REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE DE JIJEL

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département de mathématiques

N° d'ordre :

Série :

# MEMOIRE

Présenté pour obtenir le diplôme de

## MAGISTER

Spécialité Mathématiques

Option Analyse

Thème

# Existence de solutions pour une classe d'inclusions différentielles

par

## SAMIRA MELIT

Soutenu le 30/ 05 / 2012 Devant le Jury

| | | | |
|---|---|---|---|
| Président | Kh. NOUICER | Prof. | Univ. Jijel |
| Rapporteur | D. AZZAM-LAOUIR | Prof. | Univ. Jijel |
| Examinateurs | A. AIBECHE | Prof. | Univ. Setif |
| | M. DENCHE | Prof. | Univ. Constantine |
| | T. ZERZAIHI | Prof. | Univ. Jijel |

LABORATOIRE DE MATHEMATIQUES PURES ET APPLIQUEES (LMPA)

# Table des matières

# Chapitre 0

# Introduction générale

La théorie des équations différentielles (univoques et multivoques) d'évolution non linéaire, ceux qui sont régis par la classe des opérateurs maximaux monotones a été l'objet de nombreuses études faites dans les dernières années. Comme connue de la théorie de Hill-Yosida, qu' étant donnée une condition initial $u_0 \in D(A)$, il existe une solution univoque du problème

$$(\mathbf{1}) \begin{cases} \dot{u}(t) = -Au(t) + f(t), \quad t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

où $A : D(A) \subset H \to H$ est un opérateur univoque maximal monotone sur un espace de Hilbert et $f \in \mathbf{C}^1_H(\mathbb{R})$.

Dans le cas multivoque, c'est à dire, pour des inclusions différentielles, les problèmes gouvernés par les opérateurs maximaux monotones trouvent leurs motivations dans différents domaines, en mécanique, élastoplasticité, contrôle optimal, économétrie, etc...et englobent différentes classes de problèmes différentiels. Ce type a été étudié lorsque $A$ ne dépend pas du temps, par H. Brézis (voir [13]) qui a utilisé la méthode de régularisation de Yosida pour démontrer l'existence d'une solution univoque Lipschitzienne de l'équation

$$-\dot{u}(t) \in Au(t) + f(t) \quad p.p.t \in [0, T],$$

où $f \in \mathbf{L}^1_H([0, T])$, appelée perturbation du problème. Mitieri et Vrabi [22] on montré l'existence de solution intégrale dans un espace de Banach. Le travail de Brézis à été généralisé par Attouch and Damlamian [2], où la perturbation univoque a été remplacé par une multi-application $F$ semi-continue supérieurement à valeurs convexes de la forme

$$(\mathbf{2})\begin{cases} -\dot{u}(t) \in Au(t) + F(t, u(t)), \quad p.p.\, t \in [0, T], \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

et a été étudié par de nombreux auteurs (voir [11], [13] et [23], principalement pour le cas où $F$ est à valeurs convexes).

L'existence de solutions du problème (**2**) pour $F$ semi-continue inférieurement a été prouvé par Colombo, Fonda et Ornelas [15], et par Mitidieri and Vrabie [22], dans un espace de dimension finie et infinie respectivement.

Dans le cas où $A$ dépend du temps, Ahmed Gamal [2], a traité le problème **(2)**, en prenant comme perturbation une multi-application uniformément continue et à valeurs non vides compactes, et dans [21], les auteurs ont montré l'existence de solution à variation bornée et absolument continue pour le problème sans perturbation avec une condition utilisant une pseudo-distance.

Ce mémoire est consacré à l'étude de l'existence de solution pour les problèmes d'évolutions gouvernés par les opérateurs maximaux monotones avec des perturbations vérifiant des conditions de Lipschitz. Il comprend trois chapitre.

Le premier chapitre rappelle les notions essentielles et les résultats de base concernant les multi-applications, que nous avons utilisé tout au long de ce travail.

Le deuxième chapitre est consacré à l'existence de solutions absolument continues pour une inclusion différentielle du premier ordre gouvernée par un opérateur maximal monotone dans un espace de dimension finie de la forme

$$(\mathbf{3})\begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + F(t, u(t)), \quad p.p.\, t \in [0, T], \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

où $F : [0, T] \times E \rightrightarrows E$ est une multi-application vérifiant la condition de Lipschitz par rapport à la deuxième variable.

Le troisième chapitre généralise le résultat du deuxième chapitre en traitant l'existence de solutions absolument continues pour le problème (**3**) où la condition de Lipschitz est remplacée par celle de pseudo-Lipschitz.

# Chapitre 1

# Notations et préliminaires

L'objectif de ce chapitre est de donner des notations de base, quelques résultats fondamentaux sur les multi-applications, des théorèmes principaux concernant la convergence et la compacité, qui seront utilisées dans la suite de ce travail.

## 1.1 Notations

Soient $E$ un espace de Banach, $E'$ son dual topologique, $\langle .,. \rangle_{E,E'}$ leur produit de dualité, et $\|.\|$ la norme de $E$.

Dans tout ce qui suit, nous désignerons par

- $\sigma(E,E')$ la topologie faible sur $E$.

- $\sigma(E',E)$ la topologie faible$^*$ sur $E'$.

- $\overline{\mathbf{B}}_E$ ou $\overline{\mathbf{B}}_E(0,1)$ la boule unité fermée de $E$, définie par

$$\overline{\mathbf{B}}_E(0,1) = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}.$$

- Si $A$ est un sous ensemble de $E$ alors $\overline{A}$ est la fermeture de $A$.

- $\delta(.,A)$ la fonction indicatrice de $A$, définie par

$$\delta(x,A) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A, \\ +\infty & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

- La fonction polaire de $\delta(.,A)$ appelée aussi fonction d'appui de $A$, est la fonction $\delta^*(.,A)$, définie sur $E'$ par

$$\delta^*(x',A) = \sup_{x\in A}\langle x',x\rangle, \quad \forall x' \in E'.$$

- $1_A$ la fonction caractéristique d'une partie $A$ d'un ensemble donné, définie par

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

## 1.2 Quelques notions de mesurabilité

Les résultats suivants sont pris de la référence [5].

**Définition 1.1** *Soient $X$ un ensemble non vide, $\Sigma$ une famille de sous ensembles de $X$. Alors $\Sigma$ est dite une tribu sur $X$ si*

1. $\emptyset \in \Sigma$,
2. $A \in \Sigma \Rightarrow X \setminus A \in \Sigma$,
3. $A_n \in \Sigma,\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \Sigma$.

Le couple $(X,\Sigma)$ est appelé espace mesurable, et les éléments de $\Sigma$ sont appelés ensembles mesurables.

Si la troisième relation est vraie pour les unions finies seulement, on dit que $\Sigma$ est une algèbre sur $X$.

Si $X$ est un espace topologique, la tribu Borélienne sur $X$ notée $\mathcal{B}(X)$, est la plus petite tribu contenant la topologie de $X$.

**Définition 1.2** *Soient $(X_1,\Sigma_1),(X_2,\Sigma_2)$ deux espaces mesurables et $g$ une fonction définie sur $X_1$ à valeurs dans $X_2$, on dit que $g$ est $(\Sigma_1,\Sigma_2)$-mesurable si pour tout $A \in \Sigma_2, g^{-1}(A) \in \Sigma_1$.*

*Si $X_2$ est un espace topologique, une fonction $(\Sigma_1,\mathcal{B}(X))$-mesurable est dite fonction Borélienne.*

**Définition 1.3** *Soit* $(X, \Sigma)$ *un espace mesurable et* $M$ *un espace métrique. Alors une fonction* $g : X \to M$ *est dite fortement mesurable ou Bochner mesurable si* $g$ *est* $(\Sigma, \mathcal{B}(M))$*-mesurable et* $g(X)$ *est séparable.*

**Définition 1.4** *Soit* $(X, \Sigma)$ *un espace mesurable et* $M$ *un espace métrique, on dit que la fonction* $f : X \to M$ *est* $\Sigma$*-étagée (resp. dénombrablement* $\Sigma$*-étagée) si* $f$ *est* $(\Sigma, \mathcal{B}(X))$*-mesurable et* $f(X)$ *fini (resp. dénombrable).*

**Lemme 1.1** *Sous les notations de la définition* 1.4*, nous avons les caractérisations suivantes :*

- $f$ *est Bochner mesurable,*
- *il existe une suite de fonctions* $\Sigma$*-étagées définies sur* $X$ *à valeurs dans* $M$*, convergeant simplement vers* $f$*,*
- *il existe une suite de fonctions dénombrablement* $\Sigma$*-étagées définies sur* $X$ *à valeurs dans* $M$*, convergeant uniformément sur* $X$ *vers* $f$*.*

On donne dans la suite quelques notions sur les mesures.

**Définition 1.5** *Soit* $(X, \Sigma)$ *un espace mesurable. Alors l'application* $\nu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}$ *est une mesure sur* $X$ *si*

1. $\nu(\emptyset) = 0$,
2. $\nu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \nu(A_n)$*, pour toute suite dénombrable* $(A_n)$ *d'éléments de* $\Sigma$ *disjoints deux à deux .*

*Le triplet* $(X, \Sigma, \nu)$ *est appelé espace mesuré.*
*Si* $\nu(A) \geq 0$*, pour tout* $A \in \Sigma$*, on dit que* $\nu$ *est une mesure positive et on note* $\nu \geq 0$*, ou que l'espace* $(X, \Sigma, \nu)$ *est positif.*
*Si* $\nu(A) < \infty$*, pour tout* $A \in \Sigma$*, on dit que* $\nu$ *est une mesure finie ou que l'espace* $(X, \Sigma, \nu)$ *est fini.*

*Si* $X$ *est un espace topologique, la mesure* $\nu : \mathcal{B}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ *est appelée mesure Borélienne.*
*On dit que* $\nu$ *est une mesure de probabilité si* $\nu(X) = 1$*.*

**Définition 1.6** *Soit* $X$ *un espace topologique séparé et* $\nu$ *une mesure Borélienne. Alors* $\nu$ *est dite régulière si pour tout* $A \in \mathcal{B}(X)$ *et tout* $\varepsilon > 0$*, il existe un ouvert* $C$ *et un fermé* $G$ *de* $X$*, tels que* $G \subset A \subset C$ *et* $\nu(C \backslash G) \leq \varepsilon$*.*
*Une mesure Borélienne finie et régulière est appelée mesure de Radon.*

**Définition 1.7** *Soit $(X, \Sigma, \nu)$ un espace mesuré avec $\nu \geq 0$. Soit $Z$ un sous ensemble de $X$, on dit que $Z$ est $\nu$-négligeable ou négligeable (s'il n'y a pas confusion), s'il existe $A \in \Sigma$ tel que $Z \subset A$ et $\nu(A) = 0$.*
*On dit qu'une propriété sur $X$ est vraie $\nu$-presque partout ($\nu$.p.p), si l'ensemble où elle n'est pas vérifiée est $\nu$-négligeable.*
*la tribu $\nu$-complétée de $\Sigma$ notée $\Sigma_\nu$ est la tribu engendrée par $\Sigma$ et les ensembles $\nu$-négligeables, c'est à dire*

$$\Sigma_\nu = \{A \cup Z /\ A \in \Sigma \; et \, Z \; ensemble \; \nu\text{-}négligeable\}.$$

*La tribu $\Sigma$ est dite complète si $\Sigma = \Sigma_\nu$, c'est à dire, si tout ensemble $\nu$-négligeable appartient à $\Sigma$.*

**Définition 1.8** *Soit $(X, \Sigma, \nu)$ un espace mesuré avec $\nu$ finie. Notons $\Sigma^* := \Sigma_\nu$ et soit $\nu^* : \Sigma^* \to \overline{\mathbb{R}}$ définie par $\nu^*(A \cup Z) = \nu(A)$, pour tout $A \in \Sigma$ et tout ensemble $Z$ $\nu$-négligeable. Alors $(X, \Sigma^*, \nu^*)$ est un espace mesuré avec $\nu^*$ finie et complète et on a $\nu^* = \nu$ sur $\Sigma$.*
*$(X, \Sigma^*, \nu^*)$ est appelé l'extension de Lebesgue de l'espace mesuré $(X, \Sigma, \nu)$.*

**Théorème 1.1** *Soient $X$ un espace topologique compact, $\Sigma$ une algèbre sur $X$ et $\nu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction additive, régulière et bornée.*
*Soit $\widetilde{\Sigma}$ la plus petite tribu sur $X$ contenant $\Sigma$. Alors il existe une mesure unique $\widetilde{\nu} : \widetilde{\Sigma} \to \overline{\mathbb{R}}$ régulière, bornée et qui prolonge $\nu$ à $\widetilde{\Sigma}$.*

### Mesure de Borel et mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

Soient $t_0, t_1$ deux nombres réels tels que $t_0 < t_1$, $J = [t_0, t_1]$ et $\Sigma$ la famille des sous ensembles de $J$ de la forme $\{t_0\} = [t_0, t_0], ]t', t'']$, pour $t_0 \leq t' \leq t'' \leq t_1$, et les unions finies de ces intervalles. Il est clair que $\Sigma$ est une algèbre sur $J$.

Définissons $\nu : \Sigma \to \mathbb{R}$ par

$$\nu(\{t_0\}) = 0, \;\; \nu(]t', t'']) = t'' - t' \;\text{ et }\; \nu(\bigcup_{j=1}^{k} A_j) = \sum_{j=1}^{k} \nu(A_j),$$

avec $k \in \mathbb{N}$ et $A_j$ des intervalles disjoints de la forme considérée.

La mesure $\nu$ est une mesure additive, régulière et bornée. Par le Théorème 1.1, elle admet une unique extension à $\widetilde{\Sigma}$ qui est la plus petite tribu sur $J$ contenant $\Sigma$, et qui n'est autre que la tribu Borélienne $\mathcal{B}(J)$.

Cette extension notée $\widetilde{\nu}$ est appelée la mesure de Borel sur $J$.

Soit $(J, \Sigma^*, \nu^*)$ l'extension de Lebesgue de $(J, \widetilde{\Sigma}, \widetilde{\nu})$. Alors les éléments de $\Sigma^*$ sont appelés ensembles Lebesgue-mesurables de $J$ et $\nu^*$ est la mesure de Lebesgue sur $J$.

Dans la suite de ce travail, pour tout ensemble compact $I$ de $\mathbb{R}$, on note par

- $\mathcal{L}(I)$ la tribu de Lebesgue sur $I$,
- $\mu$ ou $dt$ la mesure de Lebesgue,
- $\mathbf{L}^1_E(I)$ l'espace des applications Lebesgue Bochner-intégrables définies sur $I$ à valeurs dans l'espace de Banach $E$, c'est à dire, les applications $f$ Lebesgue Bochner-mesurables et telles que $\displaystyle\int_I f d\mu$ est finie,
- $\mathbf{C}_E(I)$ l'espace de toutes les applications continues $u : I \to E$ muni de la norme sup
$$\|u\|_{\mathbf{C}_E(I)} = \sup_{t\in I}\|u(t)\|,$$
- $\mathbf{W}^{1,1}_E(I)$ l'espace des applications absolument continues $u : I \to E$ ayant une dérivée faible dans $\mathbf{L}^1_E(I)$.

## 1.3 La distance de Hausdorff

**Définition 1.9** *Soient $A$, $B$ deux sous ensembles d'un espace métrique $(X, d)$, l'écart entre $A$ et $B$ est défini par*
$$e(A, B) = \sup_{a\in A} d(a,\ B),$$
*avec*
$$d(a,\ B) = \inf_{b\in B} d(a,\ b),$$
*et la distance de Hausdorff entre $A$ et $B$ est définie par*
$$\mathcal{H}(A, B) = max(e(A, B), e(B, A)).$$

***Propriétés élémentaires***

1. $e(A, \emptyset) = \infty$ *si* $A \neq \emptyset$,
2. $e(\emptyset, B) = 0$,
3. $e(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \subset \overline{B}$,
4. $e(A, B) \leq e(A, C) + e(C, B)$, $C$ *un sous ensemble de* $X$,
5. $\mathcal{H}(A, B) = 0 \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$,
6. $\mathcal{H}(A, B) \leq \mathcal{H}(A, C) + \mathcal{H}(C, B)$,
7. $|d(x, A) - d(x, B)| \leq \mathcal{H}(A, B)$, $\forall x \in X$.

***Preuve de 7.***

*En effet, nous avons*

$$\|x - a\| \leq \|x - b\| + \|b - a\|, \quad \forall (a, b) \in A \times B,$$

*donc*

$$\inf_{a \in A} \|x - a\| \leq \|x - b\| + \inf_{a \in A} \|b - a\|, \quad \forall b \in B$$

*ceci implique*

$$\begin{aligned} d(x, A) &\leq \|x - b\| + d(b, A), \ \forall b \in B \\ &\leq \inf_{b \in B} \|x - b\| + \inf_{b \in B} d(b, A) \\ &= d(x, B) + \inf_{b \in B} d(b, A) \\ &\leq d(x, B) + \sup_{b \in B} d(b, A) \\ &= d(x, B) + e(B, A) \\ &\leq d(x, B) + \mathcal{H}(A, B), \end{aligned}$$

*donc*

$$d(x, A) - d(x, B) \leq \mathcal{H}(A, B),$$

*d'autre part, nous avons*

$$\|x - b\| \leq \|x - a\| + \|a - b\|, \quad \forall (a, b) \in A \times B,$$

*donc*

$$\inf_{b \in B} \|x - b\| \leq \|x - a\| + \inf_{b \in B} \|a - b\|, \quad \forall a \in A$$

*implique*

$$\begin{aligned} d(x,B) &\leq \|x-a\| + d(a,B) \\ &\leq \inf_{a\in A}\|x-a\| + \inf_{a\in A} d(a,B) \\ &= d(x,A) + \inf_{a\in A} d(a,B) \\ &\leq d(x,A) + \sup_{a\in A} d(a,B) \\ &= d(x,A) + e(A,B) \\ &\leq d(x,A) + \mathcal{H}(A,B), \end{aligned}$$

*donc*

$$-\mathcal{H}(A,B) \leq d(x,A) - d(x,B),$$

*c'est à dire,*

$$|d(x,A) - d(x,B)| \leq \mathcal{H}(A,B), \quad \forall\, x \in X.$$

■

*Notons par $P_f(X)$, l'ensemble des parties fermées de $X$, alors $P_f(X)$ muni de la distance de Hausdorff $\mathcal{H}$, est un espace métrique.*
*Rappelons les propriétés suivantes*

- *Si $(X,d)$ est un espace métrique complet, alors $(P_f(X),\mathcal{H})$ l'est aussi.*
- *Si $X$ est séparable, l'ensemble des parties compactes de $X$, noté $P_k(x)$ muni de $\mathcal{H}$ est aussi séparable.*

## 1.4 Multi-applications et sélections

Pour une étude détaillée des multi-applications et sélections on peut se référer à [6].
**Définition 1.10** *Soient $X$, $Y$ deux ensembles non vides. Une multi-application (ou fonction multivoque) $F$ définie sur $X$ à valeurs dans $Y$ est une application qui à chaque élément $x \in X$ associe un sous ensemble $F(x)$ de $Y$, on note $F : X \rightrightarrows Y$ ou $F : X \to P(Y)$, ($P(Y)$ est l'ensemble des parties de $Y$ ).*
*Le domaine, le graphe et l'image de la multi-application $F : X \rightrightarrows Y$ sont donnés respectivement par*

$$D(F) := Dom(F) = \{x \in X : \; F(x) \neq \emptyset\},$$

$$gph(F) = \{(x,y) \in X \times Y : \; x \in D(F),\, y \in F(x)\},$$

$$Im(F) = \bigcup_{x \in D(F)} F(x).$$

**Définition 1.11** *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On appelle sélection de $F$ toute application $f : X \to Y$ vérifiant*

$$f(x) \in F(x), \ \forall x \in X.$$

## 1.5 Mesurabilité des multi-applications

Pour plus de détails sur la mesurabilité des multi-applications on peut se référer à [6] et [14].

**Définition 1.12** *Soient $(T, \Sigma)$ un espace mesurable, $X$ un espace métrique et $\Gamma : T \rightrightarrows X$. On dit que $\Gamma$ est $(\Sigma, \mathcal{B}(X))$-mesurable ou tout simplement $\Sigma$-mesurable, si pour tout ouvert $V$ de $X$,*

$$\Gamma^{-1}(V) = \{t \in T : \ \Gamma(t) \cap V \neq \emptyset\} \in \Sigma.$$

**Proposition 1.1** *Soient $(T, \Sigma)$ un espace mesurable, $X$ un espace métrique séparable et soit $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application.*
*Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

*(i) $F$ est $\Sigma$-mesurable,*

*(ii) pour chaque $x \in X$, la fonction $d_x : T \to \mathbb{R}$ définie par $d_x(t) = d(x, F(t))$ est $\Sigma$-mesurable.*

**Lemme 1.2** *Soient $(T, \Sigma)$ un espace mesurable, $X$ un espace métrique complet séparable et $\Gamma : T \rightrightarrows X$ une multi-application à valeurs non vides fermées. Considérons les propriétés suivantes*

*(i) $\Gamma^{-1}(B) \in \Sigma$, pour tout Borélien $B$ de $X$,*

*(ii) $\Gamma^{-1}(C) \in \Sigma$, pour tout fermé $C$ de $X$,*

*(iii) $\Gamma^{-1}(V) \in \Sigma$, pour tout ouvert $V$ de $X$,*

*(iv) il existe une suite $(\sigma_n)$ de sélections mesurables de $\Gamma$ telle que*

$$\forall t \in T, \ \Gamma(t) = \overline{\{\sigma_n(t)\}}_{n \in \mathbb{N}},$$

*(v) $\forall x \in X$, la fonction distance $d(x, \Gamma(.))$ est mesurable,*

*(vi) le graphe de* $\Gamma$ *appartient à* $\Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$.

