REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE JIJEL

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET DES SCIENCES DE LA NATURE ET DE LA VIE

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

ECOLE DOCTORALE – POLE DE CONSTANTINE

N° d'ordre : ....

N° de série : ....

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de :

MAGISTER

Spécialité Mathématiques

OPTION

E-D-P

THEME

Semi groupes à singularités et certaines applications à l'étude des problèmes aux limites

Par :

ABDELLIOUA Dalila

Soutenu le :02 /07 /2012 devant le jury :

Président	: D.AZZAM –LAOUIR	Professeur	**Université Jijel**
Rapporteur	: M. DENCHE	Professeur	**Université Constantine**
Examinateur	: T.ZERZAIHI	Professeur	**Université Jijel**
Examinateur	: C.SAIDOUNI	maitre de conférence	**Université Constantine**

Table des matières

0.1 Introduction

Différents problèmes rencontrés en théorie de la conduction thermique [8], [9], [20], en thermo-élasticité [28] et en physique des plasmas [26], [27] peuvent être ramenés à des problèmes aux limites avec conditions intégrales. De tels problèmes ont été étudiés par différentes méthodes dans les travaux [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [11], [12], [13], [14], [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22], [24], [25], [26], [30], [31], Le but de ce travail est l'étude de certaines classes des problèmes aux limites avec conditions aux limites combinant des conditions intégrales avec d'autres contenant les valeurs de la fonction inconnue et ses dérivées aux extrimités de l'intervalle.

Le memoire est composée d'une introduction et quatre chapitres.

On commence dans l'introduction par rappeler certaines notions préliminaires à savoir la notion de fonction de Green d'opérateurs différentiels.

Dans le premier chapitre on étudie une classe de semigroupes générés par des opèrateurs à domaine non dense dits semi-groupes à singularités.[1], [2], [29], [30], [32], [**?**].

Le deuxiéme chapitre est consacré à l'étude d'un problème aux limites pour une équations différentielle du second ordre combinant des conditions aux limites du type intégrale à poids et une condition non locale liant les valeurs de la fonction inconnue aux extrémités de l'intervalle ainsi que ses dérivées dans l'espace $\mathcal{L}^{\infty}(0,1)$. On extrait deux classes de conditions aux limites ; l'une dite régulière pour laquelle on montre la décroissance maximale de la résolvante, alors le semi-groupe engendré est analytique et dans le cas où le domaine est dense, le semi-groupe est fortement continu, et l'autre dite faiblement régulière pour laquelle la décroissance de la résolvante est non maximale, alors le semi-groupe engendré par l'opérateur en question est générateur d'un semi-groupe analytique à singularité [3], [4], [5], [6], [7], [11], [12], [13], [14], [18], [19], [25], [26], [27], [28], [29], [30], [31], [33], [34], [35], [36], [37], [38], [39], [40], [**?**].

Dans le troisième chapitre on étudie un autre problème aux limites pour équations différentielle du second ordre avec conditions aux limites non locales et contenant le paramétre spectral dans l'espace $\mathcal{L}^{\infty}(0,1)$, on extrait une classes de conditions aux limites dite faiblement régulière pour laquelle on montre que la décroissance maximale de la résolvante est non maximale d'où l'opérateur en question est générateur d'un semi-groupe à singularité.

Le quatrième chapitre est consecré à l'étude d'un classe de problèmes aux limites combinant des conditions aux limites non locales avec paramètre spectral avec d'autres integrales à poids, on montre la decroissance maximale de la résolvante et que l'opérateur en question génere un semi groupe analytique dans l'espace $\mathcal{L}^{\infty}(0,1)$.

0.2 Notions préliminaires

Fonction de Green d'opérateur du second ordre

Considérons dans l'intervalle $[0,1]$ le problème suivant :

$$\begin{cases} -u'' - \lambda u = h\ (x) \\ B_1(u) = \alpha_1 u\ (0) + \beta_1 u'(0) + \gamma_1 u\ (1) + \delta_1 u'(1) + \int\limits_0^1 (R_1(t)u\ (t) + S_1(t)u'(t))dt = 0 \\ B_2(u) = \alpha_2 u\ (0) + B_2 u'(0) + \gamma_2 u\ (1) + \delta_2 u'(1) + \int\limits_0^1 (R_2(t)u\ (t) + S_2(t)u'(t))dt = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Où la fonction $h\ (x) \in C\ ([0,\ 1]\,, \mathbb{C})$ et $R_i(t),\ S_i(t) \in C^1([0,1]\,, \mathbb{C})$. $i = \overline{1,2}$. Par le théorème de poincarré l'équation homogène correspondante à l'équation (1) admet un système fondamental de solutions particulières $U_K(x,\lambda),\ K = \overline{1,2}$, qui sont des fonctions entières du paramètre λ.

On cherche la solution générale de l'équation dans (1) par la méthode de variation des constantes sous la forme :

$$U\ (x,\ \lambda) = \sum_{K=1}^{2} C_K(x,\ \lambda)\ U_K(x,\ \lambda)$$

On obtient :

$$\begin{cases} \sum_{K=1}^2 C'_K(x,\ \lambda)\ U_K(x,\ \lambda) = 0 \\ \sum_{K=1}^2 C'_K(x,\ \lambda)\ U'_K(x,\ \lambda) = h(x) \end{cases} \tag{2}$$

Le déterminant de ce système est le Wronskien du système fondamental de solutions particulières de l'équation homogène correspondant à (1), donc :

$$W\ (x\ ,\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(x\ ,\lambda) & U_2(x\ ,\lambda) \\ U\ '_1(x\ ,\lambda) & U\ '_2(x\ ,\lambda) \end{vmatrix} \neq 0$$

D'où le système (2) admet une solution unique :

$$C'_K(x\ ,\lambda) = \frac{W_{2K}\ (x,\ \lambda)\ h(x)}{W(x,\ \lambda)},\ K = \overline{1,2} \tag{3}$$

Où $W_{2K}(x,\ \lambda)$ est le complément algébrique de l'élément se trouvant à la $2^{éme}$ ligne et à la $k^{éme}$ colonne.

En intégrant (3) de 0 à x, on obtient :

$$C_K(x\ ,\lambda) = C_K(0\ ,\lambda) + \int\limits_0^x \frac{W_{2K}(s\ ,\lambda)\ h(s)}{W\ (s\ ,\lambda)} ds$$

En intégrant(3) de 1 à x , on obtient :

$$C_K(x\ ,\lambda) = C_K(1\ ,\lambda) + \int_1^x \frac{W_{2K}\,(s,\ \lambda)\,h(s)}{W(s,\ \lambda)}ds$$

D'où, la solution générale $U\ (x\ ,\lambda)$ de l'équation dans (1) admet la représentation suivante :

$$U\ (x\ ,\lambda) = \sum_{K=1}^{2} C_K(x\ ,\lambda)U_K\ (x\ ,\lambda) + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{-U_2(s\ ,\lambda)U_1(x\ ,\lambda) + U_2(x\ ,\lambda)U_1(s\ ,\lambda)}{W\ (s\ ,\lambda)}\ h(s)ds +$$

$$\frac{1}{2}\int_1^x \frac{U_2(s\ ,\lambda)U_1(x\ ,\lambda) - U_2(x\ ,\lambda)U_1(s\ ,\lambda)}{W\ (s\ ,\lambda)}\ h(s)ds$$

Où :

$$C_K\ (x\ ,\lambda) = \frac{1}{2}(C_K(0\ ,\ \lambda) + C_K(1\ ,\ \lambda))$$

En posant :

$$g\ (x\ ,s\ ;\lambda) = \pm\frac{1}{2}\frac{U_2(s\ ,\lambda)U_1(x\ ,\lambda) - U_2(x\ ,\lambda)U_1(s\ ,\lambda)}{W\ (s\ ,\lambda)}$$

Où $g\ (x\ ,s\ ;\ \lambda)$ prend le signe $+$, si $0 < x < s < 1$ et le signe $-$,

si $0 < s < x < 1$, d'où on a pour la solution générale de l'équation dans (1) la représentation :

$$U\ (x\ ,\lambda) = \sum_{K=1}^{2} C_K(x\ ,\lambda)U_K(x\ ,\lambda) + \int_0^1 g\ (x\ ,s\ ;\lambda)\ h\ (s)ds \tag{4}$$

Finalement pour obtenir la solution du problème (1) on détermine les constantes

$C_K(x\ ,\lambda)$, $K = \overline{1\ ,\ 2}$,

dans (4) de telle manière qu'elle vérifie les conditions aux limites dans (1), ainsi on obtient :

$$\sum_{K=1}^{2} C_K\ (x\ ,\lambda)\ B_i\ (U_K\ (x\ ,\lambda)) = -\int_0^1 B_i\ (\ g\ (x\ ,s\ ;\lambda))\ h(s)ds \quad ,\ i = \overline{1\ ,\ 2} \tag{5}$$

Si

$$\triangle\ (\lambda) = \begin{vmatrix} B_1(U_1(x\ ,\lambda)) & B_1(U_2(x\ ,\lambda)) \\ B_2(U\ _1(x\ ,\lambda)) & B_2(U\ _2(x\ ,\lambda)) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{6}$$

Alors le système (5) admet des solutions uniques $C_1(x\ ,\lambda)$, $C_2(x\ ,\lambda)$ données par :

$$C_1(x\ ,\lambda) = \int_0^1 \frac{\begin{vmatrix} -B_1(g\ (x\ ,s\ ;\lambda)) & B_1(U_2) \\ -B_2(g\ (x\ ,s\ ;\lambda)) & B_2(U\ _2) \end{vmatrix}}{\triangle\ (\lambda)} h(s)dx$$

Et

$$C_2(x\ ,\lambda) = \int\limits_0^1 \frac{\begin{vmatrix} B_1(U_1) & -B_1(g\ (x\ ,s\ ;\lambda)) \\ B_2(U\ _1) & -B_2(g\ (x\ ,s\ ;\lambda)) \end{vmatrix}}{\triangle\ (\lambda)} h(s)dx$$

En remplaçant C_1, C_2 dans (4), on trouve la représentation de la solution du problème (1) :

$$U\ (x\ ,\ \lambda) = \frac{1}{\triangle\ (\lambda)}[\int\limits_0^1 \{- \begin{vmatrix} B_1(g\ (x\ ,s\ ;\lambda)) & B_1(U_2) \\ B_2(g\ (x\ ,s\ ;\lambda)) & B_2(U\ '_2) \end{vmatrix} \times U_1(x\ ,\ \lambda)$$
$$- \begin{vmatrix} B_1(U_1) & B_1(g\ (x\ ,s\ ;\lambda)) \\ B_2(U\ '_1) & B_2(g\ (x\ ,s\ ;\lambda)) \end{vmatrix} \times U_2(x\ ,\lambda) + \triangle\ (\lambda) \times g\ (x\ ,s\ ;\lambda)\}h(s)ds]$$

Ce qui donne :

$$U\ (x\ ,\lambda) = \int\limits_0^1 \frac{\begin{vmatrix} U_1(x) & U_2(x) & g\ (x\ ,s\ ;\lambda) \\ B_1(U_1) & B_1(U_2) & B_1(g)_x \\ B_2(U_1) & B_2(U_2) & B_2(g)_x \end{vmatrix}}{\triangle\ (\lambda)} h(s)ds$$

Si on suppose

$$G(x\ ,s\ ;\lambda) = \frac{\begin{vmatrix} U_1(x) & U_2(x) & g\ (x\ ,s\ ;\lambda) \\ B_1(U_1) & B_1(U_2) & B_1(g)_x \\ B_2(U_1) & B_2(U_2) & B_2(g)_x \end{vmatrix}}{\triangle\ (\lambda)} \tag{7}$$

Alors pour $U\ (x\ ,\lambda)$ on a la représentation :

$$U\ (x\ ,\lambda) = \int\limits_0^1 G(x\ ,s\ ;\lambda)h(s)ds \tag{8}$$

Définition 0.2.1 $G(x\ ,s\ ;\lambda)$ *est dite fonction de Green du problème* (1).

Théorème 0.2.2 *Soit* $\lambda \in \mathbb{C}$ *te que* $\triangle\ (\lambda) \neq 0$ *et* $h \in C\ [0\ ,\ 1]$, *alors le problème* (1) *admet une solution* $U \in C\ ^2\ [0,1]$, *meromorphe en* λ *admettant la représentation* (8), *les pôles de la fonction de Green sont les zéros du déterminant caractéristique* $\triangle\ (\lambda)$.

De la représentation de $G\ (x\ ,s\ ;\lambda)$ on obtient facilement le Théorème suivant :

Théorème 0.2.3 1- $G\ (x\ ,s\ ;\lambda)$ *est une fonction continue* $\forall\ x\ ,\ s \in [0\ ,1]$

2- *Pour tout* s *fixé dans* $[0\ ,1]$, *la fonction* $G\ (x\ ,s\ ,\lambda)$ *admet les dérivées premières et secondes* *en* x

Dans chacun des intervalles $[0\ ,s\ [$ *et* $]s\ ,1]$, *en plus*

$$\lim_{x\to^{>}s}\frac{\partial G\ (x\ ,s\ ,\lambda)}{\partial x}-\lim_{x\to^{<}s}\frac{\partial G\ (x\ ,s\ ,\lambda)}{\partial x}=1$$

3- *Dans chacun des intervalles* $[0\ ,s\ [$ *et* $]s\ ,1]$ *la fonction* $G\ (x\ ,s\ ,\lambda)$ *envisagée comme fonctions de* x *vérifie l'équation* $L\,(G)=0$ *et les conditions aux limites :*

$$B_i\ (G)=0\ ,\ i=\overline{1\ ,\ 2}$$

On peut facilement montrer le Théorème suivant :

Théorème 0.2.4 *si le problème aux limites correspondant au problème homogène* (1) *admet uniquement la solution triviale, alors le problème aux limite* (1) *admet une et une seule fonction de Green.*

Equations differentielles opérationnelles

Soit E , E_1et E_2 trois espaces de Bannach , introduisons les espaces de Banach suivants :

$$C_\mu((0\ ,T\ )\ ,E\ )=\left\{f\ /f\ \in C\ \ ((0\ ,T\ )\ \ ,E\ )\ \ ,\ \ \|f\ \|=Sup_{t\ \in[0\ ,T\ ]}\|t\ ^\mu f\ \|<\infty\right\}\ ,\mu\geq 0$$

et $\quad C\ ^\gamma_\mu((0\ ,T\ )\ ,E\ )=\{f\ /f\in C\ ((0\ ,T\ )\ \ ,E)\ ,$

$$\|f\ \|=Sup_{t\ \in[0\ ,T\ ]}\|t\ ^\mu f\ \|+Sup_{0<t\ <t\ +h\leq T}\|f\ \ (t+h)-f\ \ (t)\|\ h^{-\gamma}t\ ^\mu<\infty\},\mu\geq 0,\gamma\in(0,T].$$

Et l'espace vectoriel

$$C^1((0,T\ )\ ,E_1\ ,E_2)=\left\{f\ /f\ \in C\ \ ((0\ ,T\ )\ \ ,E_1)\cap C^1((0\ ,T\ )\ ,E_2)\right\}\ ,où\ \ E_1\subset E_2.$$

On note par

$$E\ \ (A)=\{u\ /u\in D\ \ (A)\ \ ,\left(\|Au\|^2+\|u\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\}$$

Et,

$$C^1((0\ ,T\ )\ ,E\ \ (A)\ \ ,E\ )=\{f\ /f\in C\ \ ((0\ ,T\ )\ \ ,\ E\ \ (A))\ \ ,f\ '\in C\ \ ((0\ ,T\ )\ \ ,E\ )\}$$

Enonçons le théorème qui est démontré par différentes méthodes dans l'éspace norme .

On considère dans l'espace de banach E, le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), t \in [0, T] \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{9}$$

Où A est un opérateur linéaire en général non borné dans E, $u_0 \in E$ et $f(t) \in E$.

Théorème 0.2.5 *Supposons que les conditions suivants soient vérifiées*

1- *Il existe* $a > 0$ *et* $b \in [0, 1]$ *tel que* $\|R(\lambda, A)\| \leq c|\lambda|^{-b}$, $|\arg \lambda| \leq \frac{\pi}{2} + a$, $|\lambda| \to \infty$

2- $h \in C_{\mu}^{\eta}([0, 1], E)$ *pour* $\eta \in [1-b, 1]$; $\mu \in [0, b]$.

3- $u_0 \in D(A)$.

Alors le problème de cauchy à une solution unique u *tel que*

$u \in C((0, T), E) \cap C^1((0, T], E(A), E)$

Et pour cette solution on a les estimations suivantes

$$\begin{aligned} \|u(t)\| &\leq c\left(\|Au_0\| + \|u_0\| + \|f\|_{C_\mu((0,1],E)}\right), t \in (0, T], \\ \left\|u'(t)\right\| + \|Au(t)\| &\leq c\left(t^{\beta-1}\|Au_0\| + \|u_0\| + t^{\beta-\mu-1}\|f\|_{C_\mu((0,1],E)}\right), t \in (0, T]. \end{aligned}$$

Chapitre 1

Semi-groupes de classe $A(\alpha, \beta)$

Ce chapitre est consacré à l'étude d'une classe de Semi-groupes à singularité qui s'appelle Semi-groupes de classe $A(\alpha, \beta)$ et qui sont d'une grande importance dans la résolution du problème de cauchy pour équation différentielle opérationnelle à coéfficient opératoriel non borné et à domaine non dense. nous fournissons la définition et les propriétés de ce type de Semi-groupes et nous démontrons le théorème qui donne les conditions suffisantes d'existence du semi-groupes de classe $A(\alpha, \beta)$.

1.1 Semi-groupes de classe $A(\alpha, \beta)$

Soit A un opérateur linéaire, dans un espace de banach E avec le domaine $D(A) = D$.
On suppose qu'il existe un opérateur-fonction $U(t)$ pour $t > 0$ et que les conditions suivantes sont vérifiées

i)$U(t)$ est un opérateur linéaire borné de E dans D , $t \in [0\ ; +\infty]$.

ii)$U(t+s) = U(t)U(s)$,t , $s > 0$.

iii)$\lim_{t \to 0^+} U(t)v = v$ pour $v \in D$.

iv)$U(t)$ est différentiable avec $t > 0$ et

$$\frac{d}{dt}U(t) = -A(t)U(t).$$

v)$U(t)$ commute avec $A(t)$ dans D.

vi) Les estimation

$$\|U(t)\| \leq Mt^{-\alpha}e^{-\omega t}\ ;\ \left\|U^{'}(t)\right\| \leq M\ t^{-\beta}e^{-\omega t}. \tag{1.1}$$

sont vraies pour chaque $M > 0$, $\omega > 0$, $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 1$.

Proposition 1.1.1 *Pour $0 < \alpha < 1$ on a*

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} \; G(t)dt. \tag{1.2}$$

Où : $\Gamma(\alpha)$ c'est la fonction de Gamma . qui definit par

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \; e^{\alpha-1} dt.$$

Définition 1.1.2 *La fonction opératorielle $U(t) = e^{-tA}(t > 0)$ possédant la propriété (1.2) est dite* ***Semi-groupe de classe*** *$A(\alpha, \beta)$ engendré par l'opérateur A.*

Proposition 1.1.3 *Les nombres α et β dans l'inégalité (1.1) doivent être liés par l'inégalité $\alpha + 1 \leq \beta$.*

Preuve. D'après la propriété (iv) on a

$$U(t) = e^{-SA(t)}$$

donc

$$\frac{d}{dt} U(t) = -A(t)U(t)$$

Alors

$$\int_t^T AU(t)dt = \int_t^\tau Ae^{-SA} dt = e^{-tA} - e^{-\tau A}.$$

Finalement

$$e^{-tA} = \int_t^\tau Ae^{-SA} dt + e^{-\tau A}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\left\| e^{-tA} \right\| &= \left\| e^{-\tau A} + \int_t^\tau Ae^{-sA} dt \right\| . \\
&\leq \left\| e^{-\tau A} \right\| + \left\| \int_t^\tau Ae^{-sA} dt \right\| . \\
&\leq M \; \tau^{-\alpha} e^{-\omega \tau} + \int_t^\tau M \; S^{-\beta} e^{-ws} \; ds. \\
&\leq M \; \tau^{-\alpha} + \int_t^\tau M \; S^{-\beta} ds. \\
&= M \; \tau^{-\alpha} + \frac{M}{\beta - 1} \left[t^{-(\beta-1)} - \tau^{-(\beta-1)} \right] . \\
&\leq C_1 \; t^{-(\beta-1)}.
\end{aligned}$$

Comme on a $\left\| e^{-tA} \right\| \leq M \; t^{-\alpha}$ pour t assez petite, Alors $\alpha \leq \beta - 1$. ■

Remarque 1.1.4 *Si $\overline{D} = E$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, Alors $U(t)$ est un Semi-groupe analytique.*

Définition 1.1.5 ***(Générateur Infinitésimal)***

On appelle générateur infinitésimal du Semi-groupe $\{u(t)\}_{t\geq 0}$*, l'opérateur linéaire non borné* A_0 *défini par :*

$$A_0\varphi = \lim_{t\to o^+} \frac{U(t)\varphi - \varphi}{t}$$

et

$$D_0(A) = \left\{\varphi \in E \ / \lim_{t\to o^+} \frac{G(t)\varphi - \varphi}{t} \textit{existe dans } E\right\}.$$

Proposition 1.1.6 *On a* $D_0 = D$ *et* $A = -A_0$.

Preuve. De la propriété (iv) on a

$$U(t)x - U(s)x = -\int_s^t AU(\tau)d\tau,\ (t,\ s > 0).$$

Si $x \in D$, par passage à la limite quand s tend vers 0, on obtient

$$U(t)x - x = -\int_0^t AU(\tau)d\tau.$$

D'où l'expression

$$\frac{U(t) - I}{t}x = -\frac{1}{t}\int_0^t Au(\tau)d\tau.$$

admet une limite quand $t \to 0$ ce qui veut dire que $x \in D_0$, donc $D \subset D_0$, et $A_0x = -A$.
Soit maintenant $x \in D_0$, alors, par passage à la limite quand s tend vers 0 dans l'égalité

$$U(t)\frac{U(s) - I}{s}x = -\int_t^{t+s} AU(\tau)d\tau.$$

On obtient $U(t)A_0x = -AU(t)x$. Supposons que A admet un inverse borné, alors $U(t)A^{-2}A_0x = -U(t)A^{-1}x$ par passage à la limite pour $t \to 0$, on obtient $x = -AA_0x$, ainsi $x \in D$. D'où $D = D_0$ et $A = A_0$. ■

1.2 Conditions suffisantes d'existance du Semi-groupes de classe $A(\alpha, \beta)$

Théorème 1.2.1 *Supposons que dans le plan complexe Re* $\lambda \geq \omega$ *la résolvante de l'opérateur* A *exite et vérifie*

$$\left\|(A + \lambda I)^{-1}\right\| \leq \frac{c}{|\lambda|^r} \tag{1.3}$$

avec $r \in [0\ ;1]$, Alors, il existe un Semi-groupe de classe $A(\alpha, \beta)$ engendré par l'opérateur A, De plus $\alpha = r^{-1} - 1$ et $\beta = 2r^{-1} - 1$.

Preuve. *On pose*

$$U(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_0 - i\infty}^{\delta_0 + i\infty} e^{\lambda t} (A + \lambda I)^{-1} \, d\lambda \tag{1.4}$$

où $\delta_0 \geq \omega$. Remarquons que la résolvante $(A + \lambda I)^{-1}$ n'existe pas uniquement dans le demi plan complexe $Re\ \lambda \geq \omega$, mais aussi dans le domaine délimité par la parabole $\lambda = \omega - z + i\tau$ où $z = c_1 (\omega^2 + r^2)^{\frac{r}{2}}$; $c_1 > 0$ où l'inégalité (1.3) est vérifiée. D'où l'intégration dans (1.4) Selon la droite $Re\ \lambda = \delta_0$ peut être remplacée par l'intégration sur la parabole .

$$U(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} e^{\lambda t} \quad (A + \lambda I)^{-1} \, d\lambda \tag{1.5}$$

Où

$$\Gamma_1 = \left\{ \lambda = \omega - z + i\tau \ ;\ z = c_1 \left(\omega^2 + r^2\right)^{\frac{r}{2}}, \tau \geq 0 \right\}.$$

Et

$$\Gamma_2 = \left\{ \lambda = \omega - z + i\tau \ ;\ z = c_1 \left(\omega^2 + r^2\right)^{\frac{r}{2}}, \tau \leq 0 \right\}.$$

L'intégrale (1.5) est absolument convergente pour $\tau < 1$

$$\begin{aligned} \|U(t)\| &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} e^{\lambda t} \quad (A + \lambda I)^{-1} \, d\lambda \right\|. \\ &\leq c \int_0^\infty e^{(\omega - \tau)t} \quad |\lambda|^{-r} \quad d\tau. \\ &\leq c \quad e^{\omega t} \ t^{1 - \dfrac{1}{\tau}}. \end{aligned}$$

Utilisons l'identité $(A + \lambda I)^{-1} = \lambda^{-1} I - \lambda^{-1} A (A + \lambda I)$ nous obtenons une représentation pour (1.4) sur les éléments $v \in D$

$$U(t)V = V - \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_0 - i\infty}^{\delta_0 + i\infty} e^{\lambda t} (A + \lambda I)^{-1} \ AV \ d\lambda. \tag{1.6}$$

Pour t tendant vers zéro la dernière intégrale converge vers zéro, donc

$$\lim_{t \to O^+} U(t)V = V, \text{ pour } v \in D.$$

Si dans l'égalité (1.6) *on intégre selon la parabole* $\Gamma_1 + \Gamma_2$, *alors la formule sera vraie* $\forall v \in E$, *De plus*

$$U'(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_1+\Gamma_2} e^{\lambda t} \ A \ \left(A + \lambda I\right)^{-1} d\lambda \tag{1.7}$$

Cette intégrale est absolument convergente. $U'(t) = -AU(t)$ *et*

$$\begin{aligned} \left\| U'(t) \right\| &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_1+\Gamma_2} e^{\lambda t} \ A \ \left(A + \lambda I\right)^{-1} d\lambda \right\|. \\ &\leq C \int\limits_0^\infty e^{(\omega-\tau)t} \quad |\lambda|^{1-r} \quad d\tau. \\ &\leq c \ \ e^{\omega t} \ t^{1-\frac{2}{\tau}}. \end{aligned}$$

Pour démontrer les propriétés du Semi-groupe, utilisons le problème de Gauchy

$$\begin{cases} V' + AV = 0 \\ V(0) = 0 \end{cases} . \tag{1.8}$$

Et montrons qu'il admet uniquement la solution triviale dans la classe des fonctions $V = V(t)$ *vérifiant pour* t *assez grand l'inégalité* $\|V(t)\| \leq e^{\omega t}$.*pour celà posons* $W(\lambda) = \int_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-\lambda t} \ V(t) \ dt$, *pour* $\varepsilon > 0$, *où* $V(t)$ *est une certaine solution du problème* (1.8) *dans la classe donée . Pour Re* $\lambda > \omega$ *on peut faire tendre* $\varepsilon \to 0$ *dans l'inégalité, en suite transformons l'expression* $AW(\lambda)$ *en utilisant* (1.8) *et intégrant par parties*

$$\begin{aligned} AW(\lambda) &= \int\limits_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-\lambda t} AV(t) dt. \\ &= -\int\limits_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-\lambda t} V'(t) dt. \\ &= e^{-\lambda\varepsilon} V(\varepsilon) - e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}} - \lambda \int\limits_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-\lambda t} AV(t) dt. \end{aligned}$$

Les termes hors intégrale tendent vers zéro lorsque ε *tend vers zéro, nous obtenons* $AW(\lambda) + \lambda W(\lambda) = 0$, *comme Re* $\lambda > \omega$ *appartient à l'ensemble résolvante de* A, *alors la dernière égalité donne* $W(\lambda) = 0$. *Et en utilisant la transformation inverse de Laplace on obtient que* $V(t) = 0$. *De ce qui précède on a l'unicité de la solution du problème* (1.8).

On considère le problème

$$\begin{cases} u^{'} + Au = 0. \\ u(0) = x. \end{cases} \tag{1.9}$$

$x \in E$,$u(t) = U(t)x$. *Et soit le problème auxiliaire*

$$\begin{cases} v^{'} + Av = 0. \\ v(0) = u(s). \end{cases} \tag{1.10}$$

Ce qui implique que $v(t) = U(t)u(s)$. *Seconde solution qui s'écrit* $v(t) = U(t+s)x$.

