_\alpha(t,y)) \\ &= (F \circ h)(t,x,y), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{array}{rccc} h: & [0,1]\times E\times E & \rightrightarrows & [0,1]\times E\times E \\ & (t,x,y) & \mapsto & h(t,x,y)=(t,\pi_\alpha(t,x),\pi_\alpha(t,y)). \end{array}$$

En effet, soit V un ouvert de E,

$$F_0^{-1}(V)=(F\circ h)^{-1}(V)=h^{-1}(F^{-1}(V)),$$

comme F est $\mathcal{L}([0,1])\otimes\mathcal{B}(E)\otimes\mathcal{B}(E)$-mesurable, on conclut que $F^{-1}(V)\in\mathcal{L}([0,1])\otimes\mathcal{B}(E)\otimes\mathcal{B}(E)$ et par suite $h^{-1}(F^{-1}(V))\in\mathcal{L}([0,1])\otimes\mathcal{B}(E)\otimes\mathcal{B}(E)$ car h est $\mathcal{L}([0,1])\otimes\mathcal{B}(E)\otimes\mathcal{B}(E)$-mesurable, d'où la mesurabilité de F_0.
Montrons maintenant la condition ***(ii)***. Pour chaque $t\in[0,1]$ soit

$$\begin{array}{rccc} (F_0)_t: & E\times E & \rightrightarrows & E \\ & (x,y) & \mapsto & (F_0)_t(x,y)=F_0(t,x,y). \end{array}$$

Remarquons que

$$(F_0)_t(t,x,y)=\mathcal{H}_t\circ g_t(x,y)$$

tels que

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{H}_t: & E\times E & \rightrightarrows & E \\ & (x,y) & \mapsto & \mathcal{H}_t(x,y)=F(t,x,y), \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} g_t: & E\times E & \rightrightarrows & E\times E \\ & (x,y) & \mapsto & g_t(x,y)=(\pi_\alpha(t,x),\pi_\alpha(t,y)). \end{array}$$

Montrons que $(F_0)_t(\cdot,\cdot)$ est semicontinue supérieurement en chaque point (x,y) tel que $(F_0)_t(x,y)=F_0(t,x,y)$ est convexe. Pour chaque $t\in[0,1]$, soit $(x_0,y_0)\in E\times E$ tel que $(F_0)_t(x_0,y_0)=F_0(t,x_0,y_0)$ est convexe. Montrons que $(F_0)_t(\cdot,\cdot)=F_0(t,\cdot,\cdot)$ est semicontinue supérieurement au point (x_0,y_0). Soit V un ouvert de E tel que $(F_0)_t(x_0,y_0)\subset V$, donc $\mathcal{H}_t(g_t(x_0,y_0))\subset V$, c'est à dire $F(t,\pi_\alpha(t,x_0),\pi_\alpha(t,y_0))\subset V$, comme $F(t,\pi_\alpha(t,x_0),\pi_\alpha(t,y_0))$ est convexe, alors $\mathcal{H}_t$ est semicontinue supérieurement au point $g_t(x_0,y_0)$ d'où l'existence d'un voisinage ouvert Ω de $g_t(x_0,y_0)$ tel que $\mathcal{H}_t(\Omega)\subset V$.
$g_t(\cdot,\cdot)$ étant continue et donc $U=g_t^{-1}(\Omega)$ est un voisinage ouvert de (x_0,y_0) et $\mathcal{H}_t(g_t(U))\subset V$ ce qui implique que $(\mathcal{H}_t\circ g_t)(U)\subset V$ ou bien $(F_0)_t(U)\subset V$. D'où la semicontinuité supérieure de F_0 au point (x_0,y_0).