*Alors* $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v) \Rightarrow (vi)$.
*Si* $\Gamma$ *est à valeurs non vides complètes alors* $(iii) \Leftrightarrow (v) \Leftrightarrow (iv)$.
*Si* $\Gamma$ *est à valeurs non vides compactes alors* $(iii) \Rightarrow (i)$.

**Remarque 1.1** *la suite* $(\sigma_n)$ *dans la propriété (iv) est appelée une représentation de Castaing de la multi-application* $\Gamma$.

**Lemme 1.3** *Soit* $(T, \Sigma, \nu)$ *un espace mesuré avec* $\nu \geq 0$, $\sigma$*-finie et* $\Sigma$ $\nu$*-complète. Soient* $X$ *un espace métrique complet et* $\Gamma : T \rightrightarrows X$ *une multi-application à valeurs non vides fermées, alors*

$$(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v) \Leftrightarrow (vi).$$

**Proposition 1.2** *Soient* $(T, \Sigma)$ *un espace mesurable,* $X_1, X_2$ *deux espaces métriques séparables,* $F_1 : T \rightrightarrows X_1$ *et* $F_2 : T \rightrightarrows X_2$. *Soit* $F : T \rightrightarrows X_1 \times X_2$ *la multi-application définie par* $F(t) = F_1(t) \times F_2(t)$.
*Si* $F_1$ *et* $F_2$ *sont* $\Sigma$*-mesurables, alors* $F$ *est* $\Sigma$*-mesurable.*
*La réciproque a lieu aussi quand* $F_1$ *et* $F_2$ *sont à valeurs non vides.*

**Proposition 1.3** *Soit* $(T, \Sigma)$ *un espace mesurable, et soit* $(F_j)_{j \in J}$ *une famille de multi-applications* $\Sigma$*-mesurables définies sur* $T$ *à valeurs dans* $X$.

1. *Si* $J$ *est dénombrable, alors la multi-application* $F : T \rightrightarrows X$ *définie par* $F(t) = \bigcup\limits_{j \in J} F_j(t)$ *est* $\Sigma$*-mesurable.*
2. *Si* $J$ *est fini et* $X$ *un espace de Banach séparable, alors la multi-application* $G : T \rightrightarrows X$ *définie par* $G(t) = \sum\limits_{j \in J} F_j(t)$ *est* $\Sigma$*-mesurable.*
3. *Si* $X$ *est un espace topologique, et* $H_1 : T \rightrightarrows X$ *une multi-application* $\Sigma$*-mesurable, alors la multi-application* $H_2 : T \rightrightarrows X$ *définie par* $H_2(t) = \overline{H_1(t)}$ *est* $\Sigma$*-mesurable.*

**Théorème 1.2** ***(Théorème d'existence de sélections mesurables)***.
*Soient* $(T, \Sigma)$ *un espace mesurable,* $X$ *un espace métrique complet séparable et* $F : T \rightrightarrows X$ *une multi-application* $\Sigma$*-mesurable à valeurs fermées non vides. Alors* $F$ *admet au moins une sélection mesurable.*

**Théorème 1.3** ***(Représentation de Castaing)***.
*Soient* $(T, \Sigma)$ *un espace mesurable, (X,d) un espace métrique séparable complet. Soit*

*$F : T \rightrightarrows X$ une multi-application à valeurs fermées non vides. Alors, $F$ est $\Sigma$-mesurable si et seulement si $Dom(F) \in \Sigma$ et il existe une suite $(f_n)_n$ d'applications $\Sigma$-mesurables ($f_n : Dom(F) \to X$) telle que pour chaque $t \in Dom(F)$ on ait $F(t) = \overline{(f_n(t))_n}$.*
*On dit que $(f_n)_n$ est une représentation de Castaing de $F$.*

**Démonstration.**

Comme $Dom(F) = F^{-1}(X)$, on peut supposer, sans perdre de généralité, que $Dom(F) = T$.

$\Leftarrow$ /

$F(t) = \overline{\bigcup_n \{f_n(t)\}} = \overline{\{f_n(t)\}}_n$.
la muli-application $G$ définie par $G(t) = \bigcup_n f_n(t)$ est $\Sigma$-mesurable puisque, pour tout ouvert $V$ de $X$, $G^{-1}(V) = \bigcup_n f_n^{-1}(V)$, et donc $\overline{G} = F$ est mesurable.

$\Rightarrow$ /

Soit $(x_k)_k$ une suite fixée, dense dans $X$ (le choix d'une telle suite est possible grâce à la séparabilité de $X$). Considérons pour chaque $(k, j) \in \mathbb{N}^2$ la multi-application

$$G_{k,j} : T \rightrightarrows X$$

définie par

$$G_{i,j}(t) = \begin{cases} F(t) \cap B(x_k, \frac{1}{2^j}), & \text{si } t \in F^{-1}(B(x_k, \frac{1}{2^j})) \\ F(t), & \text{sinon,} \end{cases}$$

et la multi-application $F_{k,j} : T \rightrightarrows X$ définie par $F_{k,j}(t) = \overline{G_{k,j}(t)}$. La muli-application $F_{k,j}$ est à valeurs fermées non vides et elle est $\Sigma$-mesurable, du fait que $G_{k,j}$ est $\Sigma$-mesurable.

En effet, pour tout ouvert $V$ de $X$

$$\begin{array}{rcl} G_{k,j}^{-1}(V) & = & \{t \in T : G_{k,j}^{-1}(t) \cap V \neq \emptyset\} \\ & = & \{t \in F^{-1}(B(x_k, \frac{1}{2^j})) : F(t) \cap B(x_k, \frac{1}{2^j}) \cap V \neq \emptyset\} \\ & \bigcup & \{t \in (T \setminus F^{-1}(B(x_k, \frac{1}{2^j}))) : F(t) \cap V \neq \emptyset\} \\ & = & [F^{-1}(B(x_k, \frac{1}{2^j})) \cap F^{-1}(B(x_k, \frac{1}{2^j}) \cap V)] \\ & \bigcup & [(T \setminus F^{-1}(B(x_k, \frac{1}{2^j}))) \cap F^{-1}(V)] \in \Sigma \end{array}$$

puisque $F$ est $\Sigma$-mesurable. Par conséquent $F_{k,j}$ est $\Sigma$-mesurable.

La multi-application $F_{k,j}$ est $\Sigma$-mesurable à valeurs fermées, d'après le Théorème 1.3, elle admet une sélection $\Sigma$-mesurable qu'on note $f_{k,j}$, i.e., $f_{k,j}(t) \in F_{k,j}(t), \forall t \in T$.

Montrons que $F(t) = \overline{\bigcup\limits_{(k,j)} f_{k,j}(t)}$.

Nous avons, $f_{k,j}(t) \in F_{k,j}(t), \forall t \in T \Rightarrow \overline{\bigcup\limits_{(k,j)} f_{k,j}(t)} \subset \overline{\bigcup\limits_{(k,j)} F_{k,j}(t)} \subset F(t), \forall t \in T$.

Montrons la deuxième inclusion, c'est à dire, $F(t) \subset \overline{\bigcup\limits_{(k,j)} f_{k,j}(t)}$.

Fixons $t \in T$, $x \in F(t)$ *et* $\varepsilon > 0$. Choisissons un entier $j$ tel que $\dfrac{1}{2^j} < \dfrac{\varepsilon}{2}$, et choisissons un entier $k$ tel que $d(x_k, x) < \frac{1}{2^j}$, (un tel choix est possible grâce à la densité de $(x_k)_k$ dans $X$).

Nous avons alors, $x \in B(x_k, \frac{1}{2^j}) \cap F(t)$, c'est à dire, $t \in F^{-1}(B(x_k, \frac{1}{2^j}))$, d'où $F_{k,j}(t) = \overline{F(t) \cap B(x_k, \frac{1}{2^j})} \subset \overline{B}_k(x_k, \frac{1}{2^j})$, et donc $f_{k,j}(t) \in \overline{B}(x_k, \frac{1}{2^j})$ ce qui implique

$$\begin{array}{rcl} d(x, f_{k,j}(t)) & \leq & d(x, x_k) + d(x_k, f_{k,j}(t)) \\ & < & \dfrac{1}{2^j} + \dfrac{1}{2^j} \\ & = & \dfrac{2}{2^j} \\ & < & \varepsilon \end{array}$$

par suite

$$x \in \overline{\bigcup_{(k,j)} f_{k,j}(t)}$$

et donc

$$F(t) \subset \overline{\bigcup_{(k,j)} f_{k,j}(t)}.$$

On conclut alors que $F(t) = \overline{\{f_{k,j}\}}_{(k,j)}$. ■

**Théorème 1.4** *Soient $(T, \Sigma)$ un espace mesurable, $E$ un espace de Banach. Soient $F : T \times E \rightrightarrows E$ une multi-application mesurable et $u : T \to E$ une application $\Sigma$-mesurable. Alors, la multi-application $t \mapsto F(t, u(t))$ est $\Sigma$-mesurable.*

**Démonstration.**

Soit l'application $f : T \to T \times E$ définie par $f(t) = (t, u(t))$ et soit $V \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(E)$, $V = V_1 \times V_2$, avec $V_1 \in \Sigma$ et $V_2 \in \mathcal{B}(E)$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) &= \{t \in T : f(t) \in V\} \\ &= \{t \in T : (t, u(t)) \in V_1 \times V_2\} \\ &= \{t \in T : t \in V_1\} \cap \{t \in T : u(t) \in V_2\} \\ &= V_1 \cap u^{-1}(V_2) \in \Sigma \end{aligned}$$

puisque $V_1 \in \Sigma$ et $u$ est $(\Sigma, \mathcal{B}(E))$-mesurable.

Considérons la multi-application $H = F(., u(.)) : T \rightrightarrows E$ définie par $H(t) = F(t, u(t)) = F(f(t))$.

Soit $W$ un ouvert de $E$, on a

$$\begin{aligned} H^{-1}(W) &= \{t \in T : H(t) \cap W \neq \emptyset\} \\ &= \{t \in T : F(t, u(t)) \cap W \neq \emptyset\} \\ &= \{t \in T : F(f(t)) \cap W \neq \emptyset\} \\ &= \{t \in T : f(t) \in F^{-1}(W)\} \\ &= f^{-1}(F^{-1}(W)), \end{aligned}$$

comme $F$ est mesurable on a $F^{-1}(W) \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(E)$ est puisque $f$ est mesurable on obtient $f^{-1}(F^{-1}(W)) \in \Sigma$, c'est à dire, $H^{-1}(W) \in \Sigma$. Par conséquent $F(., u(.))$ est $\Sigma$-mesurable.

■

**Théorème 1.5** *Soit $(T, \Sigma, \mu)$ un espace mesuré avec $\Sigma$ $\mu$-complète et $\mu$ $\sigma$-finie. Soit $E$ un espace de Banach séparable et soient $f : T \to E$ une application mesurable et $\rho : T \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Alors*

1. *$t \mapsto \overline{\mathbf{B}}_E(f(t), \rho(t))$ est une multi-application $\Sigma$-mesurable.*
2. *De plus, si la multi-application $\Gamma : T \rightrightarrows E$ à valeurs fermées non vides et mesurable, alors la multi-application $G$ définie par*

$$t \mapsto G(t) = \{x \in \Gamma(t) / \; \|f(t) - x\| \leq (1 + \alpha) d(f(t), \Gamma(t))\}$$

*est à valeurs fermées non vides et $\Sigma$-mesurable, $\alpha$ étant un réel strictement positif.*

**Démonstration.**

1. Soit $(x_n)$ une suite fixée, dense dans la boule unité de $E$ (le choix d'une telle suite est possible grâce à la séparabilité de l'espace $E$).

   Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sigma_n(t) = f(t) + \rho(t) x_n$.

   L'application $\sigma_n$ est mesurable (grâce à la mesurabilité de $f$ et $\rho$) et $\overline{\mathbf{B}}_E(f(t), \rho(t)) = \overline{f(t) + \rho(t)\mathbf{B}_E(0, 1)} = \overline{\{f(t) + \rho(t) x_n\}} = \overline{\{\sigma_n(t) / n \in \mathbb{N}\}}$. Par suite $\{\sigma_n(t)\}_n$ est une représentation de Castaing de $\overline{\mathbf{B}}_E(f(t), \rho(t))$. Par conséquent l'application $t \mapsto \overline{\mathbf{B}}_E(f(t), \rho(t))$ est mesurable.

2. Remarquons que la multi-application $G$ est à valeurs fermées non vides.

   En effet, pour tout $t \in T$, $d(f(t), \Gamma(t)) = \inf\limits_{x \in \Gamma(t)} \|f(t) - x\|$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists \, x_\varepsilon \in \Gamma(t) \; \text{ tel que } \; \|f(t) - x_\varepsilon\| < d(f(t), \Gamma(t)) + \varepsilon,$$

   en particulier pour $\varepsilon = \alpha \, d(f(t), \Gamma(t))$, avec $\alpha$ un réel strictement positif, on obtient l'existence de $x_\alpha \in \Gamma(t)$ tel que

$$\begin{aligned}\|f(t) - x_\alpha\| &\leq d(f(t), \Gamma(t)) + \alpha d(f(t), \Gamma(t)) \\ &= (1+\alpha) d(f(t), \Gamma(t))\end{aligned}$$

d'où la non vacuité de $G(t)$ pour tout $t \in T$.

Montrons maintenant que $G$ est à valeurs fermées.

Soit $t \in T$ et soit $(v_n)$ une suite de $G(t)$ telle que $v_n \to v$ quand $n \to \infty$. $v_n \in G(t)$, c'est à dire, $v_n \in \Gamma(t)$ et $\|f(t) - v_n\| \leq (1+\alpha) d(f(t), \Gamma(t))$, $\Gamma$ à valeurs fermées alors $v \in \Gamma(t)$ et

$$\begin{aligned}\|f(t) - v\| &\leq \|f(t) - v_n\| + \|v_n - v\| \\ &\leq (1+\alpha) d(f(t), \Gamma(t)) + \|v_n - v\|\end{aligned}$$

et comme $\|v_n - v\| \to 0$ quand $n \to \infty$, on obtient $\|f(t) - v\| \leq (1+\alpha) d(f(t), \Gamma(t))$, et donc $G$ est à valeurs fermées.

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}\mathtt{gph}(G) &= \{(t,x) : \ x \in G(t)\} \\ &= \{(t,x) : \ x \in \Gamma(t) \text{ et } \|f(t) - x\| \leq (1+\alpha) d(f(t), \Gamma(t))\} \\ &= \{(t,x) : x \in \Gamma(t)\} \cap \{(t,x) : \|f(t) - x\| \leq (1+\alpha) d(f(t), \Gamma(t))\} \\ &= \{(t,x) : x \in \Gamma(t)\} \cap \{(t,x) : x \in \overline{\mathbf{B}}_E(f(t), (1+\alpha) d(f(t), \Gamma(t)))\} \\ &= \mathtt{gph}(\Gamma) \cap \mathtt{gph}(\overline{\mathbf{B}}_E(f(.), \rho(.))),\end{aligned}$$

où $\rho(t) = (1+\alpha)\, d(f(t), \Gamma(t))$.

Comme $\Sigma$ est une tribu $\mu$-complète et comme $\Gamma$ est mesurable, on conclut par le Lemme 1.3, que $\mathtt{gph}(G) \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(E)$. En effet,

$\Gamma$ étant mesurable à valeurs non vides fermées dans $E$, donc ses valeurs sont complètes, par le Lemme 1.2, on obtient la mesurabilité de la fonction distance $d(x, \Gamma(.))$, $\forall x \in E$, or $f$ est mesurable. Par conséquent $d(f(.), \Gamma(.))$ est mesurable, c'est à dire $\rho(.)$ est mesurable.

Par la première partie de ce théorème on conclut que $\mathtt{gph}(\overline{\mathbf{B}}_E(f(.), \rho(.)) \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(E)$ et donc $\mathtt{gph}(G) \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(E)$, c'est à dire, $G$ est mesurable. ■

## 1.6 Multi-applications Lipschitziennes et pseudo-Lipschitziennes

**Définition 1.13** *Soient $E$, $Z$ deux espaces normés et soit $F : E \rightrightarrows Z$ une multi-application. On dit que $F$ est Lipschitzienne autour de $x \in E$ si il existe une constante positive $l$ et un voisinage $U \subset D(F)$ de $x$ tels que*

$$\forall x_1, x_2 \in U, F(x_1) \subset F(x_2) + l\|x_1 - x_2\|\overline{B}_Z.$$

*Dans ce cas on dit aussi que $F$ est Lipschitzienne sur $U$.*
*Elle est Lipschitzienne sur $E$ si il existe $l$ positive tel que*

$$\forall x_1, x_2 \in D(F), F(x_1) \subset F(x_2) + l\|x_1 - x_2\|\overline{B}_Z.$$

**Définition 1.14** *Soit $(T, \Sigma, \mu)$ un espace mesuré avec $\Sigma$ $\mu$-complète et $\mu$ $\sigma$-finie. Soient $E$, $Z$ deux espaces normés, $X \subset T \times E$ et soit $F : T \times E \rightrightarrows Z$ une multi-application à valeurs non vides. On dit que $F$ est globalement pseudo-Lipschitzienne sur $X$ si il existe $\beta \geq 0$ et $k \in L^1_E(T, \mu)$ tels que pour tout $N > 0$*

$$F(t, x) \cap N\overline{B}_Z \subset F(t, x') + (k(t) + \beta N)\|x - x'\|\overline{B}_Z,$$

*Pour tous $(t, x)$, $(t, x') \in X$.*

## 1.7 Concepts de continuité des multi-applications

Énonçons les propriétés suivantes, et pour plus de détails on peut se référer à [4].

**Définition 1.15** *Soient $X, Y$ deux espaces métriques et $F : X \rightrightarrows Y$. On dit que $F$ est continue (resp. lipschitzienne de rapport $\lambda > 0$), si pour tout $x \in X$ nous avons*

$$\lim_{x' \to x} \mathcal{H}(F(x), F(x')) = 0$$

*(resp. pour tous $x$, $x' \in X$ nous avons*

$$\mathcal{H}(F(x), F(x')) \leq \lambda d_X(x, x').$$

*$\mathcal{H}$ est la distance de Hausdorff et $d_X$ la métrique de $X$.*

**Définition 1.16** *Soit $T > 0$ et $C : [0, T] \rightrightarrows Y$. On dit que $C$ est absolument continue si pour tout $y \in Y$ et tous $t$, $t' \in [0, T]$, nous avons*

$$|d(y, C(t)) - d(y, C(t'))| \leq |a(t) - a(t')|, \tag{1.1}$$

*où $a : [0, T] \to \mathbb{R}^+$ est une fonction absolument continue satisfaisant $\dot{a}(t) \neq 0$, p.p. sur $[0, T]$.*
*Observons que la relation (1.1) nous donne pour $t \geq t'$,*

$$|d(y, C(t)) - d(y, C(t'))| \leq \int_{t'}^{t} |\dot{a}(s)| ds.$$

*On peut alors supposer, (en remplaçant $\dot{a}$ par $|\dot{a}|$ si c'est nécessaire), que $\dot{a}(t) \geq 0$, $\forall\, t \in [0, T]$.*
*Rappelons la définition d'une fonction absolument continue.*

**Définition 1.17** *Soit $E$ un espace de Banach. Une fonction $f : [a, b] \to E$ est dite absolument continue si $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tel que pour toute partition dénombrable de l'intervalle $[a, b]$ par des intervalles disjoints $[a_k, b_k]$ vérifiant*

$$\sum_k (b_k - a_k) < \delta,$$

*on a*

$$\sum_k \|f(b_k) - f(a_k)\| < \varepsilon.$$

**Théorème 1.6** *Une fonction $f : [a, b] \to E$ est absolument continue si et seulement si elle est l'intégrale de sa dérivée, c'est à dire,*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b \dot{f}(t) dt.$$

On voit bien qu'une fonction absolument continue est continue par contre la réciproque est fausse.

## 1.8 Quelques résultats de convergence

Les résultats suivants sont pris de la référence [16].

**Théorème 1.7** ***(Théorème de la convergence de Lebesgue)***.
*Soient* $(T, \Sigma, \mu)$ *un espace mesuré et* $E$ *un espace de Banach, soit* $1 \leq p < +\infty$ *et* $(f_n)$ *une suite de fonctions* $\mu$*-mesurables définies sur* $T$ *à valeurs dans* $E$*, si la suite* $(f_n)$ *vérifie pour tout* $n \in \mathbb{N}$

*(i)* $f_n \to f$ $\mu$*.p.p sur* $T$*,*

*(ii) il existe une fonction positive* $g \in \mathbf{L}^p_{\mathbb{R}}(T)$ *telle que,* $\|f_n(t)\| \leq g(t)$ $\mu$*.p.p.*

*Alors* $f_n \to f$ *dans* $\mathbf{L}^p_E(T)$*. En particulier, dans le cas* $p = 1$*,*

$$\int_T f_n d\mu \to \int_T f d\mu.$$

**Théorème 1.8** ***(Réciproque de la convergence de Lebesgue)***.
*Soient* $(T, \Sigma, \mu)$ *un espace mesuré et* $E$ *un espace de Banach, soit* $1 \leq p < +\infty$*. Si* $f_n \to f$ *dans* $\mathbf{L}^p_E(T)$ *alors il existe* $(f_{n_k})$ *une suite extraite de* $(f_n)$ *et une fonction positive* $g \in \mathbf{L}^p_{\mathbb{R}}(T)$ *telles que*

*(i)* $f_{n_k} \to f$ $\mu$*.p.p,*

*(ii) pour tout* $k$*,* $\|f_{n_k}\| \leq g$ $\mu$*.p.p.*

**Théorème 1.9** ***(Théorème d'Ascoli-Arzelà)***.
*Soient* $T$ *un espace métrique compact,* $Y$ *un espace métrique complet, et* $H$ *un sous ensemble de* $\mathbf{C}(T, Y)$*, l'espace des applications continues définies sur* $T$ *à valeurs dans* $Y$*, muni de la topologie de la convergence uniforme. Alors* $H$ *est relativement compact si et seulement si* $H$ *est équicontinu et* $H(x)$ *est relativement compact, avec*

$$H(x) = \{f(x) : \ f \in H\}.$$

Le Théorème suivant est une conséquence du Théorème d'Ascoli-Arzelà.