Vu l'unicité on obtient $U(t+s)x = u(t)u(s)x$. *Ce qui entraine l'unicité du semi-groupe engendré par l'opérateur* A. ■

Chapitre 2

Problème aux limites pour une équation différentielle du second ordre avec conditions aux limites non locales dans $\mathcal{L}^{\infty}(0\ ,1)$

Dans ce chapitre on étudie un problème aux limites pour une équation différentielles ordinaire du second ordre combinant des conditions aux limites du type intégrale à poids et une condition non locale liant les valeurs de la fonction inconnue aux extrémités de l'intervalle ainsi que ses dérivées, On extrait deux classes de conditions aux limites, l'une dite régulière pour laquelle on montre la décroissance maximale de la résolvante et l'autre dite faiblement régulière pour laquelle la décroissance de la résolvante est non maximale, L'idée consiste en une étude détaillée de la fonction de Green du problème considéré.

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} L\ (u) = -u'' \\ B_1(u) = \alpha_1 \lambda u\ (0) + \beta_1 u'(0) + \gamma_1 u\ (1) + \delta_1 u'(1) + \int\limits_0^1 (R_1(t)u(t) + S_1(t)u'(t))dt = 0 \\ B_2(u) = \alpha_2 \lambda u\ (0) + B_2 u'(0) + \gamma_2 u\ (1) + \delta_2 u'(1) + \int\limits_0^1 (R_2(t)u(t) + S_2(t)u'(t))dt = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

où les fonctions $R_i\ , S_i \in C^1([0\ ,1]\ ,\mathbb{C})\ ; i=\overline{1\ ,2}$.

soit l'opérateur $L_\infty : L^\infty(0\ ,1) \to L^\infty(0\ ,1)\ , u \to L_\infty(u) = u''$

de domaine :

$$D(L_\infty) = \{u \in W^{2,\infty}(0,1); B_i\,(u) = 0\ , i=\overline{1\ ,2}\}$$

2.1 Construction de la fonction de Green

Dans toute la suite on considère $\lambda \in \sum\limits_{\delta}$ où :

$$\sum_{\delta} = \{\ \lambda \in \mathbb{C}\ ; |\arg(\lambda)\ | \leq \delta\ , \frac{\pi}{2} < \delta < \pi\ \}$$

soit l'opérateur suivant :

$$\begin{cases} -u'' - \lambda u = h\ (x) \\ B_1(u) = \alpha_1 \lambda u\ (0) + \beta_1 u'(0) + \gamma_1 u\ (1) + \delta_1 u'(1) + \displaystyle\int_0^1 (R_1(t)u(t) + S_1(t)u'(t))dt = 0 \\ B_2(u) = \alpha_2 \lambda u\ (0) + B_2 u'(0) + \gamma_2 u\ (1) + \delta_2 u'(1) + \int_0^1 (R_2(t)u(t) + S_2(t)u'(t))dt = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

Si l'on suppose que le problème homogène correspondant à (2.2) n'admet que la solution triviale, alors d'après le théorème (0.2.4) , le problème (2.2) admet une fonction de Green unique $G(x\ ,s\ ,\lambda)$, pour la construire nous allons utiliser le théorème(0.2.3).

D'après la condition 3 du théorème (0.2.3), $G\ (x\ ,s\ ,\lambda)$ est une solution du problème homogène, d'où $G\ (x\ ,s\ ,\lambda)$ se met sous la forme :

$$G\ (x\ ,s\ ,\lambda) = \begin{cases} a_1(s)e^{-i\rho x} + a_2(s)e^{i\rho x} & ; sur\ \ ]0\ ,s[\\ b_1(s)e^{-i\rho x} + b_2(s)e^{i\rho x} & ; sur\ \ ]s\ ,1[\end{cases} \tag{2.3}$$

Où $\rho = \lambda^{\frac{1}{2}}$, $\mathrm{Re}(\rho) > 0$, d'après la condition 1 du théoème (0.2.3) on a : $G\ (x, s, \lambda)$ est une fonction continue pour tout x et $s \in [0\ ,1]$ alors :

$$a_1(s)e^{-i\rho x} + a_2(s)e^{i\rho x} = b_1(s)e^{-i\rho x} + b_2(s)e^{i\rho x}$$

D'où :

$$-\left(a_1\left(s\right)-b_1\left(s\right)\right)e^{-i\rho x}-\left(a_2\left(s\right)-b_2\left(s\right)\right)e^{i\rho x}=0 \tag{2.4}$$

D'après la condition 2 du même théorème on a :

$$(-i\rho b_1(s)e^{-i\rho x}+i\rho b_2(s)e^{i\rho x})-(-i\rho a_1(s)e^{-i\rho x}+i\rho a_2(s)e^{i\rho x})=1$$

Donc :

$$\left(a_1\left(s\right)-b_1\left(s\right)\right)\rho e^{-i\rho x}-\left(a_2\left(s\right)-b_2\left(s\right)\right)\rho e^{i\rho x}=1 \tag{2.5}$$

Et d'après la condition 3 du théorème (0.2.3), on a :

$$B_i(G)=0 \quad , \quad i=\overline{1\ ,\ 2} \tag{2.6}$$

De (2.4) , (2.5) et (2.6) on obtient le système :

$$\begin{cases} \left(a_1\left(s\right)-b_1\left(s\right)\right)\rho e^{-i\rho x}-\left(a_2\left(s\right)-b_2\left(s\right)\right)\rho e^{i\rho x}=1 \\ -\left(a_1\left(s\right)-b_1\left(s\right)\right)e^{-i\rho x}-\left(a_2\left(s\right)-b_2\left(s\right)\right)e^{i\rho x}=0 \\ B_1(G)=0 \;\text{ et }\; B_2(G)=0 \end{cases} \tag{2.7}$$

De (2.4) et (2.5) on a :

$$W=\begin{vmatrix} \rho e^{-i\rho x} & -\rho e^{i\rho x} \\ -e^{-i\rho x} & -e^{i\rho x} \end{vmatrix}=-2\rho$$

Alors :

$$\left(a_1\left(s\right)-b_1\left(s\right)\right)=\frac{-1}{2\rho}\begin{vmatrix} 1 & -\rho e^{i\rho x} \\ 0 & -e^{i\rho x} \end{vmatrix}=\frac{e^{i\rho s}}{2\rho}$$

D'où :

$$a_1\left(s\right)=b_1\left(s\right)+\frac{e^{i\rho s}}{2\rho} \tag{2.8}$$

Et

$$a_2\left(s\right)-b_2\left(s\right)=\frac{-1}{2\rho}\begin{vmatrix} \rho e^{-i\rho x} & 1 \\ -e^{-i\rho x} & 0 \end{vmatrix}=\frac{-e^{-i\rho s}}{2\rho}$$

D'où :

$$a_2\left(s\right)=b_2\left(s\right)-\frac{e^{-i\rho s}}{2\rho} \tag{2.9}$$

D'après (2.6) on obtient :

$$B_1(G)=(\alpha_1\lambda-i\beta_1\rho)a_1(s)+(\alpha_1\lambda+i\beta_1\rho)a_2(s)+(\gamma_1-i\rho\delta_1)b_1(s)e^{-i\rho}$$

$$+(\gamma_1+i\rho\delta_1)b_2(s)e^{i\rho}+\int_0^s[R_1(x)(a_1(s)e^{-i\rho x}+a_2(s)e^{i\rho x})+S_1(x)$$

$$(-i\rho a_1(s)e^{-i\rho x}+i\rho a_2(s)e^{i\rho x})]dx+\int_s^1[R_1(x)(b_1(s)e^{-i\rho x}+b_2(s)e^{i\rho x})$$

$$+S_1(x)(-i\rho b_1(s)e^{-i\rho x}+i\rho b_2(s)e^{i\rho x})]dx=0$$

Et d'un manière similarie on obtient $B_2(G)$, d'où :

$$\begin{cases} B_1(G)=(\alpha_1\lambda-i\beta_1\rho)a_1(s)+(\alpha_1\lambda+i\beta_1\rho)a_2(s)+(\gamma_1-i\rho\delta_1)b_1(s)e^{-i\rho}+(\gamma_1+i\rho\delta_1) \\ \quad b_2(s)e^{i\rho}+\int_0^s[(R_1(x)-i\rho S_1(x))e^{-i\rho x}a_1(s)+(R_1(x)+i\rho S_1(x))a_2(s)e^{i\rho x}]dx+ \\ \quad\quad +\int_s^1[R_1(x)-i\rho S_1(x))e^{-i\rho x}b_1(s)+(R_1(x)+i\rho S_1(x))b_2(s)e^{i\rho x}]dx=0 \\ \\ B_2(G)=(\alpha_2\lambda-i\beta_2\rho)a_1(s)+(\alpha_2\lambda+i\beta_2\rho)a_2(s)+(\gamma_2-i\rho\delta_2)b_1(s)e^{-i\rho}+(\gamma_2+i\rho\delta_2) \\ \quad b_2(s)e^{i\rho}+\int_0^s[R_2(x)-i\rho S_2(x))e^{-i\rho x}a_1(s)+(R_2(x)+i\rho S_2(x))a_2(s)e^{i\rho x})]dx+ \\ \quad\quad +\int_s^1[R_2(x)-i\rho S_2(x))e^{-i\rho x}b_1(s)+(R_2(x)+i\rho S_2(x))b_2(s)e^{i\rho x}]dx=0 \end{cases} \tag{2.10}$$

On remplaçant (2.8) et (2.9) dans (2.10) on trouve :

$$B_1(G)=(\alpha_1\lambda-i\beta_1\rho)(b_1\,(s)+\frac{e^{i\rho s}}{2\rho})+(\alpha_1\lambda+i\beta_1\rho)(b_2\,(s)-\frac{e^{-i\rho s}}{2\rho})$$

$$+(\gamma_1-i\rho\delta_1)b_1(s)e^{-i\rho}+(\gamma_1+i\rho\delta_1)b_2(s)e^{i\rho}+\int_0^s[(R_1(x)-i\rho S_1(x))$$

$$(b_1\,(s)+\frac{e^{i\rho s}}{2\rho})e^{-i\rho x}+(R_1(x)+i\rho S_1(x))(b_2\,(s)-\frac{e^{-i\rho s}}{2\rho})e^{i\rho x}]dx$$

$$+\int_s^1[R_1(x)-i\rho S_1(x))e^{-i\rho x}b_1(s)+(R_1(x)+i\rho S_1(x))b_2(s)e^{i\rho x}]dx=0$$

Donc :

$$\begin{cases} B_1(G) = [\alpha_1\lambda - i\beta_1\rho + \gamma_1 e^{-i\rho} - i\rho\delta_1 e^{-i\rho} + \int\limits_0^1 (R_1(x) - i\rho S_1(x))e^{-i\rho x}dx]b_1\left(s\right) + \\ [\alpha_1\lambda + i\beta_1\rho + \gamma_1 e^{i\rho} + i\rho\delta_1 e^{i\rho} + \int\limits_0^1 (R_1(x) + i\rho S_1(x))e^{i\rho x}dx]b_2\left(s\right) + \frac{1}{2\rho}((\alpha_1\lambda - i\beta_1\rho)e^{i\rho s} \\ -(\alpha_1\lambda + i\beta_1\rho)e^{-i\rho s}) + \frac{1}{2\rho}\int\limits_0^s [(R_1(x) - i\rho S_1(x))e^{i\rho(s-x)} - (R_1(x) + i\rho S_1(x))e^{i\rho(x-s)}]dx = 0 \\ et \\ B_2(G) = [\alpha_2\lambda - i\beta_2\rho + \gamma_2 e^{-i\rho} - i\rho\delta_2 e^{-i\rho} + \int\limits_0^1 (R_2(x) - i\rho S_2(x))e^{-i\rho x}dx]b_1\left(s\right) + \\ [\alpha_2\lambda + i\beta_2\rho + \gamma_2 e^{i\rho} + i\rho\delta_2 e^{i\rho} + \int\limits_0^1 (R_2(x) + i\rho S_2(x))e^{i\rho x}dx]b_2\left(s\right) + \frac{1}{2\rho}((\alpha_2\lambda - i\beta_2\rho)e^{i\rho s} \\ -(\alpha_2\lambda + i\beta_2\rho)e^{-i\rho s}) + \frac{1}{2\rho}\int\limits_0^s [(R_2(x) - i\rho S_2(x))e^{i\rho(s-x)} - (R_2(x) + i\rho S_2(x))e^{i\rho(x-s)}]dx = 0 \end{cases}$$

C'est -à-dire :

$$B_1(G) = B_1(u_1)b_1\left(s\right) + B_1(u_2)b_2\left(s\right) + \frac{1}{2\rho}((\alpha_1\lambda - i\beta_1\rho)e^{i\rho s}$$
$$-(\alpha_1\lambda + i\beta_1\rho)e^{-i\rho s}) + \frac{1}{2\rho}\int\limits_0^s [(R_1(x) - i\rho S_1(x))e^{i\rho(s-x)} - (R_1(x)$$
$$+i\rho S_1(x))e^{i\rho(x-s)}]dx = 0$$
$$B_2(G) = B_2(u_1)b_1\left(s\right) + B_2(u_2)b_2\left(s\right) + \frac{1}{2\rho}((\alpha_2\lambda - i\beta_2\rho)e^{i\rho s}$$
$$-(\alpha_2\lambda + i\beta_2\rho)e^{-i\rho s}) + \frac{1}{2\rho}\int\limits_0^s [(R_2(x) - i\rho S_2(x))e^{i\rho(s-x)} - (R_2(x)$$
$$+i\rho S_2(x))e^{i\rho(x-s)}]dx = 0$$

Où :

$$\begin{cases} B_1(u_1) = \alpha_1\lambda - i\beta_1\rho + \gamma_1 e^{-i\rho} - i\rho\delta_1 e^{-i\rho} + \int\limits_0^1 (R_1(x) - i\rho S_1(x))e^{-i\rho x}dx \\ B_1(u_2) = \alpha_1\lambda + i\beta_1\rho + \gamma_1 e^{i\rho} + i\rho\delta_1 e^{i\rho} + \int\limits_0^1 (R_1(x) + i\rho S_1(x))e^{i\rho x}dx \\ B_2(u_1) = \alpha_2\lambda - i\beta_2\rho + \gamma_2 e^{-i\rho} - i\rho\delta_2 e^{-i\rho} + \int\limits_0^1 (R_2(x) - i\rho S_2(x))e^{-i\rho x}dx \\ B_2(u_2) = \alpha_2\lambda + i\beta_2\rho + \gamma_2 e^{i\rho} + i\rho\delta_2 e^{i\rho} + \int\limits_0^1 (R_2(x) + i\rho S_2(x))e^{i\rho x}dx]b_2\left(s\right) \end{cases}$$

Et si on a :

$$\triangle\ (\lambda) = \begin{vmatrix} B_1(u_1) & B_1(u_2) \\ B_2(u_1) & B_2(u_2) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2.11}$$

Alors , ce système admet un seul solution :

$$b_1\,(s) = \frac{1}{\triangle\ (\lambda)2\rho}[B_2(u_2) \times [-(\alpha_1\lambda - i\beta_1\rho)e^{i\rho s} + (\alpha_1\lambda + i\beta_1\rho)e^{-i\rho s}$$
$$-\int_0^s [(R_1(x) - i\rho S_1(x))e^{i\rho(s-x)} - (R_1(x) + i\rho S_1(x))e^{i\rho(x-s)}]dx]$$
$$-B_1(u_2) \times [-(\alpha_2\lambda - i\beta_2\rho)e^{i\rho s} + (\alpha_2\lambda + i\beta_2\rho)e^{-i\rho s}$$
$$-\int_0^s [(R_2(x) - i\rho S_2(x))e^{i\rho(s-x)} - (R_2(x) + i\rho S_2(x))e^{i\rho(x-s)}]dx]$$

et

$$b_2\,(s) = \frac{1}{\triangle\ (\lambda)2\rho}[B_1(u_1) \times [-(\alpha_2\lambda - i\beta_2\rho)e^{i\rho s} + (\alpha_2\lambda + i\beta_2\rho)e^{-i\rho s})$$
$$-\int_0^s [(R_2(x) - i\rho S_2(x))e^{i\rho(s-x)} - (R_2(x) + i\rho S_2(x))e^{i\rho(x-s)}]dx]$$
$$-B_2(u_1) \times [-(\alpha_1\lambda - i\beta_1\rho)e^{i\rho s} + (\alpha_1\lambda + i\beta_1\rho)e^{-i\rho s}$$
$$-\int_0^s [(R_1(x) - i\rho S_1(x))e^{i\rho(s-x)} - (R_1(x) + i\rho S_1(x))e^{i\rho(x-s)}]dx]$$

Notons par :

$$\triangle_{xy} = x_1y_2 - x_2y_1$$

$$\triangle_R\ (t\ ,\varepsilon) = R_1(t)R_2(\varepsilon) - R_2(t)R_1(\varepsilon)$$

$$\triangle_S\ (t\ ,\varepsilon) = S_1(t)S_2(\varepsilon) - S_1(\varepsilon)S_2(t)$$

$$\triangle_{RS}\ (t\ ,\varepsilon) = R_1(t)S_2(\varepsilon) - R_2(t)S_1(\varepsilon)$$

Ainsi d'après la formule (2.3), la fonction de Green s'ècrit si $x > s$, on a donc :

$$G(x\ ,s\ ,\lambda) = \frac{1}{\triangle\ (\lambda)2\rho}[e^{i\rho(x+s)}\{\ (\lambda \triangle_{\alpha\gamma} - i\rho(\lambda \triangle_{\alpha\delta} + \triangle_{\beta\gamma}) - \rho^2 \triangle_{\beta\delta})e^{-i\rho}$$
$$-\int_0^s (\triangle_{\gamma R}\ (t) - i\rho(\triangle_{\delta R}\ (t) + \triangle_{\gamma S}\ (t)) - \rho^2 \triangle_{\delta S}\ (t))e^{-i\rho(t+1)}dt$$
$$+\int_s^1 (\lambda \triangle_{\alpha R}\ (t) - i\rho(\lambda \triangle_{\alpha S}\ (t) + \triangle_{\beta R}\ (t)) - \rho^2 \triangle_{\beta S}\ (t))e^{-i\rho t}dt$$
$$+\int_s^1\int_0^s (\triangle_R\ (\varepsilon, t) + i\rho(\triangle_{RS}\ (t,\varepsilon) - \triangle_{RS}\ (\varepsilon, t)) - \rho^2 \triangle_S\ (\varepsilon, t))e^{-i\rho(\varepsilon+t)}d\varepsilon dt\ \}$$
$$+e^{-i\rho(x+s)}\{\ (\lambda \triangle_{\alpha\gamma} + i\rho(\lambda \triangle_{\alpha\delta} + \triangle_{\beta\gamma}) - \rho^2 \triangle_{\beta\delta})e^{i\rho}$$

$$-\int_0^s (\triangle_{\gamma R}\ (t) + i\rho(\triangle_{\delta R}\ (t)+ \triangle_{\gamma S}\ (t)) - \rho^2\ \triangle_{\delta S}\ (t))e^{i\rho(t+1)}dt$$
$$+\int_s^1 (\lambda\ \triangle_{\alpha R}\ (t) + i\rho(\triangle_{\beta R}\ (t) + \lambda\ \triangle_{\alpha S}\ (t)) - \rho^2\ \triangle_{\beta S}\ (t))e^{i\rho t}dt$$
$$+\int_s^1\int_0^s (\triangle_R\ (\varepsilon,t) + i\rho(\triangle_{RS}\ (\varepsilon,t)- \triangle_{RS}\ (t,\varepsilon)) - \rho^2\ \triangle_S\ (\varepsilon,t))e^{i\rho(\varepsilon+t)}d\varepsilon dt\ \}$$
$$+e^{i\rho(x-s)}\{(-\lambda\ \triangle_{\alpha\gamma} + i\rho(\lambda\ \triangle_{\alpha\delta} - \triangle_{\beta\gamma}) - \rho^2\ \triangle_{\beta\delta})e^{-i\rho} + 2i\rho\lambda\ \triangle_{\alpha\beta}$$
$$+\int_0^s (\lambda\ \triangle_{\alpha R}\ (t) + i\rho(\lambda\ \triangle_{\alpha S}\ (t)+ \triangle_{\beta R}\ (t)) + \rho^2\ \triangle_{\beta S}\ (t))e^{i\rho t}dt$$
$$+\int_0^s (\triangle_{\gamma R}\ (t) + i\rho(\triangle_{\gamma S}\ (t)- \triangle_{\delta R}\ (t)) + \rho^2\ \triangle_{\delta S}\ (t))e^{i\rho(t-1)}dt$$
$$+\int_0^1 (\lambda\ \triangle_{\alpha R}\ (t) + i\rho(\triangle_{\beta R}\ (t) - \lambda\ \triangle_{\alpha S}\ (t)) + \rho^2\ \triangle_{\beta S}\ (t))e^{-i\rho t}dt$$
$$+\int_s^1\int_0^s (\triangle_R\ (t,\varepsilon) + i\rho(\triangle_{RS}\ (\varepsilon,t)- \triangle_{RS}\ (t,\varepsilon)) + \rho^2\ \triangle_S\ (t,\varepsilon))e^{i\rho(\varepsilon-t)}d\varepsilon dt\}$$
$$+e^{i\rho(s-x)}\{(-\lambda\ \triangle_{\alpha\gamma} + i\rho(\triangle_{\beta\gamma} - \lambda\ \triangle_{\alpha\delta}) - \rho^2\ \triangle_{\beta\delta})e^{i\rho} - 2i\rho\lambda\ \triangle_{\alpha\beta}$$
$$+\int_0^s (\lambda\ \triangle_{\alpha R}\ (t) + i\rho(\triangle_{\beta R}\ (t) - \lambda\ \triangle_{\alpha S}\ (t)) + \rho^2\ \triangle_{\beta S}\ (t))e^{-i\rho t}dt$$
$$+\int_0^s (\triangle_{\gamma R}\ (t) + i\rho(\triangle_{\delta R}\ (t)- \triangle_{\gamma S}\ (t)) + \rho^2\ \triangle_{\delta S}\ (t))e^{i\rho(1-t)}dt$$
$$-\int_0^1 (\lambda\ \triangle_{\alpha R}\ (t) + i\rho(\lambda\ \triangle_{\alpha S}\ (t)- \triangle_{\beta R}\ (t)) + \rho^2\ \triangle_{\beta S}\ (t))e^{i\rho t}dt$$
$$+\int_0^1\int_0^s (\triangle_R\ (t,\varepsilon) - i\rho(\triangle_{RS}\ (\varepsilon,t)+ \triangle_{RS}\ (t,\varepsilon)) + \rho^2\ \triangle_S\ (t,\varepsilon))e^{i\rho(t-\varepsilon)}d\varepsilon dt\}]$$

Et si $x < s$:

$$\begin{aligned} G\ (x\ ,s\ ,\lambda) &= a_1(s)e^{-i\rho x} + a_2(s)e^{i\rho x} = (b_1(s) + \frac{e^{i\rho s}}{2\rho})e^{-i\rho x} + (b_2(s) - \frac{e^{-i\rho s}}{2\rho})e^{i\rho x} \\ &= b_1(s)e^{-i\rho x} + b_2(s)e^{i\rho x} + \frac{1}{2\rho}(e^{i\rho(s-x)} - e^{i\rho(x-s)}) \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$G\ (x\ ,s\ ,\lambda) = \frac{1}{2\rho\ \triangle\ (\lambda)}[e^{i\rho(x+s)}\{\ (\lambda\ \triangle_{\alpha\gamma} - i\rho(\lambda\ \triangle_{\alpha\delta} + \triangle_{\beta\gamma}) - \rho^2\ \triangle_{\beta\delta})e^{-i\rho}$$

$$-\int_0^s (\triangle_{\gamma R}\ (t) + i\rho(\triangle_{\delta R}\ (t) + \triangle_{\gamma S}\ (t)) - \rho^2\ \triangle_{\delta S}\ (t))e^{-i\rho(t+1)}dt$$

$$+\int_s^1 (\lambda\ \triangle_{\alpha R}\ (t) - i\rho(\lambda\ \triangle_{\alpha S}\ (t) + \triangle_{\beta R}\ (t)) - \rho^2\ \triangle_{\beta S}\ (t))e^{-i\rho t}dt$$

$$+\int_s^1\int_0^s (\triangle_R\ (\varepsilon, t) + i\rho(\triangle_{RS}\ (t, \varepsilon) - \triangle_{RS}\ (\varepsilon, t)) - \rho^2\ \triangle_S\ (\varepsilon, t))e^{-i\rho(\varepsilon+t)}d\varepsilon dt\ \}$$

$$+e^{-i\rho(x+s)}\{\ (\lambda\ \triangle_{\alpha\gamma} + i\rho(\lambda\ \triangle_{\alpha\delta} + \triangle_{\beta\gamma}) - \rho^2\ \triangle_{\beta\delta})e^{i\rho}$$

$$-\int_0^s (\triangle_{\gamma R}\ (t) + i\rho(\triangle_{\delta R}\ (t) + \triangle_{\gamma S}\ (t)) - \rho^2\ \triangle_{\delta S}\ (t))e^{i\rho(t+1)}dt$$

$$+\int_s^1 (\lambda\ \triangle_{\alpha R}\ (t) + i\rho(\triangle_{\beta R}\ (t) + \lambda\ \triangle_{\alpha S}\ (t)) - \rho^2\ \triangle_{\beta S}\ (t))e^{i\rho t}dt$$

$$+\int_s^1\int_0^s (\triangle_R\ (\varepsilon, t) + i\rho(\triangle_{RS}\ (\varepsilon, t) - \triangle_{RS}\ (t, \varepsilon)) - \rho^2\ \triangle_S\ (\varepsilon, t))e^{i\rho(\varepsilon+t)}d\varepsilon dt\ \}$$

$$+e^{i\rho(x-s)}\{\ (-\lambda\ \triangle_{\alpha\gamma} + i\rho(\triangle_{\beta\gamma} - \lambda\ \triangle_{\alpha\delta}) - \rho^2\ \triangle_{\beta\delta})e^{i\rho} - 2i\rho\lambda\ \triangle_{\alpha\delta}$$

$$-\int_s^1 (\lambda\ \triangle_{\alpha R}\ (t) + i\rho(\lambda\ \triangle_{\alpha S}\ (t) - \triangle_{\beta R}\ (t)) + \rho^2\ \triangle_{\beta S}\ (t))e^{i\rho t}dt$$

$$-\int_s^1 (\triangle_{\gamma R}\ (t) + i\rho(\triangle_{\gamma S}\ (t) - \triangle_{\delta R}\ (t)) + \rho^2\ \triangle_{\delta S}\ (t))e^{i\rho(t-1)}dt$$

$$+\int_0^1 (\triangle_{\gamma R}\ (t) + i\rho(\triangle_{\delta R}\ (t) - \triangle_{\gamma S}\ (t)) + \rho^2\ \triangle_{\delta S}\ (t))e^{i\rho(1-t)}dt$$

$$+\int_0^1\int_s^1 (\triangle_R\ (\varepsilon, t) - i\rho(\triangle_{RS}\ (t, \varepsilon) - \triangle_{RS}\ (\varepsilon, t)) + \rho^2\ \triangle_S\ (\varepsilon, t))e^{i\rho(\varepsilon+t)}d\varepsilon dt\ \}$$

$$+e^{i\rho(s-x)}\{\ (-\lambda\ \triangle_{\alpha\gamma} + i\rho(\lambda\ \triangle_{\alpha\delta} - \triangle_{\beta\gamma}) - \rho^2\ \triangle_{\beta\delta})e^{-i\rho} + 2i\rho\ \triangle_{\gamma\delta}$$

$$-\int_s^1 (\lambda\ \triangle_{\alpha R}\ (t) + i\rho(\triangle_{\beta R}\ (t) + \lambda\ \triangle_{\alpha S}\ (t)) + \rho^2\ \triangle_{\beta S}\ (t))e^{-i\rho t}dt$$

$$-\int_s^1 (\triangle_{\gamma R}\ (t) + i\rho(\triangle_{\delta R}\ (t) - \triangle_{\gamma S}\ (t)) + \rho^2\ \triangle_{\delta S}\ (t))e^{i\rho(1-t)}dt$$

$$+\int_0^1 (\triangle_{\gamma R}\ (t) + i\rho(\triangle_{\gamma S}\ (t) - \triangle_{\delta R}\ (t)) + \rho^2\ \triangle_{\delta S}\ (t))e^{i\rho(t-1)}dt$$

$$+\int_0^1\int_s^1 (\triangle_R\ (\varepsilon,t)+i\rho(\triangle_{RS}\ (t,\varepsilon)+\triangle_{RS}\ (\varepsilon,t))+\rho^2\ \triangle_S\ (\varepsilon,t))e^{i\rho(t-\varepsilon)}d\varepsilon dt\ \}$$