Soit $(x_0,y_0)\in E\times E$ tel que $F_0(t,x_0,y_0)$ n'est pas convexe et montrons que $(F_0)_t(\cdot,\cdot)$ est semicontinue inférieurement sur un voisinage de (x_0,y_0). $F_0(t,x_0,y_0)$ n'est pas convexe et donc $\mathcal{H}_t(g_t(x_0,y_0))=F(t,\pi_\alpha(t,x_0),\pi_\alpha(t,y_0))$ n'est pas convexe, il existe alors un voisinage U de $g_t(x_0,y_0)$ tel que $\mathcal{H}_t$ est semicontinue inférieurement sur U. Posons $W=g_t^{-1}(U)$

qui est un voisinage de (x_0, y_0) et montrons que $(F_0)_t(\cdot,\cdot)$ est semicontinue inférieurement sur W. En effet, soit $(y,z) \in W$ et par suite $g_t(y,z) \in U$, et soit O un ouvert tel que $(F_0)_t(y,z) \cap O \neq \emptyset$ alors $\mathcal{H}_t(g_t(y,z)) \cap O \neq \emptyset$, comme $\mathcal{H}_t$ est semicontinue inférieurement sur U et $g_t(y,z) \in U$, il existe un voisinage Ω de $g_t(y,z)$ tel que $\mathcal{H}_t(\Omega) \cap O \neq \emptyset$, comme g_t est continue, $V = g_t^{-1}(\Omega)$ est un voisinage de (y,z) et $\mathcal{H}_t(g_t(\Omega)) \cap O \neq \emptyset$, c'est à dire, $(F_0)_t(\Omega) \cap O \neq \emptyset$. Par conséquent $(F_0)_t(\cdot,\cdot)$ est semicontinue inférieurement sur W. Donc F_0 vérifie ***(ii)***.

De plus,

$$\begin{aligned}
\|F_0(t,x,y)\| &= \|F(t,\pi_\alpha(t,x),\pi_\alpha(t,y))\| \\
&\leq m_1(t) + p(t)\|\pi_\alpha(t,x)\| + q(t)\|\pi_\alpha(t,y)\| \\
&\leq m_1(t) + p(t)\|x\| + q(t)\|y\| \\
&\leq m_1(t) + p(t)\alpha + q(t)\alpha \\
&= m_1(t) + \alpha(p(t)+q(t)) := \beta(t),
\end{aligned}$$

c'est à dire $F_0(t,x,y) \subset \beta(t)\overline{\mathbf{B}}_E$, $\forall (t,x,y) \in [0,1] \times E \times E$. Par conséquent F_0 satisfait toutes les conditions du Théorème 4.1.1 et donc le problème $(\mathcal{P}_{F_0})$ admet une solution dans $\mathbf{W}_E^{2,1}([0,1])$.

Observons que u est solution de

$$(\mathcal{P}_F)\begin{cases} -\ddot{u}(t) \in A(t)u(t) + F(t,u(t),\dot{u}(t)) & p.p.\ t \in [0,1], \\ u(0) = 0;\ u(\theta) = u(1), \end{cases}$$

si et seulement si u est solution de

$$(\mathcal{P}_{F_0})\begin{cases} -\ddot{u}(t) \in A(t)u(t) + F_0(t,u(t),\dot{u}(t)) & p.p\ t \in [0,1], \\ u(0) = 0;\ u(\theta) = u(1). \end{cases}$$

En effet, soit v une solution $(\mathcal{P}_F)$, c'est à dire,

$$\begin{cases} -\ddot{v}(t) \in A(t)v(t) + F(t,v(t),\dot{v}(t)) & p.p\ t \in [0,1], \\ v(0) = 0;\ v(\theta) = v(1), \end{cases}$$

et d'après le Lemme 4.2.1

$$\|v(t)\| \leq \alpha,\ \|\dot{v}(t)\| \leq \alpha,$$

alors $\pi_\alpha(t,v(t)) = v(t)$ et $\pi_\alpha(t,\dot{v}(t)) = \dot{v}(t)$ et par conséquent

$$\begin{cases} -\ddot{v}(t) \in A(t)v(t) + F_0(t,v(t),\dot{v}(t)) & p.p\ t \in [0,1], \\ v(0) = 0;\ v(\theta) = v(1), \end{cases}$$