**Théorème 1.10** ***(Théorème 4 chap 2 [4])*** *Soient* $T$ *un sous ensemble compact de* $\mathbb{R}$*,* $E$ *un espace de dimension finie et soit* $(f_n)$ *une suite de fonctions absolument continues définies sur* $T$ *à valeurs dans* $E$ *satisfaisant les conditions suivantes*

***(1)*** $\forall\, t \in T$*,* $(f_n(t))$ *est un sous ensemble relativement compact de* $E$*,*

***(2)*** *il existe une fonction à valeurs réelles positives* $h \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}(T)$*, telle que*

$$\|\dot{f}_n(t)\| \leq h(t), \quad p.p. \ sur\, T.$$

*Alors, il existe une sous suite de $(f_n)$(qu'on note aussi $(f_n)$) qui converge vers une fonction absolument continue $f : T \to E$ au sens suivant*

***(a)*** *$(f_n)$ converge uniformément vers $f$,*

***(b)*** *$(\dot{f}_n)$ converge faiblement vers $\dot{f}$ dans $\mathbf{L}^1_E(T)$, c'est à dire, $(\dot{f}_n)$ converge vers $\dot{f}$ $\sigma(\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_E)$.*

## 1.9 Quelques résultats de compacité

**Théorème 1.11** ***(Théorème d'Alaoglu)****.*
*Soit $E$ un espace de Banach séparable et soit $M' \subset E'$, si $M'$ est borné pour la norme de $E'$ et fermé pour la topologie $\sigma(E', E)$. Alors $M'$ est compact pour cette topologie.*

**Théorème 1.12** ***(Théorème d'Eberlein-Smulian)****. Voir* [20].
*Soit $S$ un sous ensemble d'un espace de Banach. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes*

(**i**) *$S$ est faiblement (relativement) séquentiellement compact.*

(**ii**) *$S$ est faiblement (relativement) compact.*

**Théorème 1.13** *Soit $E$ un espace de Banach. Alors $E$ est réflexif si et seulement si la boule unité fermée de $E$*

$$\overline{\mathbf{B}}_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$$

*est compacte pour la topologie $\sigma(E, E')$.*

## 1.10 Lemme de Gronwall

Ce lemme est fort utile pour majorer des fonctions à partir d'inéquations intégrales.

**Lemme 1.4** *Soient $f$, $g$, $h$ des fonctions définies sur $[0, T]$ à valeurs dans $[0, +\infty]$ telles que*

$$f(t) \leq g(t) + \int_0^t f(\tau)h(\tau)d\tau,$$

*alors*

$$f(t) \leq g(t) + \int_0^t g(\tau)h(\tau)exp(\int_\tau^t h(s)ds)d\tau.$$

**Lemme 1.5** *Soient $a$ un réel positif et $f, g, h$ des fonctions définies sur $[0, T]$ à valeurs dans $[0, +\infty]$ telles que :*

$$f(t) \leq a + \int_0^t f(\tau)h(\tau)d\tau + \int_0^t g(\tau)d\tau,$$

*alors*

$$f(t) \leq a\, exp(\int_0^t h(\tau)d\tau) + \int_0^t g(\tau)exp(\int_\tau^t h(s)ds)d\tau$$

**Lemme 1.6** *Soient $f$ une fonction intégrable sur $[0, T]$, $g$ et $h$ deux fonctions continues sur $[0, T]$. Si nous avons pour tout $t \in [0, T]$*

$$h(t) \leq g(t) + \int_0^t f(\tau)h(\tau)d\tau,$$

*alors*

$$exp(-\int_0^t f(\tau)d\tau) \int_0^t f(\tau)h(\tau)d\tau \leq \int_0^t exp(-\int_0^t f(\tau)d\tau)f(\tau)g(\tau)d\tau.$$

# Chapitre 2

# Inclusion différentielle du premier ordre gouvernée par un opérateur maximal monotone et une perturbation Lipschitzienne

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'existence de solutions pour une inclusion différentielle du premier ordre gouvernée par un opérateur maximal monotone et une perturbation Lipschitzienne, de la forme

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + F(t, u(t)), \quad p.p.\, t \in [0, T], \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

plus précisément, on considère un espace de dimension finie $E$, un opérateur multivoque maximal monotone $A(t)$ de $E$ et une multi-application $F : [0, T] \times E \rightrightarrows E$ mesurable par rapport à t, à valeurs fermées et vérifiant la condition de Lipschitz, c'est à dire, elle vérifie la relation suivante

$$\mathcal{H}(F(t, x), F(t, x')) \leq k(t)\|x - x'\|, \;\; \forall (t, x), (t, x') \in [0, T] \times E,$$

où $k \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0, T])$ et $k(t) \geq 0$.

On commence ce chapitre par donner des définitions et des résultats sur les opérateurs maximaux monotones, qui nous seront utiles dans la démonstration de notre Théorème. Pour plus de détails on peut se référer à [10], [13] et [23].

Soit $E$ un espace de dimension finie. Rappelons qu'un opérateur $A : E \rightrightarrows E$, est monotone si, pour tout $\lambda > 0$ et pour tous $x_1, x_2 \in D(A)$, $y_1 \in Ax_1$ et $y_2 \in Ax_2$, nous avons

$$\|x_1 - x_2\| \leq \|(x_1 - x_2) + \lambda(y_1 - y_2)\|,$$

où

$$D(A) := \{x \in E : \; Ax \neq \emptyset\}$$

est le domaine de $A$.

Si de plus

$$R(I_E + \lambda A) = E,$$

alors $A$ est dit opérateur maximal monotone, avec

$$R(A) = \bigcup_{x \in E} Ax$$

est le rang de $A$ et $I_E$ l'identité de $E$.

**Définition 2.1** *Soit $A : D(A) \subset E \rightrightarrows E$ un opérateur et soit $\lambda > 0$.*
*Alors*
(**a**) *L'opérateur $J_\lambda : D(J_\lambda) \subset E \rightrightarrows E$ défini par*

$$J_\lambda A = (I_E + \lambda A)^{-1},$$

*où*

$$D(J_\lambda) = R(I_E + \lambda A),$$

*est appelé la résolvante de $A$.*
(**b**) *L'opérateur $A_\lambda : D(A_\lambda) \subset E \rightrightarrows E$ défini par*

$$A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I_E - J_\lambda A),$$

*où $D(A_\lambda) = R(I_E + \lambda A)$, est appelé l'approximation de Yosida de $A$.*

**Proposition 2.1** *Un opérateur* $A : D(A) \subset E \rightrightarrows E$ *est un opérateur maximal monotone si et seulement si pour tout* $\lambda > 0$*, la résolvante* $J_\lambda A$ *de* $A$ *est univoque et non expansive, c'est à dire,* $J_\lambda A$ *est univoque et vérifie la relation*

$$\|J_\lambda Ax - J_\lambda Ay\| \leq \|x - y\|, \, \forall x, y \in R(I_E + \lambda A).$$

**Proposition 2.2** *Si* $A : D(A) \subset E \rightrightarrows E$ *est un opérateur maximal monotone et* $\lambda > 0$*, alors*

*(i)* $A_\lambda$ *est univoque, monotone et Lipschitzienne de rapport* $\dfrac{2}{\lambda}$ *sur* $R(I_E + \lambda A)$ *;*

*(ii)* $A_\lambda x \in AJ_\lambda Ax$, $\forall x \in R(I_E + \lambda A)$ *;*

*(iii)* $\frac{1}{\lambda}\|J_\lambda Ax - x\| = \|A_\lambda x\| \leq |Ax|_0 = inf\{\|y\|, \, y \in Ax\}$, $\forall x \in R(I_E + \lambda A) \cap D(A)$.

**Théorème 2.1** *Soit* $E$ *un espace de Banach qui a son dual topologique uniformément convexe. Alors le graphe de tout opérateur maximal monotone* $A : D(A) \subset E \rightrightarrows E$ *est fortement-faiblement séquentiellement fermé.*

**Lemme 2.1** *Soit* $E$ *un espace de Hilbert séparable et* $A(t) : D(A(t)) \subset E \rightrightarrows E$, $(t \in [0, T])$*, un opérateur maximal monotone satisfaisant la condition*

$(\mathbf{H})$ *pour tout* $x \in E$ *et tout* $\lambda > 0$*, la fonction* $t \mapsto (I_E + \lambda A(t))^{-1}x$ *est Lebesgue mesurable et il existe une fonction* $\overline{g} \in \mathbf{L}^2_E([0, T])$ *telle que* $t \mapsto (I_E + \lambda A(t))^{-1}\overline{g}(t)$ *appartient à* $\mathbf{L}^2_E([0, T])$.

*Soient* $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ *deux suites dans* $\mathbf{L}^2_E([0, T])$ *vérifiant*

*(i)* $(u_n)_n$ *converge fortement vers* $u \in \mathbf{L}^2_E([0, T])$ *et* $(v_n)_n$ *converge vers* $v \in \mathbf{L}^2_E([0, T])$ *par rapport à la topologie faible* $\sigma(\mathbf{L}^2_E, \mathbf{L}^2_E)$*,*

*(ii)* $v_n(t) \in A(t)u_n(t)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et presque pour tout* $t \in [0, T]$.

*Alors*

$$v(t) \in A(t)u(t), p.p.t \in [0, T].$$

**Démonstration du lemme.**

Soit $I_{\mathbf{L}^2_E}$ l'identité de $\mathbf{L}^2_E([0, T])$ et soit

$$\mathcal{A} : \mathbf{L}^2_E([0, T]) \rightrightarrows \mathbf{L}^2_E([0, T]),$$

l'opérateur défini par

$$v \in \mathcal{A}u \Leftrightarrow v(t) \in A(t)u(t), \; p.p.t \in [0, T].$$

Comme $A(t)$ est monotone, $\mathcal{A}$ l'est aussi.

En effet, soient $u_1, u_2 \in D(\mathcal{A}),\ v_1 \in \mathcal{A}u_1,\ v_2 \in \mathcal{A}u_2$ et $\lambda > 0$.

Nous avons $u_1, u_2 \in D(\mathcal{A})$, donc $u_1(t),\ u_2(t) \in D(A(t))$, pour tout $t \in [0, T]$ et

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_2\|_{\mathbf{L}^2_E} &= (\int_0^T \|u_1(t) - u_2(t)\|^2 dt)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (\int_0^T \|(u_1(t) - u_2(t)) + \lambda(v_1(t) - v_2(t))\|^2 dt)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|(u_1 - u_2) + \lambda(v_1 - v_2)\|_{\mathbf{L}^2_E}. \end{aligned}$$

Montrons maintenant que $\mathcal{A}$ est maximal monotone, c'est à dire, pour tout $\lambda > 0$,

$$R(I_{\mathbf{L}^2_E} + \lambda\mathcal{A}) = \mathbf{L}^2_E([0, T]).$$

Soit $\lambda > 0$ et soit $g \in \mathbf{L}^2_E([0, T])$.

Par l'hypothèse $(\mathbf{H})$, il existe $\overline{g} \in \mathbf{L}^2_E([0, T])$ telle que la fonction

$$\overline{h} : t \mapsto (I_E + \lambda A(t))^{-1}\overline{g}(t)$$

appartient à $\mathbf{L}^2_E([0, T])$.

Considérons la fonction

$$h : t \mapsto (I_E + \lambda A(t))^{-1} g(t),$$

nous avons

$$\|h\|_{\mathbf{L}^2_E} \leq \|h - \overline{h}\|_{\mathbf{L}^2_E} + \|\overline{h}\|_{\mathbf{L}^2_E}$$

et puisque $J_\lambda A = (I_E + \lambda A)^{-1}$ est non expansive, on obtient

$$\|h\|_{\mathbf{L}^2_E} \leq \|g - \overline{g}\|_{\mathbf{L}^2_E} + \|\overline{h}\|_{\mathbf{L}^2_E}$$

comme $g, \overline{g}$ et $\overline{h}$ sont des fonctions de $\mathbf{L}^2_E([0, T])$, on déduit que $h$ est Lebesgue mesurable et appartient à $\mathbf{L}^2_E([0,T])$, d'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} h(t) &= (I_E + \lambda A(t))^{-1} g(t) \;\; p.p, \\ &\Leftrightarrow \;\; g(t) \in (I_E + \lambda A(t))h(t), \;\; p.p, \\ &\Leftrightarrow \;\; g(t) \in h(t) + \lambda A(t)h(t), \;\; p.p, \\ &\Leftrightarrow \;\; g \in h + \lambda \mathcal{A} h, \\ &\Leftrightarrow \;\; g \in (I_{\mathbf{L}^2_E} + \lambda \mathcal{A})h, \end{aligned}$$

c'est à dire, $\forall\, g \in \mathbf{L}^2_E([0,T])$, $\exists\, h \in \mathbf{L}^2_E([0,T])$ telle que

$$g \in (I_{\mathbf{L}^2_E} + \lambda \mathcal{A})h,$$

d'où

$$R(I_{\mathbf{L}^2_E} + \lambda \mathcal{A}) = \mathbf{L}^2_E([0,T]).$$

Donc, $\mathcal{A}$ est un opérateur maximal monotone sur l'espace de Hilbert $\mathbf{L}^2_E([0,T])$. Par conséquent, d'après le Théorème 2.1, le graphe de $\mathcal{A}$ est fortement-faiblement séquentiellement fermé. Comme la suite $(u_n)$ converge fortement vers $u$ dans $\mathbf{L}^2_E([0,T])$ et la suite $(v_n)$ converge faiblement vers $v$, on conclut que $v \in \mathcal{A}u$ et donc $v(t) \in A(t)u(t)$, presque partout. ■

Pour la démonstration de notre théorème principal dans cette section, nous avons besoin du résultat suivant dans [17] et [18].

**Théorème 2.2** *Soient $E$ un espace de Banach séparable, $(T > 0)$ et $F : [0,T] \times E \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs fermées non vides. Soit $\varphi$ une primitive d'une fonction $g : [0,T] \to E$ telle que $g \in \mathbf{L}^1_E([0,T])$.*
*On pose*

$$\mathbf{X}_b = \{(t,x) \in [0,T] \times E : \; \|x - \varphi(t)\| < b\}, \; b \in ]0, +\infty],$$

*et on suppose que les propriétés suivantes sont vérifiées sur $\mathbf{X}_b$,*

$(\mathbf{H_1})$ *il existe une fonction positive $k \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,T])$ telle que*

$$\mathcal{H}(F(t,x), F(t,x')) \leq k(t)\|x - x'\|;$$

($\mathbf{H_2}$) *pour tout $w \in E$, la fonction $d_w : [0,T] \times E \to \mathbb{R}$ définie par $d_w(t,x) = d(w, F(t,x))$ est mesurable par rapport à $t$ ;*

($\mathbf{H_3}$) *il existe une fonction positive $\eta \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,T])$ et $x_0 \in E$ tels que*

$$\|\varphi(0) - x_0\| \leq \delta < b, \quad \delta > 0,$$

$$d(g(t), F(t, \varphi(t))) \leq \eta(t), \quad p.p.\ t \in [0,T]. \tag{2.1}$$

*Alors, l'inclusion différentielle*

$$(\mathcal{P}_F) \begin{cases} \dot{u}(t) \in F(t, u(t)), & p.p.\ t \in [0,T], \\ u(0) = x_0, \end{cases}$$

*admet au moins une solution $u \in \mathbf{W}^{1,1}_E([0,T])$ vérifiant les estimations suivantes*

$$\|u(t) - \varphi(t)\| \leq \xi(t),$$

$$\|\dot{u}(t) - g(t)\| \leq (1+\alpha)[k(t)\xi(t) + \eta(t)] \qquad p.p.$$

$$\xi(t) = \delta e^{m(t)} + (1+\alpha) \int_0^t e^{m(t)-m(s)} \eta(s) ds,$$

$$m(t) = (1+\alpha) \int_0^t k(s) ds, \quad \alpha > 0,$$

*pour $t \in I = \{t \in [0,T] :\ \xi(t) < b\}$.*

**Démonstration.**

**Etape 1**

Nous allons définir, par récurrence, deux suites $(f_n)$ et $(u_n)$ vérifiant les relations suivantes

$$u_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t f_{n+1}(s) ds, \quad t \in I, \tag{2.2}$$

$$f_{n+1}(t) \in F(t, u_n(t)), \quad t \in I, \tag{2.3}$$

$$\|f_{n+1}(t) - f_n(t)\| \leq (1+\alpha) d(f_n(t), F(t, u_n(t))), \quad t \in I. \tag{2.4}$$

L'appartenance, $t \in I$, sera justifiée au cours de la démonstration.

On pose $f_0 = g$, $u_0 = \varphi$, et on considère la multi-application $H_0 : [0,T] \rightrightarrows E$ définie par

$$H_0(t) = \{v \in F(t, u_0(t)) :\ \|v - f_0(t)\| \leq (1+\alpha) d(f_0(t), F(t, u_0(t)))\},$$

où $\alpha > 0$.

L'application $u_0$ est continue sur $[0, T]$, donc mesurable, alors $F(., u_0(.))$ est $\mathcal{L}([0, T])$-mesurable (voir Théorème 1.4) et la multi-application $H_0$ est aussi mesurable à valeurs fermées non vides (voir Théorème 1.5). D'après le théorème d'existence de sélection mesurable (voir Théorème 1.2), il existe une application mesurable $f_1 : [0, T] \to E$ telle que $f_1(t) \in H_0(t)$ pour tout $t \in [0, T]$, c'est à dire,

$$f_1(t) \in F(t, u_0(t)),$$

et

$$\begin{aligned} \|f_1(t) - f_0(t)\| &\leq (1 + \alpha)d(f_0(t), F(t, u_0(t))) \\ &\leq (1 + \alpha)\eta(t). \end{aligned}$$

La dernière inégalité est obtenue par la relation (2.1).

De plus, $f_1 \in \mathbf{L}^1_E([0, T])$ car

$$\begin{aligned} \|f_1(t)\| &\leq \|f_1(t) - f_0(t)\| + \|f_0(t)\| \\ &\leq (1 + \alpha)d(f_0(t), F(t, u_0(t))) + \|f_0(t)\| \\ &\leq (1 + \alpha)\eta(t) + \|f_0(t)\|, \end{aligned}$$

la dernière inégalité est obtenue par la relation (2.1).

Observons maintenant que

$$\begin{aligned} \|f_1\|_{\mathbf{L}^1_E} &= \int_0^T \|f_1(t)\|dt \\ &\leq \int_0^T [(1 + \alpha)\eta(t) + \|f_0(t)\|]dt \\ &\leq (1 + \alpha)\int_0^T \eta(t)dt + \int_0^T \|f_0(t)\|dt \\ &\leq (1 + \alpha)\|\eta\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}} + \|f_0\|_{\mathbf{L}^1_E}, \end{aligned}$$

comme $f_0 \in \mathbf{L}^1_E([0,T])$ et $\eta \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,T])$, on conclut que $f_1 \in \mathbf{L}^1_E([0,T])$.

Définissons alors l'application $u_1 : [0,T] \to E$ par

$$u_1(t) = x_0 + \int_0^t f_1(s)ds.$$

Par conséquent les relations (2.2), (2.3) et (2.4) sont vérifiées pour $n = 0$. De plus,

$$\|f_1(t) - f_0(t)\| \leq (1+\alpha)\eta(t). \tag{2.5}$$

On suppose maintenant que $f_i \in \mathbf{L}^1_E([0,T])$ et $u_i \in W^{1,1}_E([0,T])$ sont définies sur $[0,T]$ et vérifient les relations (2.2), (2.3) et (2.4) pour $i = 1, 2, .., n$, et montrons que ces relations sont vérifiées pour $i = n+1$.