Donc on a le théorème

Théorème 2.1.1 *Soit $\lambda\in\mathbb{C}$ tel que $\Delta(\lambda)\neq 0$, alors le problème (2.1) admet une fonction de Green unique donnée par :*

$$G\ (x\ ,s\ ,\lambda)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\left[\varphi(x)+\varphi_i(x)\right]$$

où : $\begin{cases} i=1\ ;si & x>s\\ i=2\ ;si & x<s\end{cases}$

avec :

$$\begin{aligned}
\varphi(x\ ,s\ ,\lambda)=&\frac{1}{2\rho}[e^{i\rho(x+s)}\{\ (\lambda\ \triangle_{\alpha\gamma}\ -i\rho(\lambda\ \triangle_{\alpha\delta}+\triangle_{\beta\gamma})-\rho^2\ \triangle_{\beta\delta})e^{-i\rho}\\
&-\int_0^s(\triangle_{\gamma R}\ (t)-i\rho(\triangle_{\delta R}\ (t)+\triangle_{\gamma S}\ (t))-\rho^2\ \triangle_{\delta S}\ (t))e^{-i\rho(t+1)}dt\\
&+\int_s^1(\lambda\ \triangle_{\alpha R}\ (t)-i\rho(\lambda\ \triangle_{\alpha S}\ (t)+\triangle_{\beta R}\ (t))-\rho^2\ \triangle_{\beta S}\ (t))e^{-i\rho t}dt\\
&+\int_s^1\int_0^s(\triangle_R\ (\varepsilon,t)+i\rho(\triangle_{RS}\ (t,\varepsilon)-\triangle_{RS}\ (\varepsilon,t))-\rho^2\ \triangle_S\ (\varepsilon,t))e^{-i\rho(\varepsilon+t)}d\varepsilon dt\ \}\\
&+e^{-i\rho(x+s)}\{\ (\lambda\ \triangle_{\alpha\gamma}\ +i\rho(\lambda\ \triangle_{\alpha\delta}+\triangle_{\beta\gamma})-\rho^2\ \triangle_{\beta\delta})e^{i\rho}\\
&-\int_0^s(\triangle_{\gamma R}\ (t)+i\rho(\triangle_{\delta R}\ (t)+\triangle_{\gamma S}\ (t))-\rho^2\ \triangle_{\delta S}\ (t))e^{i\rho(t+1)}dt\\
&+\int_s^1(\lambda\ \triangle_{\alpha R}\ (t)+i\rho(\triangle_{\beta R}\ (t)+\lambda\ \triangle_{\alpha S}\ (t))-\rho^2\ \triangle_{\beta S}\ (t))e^{i\rho t}dt\\
&+\int_s^1\int_0^s(\triangle_R\ (\varepsilon,t)+i\rho(\triangle_{RS}\ (\varepsilon,t)-\triangle_{RS}\ (t,\varepsilon))-\rho^2\ \triangle_S\ (\varepsilon,t))e^{i\rho(\varepsilon+t)}d\varepsilon dt\ \}
\end{aligned}\tag{2.12}$$

Ainsi que :

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x\ ,s\ ,\lambda)=&\frac{1}{2\rho}[e^{i\rho(x-s)}\{\ (-\lambda\ \triangle_{\alpha\gamma}\ +i\rho(\lambda\ \triangle_{\alpha\delta}-\triangle_{\beta\gamma})-\rho^2\ \triangle_{\beta\delta})e^{-i\rho}\\
&+2i\rho\lambda\ \triangle_{\alpha\beta}+\int_0^s(\lambda\ \triangle_{\alpha R}\ (t)+i\rho(\lambda\ \triangle_{\alpha S}\ (t)+\triangle_{\beta R}\ (t))+\rho^2\ \triangle_{\beta S}\ (t))e^{i\rho t}dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^s (\triangle_{\gamma R}\ (t) + i\rho(\triangle_{\gamma S}\ (t) - \triangle_{\delta R}\ (t)) + \rho^2\ \triangle_{\delta S}\ (t))e^{i\rho(t-1)}dt \\
&-\int_0^1 (\lambda\ \triangle_{\alpha R}\ (t) + i\rho(\triangle_{\beta R}\ (t) - \lambda\ \triangle_{\alpha S}\ (t)) + \rho^2\ \triangle_{\beta S}\ (t))e^{-i\rho t}dt \\
&+\int_0^1\int_0^s (\triangle_{R}\ (t,\varepsilon) + i\rho(\triangle_{RS}\ (\varepsilon,t) - \triangle_{RS}\ (t,\varepsilon)) + \rho^2\ \triangle_{S}\ (t,\varepsilon))e^{i\rho(\varepsilon-t)}d\varepsilon dt\ \} \\
&+e^{i\rho(s-x)}\{\ (-\lambda\ \triangle_{\alpha\gamma} + i\rho(\triangle_{\beta\gamma} - \lambda\ \triangle_{\alpha\delta}) - \rho^2\ \triangle_{\beta\delta})e^{i\rho} - 2i\rho\lambda\ \triangle_{\alpha\beta} \\
&+\int_0^s (\lambda\ \triangle_{\alpha R}\ (t) + i\rho(\triangle_{\beta R}\ (t) - \lambda\ \triangle_{\alpha S}\ (t)) + \rho^2\ \triangle_{\beta S}\ (t))e^{-i\rho t}dt \\
&+\int_0^s (\triangle_{\gamma R}\ (t) + i\rho(\triangle_{\delta R}\ (t) - \triangle_{\gamma S}\ (t)) + \rho^2\ \triangle_{\delta S}\ (t))e^{i\rho(1-t)}dt \\
&-\int_0^1 (\lambda\ \triangle_{\alpha R}\ (t) + i\rho(\lambda\ \triangle_{\alpha S}\ (t) - \triangle_{\beta R}\ (t)) + \rho^2\ \triangle_{\beta S}\ (t))e^{i\rho t}dt \\
&+\int_0^1\int_0^s (\triangle_{R}\ (t,\varepsilon) - i\rho(\triangle_{RS}\ (\varepsilon,t) + \triangle_{RS}\ (t,\varepsilon)) + \rho^2\ \triangle_{S}\ (t,\varepsilon))e^{i\rho(t-\varepsilon)}d\varepsilon dt\ \}]
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

Et

$$
\begin{aligned}
&\varphi_2(x\ ,s\ ,\lambda) = \frac{1}{2\rho}[e^{i\rho(x-s)}\{\ (-\lambda\ \triangle_{\alpha\gamma} + i\rho(\triangle_{\beta\gamma} - \lambda\ \triangle_{\alpha\delta}) - \rho^2\ \triangle_{\beta\delta})e^{i\rho} \\
&\quad -2i\rho\lambda\ \triangle_{\alpha\delta} - \int_s^1 (\lambda\ \triangle_{\alpha R}\ (t\ ) + i\rho(\lambda\ \triangle_{\alpha S}\ (t\ ) - \triangle_{\beta R}\ (t)) + \rho^2\ \triangle_{\beta S}\ (t))e^{i\rho t}dt \\
&\quad -\int_s^1 (\triangle_{\gamma R}\ (t) + i\rho(\triangle_{\gamma S}\ (t) - \triangle_{\delta R}\ (t)) + \rho^2\ \triangle_{\delta S}\ (t))e^{i\rho(t-1)}dt \\
&\quad +\int_0^1 (\triangle_{\gamma R}\ (t) + i\rho(\triangle_{\delta R}\ (t) - \triangle_{\gamma S}\ (t)) + \rho^2\ \triangle_{\delta S}\ (t))e^{i\rho(1-t)}dt \\
&\quad +\int_0^1\int_s^1 (\triangle_{R}\ (\varepsilon,t) - i\rho(\triangle_{RS}\ (t,\varepsilon) + \triangle_{RS}\ (\varepsilon,t)) + \rho^2\ \triangle_{S}\ (\varepsilon,t))e^{i\rho(\varepsilon+t)}d\varepsilon dt\ \} \\
&\quad +e^{i\rho(s-x)}\{\ (-\lambda\ \triangle_{\alpha\gamma} + i\rho(\lambda\ \triangle_{\alpha\delta} - \triangle_{\beta\gamma}) + \rho^2\ \triangle_{\beta\delta})e^{-i\rho} + 2i\rho\ \triangle_{\gamma\delta} \\
&\quad -\int_s^1 (\lambda\ \triangle_{\alpha R}\ (t) + i\rho(\triangle_{\beta R}\ (t) - \lambda\ \triangle_{\alpha S}\ (t)) + \rho^2\ \triangle_{\beta S}\ (t))e^{-i\rho t}dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\int_s^1 (\triangle_{\gamma R}\ (t) + i\rho(\triangle_{\delta R}\ (t) - \triangle_{\gamma S}\ (t)) + \rho^2\ \triangle_{\delta S}\ (t))e^{i\rho(1-t)}dt \\
&+\int_0^1 (\triangle_{\gamma R}\ (t) + i\rho(\triangle_{\gamma S}\ (t) - \triangle_{\delta R}\ (t)) + \rho^2\ \triangle_{\delta S}\ (t))e^{i\rho(t-1)}dt \\
&+\int_0^1\int_s^1 (\triangle_{R}\ (\varepsilon, t) + i\rho(\triangle_{RS}\ (t,\varepsilon) + \triangle_{RS}\ (\varepsilon, t)) + \rho^2\ \triangle_{S}\ (\varepsilon, t))e^{i\rho(t-\varepsilon)}d\varepsilon dt\ \}
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

La résolvante de (2.1) est donnée par :

$$
R(\lambda\ , L_\infty)h = -\int_0^1 G\ (.\ ,\ \ s\ ,\lambda)h(s)ds \tag{2.15}
$$

D'où :

$$
\begin{aligned}
\|R(\lambda\ , L_\infty)h\|_{L^\infty(0\ ,1)} &= Sup_{0\leq x\leq 1}\int_0^1 |G\ (.\ , s\ ,\lambda)| * |h(s)|\, ds \\
&\leq \left(Sup_{0\leq x\leq 1}\int_0^1 |G\ (x\ , s\ ,\lambda)|\, ds \right) \|h\|_{L^\infty_{(0\ ,1)}} \\
&= \frac{1}{|\triangle\ (\lambda)|} Sup_{0\leq x\leq 1}\int_0^1 |N\ (x\ , s\ ,\lambda)| \times |h(s)|\, ds
\end{aligned}
$$

D'autre part de (2.12) on a :

$$
\begin{aligned}
|\varphi(x\ , s\ ,\lambda)| \leq\ & \frac{e^{-x\operatorname{Im}(\rho)}}{2|\rho|}\{\ (|\rho|^3 |\triangle_{\alpha\delta}| + |\rho|^2 (|\triangle_{\beta\delta}| + |\triangle_{\alpha\gamma}|) + |\rho|\ |\triangle_{\beta\gamma}|)e^{(1-s)\operatorname{Im}(\rho)} \\
&+\frac{1}{\operatorname{Im}(\rho)}(|\rho|^2 \|\triangle_{\delta S}\| + |\rho| (\|\triangle_{\delta R}\| + \|\triangle_{\gamma S}\|) + \|\triangle_{\gamma R}\|)(e^{\operatorname{Im}(\rho)} - e^{(1-s)\operatorname{Im}(\rho)}) \\
&+\frac{1}{\operatorname{Im}(\rho)}(|\rho|^3 \|\triangle_{\alpha S}\| + |\rho|^2 (\|\triangle_{\beta S}\| + \|\triangle_{\alpha R}\|) + |\rho|\ \|\triangle_{\beta R}\|)(e^{(1-s)\operatorname{Im}(\rho)} - 1) \\
&+\frac{1}{(\operatorname{Im}(\rho))^2}(\|\triangle_{R}\| + 2|\rho|\ \|\triangle_{RS}\| + |\rho|^2 \|\triangle_{S}\|)(1 - e^{-s\operatorname{Im}(\rho)})(e^{\operatorname{Im}(\rho)} - e^{s\operatorname{Im}(\rho)})\} \\
&+\frac{e^{x\operatorname{Im}(\rho)}}{2|\rho|}\{\ (|\rho|^3 |\triangle_{\alpha\delta}| + |\rho|^2 (|\triangle_{\beta\delta}| + |\triangle_{\alpha\gamma}|) + |\rho|\ |\triangle_{\beta\gamma}|)e^{(s-1)\operatorname{Im}(\rho)} \\
&+\frac{1}{\operatorname{Im}(\rho)}(|\rho|^2 \|\triangle_{\delta S}\| + |\rho| (\|\triangle_{\delta R}\| + \|\triangle_{\gamma S}\|) + \|\triangle_{\gamma R}\|)(e^{(s-1)\operatorname{Im}(\rho)} - e^{-\operatorname{Im}(\rho)}) \\
&+\frac{1}{\operatorname{Im}(\rho)}(|\rho|^3 \|\triangle_{\alpha S}\| + |\rho|^2 (\|\triangle_{\beta S}\| + \|\triangle_{\alpha R}\|) + |\rho|\ \|\triangle_{\beta R}\|)(1 - e^{(s-1)\operatorname{Im}(\rho)})
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{(\mathrm{Im}(\rho))^2}(|\rho^2|\,\|\triangle_S\|+2\,|\rho|\,\ \|\triangle_{RS}\|+\|\triangle_R\|)(e^{(s-1)\,\mathrm{Im}(\rho)}-1)(e^{-s\,\mathrm{Im}(\rho)}-1)\} \tag{2.16}$$

Et d'après (2.13) on a :

$$\begin{aligned}
|\varphi_1(x\ ,s\ ,\lambda)| \leq{} & \frac{1}{2\,|\rho|}e^{-x\,\mathrm{Im}(\rho)}\{\ (|\rho|^3\,|\triangle_{\alpha\delta}|+|\rho|^2\,(|\triangle_{\beta\delta}|+|\triangle_{\alpha\gamma}|)+|\rho|\ |\triangle_{\beta\gamma}|)e^{(1+s)\,\mathrm{Im}(\rho)}\\
& +2\,|\rho|^3\,|\triangle_{\alpha\beta}|\,e^{s\,\mathrm{Im}(\rho)}+\frac{-1}{\mathrm{Im}(\rho)}(|\rho|^3\,\|\triangle_{\alpha S}\|+|\rho|^2\,(\|\triangle_{\beta S}\|+\|\triangle_{\alpha R}\|)+|\rho|\ \|\triangle_{\beta R}\|)\\
& (1-2e^{s\,\mathrm{Im}(\rho)}+e^{(s-1)\,\mathrm{Im}(\rho)})+\frac{-1}{\mathrm{Im}(\rho)}(|\rho|^2\,\|\triangle_{\delta S}\|+|\rho|\,(\|\triangle_{\delta R}\|+\|\triangle_{\gamma S}\|)+\|\triangle_{\gamma R}\|)\\
& (e^{\mathrm{Im}(\rho)}-e^{(1+s)\,\mathrm{Im}(\rho)})+\frac{1}{(\mathrm{Im}(\rho))^2}(|\rho|^2\,\|\triangle_S\|+2\,|\rho|\ \|\triangle_{RS}\|+\|\triangle_R\|)(e^{\mathrm{Im}(\rho)}-1)\\
& (e^{s\,\mathrm{Im}(\rho)}-1)\}\\
& +\frac{1}{2\,|\rho|}e^{(x-1)\,\mathrm{Im}(\rho)}\{(|\rho|^3\,|\triangle_{\alpha\delta}|+|\rho|^2\,(|\triangle_{\alpha\gamma}|+|\triangle_{\beta\delta}|)+|\rho|\ |\triangle_{\beta\gamma}|)e^{-s\,\mathrm{Im}(\rho)}\\
& +2\,|\rho|^3\,|\triangle_{\alpha\beta}|\,e^{(1-s)\,\mathrm{Im}(\rho)}+\frac{-1}{\mathrm{Im}(\rho)}(|\rho|^3\,\|\triangle_{\alpha S}\|+|\rho|^2\,(\|\triangle_{\beta S}\|+\|\triangle_{\alpha R}\|)+|\rho|\,\|\triangle_{\beta R}\|)\\
& (e^{-s\,\mathrm{Im}(\rho)}-2e^{(1-s)\,\mathrm{Im}(\rho)}+e^{(1-2s)\,\mathrm{Im}(\rho)})\\
& +\frac{-1}{\mathrm{Im}(\rho)}(|\rho|^2\,\|\triangle_{\delta S}\|+|\rho|\,(\|\triangle_{\delta R}\|+\|\triangle_{\gamma S}\|)+\|\triangle_{\gamma R}\|)(e^{-s\,\mathrm{Im}(\rho)}-1)\\
& +\frac{1}{(\mathrm{Im}(\rho))^2}(\|\triangle_R\|+2\,|\rho|\ \|\triangle_{RS}\|+|\rho|^2\,\|\triangle_S\|)(1-e^{-s\,\mathrm{Im}(\rho)})(e^{\mathrm{Im}(\rho)}-1)\}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Et dautre part de (2.14) on a :

$$\begin{aligned}
|\varphi_2(x\ ,s\ ,\lambda)| \leq{} & \frac{1}{2\,|\rho|}[e^{-x\,\mathrm{Im}(\rho)}\{(|\rho|^3\,|\triangle_{\alpha\delta}|+|\rho|^2\,(|\triangle_{\beta\delta}|+|\triangle_{\alpha\gamma}|)+|\rho|\ |\triangle_{\beta\gamma}|)e^{(s-1)\,\mathrm{Im}(\rho)}\\
& +2\,|\rho|^3\,|\triangle_{\alpha\delta}|\ \left|e^{s\,\mathrm{Im}(\rho)}\right|+\frac{1}{\mathrm{Im}(\rho)}(|\rho|^3\,\|\triangle_{\alpha S}\|+|\rho|^2\,(\|\triangle_{\beta S}\|+\|\triangle_{\alpha R}\|)+|\rho|\,\|\triangle_{\beta R}\|)\\
& (1-e^{(s-1)\,\mathrm{Im}(\rho)})+\frac{1}{\mathrm{Im}(\rho)}(|\rho|^2\,\|\triangle_{\delta S}\|+|\rho|\,(\|\triangle_{\gamma S}\|+\|\triangle_{\delta R}\|)+\|\triangle_{\gamma R}\|)\\
& (e^{\mathrm{Im}(\rho)}-e^{(s-1)\,\mathrm{Im}(\rho)})+\frac{1}{(\mathrm{Im}(\rho))^2}(|\rho|^2\,\|\triangle_S\|+2\,|\rho|\ \|\triangle_{RS}\|+\|\triangle_R\|)\\
& (1-e^{(s-1)\,\mathrm{Im}(\rho)})(1-e^{-\,\mathrm{Im}(\rho)})\ \}\\
& +e^{x\,\mathrm{Im}(\rho)}\{(|\rho|^3\,|\triangle_{\alpha\delta}|+|\rho|^2\,(|\triangle_{\beta\delta}|\\
& +|\triangle_{\alpha\gamma}|)+|\rho|\ |\triangle_{\beta\gamma}|)e^{(1-s)\,\mathrm{Im}(\rho)}+2\,|\rho|\ |\triangle_{\gamma\delta}|\,e^{-s\,\mathrm{Im}(\rho)}\\
& +\frac{1}{\mathrm{Im}(\rho)}(|\rho|^3\,\|\triangle_{\alpha S}\|+|\rho|^2\,(\|\triangle_{\beta S}\|+\|\triangle_{\alpha R}\|)+|\rho|\ \|\triangle_{\beta R}\|)(e^{(1-s)\,\mathrm{Im}(\rho)}-1)\\
& +\frac{1}{\mathrm{Im}(\rho)}(|\rho|^2\,\|\triangle_{\delta S}\|+|\rho|\,(\|\triangle_{\delta R}\|+\|\triangle_{\gamma S}\|)+\|\triangle_{\gamma R}\|)(e^{(1-s)\,\mathrm{Im}(\rho)}-e^{-\,\mathrm{Im}(\rho)})\\
& +\frac{1}{(\mathrm{Im}(\rho))^2}(|\rho|^2\,\|\triangle_S\|+2\,|\rho|\ \|\triangle_{RS}\|+\|\triangle_R\|)(e^{\mathrm{Im}(\rho)}-1)(e^{-s\,\mathrm{Im}(\rho)}-e^{-\,\mathrm{Im}(\rho)})\}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

2.2 Estimation du numérateur de la fonction de Green dans $L^{\infty}(0,1)$:

En intégrant la formule (2.16) et on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |\varphi(x\ ,s\ ,\lambda)|\,ds \leq\ & \frac{e^{-x\,\mathrm{Im}(\rho)}}{2|\rho|}\{(|\rho|^3|\triangle_{\alpha\delta}|+|\rho|^2(|\triangle_{\beta\delta}|+|\triangle_{\alpha\gamma}|)+|\rho||\triangle_{\beta\gamma}|)(\frac{1-e^{\mathrm{Im}(\rho)}}{-\mathrm{Im}(\rho)})\\
&+\frac{-1}{\mathrm{Im}(\rho)}(|\rho|^2\|\triangle_{\delta S}\|+|\rho|(\|\triangle_{\delta R}\|+\|\triangle_{\gamma S}\|)+\|\triangle_{\gamma R}\|)(\frac{e^{\mathrm{Im}(\rho)}-1}{\mathrm{Im}(\rho)}-e^{\mathrm{Im}(\rho)})\\
&+\frac{1}{(\mathrm{Im}(\rho))^2}(|\rho|^2\|\triangle_S\|+2|\rho|\|\triangle_{RS}\|+\|\triangle_R\|)(1+e^{\mathrm{Im}(\rho)}+2(\frac{1-e^{\mathrm{Im}(\rho)}}{\mathrm{Im}(\rho)}))\}\\
&+\frac{e^{(x-1)\,\mathrm{Im}(\rho)}}{2|\rho|}\{(|\rho|^3|\triangle_{\alpha\delta}|+|\rho|^2(|\triangle_{\beta\delta}|+|\triangle_{\alpha\gamma}|)+|\rho||\triangle_{\beta\gamma}|)(\frac{1-e^{\mathrm{Im}(\rho)}}{-\mathrm{Im}(\rho)})\\
&+\frac{-1}{\mathrm{Im}(\rho)}(|\rho|^2\|\triangle_{\delta S}\|+|\rho|(\|\triangle_{\delta R}\|+\|\triangle_{\gamma S}\|)+\|\triangle_{\gamma R}\|)(1-\frac{e^{\mathrm{Im}(\rho)}-1}{\mathrm{Im}(\rho)})\\
&+\frac{1}{\mathrm{Im}(\rho)}(|\rho|^3\|\triangle_{\alpha S}\|+|\rho|^2(\|\triangle_{\beta S}\|+\|\triangle_{\alpha R}\|)+|\rho|\|\triangle_{\beta R}\|)(\frac{e^{\mathrm{Im}(\rho)}-1}{\mathrm{Im}(\rho)}-e^{\mathrm{Im}(\rho)})\\
&+\frac{1}{(\mathrm{Im}(\rho))^2}(|\rho|^2\|\triangle_S\|+2|\rho|\|\triangle_{RS}\|+\|\triangle_R\|)(1+e^{\mathrm{Im}(\rho)}+2(\frac{1-e^{\mathrm{Im}(\rho)}}{\mathrm{Im}(\rho)}))\}
\end{aligned}$$

Et comme la fonction $x\mapsto e^{-x\,\mathrm{Im}(\rho)}$ est croissante sur l'intervalle $[0\ ,1]$, est que la fonction $x\mapsto e^{(x-1)\,\mathrm{Im}(\rho)}$ est décroissante sur le même intervalle, on a : $\sup_{0\leq x\leq 1} e^{-x\,\mathrm{Im}(\rho)}=e^{-\,\mathrm{Im}(\rho)}$

et $\sup_{0\leq x\leq 1} e^{(x-1)\,\mathrm{Im}(\rho)}=e^{-\,\mathrm{Im}(\rho)}$. Ainsi on a :

$$\begin{aligned}
\sup_{0\leq x\leq 1}\int_0^1 |\varphi(x\ ,s\ ,\lambda)|\,ds \leq\ & \frac{e^{-\,\mathrm{Im}(\rho)}}{2|\rho|}\{(|\rho|^3|\triangle_{\alpha\delta}|+|\rho|^2(|\triangle_{\beta\delta}|+|\triangle_{\alpha\gamma}|)+|\rho||\triangle_{\beta\gamma}|)\\
&2(\frac{1-e^{\mathrm{Im}(\rho)}}{-\mathrm{Im}(\rho)})+\frac{-1}{\mathrm{Im}(\rho)}(|\rho|^2\|\triangle_{\delta S}\|+|\rho|(\|\triangle_{\delta R}\|+\|\triangle_{\gamma S}\|)+\|\triangle_{\gamma R}\|)\\
&(1-e^{\mathrm{Im}(\rho)})+\frac{-1}{\mathrm{Im}(\rho)}(|\rho|^3\|\triangle_{\alpha S}\|+|\rho|^2(\|\triangle_{\beta S}\|+\|\triangle_{\alpha R}\|)+|\rho|\ \|\triangle_{\beta R}\|)\\
&(1-e^{\mathrm{Im}(\rho)})+\frac{2}{(\mathrm{Im}(\rho))^2}(|\rho|^2\|\triangle_S\|+2|\rho|\|\triangle_{RS}\|+\|\triangle_R\|)(1+e^{\mathrm{Im}(\rho)}+2(\frac{1-e^{\mathrm{Im}(\rho)}}{\mathrm{Im}(\rho)}))\}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

De même d'après (2.17) on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^x |\varphi_1(x\ ,s\ ,\lambda)|\,ds \leq\ & \frac{1}{2|\rho|}e^{-\,\mathrm{Im}(\rho)}\{\ (|\rho|^3|\triangle_{\alpha\delta}|+|\rho|^2(|\triangle_{\beta\delta}|+|\triangle_{\alpha\gamma}|)+|\rho|\ |\triangle_{\beta\gamma}|)\\
&(\frac{e^{2\,\mathrm{Im}(\rho)}-e^{(2-x)\,\mathrm{Im}(\rho)}}{\mathrm{Im}(\rho)})+2|\rho|^3|\triangle_{\alpha\beta}|(\frac{e^{\mathrm{Im}(\rho)}-e^{(1-x)\,\mathrm{Im}(\rho)}}{\mathrm{Im}(\rho)})
\end{aligned}$$

$$+\frac{-1}{\operatorname{Im}(\rho)}(|\rho|^3\|\triangle_{\alpha S}\|+|\rho|^2(\|\triangle_{\beta S}\|+\|\triangle_{\alpha R}\|)+|\rho|\ \|\triangle_{\beta R}\|)$$
$$(xe^{(1-x)\operatorname{Im}(\rho)}-\frac{2(e^{\operatorname{Im}(\rho)}-e^{(1-x)\operatorname{Im}(\rho)})-1+e^{-x\operatorname{Im}(\rho)}}{\operatorname{Im}(\rho)})$$
$$+\frac{-1}{\operatorname{Im}(\rho)}(|\rho|^2\|\triangle_{\delta S}\|+|\rho|(\|\triangle_{\delta R}\|+\|\triangle_{\gamma S}\|)+\|\triangle_{\gamma R}\|)(xe^{(2-x)\operatorname{Im}(\rho)}$$
$$-\frac{e^{2\operatorname{Im}(\rho)}-e^{(2-x)\operatorname{Im}(\rho)}}{\operatorname{Im}(\rho)})+\frac{1}{(\operatorname{Im}(\rho))^2}(|\rho|^2\|\triangle_S\|+2|\rho|\ \|\triangle_{RS}\|+\|\triangle_R\|)$$
$$(e^{\operatorname{Im}(\rho)}-1)(\frac{e^{\operatorname{Im}(\rho)}-e^{(1-x)\operatorname{Im}(\rho)}}{\operatorname{Im}(\rho)}-xe^{(1-x)\operatorname{Im}(\rho)})$$
$$+(|\rho|^3|\triangle_{\alpha\delta}|+|\rho|^2(|\triangle_{\alpha\gamma}|+|\triangle_{\beta\delta}|)+|\rho|\ |\triangle_{\beta\gamma}|)(\frac{1-e^{x\operatorname{Im}(\rho)}}{-\operatorname{Im}(\rho)})+2|\rho|^3|\triangle_{\alpha\beta}|$$
$$(\frac{e^{(x+1)\operatorname{Im}(\rho)}-e^{\operatorname{Im}(\rho)}}{\operatorname{Im}(\rho)})+\frac{-1}{\operatorname{Im}(\rho)}(|\rho|^3\|\triangle_{\alpha S}\|+|\rho|^2(\|\triangle_{\beta S}\|+\|\triangle_{\alpha R}\|)$$
$$+|\rho|\ \|\triangle_{\beta R}\|)(\frac{1-2e^{\operatorname{Im}(\rho)}-e^{x\operatorname{Im}(\rho)}+\frac{3}{2}e^{(1+x)\operatorname{Im}(\rho)}+\frac{1}{2}e^{(1-x)\operatorname{Im}(\rho)}}{-\operatorname{Im}(\rho)})$$
$$+\frac{-1}{\operatorname{Im}(\rho)}(|\rho|^2\|\triangle_{\delta S}\|+|\rho|(\|\triangle_{\delta R}\|+\|\triangle_{\gamma S}\|)+\|\triangle_{\gamma R}\|)(\frac{1-e^{x\operatorname{Im}(\rho)}}{-\operatorname{Im}(\rho)}-xe^{x\operatorname{Im}(\rho)})$$
$$+\frac{1}{(\operatorname{Im}(\rho))^2}(\|\triangle_R\|+2|\rho|\ \|\triangle_{RS}\|+|\rho|^2\|\triangle_S\|)(xe^{x\operatorname{Im}(\rho)}+\frac{1-e^{x\operatorname{Im}(\rho)}}{\operatorname{Im}(\rho)})$$
$$(e^{\operatorname{Im}(\rho)}-1)\}$$