on conclut alors que v est solution de (P_{F_0}).
Supposons maintenant que v est solution de $(\mathcal{P}_{F_0})$, c'est à dire,

$$\begin{cases} -\ddot{v}(t) \in A(t)v(t) + F_0(t, v(t), \dot{v}(t)) \quad p.p\ t \in [0,1], \\ v(0) = 0;\ v(\theta) = v(1), \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} \|\ddot{v}(t)\| &\leq \|A(t)v(t)\| + \|F_0(t, v(t), \dot{v}(t))\| \\ &\leq m_2(t) + m_1(t) + \alpha(p(t) + q(t)) = m(t) + \alpha(p(t) + q(t)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|v(t)\| &= \|\int_0^1 G(t,s)\ddot{v}(s)ds\| \\ &\leq \int_0^1 |G(t,s)|\|\ddot{v}(s)\|ds \\ &\leq \int_0^1 (m(s) + \alpha(p(s) + q(s))ds \\ &\leq (\|m\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}} + \alpha(\|p+q\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}})), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|\dot{v}(t)\| &= \|\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\ddot{v}(s)ds\| \\ &\leq \int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)|\|\ddot{v}(s)\|ds \\ &\leq \int_0^1 (m(s) + \alpha(p(s) + q(s)))ds \\ &\leq \|m\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}} + \alpha(\|p+q\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}}). \end{aligned}$$

En remplaçant dans ces deux dernières inégalités $\alpha = \frac{\|m\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}}}{1-\|p+q\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}}}$, on obtient $\|v(t)\| \leq \alpha$ et $\|\dot{v}(t)\| \leq \alpha$ pour tout $t \in [0,1]$, on obtient $\pi_\alpha(t, v(t)) = v(t)$ et $\pi_\alpha(t, \dot{v}(t)) = \dot{v}(t)$, et par conséquent,

$$\begin{aligned} & -\ddot{v}(t) \in A(t)v(t) + F_0(t, v(t), \dot{v}(t))\ p.p.t \in [0,1] \\ \Longleftrightarrow\ & -\ddot{v}(t) \in A(t)v(t) + F(t, \pi_\alpha(t, v(t)), \pi_\alpha(t, \dot{v}(t)))\ p.p.t \in [0,1] \\ \Longrightarrow\ & -\ddot{v}(t) \in A(t)v(t) + F(t, v(t), \dot{v}(t))\ p.p.t \in [0,1] \end{aligned}$$

avec $v(0) = 0$ et $v(\theta) = v(1)$, on conclut que v est solution de (P_F).
On peut alors appliquer le Théorème 4.1.1 sur $(\mathcal{P}_{F_0})$ pour finir la démonstration. $\blacksquare$

Bibliographie

[1] J. P. Aubin and A. Cellina, *Differential inclusions, set-valued maps and viability theory*, Springer-Verlag, Berlin (1984).

[2] D. Averna and S. A. Marano, *Existence of solution for operator inclusions : a unified approach*, Rendiconti del Seminario Matematico della universitá di padova. **102**, 285-303.

[3] D. Azzam-Laouir, *Contribution à l'étude de problèmes d'évolution du second ordre*, Thèse de doctorat d'état, Constantine, Juin 2003.

[4] D. Azzam-Laouir, *Analyse multivoque*, Polycopié de cours de post-graduation, Université de Jijel (2008).

[5] D. Azzam-Laouir, C. Castaing and L. Thibault, *Three boundary value problems for second order differential inclusions in Banach spaces*, Control and Cybernetics, Vol. 31 (2002) No. 3, pp. 659-693.

[6] D. Azzam-Laouir, S. Lounis, *Existence solutions for a class of second order differential inclusions*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, Vol 6, Number 2, (2005).

[7] D. Azzam-Laouir and T. Haddad, *Existence results for delay second order differential inclusion*, Discussiones Mathematicae, Differential inclusions, Control and Optization **28** (2008).

[8] D. Azzam-Laouir, S. Lounis and L. Thibault, *Existence solutions for second-order differential inclusion with nonconvex perturbations*, Applicable analysis, Vol. 86. No. 10. October 2007, 1199-1210.