Considérons la multi-application $H_n : [0,T] \rightrightarrows E$ définie par

$$H_n(t) = \{v \in F(t, u_n(t)) : \ \|v - f_n(t)\| \leq (1+\alpha)d(f_n(t), F(t, u_n(t)))\}.$$

Comme précédemment $F(., u_n(.))$ est mesurable, la multi-application $H_n$ est aussi mesurable à valeurs fermées non vides. D'après le théorème d'existence de sélection mesurable (Théorème 1.3), il existe une application mesurable $f_{n+1} : [0,T] \to E$ telle que $f_{n+1}(t) \in H_n(t)$, pour $t \in [0,T]$. Ceci donne pour $t \in [0,T]$

$$f_{n+1}(t) \in F(t, u_n(t))$$

$$\|f_{n+1}(t) - f_n(t)\| \leq (1+\alpha)d(f_n(t), F(t, u_n(t))).$$

Alors, $f_{n+1}$ est mesurable et $f_{n+1} \in \mathbf{L}^1_E([0,T])$, car

$$\begin{aligned}\|f_{n+1}(t)\| &\leq \|f_{n+1}(t) - f_n(t)\| + \|f_n(t)\| \\ &\leq (1+\alpha)d(f_n(t), F(t, u_n(t))) + \|f_n(t)\|,\end{aligned}$$

et comme $F$ vérifie la condition de Lipschitz et $f_n(t) \in F(t, u_{n-1}(t))$, alors

$$\begin{aligned}\|f_{n+1}(t)\| &\leq (1+\alpha)\mathcal{H}(F(t, u_{n-1}(t)), F(t, u_n(t))) + \|f_n(t)\| \\ &\leq (1+\alpha)k(t)\|u_n(t) - u_{n-1}(t)\| + \|f_n(t)\|,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|u_n(t) - u_{n-1}(t)\| &= \|x_0 + \int_0^t f_n(s)ds - (x_0 + \int_0^t f_{n-1}(s)ds)\| \\
&\leq \int_0^t \|f_n(s) - f_{n-1}(s)\|ds \\
&\leq \int_0^T \|f_n(s) - f_{n-1}(s)\|ds \\
&= \|f_n - f_{n-1}\|_{\mathbf{L}^1_E},
\end{aligned}$$

donc

$$\|f_{n+1}(t)\| \leq (1+\alpha)k(t)\|f_n - f_{n-1}\|_{\mathbf{L}^1_E} + \|f_n(t)\|,$$

observons maintenant que

$$\begin{aligned}
\|f_{n+1}\|_{\mathbf{L}^1_E} &= \int_0^T \|f_{n+1}(t)\|dt \\
&\leq (1+\alpha)\|f_n - f_{n-1}\|_{\mathbf{L}^1_E} \int_0^T k(t)dt + \int_0^T \|f_n(t)\|dt \\
&\leq (1+\alpha)\|k\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}}\|f_n - f_{n-1}\|_{\mathbf{L}^1_E} + \|f_n\|_{\mathbf{L}^1_E}.
\end{aligned}$$

Comme $f_n,\ f_{n-1} \in \mathbf{L}^1_E([0,T])$ et $k \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,T])$ donc $f_{n+1} \in \mathbf{L}^1_E([0,T])$,

de plus

$$\|f_{n+1}(t) - f_n(t)\| \leq (1+\alpha)k(t)\|u_n(t) - u_{n-1}(t)\|, \quad \forall\, n \geq 1, \tag{2.6}$$

on peut définir alors l'application $u_{n+1} : [0,T] \to E$ par

$$u_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t f_{n+1}(s)ds,$$

avec

$$f_{n+1}(t) \in F(t, u_n(t)),$$

et

$$\|f_{n+1}(t) - f_n(t)\| \leq (1+\alpha)d(f_n(t), F(t, u_n(t))).$$

On a ainsi déterminé deux suites d'applications $(f_n)$ et $(u_n)$ vérifiant (2.2), (2.3) et (2.4) pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarquons aussi que pour tout $t \in [0,T]$, nous avons

$$\begin{aligned} \|u_1(t) - u_0(t)\| &= \|x_0 + \int_0^t f_1(s)ds - (\varphi(0) + \int_0^t f_0(s)ds)\| \\ &\leq \|x_0 - \varphi(0)\| + \int_0^t \|f_1(s) - f_0(s)\|ds \\ &\leq \delta + (1+\alpha)\int_0^t \eta(s)ds, \end{aligned}$$

la dernière inégalité est obtenue de $(\mathbf{H_3})$ et (2.5), donc

$$\|u_1(t) - u_0(t)\| \leq \delta + (1+\alpha)\int_0^t \eta(s)ds. \tag{2.7}$$

En utilisant (2.5), (2.6) et (2.7) nous allons démontrer, par récurrence, les inégalités suivantes

$$\|f_{n+1}(t) - f_n(t)\| \leq (1+\alpha)k(t)\Big[\delta\frac{[m(t)]^{n-1}}{(n-1)!} + (1+\alpha)\int_0^t \frac{[m(t)-m(s)]^{n-1}}{(n-1)!}\eta(s)ds\Big], n \geq 1; \tag{2.8}$$

$$\|u_{n+1}(t) - u_n(t)\| \leq \delta\frac{[m(t)]^n}{n!} + (1+\alpha)\int_0^t \frac{[m(t)-m(s)]^n}{n!}\eta(s)ds, n \geq 0; \tag{2.9}$$

avec

$$m(t) = (1+\alpha)\int_0^t k(s)ds.$$

D'après (2.6) et (2.7), on a

$$\begin{aligned} \|f_2(t) - f_1(t)\| &\leq (1+\alpha)k(t)\|u_1(t) - u_0(t)\| \\ &\leq (1+\alpha)k(t)[\delta + (1+\alpha)\int_0^t \eta(s)ds], \end{aligned}$$

donc (2.8) est vérifiée pour $n = 1$. Il est immédiat que (2.9) est vérifié pour $n = 0$, d'après l'inégalité (2.7).

Supposons que (2.8) est vérifiée pour $n-1$, c'est à dire,

$$\|f_n(t) - f_{n-1}(t)\| \leq (1+\alpha)k(t)\Big[\delta\frac{[m(t)]^{n-2}}{(n-2)!} + (1+\alpha)\int_0^t \frac{[m(t)-m(s)]^{n-2}}{(n-2)!}\eta(s)ds\Big].$$

On a

$$\frac{d}{dt}\Big[\,\delta\frac{[m(t)]^{n-1}}{(n-1)!}+(1+\alpha)\int_0^t\frac{[m(t)-m(s)]^{n-1}}{(n-1)!}\eta(s)ds\Big]=$$

$$\delta(n-1)\frac{[m(t)]^{n-2}}{(n-1)!}\frac{d}{dt}[m(t)]+(1+\alpha)\int_0^t\frac{(n-1)[m(t)-m(s)]^{n-2}}{(n-1)!}\frac{d}{dt}[m(t)]\,\eta(s)ds$$

$$\begin{aligned}
&= (1+\alpha)k(t)\,\delta\,\frac{[m(t)]^{n-2}}{(n-2)!}+(1+\alpha)(1+\alpha)k(t)\int_0^t\frac{[m(t)-m(s)]^{n-2}}{(n-2)!}\eta(s)ds\\
&= (1+\alpha)k(t)\Big[\delta\,\frac{[m(t)]^{n-2}}{(n-2)!}+(1+\alpha)\int_0^t\frac{[m(t)-m(s)]^{n-2}}{(n-2)!}\eta(s)ds\Big],
\end{aligned}$$

c'est à dire,

$$\delta\,\frac{[m(t)]^{n-1}}{(n-1)!}+(1+\alpha)\int_0^t\frac{[m(t)-m(s)]^{n-1}}{(n-1)!}\eta(s)ds$$

est une primitive de

$$(1+\alpha)k(t)\Big[\delta\,\frac{[m(t)]^{n-2}}{(n-2)!}+(1+\alpha)\int_0^t\frac{[m(t)-m(s)]^{n-2}}{(n-2)!}\eta(s)ds\Big],$$

d'où

$$\begin{aligned}
\|u_n(t)-u_{n-1}(t)\| &= \|u_n(t)-x_0-(u_{n-1}(t)-x_0)\|\\
&= \|\int_0^t f_n(s)ds-\int_0^t f_{n-1}(s)ds\|\\
&\le \int_0^t\|f_n(s)-f_{n-1}(s)\|ds\\
&\le \delta\frac{[m(t)]^{n-1}}{(n-1)!}+(1+\alpha)\int_0^t\frac{[m(t)-m(s)]^{n-1}}{(n-1)!}\eta(s)ds,
\end{aligned}$$

d'après (2.6) on a

$$\begin{aligned}
\|f_{n+1}(t)-f_n(t)\| &\le (1+\alpha)k(t)\|u_n(t)-u_{n-1}(t)\|\\
&\le (1+\alpha)k(t)\Big[\delta\frac{[m(t)]^{n-1}}{(n-1)!}+(1+\alpha)\int_0^t\frac{[m(t)-m(s)]^{n-1}}{(n-1)!}\eta(s)ds\Big].
\end{aligned}$$

En ajoutant membre à membre les inégalités (2.9) on a, pour $n=0,1,2,...,i-1$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|u_i(t) - u_0(t)\| &= \|u_i(t) - u_{i-1}(t) + u_{i-1}(t) - u_{i-2}(t) + ... + u_1(t) - u_0(t)\| \\
&\leq \sum_{n=0}^{i-1} \|u_{n+1}(t) - u_n(t)\| \\
&\leq \sum_{n=0}^{i-1} \Big[\delta \frac{[m(t)]^n}{n!} + (1+\alpha)\int_0^t \frac{[m(t)-m(s)]^n}{n!}\eta(s)ds\Big] \\
&\leq \delta \sum_{n=0}^{i-1} \frac{[m(t)]^n}{n!} + (1+\alpha)\sum_{n=0}^{i-1}\int_0^t \frac{[m(t)-m(s)]^n}{n!}\eta(s)ds.
\end{aligned}$$

Sachant que $\displaystyle\sum_{n=0}^{i-1} \frac{[m(t)]^n}{n!}$ est majorée par $e^{m(t)}$, alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{i-1}\int_0^t \frac{[m(t)-m(s)]^n}{n!}\eta(s)ds &= \int_0^t \sum_{n=0}^{i-1} \frac{[m(t)-m(s)]^n}{n!}\eta(s)ds \\
&\leq \int_0^t e^{m(t)-m(s)}\eta(s)ds,
\end{aligned}$$

d'où

$$\|u_i(t) - \varphi(t)\| \leq \delta e^{m(t)} + (1+\alpha)\int_0^t e^{m(t)-m(s)}\eta(s)ds,$$

en posant

$$\xi(t) = \delta e^{m(t)} + (1+\alpha)\int_0^t e^{m(t)-m(s)}\eta(s)ds$$

on obtient

$$\|u_i(t) - \varphi(t)\| \leq \xi(t), \qquad \forall i \in \mathbb{N}. \tag{2.10}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\|f_i(t) - g(t)\| &= \|f_i(t) - f_{i-1}(t) + ... + f_1(t) - g(t)\| \\
&\leq \|f_1(t) - g(t)\| + \sum_{n=1}^{i-1} \|f_{n+1}(t) - f_n(t)\|.
\end{aligned}$$

On obtient, en vertu de (2.5) et (2.8), pour tout $i \geq 1$

$$\begin{aligned}
\|f_i(t) - g(t)\| &\leq (1+\alpha)\eta(t) + \sum_{n=1}^{i-1}(1+\alpha)k(t)\Big[\delta\frac{[m(t)]^{n-1}}{(n-1)!} + (1+\alpha)\int_0^t \frac{[m(t)-m(s)]^{n-1}}{(n-1)!}\eta(s)ds\Big] \\
&\leq (1+\alpha)[\eta(t) + k(t)\xi(t)],
\end{aligned}$$

donc

$$\|f_i(t) - g(t)\| \leq (1+\alpha)[\eta(t) + k(t)\xi(t)], \qquad \forall\, i \in \mathbb{N}. \tag{2.11}$$

Remarquons maintenant que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\delta\frac{[m(t)]^n}{n!} + (1+\alpha)\int_0^t \frac{[m(t)-m(s)]^n}{n!}\eta(s)ds\Big]$$

est convergente, alors la limite de son terme général tend vers 0 quand $n \to \infty$, c'est à dire,

$$\delta\frac{[m(t)]^n}{n!} + (1+\alpha)\int_0^t \frac{[m(t)-m(s)]^n}{n!}\eta(s)ds$$

tend vers 0 quand $n \to \infty$. Par conséquent, par la relation (2.8), la suite $(f_n(t))_n$ est une suite de Cauchy dans $E$, et donc elle converge vers un élément $f(t)$, et en vertu de (2.9) la suite $((u_n(t))_n$ converge sur $I$ vers $u(t)$, par les mêmes arguments.

**Etape 2**

On va montrer que $u$ est une solution de l'inclusion différentielle

$$\dot{u}(t) \in F(t, u(t)), \;\; u(0) = x_0.$$

Montrons que, sur $I$, $f(t) \in F(t, u(t))$ *p.p.* Pour cela, il suffit de montrer que, pour $t \in I$ fixé, le graphe de la multi-application $x \mapsto F(t, x)$ est relativement fermé dans $\mathbf{X}_b(t) \times E$, où

$$\mathbf{X}_b(t) = \{x \in E : \; (t, x) \in \mathbf{X}_b\},$$

c'est à dire,

$$\mathtt{gph}(F(t, .)) = \{(x, v) \in \mathbf{X}_b(t) \times E : \; v \in F(t, x)\},$$

est relativement fermé.

Soit $(x_n, v_n)$ une suite dans $\mathtt{gph}(F(t, .))$ convergeant vers $(x, v) \in \mathbf{X}_b(t) \times E$. Pour tout entier $n, v_n \in F(t, x_n)$, et donc d'après $(\mathbf{H_1})$

$$\begin{aligned} d(v, F(t,x)) &\leq \|v_n - v\| + d(v_n, F(t,x)) \\ &\leq \|v_n - v\| + \mathcal{H}(F(t,x_n), F(t,x)) \\ &\leq \|v_n - v\| + k(t)\|x_n - x\|, \end{aligned}$$

le second membre de la dernière inégalité tend vers zéro quand $n \to +\infty$ et comme $F(t,x)$ est fermé, $v \in F(t,x)$. Par conséquent $\mathtt{gph}(F(t,.))$ est relativement fermé dans $\mathbf{X}_b(t) \times E$. d'après la relation (2.10), on a sur $I$

$$\|u_n(t) - \varphi(t)\| \leq \xi(t) < b,$$

c'est à dire, $(t, u_n(t)) \in \mathbf{X}_b$, alors $u_n(t) \in \mathbf{X}_b(t)$, on conclut, par la relation (2.3), que $(u_n(t), f_{n+1}(t)) \in \mathtt{gph}(F(t,.))$, donc sur $I$, $f(t) \in F(t, u(t))$ *p.p.*

Si $i$ tend vers $+\infty$, par (2.10),(2.11) et (2.2), on aura sur $I$

$$\|u(t) - \varphi(t)\| \leq \xi(t)$$

$$\|f(t) - g(t)\| \leq (1+\alpha)[k(t)\xi(t) + \eta(t)], \qquad p.p.$$

D'autre part

$$u(t) = \lim_{n \to +\infty} u_n(t) = x_0 + \lim_{n \to +\infty} \int_0^t f_n(s)ds$$

comme

$$\|f_n(t) - g(t)\| \leq (1+\alpha)[k(t)\xi(t) + \eta(t)],$$

on obtient

$$\begin{aligned} \|f_n(t)\| &\leq \|f_n(t) - g(t)\| + \|g(t)\| \\ &\leq (1+\alpha)[k(t)\xi(t) + \eta(t)] + \|g(t)\| \\ &\leq (1+\alpha)[k(t)b + \eta(t)] + \|g(t)\|, \end{aligned}$$

la fonction réelle $t \mapsto k(t)\,b + \eta(t)$ appartient à $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}(I)$, et $g \in \mathbf{L}^1_E(I)$, par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$u(t) = x_0 + \int_0^t f(s)ds, \quad \forall\, t \in I.$$

Par conséquent

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = f(t) \in F(t, u(t)), \quad p.p. \\ u(0) = x_0, \end{cases}$$

c'est à dire, $u$ est une solution absolument continue de notre inclusion différentielle sur $I$, vérifiant les estimations

$$\|u(t) - \varphi(t)\| \leq \xi(t)$$

$$\|\dot{u}(t) - g(t)\| \leq (1+\alpha)[k(t)\xi(t) + \eta(t)], \quad p.p.$$

avec

$$\xi(t) = \delta e^{m(t)} + (1+\alpha)\int_0^t e^{m(t)-m(s)}\eta(s)ds,$$

et

$$m(t) = (1+\alpha)\int_0^t k(s)ds, \;\; \alpha > 0.$$

■

Nous sommes maintenant en mesure de donner notre résultat principal de ce chapitre.

**Théorème 2.3** *Soient $E$ un espace de dimension finie $(T > 0)$, $A(t) : E \rightrightarrows E$ $(t \in [0,T])$ un opérateur maximal monotone et $F : [0,T] \times E \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs fermées non vides, Lebesgue mesurable sur $[0,T]$. Soit $\varphi$ une primitive d'une fonction $g \in \mathbf{L}^1_E([0,T])$.*
*On pose*

$$\mathbf{X}_b = \{(t,x) \in [0,T] \times E : \; \|x - \varphi(t)\| < b\}, \; b \in ]0, +\infty].$$

*On suppose que les propriétés suivantes sont vérifiées sur $\mathbf{X}_b$,*

$(\mathbf{H_1})$ *il existe une fonction positive $k \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,T])$ telle que*

$$\mathcal{H}(F(t,x), F(t,x')) \leq k(t)\|x - x'\|;$$

$(\mathbf{H_2})$ *$F(t,x) \subset (1+\|x\|)\overline{\mathbf{B}}_E$;*

$(\mathbf{H_3})$ *il existe une fonction positive $\eta \in \mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}([0,T])$ et $x_0 \in E$ tels que*

$$\|\varphi(0) - x_0\| \leq \delta < b, \;\; \delta > 0,$$

$$|A(t)x|_0 + d(g(t), F(t, \varphi(t)) \leq \eta(t), \quad p.p.t \in [0,T].$$

*Supposons de plus que l'hypothèse suivante est vérifiée*

$(\mathbf{H_4})$ *pour chaque $x \in E$ et pour chaque $\lambda > 0$, l'application $t \mapsto (I_E + \lambda A(t))^{-1}x$ est Lebesgue mesurable et il existe une fonction $\overline{g} \in \mathbf{L}^2_E([0,T])$ telle que $t \mapsto (I_E+\lambda A(t))^{-1}\overline{g}(t)$ appartient à $\mathbf{L}^2_E([0,T])$.*
*Alors, l'inclusion différentielle*

$$(\mathcal{P}_A) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + F(t,u(t)), & p.p.\ t \in [0,T], \\ u(0) = x_0, \end{cases}$$

*admet au moins une solution $u \in \mathbf{W}^{1,1}_E([0,T])$.*

**Démonstration.**

**Etape 1**

Soit $(\lambda_n)$ une suite décroissante dans $]0,1[$ telle que $\lambda_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons la multi-application $M_n : [0,T] \times E \rightrightarrows E$ définie par

$$M_n(t,x) = A_{\lambda_n}(t)x + F(t,x).$$

Comme $g \in \mathbf{L}^1_E([0,T])$, en peut trouver une suite $(g_n)$ qui converge fortement dans $\mathbf{L}^1_E([0,T])$ vers $g$. Donc d'après le Théorème 1.8, et par extraction d'une sous suite, on peut supposer que $(g_n)$ converge vers $g$ presque partout sur $[0,T]$.

On définit l'application $\varphi_n$ par

$$\varphi_n(t) = \varphi(0) + \int_0^t g_n(s)ds, \quad \forall\, t \in [0,T],$$

nous avons

$$\begin{aligned}\|\varphi_n(t)-\varphi(t)\| &= \|\varphi(0)+\int_0^t g_n(s)ds-(\varphi(0)+\int_0^t g(s)ds)\|\\ &\leq \int_0^t \|g_n(s)-g(s)\|ds\\ &\leq \int_0^T \|g_n(s)-g(s)\|ds\\ &= \|g_n-g\|_{\mathbf{L}^1_E},\end{aligned}$$

cette dernière inégalité donne

$$\|\varphi_n-\varphi\|_{\mathbf{C}_E}\leq \|g_n-g\|_{\mathbf{L}^1_E},$$

et par la convergence forte de $(g_n)$ vers l'application $g$ dans $\mathbf{L}^1_E([0,T])$, on conclut que $(\varphi_n)$ converge vers $\varphi$ dans $(\mathbf{C}_E([0,T]),\|.\|_{\mathbf{C}_E})$ .

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, considérons l'ensemble

$$\mathbf{X}^n_b=\{(t,x)\in[0,T]\times E:\ \|x-\varphi_n(t)\|<b\},$$

remarquons que $\mathbf{X}^n_b\subset\mathbf{X}_b$.

En effet, soit $(t,x)\in\mathbf{X}^n_b$, nous avons

$$\|x-\varphi(t)\|\leq\|x-\varphi_n(t)\|+\|\varphi_n(t)-\varphi(t)\|,$$

par la convergence de $(\varphi_n)$ vers $\varphi$ dans $\mathbf{C}_E([0,T])$, nous avons

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,n_0\in\mathbb{N},\forall\,n\geq n_0:\|\varphi_n(t)-\varphi(t)\|<\varepsilon,$$

donc

$$\|x-\varphi(t)\|<b+\varepsilon,\ \forall\varepsilon>0,$$

d'où, $\|x-\varphi(t)\|\leq b$, i.e., $(t,x)\in\mathbf{X}_b$, donc on conclut que $\mathbf{X}^n_b\subset\mathbf{X}_b$, pour tout $n\geq n_0$.

• Montrons que $M_n$ est à valeurs fermées non vides.

Soit $(t, x) \in [0, T] \times E$ et soit $(z_i)$ une suite de $M_n(t, x)$ qui converge dans $E$ vers $z$, alors il existe une suite $(y_i)$ de $F(t, x)$ telle que $z_i = A_{\lambda_n}(t)x + y_i$, $y_i = z_i - A_{\lambda_n}(t)x \to z - A_{\lambda_n}(t)x = y \in F(t, x)$ quand $i \to +\infty$ car $F(t, x)$ est fermé, alors $z_i \to z = A_{\lambda_n}(t)x + y \in A_{\lambda_n}(t)x + F(t, x) = M_n(t, x)$, donc $M_n(t, x)$ est fermé pour tout $(t, x) \in [0, T] \times E$, et comme $F$ est à valeurs non vides, $M_n$ est aussi à valeurs non vides fermées.

• $M_n$ vérifie la condition de Lipschitz sur $\mathbf{X}_b^n$, à partir d'un certain rang $n_0$.