Comme les fonctions :

$$\begin{array}{lll}
x & \mapsto & \dfrac{e^{2\operatorname{Im}(\rho)}-e^{(2-x)\operatorname{Im}(\rho)}}{\operatorname{Im}(\rho)}\ ,\ x\mapsto\dfrac{e^{\operatorname{Im}(\rho)}-e^{(1-x)\operatorname{Im}(\rho)}}{\operatorname{Im}(\rho)}\\
x & \mapsto & xe^{(1-x)\operatorname{Im}(\rho)}-\dfrac{2(e^{\operatorname{Im}(\rho)}-e^{(1-x)\operatorname{Im}(\rho)})-1+e^{-x\operatorname{Im}(\rho)}}{\operatorname{Im}(\rho)}\\
x & \mapsto & xe^{(2-x)\operatorname{Im}(\rho)}-\dfrac{e^{2\operatorname{Im}(\rho)}-e^{(2-x)\operatorname{Im}(\rho)}}{\operatorname{Im}(\rho)}\\
x & \mapsto & (e^{\operatorname{Im}(\rho)}-1)(\dfrac{e^{\operatorname{Im}(\rho)}-e^{(1-x)\operatorname{Im}(\rho)}}{\operatorname{Im}(\rho)}-xe^{(1-x)\operatorname{Im}(\rho)})\\
x & \mapsto & \dfrac{1-e^{x\operatorname{Im}(\rho)}}{-\operatorname{Im}(\rho)}\ ,\ x\mapsto\dfrac{e^{(x+1)\operatorname{Im}(\rho)}-e^{\operatorname{Im}(\rho)}}{\operatorname{Im}(\rho)}\\
x & \mapsto & \dfrac{1-2e^{\operatorname{Im}(\rho)}-e^{x\operatorname{Im}(\rho)}+\frac{3}{2}e^{(1+x)\operatorname{Im}(\rho)}+\frac{1}{2}e^{(1-x)\operatorname{Im}(\rho)}}{-\operatorname{Im}(\rho)}\\
x & \mapsto & \dfrac{1-e^{x\operatorname{Im}(\rho)}}{-\operatorname{Im}(\rho)}-xe^{x\operatorname{Im}(\rho)}\\
x & \mapsto & (e^{\operatorname{Im}(\rho)}-1)(xe^{x\operatorname{Im}(\rho)}+\dfrac{1-e^{x\operatorname{Im}(\rho)}}{\operatorname{Im}(\rho)})
\end{array}$$

Sont croissantes sur l'intervalle $[0\ ,1]$, on obtient :

$$\sup_{0\leq x\leq 1}\int_0^1|\varphi_1(x\ ,s\ ,\lambda)|\,ds\leq\frac{1}{2|\rho|}e^{-\operatorname{Im}(\rho)}\{(|\rho|^3|\triangle_{\alpha\delta}|+|\rho|^2(|\triangle_{\beta\delta}|+|\triangle_{\alpha\gamma}|)$$

$$+|\rho|\ |\triangle_{\beta\gamma}|)(\frac{e^{2\operatorname{Im}(\rho)}-1}{\operatorname{Im}(\rho)})+2|\rho|^3|\triangle_{\alpha\beta}|(\frac{e^{2\operatorname{Im}(\rho)}-1}{\operatorname{Im}(\rho)})+\frac{-1}{\operatorname{Im}(\rho)}(|\rho|^3\|\triangle_{\alpha S}\|$$

$$+|\rho|^2(\|\triangle_{\beta S}\|+\|\triangle_{\alpha R}\|)+|\rho|\ \|\triangle_{\beta R}\|)(1-\frac{\frac{3}{2}e^{2\operatorname{Im}(\rho)}-e^{\operatorname{Im}(\rho)}-\frac{3}{2}+e^{-\operatorname{Im}(\rho)}}{\operatorname{Im}(\rho)})$$

$$+\frac{-1}{\operatorname{Im}(\rho)}(|\rho|^2\|\triangle_{\delta S}\|+|\rho|(\|\triangle_{\delta R}\|+\|\triangle_{\gamma S}\|)+\|\triangle_{\gamma R}\|)(\frac{(e^{\operatorname{Im}(\rho)}-1)^2}{-\operatorname{Im}(\rho)})$$

$$+\frac{1}{(\operatorname{Im}(\rho))^2}(|\rho|^2\|\triangle_S\|+2|\rho|\ \|\triangle_{RS}\|+\|\triangle_R\|)(e^{\operatorname{Im}(\rho)}-1)^2\}$$

(2.20)

De même (2.18) :

$$\int_x^1|\varphi_2(x\ ,s\ ,\lambda)|\,ds\le\frac{1}{2|\rho|}e^{-\operatorname{Im}(\rho)}\{(|\rho|^3|\triangle_{\alpha\delta}|+|\rho|^2(|\triangle_{\beta\delta}|+|\triangle_{\alpha\gamma}|)+|\rho|\ |\triangle_{\beta\gamma}|)$$

$$(\frac{e^{(1-x)\operatorname{Im}(\rho)}-1}{\operatorname{Im}(\rho)})+2|\rho|^3|\triangle_{\alpha\delta}|(\frac{e^{(2-x)\operatorname{Im}(\rho)}-e^{\operatorname{Im}(\rho)}}{\operatorname{Im}(\rho)})+\frac{-1}{\operatorname{Im}(\rho)}(|\rho|^3\|\triangle_{\alpha S}\|$$

$$+|\rho|^2(\|\triangle_{\beta S}\|+\|\triangle_{\alpha R}\|)+|\rho|\ \|\triangle_{\beta R}\|)(\frac{e^{(1-x)\operatorname{Im}(\rho)}-1}{\operatorname{Im}(\rho)}-(1-x)e^{(1-x)\operatorname{Im}(\rho)})$$

$$+\frac{-1}{\operatorname{Im}(\rho)}(|\rho|^2\|\triangle_{\delta S}\|+|\rho|(\|\triangle_{\gamma S}\|+\|\triangle_{\delta R}\|)+\|\triangle_{\gamma R}\|)(\frac{e^{(1-x)\operatorname{Im}(\rho)}-1}{\operatorname{Im}(\rho)}$$

$$-(1-x)e^{(2-x)\operatorname{Im}(\rho)})+\frac{1}{(\operatorname{Im}(\rho))^2}(|\rho|^2\|\triangle_S\|+2|\rho|\ \|\triangle_{RS}\|+\|\triangle_R\|)$$

$$((1-x)e^{(1-x)\operatorname{Im}(\rho)}-\frac{e^{(1-x)\operatorname{Im}(\rho)}-1}{\operatorname{Im}(\rho)})(1-e^{-\operatorname{Im}(\rho)})+(|\rho|^3|\triangle_{\alpha\delta}|+|\rho|^2(|\triangle_{\beta\delta}|$$

$$+|\triangle_{\alpha\gamma}|)+|\rho|\ |\triangle_{\beta\gamma}|)(\frac{e^{2\operatorname{Im}(\rho)}-e^{(1+x)\operatorname{Im}(\rho)}}{\operatorname{Im}(\rho)})+2|\rho|\ |\triangle_{\gamma\delta}|(\frac{e^{\operatorname{Im}(\rho)}-e^{x\operatorname{Im}(\rho)}}{\operatorname{Im}(\rho)})$$

$$+\frac{-1}{\operatorname{Im}(\rho)}(|\rho|^3\|\triangle_{\alpha S}\|+|\rho|^2(\|\triangle_{\beta S}\|+\|\triangle_{\alpha R}\|)+|\rho|\ \|\triangle_{\beta R}\|)$$

$$((1-x)e^{(1+x)\operatorname{Im}(\rho)}-\frac{e^{2\operatorname{Im}(\rho)}-e^{(1+x)\operatorname{Im}(\rho)}}{\operatorname{Im}(\rho)})$$

$$+\frac{-1}{\operatorname{Im}(\rho)}(|\rho|^2\|\triangle_{\delta S}\|+|\rho|(\|\triangle_{\delta R}\|+\|\triangle_{\gamma S}\|)+\|\triangle_{\gamma R}\|)((1-x)e^{x\operatorname{Im}(\rho)}$$

$$-\frac{e^{2\operatorname{Im}(\rho)}-e^{(1+x)\operatorname{Im}(\rho)}}{\operatorname{Im}(\rho)})+\frac{1}{(\operatorname{Im}(\rho))^2}(|\rho|^2\|\triangle_S\|+2|\rho|\ \|\triangle_{RS}\|+\|\triangle_R\|)$$

$$(e^{\operatorname{Im}(\rho)}-1)(\frac{e^{\operatorname{Im}(\rho)}-e^{x\operatorname{Im}(\rho)}}{\operatorname{Im}(\rho)}-(1-x)e^{x\operatorname{Im}(\rho)})\}$$

Et comme les fonctions :

$$
\begin{aligned}
x &\mapsto \frac{e^{(1-x)\operatorname{Im}(\rho)}-1}{\operatorname{Im}(\rho)}, x \mapsto \frac{e^{(2-x)\operatorname{Im}(\rho)}-e^{\operatorname{Im}(\rho)}}{\operatorname{Im}(\rho)} \\
x &\mapsto (\frac{e^{(1-x)\operatorname{Im}(\rho)}-1}{\operatorname{Im}(\rho)}-(1-x)e^{(1-x)\operatorname{Im}(\rho)}) \\
x &\mapsto (\frac{e^{(1-x)\operatorname{Im}(\rho)}-1}{\operatorname{Im}(\rho)}-(1-x)e^{(2-x)\operatorname{Im}(\rho)}) \\
x &\mapsto ((1-x)e^{(1-x)\operatorname{Im}(\rho)}-\frac{e^{(1-x)\operatorname{Im}(\rho)}-1}{\operatorname{Im}(\rho)})(1-e^{-\operatorname{Im}(\rho)}) \\
x &\mapsto \frac{e^{2\operatorname{Im}(\rho)}-e^{(1+x)\operatorname{Im}(\rho)}}{\operatorname{Im}(\rho)}\ ,\ x \mapsto \frac{e^{\operatorname{Im}(\rho)}-e^{x\operatorname{Im}(\rho)}}{\operatorname{Im}(\rho)} \\
x &\mapsto ((1-x)e^{(1+x)\operatorname{Im}(\rho)}-\frac{e^{2\operatorname{Im}(\rho)}-e^{(1+x)\operatorname{Im}(\rho)}}{\operatorname{Im}(\rho)}) \\
x &\mapsto ((1-x)e^{x\operatorname{Im}(\rho)}-\frac{e^{2\operatorname{Im}(\rho)}-e^{(1+x)\operatorname{Im}(\rho)}}{\operatorname{Im}(\rho)}) \\
x &\mapsto (e^{\operatorname{Im}(\rho)}-1)(\frac{e^{\operatorname{Im}(\rho)}-e^{x\operatorname{Im}(\rho)}}{\operatorname{Im}(\rho)}-(1-x)e^{x\operatorname{Im}(\rho)})
\end{aligned}
$$

Sont des fonctions décroissantes sur l'intervalle $[0\ ,1]$, alors:

$$
\begin{aligned}
&\sup_{0\leq x\leq 1}\int_x^1 |\varphi_2(x\ ,s\ ,\lambda)|\,ds \leq \frac{1}{2|\rho|}e^{-\operatorname{Im}(\rho)}\{(|\rho|^3|\triangle_{\alpha\delta}|+|\rho|^2(|\triangle_{\beta\delta}|+|\triangle_{\alpha\gamma}|) \\
&+|\rho|\ |\triangle_{\beta\gamma}|)(\frac{e^{2\operatorname{Im}(\rho)}-1}{\operatorname{Im}(\rho)})+2|\rho|^3|\triangle_{\alpha\delta}|(\frac{e^{2\operatorname{Im}(\rho)}-e^{\operatorname{Im}(\rho)}}{\operatorname{Im}(\rho)})+2|\rho|\ |\triangle_{\gamma\delta}|(\frac{e^{\operatorname{Im}(\rho)}-1}{\operatorname{Im}(\rho)}) \\
&+\frac{-1}{\operatorname{Im}(\rho)}(|\rho|^3\|\triangle_{\alpha S}\|+|\rho|^2(\|\triangle_{\beta S}\|+\|\triangle_{\alpha R}\|)+|\rho|\ \|\triangle_{\beta R}\|)\frac{(e^{\operatorname{Im}(\rho)}-1)^2}{-\operatorname{Im}(\rho)} \\
&+\frac{-1}{\operatorname{Im}(\rho)}(|\rho|^2\|\triangle_{\delta S}\|+|\rho|(\|\triangle_{\gamma S}\|+\|\triangle_{\delta R}\|)+\|\triangle_{\gamma R}\|) \\
&(\frac{(e^{\operatorname{Im}(\rho)}-1)^2}{-\operatorname{Im}(\rho)}+1-e^{2\operatorname{Im}(\rho)})+\frac{1}{(\operatorname{Im}(\rho))^2}(|\rho|^2\|\triangle_S\|+2|\rho|\ \|\triangle_{RS}\| \\
&+\|\triangle_R\|)\frac{(e^{\operatorname{Im}(\rho)}-1)^2}{\operatorname{Im}(\rho)}(1-e^{-\operatorname{Im}(\rho)})\}
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

On a :

$$N\ (x\ ,s\ ,t\ )=\varphi(x\ ,s\ ,t\ )+\varphi_i\ (x\ ,s\ ,t\ )$$

où :

$$\begin{cases} i=1\ ;si\ \ x>s \\ i=2\ \ ;si\ \ x<s \end{cases}$$

Alors :

$$\sup_{0\leq x\leq 1}\int_0^1 |N\ (x\ ,s\ ,t\ )d|\,ds \leq \sup_{0\leq x\leq 1}\int_0^1 |\varphi(x\ ,s\ ,t\ )|\,ds + \sup_{0\leq x\leq 1}\int_0^1 |\varphi_i\ (x\ ,s\ ,t\ )|\,ds$$

D'après (2.19) (2.20) et(2.21), on a :

Pour $x > s$, $i = 1$ donc:

$$\sup_{0\leq x\leq 1}\int_0^1 |N(x,s,t)|\,ds \leq \sup_{0\leq x\leq 1}\int_0^1 |\varphi(x\ ,s\ ,t\ )|\,ds + \sup_{0\leq x\leq 1}\int_0^1 |\varphi_1(x,s,t)|\,ds$$

D'où :

$$\begin{aligned}
&\sup\nolimits_{s\leq x\leq 1}\int_0^1 |N(x,s,t)|\,ds \leq \frac{1}{2\,|\rho|}e^{-\operatorname{Im}(\rho)}\{(|\rho|^3\,|\triangle_{\alpha\delta}| + |\rho|^2\,(|\triangle_{\beta\delta}| \\
&\quad + |\triangle_{\alpha\gamma}|) + |\rho|\ |\triangle_{\beta\gamma}|)\frac{(e^{\operatorname{Im}(\rho)}+3)(e^{\operatorname{Im}(\rho)}-1)}{\operatorname{Im}(\rho)} + 2\,|\rho|^3\,|\triangle_{\alpha\beta}|\,(\frac{e^{2\operatorname{Im}(\rho)}-1}{\operatorname{Im}(\rho)}) \\
&\quad + \frac{-1}{\operatorname{Im}(\rho)}(|\rho|^3\,\|\triangle_{\alpha S}\| + |\rho|^2\,(\|\triangle_{\beta S}\| + \|\triangle_{\alpha R}\|) + |\rho|\ \|\triangle_{\beta R}\|) \\
&\quad (2 - e^{\operatorname{Im}(\rho)} - \frac{\frac{3}{2}e^{2\operatorname{Im}(\rho)} - e^{\operatorname{Im}(\rho)} - \frac{3}{2} + e^{-\operatorname{Im}(\rho)}}{\operatorname{Im}(\rho)}) + \frac{-1}{\operatorname{Im}(\rho)}(|\rho|^2\,\|\triangle_{\delta S}\| \\
&\quad + |\rho|\,(\|\triangle_{\delta R}\| + \|\triangle_{\gamma S}\|) + \|\triangle_{\gamma R}\|)(1 - e^{\operatorname{Im}(\rho)})(\frac{e^{\operatorname{Im}(\rho)}-1}{\operatorname{Im}(\rho)} + 1) \\
&\quad + \frac{1}{(\operatorname{Im}(\rho))^2}(|\rho|^2\,\|\triangle_S\| + 2\,|\rho|\ \|\triangle_{RS}\| + \|\triangle_R\|)(e^{2\operatorname{Im}(\rho)} + 3 + 4(\frac{1-e^{\operatorname{Im}(\rho)}}{\operatorname{Im}(\rho)})\}
\end{aligned}$$

Pour $x < s$, $i = 2$ donc:

$$\begin{aligned}
&\sup\nolimits_{0\leq x\leq s}\int_0^1 N\ (x\ ,s,t)ds \leq \frac{1}{2\,|\rho|}e^{-\operatorname{Im}(\rho)}\{(|\rho|^3\,|\triangle_{\alpha\delta}| + |\rho|^2\,(|\triangle_{\beta\delta}| + |\triangle_{\alpha\gamma}|) \\
&\quad + |\rho|\ |\triangle_{\beta\gamma}|)\frac{(e^{\operatorname{Im}(\rho)}+3)(e^{\operatorname{Im}(\rho)}-1)}{\operatorname{Im}(\rho)} + 2\,|\rho|^3\,|\triangle_{\alpha\delta}|\,(\frac{e^{2\operatorname{Im}(\rho)}-e^{\operatorname{Im}(\rho)}}{\operatorname{Im}(\rho)}) + 2\,|\rho| \\
&\quad |\triangle_{\gamma\delta}|\,(\frac{e^{\operatorname{Im}(\rho)}-1}{\operatorname{Im}(\rho)}) + \frac{-1}{\operatorname{Im}(\rho)}(|\rho|^3\,\|\triangle_{\alpha S}\| + |\rho|^2\,(\|\triangle_{\beta S}\| + \|\triangle_{\alpha R}\|) + |\rho| \\
&\quad \|\triangle_{\beta R}\|)(1 - e^{\operatorname{Im}(\rho)})(\frac{e^{\operatorname{Im}(\rho)}-1}{\operatorname{Im}(\rho)} + 1) + \frac{-1}{\operatorname{Im}(\rho)}(|\rho|^2\,\|\triangle_{\delta S}\| + |\rho|\,(\|\triangle_{\gamma S}\| \\
&\quad + \|\triangle_{\delta R}\|) + \|\triangle_{\gamma R}\|)(1 - e^{\operatorname{Im}(\rho)})(\frac{e^{\operatorname{Im}(\rho)}-1}{\operatorname{Im}(\rho)} + 2 + e^{\operatorname{Im}(\rho)}) \\
&\quad + \frac{1}{(\operatorname{Im}(\rho))^2}(|\rho|^2\,\|\triangle_S\| + 2\,|\rho|\ \|\triangle_{RS}\| + \|\triangle_R\|)(\frac{(e^{\operatorname{Im}(\rho)} + 2 + e^{-\operatorname{Im}(\rho)})}{-\operatorname{Im}(\rho)} \\
&\quad (1 - e^{\operatorname{Im}(\rho)}) + 2 + 2e^{\operatorname{Im}(\rho)})\}.
\end{aligned}$$

Alors on obtient facilement pour $x > s$ et $x < s$:

$$\sup_{0\leq x\leq 1}\int_0^1 |N(x,s,t)|\,ds \leq \frac{-1}{(\mathrm{Im}(\rho))\,|\rho|}e^{-\mathrm{Im}(\rho)}\{(|\rho|^3|\triangle_{\alpha\delta}| + |\rho|^2(|\triangle_{\beta\delta}|$$
$$+|\triangle_{\alpha\gamma}|) + |\rho|\;|\triangle_{\beta\gamma}|)(e^{\mathrm{Im}(\rho)}+3)(1-e^{\mathrm{Im}(\rho)}) + |\rho|^3|\triangle_{\alpha\beta}|(1-e^{2\,\mathrm{Im}(\rho)}) + |\rho|^3|\triangle_{\alpha\delta}|$$
$$(e^{\mathrm{Im}(\rho)}-e^{2\,\mathrm{Im}(\rho)}) + |\rho|\;|\triangle_{\gamma\delta}|(1-e^{\mathrm{Im}(\rho)}) + (|\rho|^3\|\triangle_{\alpha S}\| + |\rho|^2(\|\triangle_{\beta S}\| + \|\triangle_{\alpha R}\|)$$
$$+|\rho|\;\|\triangle_{\beta R}\|)(\tfrac{3}{2}-e^{\mathrm{Im}(\rho)} - \frac{\frac{3}{4}e^{2\,\mathrm{Im}(\rho)} - \frac{3}{2}e^{\mathrm{Im}(\rho)} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}e^{-\mathrm{Im}(\rho)}}{\mathrm{Im}(\rho)}) + (|\rho|^2$$
$$\|\triangle_{\delta S}\| + |\rho|(\|\triangle_{\gamma S}\| + \|\triangle_{\delta R}\|) + \|\triangle_{\gamma R}\|)(e^{\mathrm{Im}(\rho)}-1)(\frac{1-e^{\mathrm{Im}(\rho)}}{\mathrm{Im}(\rho)} - \tfrac{3}{2}$$
$$-\tfrac{1}{2}e^{\mathrm{Im}(\rho)}) + \frac{1}{\mathrm{Im}(\rho)}(|\rho|^2\|\triangle_S\| + 2|\rho|\;\|\triangle_{RS}\| + \|\triangle_R\|)(\frac{(e^{\mathrm{Im}(\rho)}-2+e^{-\mathrm{Im}(\rho)})}{2\,\mathrm{Im}(\rho)}$$
$$(1-e^{\mathrm{Im}(\rho)}) - \tfrac{5}{2} - e^{\mathrm{Im}(\rho)} - \tfrac{1}{2}e^{2\,\mathrm{Im}(\rho)})\} \tag{2.22}$$

D'autre part on a :

$$\|R\ (\lambda\ , L_\infty)\| \leq \frac{1}{|\triangle\ (\lambda)|}\sup_{0\leq x\leq 1}\int_0^1 |N(x,s,t)|\,ds \quad ,où : \lambda = \rho^2$$

Et comme $\rho \in \sum_{\frac{\delta}{2}}$, alors $|\arg(\rho)| < \dfrac{\delta}{2}$ ce qui fait : $-\sin(\arg(\rho)) > -\sin(\dfrac{\delta}{2})$

ainsi $(-\mathrm{Im}(\rho)) > -|\rho|\sin(\dfrac{\delta}{2})$.finalement de (2.22), on obtient :

$$\|R\ (\lambda\ , L_\infty)\| \leq \frac{1}{-(\sin(\frac{\delta}{2}))\,|\triangle\ (\rho^2)|\,|\rho|^2}e^{-\mathrm{Im}(\rho)}\{4(|\rho|^3|\triangle_{\alpha\delta}| + |\rho|^2(|\triangle_{\beta\delta}| + |\triangle_{\alpha\gamma}|)$$
$$+|\rho|\;|\triangle_{\beta\gamma}|)(1-e^{\mathrm{Im}(\rho)}) + 2|\rho|^3|\triangle_{\alpha\beta}|(1-e^{\mathrm{Im}(\rho)}) + |\rho|^3|\triangle_{\alpha\delta}|(1-e^{\mathrm{Im}(\rho)})$$
$$+|\rho|\;|\triangle_{\gamma\delta}|(1-e^{\mathrm{Im}(\rho)}) + (|\rho|^3\|\triangle_{\alpha S}\| + |\rho|^2(\|\triangle_{\beta S}\| + \|\triangle_{\alpha R}\|) + |\rho|\;\|\triangle_{\beta R}\|)$$
$$+2(|\rho|^2\|\triangle_{\delta S}\| + |\rho|(\|\triangle_{\gamma S}\| + \|\triangle_{\delta R}\|) + \|\triangle_{\gamma R}\|)$$
$$+\frac{4}{-\mathrm{Im}(\rho)}(|\rho|^2\|\triangle_S\| + 2|\rho|\;\|\triangle_{RS}\| + \|\triangle_R\|)\}$$

D'où:

$$\|R\ (\lambda\ , L_\infty)\| \leq \frac{4e^{-\mathrm{Im}(\rho)}}{-(\sin(\frac{\delta}{2}))\,|\triangle\ (\rho^2)|\;\;|\rho|^2}\{(|\rho|^3(|\triangle_{\alpha\delta}| + |\triangle_{\alpha\beta}| + \|\triangle_{\alpha S}\|)$$
$$+|\rho|^2(|\triangle_{\beta\delta}| + |\triangle_{\alpha\gamma}| + \|\triangle_{\beta S}\| + \|\triangle_{\alpha R}\| + \|\triangle_{\delta S}\|) + |\rho|(|\triangle_{\beta\gamma}| + |\triangle_{\gamma\delta}| + \|\triangle_{\beta R}\|$$
$$+\|\triangle_{\gamma S}\| + \|\triangle_{\delta R}\|) + \|\triangle_{\gamma R}\|) + \frac{1}{-|\rho|\,(\sin(\frac{\delta}{2}))}(|\rho|^2\|\triangle_S\| + 2|\rho|\;\|\triangle_{RS}\|$$

$$+\left\|\triangle_R\right\|)\} \leq \frac{F\ (\rho)}{|\rho|} \tag{2.23}$$

Où :

$$F\ (\rho) = \frac{4e^{-\operatorname{Im}(\rho)}}{(-\sin(\frac{\delta}{2}))\left|\triangle\ (\rho^2)\right|\ \ |\rho|}\{(|\rho|^3\left(|\triangle_{\alpha\delta}| + |\triangle_{\alpha\beta}| + \|\triangle_{\alpha S}\|\right) + |\rho|^2\left(|\triangle_{\beta\delta}|\right.$$
$$+ |\triangle_{\alpha\gamma}| + \|\triangle_{\beta S}\| + \|\triangle_{\alpha R}\| + \|\triangle_{\delta S}\|) + |\rho|\left(|\triangle_{\beta\gamma}| + |\triangle_{\gamma\delta}| + \|\triangle_{\beta R}\| + \|\triangle_{\gamma S}\|\right.$$
$$\left.+ \|\triangle_{\delta R}\| + \|\triangle_{\gamma R}\|\right) + \frac{1}{|\rho|\,(-\sin(\frac{\delta}{2}))}(|\rho|^2\,\|\triangle_S\| + 2\,|\rho|\ \|\triangle_{RS}\| + \|\triangle_R\|)\} \tag{2.24}$$