[9] V. Barbu, *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces*, Noordhoff (1976).

[10] A. Bressan and G. Colombo.,1988, *Existence and selection maps with decomposable values*. Studia mathematica, 90, 69-85.

[11] H. Brezis, *Opérateurs maximaux monotones et semi groupes non linéaires*, North-Holland, Amsterdam, 1971.

[12] S. R. Berfeld and V. Lakshmikantham, *An Introduction to Nonlinear Boundary value problems*, Academic Press, Inc. New York and London 1974.

[13] C. Castaing, *Quelques résultats de compacité liés à l'intégration.* Colloque Anal. Fonct. (parution original)(1971). Bultin de la société mathématique de France, 31-32, 73-81 (1972).

[14] C. Castaing and A. G. Ibrahim, *Functinal evolution equations governed by m-accretive operators*, Adv. Math. Econ., Vol 5 (2003), 23-54.

[15] C. Castaing, M. Valadier, *Convex analysis and measurable multifunctions* , Lectures Notes in Mth., 580 Springer-Verlag, Berlin (1977).

[16] A. Cellina, M.V. Marchi, *Non-convex perturbations of maximal monotone differential inclusions*, Isr. J-Math, 46(1983), 1-11.

[17] G. Colombo, A. Fonda and A. Ornelas, *Lower semicontinuous perturbations of maximal monotone differential inclusions*, Israel J. Math. **61** (1988), 211-218.

[18] B. C. Dhage and J. R. Graef, *On boundary-value problems for second order perturbed differential inclusion*, Applicable Analysis, Vol. 84, No.9, september 2005, 953-970.

[19] R. Descombes, *Cours d'analyse*, Librairie Vuibert, Paris, (1962).

[20] P. W. Eloe, Y. N. Raffoul and C. C. Tiesdell, *Existence, Uniquness and Constractive results for delay differential equations*, Electronic journal of Differential Equation **2005** (121) (2005), 1611.

[21] A. Fryszkowski, *Continuous selections for a class of nonconvex multivalued maps*, Studia Math. **76** (1983), 163-174.

[22] A. Fryszkowski and L. Górniewicz, *Mixed semicontinuous mappings and their applications to differential inclusions*, Set-Valued Analysis **8 :** 203-217, 2000.

[23] C. P. Gupta, *Solvability of three-point nonlinear boundry value problem for second order diferntial equation*, J. Math. Anal. Appl. **168** (1992), 504-551.

[24] A.G. Ibrahim and A.M. Gomaa, *Existence theorems for Funcional multivalued three-point boundary value problem of second order*, J. Egypt. Math. Soc. **8(2)** (2000), 155-168.

[25] P. Hartman, *Ordinary differential equations*, John Wiley and Sons Inc., New York.

[26] C. Olech, *Existence of solution of nonconvex orientor fields*, Bolletino della Unione Matematica Italiana. **4** (1975), 189-197.

[27] M. Kisieliwicz, *Differential inclusion and optimal control*, PWN-Polish Scientific Publishers, Kluwer Academic Publishers, Dortrecht/Boston/London.

[28] S.A. Marano, *Existence theorems for Multivalued boundary value problem*, Bull. Australian Math. Soc. 45 (1992), 249-260.

[29] S.A. Marano, *A remark on a second order Three-point boundary Value Problem*, J. Math. Anal. Apll. 183 (1994), 518-522.

[30] A. A. Tolstonogov, *Solutions of differential inclusion with unbouded right-hand side.* (Russian) Sibirik. Mat, Zh. **29**no. **5**, 212-225, 241 translation in Seberian. Math. J. **29**, no; **5**, 857-868 (1988).

[31] D. Wagner, *Survey of mesurable selection theorem*, SIAM. J, Control Optimal, **15**, 859-903, (1977).

[32] I.L. Wrabie, *Compactness Methods for Nonlinear Evolutions*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied mathematics, Longman Scientific and technical, John Wiley and Sons, Inc. New York **32** (1987).