Soient $(t, x)$, $(t, x') \in \mathbf{X}_b^n$, nous avons

$$\mathcal{H}(M_n(t, x), M_n(t, x')) = \max(e(M_n(t, x), M_n(t, x')), e(M_n(t, x'), M_n(t, x)))$$

avec

$$\begin{aligned} e(M_n(t, x), M_n(t, x')) &= \sup_{a \in M_n(t,x)} d(a, M_n(t, x')) \\ &= \sup_{a \in M_n(t,x)} \inf_{a' \in M_n(t,x')} \|a - a'\|, \end{aligned}$$

nous avons

$$a \in M_n(t, x) \Rightarrow a \in A_{\lambda_n}(t)x + F(t, x) \Rightarrow a - A_{\lambda_n}(t)x \in F(t, x)$$

on pose

$$y = a - A_{\lambda_n}(t)x \in F(t, x) \Rightarrow a = A_{\lambda_n}(t)x + y,$$

et

$$a' \in M_n(t, x') \Rightarrow a' \in A_{\lambda_n}(t)x' + F(t, x') \Rightarrow a' - A_{\lambda_n}(t)x' \in F(t, x')$$

on pose

$$y' = a' - A_{\lambda_n}(t)x' \in F(t, x') \Rightarrow a' = A_{\lambda_n}(t)x' + y'.$$

Aussi

$$\begin{aligned} e(M_n(t, x'), M_n(t, x)) &= \sup_{b' \in M_n(t,x')} d(b', M_n(t, x)) \\ &= \sup_{b' \in M_n(t,x')} \inf_{b \in M_n(t,x)} \|b' - b\|, \end{aligned}$$

nous avons

$$b \in M_n(t,x) \Rightarrow b \in A_{\lambda_n}(t)x + F(t,x) \Rightarrow b - A_{\lambda_n}(t)x \in F(t,x)$$

on pose

$$z = b - A_{\lambda_n}(t)x \in F(t,x) \Rightarrow b = A_{\lambda_n}(t)x + z$$

et

$$b' \in M_n(t,x') \Rightarrow b' \in A_{\lambda_n}(t)x' + F(t,x') \Rightarrow b' - A_{\lambda_n}(t)x' \in F(t,x')$$

on pose

$$z' = b' - A_{\lambda_n}(t)x' \in F(t,x') \Rightarrow b' = A_{\lambda_n}(t)x' + z'.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} e(M_n(t,x), M_n(t,x')) &= \sup_{y \in F(t,x)} \inf_{y' \in F(t,x')} \|A_{\lambda_n}(t)x + y - A_{\lambda_n}(t)x' - y'\| \\ &\leq \|A_{\lambda_n}(t)x - A_{\lambda_n}(t)x'\| + \sup_{y \in F(t,x)} \inf_{y' \in F(t,x')} \|y - y'\| \\ &\leq \frac{2}{\lambda_n}\|x - x'\| + e(F(t,x), F(t,x')), \end{aligned}$$

la dernière inégalité est obtenue par $(i)$ de la Proposition 2.2.

Et comme précédemment

$$\begin{aligned} e(M_n(t,x'), M_n(t,x)) &= \sup_{z' \in F(t,x')} \inf_{z \in F(t,x)} \|A_{\lambda_n}(t)x' + z' - A_{\lambda_n}(t)x - z\| \\ &\leq \|A_{\lambda_n}(t)x - A_{\lambda_n}(t)x'\| + \sup_{z' \in F(t,x')} \inf_{z \in F(t,x)} \|z' - z\| \\ &\leq \frac{2}{\lambda_n}\|x - x'\| + e(F(t,x'), F(t,x)), \end{aligned}$$

par suite,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(M_n(t,x), M_n(t,x')) &\leq \frac{2}{\lambda_n}\|x - x'\| + \max(e(F(t,x), F(t,x')), e(F(t,x'), F(t,x))) \\ &= \frac{2}{\lambda_n}\|x - x'\| + \mathcal{H}(F(t,x), F(t,x')) \\ &\leq (\frac{2}{\lambda_n} + k(t))\|x - x'\|, \end{aligned}$$

la dernière inégalité est obtenue par l'hypothèse ($\mathbf{H}_1$).

On pose pour tout $n$, $k_n(t) = \dfrac{2}{\lambda_n} + k(t)$, comme $k \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,T])$, on aura $k_n \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,T])$.

• D'après l'hypothèse ($\mathbf{H}_4$), l'application $t \mapsto J_{\lambda_n}A(t)x$ est Lebesgue mesurable, donc l'application $t \mapsto A_{\lambda_n}(t)x = \dfrac{1}{\lambda_n}(I_E - J_{\lambda_n}A(t))x$, est Lebesgue mesurable et comme $F$ est Lebesgue mesurable sur $[0,T]$ on conclut que l'application $t \mapsto M_n(t,x) = A_{\lambda_n}(t)x + F(t,x)$ est Lebesgue mesurable. En utilisant la Proposition 1.1, on conclut que la fonction distance $d_w : [0,T] \times E \to \mathbb{R}$ définie par $d_w(t,x) = d(w, M_n(t,x))$ est mesurable par rapport à $t$.

• Nous avons

$$\|\varphi_n(0) - x_0\| \leq \|\varphi_n(0) - \varphi(0)\| + \|\varphi(0) - x_0\|,$$

par la convergence de $(\varphi_n)$ vers $\varphi$ dans $\mathbf{C}_E([0,T]$, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1 : \|\varphi_n(0) - \varphi(0)\| < \varepsilon,$$

et d'après l'hypothèse ($\mathbf{H}_3$), nous avons

$$\|\varphi_n(0) - x_0\| < \varepsilon + \delta, \forall \varepsilon > 0,$$

ceci donne $\|\varphi_n(0) - x_0\| \leq \delta$, à partir du rang $n_1$.

De plus, pour tout $t \in [0,T]$

$$d(g(t), M_n(t,\varphi(t))) = \inf_{z \in M_n(t,\varphi(t))} \|g(t) - z\|,$$

$$z \in M_n(t,\varphi(t)) \Rightarrow z \in A_{\lambda_n}(t)\varphi(t) + F(t,\varphi(t)) \Rightarrow z - A_{\lambda_n}(t)\varphi(t) \in F(t,\varphi(t))$$

on pose

$$x = z - A_{\lambda_n}(t)\varphi(t) \in F(t,\varphi(t)) \Rightarrow z = A_{\lambda_n}(t)\varphi(t) + x,$$

donc l'hypothèse ($\mathbf{H}_3$) et la propriété $(iii)$ de la Proposition 2.2 nous donnent

$$\begin{aligned} d(g(t), M_n(t,\varphi(t))) &= \inf_{x\in F(t,\varphi(t))} \|g(t) - A_{\lambda_n}(t)\varphi(t) - x\| \\ &\leq \|A_{\lambda_n}(t)\varphi(t)\| + \inf_{x\in F(t,\varphi(t))} \|g(t) - x\| \\ &\leq |A(t)\varphi(t)|_0 + d(g(t), F(t,\varphi(t))) \\ &\leq \eta(t), \end{aligned}$$

et

$$d(g_n(t), M_n(t,\varphi_n(t))) - d(g_n(t), M_n(t,\varphi(t))) \leq \mathcal{H}(M_n(t,\varphi_n(t)), M_n(t,\varphi(t))),$$

d'où

$$\begin{aligned} d(g_n(t), M_n(t,\varphi_n(t))) &\leq d(g_n(t), M_n(t,\varphi(t))) + \mathcal{H}(M_n(t,\varphi_n(t)), M_n(t,\varphi(t))) \\ &\leq \|g_n(t) - g(t)\| + d(g(t), M_n(t,\varphi(t))) + \mathcal{H}(M_n(t,\varphi_n(t)), M_n(t,\varphi(t))) \\ &\leq \|g_n(t) - g(t)\| + \eta(t) + k_n(t)\|\varphi_n(t) - \varphi(t)\|. \end{aligned}$$

Par la convergence presque partout de $(g_n)$ vers $g$ dans $\mathbf{L}^1_E([0,T])$ et de $(\varphi_n)$ vers $\varphi$ dans $\mathbf{C}_E([0,T])$, on a pour presque tout $t \in [0,T]$

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_2, \|g_n(t) - g(t)\| < \varepsilon \ \text{ et } \ \|\varphi_n(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon,$$

par suite

$$d(g_n(t), M_n(t,\varphi_n(t))) < \eta(t) + (1 + k_n(t))\,\varepsilon,\ \ \forall \varepsilon > 0,$$

donc

$$d(g_n(t), M_n(t,\varphi_n(t))) \leq \eta(t),\ \ p.p.t \in [0,T].$$

Par conséquent $M_n$ vérifie toutes les hypothèses de Théorème 2.2 sur $\mathbf{X}^n_b$, pour $n \geq N = \max(n_1, n_2)$.

**Etape 2**

En appliquant le Théorème 2.2, on obtient pour tout $n \geq N$, une solution $u_n \in \mathbf{W}_E^{1,1}([0,T])$ de l'inclusion différentielle

$$(\mathbf{I}) \begin{cases} -\dot{u}_n(t) \in A_{\lambda_n}(t)u_n(t) + F(t, u_n(t)), \; p.p. \; t \in I_n \\ u_n(0) = x_0, \end{cases}$$

et, pour chaque $n \geq N$, $u_n$ vérifie les estimations suivantes

$$u_n(t) = x_0 + \int_0^t \dot{u}_n(s)ds$$

$$\|u_n(t) - \varphi_n(t)\| \leq \xi_n(t),$$

$$\|\dot{u}_n(t) - g_n(t)\| \leq (1+\alpha)[k_n(t)\xi_n(t) + \eta(t)], \quad p.p.$$

$$\xi_n(t) = \delta e^{m_n(t)} + (1+\alpha)\int_0^t e^{m_n(t)-m_n(s)}\eta(s)ds,$$

$$m_n(t) = (1+\alpha)\int_0^t k_n(s)ds, \; \alpha > 0,$$

pour $t \in I_n = \{t \in [0,T] : \xi_n(t) < b\}$.

On pose $I = \{t \in [0,T] : \xi(t) = \sup_n \xi_n(t) < b\}$, remarquons que $I \subset I_n$.

Nous avons, par la relation ($\mathbf{I}$) et le Théorème d'existence de sélections mesurables, l'existence d'une application $h_n : [0,T] \to E$ telle que $h_n(t) \in F(t, u_n(t))$ et

$$(\mathbf{II}) \begin{cases} -\dot{u}_n(t) = A_{\lambda_n}(t)u_n(t) + h_n(t), \; p.p. \; t \in I_n \\ u_n(0) = x_0. \end{cases}$$

Nous avons $\|u_n(t) - \varphi_n(t)\| \leq \xi(t)$, pour tout $t \in I$, donc $\|u_n(t) - \varphi_n(t)\| < b$ i.e., $(t, u_n(t)) \in \mathbf{X}_b^n$, et comme $\mathbf{X}_b^n \subset \mathbf{X}_b$ ceci implique que $(t, u_n(t)) \in \mathbf{X}_b$, d'après les hypothèses $(\mathbf{H}_2), (\mathbf{H}_3)$ et la propriété $(iii)$ de la Proposition 2.2, nous avons

$$\begin{aligned} \|\dot{u}_n(t)\| &\leq \|A_{\lambda_n}(t)u_n(t)\| + \|h_n(t)\| \\ &\leq |A(t)u_n(t)|_0 + (1 + \|u_n(t)\|) \\ &\leq \eta(t) + (1 + \|u_n(t)\|), \end{aligned}$$

donc

$$\|\dot{u}_n(t)\| \leq \eta(t) + (1 + \|u_n(t)\|), \tag{2.12}$$

d'autre part

$$\begin{aligned} \|u_n(t)\| &\leq \|x_0\| + \int_0^t \|\dot{u}_n(s)\| ds \\ &\leq \|x_0\| + \int_0^t \eta(s) ds + \int_0^t (1 + \|u_n(s)\|) ds, \end{aligned}$$

et comme $\eta \in \mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}([0,T])$ et $[0,T]$ est de mesure finie on aura $\eta \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,T])$, par suite

$$1 + \|u_n(t)\| \leq (1 + \|x_0\| + \|\eta\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}}) + \int_0^t (1 + \|u_n(s)\|) ds$$

en appliquant le Lemme de Gronwall (Lemme 1.5), on obtient

$$1 + \|u_n(t)\| \leq (1 + \|x_0\| + \|\eta\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}}) e^{\int_0^t} ds,$$

donc

$$\|u_n(t)\| \leq (1 + \|x_0\| + \|\eta\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}}) e^T - 1,$$

en posant $\rho = (1 + \|\eta\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}} + \|x_0\|) e^T - 1$, on voit bien que $\rho > 0$, d'où

$$\|u_n(t)\| \leq \rho, \quad p.p.t \in I. \tag{2.13}$$

Par conséquent $(u_n(t))$ est relativement compacte puisque elle est bornée dans l'espace $E$ de dimension finie.

Soient maintenant $t_1$, $t_2 \in I$ avec $t_2 > t_1$, on a par les relations (2.12)et (2.13)

$$\begin{aligned} \|u_n(t_1) - u_n(t_2)\| &= \| \int_{t_1}^{t_2} \dot{u}_n(t) dt \| \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{u}_n(t)\| dt \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} \eta(t)\, dt + \int_{t_1}^{t_2} (1 + \|u_n(t)\|) dt \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} \eta(t) dt + (1 + \rho) \int_{t_1}^{t_2} dt, \end{aligned}$$

la fonction $\eta \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,T])$, on aura alors, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$, telle que

$$\forall\, t_1, t_2 \in [0,T],\ |t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \eta(t)dt < \frac{\varepsilon}{2},$$

de plus

$$\exists\, \delta' > 0 : |t_1 - t_2| < \delta' \Rightarrow (1+\rho) \int_{t_1}^{t_2} dt \leq (1+\rho)|t_1 - t_2| < (1+\rho)\, \delta',$$

pour $\delta' = \dfrac{\varepsilon}{2(1+\rho)}$

on aura

$$(1+\rho) \int_{t_1}^{t_2} dt < \frac{\varepsilon}{2},$$

donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta'' > 0,\ \delta'' = \min(\delta, \delta') : |t_1 - t_2| < \delta'' \Rightarrow \|u_n(t_2) - u_n(t_1)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ceci montre que $(u_n)_n$ est équicontinue.

En utilisant le Théorème d'Ascoli-Arzelà, on conclut que $(u_n)$ est relativement compacte, donc par extraction d'une sous suite, on peut supposer que $(u_n)$ converge uniformément vers $u \in \mathbf{C}_E([0,T])$ avec $\|u(t)\| \leq \rho$, $p.p.t \in I$, et $u(0) = x_0$.

Par les relations (2.12) et (2.13), nous avons

$$\|\dot{u}_n(t)\| \leq \eta(t) + (1+\rho),$$

on pose $\mu(t) = \eta(t) + (1+\rho)$, comme $\eta \in \mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}(I)$, on aura $\mu \in \mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}(I)$ donc $\|\dot{u}_n(t)\| \leq \mu(t)$ pour tout $t \in I$, c'est à dire, $\|\dot{u}_n\|_{\mathbf{L}^2_E} \leq \|\mu\|_{\mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}}$.

Posons $\psi_n(t) = \dfrac{\dot{u}_n(t)}{\|\mu\|_{\mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}}}$, ceci donne $\|\psi_n\|_{\mathbf{L}^2_E} = \dfrac{\|\dot{u}\|_{\mathbf{L}^2_E}}{\|\mu\|_{\mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}}} \leq 1$, donc $\psi_n \in \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{L}^2_E}$ qui est faiblement compacte dans $\mathbf{L}^2_E(I)$, car $\mathbf{L}^2_E(I)$ est réflexif, par extraction d'une sous suite on peut supposer que $(\psi_n)$ converge faiblement vers une application $\psi \in \mathbf{L}^2_E(I)$, c'est à dire,

$$\lim_{n\to\infty} \langle \psi_n, z \rangle = \langle \psi, z \rangle, \forall z \in \mathbf{L}^2_E(I).$$

Soit $y \in \mathbf{L}^2_E(I)$, alors

$$\langle \dot{u}_n, y \rangle = \langle \|\mu\|_{\mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}} \psi_n, y \rangle = \langle \psi_n, \|\mu\|_{\mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}} y \rangle,$$

comme $y \in \mathbf{L}^2_E(I)$, on aura $\|\mu\|_{\mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}} y \in \mathbf{L}^2_E(I)$ et par suite

$$\langle \dot{u}_n, y \rangle = \langle \psi_n, \|\mu\|_{\mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}} y \rangle \to \langle \psi, \|\mu\|_{\mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}} y \rangle = \langle \|\mu\|_{\mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}} \psi, y \rangle \text{ quand } n \to +\infty,$$

c'est à dire, $(\dot{u}_n)$ converge faiblement dans $\mathbf{L}^2_E(I)$ vers l'application $\omega = \|\mu\|_{\mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}} \psi$, par conséquent

$$\lim_{n\to\infty} \langle \dot{u}_n, y \rangle_{\mathbf{L}^2_E, \mathbf{L}^2_E} = \langle \omega, y \rangle_{\mathbf{L}^2_E, \mathbf{L}^2_E},$$

c'est à dire

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \langle \dot{u}_n(s), y(s) \rangle ds = \int_I \langle \omega(s), y(s) \rangle ds,$$

en particulier pour $y(.) = 1_{[0,t]}(.) e_j$ avec $(e_j)$ une base de l'espace $E$, d'où

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \langle \dot{u}_n(s), 1_{[0,t]}(s) e_j \rangle ds = \int_I \langle \omega(s), 1_{[0,t]}(s) e_j \rangle ds$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_0^t \langle \dot{u}_n(s), e_j \rangle ds = \int_0^t \langle \omega(s), e_j \rangle ds$$

$$\Leftrightarrow \langle \lim_{n\to\infty} \int_0^t \dot{u}_n(s) ds, e_j \rangle = \langle \int_0^t \omega(s) ds, e_j \rangle, \quad \forall j.$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \dot{u}_n(s) ds = \int_0^t \omega(s) ds,$$

comme $(u_n)$ est une suite d'applications absolument continues, on aura par l'égalité précédente

$$\lim_{n\to\infty} (u_n(t) - u_n(0)) = \lim_{n\to\infty} \int_0^t \dot{u}_n(s) ds = \int_0^t \omega(s) ds,$$

d'où

$$u(t) = u(0) + \int_0^t \omega(s) ds,$$

donc $u$ est absolument continue, d'où $\dot{u} = \omega = \|\mu\|_{\mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}} \psi$, $p.p$, on conclut alors que $(\dot{u}_n)$ converge $\sigma(\mathbf{L}^2_E, \mathbf{L}^2_E)$ vers $\dot{u}$.

Par l'hypothèse $(\mathbf{H}_2)$ et la relation (2.13), on a pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned} \|h_n(t)\| &\leq (1 + \|u_n(t)\|) \\ &\leq 1 + \rho, \end{aligned}$$

alors $(h_n(t))_n$ est bornée dans $E$ qui est de dimension finie, donc elle est relativement compact, par extraction d'une sous suite on peut supposer qu'elle converge vers un élément $h(t) \in E$.

Comme $I$ est de mesure finie, alors $(h_n)$ est bornée dans $\mathbf{L}^2_E(I)$, en appliquant le Théorème de la convergence dominée de Lebeugue dans $\mathbf{L}^2_E(I)$, on conclut que $\lim_{n \to +\infty} \|h_n - h\|_{\mathbf{L}^2_E} = 0$, c'est à dire $(h_n)_n$ converge fortement vers $h$ dans $\mathbf{L}^2_E(I)$, et par suite elle converge $\sigma(\mathbf{L}^2_E, \mathbf{L}^2_E)$ vers $h$ .

Montrons maintenant que $h(t) \in F(t, u(t))$, pour cela il suffit de montrer que, pour tout $t \in I$, le graphe de la multi-application $x \mapsto F(t, x)$ est relativement fermé dans $\mathbf{X}_b(t) \times E$ où

$$\mathbf{X}_b(t) = \{x \in E : \ (t, x) \in \mathbf{X}_b\},$$

c'est à dire

$$\mathtt{gph}(F(t, .)) = \{(x, v) \in \mathbf{X}_b(t) \times E : \ v \in F(t, x)\},$$

est relativement fermé.

Soient $t \in I$ et $(x_n, v_n)$ une suite dans $\mathtt{gph}(F(t, .))$ convergeant vers $(x, v) \in \mathbf{X}_b(t) \times E$, donc pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in F(t, x_n)$, et d'après l'hypothèse $(\mathbf{H}_1)$

$$\begin{aligned} d(v, F(t, x)) &\leq \|v_n - v\| + d(v_n, F(t, x)) \\ &\leq \|v_n - v\| + \mathcal{H}(F(t, x_n), F(t, x)) \\ &\leq \|v_n - v\| + k(t)\|x_n - x\|, \end{aligned}$$

le second membre de la dernière inégalité tend vers zéro quand $n \to +\infty$, et comme $F(t,x)$ est fermé alors $v \in F(t,x)$. Par conséquent $\mathtt{gph}(F(t,.))$ est relativement fermé dans $\mathbf{X}_b(t) \times E$.

On a $(t, u_n(t)) \in \mathbf{X}_b$, alors $u_n(t) \in \mathbf{X}_b(t)$ et comme $h_n(t) \in F(t, u_n(t))$, on conclut que $(u_n(t), h_n(t)) \in \mathtt{gph}(F(t,.))$, par conséquent $h(t) \in F(t, u(t))$.