2.3 Estimation du déterminant caractéristique de la fonction de Green :

On suppose que le coefficients $\alpha_i\ ,\beta_i\ ,\gamma_i\ ,\delta_i \in \mathbb{C}$,où :$i = \overline{1\ ,\ 2}$
et les fonctions S_i, $R_i \in C^1([0\ ,1]\ ,\mathbb{C})$, $i = \overline{1,2}$, d'après (2.11) on a :

$$\triangle\ (\lambda) = e^{i\rho}[i\rho^3\ \triangle_{\alpha\delta} + \rho^2(\triangle_{\beta\delta} + \triangle_{\alpha\gamma} + \triangle_{\alpha S}\ (1)) + i\rho(\triangle_{\delta S}\ (0) - \triangle_{\beta\gamma}$$
$$- \triangle_{\beta S}\ (1) - \triangle_{\alpha R}\ (1)) + \triangle_{\gamma S}\ (0) - \triangle_{\beta R}\ (1) - \triangle_{\delta R}\ (0) + \triangle_S\ (1\ ,0)$$
$$+\frac{i}{\rho}(\triangle_{\gamma R}\ (0) - \triangle_{RS}\ (0\ ,1) - \triangle_{RS}\ (1\ ,0)) - \frac{1}{\rho^2}(\triangle_R\ (0\ ,1)) + \Psi(\rho)] \tag{2.25}$$

Où :

$$\Psi(\rho) = 2e^{-i\rho}[i\rho(\lambda\ \triangle_{\alpha\beta} + \triangle_{\gamma\delta} + \triangle_{\delta S}\ (0) - \triangle_{\beta S}\ (1)) + \frac{1}{i\rho}(\triangle_{\gamma R}\ (1) - \lambda\ \triangle_{\alpha R}$$
$$(0) - \triangle_{RS}\ (0\ ,0) - \triangle_{RS}\ (1,1)] + e^{-2i\rho}[-\rho^2\ \triangle_{\beta\delta} + i\rho(\lambda\ \triangle_{\alpha\delta} - \triangle_{\beta\gamma} + \triangle_{\delta S}\ (0)$$
$$- \triangle_{\beta S}\ (1)) - \lambda\ \triangle_{\alpha\gamma} - \lambda\ \triangle_{\alpha S}\ (1) - \triangle_{\gamma S}\ (0) + \triangle_{\beta R}\ (1) + \triangle_{\delta R}\ (0) - \triangle_S\ (1,0)$$
$$+\frac{1}{i\rho}(\lambda\ \triangle_{\alpha R}\ (1) - \triangle_{\gamma R}\ (0) + \triangle_{RS}\ (0,1) + \triangle_{RS}\ (1,0)) - \frac{1}{\rho^2}\ \triangle_R\ (1,0))]$$
$$+\frac{1}{i\rho}[\int_0^1(\lambda\ \triangle_{\alpha R'}\ (t\ ) + i\rho(\lambda\ \triangle_{\alpha S'}\ (t\ ) - \triangle_{\beta R'}\ (t\ )) + \rho^2\ \triangle_{\beta S'}\ (t\ ))e^{i\rho(t-1)}dt$$
$$+\int_0^1(\lambda\ \triangle_{\alpha R'}\ (t\ ) + i\rho(\triangle_{\beta R'}\ (t\ ) - \lambda\ \triangle_{\alpha S'}\ (t\ )) + \rho^2\ \triangle_{\beta S'}\ (t\ ))e^{-i\rho(t+1)}dt$$

$$+\int_0^1 (\triangle_{\gamma R'}(t) + i\rho(\triangle_{\gamma S'}(t) - \triangle_{\delta R'}(t)) + \rho^2 \triangle_{\delta S'}(t))e^{i\rho(t-2)}dt$$
$$+\int_0^1 (\triangle_{\gamma R'}(t) + i\rho(\triangle_{\delta R'}(t) - \triangle_{\gamma S'}(t)) + \rho^2 \triangle_{\delta S'}(t))e^{-i\rho t}dt]$$
$$+\int_0^1 (\triangle_{R'R}(0,t) - i\rho(\triangle_{R'S}(0,t) + \triangle_{RS'}(t,0)) - \rho^2 \triangle_{S'S}(1,t))e^{-i\rho(t+1)}dt$$
$$+\frac{-1}{\rho^2}[\int_0^1 (\triangle_{R'R}(t,0) - i\rho(\triangle_{R'S}(t,0) + \triangle_{RS'}(0,t)) + \rho^2 \triangle_{S'S}(t,0))e^{i\rho(t-1)}dt$$
$$+\int_0^1 (\triangle_{R'R}(1,t) + i\rho(\triangle_{R'S}(1,t) + \triangle_{RS'}(t,1)) - \rho^2 \triangle_{S'S}(t,1))e^{i\rho(t-2)}dt$$
$$+\int_0^1 (\triangle_{R'R}(t,1) + i\rho(\triangle_{R'S}(t,1) + \triangle_{RS'}(1,t)) - \rho^2 \triangle_{S'S}(1,t))e^{-i\rho t}dt$$
$$+\int_0^1\int_0^1 (\triangle_{R'}(\varepsilon,t) + i\rho(\triangle_{R'S'}(t,\varepsilon) + \triangle_{R'S'}(\varepsilon,t)) + \rho^2 \triangle_{S'}(\varepsilon,t))$$
$$e^{i\rho(\varepsilon-t-1)}d\varepsilon\, dt]$$

Donc :

$$|\Psi(\rho)| \leq 2e^{\mathrm{Im}(\rho)}[|\rho|^3 |\triangle_{\alpha\beta}| + |\rho|(|\triangle_{\gamma\delta}| + |\triangle_{\delta S}(0)| + |\triangle_{\alpha R}(0)| + |\triangle_{\beta S}(1)|)$$
$$+\frac{1}{|\rho|}(|\triangle_{\gamma R}(1)| + |\triangle_{RS}(0,\ 0)| + |\triangle_{RS}(1,\ 1)|)] + e^{2\,\mathrm{Im}(\rho)}[|\rho|^3 |\triangle_{\alpha\delta}| + |\rho|^2$$
$$(|\triangle_{\beta\delta}| + |\triangle_{\alpha\gamma}| + |\triangle_{\alpha S}(1)|) + |\rho|(|\triangle_{\beta\gamma}| + |\triangle_{\delta S}(0)| + |\triangle_{\beta S}(1)| + |\triangle_{\alpha R}(1)|)$$
$$+|\triangle_{\gamma S}(0)| + |\triangle_{\beta R}(1)| + |\triangle_{\delta R}(0)| + |\triangle_{S}(1,\ 0)| + \frac{1}{|\rho|}(|\triangle_{\gamma R}(0)| + |\triangle_{RS}(0,\ 1)|$$
$$+|\triangle_{RS}(1,\ 0)|) + \frac{1}{|\rho|^2}|\triangle_{R}(1,\ 0)|)]$$

$$+\frac{1}{|\rho|}[(|\rho|^3 \|\triangle_{\alpha S'}\| + |\rho|^2(\|\triangle_{\beta S'}\| + \|\triangle_{\alpha R'}\|) + |\rho|\,\|\triangle_{\beta R'}\|)(\frac{e^{\mathrm{Im}(\rho)}-1}{\mathrm{Im}(\rho)})$$
$$+(|\rho|^3 \|\triangle_{\alpha S'}\| + |\rho|^2(\|\triangle_{\beta R'}\| + \|\triangle_{\alpha R'}\|) + |\rho|\,\|\triangle_{\beta R'}\|)\frac{e^{2\,\mathrm{Im}(\rho)}-e^{\mathrm{Im}(\rho)}}{\mathrm{Im}(\rho)}$$
$$+(|\rho|^2 \|\triangle_{\delta S'}\| + |\rho|(\|\triangle_{\gamma S'}\| + \|\triangle_{\delta R'}\|) + \|\triangle_{\gamma R'}\|)(\frac{e^{2\,\mathrm{Im}(\rho)}-e^{\mathrm{Im}(\rho)}}{\mathrm{Im}(\rho)})$$
$$+(|\rho|^2 \|\triangle_{\delta S'}\| + |\rho|(\|\triangle_{\delta R'}\| + \|\triangle_{\gamma S'}\|) + \|\triangle_{\gamma R'}\|)(\frac{e^{\mathrm{Im}(\rho)}-1}{\mathrm{Im}(\rho)})$$
$$+(|\rho|^2 \|\triangle_{S'S}\| + |\rho|(\|\triangle_{R'S}\| + \|\triangle_{RS'}\|) + \|\triangle_{R'R}\|)(\frac{e^{2\,\mathrm{Im}(\rho)}-e^{\mathrm{Im}(\rho)}}{\mathrm{Im}(\rho)})$$

$$+\frac{1}{|\rho|^2}[(|\rho|^2\,\|\triangle_{S'S}\|+|\rho|\,(\|\triangle_{R'S}\|+\|\triangle_{RS'}\|)+\|\triangle_{R'R}\|)(\frac{e^{\mathrm{Im}(\rho)}-1}{\mathrm{Im}(\rho)})$$
$$+(|\rho|^2\,\|\triangle_{S'S}\|+|\rho|\,(\|\triangle_{R'S}\|+\|\triangle_{RS'}\|)+\|\triangle_{R'R}\|)(\frac{e^{2\,\mathrm{Im}(\rho)}-e^{\mathrm{Im}(\rho)}}{\mathrm{Im}(\rho)})$$
$$+(|\rho|^2\,\|\triangle_{S'S}\|+|\rho|\,(\|\triangle_{R'S}\|+\|\triangle_{RS'}\|)+\|\triangle_{R'R}\|)(\frac{e^{\mathrm{Im}(\rho)}-1}{\mathrm{Im}(\rho)})$$
$$+(|\rho|^2\,\|\triangle_{S'}\|+|\rho|\,(\|\triangle_{R'S'}\|+\|\triangle_{R'S'}\|)+\|\triangle_{R'}\|)(\frac{e^{\mathrm{Im}(\rho)}-1}{\mathrm{Im}(\rho)})^2]$$

Alors :

$$|\Psi(\rho)|\leq\frac{2}{|\rho|^2\,(-\sin(\frac{\delta}{2}))}[|\rho|^3\,|\triangle_{\alpha\beta}|+|\rho|\,(|\triangle_{\gamma\delta}|+|\triangle_{\delta S}\,(0)|+|\triangle_{\alpha R}\,(0)|$$
$$+|\triangle_{\beta S}\,(1)|)+\frac{1}{|\rho|}(|\triangle_{\gamma R}\,(1)|+|\triangle_{RS}\,(0\;,\;0)|+|\triangle_{RS}\,(1\;,\;1)|)]+\frac{1}{|\rho|^2\,(\sin(\frac{\delta}{2}))^2}$$
$$[|\rho|^3\,|\triangle_{\alpha\delta}|+|\rho|^2\,(|\triangle_{\beta\delta}|+|\triangle_{\alpha\gamma}|+|\triangle_{\alpha S}\,(1)|)+|\rho|\,(|\triangle_{\beta\gamma}|+|\triangle_{\delta S}\,(0)|+|\triangle_{\beta S}\,(1)|$$
$$+|\triangle_{\alpha R}\,(1)|)+|\triangle_{\gamma S}\,(0)|+|\triangle_{\beta R}\,(1)|+|\triangle_{\delta R}\,(0)|+|\triangle_{S}\,(1\;,\;0)|+\frac{1}{|\rho|}(|\triangle_{\gamma R}\,(0)|$$
$$+|\triangle_{RS}\,(0\;,\;1)|+|\triangle_{RS}\,(1\;,\;0)|)+\frac{1}{|\rho|^2}\,|\triangle_{R}\,(1\;,\;0)|)]$$
$$+\frac{1}{|\rho|^2\,(-\sin(\frac{\delta}{2}))}[(|\rho|^3\,\|\triangle_{\alpha S'}\|+|\rho|^2\,(\|\triangle_{\beta S'}\|+\|\triangle_{\alpha R'}\|)+|\rho|\,\|\triangle_{\beta R'}\|)$$
$$(1-e^{2\,\mathrm{Im}(\rho)})+(|\rho|^2\,\|\triangle_{\delta S'}\|+|\rho|\,(\|\triangle_{\gamma S'}\|+\|\triangle_{\delta R'}\|)+\|\triangle_{\gamma R'}\|)(1-e^{2\,\mathrm{Im}(\rho)})$$
$$+(|\rho|^2\,\|\triangle_{S'S}\|+|\rho|\,(\|\triangle_{R'S}\|+\|\triangle_{RS'}\|)+\|\triangle_{R'R}\|)(1-e^{2\,\mathrm{Im}(\rho)})$$
$$+\frac{3}{|\rho|^3\,(-\sin(\frac{\delta}{2}))}(|\rho|^2\,\|\triangle_{S'S}\|+|\rho|\,(\|\triangle_{R'S}\|+\|\triangle_{RS'}\|)+\|\triangle_{R'R}\|)(1-e^{\mathrm{Im}(\rho)})$$
$$+\frac{1}{|\rho|^3\,(\sin(\frac{\delta}{2}))^2}(|\rho|^2\,\|\triangle_{S'}\|+|\rho|\,(\|\triangle_{R'S'}\|+\|\triangle_{R'S'}\|)+\|\triangle_{R'}\|)(e^{\mathrm{Im}(\rho)}-1)^2 \tag{2.26}$$

Distinguons maintenant différents cas.

cas 1 : Supposons que $\triangle_{\alpha\delta}\neq 0$, d'après (2.25) nous avons pour $|\rho|$ suffisamment grand :

$$|\triangle\,(\lambda)|\geq|\rho|^3\,e^{-\,\mathrm{Im}(\rho)}[|\triangle_{\alpha\delta}|-\frac{1}{|\rho|}\,|\triangle_{\beta\delta}+\triangle_{\alpha\gamma}+\triangle_{\alpha S}\,(1)|$$
$$-\frac{1}{|\rho|^2}\,|\triangle_{\delta S}\,(0)-\triangle_{\beta\gamma}-\triangle_{\beta S}\,(1)-\triangle_{\alpha R}\,(1)|$$
$$-\frac{1}{|\rho|^3}\,|\triangle_{\gamma S}\,(0)-\triangle_{\beta R}\,(1)-\triangle_{\delta R}\,(0)+\triangle_{S}\,(1\;,0)|$$

$$-\frac{1}{|\rho|^4}\left|\triangle_{\gamma R}\ (0) - \triangle_{RS}\ (0\ ,1) - \triangle_{RS}\ (1\ ,0)\right| - \frac{1}{|\rho|^5}\left|\triangle_R\ (0\ ,1)\right| - \frac{1}{|\rho|^3}\left|\Psi(\rho)\right|]$$

Et d'après (2.26), nous déduisons que pour $\rho \in \sum_{\frac{\delta}{2}} . |\rho| \geq r_\circ > 0$, on a:

$$|\Psi(\rho)| \leq \frac{C\ (r_0)}{|\rho|}$$

Alors on obtient :

$$|\triangle\ (\lambda)| \geq |\rho|^3\, e^{-\operatorname{Im}(\rho)}[|\triangle_{\alpha\delta}| - \frac{1}{|\rho|}\left|\triangle_{\beta\delta} + \triangle_{\alpha\gamma} + \triangle_{\alpha S}\ (1)\right|$$
$$-\frac{1}{|\rho|^2}\left|\triangle_{\delta S}\ (0) - \triangle_{\beta\gamma} - \triangle_{\beta S}\ (1) - \triangle_{\alpha R}\ (1)\right|$$
$$-\frac{1}{|\rho|^3}\left|\triangle_{\gamma S}\ (0) - \triangle_{\beta R}\ (1) - \triangle_{\delta R}\ (0) + \triangle_S\ (1\ ,0)\right|$$
$$-\frac{1}{|\rho|^4}\left|\triangle_{\gamma R}\ (0) - \triangle_{RS}\ (0\ ,1) - \triangle_{RS}\ (1\ ,0)\right| - \frac{1}{|\rho|^5}\left|\triangle_R\ (0\ ,1)\right| - \frac{C\ (r_0)}{|\rho|^4}]$$

Nous pouvons donc choisir $r_0 > 0$, tel que :

$$\frac{1}{r_0}\left|\triangle_{\beta\delta} + \triangle_{\alpha\gamma} + \triangle_{\alpha S}\ (1)\right| + \frac{1}{r_0^2}\left|\triangle_{\delta S}\ (0) - \triangle_{\beta\gamma} - \triangle_{\beta S}\ (1) - \triangle_{\alpha R}\ (1)\right|$$
$$+\frac{1}{r_0^3}\left|\triangle_{\gamma S}\ (0) - \triangle_{\beta R}\ (1) - \triangle_{\delta R}\ (0) + \triangle_S\ (1\ ,0)\right|$$
$$+\frac{1}{r_0^4}\left|\triangle_{\gamma R}\ (0) - \triangle_{RS}\ (0\ ,1) - \triangle_{RS}\ (1\ ,0)\right| + \frac{1}{r_0^5}\left|\triangle_R\ (0\ ,1)\right| + \frac{C\ (r_0)}{r_0^4} \leq \frac{|\triangle_{\alpha\delta}|}{2}$$

Alors, pour $\rho \in \sum_{\frac{\delta}{2}}$, $|\rho| \geq r_\circ > 0$, nous obtenons :

$$|\triangle\ (\lambda)| \geq |\rho|^3\, e^{-\operatorname{Im}(\rho)}[|\triangle_{\alpha\delta}| - \frac{|\triangle_{\alpha\delta}|}{2}]$$

D'où :

$$|\triangle\ (\lambda)| \geq |\rho|^3\, \frac{|\triangle_{\alpha\delta}|}{2} e^{-\operatorname{Im}(\rho)} \tag{2.27}$$

D'après (2.24) nous avons démontré que $|\rho|\, F\ (\rho)$ reste bornée dans le sécteur $\sum_{\frac{\delta}{2}}$ pour $|\rho|$ suffisamment grand, d'où :

$$\|R\ (\lambda\ , L_\infty)\| \leq \frac{F_0(\rho)}{|\rho|^2}$$

cas 2 : Supposons que : $\triangle_{\alpha\delta} = 0$ et $\left|\triangle_{\beta\delta} + \triangle_{\alpha\gamma} + \triangle_{\alpha S}\ (1)\right| \neq 0$, D'après (2.25)nous avons pour $|\rho|$ suffisamment grand :

$$|\triangle\ (\lambda)| \geq |\rho|^2 e^{-\operatorname{Im}(\rho)}[|\triangle_{\beta\delta} + \triangle_{\alpha\gamma} + \triangle_{\alpha S}\ (1)|$$
$$-\frac{1}{|\rho|}|\triangle_{\delta S}\ (0) - \triangle_{\beta\gamma} - \triangle_{\beta S}\ (1) - \triangle_{\alpha R}\ (1)|$$
$$-\frac{1}{|\rho|^2}|\triangle_{\gamma S}\ (0) - \triangle_{\beta R}\ (1) - \triangle_{\delta R}\ (0) + \triangle_S\ (1\ ,0)|$$
$$-\frac{1}{|\rho|^3}|\triangle_{\gamma R}\ (0) - \triangle_{RS}\ (0\ ,1) - \triangle_{RS}\ (1\ ,0)| - \frac{1}{|\rho|^4}|\triangle_R\ (0\ ,1)| - \frac{1}{|\rho|^2}|\Psi(\rho)|]$$

D'après (2.26) nous déduisons que pour $\rho \in \sum_{\frac{\delta}{2}}$, $|\rho| \geq r_\circ > 0$, on a :

$$|\Psi(\rho)| \leq C_1(r_0)$$

Alors :

$$|\triangle\ (\lambda)| \geq |\rho|^2 e^{-\operatorname{Im}(\rho)}[|\triangle_{\beta\delta} + \triangle_{\alpha\gamma} + \triangle_{\alpha S}\ (1)| - \frac{1}{r_0}|\triangle_{\delta S}\ (0) - \triangle_{\beta\gamma} - \triangle_{\beta S}\ (1) - \triangle_{\alpha R}\ (1)|$$
$$-\frac{1}{r_0^2}|\triangle_{\gamma S}\ (0) - \triangle_{\beta R}\ (1) - \triangle_{\delta R}\ (0) + \triangle_S\ (1\ ,0)|$$
$$-\frac{1}{r_0^3}|\triangle_{\gamma R}\ (0) - \triangle_{RS}\ (0\ ,1) - \triangle_{RS}\ (1\ ,0)| - \frac{1}{r_0^4}|\triangle_R\ (0\ ,1)| - \frac{C_1(r_0)}{r_0^2}]$$

Nous pouvons choisir $r_0 > 0$ tel que :

$$\frac{1}{r_0}|\triangle_{\delta S}\ (0) - \triangle_{\beta\gamma} - \triangle_{\beta S}\ (1) - \triangle_{\alpha R}\ (1)|$$
$$+\frac{1}{r_0^2}|\triangle_{\gamma S}\ (0) - \triangle_{\beta R}\ (1) - \triangle_{\delta R}\ (0) + \triangle_S\ (1\ ,0)|$$
$$+\frac{1}{r_0^3}|\triangle_{\gamma R}\ (0) - \triangle_{RS}\ (0\ ,1) - \triangle_{RS}\ (1\ ,0)| + \frac{1}{r_0^4}|\triangle_R\ (0\ ,1)| + \frac{C_1(r_0)}{r_0^2}$$
$$\leq \frac{1}{2}|\triangle_{\beta\delta} + \triangle_{\alpha\gamma} + \triangle_{\alpha S}\ (1)|$$

Alors pour $\rho \in \sum_{\frac{\delta}{2}}$, $|\rho| \geq r_\circ > 0$, nous obtenons :

$$|\triangle\ (\lambda)| \geq |\rho|^2 \frac{|\triangle_{\beta\delta} + \triangle_{\alpha\gamma} + \triangle_{\alpha S}\ (1)|}{2} e^{-\operatorname{Im}(\rho)} \tag{2.28}$$

Finalemenent d'après (2.24), on a :

$$F\ (\rho) \leq \frac{8}{|\triangle_{\beta\delta} + \triangle_{\alpha\gamma} + \triangle_{\alpha S}\ (1)|\,(-\sin(\frac{\delta}{2}))}\{((|\triangle_{\alpha\beta}| + \|\triangle_{\alpha S}\|) + \frac{1}{r_0}(|\triangle_{\beta\delta}|$$
$$+|\triangle_{\alpha\gamma}| + \|\triangle_{\beta S}\| + \|\triangle_{\alpha R}\| + \|\triangle_{\delta S}\|) + \frac{1}{r_0^2}(|\triangle_{\beta\gamma}| + |\triangle_{\gamma\delta}| + \|\triangle_{\beta R}\|$$

$$+\|\triangle_{\gamma S}\|+\|\triangle_{\delta R}\|)+\|\triangle_{\gamma R}\|)+\frac{1}{(-\sin(\dfrac{\delta}{2}))}(\frac{\|\triangle_S\|}{r_0^2}+\frac{2\,\|\triangle_{RS}\|}{r_0^3}$$

$$+\frac{\|\triangle_R\|}{r_0^4})\}\equiv F_1(\rho)$$

Ainsi nous avons démontré que $F\ (\rho)$ reste bornée dans le sécteur $\sum_{\frac{\delta}{2}}$, pour $|\rho|$suffisamment grand, d'où :

$$\|R\ (\lambda\ ,L_\infty)\|\leq\frac{F_1(\rho)}{|\rho|}$$

cas 3 : Supposons que :$\triangle_{\alpha\delta}$=$\triangle_{\alpha\beta}$=$\triangle_{\beta\delta}$=$\triangle_{\alpha\gamma}$= 0 , $\triangle_{\alpha S}\equiv 0$ et $|\triangle_{\delta S}\ (0)-\ \triangle_{\beta\gamma}-\triangle_{\beta S}\ (1)-\ \triangle_{\alpha R}\ (1)|\neq 0$,

D'après (2.25) nous avons pour $|\rho|$ suffisamment grand :

$$|\triangle\ (\lambda)|\geq|\rho|\,e^{-\operatorname{Im}(\rho)}[|\triangle_{\delta S}\ (0)-\ \triangle_{\beta\gamma}-\triangle_{\beta S}\ (1)-\ \triangle_{\alpha R}\ (1)|$$
$$-\frac{1}{|\rho|}\,|\triangle_{\gamma S}\ (0)-\ \triangle_{\beta R}\ (1)-\ \triangle_{\delta R}\ (0)+\ \triangle_S\ (1\ ,0)|$$
$$-\frac{1}{|\rho|^2}\,|\triangle_{\gamma R}\ (0)-\ \triangle_{RS}\ (0\ ,1)-\ \triangle_{RS}\ (1\ ,0)|-\frac{1}{|\rho|^3}\,|\triangle_R\ (0\ ,1)|-\frac{1}{|\rho|}\,|\Psi(\rho)|]$$

D'après (2.26) nous déduisons que pour $\rho\in\sum_{\frac{\delta}{2}}$. $|\rho|\geq r_\circ>0$, on a :

$$|\Psi(\rho)|\leq\frac{C_2(r_0)}{|\rho|}$$

Alors, nous avons :

$$|\triangle\ (\lambda)|\geq|\rho|\,e^{-\operatorname{Im}(\rho)}[|\triangle_{\delta S}\ (0)-\ \triangle_{\beta\gamma}-\triangle_{\beta S}\ (1)-\ \triangle_{\alpha R}\ (1)|$$
$$-\frac{1}{r_0}\,|\triangle_{\gamma S}\ (0)-\ \triangle_{\beta R}\ (1)-\ \triangle_{\delta R}\ (0)+\ \triangle_S\ (1\ ,0)|$$
$$-\frac{1}{r_0^{\ 2}}\,|\triangle_{\gamma R}\ (0)-\ \triangle_{RS}\ (0\ ,1)-\ \triangle_{RS}\ (1\ ,0)|-\frac{1}{r_0^{\ 3}}\,|\triangle_R\ (0\ ,1)|-\frac{C_2(r_0)}{r_0^{\ 2}}]$$

Nous pouvons choisir $r_0>0$ tel que :

$$\frac{1}{r_0}\,|\triangle_{\gamma S}\ (0)-\ \triangle_{\beta R}\ (1)-\ \triangle_{\delta R}\ (0)+\ \triangle_S\ (1\ ,0)|+\frac{1}{r_0^{\ 2}}\,|\triangle_{\gamma R}\ (0)-\ \triangle_{RS}\ (0\ ,1)-\ \triangle_{RS}\ (1\ ,0)|$$
$$+\frac{1}{r_0^{\ 3}}\,|\triangle_R\ (0\ ,1)|+\frac{C_2(r_0)}{r_0}]\leq\frac{1}{2}\,|\triangle_{\delta S}\ (0)-\ \triangle_{\beta\gamma}-\triangle_{\beta S}\ (1)-\ \triangle_{\alpha R}\ (1)|$$

Alors, pour $\rho\in\sum_{\frac{\delta}{2}}$, $|\rho|\geq r_\circ>0$, nous obtenons :

$$|\triangle\ (\lambda)|\geq|\rho|\,\frac{|\triangle_{\delta S}\ (0)-\ \triangle_{\beta\gamma}-\triangle_{\beta S}\ (1)-\ \triangle_{\alpha R}\ (1)|}{2}e^{-\operatorname{Im}(\rho)}\tag{2.29}$$

D'après (2.24), on a :

$$F\ (\rho) \leq \frac{8}{|\triangle_{\delta S}\ (0) - \triangle_{\beta\gamma} - \triangle_{\beta S}\ (1) - \triangle_{\alpha R}\ (1)|\,(-\sin(\frac{\delta}{2}))}\{(\|\triangle_{\beta S}\| + \|\triangle_{\alpha R}\|$$

$$+\|\triangle_{\delta S}\|) + \frac{1}{r_0}(|\triangle_{\beta\gamma}| + |\triangle_{\gamma\delta}| + \|\triangle_{\beta R}\| + \|\triangle_{\gamma S}\| + \|\triangle_{\delta R}\|) + \|\triangle_{\gamma R}\|)$$

$$+\frac{1}{(-\sin(\frac{\delta}{2}))}(\|\triangle_{S}\| + \frac{2\,\|\triangle_{RS}\|}{r_0} + \frac{\|\triangle_{R}\|}{r_{\ 0}^{\ 2}})\} \equiv F_2(r_0)$$

Ainsi nous avons démontré que $F\ (\rho)$ reste bornée dans le sécteur $\sum_{\frac{\delta}{2}}$, pour $|\rho|$ suffisamment grand, d'où :

$$\|R\ (\lambda\ , L_\infty)\| \leq \frac{F_2(\rho)}{|\rho|}$$

cas 4 : Supposons que :$\triangle_{\alpha\delta}$=$\triangle_{\alpha\beta}$=$\triangle_{\beta\delta}$=$\triangle_{\alpha\gamma}$=$\triangle_{\beta\gamma}$= 0, $\triangle_{\alpha S}$≡$\triangle_{\delta S}$ ≡$\triangle_{\beta S}$≡$\triangle_{\alpha R}$≡ 0 et $|\triangle_{\gamma S}\ (0) - \triangle_{\beta R}\ (1) - \triangle_{\delta R}\ (0) + \triangle_{S}\ (1\ ,\ 0)| \neq 0$.