Par la relation (**II**) et la propriété $(ii)$ de la Proposition 2.2, nous obtenons

$$-\dot{u}_n(t) - h_n(t) = A_{\lambda_n}(t)u_n(t) \in A(t)J_{\lambda_n}A(t)u_n(t),\ p.p. t \in I.$$

D'autre part, nous avons

$$\|J_{\lambda_n}A(t)u_n(t) - u(t)\| \leq \|J_{\lambda_n}A(t)u_n(t) - u_n(t)\| + \|u_n(t) - u(t)\|,\ \forall\, t \in I \tag{2.14}$$

En utilisant l'hypothèse ($\mathbf{H}_3$) et la relation $(iii)$ de la Proposition 2.2, on obtient

$$\begin{aligned} \|J_{\lambda_n}A(t)u_n(t) - u_n(t)\| &= \lambda_n\|A_{\lambda_n}(t)u_n(t)\| \\ &\leq \lambda_n|A(t)u_n(t)|_0 \\ &\leq \lambda_n\eta(t) \end{aligned}$$

nous avons $\lambda_n\eta(t) \to 0$ quand $n \to \infty$, et $\|u_n(t) - u(t)\| \to 0$ quand $n \to \infty$, alors par la relation (2.14), $\|J_{\lambda_n}A(t)u_n(t) - u(t)\|$ tend vers zéro quand $n \to \infty$. Par la relation (2.14) une deuxième fois, nous avons l'estimation

$$\begin{aligned} \|J_{\lambda_n}A(t)u_n(t) - u(t)\| &\leq \|J_{\lambda_n}A(t)u_n(t) - u_n(t)\| + \|u_n(t) - u(t)\| \\ &\leq \lambda_n\eta(t) + \|u_n(t)\| + \|u(t)\|. \end{aligned}$$

Or, $\lambda_n < 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et par la relation (2.13) on obtient

$$\|J_{\lambda_n}A(t)u_n(t) - u(t)\| \leq \eta(t) + 2\rho,$$

on pose $\eta_1(t) = \eta(t) + 2\rho$, et comme $\eta \in \mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}([0,T])$ on aura $\eta_1 \in \mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}([0,T])$, par suite, en utilisant le Théorème de Lebesgue on conclut que $(J_{\lambda_n}A(.)u_n(.))$ converge vers $u$ dans

$\mathbf{L}^2_E([0,T])$.

Considérons maintenant l'opérateur

$$\mathcal{A} : \mathbf{L}^2_E([0,T]) \rightrightarrows \mathbf{L}^2_E([0,T])$$

défini par

$$z \in \mathcal{A}y \Leftrightarrow z(t) \in A(t)y(t) \;\; p.p.\, t \in [0,T].$$

Nous avons vu dans le Lemme 2.1 que $\mathcal{A}$ est un opérateur maximal monotone sur $\mathbf{L}^2_E([0,T])$, et donc d'après le Théorème 2.1 son graphe est fortement-faiblement séquentiellement fermé.

Comme $(\dot{u}_n+h_n)$ converge faiblement dans $\mathbf{L}^2_E([0,T])$ vers $(\dot{u}+h)$ et $J_{\lambda_n}A(.)u_n(.)$ converge fortement vers $u(.)$ dans $\mathbf{L}^2_E([0,T])$, et comme

$$-\dot{u}_n(t) - h_n(t) \in A(t)J_{\lambda_n}A(t)u_n(t),$$

on conclut par Lemme 2.1 que

$$-\dot{u}(t) - h(t) \in A(t)u(t),$$

c'est à dire,

$$-\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + F(t,u(t)), \; p.p.\; t \in [0,T],$$

avec $u(0) = x_0$, donc $u$ est une solution de l'inclusion différentielle considérée. ■

On donne maintenant un corollaire du Théorème 2.3.

**Corollaire 2.1** *Soient $E$ un espace de dimension finie, $T>0$, $A(t) : E \rightrightarrows E$ $(t \in [0,T])$ un opérateur maximal monotone et $F : [0,T]\times E \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs fermées non vides, Lebesgue mesurable sur $[0,T]$.*
*On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées*

$(\mathbf{H_1})$ *il existe une fonction positive $k \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,T])$ telle que*

$$\mathcal{H}(F(t,x),F(t,x')) \leq k(t)\|x-x'\|, \;\; \forall\,(t,x),(t,x') \in [0,T]\times E;$$

$(\mathbf{H}_2)$ $F(t,x) \subset (1+\|x\|)\overline{\mathbf{B}}_E, \ \forall (t,x) \in [0,T] \times E$;

$(\mathbf{H}_3)$ *la fonction* $t \mapsto |A(t)x|_0 + d(0, F(t,0))$ *appartient à* $\mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}([0,T])$ *;*

$(\mathbf{H}_4)$ *pour chaque* $x \in E$ *et pour chaque* $\lambda > 0$*, l'application* $t \mapsto (I_E + \lambda A(t))^{-1}x$ *est Lebesgue mesurable et il existe* $\overline{g} \in \mathbf{L}^2_E([0,T])$ *telle que* $t \mapsto (I_E + \lambda A(t))^{-1}\overline{g}(t)$ *appartient à* $\mathbf{L}^2_E([0,T])$.

*Alors, l'inclusion différentielle*

$$(\mathcal{P}_A) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + F(t,u(t)), & p.p.\ t \in [0,T], \\ u(0) = x_0, \end{cases}$$

*admet au moins une solution* $u \in W^{1,1}_E([0,T])$.

**Démonstration.**

En prenant $g \equiv 0$ et $b = +\infty$, on voit bien dans le Théorème 2.3 que $\mathbf{X}_b = [0,T] \times E$. De plus, en posant $\|x_0\| = \delta$ et $\eta(t) = |A(t)x|_0 + d(0, F(t,0))$, la fonction $\eta \in \mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}([0,T])$ satisfait l'hypothèse $(\mathbf{H}_3)$ du Théorème 2.3. On conclut alors que le corollaire est une conséquence du Théorème 2.3.

# Chapitre 3

# Inclusion différentielle du premier ordre gouvernée par un opérateur maximal monotone et une perturbation pseudo-Lipschitzienne

On démontre dans ce chapitre un résultat d'existence pour l'inclusion différentielle du premier ordre gouvernée par un opérateur maximal monotone et une perturbation pseudo-Lipschitzienne dans un espace de dimension finie, de la forme

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + F(t, u(t)), \quad p.p.\, t \in [0, T], \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

où $F : [0, T] \times E \rightrightarrows E$ est une multi-application $\mathcal{L}([0, T]) \otimes \mathcal{B}(E)$-mesurable à valeurs fermées et globalement pseudo-Lipschitzienne, c'est à dire, elle vérifie la relation suivante

$$v \in F(t, x) \Rightarrow v \in F(t, x') + [(k(t) + \beta\|v\|)\|x - x'\|]\, \overline{\mathbf{B}}_E,$$

où $\beta \geq 0$ et $k \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0, T])$ avec $k(t) \geq 0$.

On commence par donner un lemme préliminaire qui nous sera utile dans la démonstration de notre Théorème, voir [19].

**Lemme 3.1** *On considère le système récursif des inégalités suivantes*

$$q_{n+1} - q_n \leq r_{n+1}, \;\; r_{n+1} \leq \xi_n r_n, \;\; \xi_n = \kappa + \beta q_n, \;\; q_n \geq 0, \;\; r_n \geq 0,$$

*où $\kappa$ et $\beta$ sont des paramètres positifs. On suppose que les valeurs initiales $q_1$, $r_1$ et $\xi_1$ sont données et vérifient*

$$\xi_1 \leq \lambda - \beta r_1 \frac{\lambda}{1-\lambda} \tag{3.1}$$

*pour un certain $\lambda \in ]0, 1[$.*
*Soit $(q_n, r_n, \xi_n)$ les solutions du système récursif. Alors*

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n \leq \frac{r_1}{1-\lambda}.$$

**Démonstration.**

Nous avons $\xi_n \leq \lambda$ pour tout $n$.

En effet, pour $n = 1$, $\xi_1 \leq \lambda$, car on a $r_1 \geq 0$ et $\beta$ un paramètre positif, donc

$$\beta r_1 \geq 0 \Rightarrow \frac{\beta r_1}{1-\lambda} \geq 0 \Rightarrow -\frac{\beta r_1}{1-\lambda} \leq 0 \Rightarrow 1 - \frac{\beta r_1}{1-\lambda} \leq 1$$

$$\Rightarrow \lambda(1 - \beta \frac{r_1}{1-\lambda}) \leq \lambda \Rightarrow \lambda - \beta r_1 \frac{\lambda}{1-\lambda} \leq \lambda,$$

d'après la relation (3.1), on a

$$\xi_1 \leq \lambda - \beta r_1 \frac{\lambda}{1-\lambda} \leq \lambda.$$

On suppose maintenant que $\xi_i \leq \lambda$ pour $i = 1, ..., n$, et on montre que $\xi_{n+1} \leq \lambda$.

On a, par le système récursif

$$\xi_{n+1} = \kappa + \beta q_{n+1} \leq \kappa + \beta(q_n + r_{n+1}) = (\kappa + \beta q_n) + \beta r_{n+1} = \xi_n + \beta r_{n+1}.$$

En appliquant cette estimation par récurrence, on obtient

$$\begin{aligned} \xi_2 &\leq \xi_1 + \beta r_2 \\ \xi_3 &\leq \xi_2 + \beta r_3 \leq (\xi_1 + \beta r_2) + \beta r_3 = \xi_1 + \beta(r_2 + r_3) \\ \xi_{n+1} &\leq \xi_1 + \beta(r_2 + ... + r_{n+1)} \end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned} r_2 &\leq \xi_1 r_1 \leq \lambda r_1 \\ r_3 &\leq \xi_2 r_2 \leq \lambda(\lambda r_1) = \lambda^2 r_1 \\ r_{n+1} &\leq \lambda^n r_1 \end{aligned}$$

donc

$$\xi_{n+1} \leq \xi_1 + \beta(r_2 + ... + r_{n+1}) \leq \xi_1 + \beta r_1(\lambda + ... + \lambda^n) \leq \xi_1 + \beta r_1 \frac{\lambda}{1-\lambda} \leq \lambda$$

d'où $\xi_n \leq \lambda$, $\forall n$. Par conséquent, $r_n \leq \lambda^{n-1} r_1$.

Donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n \leq r_1 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \leq \frac{r_1}{1-\lambda}.$$

■

Pour la démonstration du théorème principal de cette section, nous avons besoin du résultat suivant dans [19].

**Théorème 3.1** *Soient $E$ un espace de Banach séparable, $T > 0$ et $F : [0,T] \times E \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs fermées non vides . Soit $\varphi$ une primitive d'une application $g : [0,T] \to E$ telle que $g \in \mathbf{L}^1_E([0,T])$.*

*On pose*

$$\mathbf{X}_b = \{(t,x) \in [0,T] \times E : \ \|x - \varphi(t)\| < b\},\ b \in ]0,+\infty].$$

*On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées sur $\mathbf{X}_b$,*

$(\mathbf{H}_1)$ *$F$ est $\mathcal{L}([0,T]) \otimes \mathcal{B}(E)$-mesurable ;*

$(\mathbf{H}_2)$ *$F$ est globalement pseudo-Lipschitz, c'est à dire, il existe $\beta \geq 0$ et $k \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,T])$ avec $k(t) \geq 0$ telles que*

$$v \in F(t,x) \Rightarrow v \in F(t,x') + [(k(t) + \beta\|v\|)\|x - x'\|]\,\overline{\mathbf{B}}_E;$$

$(\mathbf{H}_3)$ *la fonction $t \mapsto d(g(t), F(t,\varphi(t))$ appartient à $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,T])$.*

*On pose*

$$r = (1+\alpha)\int_0^T d(g(s), F(s,\varphi(s))ds,$$

$$q_1 = \|g\|_{\mathbf{L}^1_E},$$

$$\kappa = (1+\alpha)\|k\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}},$$

$$\beta' = (1+\alpha)\beta,$$

$$\xi_1 = \kappa + \beta' q_1,$$

*où $\alpha$ est un paramètre strictement positif.*
*On suppose que $r$, $q_1$ et $\kappa$ vérifient*

$$\xi_1 \leq \lambda - \beta' r \frac{\lambda}{1-\lambda} \tag{3.2}$$

*et*

$$r < (1-\lambda)b, \tag{3.3}$$

*pour un certain $\lambda \in ]0,1[$.*
*Alors, l'inclusion différentielle*

$$(\mathcal{P}_F)\begin{cases} \dot{u}(t) \in F(t,u(t)) \ p.p. t \in [0,T], \\ u(0) = \varphi(0), \end{cases}$$

*admet au moins une solution $u \in \mathbf{W}^{1,1}_E([0,T])$, avec*

$$\|\dot{u} - g\|_{\mathbf{L}^1_E} \leq \frac{r}{1-\lambda},$$

$$\|u\|_{\mathbf{C}_E} \leq \|\varphi(0)\| + \|g\|_{\mathbf{L}^1_E} + b.$$

**Démonstration.**

**Etape 1**

Nous allons définir, par récurrence, deux suites $(f_n)$ et $(u_n)$ vérifiant les relations suivantes

$$f_n \in \mathbf{L}^1_E([0,T]) \text{ et } f_n(t) \in F(t, u_{n-1}(t)), \text{ p.p. } t \in [0,T], \tag{3.4}$$

$$\|f_n(t) - f_{n-1}(t)\| \leq (1+\alpha) d(f_{n-1}(t), F(t, u_{n-1}(t))), \ \forall\, t \in [0,T], \tag{3.5}$$

$$\mathtt{gph}(u_n(.)) = \{(t,x) \in [0,T] \times E : x = u_n(t)\} \subset \mathbf{X}_b. \tag{3.6}$$

Posons $f_0 = g$ et $u_0 = \varphi$, et considérons la multi-application $H_0 : [0,T] \rightrightarrows E$ définie par

$$H_0(t) = \{v \in F(t, u_0(t)) : \|v - f_0(t)\| \leq (1+\alpha) d(f_0(t), F(t, u_0(t)))\}.$$

L'application $u_0$ est continue sur $[0,T]$, donc mesurable, alors $F(.,u_0(.))$ est $\mathcal{L}([0,T])$-mesurable (voir Théorème 1.4), et la multi-application $H_0$ est aussi mesurable à valeurs fermées non vides (voir Théorème 1.5). D'après le théorème d'existence de sélections mesurables (Théorème 1.2), il existe une application mesurable $f_1 : [0,T] \to E$ telle que $f_1(t) \in H_0(t)$ pour tout $t \in [0,T]$. Ceci donne pour tout $t \in [0,T]$

$$f_1(t) \in F(t, u_0(t)),$$

et

$$\|f_1(t) - f_0(t)\| \leq (1+\alpha) d(f_0(t), F(t, u_0(t))).$$

De plus, on a $f_1 \in \mathbf{L}^1_E([0,T])$ car, pour tout $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} \|f_1(t)\| &\leq \|f_1(t) - f_0(t)\| + \|f_0(t)\| \\ &\leq (1+\alpha) d(f_0(t), F(t, u_0(t))) + \|f_0(t)\|, \end{aligned}$$

où $f_0 \in \mathbf{L}^1_E([0,T])$, et d'après $(\mathbf{H_3})$, $t \mapsto d(f_0(t), F(t, u_0(t))$ appartient à $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,T])$.

Observons que

$$\begin{aligned} \|f_1\|_{\mathbf{L}^1_E} &= \int_0^T \|f_1(t)\| dt \leq (1+\alpha) \int_0^T d(f_0(t), F(t, u_0(t))) dt + \int_0^T \|f_0(t)\| dt \\ &= (1+\alpha) \|d(f_0(.), F(., u_0(.)))\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}} + \|f_0\|_{\mathbf{L}^1_E}, \end{aligned}$$

ceci montre que $f_1 \in \mathbf{L}^1_E([0,T])$.

On définit alors l'application $u_1 : [0,T] \to E$ par

$$u_1(t) = \varphi(0) + \int_0^t f_1(s) ds.$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}
\|u_1(t) - u_0(t)\| &= \|\varphi(0) + \int_0^t f_1(s)ds - (\varphi(0) + \int_0^t f_0(s)ds)\| \\
&\leq \int_0^t \|f_1(s) - f_0(s)\|ds \\
&\leq \int_0^T \|f_1(s) - f_0(s)\|ds \\
&\leq (1+\alpha)\int_0^T d(f_0(s), F(s, u_0(s)))ds \\
&= r < (1-\lambda)\, b < b.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que $\mathtt{gph}(u_1(.)) \subset \mathbf{X}_b$.

On conclut que les relations (3.4), (3.5) et (3.6) sont vérifiées pour $n = 1$.

On pose

$$r_1 = \int_0^T \|f_1(s) - f_0(s)\|ds = \|f_1 - f_0\|_{\mathbf{L}^1_E}.$$

Remarquons que $r_1 \leq r$, d'où

$$\begin{aligned}
r \geq r_1 \quad &\Rightarrow \quad -\beta' r \frac{\lambda}{1-\lambda} \leq -\beta' r_1 \frac{\lambda}{1-\lambda} \\
&\Rightarrow \quad \lambda - \beta' r \frac{\lambda}{1-\lambda} \leq \lambda - \beta' r_1 \frac{\lambda}{1-\lambda}
\end{aligned}$$

par la relation (3.2), on obtient

$$\xi_1 \leq \lambda - \beta' r_1 \frac{\lambda}{1-\lambda}.$$

On suppose maintenant que $f_i \in \mathbf{L}^1_E([0,T])$ et $u_i$ des applications absolument continues définies sur $[0,T]$ et vérifient les relations (3.4), (3.5) et (3.6) pour $i = 0, 1, ..., n$, et montrons ces relations pour $i = n+1$.

Considérons la multi-application $H_n : [0,T] \rightrightarrows E$ définie par

$$H_n(t) = \{v \in F(t, u_n(t)) : \|v - f_n(t)\| \leq (1+\alpha) d(f_n(t), F(t, u_n(t)))\}.$$

Comme précédemment $F(., u_n(.))$ est mesurable, la multi-application $H_n$ est aussi mesurable à valeurs fermées non vides. D'après le Théorème d'existence de sélections mesurables (Théorème 1.2), il existe une application mesurable $f_{n+1} : [0, T] \to E$ telle que $f_{n+1}(t) \in H_n(t)$ pour tout $t \in [0, T]$. Ceci donne pour tout $t \in [0, T]$,

$$f_{n+1}(t) \in F(t, u_n(t)),$$

et

$$\|f_{n+1}(t) - f_n(t)\| \leq (1 + \alpha) d(f_n(t), F(t, u_n(t))).$$

Posons

$$r_{n+1} = \|f_{n+1} - f_n\|_{\mathbf{L}^1_E},$$

$$q_n = \|f_n\|_{\mathbf{L}^1_E},$$

$$\xi_n = \kappa + \beta' q_n.$$

Par l'hypothèse $(\mathbf{H}_2)$, nous avons, pour tout $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \|f_{n+1}(t) - f_n(t)\| &\leq (1 + \alpha) d(f_n(t), F(t, u_n(t))) \\ &\leq (1 + \alpha)(k(t) + \beta \|f_n(t)\|) \|u_n(t) - u_{n-1}(t)\|. \end{aligned}$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} \|u_n(t) - u_{n-1}(t)\| &= \|\varphi(0) + \int_0^t f_n(s) ds - \Big(\varphi(0) + \int_0^t f_{n-1}(s) ds\Big)\| \\ &\leq \int_0^t \|f_n(s) - f_{n-1}(s)\| ds \\ &\leq \int_0^T \|f_n(s) - f_{n-1}(s)\| ds \\ &\leq \|f_n - f_{n-1}\|_{\mathbf{L}^1_E}, \end{aligned}$$

donc

$$\|f_{n+1}(t) - f_n(t)\| \leq (1 + \alpha)(k(t) + \beta \|f_n(t)\|) \|f_n - f_{n-1}\|_{\mathbf{L}^1_E}.$$

Remarquons que $f_{n+1} \in \mathbf{L}^1_E([0,T])$, puisque

$$\begin{aligned}\|f_{n+1}(t)\| &\leq \|f_{n+1}(t) - f_n(t)\| + \|f_n(t)\| \\ &\leq (1+\alpha)(k(t) + \beta\|f_n(t)\|)\|f_n - f_{n-1}\|_{\mathbf{L}^1_E} + \|f_n(t)\|,\end{aligned}$$

et comme $k \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,T])$ et $f_n, f_{n-1} \in \mathbf{L}^1_E([0,T])$ on aura $f_{n+1} \in \mathbf{L}^1_E([0,T])$.

De plus

$$\int_0^T \|f_{n+1}(t) - f_n(t)\|dt \leq \Big((1+\alpha)\int_0^T k(t)dt + (1+\alpha)\beta\int_0^T \|f_n(t)\|dt\Big)\|f_n - f_{n-1}\|_{\mathbf{L}^1_E},$$

et donc

$$\|f_{n+1} - f_n\|_{\mathbf{L}^1_E} \leq ((1+\alpha)\|k\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}} + \beta'\|f_n\|_{\mathbf{L}^1_E})\|f_n - f_{n-1}\|_{\mathbf{L}^1_E},$$

c'est à dire

$$r_{n+1} \leq \xi_n r_n. \tag{3.7}$$

Remarquons aussi que

$$q_{n+1} - q_n = \|f_{n+1}\|_{\mathbf{L}^1_E} - \|f_n\|_{\mathbf{L}^1_E} \leq \|f_{n+1} - f_n\|_{\mathbf{L}^1_E} = r_{n+1}. \tag{3.8}$$

En appliquant le Lemme 3.1, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n \leq \frac{r_1}{1-\lambda} \leq \frac{r}{1-\lambda} < b. \tag{3.9}$$

On définit alors l'application $u_{n+1} : [0,T] \to E$ par

$$u_{n+1}(t) = \varphi(0) + \int_0^t f_{n+1}(s)ds,$$

et comme

$$\begin{aligned}\|u_{n+1}(t) - u_n(t)\| &= \|\varphi(0) + \int_0^t f_{n+1}(s)ds - \varphi(0) - \int_0^t f_n(s)ds\| \\ &\leq \int_0^t \|f_{n+1}(s) - f_n(s)\|ds \\ &\leq \int_0^T \|f_{n+1}(s) - f_n(s)\|ds \\ &= \|f_{n+1} - f_n\|_{\mathbf{L}^1_E},\end{aligned}$$

on obtient

$$\|u_{n+1} - u_n\|_{\mathbf{C}_E} \leq \|f_{n+1} - f_n\|_{\mathbf{L}^1_E} = r_{n+1}. \tag{3.10}$$

En ajoutant membre à membre les inégalités (3.10), on obtient

$$\begin{aligned} \|u_{n+1}(t) - u_0(t)\| &\leq \|u_{n+1}(t) - u_n(t)\| + \|u_n(t) - u_0(t)\| \\ &\leq r_{n+1} + \|u_n(t) - u_0(t)\| \\ &\leq r_{n+1} + \|u_n(t) - u_{n-1}(t)\| + \|u_{n-1}(t) - u_0(t)\| \\ &\leq r_{n+1} + r_n + \|u_{n-1}(t) - u_0(t)\|, \end{aligned}$$

et en utilisant cette dernière relation successivement, on obtient

$$\|u_{n+1}(t) - u_0(t)\| \leq \sum_{p=1}^{n+1} r_p \leq \frac{r_1}{1-\lambda} < b, \tag{3.11}$$

ceci montre que $\mathtt{gph}(u_{n+1}(.)) \subset \mathbf{X}_b$.

Par conséquent, les suites $(f_n)$ et $(u_n)$ sont bien définies et vérifient les relations (3.4), (3.5) et (3.6).

**Etape 2**

Par la relation (3.11), la suite des sommes partielles de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n = \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n - f_{n-1}\|_{\mathbf{L}^1_E}$$

est bornée donc elle est convergente, alors la limite du terme général tend vers zéro quand $n \to \infty$, c'est à dire, $\|f_n - f_{n-1}\| \to 0$ quand $n \to \infty$, donc $(f_n)$ est une suite de Cauchy dans $\mathbf{L}^1_E([0,T])$ et par suit elle converge vers une certaine application $f \in \mathbf{L}^1_E([0,T])$.

D'autre part, la relation (3.10) montre que $\|u_{n+1} - u_n\| \to 0$ quand $n \to \infty$, donc $(u_n)$ est une suite de Cauchy dans $\mathbf{C}_E([0,T])$, par conséquent, elle converge vers une application $w \in \mathbf{C}_E([0,T])$.

En définissant l'application $u : [0,T] \to E$ par

$$u(t) = \varphi(0) + \int_0^t f(s)ds,$$

nous avons

$$\begin{aligned}
\|u_n(t) - u(t)\| &= \|\varphi(0) + \int_0^t f_n(s)ds - (\varphi(0) + \int_0^t f(s)ds)\| \\
&\leq \int_0^t \|f_n(s) - f(s)\|ds \\
&\leq \int_0^T \|f_n(s) - f(s)\|ds \\
&= \|f_n - f\|_{\mathbf{L}^1_E}.
\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité donne

$$\|u_n - u\|_{\mathbf{C}_E} \leq \|f_n - f\|_{\mathbf{L}^1_E}.$$

Par la convergence forte dans $\mathbf{L}^1_E([0,T])$ de $(f_n)$ vers l'application $f$, on conclut que $(u_n)$ converge vers $u$ dans $(\mathbf{C}_E([0,T]), \|.\|_{\mathbf{C_E}})$, c'est à dire, $u = w$ avec $u(0) = \varphi(0)$.

Montrons maintenant que $u$ est solution du problème $(\mathcal{P}_F)$.

Pour cela, montrons que pour tout $t \in [0,T]$, le graphe de la multi-application $x \mapsto F(t,x)$ est relativement fermé dans $\mathbf{X}_b(t) \times E$ où

$$\mathbf{X}_b(t) = \{x \in E : \ (t,x) \in \mathbf{X}_b\}.$$

Soient $t \in [0,T]$ et $(x_n, v_n)$ une suite dans $\mathtt{gph}(F(t,.))$ convergeant vers $(x,v) \in \mathbf{X}_b(t) \times E$. Pour tout entier $n$, $v_n \in F(t, x_n)$. Par l'hypothèse $(\mathbf{H}_2)$, on a

$$\begin{aligned}
d(v, F(t,x)) &\leq \|v_n - v\| + d(v_n, F(t,x)) \\
&\leq \|v_n - v\| + (k(t) + \beta\|v_n\|)\|x_n - x\|.
\end{aligned}$$

Par la convergence de $(x_n, v_n)$ vers $(x,v)$ dans $\mathbf{X}_b(t) \times E$, le second membre de la dernière inégalité tend vers zéro quand $n \to \infty$.

Comme $F(t,x)$ est fermé, $v \in F(t,x)$. Par conséquent $\mathtt{gph}(F(t,.))$ est relativement fermé dans $\mathbf{X}_b(t) \times E$.

Sachant que la suite $(f_n)$ converge fortement vers $f \in \mathbf{L}^1_E([0,T])$, par extraction d'une sous suite, on peut supposer que $(f_n)$ converge vers $f$ presque partout sur $[0,T]$.

Comme $f_{n+1}(t) \in F(t, u_n(t))$, par la relation (3.6), $u_n(t) \in \mathbf{X}_b(t)$, i.e., $(u_n(t), f_{n+1}(t)) \in \mathtt{gph}(F(t,.))$ et comme $(u_n)$ converge vers $u$ dans $\mathbf{C}_E([0,T])$, on conclut que $f(t) \in F(t,u(t))$, p.p, ceci est équivalent à $\dot{u}(t) \in F(t,u(t))$, p.p.,(puisque $f(t) = \dot{u}(t)\, p.p.$), avec $u(0) = \varphi(0)$.

De plus, la relation (3.9) donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\|f-g\|_{\mathbf{L}^1_E} &\leq \|f_n - f\|_{\mathbf{L}^1_E} + \|f_n - g\|_{\mathbf{L}^1_E}\\ &\leq \|f_n - f\|_{\mathbf{L}^1_E} + \frac{r_1}{1-\lambda},\end{aligned}$$

par la convergence forte de $(f_n)$ vers $f$ dans $\mathbf{L}^1_E$, on obtient

$$\|f-g\|_{\mathbf{L}^1_E} \leq \frac{r_1}{1-\lambda} \leq \frac{r}{1-\lambda} < b,$$

c'est à dire,

$$\|\dot{u}-g\|_{\mathbf{L}^1_E} \leq \frac{r}{1-\lambda} < b,$$

et pour tout $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}\|u(t)-\varphi(t)\| &= \|\varphi(0) + \int_0^t \dot{u}(s)ds - \Big(\varphi(0) + \int_0^t g(s)ds\Big)\|\\ &\leq \int_0^t \|\dot{u}(s) - g(s)\| ds\\ &\leq \|\dot{u}-g\|_{\mathbf{L}^1_E}\\ &< b.\end{aligned}$$

On a

$$\|u(t)\| - \|\varphi(t)\| \leq \|u(t)-\varphi(t)\| \leq \|\dot{u}-g\|_{\mathbf{L}^1_E} < b,$$

ce qui donne

$$\|u(t)\| \leq \|\varphi(t)\| + b$$

et comme

$$\|\varphi(t)\| \leq \|\varphi(0)\| + \|g\|_{\mathbf{L}^1_E},\, \forall\, t \in [0, T],$$

on obtient

$$\|u\|_{\mathbf{C}_E} \leq \|\varphi(0)\| + \|g\|_{\mathbf{L}^1_E} + b.$$

Ceci achève la démonstration du théorème. ■

Maintenant nous sommes en mesure de donner le résultat principal de ce chapitre.

**Théorème 3.2** *Soient $E$ un espace de dimension finie, $T > 0$, $A(t) : E \rightrightarrows E$ $(t \in [0, T])$ un opérateur maximal monotone et soit $F : [0, T] \times E \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs fermées non vides. Soit $\varphi$ la primitive d'une application $g \in \mathbf{L}^1_E([0, T])$.*
*On pose*

$$\mathbf{X}_b = \{(t, x) \in [0, T] \times E :\ \|x - \varphi(t)\| < b\},\, b \in ]0, +\infty].$$

*On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées sur $\mathbf{X}_b$,*
$(\mathbf{H_1})$ *$F$ est $\mathcal{L}([0, T]) \otimes \mathcal{B}(E)$-mesurable ;*
$(\mathbf{H_2})$ *$F$ est globalement pseudo-Lipschitzienne, c'est à dire, il existe $\beta \geq 0$ et une fonction positive $k \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0, T])$ telles que*

$$v \in F(t, x) \Rightarrow v \in F(t, x') + [(k(t) + \beta\|v\|)\|x - x'\|]\, \overline{\mathbf{B}}_E;$$

$(\mathbf{H_3})$ *$F(t, x) \subset (1 + \|x\|)\overline{\mathbf{B}}_E$ ;*
$(\mathbf{H_4})$ *la fonction $t \mapsto d(g(t), F(t, \varphi(t))$ appartient à $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0, T])$.*
*Supposons de plus que les hypothèses suivantes sont vérifiées*
$(\mathbf{A_1})$ *pour chaque $x \in E$ et pour chaque $\lambda > 0$, l'application $t \mapsto (I_E + \lambda A(t))^{-1}x$ est Lebesgue mesurable et il existe $\overline{g} \in \mathbf{L}^2_E([0, T])$ telle que $t \mapsto (I_E + \lambda A(t))^{-1}\overline{g}(t)$ appartient à $\mathbf{L}^2_E([0, T])$ ;*
$(\mathbf{A_2})$ *il existe une fonction positive $\eta \in \mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}([0, T])$ telle que*

$$|A(t)x|_0 \leq \eta(t);$$

$(\mathbf{A_3})$ *$\theta A(t)x \subset A(t)x$, $\ \forall\, \theta \in ]0, 1[$ et $\forall\, (t, x) \in [0, T] \times E$.*
*On pose*

$$r = (1 + \alpha)[\|\eta\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}} + \int_0^T d(g(s), F(s, \varphi(s)))ds],$$

$$q_1 = \|g\|_{\mathbf{L}^1_E},$$

$$\kappa = (1+\alpha)(\frac{T}{2} + \|k\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}} + \beta\|\eta\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}}),$$

$$\beta' = (1+\alpha)\beta,$$

$$\xi_1 = \kappa + \beta' q_1,$$

*où $\alpha$ est un paramètre positif.*

*On suppose que $r$, $q_1$ et $\kappa$ vérifient*

$$\xi_1 \leq \lambda - \beta' r \frac{\lambda}{1-\lambda}$$

*et*

$$r < (1-\lambda)b,$$

*pour un certain $\lambda \in ]0,1[$.*

*Alors, l'inclusion différentielle*

$$(\mathcal{P}_A) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + F(t,u(t)), \ p.p.t \in [0,T], \\ u(0) = \varphi(0), \end{cases}$$

*admet au moins une solution $u \in \mathbf{W}^{1,1}_E([0,T])$, avec*

$$\|\dot{u} - g\|_{\mathbf{L}^1_E} \leq \frac{r}{1-\lambda},$$

$$\|u\|_{\mathbf{C}_E} \leq \|\varphi(0)\| + \|g\|_{\mathbf{L}^1_E} + b.$$

**Démonstration.**

**Etape 1**

Soit $(\lambda_n)$ une suite décroissante dans $]0,1[$ telle que $\lambda_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons la multi-application $M_n : [0,T] \times E \rightrightarrows E$ définie par

$$M_n(t,x) = \sigma \frac{\lambda_n}{2} A_{\lambda_n}(t)x + F(t,x),$$

avec $\sigma \in ]0, \frac{1}{2}[$.

• Montrons que $M_n$ est à valeurs fermées non vides

Soit $(t,x) \in [0,T] \times E$ et soit $(z_i)$ une suite de $M_n(t,x)$ qui converge dans $E$ vers $z$, alors il existe une suite $(y_i)$ de $F(t,x)$ telle que $z_i = \sigma \frac{\lambda_n}{2} A_{\lambda_n}(t)x + y_i$, pour tout $i \in \mathbb{N}$, quand

$i \to +\infty$ $y_i = z_i - \sigma \frac{\lambda_n}{2} A_{\lambda_n}(t)x \to z - \sigma \frac{\lambda_n}{2} A_{\lambda_n}(t)x = y \in F(t,x)$ car $F$ est à valeurs fermées, et donc $z_i \to z = \sigma \frac{\lambda_n}{2} A_{\lambda_n}(t)x + y \in \sigma \frac{\lambda_n}{2} A_{\lambda_n}(t)x + F(t,x) = M_n(t,x)$, par suite $M_n(t,x)$ est fermé pour tout $(t,x) \in [0,T] \times E$.

D'autre part, comme $F$ est à valeurs non vides $M_n$ est aussi à valeurs non vides.

• D'après l'hypothèse $(\mathbf{A}_1)$ l'application $t \mapsto J_\lambda A(t)x$ est Lebesgue mesurable et donc l'application $t \mapsto A_{\lambda_n}(t)x = \frac{1}{\lambda_n}(I_E - J_{\lambda_n} A(t))x$ l'est aussi. D'autre part, par la propriété $(i)$ de la Proposition 2.2, l'application $x \mapsto A_{\lambda_n}(t)x$ est Lipschitzienne, et donc mesurable, on conclut alors que l'application $(t,x) \mapsto A_{\lambda_n}(t)x$ est mesurable. Par l'hypothèse $(\mathbf{H_1})$, $F$ est $\mathcal{L}([0,T]) \otimes \mathcal{B}(E)$-mesurable. On conclut alors que l'application $M_n$ est $\mathcal{L}([0,T]) \otimes \mathcal{B}(E)$-mesurable.

• Montrons maintenant que $M_n$ est globalement pseudo-Lipschitzienne sur $\mathbf{X}_b$.

Soient $(t,x)$, $(t,x') \in \mathbf{X}_b$ et $w \in M_n(t,x)$, nous avons

$$d(w, M_n(t,x')) = \inf_{w' \in M_n(t,x')} \|w - w'\|,$$

et nous avons

$$w \in M_n(t,x) \Rightarrow w \in \sigma \frac{\lambda_n}{2} A_{\lambda_n}(t)x + F(t,x) \Rightarrow w - \sigma \frac{\lambda_n}{2} A_{\lambda_n}(t)x \in F(t,x),$$

on pose

$$v = w - \sigma \frac{\lambda_n}{2} A_{\lambda_n}(t)x \in F(t,x) \Rightarrow w = v + \sigma \frac{\lambda_n}{2} A_{\lambda_n}(t)x,$$

et

$$w' \in M_n(t,x') \Rightarrow w' \in \sigma \frac{\lambda_n}{2} A_{\lambda_n}(t)x' + F(t,x') \Rightarrow w' - \sigma \frac{\lambda_n}{2} A_{\lambda_n}(t)x' \in F(t,x'),$$

on pose

$$v' = w' - \sigma \frac{\lambda_n}{2} A_{\lambda_n}(t)x' \in F(t,x') \Rightarrow w' = v' + \sigma \frac{\lambda_n}{2} A_{\lambda_n}(t)x',$$

donc d'après les hypothèses $(\mathbf{H_2})$, $(\mathbf{A_2})$, $(i)$ et $(iii)$ de la Proposition 2.2, nous avons

$$\begin{aligned}
d(w, M_n(t,x')) &= \inf_{v' \in F(t,x')} \|v + \sigma \frac{\lambda_n}{2} A_{\lambda_n}(t)x - v' - \sigma \frac{\lambda_n}{2} A_{\lambda_n}(t)x'\| \\
&\leq \sigma \frac{\lambda_n}{2} \|A_{\lambda_n}(t)x - A_{\lambda_n}(t)x'\| + d(v, F(t,x')) \\
&\leq \sigma\|x - x'\| + (k(t) + \beta\|v\|)\|x - x'\| \\
&\leq (\sigma + k(t) + \beta\sigma \frac{\lambda_n}{2} |A(t)x|_0 + \beta\|w\|)\|x - x'\| \\
&\leq (\frac{1}{2} + k(t) + \beta\eta(t) + \beta\|w\|)\|x - x'\|,
\end{aligned}$$

on pose

$$k_n(t) = \frac{1}{2} + k(t) + \beta\eta(t),$$

comme $k \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,T])$ et $\eta \in \mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}([0,T])$, on aura $k_n \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,T])$ et

$$d(w, M_n(t,x')) \leq (k_n(t) + \beta\|w\|)\|x - x'\|,$$

c'est à dire,

$$w \in M_n(t,x) \Rightarrow w \in M_n(t,x') + [(k_n(t) + \beta\|w\|)\|x - x'\|]\overline{\mathbf{B}}_E,$$

on conclut que $M_n$ est globalement pseudo-Lipschitzienne sur $\mathbf{X}_b$.

• De plus, pour tout $t \in [0,T]$, nous avons

$$d(g(t), M_n(t,\varphi(t))) = \inf_{z \in M_n(t,\varphi(t))} \|g(t) - z\|$$

$$z \in M_n(t,\varphi(t)) \Rightarrow z \in \sigma \frac{\lambda_n}{2} A_{\lambda_n}(t)\varphi(t) + F(t,\varphi(t)) \Rightarrow z - \sigma \frac{\lambda_n}{2} A_{\lambda_n}(t)\varphi(t) \in F(t,\varphi(t))$$

on pose

$$x = z - \sigma \frac{\lambda_n}{2} A_{\lambda_n}(t)\varphi(t) \in F(t,\varphi(t)) \Rightarrow z = \sigma \frac{\lambda_n}{2} A_{\lambda_n}(t)\varphi(t) + x,$$

donc l'hypothèse ($\mathbf{A_2}$) et la propriété $(iii)$ de la Proposition 2.2 nous donnent

$$\begin{aligned} d(g(t), M_n(t,\varphi(t))) &= \inf_{x\in F(t,\varphi(t))} \|g(t) - \sigma\,\frac{\lambda_n}{2}\,A_{\lambda_n}(t)\varphi(t) - x\| \\ &\leq \sigma\,\frac{\lambda_n}{2}\,|A(t)\varphi(t)|_0 + \inf_{x\in F(t,\varphi(t))}\|g(t)-x\| \\ &\leq \eta(t) + d(g(t), F(t,\varphi(t))), \end{aligned}$$

comme $\eta \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,T])$ et la fonction $t \mapsto (g(t), F(t,\varphi(t)))$ appartient à $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,T])$, on aura la fonction $t \mapsto d(g(t), M_n(t,\varphi(t)))$ appartient à $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,T])$.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$r_n = (1+\alpha)\int_0^T d(g(s), M_n(s,\varphi(s)))ds,$$

$$q_{n,1} = \|g\|_{\mathbf{L}^1_E},$$

$$\kappa_n = (1+\alpha)\|k_n\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}},$$

$$\xi_{n,1} = \kappa_n + \beta' q_{n1},$$

nous avons

$$\begin{aligned} r_n &= (1+\alpha)\int_0^T d(g(s), M_n(s,\varphi(s)))ds \\ &\leq (1+\alpha)\int_0^T [\eta(s) + d(g(s), F(s,\varphi(s)))]ds \\ &= (1+\alpha)[\|\eta\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}} + \int_0^T d(g(s), F(s,\varphi(s)))ds] \\ &= r < (1-\lambda)b, \end{aligned}$$

et

$$\xi_{n,1} = \xi_1 \leq \lambda - \beta' r\frac{\lambda}{1-\lambda} \leq \lambda - \beta' r_n\frac{\lambda}{1-\lambda}.$$

Par conséquent $M_n$ vérifie sur $\mathbf{X}_b$ toutes les hypothèses du Théorème 3.1 .

**Etape 2**

En appliquant le Théorème 3.1, on obtient l'existence d'une solution $u_n \in \mathbf{W}_E^{1,1}([0,T])$ de l'inclusion différentielle

$$(\mathbf{I}) \begin{cases} -\dot{u}_n(t) \in \sigma \dfrac{\lambda_n}{2} A_{\lambda_n}(t)u_n(t) + F(t, u_n(t)), \;\; p.p.\, t \in [0,T] \\ u_n(0) = \varphi(0), \end{cases}$$

avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n(t) = \varphi(0) + \int_0^t \dot{u}_n(s)ds$$

et $u_n$ vérifie les estimations suivantes

$$\|u_n(t) - \varphi(t)\| < b, \, \forall\, t \in [0,T],$$

$$\|\dot{u}_n - g\|_{\mathbf{L}_E^1} \leq \frac{r}{1-\lambda} \tag{3.12}$$

$$\|u_n\|_{\mathbf{C}_E} \leq \|\varphi(0)\| + \|g\|_{\mathbf{L}_E^1} + b. \tag{3.13}$$

Nous avons, par l'inclusion $(\mathbf{I})$ l'existence d'une application mesurable $h_n : [0,T] \to E$ telle que

$$h_n(t) \in F(t, u_n(t)) \text{ et } -\dot{u}_n(t) = \sigma \frac{\lambda_n}{2} A_{\lambda_n}(t)u_n(t) + h_n(t).$$

D'après $(\mathbf{H}_3), (\mathbf{A}_2)$ et la propriété $(iii)$ de la Proposition 2.2, on a

$$\begin{aligned} \|\dot{u}_n(t)\| &\leq \sigma \frac{\lambda_n}{2} \|A_{\lambda_n}(t)u_n(t)\| + \|h_n(t)\| \\ &\leq |A(t)u_n(t)|_0 + (1 + \|u_n(t)\|) \\ &\leq \eta(t) + (1 + \|u_n(t)\|), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \|u_n(t)\| &\leq \|\varphi(0)\| + \int_0^t \|\dot{u}_n(s)\|ds \\ &\leq \|\varphi(0)\| + \int_0^t \eta(s)ds + \int_0^t (1 + \|u_n(s)\|)ds, \end{aligned}$$

par suite

$$1 + \|u_n(t)\| \leq (1 + \|\varphi(0)\| + \|\eta\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}}) + \int_0^t (1 + \|u_n(s)\|)ds,$$

en appliquant le Lemme 1.5 (Lemme de Gronwall) on obtient

$$1 + \|u_n(t)\| \leq (1 + \|\varphi(0)\| + \|\eta\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}})e^{\int_0^t} ds,$$

ceci donne

$$\|u_n(t)\| \leq (1 + \|\varphi(0)\| + \|\eta\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}})e^T - 1.$$

Posons $\rho = (1 + \|\varphi(0)\| + \|\eta\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}})e^T - 1$. On voit bien que $\rho > 0$ et

$$\|u_n(t)\| \leq \rho, \forall\, t \in [0, T].$$

Donc $(u_n(t))$ est relativement compacte, puisque elle est bornée dans l'espace $E$ de dimension finie.