D'après (2.25) nous avons pour $|\rho|$ suffisamment grand :

$$|\triangle\ (\lambda)| \geq e^{-\operatorname{Im}(\rho)}[|\triangle_{\gamma S}\ (0) - \triangle_{\beta R}\ (1) - \triangle_{\delta R}\ (0) + \triangle_{S}\ (1\ ,0)|$$
$$-\frac{1}{|\rho|}\,|\triangle_{\gamma R}\ (0) - \triangle_{RS}\ (0\ ,1) - \triangle_{RS}\ (1\ ,0)| - \frac{1}{|\rho|^2}\,|\triangle_{R}\ (0\ ,1)| - |\Psi(\rho)|].$$

D'après (2.26) nous déduisons que pour $\rho \in \sum_{\frac{\delta}{2}}$, $|\rho| \geq r_\circ > 0$, on'a :

$$|\Psi(\rho)| \leq \frac{C_3(r_0)}{|\rho|^2}$$

Alors, nous avons :

$$|\triangle\ (\lambda)| \geq e^{-\operatorname{Im}(\rho)}[|\triangle_{\gamma S}\ (0) - \triangle_{\beta R}\ (1) - \triangle_{\delta R}\ (0) + \triangle_{S}\ (1\ ,0)|$$
$$-\frac{1}{r_0}\,|\triangle_{\gamma R}\ (0) - \triangle_{RS}\ (0\ ,1) - \triangle_{RS}\ (1\ ,0)| - \frac{1}{r_0^2}\,|\triangle_{R}\ (0\ ,1)| - \frac{C_3(r_0)}{r_0^2}]$$

Nous pouvons choisir $r_0 > 0$ tel que :

$$\frac{1}{r_0}\,|\triangle_{\gamma R}\ (0) - \triangle_{RS}\ (0\ ,1) - \triangle_{RS}\ (1\ ,0)| + \frac{1}{r_0^2}\,|\triangle_{R}\ (0\ ,1)| - C_3(r_0) \leq$$
$$\frac{1}{2}\,|\triangle_{\gamma S}\ (0) - \triangle_{\beta R}\ (1) - \triangle_{\delta R}\ (0) + \triangle_{S}\ (1\ ,0)|$$

Alors, pour $\rho \in \sum_{\frac{\delta}{2}}$, $|\rho| \geq r_\circ > 0$, nous obtenons :

$$|\triangle\ (\lambda)| \geq \frac{|\triangle_{\gamma S}\ (0) - \triangle_{\beta R}\ (1) - \triangle_{\delta R}\ (0) + \triangle_{S}\ (1\ ,0)|}{2}e^{-\operatorname{Im}(\rho)} \qquad (2.30)$$

D'après (2.24), on a :

$$F\ (\rho) \leq \frac{8}{\left|\triangle_{\gamma S}\ (0) - \triangle_{\beta R}\ (1) - \triangle_{\delta R}\ (0) + \triangle_{S}\ (1\ ,0)\right| (-\sin(\frac{\delta}{2}))}\{((|\triangle_{\gamma\delta}|$$
$$+\left\|\triangle_{\beta R}\right\| + \left\|\triangle_{\gamma S}\right\| + \left\|\triangle_{\delta R}\right\|) + \left\|\triangle_{\gamma R}\right\|) + \frac{1}{(-\sin(\frac{\delta}{2}))}(\left\|\triangle_{S}\right\| + \frac{2\left\|\triangle_{RS}\right\|}{r_0}$$
$$+\frac{\left\|\triangle_{R}\right\|}{r_0^2})\} \equiv F_3(r_0)$$

Ainsi nous avons démontré que $F(\rho)$ reste bornée dans le sécteur $\sum_{\frac{\delta}{2}}$, pour $|\rho|$ suffisamment grand, d'où :

$$\left\|R\ (\lambda\ , L_\infty)\right\| \leq \frac{F_3(\rho)}{|\rho|}$$

cas 5 : Supposons que :$\triangle_{\alpha\delta}{=}\triangle_{\alpha\beta}{=}\triangle_{\beta\delta}{=}\triangle_{\gamma\delta}{=}\triangle_{\alpha\gamma}{=}\triangle_{\beta\gamma}{=}\ 0$,
$\triangle_{\alpha S}{\equiv}\triangle_{\delta S}{\equiv}\triangle_{\beta S}{\equiv}\triangle_{\gamma R}{\equiv}\triangle_{\beta R}{\equiv}\triangle_{\delta R}{\equiv}\triangle_{\alpha R}{\equiv}\triangle_{\gamma S}{\equiv}\triangle_{S}{\equiv}\ 0$
et $|\triangle_{RS}\ (0\ ,1) + \triangle_{RS}\ (1\ ,0)| \neq 0$, d'après (2.25) nous avons pour $|\rho|$ suffisamment grand :

$$|\triangle\ (\lambda)| \geq \frac{1}{|\rho|}e^{-\operatorname{Im}(\rho)}[|\triangle_{RS}\ (0\ ,1) + \triangle_{RS}\ (1\ ,0)| - \frac{1}{|\rho|}\left|\triangle_{R}\ (0\ ,1)\right| - |\rho|\ \ |\Psi(\rho)|]$$

D'après (2.26) nous déduisons que pour $\rho \in \sum_{\frac{\delta}{2}}$, $|\rho| \geq r_\circ > 0$, on a :

$$|\Psi(\rho)| \leq \frac{C_4(r_0)}{|\rho|^3}$$

Alors nous avons :

$$|\triangle\ (\lambda)| \geq \frac{1}{|\rho|}e^{-\operatorname{Im}(\rho)}[|\triangle_{RS}\ (0\ ,1) + \triangle_{RS}\ (1\ ,0)| - \frac{1}{r_0}\left|\triangle_{R}\ (0\ ,1)\right| - \frac{C_4(r_0)}{r_0^2}]$$

Nous pouvons choisir $r_0 > 0$ tel que :

$$\frac{1}{r_0}\left|\triangle_{R}\ (0\ ,1)\right| + \frac{C_2(r_0)}{r_0^2}] \leq \frac{1}{2}\left|\triangle_{RS}\ (0\ ,1) + \triangle_{RS}\ (1\ ,0)\right|$$

Alors, pour $\rho \in \sum_{\frac{\delta}{2}}$, $|\rho| \geq r_\circ > 0$, nous obtenons :

$$|\triangle\ (\lambda)| \geq \frac{|\triangle_{RS}\ (0\ ,1) + \triangle_{RS}\ (1\ ,0)|}{2\,|\rho|}e^{-\operatorname{Im}(\rho)} \tag{2.31}$$

D'après (2.24), on a :

$$F\ (\rho) \leq \frac{8}{\left|\triangle_{RS}\ (0\ ,1) + \triangle_{RS}\ (1\ ,0)\right| (-\sin(\frac{\delta}{2}))^2}\{(2\left\|\triangle_{RS}\right\| + \frac{\left\|\triangle_{R}\right\|}{r_0})\} \equiv F_4(r_0)$$

Ainsi nous avons démontré que $F\ (\rho)$ reste bornée dans le sécteur $\sum_{\frac{\delta}{2}}$

,pour $|\rho|$ suffisamment grand, d'où :

$$\|R\ (\lambda\ , L_\infty)\| \leq \frac{F_4(\rho)}{|\rho|}$$

cas 6 : Supposons que : $\triangle_{\alpha\delta} = \triangle_{\alpha\beta} = \triangle_{\beta\delta} = \triangle_{\gamma\delta} = \triangle_{\alpha\gamma} = \triangle_{\beta\gamma} = 0$,

$\triangle_{\alpha S} \equiv \triangle_{\delta S} \equiv \triangle_{\beta S} \equiv \triangle_{\gamma R} \equiv \triangle_{\beta R} \equiv \triangle_{\delta R} \equiv \triangle_{\alpha R} \equiv \triangle_{\gamma S} \equiv \triangle_{S} \equiv \triangle_{RS} \equiv 0$

et $|\triangle_R\ (0\ ,1)| \neq 0$, d'après (2.25) nous avons pour $|\rho|$ suffisamment grand :

$$|\triangle\ (\lambda)| \geq \frac{1}{|\rho|^2} e^{-\operatorname{Im}(\rho)}[|\triangle_R\ (0\ ,1)| - |\rho|^2 \quad |\Psi(\rho)|]$$

D'après (2.26) nous déduisons que pour $\rho \in \sum_{\frac{\delta}{2}}$, $|\rho| \geq r_\circ > 0$, on a :

$$|\rho|^2 |\Psi(\rho)| \leq \frac{C_5(r_0)}{r_0}$$

Alors nous avons :

$$|\triangle\ (\lambda)| \geq \frac{1}{|\rho|^2} e^{-\operatorname{Im}(\rho)}[|\triangle_R\ (0\ ,1)| - \frac{C_5(r_0)}{r_0}]$$

Nous pouvons choisir $r_0 > 0$, tel que :

$$\frac{C_5(r_0)}{r_0} \leq \frac{1}{2} |\triangle_R\ (0\ ,1)|$$

Alors, pour $\rho \in \sum_{\frac{\delta}{2}}$, $|\rho| \geq r_\circ > 0$, nous obtenons :

$$|\triangle\ (\lambda)| \geq \frac{1}{2\,|\rho|^2} e^{-\operatorname{Im}(\rho)}\, |\triangle_R\ (0\ ,1)| \tag{2.32}$$

Finalement d'après (2.24), on a :

$$F(\rho) \leq \frac{8}{|\triangle_R\ (0\ ,1)|\, (\sin(\frac{\delta}{2}))^2} \|\triangle_R\| \equiv F_5(r_0)$$

Ainsi nous avons démontré que $F(\rho)$ reste bornée dans le sécteur $\sum_{\frac{\delta}{2}}$, pour $|\rho|$ suffisamment grand, d'où :

$$\|R\ (\lambda\ , L_\infty)\| \leq \frac{F_5(\rho)}{|\rho|}$$

Définition 2.3.1 *les conditions aux limites dans* (2.1) *sont dites régulières si* $\triangle_{\alpha\delta} \neq 0$.

Définition 2.3.2 *les conditions aux limites dans* (2.1) *sont dites faiblement régulières si l'une des conditions suivantes est vérifiée.*

1-$\triangle_{\alpha\delta}= 0$ *et* $|\triangle_{\beta\delta} + \triangle_{\alpha\gamma} + \triangle_{\alpha S}\ (1)| \neq 0.$

2-$\triangle_{\alpha\delta}=\triangle_{\alpha\beta}=\triangle_{\beta\delta}=\triangle_{\alpha\gamma}= 0\ ,\ \triangle_{\alpha S}\equiv 0$

et $|\triangle_{\delta S}\ (0)- \triangle_{\beta\gamma} - \triangle_{\beta S}\ (1)- \triangle_{\alpha R}\ (1)| \neq 0$

3-$\triangle_{\alpha\delta}=\triangle_{\alpha\beta}=\triangle_{\beta\delta}=\triangle_{\alpha\gamma}=\triangle_{\beta\gamma}= 0\ ,\ \triangle_{\alpha S}\equiv\triangle_{\delta S}\equiv\triangle_{\beta S}$

$\equiv\triangle_{\alpha R}\equiv 0$, *et* $|\triangle_{\gamma S}\ (0)- \triangle_{\beta R}\ (1)- \triangle_{\delta R}\ (0)+ \triangle_{S}\ (1\ ,0)| \neq 0.$

4-$\triangle_{\alpha\delta}=\triangle_{\alpha\beta}=\triangle_{\beta\delta}=\triangle_{\gamma\delta}=\triangle_{\alpha\gamma}=\triangle_{\beta\gamma}= 0\ ,\ \triangle_{\alpha S}\equiv\triangle_{\delta S}\equiv\triangle_{\beta S}$

$\equiv\triangle_{\gamma R}\equiv\triangle_{\beta R}\equiv\triangle_{\delta R}\equiv\triangle_{\alpha R}\equiv\triangle_{\gamma S}\equiv\triangle_{S}\equiv 0$ *et* $|\triangle_{RS}\ (0\ ,1)+ \triangle_{RS}\ (1\ ,0)| \neq 0.$

5-$\triangle_{\alpha\delta}=\triangle_{\alpha\beta}=\triangle_{\beta\delta}=\triangle_{\gamma\delta}=\triangle_{\alpha\gamma}=\triangle_{\beta\gamma}= 0\ ,\ \triangle_{\alpha S}\equiv\triangle_{\delta S}\equiv\triangle_{\beta S}\equiv\triangle_{\gamma R}$

$\equiv\triangle_{\beta R}\equiv\triangle_{\delta R}\equiv\triangle_{\alpha R}\equiv\triangle_{\gamma S}\equiv\triangle_{S}\equiv\triangle_{RS}\equiv 0$ *et* $|\triangle_{R}\ (0\ ,1)| \neq 0$

Ainsi on a démontré les théorèmes suivants

Théorème 2.3.3 *On suppose que les conditions aux limites sont régulières et les fonctions* R_i , $S_i \in C^1([0\ ,1]\ ,\mathbb{C})$, $i = \overline{1\ ,2}$, *alors on a* $\sum_\delta \subset \rho(L_\infty)$ *et il existe* $c > 0$ *tel que :*

$$\|R\ (\lambda\ ,L_\infty)\| \leq \frac{c}{|\lambda|}$$

Théorème 2.3.4 *On suppose que les conditions aux limites sont faiblement régulières et les fonctions* R_i , $S_i \in C^1([0\ ,1]\ ,\mathbb{C})$, $i = \overline{1\ ,2}$, *alors on a* $\sum_\delta \subset \rho(L_\infty)$ *et il existe* $c > 0$ *tel que :*

$$\|R\ (\lambda\ ,L_\infty)\| \leq \frac{c}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}}$$

Remarque 2.3.5 *Si les conditions aux limites sont régulières la décroissance de la résolvante est maximale et du théorème* (2.3.3) *résulte que l'opérateur* L_∞ *est générateur d'un semi-groupe analytique.*

Remarque 2.3.6 *Si les conditions aux limites sont faiblement régulières la décroissante de la résolvante est non maximale et du théorème* (2.3.4) *résulte que l'opérateur* L_∞ *est générateur d'un semi-groupe à singularité.*

Remarque 2.3.7 *Dans le cas où les conditions aux limites sont faiblement régulières l'estimation de la résolvante est optimale.*

Preuve. Nous utilisons une démonstration par l'absurde, nous supposons qu'il existe $c > 0$ et $\varepsilon > 0$ tel que

$$\|R(\lambda\ ,L_\infty)\| \leq \frac{c}{|\lambda|^{1+\varepsilon}}\ ,\forall\lambda = \rho^2 \in \sum_{\delta\ ,\ r}$$

Considérons les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} B_1(u) = \int_0^1 u'(t)dt = 0 \\ B_1(u) = \int_0^1 u\ (t)dt = 0 \end{cases}$$

Nous avons donc $R_1 \equiv 0$, $S_2 \equiv 0$, $R_2 \equiv 1$ et $S_1 \equiv 1$, comme

$$R_2(0)S_1(t) + R_2(1)S_1(0) = 2 \neq 0$$

C'est une condition de régularité, où $R_i\ ,S_i \in C^1([0\ ,1]\ ,\mathbb{C})$, $i = \overline{1,2}$, fixons $k > 0$ et prenons $h \equiv 1$, si $\lambda = \rho^2 \in \sum_{\delta\ ,r}$ pour r suffisament grand et pour $p = \infty$ nous avons :

$$\begin{aligned} \|R\ (\lambda\ ,L_\infty)\| &\geq \|R\ (\lambda\ ,L_\infty)h\|_{L^\infty(0\ ,1)} \\ &= \sup_{0\leq x\leq 1} |R\ (\lambda\ ,L_\infty)h(x)| \\ &= \sup_{0\leq x\leq 1} \left| \int_0^1 G\ (x\ ,s\ ,\lambda)ds \right| \\ &= \sup_{0\leq x\leq 1} \left| \frac{1}{\triangle\ (\lambda)} \int_0^1 N\ (x\ ,s\ ,\lambda)ds \right| \end{aligned}$$

Le déterminant caractéristique dans ce cas est :

$$\triangle\ (\rho^2) = \frac{2}{i\rho}(e^{i\rho} - 1)(e^{-i\rho} - 1)$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\int_0^1 N\ (0\ ,s\ ,\lambda)ds = \frac{1}{\rho^2}(e^{i\rho} - e^{-i\rho}) - \frac{2}{i\rho^3}(e^{i\rho} - 1)(1 - e^{-i\rho})$$

Donc :

$\sup_{0\leq x\leq 1} \left| \dfrac{1}{\triangle\ (\lambda)} \int_0^1 N\ (x\ ,s\ ,\lambda)ds \right| \geq$

$$\left| \frac{1}{2(e^{i\rho} - 1)(e^{-i\rho} - 1)} (\frac{-1}{i\rho^2}(e^{i\rho} - e^{-i\rho}) - \frac{2}{\rho^2}(e^{i\rho} - 1)(1 - e^{-i\rho})) \right|$$

Le second membre est plus grand que : $\dfrac{k}{|\lambda|^{1+\varepsilon}}$ pour $|\rho|$ suffisamment grand .

Alors pour tout $k > 0$ nous pouvons prendr $r > 0$ tel que :

$$\|R\ (\lambda\ , L_{\infty})\| \geq \frac{c}{|\lambda|^{1+\varepsilon}}\ , \forall \lambda = \rho^2 \in \sum_{\delta\ ,\ r}$$

contraduction de l'hypothèse. ■

Chapitre 3

Problème aux limites faiblement régulières pour équation différentielle du second ordre avec conditions aux limites non locales dans $\mathcal{L}^{\infty}(0,1)$

Ce chapitre est consacré à l'étude d'un nautre problème aux limites pour équations différentielle du second ordre avec conditions aux limites non locales et contenant le paramétre spectral dans l'espace $\mathcal{L}^{\infty}(0,1)$, on extrait une classe de conditions aux limites dite faiblement régulière pour laquelle on montre que la décroissance de la résolvante est non maximale d'où l'opérateur en question est générateur d'un semi-groupe à singularité.
Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} L(u) = u'' \\ B_1(u) = \lambda\left(\alpha_1 u(0) + \beta_1 u'(0)\right) + \gamma_1 u(1) + \delta_1 u'(1) + \int\limits_0^1 \left(R_1(t)\, u(t) + S_1(t)\, u'(t)\right) dt = 0 \\ B_2(u) = \lambda\left(\alpha_2 u(0) + \beta_2 u'(0)\right) + \gamma_2 u(1) + \delta_2 u'(1) + \int\limits_0^1 \left(R_2(t)\, u(t) + S_2(t)\, u'(t)\right) dt = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

où les fonctions R_i , $S_i \in C^1([0\ ,1]\ ,\ \mathbb{C})$ $i = \overline{1,2}$, soit l'opérateur :

$L_{\infty}\ : \mathcal{L}^{\infty}(0\ ,1) \to \mathcal{L}^{\infty}(0\ ,1)\ .\ u \to L_{\infty}(u) = u''$ de domaine :

$$D\ \left(L_{\infty}\right) = \left\{u \in W^{2.\infty}(0\ ,1)\, ; B_i(u) = 0\ ,\ i = \overline{1,2}\right\}$$

3.1 Construction de la fonction de Green

Dans toute la suite on considère $\lambda \in \Sigma_\delta$ où

$$\Sigma_\delta = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \ , \ \ |\arg(\lambda)| \leq \delta \ , \ \frac{\pi}{2} < \delta < \pi \right\}$$

Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} u'' - \lambda u = h(x) \\ B_1(u) = \lambda(\alpha_1 u(0) + \beta_1 u'(0)) + \gamma_1 u(1) + \delta_1 u'(1) + \int\limits_0^1 (R_1(t)u(t) + S_1(t)u'(t))\,dt = 0 \\ B_2(u) = \lambda(\alpha_2 u(0) + \beta_2 u'(0)) + \gamma_2 u(1) + \delta_2 u'(1) + \int\limits_0^1 (R_2(t)u(t) + S_2(t)u'(t))\,dt = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

Si l'on suppose que le problème homogène correspendant à (3.2), n'admet que la solution triviale. Alors, le problème (3.2) admet une fonction de Green unique $G(x \ , s \ , \lambda)$ .on a :

$$u'' - \lambda u = 0 \Rightarrow u'' = \lambda u \Rightarrow \rho^2 = \lambda \Rightarrow \rho = \sqrt{\lambda} \vee \rho = -\sqrt{\lambda}$$

Donc $G(x \ , s \ , \lambda)$ est solution du problème homogène. D'où $G(x, s, \lambda)$ se met sous la forme :

$$G(x \ , s \ , \lambda) = \begin{cases} a_1(s)\,e^{-\rho x} + a_2(s)\,e^{\rho x} & sur \ \ ]0 \ , s[\\ b_1(s)\,e^{-\rho x} + b_2(s)\,e^{\rho x} & sur \ \ ]s \ , 1[\end{cases} \tag{3.3}$$

où $\rho = \sqrt{\lambda}$, $\operatorname{Re}(\rho) > 0$, on a d'après la condition1 du théorème (0-1-2)

$$-(a_1(s) - b_1(s))\,e^{-\rho s} - (a_2(s) - b_2(s))\,e^{\rho s} = 0 \tag{3.4}$$

Et d'aprés la condition 2 du même théorème, on a pour tout s fixé dans $]0 \ , 1[$, la fonction $G(x \ , s \ , \lambda)$ admet les dérivées premières en x dans chacun des intervalle $[0 \ , s[$ et $]s \ , 1]$, donc :

$$(a_1(s) - b_1(s))\,\rho e^{-\rho s} - (a_2(s) - b_2(s))\,\rho e^{\rho s} = 1 \tag{3.5}$$

Et d'après la condition 3, du même théorème, on a

$$B_i(G) = 0 \ \ , \ \ i = \overline{1 \ , 2} \tag{3.6}$$

De (3.4), (3.5) , (3.6) on obtient le système :

$$\begin{cases} (a_1(s) - b_1(s))\,\rho e^{-\rho s} - (a_2(s) - b_2(s))\,\rho e^{\rho s} = 1 \\ -(a_1(s) - b_1(s))\,e^{-\rho s} - (a_2(s) - b_2(s))\,e^{\rho s} = 0 \\ B_1(G) = 0 \text{ et } B_2(G) = 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

De (3.4) et (3.6) on a :

$$W = \begin{vmatrix} \rho e^{-\rho s} & -\rho e^{\rho s} \\ -e^{-\rho s} & -e^{\rho s} \end{vmatrix} = -2\rho$$

Ainsi :

$$a_1(s) - b_1(s) = \frac{-1}{2\rho} \begin{vmatrix} 1 & -\rho e^{\rho s} \\ 0 & -e^{\rho s} \end{vmatrix} = \frac{e^{\rho s}}{2\rho}$$

D'où :

$$a_1(s) = b_1(s) + \frac{e^{\rho s}}{2\rho} \tag{3.8}$$

Et

$$a_2(s) - b_2(s) = \frac{-1}{2\rho} \begin{vmatrix} \rho e^{-\rho s} & 1 \\ -e^{-\rho s} & 0 \end{vmatrix} = \frac{-e^{-\rho s}}{2\rho}$$

D'où

$$a_2(s) = b_2(s) - \frac{e^{-\rho s}}{2\rho} \tag{3.9}$$

D'après (3.5) on a :

$$\begin{cases} B_1(G) = \lambda(\alpha_1 - \rho\beta_1) a_1(s) + \lambda(\alpha_1 + \rho\beta_1) a_2(s) + (\gamma_1 - \rho\delta_1) e^{-\rho} b_1(s) + (\gamma_1 + \rho\delta_1) \\ \qquad e^{\rho} b_2(s) + \int\limits_0^s [(R_1(x) - \rho S_1(x)) e^{-\rho x} a_1(s) + (R_1(x) + \rho S_1(x)) e^{\rho x} a_2(x)] \, dx \\ \qquad + \int\limits_s^1 [(R_1(x) - \rho S_1(x)) e^{-\rho x} b_1(s) + (R_1(x) + \rho S_1(x)) e^{\rho x} b_2(x)] \, dx = 0 \\ B_2(G) = \lambda(\alpha_2 - \rho\beta_2) a_1(s) + \lambda(\alpha_2 + \rho\beta_2) a_2(s) + (\gamma_2 - \rho\delta_2) e^{-\rho} b_1(s) + (\gamma_2 + \rho\delta_2) \\ \qquad e^{\rho} b_2(s) + \int\limits_0^s [(R_2(x) - \rho S_2(x)) e^{-\rho x} a_1(s) + (R_2(x) + \rho S_2(x)) e^{\rho x} a_2(x)] \, dx \\ \qquad + \int\limits_s^1 [(R_2(x) - \rho S_2(x)) e^{-\rho x} b_1(s) + (R_2(x) + \rho S_2(x)) e^{\rho x} b_2(x)] \, dx = 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

En remplaçant (3.8) et (3.9) dans (3.10) on obtient :

$$\begin{cases} B_1(G) = [\rho^2\alpha_1 - \rho^3\beta_1 + \gamma_1 e^{-\rho} - \rho\delta_1 e^{-\rho} + \int\limits_0^1 (R_1(x) - \rho S_1(x)) e^{-\rho x} dx] b_1(s) + \\ \quad +[\rho^2\alpha_1 + \rho^3\beta_1 + \gamma_1 e^{\rho} + \rho\delta_1 e^{\rho} + \int\limits_0^1 (R_1(x) + \rho S_1(x)) e^{\rho x} dx] b_2(s) + \\ \quad + \frac{\lambda}{2\rho}[(\alpha_1 - \rho\beta_1) e^{\rho s} - (\alpha_1 + \rho\beta_1) e^{-\rho s}] \\ \quad + \frac{1}{2\rho}\int\limits_0^s \left[(R_1(x) - \rho S_1(x)) e^{\rho(s-x)} - (R_1(x) + \rho S_1(x)) e^{\rho(x-s)}\right] dx = 0 \\ B_2(G) = [\rho^2\alpha_2 - \rho^3\beta_2 + \gamma_2 e^{-\rho} - \rho\delta_2 e^{-\rho} + \int\limits_0^1 (R_2(x) - \rho S_2(x)) e^{-\rho x} dx] b_1(s) + \\ \quad +[\rho^2\alpha_2 + \rho^3\beta_2 + \gamma_2 e^{\rho} + \rho\delta_2 e^{\rho} + \int\limits_0^1 (R_2(x) + \rho S_2(x)) e^{\rho x} dx] b_2(s) + \\ \quad + \frac{\lambda}{2\rho}[(\alpha_2 - \rho\beta_2) e^{\rho s} - (\alpha_2 + \rho\beta_2) e^{-\rho s}] + \\ \quad + \frac{1}{2\rho}\int\limits_0^s \left[(R_2(x) - \rho S_2(x)) e^{\rho(s-x)} - (R_2(x) + \rho S_2(x)) e^{\rho(x-s)}\right] dx = 0 \end{cases}$$

C'est-à-dire :

$$\begin{cases} B_1(G) = B_1(u_1) b_1(s) + B_1(u_2) b_2(s) + \frac{\lambda}{2\rho}[(\alpha_1 - \rho\beta_1) e^{\rho s} - (\alpha_1 + \rho\beta_1) e^{-\rho s}] \\ \quad + \frac{1}{2\rho}\int\limits_0^s \left[(R_1(x) - \rho S_1(x)) e^{\rho(s-x)} - (R_1(x) + \rho S_1(x)) e^{\rho(x-s)}\right] dx = 0 \\ B_2(G) = B_2(u_1) b_1(s) + B_2(u_2) b_2(s) + \frac{\lambda}{2\rho}[(\alpha_2 - \rho\beta_2) e^{\rho s} - (\alpha_2 + \rho\beta_2) e^{-\rho s}] \\ \quad + \frac{1}{2\rho}\int\limits_0^s \left[(R_2(x) - \rho S_2(x)) e^{\rho(s-x)} - (R_2(x) + \rho S_2(x)) e^{\rho(x-s)}\right] dx = 0 \end{cases}$$