Soient maintenant $t_1$, $t_2 \in [0, T]$ avec $t_2 > t_1$, nous avons

$$\begin{aligned}
\|u_n(t_2) - u_n(t_1)\| &= \| \int_{t_1}^{t_2} \dot{u}_n(t)dt\| \\
&\leq \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{u}_n(t)\|dt \\
&\leq \int_{t_1}^{t_2} \eta(t)\, dt + \int_{t_1}^{t_2} (1 + \|u_n(t)\|)dt \\
&\leq \int_{t_1}^{t_2} \eta(t)dt + (1 + \rho) \int_{t_1}^{t_2} dt,
\end{aligned}$$

Comme $\eta \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0, T])$, on aura, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$, telle que

$$|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \eta(t)dt < \frac{\varepsilon}{2},$$

d'autre part

$$\exists\, \delta' > 0, |t_1 - t_2| < \delta' \Rightarrow (1 + \rho) \int_{t_1}^{t_2} dt \leq (1 + \rho)(t_2 - t_1) \leq (1 + \rho)\, \delta'$$

pour $\delta' = \dfrac{\varepsilon}{2(1+\rho)}$

on aura

$$(1+\rho)\int_{t_1}^{t_2} dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

donc

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists\, \delta'' > 0 :\ \delta'' = \min(\delta, \delta'),\ |t_1 - t_2| < \delta''$$

implique

$$\|u_n(t_2) - u_n(t_1)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Le deuxième membre de la dernière inégalité tend vers zéro quand $t_1 \to t_2$, on conclut que $(u_n)$ est équicontinue.

En utilisant le Théorème d'Ascoli-Arzelà, on voit bien que $(u_n)$ est relativement compacte dans $\mathbf{C}_E([0,T])$, et donc par extraction d'une sous suite, on peut supposer que $(u_n)$ converge uniformément vers $u \in \mathbf{C}_E([0,T])$.

Nous avons

$$\begin{aligned} \|\dot{u}_n(t)\| &\leq \eta(t) + (1 + \|u_n(t)\|) \\ &\leq \eta(t) + (1+\rho) := \mu(t), \end{aligned}$$

comme $\eta \in \mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}([0,T])$, on aura $\mu \in \mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}([0,T])$. Par conséquent $\|\dot{u}_n(t)\| \leq \mu(t)$ pour tout $t \in [0,T]$, c'est à dire, $\|\dot{u}_n\|_{\mathbf{L}^2_E} \leq \|\mu\|_{\mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}}$.

Posons $\psi_n = \dfrac{\dot{u}_n}{\|\mu\|_{\mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}}}$, ceci donne $\|\psi_n\|_{\mathbf{L}^2_E} = \dfrac{\|\dot{u}_n\|_{\mathbf{L}^2_E}}{\|\mu\|_{\mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}}} \leq 1$, donc $\psi_n \in \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{L}^2_E}$ qui est faiblement compacte dans $\mathbf{L}^2_E([0,T])$, car $\mathbf{L}^2_E([0,T])$ est réflexif, par extraction d'une sous suite on peut supposer que $(\psi_n)$ converge faiblement vers une application $\psi \in \mathbf{L}^2_E([0,T])$, c'est à dire,

$$\lim_{n\to\infty} \langle \psi_n, z\rangle = \langle \psi, z\rangle, \forall z \in \mathbf{L}^2_E([0,T]).$$

Soit $y \in \mathbf{L}^2_E([0,T])$, alors

$$\langle \dot{u}_n, y\rangle = \langle \|\mu\|_{\mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}}\, \psi_n, y\rangle = \langle \psi_n, \|\mu\|_{\mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}}\, y\rangle,$$

comme $y \in \mathbf{L}^2_E([0,T])$, on aura $\|\mu\|_{\mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}}\, y \in \mathbf{L}^2_E([0,T])$ et par suite

$$\langle \dot{u}_n, y\rangle = \langle \psi_n, \|\mu\|_{\mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}}\, y\rangle \to \langle \psi, \|\mu\|_{\mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}}\, y\rangle = \langle \|\mu\|_{\mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}} \psi, y\rangle \text{ quand } n \to +\infty$$

c'est à dire, $(\dot{u}_n)$ converge faiblement dans $\mathbf{L}^2_E([0,T])$ vers l'application $\omega = \|\mu\|_{\mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}}\, \psi$, par conséquent

$$\lim_{n\to\infty} \langle \dot{u}_n, y\rangle_{\mathbf{L}^2_E, \mathbf{L}^2_E} = \langle \omega, y\rangle_{\mathbf{L}^2_E, \mathbf{L}^2_E},$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \langle \dot{u}_n(s), y(s)\rangle ds = \int_0^T \langle \omega(s), y(s)\rangle ds,$$

en particulier pour $y(.) = 1_{[0,t]}(.)e_j$ avec $(e_j)$ une base de l'espace $E$, d'où

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_0^T \langle \dot{u}_n(s), 1_{[0,t]}(s)e_j\rangle ds &= \int_0^T \langle \omega(s), 1_{[0,t]}(s)e_j\rangle ds \\
\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_0^t \langle \dot{u}_n(s), e_j\rangle ds &= \int_0^t \langle \omega(s), e_j\rangle ds \\
\Leftrightarrow \langle \lim_{n\to\infty} \int_0^t \dot{u}_n(s) ds, e_j\rangle &= \langle \int_0^t \omega(s) ds, e_j\rangle, \ \ \forall j.
\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \dot{u}_n(s) ds = \int_0^t \omega(s) ds,$$

comme $(u_n)$ est une suite d'applications absolument continues, on aura par l'égalité précédente

$$\lim_{n\to\infty} (u_n(t) - u_n(0)) = \lim_{n\to\infty} \int_0^t \dot{u}_n(s) ds = \int_0^t \omega(s) ds,$$

c'est à dire

$$u(t) = u(0) + \int_0^t \omega(s) ds,$$

donc $u$ est absolument continue, d'où $\dot{u} = \omega = \|\mu\|_{\mathbf{L}^2_E}\, \psi$, $p.p$, on conclut alors que $(\dot{u}_n)$ converge $\sigma(\mathbf{L}^2_E, \mathbf{L}^2_E)$ vers $\dot{u}$.

Par l'hypothèse $(\mathbf{H}_3)$, nous avons pour tout $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
\|h_n(t)\| &\leq (1 + \|u_n(t)\|) \\
&\leq 1 + \rho,
\end{aligned}$$

alors $(h_n(t))_n$ est bornée dans $E$ qui est de dimension finie, donc elle est relativement compacte, par extraction d'une sous suite on peut supposer qu'elle converge vers un élément $h(t) \in E$.

Comme $[0,T]$ est de mesure finie, alors $(h_n)$ est bornée dans $\mathbf{L}^2_E([0,T])$, en appliquant le Théorème de la convergence dominée de Lebeugue dans $\mathbf{L}^2_E([0,T])$, on conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|h_n - h\|_{\mathbf{L}^2_E} = 0$, c'est à dire $(h_n)_n$ converge fortement vers $h$ dans $\mathbf{L}^2_E([0,T])$, et par suite elle converge $\sigma(\mathbf{L}^2_E, \mathbf{L}^2_E)$ vers $h$ .

Montrons maintenant que $h(t) \in F(t, u(t))$, pour cela, il suffit de montrer que pour tout $t \in [0,T]$, le graphe de la multi-application $x \mapsto F(t,x)$ est relativement fermé dans $\mathbf{X}_b(t) \times E$, où

$$\mathbf{X}_b(t) = \{x \in E :\ (t,x) \in \mathbf{X}_b\},$$

Soit $t \in [0,T]$ et soit $(x_n, v_n)$ une suite dans $\mathtt{gph}(F(t,.))$ convergeant vers $(x,v) \in \mathbf{X}_b(t) \times E$. Pour tout entier $n$, $v_n \in F(t,x_n)$, donc d'après l'hypothèse $(\mathbf{H}_2)$

$$\begin{aligned} d(v, F(t,x)) &\leq \|v_n - v\| + d(v_n, F(t,x)) \\ &\leq \|v_n - v\| + (k(t) + \beta\|v_n\|)\|x_n - x\|, \end{aligned}$$

par la convergence de $(x_n, v_n)$ le second membre de la dernière inégalité tend vers zéro quand $n \to +\infty$ et comme $F(t,x)$ est fermé, $v \in F(t,x)$. Par conséquent $\mathtt{gph}(F(t,.))$ est relativement fermé dans $\mathbf{X}_b(t) \times E$. Comme pour tout $n$, $u_n$ est une solution de l'inclusion différentielle $(\mathbf{I})$ on conclut que $\|u_n(t) - \varphi(t)\| < b$ c'est à dire, $u_n(t) \in \mathbf{X}_b(t)$, donc $(u_n(t), h_n(t)) \in \mathtt{gph}(F(t,.))$, par conséquent $h(t) \in F(t, u(t))$.

Nous avons maintenant

$$-\dot{u}_n(t) = \sigma\,\frac{\lambda_n}{2}\,A_{\lambda_n}(t)u_n(t) + h_n(t)\ \ p.p.\, t \in [0,T],$$

et par la propriété $(ii)$ de la Proposition 2.2 et l'hpothèse $(\mathbf{A_3})$, nous avons

$$-\dot{u}_n(t) - h_n(t) = \sigma\,\frac{\lambda_n}{2}\,A_{\lambda_n}(t)u_n(t) \in \sigma\,\frac{\lambda_n}{2}\,A(t)J_{\lambda_n}A(t)u_n(t) \subset A(t)J_{\lambda_n}A(t)u_n(t).$$

D'autre part, nous avons

$$\|J_{\lambda_n}A(t)u_n(t) - u(t)\| \leq \|J_{\lambda_n}A(t)u_n(t) - u_n(t)\| + \|u_n(t) - u(t)\|, \, \forall\, t \in [0,T] \quad (3.14)$$

et on a d'après ($\mathbf{A}_2$) et $(iii)$ de la Proposition 2.2.

$$\begin{aligned}
\|J_{\lambda_n}A(t)u_n(t) - u_n(t)\| &\leq \lambda_n \|A_{\lambda_n}(t)u_n(t)\| \\
&\leq \lambda_n |A(t)u_n(t)|_0 \\
&\leq \lambda_n \eta(t),
\end{aligned}$$

comme $\lambda_n \eta(t) \to 0$ quand $n \to \infty$ et $\|u_n(t) - u(t)\| \to 0$ quand $n \to \infty$, alors $\|J_{\lambda_n}A(t)u_n(t) - u(t)\|$ tend vers zéro quand $n \to \infty$.

Par la relation (3.14) une deuxième fois, nous avons

$$\begin{aligned}
\|J_{\lambda_n}A(t)u_n(t) - u(t)\| &\leq \|J_{\lambda_n}A(t)u_n(t) - u_n(t)\| + \|u_n(t) - u(t)\| \\
&\leq \lambda_n \eta(t) + \|u_n(t)\| + \|u(t)\| \\
&< \eta(t) + 2\rho := \eta_1(t),
\end{aligned}$$

avec $\eta_1 \in \mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}([0,T])$ car $\eta \in \mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}([0,T])$.

Par suite, en utilisant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue dans $\mathbf{L}^2_E([0,T])$ on conclut que $(J_{\lambda_n}A(.)u_n(.))$ converge vers $u$ dans $\mathbf{L}^2_E([0,T])$.

Considérons maintenant l'opérateur

$$\mathcal{A} : \mathbf{L}^2_E([0,T]) \rightrightarrows \mathbf{L}^2_E([0,T])$$

défini par

$$z \in \mathcal{A}y \Leftrightarrow z(t) \in A(t)y(t) \;\; p.p.\, t \in [0,T],$$

nous avons vu que $\mathcal{A}$ est un opérateur maximal monotone sur $\mathbf{L}^2_E([0,T])$, et donc d'après le Théorème 2.1, son graphe est fortement-faiblement séquentiellement fermé, or $(\dot{u}_n + h_n)$

converge faiblement dans $\mathbf{L}_E^2([0,T])$ vers $(\dot{u}+h)$ et

$$-\dot{u}_n(t) - h_n(t) \in A(t)J_{\lambda_n}A(t)u_n(t)$$

alors par le Lemme 2.1, on déduit que $-\dot{u}(t) - h(t) \in A(t)u(t)$, p.p, c'est à dire,

$$-\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + F(t, u(t)),\ p.p.\ t \in [0,T],$$

avec $u(0) = \varphi(0)$, et par suite $u$ est une solution de l'inclusion différentielle considérée.

Quand $n$ tend vers $+\infty$, par (3.12) et (3.13) on aura

$$\|\dot{u} - g\|_{\mathbf{L}_E^1} \leq \frac{r}{1-\lambda}$$

et

$$\|u\|_{\mathbf{C}_E} \leq \|\varphi(0)\| + \|g\|_{\mathbf{L}_E^1} + b.$$

Ceci achève la démonstration de notre théorème. ■

On donne maintenant un corollaire du Théorème 3.2.

**Corollaire 3.1** *Soient $E$ un espace de dimension finie, $T > 0$, $A(t) : E \rightrightarrows E$ $(t \in [0,T])$ un opérateur maximal monotone et soit $F : [0,T] \times E \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs non vides fermées. On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées*

$(\mathbf{H}_1)$ *$F$ est $\mathcal{L}([0,T]) \otimes \mathcal{B}(E)$-mesurable,*

$(\mathbf{H}_2)$ *$F$ est globalement pseudo-Lipschitzienne, c'est à dire, il existe $\beta \geq 0$ et $k \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^1([0,T])$ avec $k(t) \geq 0$ telles que*

$$v \in F(t,x) \Rightarrow v \in F(t,x') + [(k(t) + \beta\|v\|)\|x - x'\|]\,\overline{\mathbf{B}}_E, \quad \forall (t,x),\ (t,x') \in [0,T] \times E,$$

$(\mathbf{H}_3)$ *$F(t,x) \subset (1 + \|x\|)\overline{\mathbf{B}}_E$, $\forall (t,x),\ (t,x') \in [0,T] \times E$,*

$(\mathbf{H}_4)$ *la fonction $t \mapsto d(0, F(t,0))$ appartient à $\mathbf{L}_{\mathbb{R}}^1([0,T])$.*

*On suppose de plus que les hypothèses suivantes sont vérifiées*

$(\mathbf{A}_1)$ *pour chaque $x \in E$ et pour chaque $\lambda > 0$, l'application $t \mapsto (I_E + \lambda A(t))^{-1}x$ est Lebesgue mesurable et il existe $\overline{g} \in \mathbf{L}_E^2([0,T])$ telle que $t \mapsto (I_E + \lambda A(t))^{-1}\overline{g}(t)$ appartient* *à* $\mathbf{L}^2_E([0,T])$,

$(\mathbf{A_2})$ *il existe une fonction positive* $\eta \in \mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}([0,T])$ *telle que*

$$|A(t)x|_0 \leq \eta(t), \ \ \forall\, (t,x) \in [0,T] \times E.$$

$(\mathbf{A}_3)$ $\theta A(t)x \subset A(t)x, \ \ \forall \theta \in ]0,1[$ *et* $\forall (t,x) \in [0,T] \times E$.

*On pose*

$$\begin{aligned} r &= (1+\alpha)[\|\eta\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}} + \int_0^T d(0, F(t,0))dt], \\ \kappa &= (1+\alpha)(\frac{T}{2} + \|k\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}} + \beta\|\eta\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}}), \\ \beta' &= (1+\alpha)\beta, \end{aligned} \tag{3.15}$$

*où* $\alpha$ *est un paramètre strictement positif. On suppose que* $r$ *et* $\kappa$ *vérifient*

$$\kappa \leq \lambda - \beta' r \frac{\lambda}{1-\lambda}$$

*pour un certain* $\lambda \in ]0,1[$. *Alors l'inclusion différentielle*

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + F(t,u(t)), \ p.p.t \in [0,T], \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

*admet au moins une solution* $u \in \mathbf{W}^{1,1}_E([0,T])$.

**Démonstration.**

En prenant dans le Théorème 3.2 $g \equiv 0$ et $b = +\infty$, on voit bien que $\mathbf{X}_b = [0,T] \times E$. De plus, en posant $\xi_1 = \kappa$, $\xi_1$ vérifie la relation (3.15). On conclut alors que notre corollaire est une conséquence du Théorème 3.2. ∎

# Bibliographie


[1] D. Affane, D. Azzam-Laouir, *A control problem governed by a second order differential inclusion*, Applicable Analysis, Vol 88 (2009), N°12, pp.1677-1690.

[2] M. Ahmed Gamal, *Perturbation non Convexe d'une Équation d'Evolution dans un Espace de Banach*, Séminaire d'Analyse Convexe, Monpellier (1982), Expose N°17.

[3] H. Attouch, A. Damlamian, *On multivalued evolution equations in Hilbert spaces*, Israel J. Math. 12 (1972), 373-390.

[4] J.P. Aubin, A. Cellina, *Differential inclusions, Set-valued maps and viability theory,* Springer-verlag, Berlin (1984).

[5] D. Azzam-Laouir, *Contribution à l'étude de problèmes d'évolution du second ordre*, *Thèse de doctorat d'état, Université de Constantine* (2003).

[6] D. Azzam-Laouir, *Polycopié, cours d'analyse multivoque,* Laboratoire de Mathématiques Pure et Appliquées, Université de Jijel (2009).

[7] D. Azzam-Laouir, F. Bounama, *Second order differential inclusions with Lipschitz right-hand sides,* Electronic Journal of Differential Equations, Vol 2010 (2010), N°85, pp.1-9.

[8] D. Azzam-Laouir, C. Castaing and L. Thibault, *Three boundary value problems for second order differential inclusions in Banach spaces*, Control Cybernet, Vol 31 (2002) N°3, pp. 659-693.

[9] D. Azzam-Laouir, S. Lounis, *Nonconvex perturbations of second order maximal monotone differential inclusions,* TMNA, pp. 305-317.

[10] V. Barbu, *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces,* Noordhoff (1976).

[11] H. Benabdellah and A. Faik, *Perturbations convexes et non convexes des equations d'évolution,* Portugaliae mathematica, Vol 53 (1996), 187-208.

[12] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications,* Masson, (1983).

[13] H. Brézis, *Opérateurs maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contraction dans les espaces de Hilbert,* North-Holland, Mathématics Studies, Notas de Matemática (50) (1973).

[14] C. Castaing, M. Valadier, *Convex analysis and measurable multifunctions,* Lectures Notes in Math, 580 springer-Verlag, Berlin (1977).

[15] G. Colombo, A. Fonda and A. Ornelas, *Lower semicontinuous perturbations of maximal monotone differential inclusions*, Israel J. Math, Vol 61 (1988), 211-218.

[16] R. Descombes, *Cours d'analyse,* Librairie Vuibert, Paris, (1962).

[17] A.F. Filippov, *Classical solutions of differential inclusions with multivalued right-hand sides*, SIAM J. Control 5 (1967), 609-621.

[18] B. Gely, *Solutions d'équations différentielles multivoques,* Séminaire d'analyse convexe Montpellier, Exposé n°4 (1972).

[19] A. Ioffe, *Existence and relaxation theorems for unbounded differential inclusions,* Journal of Convex Analysis, Vol 13 (2006), N°2, 353-362.

[20] M. Kisielewicz, *Differential Inclusion and optimal control,* PWN-Polisch Scientific Publischers, Kluwer Academic Publischers, Dordrecht/Boston/London.

[21] M. Kunze and M.D.P.M. Marques, *B.V. Solutions to Evolution Problems with Time-Dependent Domains*, Set valued Analysis, vol. 5, N°1, p. 57-72.

[22] E. Mitidieri, I.I. Vrabie, *Differential Inclusions Governed by Nonconvex Perturbations of m-Accretive Operators, Differential and Integral Equations,* Vol 2, N°4, October 1989, pp. 525-531.

[23] I.L. Vrabie, *Compactness Methods for Nonlinear Evolutions,* Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied mathematics, Longman Scientific and technical, John Wiley and Sons, Inc. New York 32 (1987).

# Résumé

## Existence de solutions pour une classe d'inclusions différentielles

Dans ce travail, nous avons donné des théorèmes d'existence de solutions absolument continues pour l'inclusion différentielle du premier ordre gouvernée par un opérateur maximal monotone, dans un espace de dimension finie de la forme

$$-\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + F\big(t, u(t)\big), p.p.\, t \in [0, T].$$

En premier lieu, la perturbation $F$ est supposée Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. Puis, nous avons affaibli cette condition, en supposant $F$ pseudo-Lipchitzienne toujours par rapport à la deuxième variable.

# Abstract

## Existence of solutions for a class of differential inclusions

In this work, we have done theorems of existence of solutions absolutely continuous for first-order differential inclusion governed by a maximal monotone operator, in a space of finite dimension of the form

$$-\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + F\big(t, u(t)\big), p.p.\, t \in [0, T].$$

First, the perturbation $F$ is assumed Lipschitzienne with respect to the second variable. Then, we have weakened this condition, assuming $F$ pseudo-Lipschitzienne always with respect to the second variable.

# ملخص

## وجود حلول لفئة من الاحتواءات التفاضلية

في هذا العمل، قدمنا نظريات لوجود حلول مستمرة مطلقا لاحتواء تفاضلي من الدرجة الأولى محكوم بمؤثر رتيب أعظمي، في فضاء ذو بعد منته من الشكل

$$-\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + F\big(t, u(t)\big), p.p.\, t \in [0, T].$$

أولا، الاضطراب $F$ لبشيتزي بالنسبة للمتغير الثاني. ثانيا، أضعفنا هذا الشرط، بافتراض $F$ شبه لبشيتزي دائما بالنسبة للمتغير الثاني.