Où :

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} B_1(u_1) & B_1(u_2) \\ B_2(u_1) & B_2(u_2) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{3.11}$$

Alors ce système admet une solution $(b_1(s)\ , b_2(s))$:

$$\begin{aligned} b_1(s) = \frac{1}{\Delta(\lambda) 2\rho}\{ & B_2(u_2)[\lambda((\alpha_1 + \rho\beta_1) e^{-\rho s} - (\alpha_1 - \rho\beta_1) e^{\rho s}) \\ & + \int\limits_0^s \left[(-R_1(x) + \rho S_1(x)) e^{\rho(s-x)} + (R_1(x) + \rho S_1(x)) e^{\rho(x-s)}\right] dx] \\ & - B_1(u_2)[\lambda((\alpha_2 + \rho\beta_2) e^{-\rho s} - (\alpha_2 - \rho\beta_2) e^{\rho s}) \\ & + \int\limits_0^s \left[(-R_2(x) + \rho S_2(x)) e^{\rho(s-x)} + (R_2(x) + \rho S_2(x)) e^{\rho(x-s)}\right] dx\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_2(s) = \frac{1}{\Delta(\lambda) 2\rho}\{ & B_2(u_1)[\lambda(\alpha_1 - \rho\beta_1) e^{\rho s} - (\alpha_1 + \rho\beta_1) e^{-\rho s}] \\ & + \int\limits_0^s \left[(R_1(x) - \rho S_1(x)) e^{\rho(s-x)} - (R_1(x) + \rho S_1(x)) e^{\rho(x-s)}\right] dx \\ & - B_1(u_1)[\lambda(\alpha_2 - \rho\beta_2) e^{\rho s} - (\alpha_2 + \rho\beta_2) e^{-\rho s}] \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2\rho}\int_0^s \left[(R_2(x)-\rho S_2(x))e^{\rho(s-x)}-(R_2(x)+\rho S_2(x))e^{\rho(x-s)}\right]dx\}$$

Ainsi d'après la formule (3.3), la fonction de Green s'écrit si $x>s$:

$$G(x\ ,s\ ,\lambda)=\frac{1}{2\rho\Delta(\lambda)}[e^{\rho(x+s)}\{(\lambda\Delta_{\alpha\gamma}-\rho(\lambda\Delta_{\alpha\delta}+\lambda\Delta_{\beta\gamma})+\rho^2\lambda\Delta_{\beta\delta})e^{-\rho}$$
$$-\int_0^s(\Delta_{\gamma R}(t)-\rho(\Delta_{\delta R}(t)+\Delta_{\gamma S}(t))+\rho^2\Delta_{\delta S}(t))e^{-\rho(t+1)}dt$$
$$+\int_s^1(\lambda\Delta_{\alpha R}(t)-\rho(\lambda\Delta_{\alpha S}(t)+\lambda\Delta_{\beta R}(t))+\rho^2\lambda\Delta_{\beta S}(t))e^{-\rho t}dt$$
$$+\int_s^1\int_0^s(\Delta_R(\varepsilon\ ,t)+\rho(\Delta_{RS}(t\ ,\varepsilon)-\Delta_{RS}(\varepsilon,t))+\rho^2\Delta_S(\varepsilon,t))e^{-\rho(\varepsilon+t)}d\varepsilon dt$$
$$+e^{-\rho(x+s)}\{(\lambda\Delta_{\alpha\gamma}+\rho(\lambda\Delta_{\alpha\delta}+\lambda\Delta_{\beta\gamma})+\rho^2\lambda\Delta_{\beta\delta})e^{\rho}$$
$$-\int_0^s(\Delta_{\gamma R}(t)+\rho(\Delta_{\delta R}(t)+\Delta_{\gamma S}(t))+\rho^2\Delta_{\delta S}(t))e^{\rho(t+1)}dt$$
$$+\int_s^1(\lambda\Delta_{\alpha R}(t)+\rho(\lambda\Delta_{\beta R}(t)+\lambda\Delta_{\alpha S}(t))+\rho^2\lambda\Delta_{\beta S}(t))e^{\rho t}dt$$
$$+\int_s^1\int_0^s(\Delta_R(\varepsilon,t)+\rho(\Delta_{RS}(\varepsilon,t)-\Delta_{RS}(t\ ,\varepsilon))+\rho^2\Delta_S(\varepsilon,t))e^{\rho(\varepsilon+t)}d\varepsilon dt$$
$$+e^{\rho(x-s)}\{(-\lambda\Delta_{\alpha\gamma}+\rho(\lambda\Delta_{\alpha\delta}-\lambda\Delta_{\beta\gamma})+\rho^2\lambda\Delta_{\beta\delta})e^{-\rho}+2\rho\lambda^2\Delta_{\alpha\beta}$$
$$+\int_0^s(\lambda\Delta_{\alpha R}(t)+\rho(\lambda\Delta_{\alpha S}(t)+\lambda\Delta_{\beta R}(t))-\rho^2\lambda\Delta_{\beta S}(t))e^{\rho t}dt$$
$$+\int_0^s(\Delta_{\gamma R}(t)+\rho(\Delta_{\gamma S}(t)-\Delta_{\delta R}(t))-\rho^2\Delta_{\delta S}(t))e^{\rho(t-1)}dt$$
$$+\int_s^1(\lambda\Delta_{\alpha R}(t)+\rho(\lambda\Delta_{\beta R}(t)-\lambda\Delta_{\alpha S}(t))-\rho^2\lambda\Delta_{\beta S}(t))e^{-\rho t}dt$$
$$+\int_0^1\int_0^s(\Delta_R(t\ ,\varepsilon)+\rho(\Delta_{RS}(\varepsilon,t)-\Delta_{RS}(t\ ,\varepsilon))-\rho^2\Delta_S(t\ ,\varepsilon))e^{\rho(\varepsilon-t)}d\varepsilon dt$$
$$+e^{\rho(s-x)}\{(-\lambda\Delta_{\alpha\gamma}+\rho(\lambda\Delta_{\beta\gamma}-\lambda\Delta_{\alpha S})+\rho^2\lambda\Delta_{\beta\delta})e^{\rho}-2\rho\lambda^2\Delta_{\alpha\beta}$$
$$+\int_0^s(\lambda\Delta_{\alpha R}(t)+\rho(\lambda\Delta_{\beta R}(t)-\lambda\Delta_{\alpha S}(t))-\rho^2\lambda\Delta_{\beta S}(t))e^{-\rho t}dt$$
$$+\int_0^s(\Delta_{\gamma R}(t)+\rho(\Delta_{\delta R}(t)-\Delta_{\gamma S}(t))-\rho^2\Delta_{\delta S}(t))e^{\rho(1-t)}dt$$
$$-\int_s^1(\lambda\Delta_{\alpha R}(t)+\rho(\lambda\Delta_{\alpha S}(t)-\lambda\Delta_{\beta R}(t))-\rho^2\lambda\Delta_{\beta S}(t))e^{\rho t}dt$$
$$+\int_0^1\int_0^s(\Delta_R(t\ ,\varepsilon)-\rho(\Delta_{RS}(\varepsilon,t)+\Delta_{RS}(t\ ,\varepsilon))-\rho^2\Delta_S(t\ ,\varepsilon))e^{\rho(t-\varepsilon)}d\varepsilon dt$$

Où :$\lambda=\rho^2$, $\mathrm{Re}(\rho)>0$. Alors ;

$$G(x\ ,s\ ,\lambda)=\frac{1}{2\rho\Delta(\lambda)}[e^{\rho(x+s)}\{(\rho^2\Delta_{\alpha\gamma}-\rho^3(\Delta_{\alpha\delta}+\Delta_{\beta\gamma})+\rho^4\Delta_{\beta\delta})e^{-\rho}$$
$$-\int_0^s(\Delta_{\gamma R}(t)-\rho(\Delta_{\delta R}(t)+\Delta_{\gamma S}(t))+\rho^2\Delta_{\delta S}(t))e^{-\rho(t+1)}dt$$

$$+\int_s^1 \left(\rho^2\Delta_{\alpha R}(t) - \rho^3\left(\Delta_{\alpha S}(t) + \Delta_{\beta R}(t)\right) + \rho^4\Delta_{\beta S}(t)\right)e^{-\rho t}dt$$
$$+\int_s^1\int_0^s \left(\Delta_R(\varepsilon,t) + \rho\left(\Delta_{RS}(t\ ,\varepsilon) - \Delta_{RS}(\varepsilon,t)\right) + \rho^2\Delta_S(\varepsilon,t)\right)e^{-\rho(\varepsilon+t)}d\varepsilon dt\}$$
$$+e^{-\rho(x+s)}\{\left(\rho^2\Delta_{\alpha\gamma} + \rho^3\left(\Delta_{\alpha\delta} + \Delta_{\beta\gamma}\right) + \rho^4\Delta_{\beta\delta}\right)e^{\rho}$$
$$-\int_0^s \left(\Delta_{\gamma R}(t) + \rho\left(\Delta_{\delta R}(t) + \Delta_{\gamma S}(t)\right) + \rho^2\Delta_{\delta S}(t)\right)e^{\rho(t+1)}dt$$
$$+\int_s^1 \left(\rho^2\Delta_{\alpha R}(t) + \rho^3\left(\Delta_{\beta R}(t) + \Delta_{\alpha S}(t)\right) + \rho^4\Delta_{\beta S}(t)\right)e^{\rho t}dt$$
$$+\int_s^1\int_0^s \left(\Delta_R(\varepsilon,t) + \rho\left(\Delta_{RS}(\varepsilon,t) - \Delta_{RS}(t\ ,\varepsilon)\right) + \rho^2\Delta_S(\varepsilon,t)\right)e^{\rho(\varepsilon+t)}d\varepsilon dt\}$$
$$+e^{\rho(x-s)}\{\left(-\rho^2\Delta_{\alpha\gamma} + \rho^3\left(\Delta_{\alpha\delta} - \Delta_{\beta\gamma}\right) + \rho^4\Delta_{\beta\delta}\right)e^{-\rho} + 2\rho^5\Delta_{\alpha\beta}$$
$$+\int_0^s \left(\rho^2\Delta_{\alpha R}(t) + \rho^3\left(\Delta_{\alpha S}(t) + \Delta_{\beta R}(t)\right) - \rho^4\Delta_{\beta S}(t)\right)e^{\rho t}dt$$
$$+\int_0^s \left(\Delta_{\gamma R}(t) + \rho\left(\Delta_{\gamma S}(t) - \Delta_{\delta R}(t)\right) - \rho^2\Delta_{\delta S}(t)\right)e^{\rho(t-1)}dt$$
$$+\int_0^1 \left(\rho^2\Delta_{\alpha R}(t) + \rho^3\left(\Delta_{\beta R}(t) - \Delta_{\alpha S}(t)\right) - \rho^4\Delta_{\beta S}(t)\right)e^{-\rho t}dt$$
$$+\int_0^1\int_0^s \left(\Delta_R(t\ ,\varepsilon) + \rho\left(\Delta_{RS}(\varepsilon,t) - \Delta_{RS}(t\ ,\varepsilon)\right) - \rho^2\Delta_S(t\ ,\varepsilon)\right)e^{\rho(\varepsilon-t)}d\varepsilon dt$$
$$+e^{\rho(S-x)}\{\left(-\rho^2\Delta_{\alpha\gamma} + \rho^3\left(\Delta_{\beta\gamma} - \Delta_{\alpha\delta}\right) + \rho^4\Delta_{\beta\delta}\right)e^{\rho} - 2\rho^5\Delta_{\alpha\beta}$$
$$+\int_0^s \left(\rho^2\Delta_{\alpha R}(t) + \rho^3\left(\Delta_{\beta R}(t) - \Delta_{\alpha S}(t)\right) - \rho^4\Delta_{\beta S}(t)\right)e^{-\rho t}dt$$
$$+\int_0^s \left(\Delta_{\gamma R}(t) + \rho\left(\Delta_{\delta R}(t) - \Delta_{\gamma S}(t)\right) - \rho^2\Delta_{\delta S}(t)\right)e^{\rho(1-t)}dt$$
$$-\int_0^1 \left(\rho^2\Delta_{\alpha R}(t) + \rho^3\left(\Delta_{\alpha S}(t) - \Delta_{\beta R}(t)\right) - \rho^4\Delta_{\beta S}(t)\right)e^{\rho t}dt$$
$$+\int_0^1\int_0^s \left(\Delta_R(t\ ,\varepsilon) - \rho\left(\Delta_{RS}(\varepsilon,t) + \Delta_{RS}(t\ ,\varepsilon)\right) - \rho^2\Delta_S(t\ ,\varepsilon)\right)e^{\rho(t-\varepsilon)}d\varepsilon dt\}]$$

Et si $x < s$

$$\begin{aligned} G(x\ ,s\ ,\lambda) &= a_1(s)e^{-\rho x} + a_2(s)e^{\rho x} = (b_1(s) + \frac{e^{\rho s}}{2\rho})e^{-\rho x} + (b_2(s) - \frac{e^{-\rho s}}{2\rho})e^{\rho x} \\ &= b_1(s)e^{-\rho x} + b_2(s)e^{\rho x} + \frac{1}{2\rho}\left(e^{\rho(s-x)} - e^{\rho(x-s)}\right) \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$G(x\ ,s\ ,\lambda) = \frac{1}{2\rho\Delta(\lambda)}[e^{\rho(x+s)}\{\left(\rho^2\Delta_{\alpha\gamma} - \rho^3\left(\Delta_{\alpha\delta} + \Delta_{\beta\gamma}\right) + \rho^4\Delta_{\beta\delta}\right)e^{-\rho}$$
$$-\int_0^s \left(\Delta_{\gamma R}(t) - \rho\left(\Delta_{\delta R}(t) + \Delta_{\gamma S}(t)\right) + \rho^2\Delta_{\delta S}(t)\right)e^{-\rho(t+1)}dt$$
$$+\int_s^1 \left(\rho^2\Delta_{\alpha R}(t) - \rho^3\left(\Delta_{\alpha S}(t) + \Delta_{\beta R}(t)\right) + \rho^4\Delta_{\beta S}(t)\right)e^{-\rho t}dt$$

$$+\int_s^1\int_0^s \left(\Delta_R(\varepsilon,t)+\rho\left(\Delta_{RS}(t\ ,\varepsilon)-\Delta_{RS}(\varepsilon,t)\right)+\rho^2\Delta_S(\varepsilon,t)\right)e^{-\rho(\varepsilon+t)}d\varepsilon dt\}$$
$$+e^{-\rho(x+s)}\{\left(\rho^2\Delta_{\alpha\gamma}+\rho^3\left(\Delta_{\alpha\delta}+\Delta_{\beta\gamma}\right)+\rho^4\Delta_{\beta\delta}\right)e^{\rho}$$
$$-\int_0^s\left(\Delta_{\gamma R}(t)+\rho\left(\Delta_{\delta R}(t)+\Delta_{\gamma S}(t)\right)+\rho^2\Delta_{\delta S}(t)\right)e^{\rho(t+1)}dt$$
$$+\int_s^1\left(\rho^2\Delta_{\alpha R}(t)+\rho^3\left(\Delta_{\beta R}(t)+\Delta_{\alpha S}(t)\right)+\rho^4\Delta_{\beta S}(t)\right)e^{\rho t}dt$$
$$+\int_s^1\int_0^s\left(\Delta_R(\varepsilon,t)+\rho\left(\Delta_{RS}(\varepsilon,t)-\Delta_{RS}(t\ ,\varepsilon)\right)+\rho^2\Delta_S(\varepsilon,t)\right)e^{\rho(\varepsilon+t)}d\varepsilon dt\}$$
$$+e^{\rho(x-s)}\{\left(-\rho^2\Delta_{\alpha\gamma}+\rho^3\left(\Delta_{\beta\gamma}-\Delta_{\alpha\delta}\right)+\rho^4\Delta_{\beta\delta}\right)e^{\rho}-2\rho^3\Delta_{\alpha\delta}$$
$$-\int_s^1\left(\rho^2\Delta_{\alpha R}(t)+\rho^3\left(\Delta_{\alpha S}(t)-\Delta_{\beta R}(t)\right)-\rho^4\Delta_{\beta S}(t)\right)e^{\rho t}dt$$
$$-\int_s^1\left(\Delta_{\gamma R}(t)+\rho\left(\Delta_{\gamma S}(t)-\Delta_{\delta R}(t)\right)-\rho^2\Delta_{\delta S}(t)\right)e^{\rho(t-1)}dt$$
$$+\int_0^1\left(\Delta_{\gamma R}(t)+\rho\left(\Delta_{\delta R}(t)-\Delta_{\gamma S}(t)\right)-\rho^2\Delta_{\delta S}(t)\right)e^{\rho(1-t)}dt$$
$$+\int_0^1\int_s^1\left(\Delta_R(\varepsilon,t)-\rho\left(\Delta_{RS}(t\ ,\varepsilon)+\Delta_{RS}(\varepsilon,t)\right)-\rho^2\Delta_S(\varepsilon,t)\right)e^{\rho(\varepsilon+t)}d\varepsilon dt$$
$$+e^{\rho(s-x)}\{\left(-\rho^2\Delta_{\alpha\gamma}+\rho^3\left(\Delta_{\alpha\delta}-\Delta_{\beta\gamma}\right)+\rho^4\Delta_{\beta\delta}\right)e^{-\rho}+2\rho\Delta_{\gamma\delta}$$
$$-\int_s^1\left(\rho^2\Delta_{\alpha R}(t)+\rho\left(\Delta_{\beta R}(t)-\Delta_{\alpha S}(t)\right)-\rho^4\Delta_{\beta S}(t)\right)e^{-\rho t}dt$$
$$-\int_s^1\left(\Delta_{\gamma R}(t)+\rho\left(\Delta_{\delta R}(t)-\Delta_{\gamma S}(t)\right)-\rho^2\Delta_{\delta S}(t)\right)e^{\rho(1-t)}dt$$
$$+\int_0^1\left(\Delta_{\gamma R}(t)+\rho\left(\Delta_{\gamma S}(t)-\Delta_{\delta R}(t)\right)-\rho^2\Delta_{\delta S}(t)\right)e^{\rho(t-1)}dt$$
$$+\int_0^1\int_s^1\left(\Delta_R(\varepsilon,t)+\rho\left(\Delta_{RS}(t\ ,\varepsilon)+\Delta_{RS}(\varepsilon,t)\right)-\rho^2\Delta_S(\varepsilon,t)\right)e^{\rho(t-\varepsilon)}d\varepsilon dt\}]$$

D'après le théorème (2-1-1) on a :

$$\varphi(x\ ,s\ ,\lambda)=\frac{1}{2\rho}[e^{\rho(x+s)}\{\left(\rho^2\Delta_{\alpha\gamma}-\rho^3\left(\Delta_{\alpha\delta}+\Delta_{\beta\gamma}\right)+\rho^4\Delta_{\beta\delta}\right)e^{-\rho}$$
$$-\int_0^s\left(\Delta_{\gamma R}(t)-\rho\left(\Delta_{\delta R}(t)+\Delta_{\gamma S}(t)\right)+\rho^2\Delta_{\delta S}(t)\right)e^{-\rho(t+1)}dt$$
$$+\int_s^1\left(\rho^2\Delta_{\alpha R}(t)-\rho^3\left(\Delta_{\alpha S}(t)+\Delta_{\beta R}(t)\right)+\rho^4\Delta_{\beta S}(t)\right)e^{-\rho t}dt$$
$$+\int_s^1\int_0^s\left(\Delta_R(\varepsilon,t)+\rho\left(\Delta_{RS}(t\ ,\varepsilon)-\Delta_{RS}(\varepsilon,t)\right)+\rho^2\Delta_S(\varepsilon,t)\right)e^{-\rho(\varepsilon+t)}d\varepsilon dt\}$$
$$+e^{-\rho(x+s)}\{\left(\rho^2\Delta_{\alpha\gamma}+\rho^3\left(\Delta_{\alpha\delta}+\Delta_{\beta\gamma}\right)+\rho^4\Delta_{\beta\delta}\right)e^{\rho}$$
$$-\int_0^s\left(\Delta_{\gamma R}(t)+\rho\left(\Delta_{\delta R}(t)+\Delta_{\gamma S}(t)\right)+\rho^2\Delta_{\delta S}(t)\right)e^{\rho(t+1)}dt$$
$$+\int_s^1\left(\rho^2\Delta_{\alpha R}(t)+\rho^3\left(\Delta_{\beta R}(t)+\Delta_{\alpha S}(t)\right)+\rho^4\Delta_{\beta S}(t)\right)e^{\rho t}dt$$

$$+\int_s^1\int_0^s \left(\Delta_R(\varepsilon,t)+\rho\left(\Delta_{RS}(\varepsilon,t)-\Delta_{RS}(t\ ,\varepsilon)\right)+\rho^2\Delta_S(\varepsilon,t)\right)e^{\rho(\varepsilon+t)}d\varepsilon dt\}] \tag{3.12}$$

Ainsi que :

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x\ ,s,\lambda) &= \frac{1}{2\rho}[e^{\rho(x-s)}\{(-\rho^2\Delta_{\alpha\gamma}+\rho^3(\Delta_{\alpha\delta}-\Delta_{\beta\gamma})+\rho^4\Delta_{\beta\delta})e^{-\rho}+2\rho^5\Delta_{\alpha\beta}\\
&+\int_0^s(\rho^2\Delta_{\alpha R}(t)+\rho^3(\Delta_{\alpha S}(t)+\Delta_{\beta R}(t))-\rho^4\Delta_{\beta S}(t))e^{\rho t}dt\\
&+\int_0^s(\Delta_{\gamma R}(t)+\rho(\Delta_{\gamma S}(t)-\Delta_{\delta R}(t))-\rho^2\Delta_{\delta S}(t))e^{\rho(t-1)}dt\\
&-\int_0^1(\rho^2\Delta_{\alpha R}(t)+\rho^3(\Delta_{\beta R}(t)-\Delta_{\alpha S}(t))-\rho^4\Delta_{\beta S}(t))e^{-\rho t}dt\\
&+\int_0^1\int_0^s(\Delta_R(t\ ,\varepsilon)+\rho(\Delta_{RS}(\varepsilon,t)+\Delta_{RS}(t\ ,\varepsilon))-\rho^2\Delta_S(t\ ,\varepsilon))e^{\rho(\varepsilon-t)}d\varepsilon dt\}\\
&+e^{\rho(s-x)}\{(-\rho^2\Delta_{\alpha\gamma}+\rho^3(\Delta_{\beta\gamma}-\Delta_{\alpha\delta})+\rho^4\Delta_{\beta\delta})e^{\rho}-2\rho^5\Delta_{\alpha\beta}\\
&+\int_0^s(\rho^2\Delta_{\alpha R}(t)+\rho^3(\Delta_{\beta R}(t)-\Delta_{\alpha S}(t))-\rho^4\Delta_{\beta S}(t))e^{-\rho t}dt\\
&+\int_0^s(\Delta_{\gamma R}(t)+\rho(\Delta_{\delta R}(t)-\Delta_{\gamma S}(t))-\rho^2\Delta_{\delta S}(t))e^{\rho(1-t)}dt\\
&-\int_0^1(\rho^2\Delta_{\alpha R}(t)+\rho^3(\Delta_{\alpha S}(t)-\Delta_{\beta R}(t))-\rho^4\Delta_{\beta S}(t))e^{\rho t}dt\\
&+\int_0^1\int_0^s(\Delta_R(t\ ,\varepsilon)-\rho(\Delta_{RS}(\varepsilon,t)+\Delta_{RS}(t\ ,\varepsilon))-\rho^2\Delta_S(t\ ,\varepsilon))e^{\rho(t-\varepsilon)}d\varepsilon dt
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Et

$$\begin{aligned}
\varphi_2(x\ ,s\ ,\lambda) &= \frac{1}{2\rho}[e^{\rho(x-s)}\{(-\rho^2\Delta_{\alpha\gamma}+\rho^3(\Delta_{\beta\gamma}-\Delta_{\alpha\delta})+\rho^4\Delta_{\beta\delta})e^{\rho}-2\rho^3\Delta_{\alpha\delta}\\
&-\int_s^1(\rho^2\Delta_{\alpha R}(t)+\rho^3(\Delta_{\alpha S}(t)-\Delta_{\beta R}(t))-\rho^4\Delta_{\beta S}(t))e^{\rho t}dt\\
&-\int_s^1(\Delta_{\gamma R}(t)+\rho(\Delta_{\gamma S}(t)-\Delta_{\delta R}(t))-\rho^2\Delta_{\delta S}(t))e^{\rho(t-1)}dt\\
&+\int_0^1(\Delta_{\gamma R}(t)+\rho(\Delta_{\delta R}(t)-\Delta_{\gamma S}(t))-\rho^2\Delta_{\delta S}(t))e^{\rho(1-t)}dt\\
&+\int_0^1\int_s^1(\Delta_R(\varepsilon,t)-\rho(\Delta_{RS}(t\ ,\varepsilon)+\Delta_{RS}(\varepsilon,t))-\rho^2\Delta_S(\varepsilon,t))e^{\rho(\varepsilon+t)}d\varepsilon dt\}\\
&+e^{\rho(s-x)}\{(-\rho^2\Delta_{\alpha\gamma}+\rho^3(\Delta_{\alpha\delta}-\Delta_{\beta\gamma})+\rho^4\Delta_{\beta\delta})e^{-\rho}+2\rho\Delta_{\gamma\delta}\\
&-\int_s^1(\rho^2\Delta_{\alpha R}(t)+\rho(\Delta_{\beta R}(t)-\Delta_{\alpha S}(t))-\rho^4\Delta_{\beta S}(t))e^{-\rho t}dt\\
&-\int_s^1(\Delta_{\gamma R}(t)+\rho(\Delta_{\delta R}(t)-\Delta_{\gamma S}(t))-\rho^2\Delta_{\delta S}(t))e^{\rho(1-t)}dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^1 \left(\Delta_{\gamma R}(t)+\rho\left(\Delta_{\gamma S}(t)-\Delta_{\delta R}(t)\right)-\rho^2\Delta_{\delta S}(t)\right)e^{\rho(t-1)}dt\\
&+\int_0^1\int_s^1 \left(\Delta_R(\varepsilon,t)+\rho\left(\Delta_{RS}(t\ ,\varepsilon)+\Delta_{RS}(\varepsilon,t)\right)-\rho^2\Delta_S(\varepsilon,t)\right)e^{\rho(t-\varepsilon)}d\varepsilon dt\}]
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

La résolvante de (3.1) est donnée par :

$$
R(\lambda\ ,L_\infty)\,h=-\int_0^1 G(.,s\ ,\lambda)\,h(s)\,ds \tag{3.15}
$$

D'où :

$$
\|R(\lambda\ ,L_\infty)\,h\|_{L^\infty(0\ ,1)}\leq\frac{1}{|\Delta(\lambda)|}\sup_{0\leq x\leq 1}\int_0^1|N(x\ ,s\ ,\lambda)|\,|h(s)|\,ds
$$

D'autre part de (3.12) on a :

$$
\begin{aligned}
|\varphi(x\ ,s\ ,\lambda)|\leq\ &\frac{e^{x\operatorname{Re}(\rho)}}{2|\rho|}\{(|\rho|^4|\Delta_{\beta\delta}|+|\rho|^3(|\Delta_{\alpha\delta}|+|\Delta_{\beta\gamma}|)+|\rho|^2|\Delta_{\alpha\gamma}|)e^{(s-1)\operatorname{Re}(\rho)}\\
&+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(|\rho|^2\|\Delta_{\delta S}\|+|\rho|(\|\Delta_{\delta R}\|+\|\Delta_{\gamma S}\|)+\|\Delta_{\gamma R}\|)\left(e^{(s-1)\operatorname{Re}(\rho)}-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}\right)\\
&+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(|\rho|^4\|\Delta_{\beta S}\|+|\rho|^3(\|\Delta_{\alpha S}\|+\|\Delta_{\beta R}\|)+|\rho|^2\|\Delta_{\alpha R}\|)\left(1-e^{(s-1)\operatorname{Re}(\rho)}\right)\\
&+\frac{1}{(\operatorname{Re}(\rho))^2}(|\rho|^2\|\Delta_S\|+2|\rho|\ \|\Delta_{RS}\|+\|\Delta_R(\varepsilon\ ,t)\|)\left(e^{s\operatorname{Re}(\rho)}-1\right)\left(e^{-s\operatorname{Re}(\rho)}-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}\right)\}\\
&+\frac{e^{-x\operatorname{Re}(\rho)}}{2|\rho|}\{(|\rho|^4|\Delta_{\beta\delta}|+|\rho|^3(|\Delta_{\alpha\delta}|+|\Delta_{\beta\gamma}|)+|\rho|^2|\Delta_{\alpha\gamma}|)e^{(1-s)\operatorname{Re}(\rho)}\\
&+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(|\rho|^2\|\Delta_{\delta S}\|+|\rho|(\|\Delta_{\delta R}\|+\|\Delta_{\gamma S}\|)+\|\Delta_{\gamma R}\|)\left(e^{\operatorname{Re}(\rho)}-e^{(1-s)\operatorname{Re}(\rho)}\right)\\
&+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(|\rho|^4\|\Delta_{\beta S}\|+|\rho|^3(\|\Delta_{\beta R}\|+\|\Delta_{\alpha S}\|)+|\rho|^2\|\Delta_{\alpha R}\|)\left(e^{(1-s)\operatorname{Re}(\rho)}-1\right)\\
&+\frac{1}{(\operatorname{Re}(\rho))^2}(|\rho|^2\|\Delta_S\|+2|\rho|\ \|\Delta_{RS}\|+\|\Delta_R\|)\left(e^{\operatorname{Re}(\rho)}-e^{s\operatorname{Re}(\rho)}\right)\left(1-e^{-s\operatorname{Re}(\rho)}\right)
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Et d'après (3.13) on a :

$$
\begin{aligned}
|\varphi_1(x\ ,s\ ,\lambda)|\leq\ &\frac{e^{-x\operatorname{Re}(\rho)}}{2|\rho|}\{(|\rho|^4|\Delta_{\beta\delta}|+|\rho|^3(|\Delta_{\beta\gamma}|+|\Delta_{\alpha\delta}|)+|\rho|^2|\Delta_{\alpha\gamma}|)e^{(s+1)\operatorname{Re}(\rho)}\\
&+2|\rho|^5e^{s\operatorname{Re}(\rho)}|\Delta_{\alpha\beta}|+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(|\rho|^4\|\Delta_{\beta S}\|+|\rho|^3(\|\Delta_{\beta R}\|+\|\Delta_{\alpha S}\|)+|\rho|^2\|\Delta_{\alpha R}\|)\\
&\left(e^{(1+s)\operatorname{Re}(\rho)}-1\right)+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(|\rho|^2\|\Delta_{\delta S}\|+|\rho|(\|\Delta_{\delta R}\|+\|\Delta_{\gamma S}\|)+\|\Delta_{\gamma R}\|)\\
&\left(e^{(1+s)\operatorname{Re}(\rho)}-e^{\operatorname{Re}(\rho)}\right)+\frac{1}{(\operatorname{Re}(\rho))^2}(|\rho|^2\|\Delta_S\|+2|\rho|\ \|\Delta_{RS}\|+\|\Delta_R\|)\\
&\left(e^{\operatorname{Re}(\rho)}-1\right)\left(e^{s\operatorname{Re}(\rho)}-1\right)\}+\frac{e^{x\operatorname{Re}(\rho)}}{2|\rho|}\{(|\rho|^4|\Delta_{\beta\delta}|+|\rho|^3(|\Delta_{\alpha\delta}|+|\Delta_{\beta\gamma}|)+|\rho|^2|\Delta_{\alpha\gamma}|)
\end{aligned}
$$

$$e^{-(s+1)\,\mathrm{Re}(\rho)} + 2\left|\rho\right|^5 e^{-s\,\mathrm{Re}(\rho)}\left|\Delta_{\alpha\beta}\right| + \frac{1}{\mathrm{Re}\,(\rho)}(\left|\rho\right|^4\left\|\Delta_{\beta S}\right\| + \left|\rho\right|^3\left(\left\|\Delta_{\alpha S}\right\| + \left\|\Delta_{\beta R}\right\|\right)$$
$$+\left|\rho\right|^2\left\|\Delta_{\alpha R}\right\|)\left(1-e^{-(1+s)\,\mathrm{Re}(\rho)}\right)$$
$$+\frac{1}{\mathrm{Re}\,(\rho)}(\left|\rho\right|^2\left\|\Delta_{\delta S}\right\| + \left|\rho\right|\left(\left\|\Delta_{\gamma S}\right\| + \left\|\Delta_{\delta R}\right\|\right) + \left\|\Delta_{\gamma R}\right\|)\left(e^{-\mathrm{Re}(\rho)} - e^{-(s+1)\,\mathrm{Re}(\rho)}\right)$$
$$+\frac{1}{\left(\mathrm{Re}\,(\rho)\right)^2}(\left|\rho\right|^2\left\|\Delta_S\right\| + 2\left|\rho\right|\,\left\|\Delta_{RS}\right\| + \left\|\Delta_R\right\|)\left(1-e^{-\mathrm{Re}(\rho)}\right)\left(1-e^{-s\,\mathrm{Re}(\rho)}\right)\}] \tag{3.17}$$

Et d'après (3.14) on a :

$$\left|\varphi_2\left(x\ ,s\ ,\lambda\right)\right| \leq \frac{e^{-x\,\mathrm{Re}(\rho)}}{2\left|\rho\right|}\{(\left|\rho\right|^4\left|\Delta_{\beta\delta}\right| + \left|\rho\right|^3\left(\left|\Delta_{\alpha\delta}\right| + \left|\Delta_{\beta\gamma}\right|\right) + \left|\rho\right|^2\left|\Delta_{\alpha\gamma}\right|)e^{(s-1)\,\mathrm{Re}(\rho)}$$
$$+2\left|\rho\right|\,\left|\Delta_{\gamma\delta}\right| e^{s\,\mathrm{Re}(\rho)} + \frac{1}{\mathrm{Re}\,(\rho)}(\left|\rho\right|^4\left\|\Delta_{\beta S}\right\| + \left|\rho\right|^3\left(\left\|\Delta_{\beta R}\right\| + \left\|\Delta_{\alpha S}\right\|\right) + \left|\rho\right|^2\left\|\Delta_{\alpha R}\right\|)$$
$$\left(1-e^{(s-1)\,\mathrm{Re}\,\rho}\right) + \frac{1}{\mathrm{Re}\,(\rho)}(\left|\rho\right|^2\left\|\Delta_{\delta S}\right\| + \left|\rho\right|\left(\left\|\Delta_{\delta R}\right\| + \left\|\Delta_{\gamma S}\right\|\right) + \left\|\Delta_{\gamma R}\right\|)\left(e^{\mathrm{Re}(\rho)} - e^{(s-1)\,\mathrm{Re}(\rho)}\right)$$
$$+\frac{1}{\left(\mathrm{Re}\,(\rho)\right)^2}(\left|\rho\right|^2\left\|\Delta_S\right\| + 2\left|\rho\right|\,\left\|\Delta_{RS}\right\| + \left\|\Delta_R\right\|)\left(e^{\mathrm{Re}(\rho)}-1\right)\left(1-e^{(s-1)\,\mathrm{Re}(\rho)}\right)\}$$
$$+\frac{e^{x\,\mathrm{Re}(\rho)}}{2\left|\rho\right|}\{(\left|\rho\right|^2\left|\Delta_{\alpha\gamma}\right| + \left|\rho\right|^3\left(\left|\Delta_{\beta\gamma}\right| + \left|\Delta_{\alpha\delta}\right|\right) + \left|\rho\right|^4\left|\Delta_{\beta\delta}\right|)e^{(1-s)\,\mathrm{Re}(\rho)} + 2\left|\rho\right|^3\left|\Delta_{\alpha\delta}\right| e^{-s\,\mathrm{Re}(\rho)}$$
$$+\frac{1}{\mathrm{Re}\,(\rho)}(\left|\rho\right|^4\left\|\Delta_{\beta S}\right\| + \left|\rho\right|^3\left(\left\|\Delta_{\alpha S}\right\| + \left\|\Delta_{\beta R}\right\|\right) + \left|\rho\right|^2\left\|\Delta_{\alpha R}\right\|)\left(e^{(1-s)\,\mathrm{Re}(\rho)}-1\right)$$
$$+\frac{1}{\mathrm{Re}\,(\rho)}(\left|\rho\right|^2\left\|\Delta_{\delta S}\right\| + \left|\rho\right|\left(\left\|\Delta_{\gamma S}\right\| + \left\|\Delta_{\delta R}\right\|\right) + \left\|\Delta_{\gamma R}\right\|)\left(e^{(1-s)\,\mathrm{Re}(\rho)} - e^{-\mathrm{Re}(\rho)}\right)$$
$$+\frac{1}{\left(\mathrm{Re}\,(\rho)\right)^2}(\left|\rho\right|^2\left\|\Delta_S\right\| + 2\left|\rho\right|\,\left\|\Delta_{RS}\right\| + \left\|\Delta_R\right\| +)\left(e^{(1-s)\,\mathrm{Re}(\rho)}-1\right)\left(e^{\mathrm{Re}(\rho)}-1\right)\} \tag{3.18}$$

3.2 Estimation du numérateur de la fonction de Green dans $L^\infty(0,1)$:

En intégrant la formule (3.16) on obtient :

$$\int_0^1\left|\varphi\left(x\ ,s\ ,\lambda\right)\right| ds \leq \frac{e^{x\,\mathrm{Re}(\rho)}}{2\left|\rho\right|}\{(\left|\rho\right|^4\left|\Delta_{\beta\delta}\right| + \left|\rho\right|^3\left(\left|\Delta_{\alpha\delta}\right| + \left|\Delta_{\beta\gamma}\right|\right) + \left|\rho\right|^2\left|\Delta_{\alpha\gamma}\right|)\frac{1-e^{-\mathrm{Re}(\rho)}}{\mathrm{Re}\,(\rho)}$$
$$+\frac{1}{\mathrm{Re}\,(\rho)}(\left|\rho\right|^2\left\|\Delta_{\delta S}\right\| + \left|\rho\right|\left(\left\|\Delta_{\delta R}\right\| + \left\|\Delta_{\gamma S}\right\|\right) + \left\|\Delta_{\gamma R}\right\|)\left(\frac{1-e^{-\mathrm{Re}(\rho)}}{\mathrm{Re}\,(\rho)} - e^{-\mathrm{Re}(\rho)}\right)$$
$$+\frac{1}{\mathrm{Re}\,(\rho)}(\left|\rho\right|^4\left\|\Delta_{\beta S}\right\| + \left|\rho\right|^3\left(\left\|\Delta_{\alpha S}\right\| + \left\|\Delta_{\beta R}\right\|\right) + \left|\rho\right|^2\left\|\Delta_{\alpha R}\right\|)\left(1-\frac{1-e^{(s-1)\,\mathrm{Re}(\rho)}}{\mathrm{Re}\,(\rho)}\right)$$
$$+\frac{1}{\left(\mathrm{Re}\,(\rho)\right)^2}(\left|\rho\right|^2\left\|\Delta_S\right\| + 2\left|\rho\right|\,\left\|\Delta_{RS}\right\| + \left\|\Delta_R\right\|)\left(1+e^{-\mathrm{Re}(\rho)} - 2\frac{\left(1-e^{-\mathrm{Re}(\rho)}\right)}{\mathrm{Re}\,(\rho)}\right)\}$$

$$+\frac{e^{(1-x)\,\mathrm{Re}(\rho)}}{2\left|\rho\right|}\{(\left|\rho\right|^4\left|\Delta_{\beta\delta}\right|+\left|\rho\right|^3(\left|\Delta_{\alpha\delta}\right|+\left|\Delta_{\beta\gamma}\right|)+\left|\rho\right|^2\left|\Delta_{\alpha\gamma}\right|)(\frac{1-e^{-\,\mathrm{Re}(\rho)}}{\mathrm{Re}\,(\rho)})$$
$$+\frac{1}{\mathrm{Re}\,(\rho)}(\left|\rho\right|^2\left\|\Delta_{\delta S}\right\|+\left|\rho\right|(\left\|\Delta_{\delta R}\right\|+\left\|\Delta_{\gamma S}\right\|)+\left\|\Delta_{\gamma R}\right\|)(1+\frac{e^{-\,\mathrm{Re}(\rho)}-1}{\mathrm{Re}\,(\rho)})$$
$$+\frac{1}{\mathrm{Re}\,(\rho)}(\left|\rho\right|^4\left\|\Delta_{\beta S}\right\|+\left|\rho\right|^3(\left\|\Delta_{\beta R}\right\|+\left\|\Delta_{\alpha S}\right\|)+\left|\rho\right|^2\left\|\Delta_{\alpha R}\right\|)(\frac{1-e^{-\,\mathrm{Re}(\rho)}}{\mathrm{Re}\,(\rho)}-e^{-\,\mathrm{Re}(\rho)})$$
$$+\frac{1}{(\mathrm{Re}\,(\rho))^2}(\left|\rho\right|^2\left\|\Delta_S\right\|+2\left|\rho\right|\,\left\|\Delta_{RS}\right\|+\left\|\Delta_R\right\|)(e^{-\,\mathrm{Re}(\rho)}+1+2\frac{\left(e^{-\,\mathrm{Re}(\rho)}-1\right)}{\mathrm{Re}\,(\rho)})\}$$

Comme la fonction $x\rightarrow e^{x\,\mathrm{Re}(\rho)}$ est croissante sur l'intervalle $[0\,,1]$, et que la fonction $x\rightarrow e^{(1-x)\,\mathrm{Re}(\rho)}$ est décroissante sur le même intervalle, on a :

$$\sup_{0\leq x\leq 1} e^{x\,\mathrm{Re}(\rho)}=e^{\mathrm{Re}(\rho)}$$

Et

$$\sup_{0\leq x\leq 1} e^{(1-x)\,\mathrm{Re}(\rho)}=e^{\mathrm{Re}(\rho)}$$

D'où :

$$\sup\nolimits_{0\leq x\leq 1}\int_0^1\left|\varphi\left(x,s,\lambda\right)\right|ds\leq\frac{e^{\mathrm{Re}(\rho)}}{2\left|\rho\right|}\{(\left|\rho\right|^4\left|\Delta_{\beta\delta}\right|+\left|\rho\right|^3(\left|\Delta_{\alpha\delta}\right|+\left|\Delta_{\beta\gamma}\right|)+\left|\rho\right|^2\left|\Delta_{\alpha\gamma}\right|)2(\frac{1-e^{-\,\mathrm{Re}(\rho)}}{\mathrm{Re}\,(\rho)})$$
$$+\frac{1}{\mathrm{Re}\,(\rho)}(\left|\rho\right|^2\left\|\Delta_{\delta S}\right\|+\left|\rho\right|(\left\|\Delta_{\delta R}\right\|+\left\|\Delta_{\gamma S}\right\|)+\left\|\Delta_{\gamma R}\right\|)\left(1-e^{-\,\mathrm{Re}(\rho)}\right)$$
$$+\frac{1}{\mathrm{Re}\,(\rho)}(\left|\rho\right|^4\left\|\Delta_{\beta S}\right\|+\left|\rho\right|^3(\left\|\Delta_{\alpha S}\right\|+\left\|\Delta_{\beta R}\right\|)+\left|\rho\right|^2\left\|\Delta_{\alpha R}\right\|)\left(1-e^{-\,\mathrm{Re}(\rho)}\right)$$
$$+\frac{2}{(\mathrm{Re}\,(\rho))^2}(\left|\rho\right|^2\left\|\Delta_S\right\|+2\left|\rho\right|\,\left\|\Delta_{RS}\right\|+\left\|\Delta_R\right\|)(1+e^{-\,\mathrm{Re}(\rho)}-2\frac{\left(1-e^{-\,\mathrm{Re}(\rho)}\right)}{\mathrm{Re}\,(\rho)})\tag{3.19}$$

De même d'après (3.17), on a :

$$\int_0^x\left|\varphi_1(x,s,\lambda)\right|ds\leq\frac{1}{2\left|\rho\right|}\{(\left|\rho\right|^4\left|\Delta_{\beta\delta}\right|+\left|\rho\right|^3(\left|\Delta_{\beta\gamma}\right|+\left|\Delta_{\alpha\delta}\right|)+\left|\rho\right|^2\left|\Delta_{\alpha\gamma}\right|)(\frac{e^{\mathrm{Re}(\rho)}-e^{(1-x)\,\mathrm{Re}(\rho)}}{\mathrm{Re}\,(\rho)})$$
$$+2\left|\rho\right|^5\left|\Delta_{\alpha\beta}\right|(\frac{1-e^{-x\,\mathrm{Re}(\rho)}}{\mathrm{Re}\,(\rho)})+\frac{1}{\mathrm{Re}\,(\rho)}(\left|\rho\right|^4\left\|\Delta_{\beta S}\right\|+\left|\rho\right|^3(\left\|\Delta_{\beta R}\right\|+\left\|\Delta_{\alpha S}\right\|)+\left|\rho\right|^2\left\|\Delta_{\alpha R}\right\|)$$
$$(\frac{e^{\mathrm{Re}(\rho)}-e^{(1-x)\,\mathrm{Re}(\rho)}}{\mathrm{Re}\,(\rho)}-xe^{-x\,\mathrm{Re}(\rho)})+\frac{1}{\mathrm{Re}\,(\rho)}(\left|\rho\right|^2\left\|\Delta_{\delta S}\right\|+\left|\rho\right|(\left\|\Delta_{\delta R}\right\|+\left\|\Delta_{\gamma S}\right\|)$$
$$+\left\|\Delta_{\gamma R}\right\|)(\frac{e^{\mathrm{Re}(\rho)}-e^{(1-x)\,\mathrm{Re}(\rho)}}{\mathrm{Re}\,(\rho)}-xe^{-x\,\mathrm{Re}(\rho)}e^{\mathrm{Re}(\rho)})+\frac{1}{(\mathrm{Re}\,(\rho))^2}(\left|\rho\right|^2\left\|\Delta_S\right\|$$
$$+2\left|\rho\right|\,\left|\Delta_{RS}\right|+\left\|\Delta_R\right\|)\left(e^{\mathrm{Re}(\rho)}-1\right)(\frac{1-e^{-x\,\mathrm{Re}(\rho)}}{\mathrm{Re}\,(\rho)}-xe^{-x\,\mathrm{Re}(\rho)})$$
$$+(\left|\rho\right|^4\left|\Delta_{\beta\delta}\right|+\left|\rho\right|^3(\left|\Delta_{\alpha\delta}\right|+\left|\Delta_{\beta\gamma}\right|)+\left|\rho\right|^2\left|\Delta_{\alpha\gamma}\right|)(\frac{e^{(x-1)\,\mathrm{Re}(\rho)}-e^{-\,\mathrm{Re}(\rho)}}{\mathrm{Re}\,(\rho)})+2\left|\rho\right|^5\left|\Delta_{\alpha\beta}\right|$$

$$(\frac{e^{x\operatorname{Re}(\rho)}-1}{\operatorname{Re}(\rho)})+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(|\rho|^4\|\Delta_{\beta S}\|+|\rho|^3(\|\Delta_{\alpha S}\|+\|\Delta_{\beta R}\|)+|\rho|^2\|\Delta_{\alpha R}\|)$$
$$(xe^{x\operatorname{Re}(\rho)}+\frac{e^{-\operatorname{Re}(\rho)}-e^{(x-1)\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(|\rho|^2\|\Delta_{\delta S}\|+|\rho|$$
$$(\|\Delta_{\gamma S}\|+\|\Delta_{\delta R}\|)+\|\Delta_{\gamma R}\|)(xe^{(x-1)\operatorname{Re}(\rho)}+\frac{e^{-\operatorname{Re}(\rho)}-e^{(x-1)\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})$$
$$+\frac{1}{(\operatorname{Re}(\rho))^2}(|\rho|^2\|\Delta_S\|+2|\rho|\ \|\Delta_{RS}\|+\|\Delta_R\|)(xe^{x\operatorname{Re}(\rho)}+\frac{1-e^{x\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})\}$$

D'où :

$$\int_0^x|\varphi_1(x\ ,s\ ,\lambda)|\,ds\leq\frac{e^{\operatorname{Re}(\rho)}}{2|\rho|}\{(|\rho|^4|\Delta_{\beta\delta}|+|\rho|^3(|\Delta_{\beta\gamma}|+|\Delta_{\alpha\delta}|)+|\rho|^2|\Delta_{\alpha\gamma}|)(\frac{1-e^{-x\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})$$

$$+2|\rho|^5|\Delta_{\alpha\beta}|(\frac{e^{-\operatorname{Re}(\rho)}-e^{-(x+1)\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(|\rho|^4\|\Delta_{\beta S}\|+|\rho|^3(\|\Delta_{\beta R}\|+\|\Delta_{\alpha S}\|)$$

$$+|\rho|^2\|\Delta_{\alpha R}\|)(\frac{1-e^{-x\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)}-xe^{-(x+1)\operatorname{Re}(\rho)})$$

$$+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(|\rho|^2\|\Delta_{\delta S}\|+|\rho|(\|\Delta_{\delta R}\|+\|\Delta_{\gamma S}\|)+\|\Delta_{\gamma R}\|)(\frac{1-e^{-x\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)}-xe^{-x\operatorname{Re}(\rho)})$$

$$+\frac{1}{(\operatorname{Re}(\rho))^2}(|\rho|^2\|\Delta_S\|+2|\rho|\|\Delta_{RS}\|+\|\Delta_R\|)\left(e^{\operatorname{Re}(\rho)}-1\right)(\frac{e^{-\operatorname{Re}(\rho)}-e^{-(x+1)\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)}$$

$$-xe^{-(x+1)\operatorname{Re}(\rho)})+(|\rho|^4|\Delta_{\beta\delta}|+|\rho|^3(|\Delta_{\alpha\delta}|+|\Delta_{\beta\gamma}|)+|\rho|^2|\Delta_{\alpha\gamma}|)(\frac{e^{(x-2)\operatorname{Re}(\rho)}-e^{-2\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})$$

$$+2|\rho|^5|\Delta_{\alpha\beta}|(\frac{e^{(x-1)\operatorname{Re}(\rho)}-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(|\rho|^4\|\Delta_{\beta S}\|+|\rho|^3(\|\Delta_{\alpha S}\|+\|\Delta_{\beta R}\|)$$

$$+|\rho|^2\|\Delta_{\alpha R}\|)(xe^{(x-1)\operatorname{Re}(\rho)}+\frac{e^{-2\operatorname{Re}(\rho)}-e^{(x-2)\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(|\rho|^2\|\Delta_{\delta S}\|+|\rho|$$

$$(\|\Delta_{\gamma S}\|+\|\Delta_{\delta R}\|)+\|\Delta_{\gamma R}\|)(xe^{(x-2)\operatorname{Re}(\rho)}+\frac{e^{-2\operatorname{Re}(\rho)}-e^{(x-2)\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})$$

$$+\frac{1}{(\operatorname{Re}(\rho))^2}(|\rho|^2\|\Delta_S\|+2|\rho|\ \|\Delta_{RS}\|+\|\Delta_R\|)\left(1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}\right)$$

$$(xe^{(x-1)\operatorname{Re}(\rho)}+\frac{e^{-\operatorname{Re}(\rho)}-e^{(x-1)\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})\}$$

Comme les fonctions :

$$x \rightarrow \frac{1-e^{-x\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)}, x \rightarrow \frac{e^{-\operatorname{Re}(\rho)}-e^{-(x+1)\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)}, x \rightarrow \frac{1-e^{-x\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)}-xe^{-(x+1)\operatorname{Re}(\rho)}$$

$$x \rightarrow \frac{1-e^{-x\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)}-xe^{-x\operatorname{Re}(\rho)}, x \rightarrow \frac{e^{-\operatorname{Re}(\rho)}-e^{-(x+1)\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)}-xe^{-(x+1)\operatorname{Re}(\rho)}$$

$$x \rightarrow \frac{e^{(x-2)\operatorname{Re}(\rho)}-e^{-2\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)},\ x \rightarrow \frac{e^{(x-1)\operatorname{Re}(\rho)}-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)}$$

$$x \rightarrow xe^{(x-1)\operatorname{Re}(\rho)}+\frac{e^{-2\operatorname{Re}(\rho)}-e^{(x-2)\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)}$$

$$x \rightarrow xe^{(x-2)\operatorname{Re}(\rho)}+\frac{e^{-2\operatorname{Re}(\rho)}-e^{(x-2)\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)}$$

$$x \rightarrow xe^{(x-1)\operatorname{Re}(\rho)}+\frac{e^{-\operatorname{Re}(\rho)}-e^{(x-1)\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)}$$

Sont des fonctions croissantes sur l'intervalle $[0\ ,1]$, on obtient :

$$\sup_{0\leq x\leq 1}\int_0^1 |\varphi_1(x\ ,s\ ,\lambda)|\,ds \leq \frac{e^{\operatorname{Re}(\rho)}}{2|\rho|}\{(|\rho|^4|\Delta_{\beta\delta}|+|\rho|^3(|\Delta_{\beta\gamma}|+|\Delta_{\alpha\delta}|)+|\rho|^2|\Delta_{\alpha\gamma}|)$$
$$(\frac{1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})+2|\rho|^5|\Delta_{\alpha\beta}|(\frac{e^{-\operatorname{Re}(\rho)}-e^{-2\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(|\rho|^4\|\Delta_{\beta S}\|+|\rho|^3$$
$$(\|\Delta_{\beta R}\|+\|\Delta_{\alpha S}\|)+|\rho|^2\|\Delta_{\alpha R}\|)(\frac{1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)}-e^{-2\operatorname{Re}(\rho)})$$
$$+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(|\rho|^2\|\Delta_{\delta S}\|+|\rho|(\|\Delta_{\delta R}\|+\|\Delta_{\gamma S}\|)+\|\Delta_{\gamma R}\|)(\frac{1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)}-e^{-\operatorname{Re}(\rho)})$$
$$+\frac{1}{(\operatorname{Re}(\rho))^2}(|\rho|^2\|\Delta_S\|+2|\rho|\ \|\Delta_{RS}\|+\|\Delta_R\|)\left(e^{\operatorname{Re}(\rho)}-1\right)(\frac{e^{-\operatorname{Re}(\rho)}-e^{-2\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)}$$
$$-e^{-2\operatorname{Re}(\rho)})+(|\rho|^4|\Delta_{\beta\delta}|+|\rho|^3(|\Delta_{\alpha\delta}|+|\Delta_{\beta\gamma}|)+|\rho|^2|\Delta_{\alpha\gamma}|)(\frac{e^{-\operatorname{Re}(\rho)}-e^{-2\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})$$
$$+2|\rho|^5|\Delta_{\alpha\beta}|(\frac{1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})$$
$$+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(|\rho|^4\|\Delta_{\beta S}\|+|\rho|^3(\|\Delta_{\alpha S}\|+\|\Delta_{\beta R}\|)+|\rho|^2\|\Delta_{\alpha R}\|)(1+\frac{e^{-2\operatorname{Re}(\rho)}-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})$$
$$+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(|\rho|^2\|\Delta_{\delta S}\|+|\rho|(\|\Delta_{\gamma S}\|+\|\Delta_{\delta R}\|)+\|\Delta_{\gamma R}\|)(e^{-\operatorname{Re}(\rho)}+\frac{e^{-2\operatorname{Re}(\rho)}-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})$$
$$+\frac{1}{(\operatorname{Re}(\rho))^2}(|\rho|^2\|\Delta_S\|+2|\rho|\ \|\Delta_{RS}\|+\|\Delta_R\|)\left(1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}\right)(1+\frac{e^{-\operatorname{Re}(\rho)}-1}{\operatorname{Re}(\rho)})\}$$

Alors :

$$\sup_{0\leq x\leq 1}\int_0^1 |\varphi_1(x\ ,s\ ,\lambda)|\,ds \leq \frac{e^{\operatorname{Re}(\rho)}}{2|\rho|}\{(|\rho|^4|\Delta_{\beta\delta}|+|\rho|^3(|\Delta_{\beta\gamma}|+|\Delta_{\alpha\delta}|)+|\rho|^2|\Delta_{\alpha\gamma}|)$$
$$(\frac{1-e^{-2\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})+2|\rho|^5|\Delta_{\alpha\beta}|(\frac{1-e^{-2\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(|\rho|^4\|\Delta_{\beta S}\|+|\rho|^3$$
$$(\|\Delta_{\beta R}\|+\|\Delta_{\alpha S}\|)+|\rho|^2\|\Delta_{\alpha R}\|)(1-e^{-2\operatorname{Re}(\rho)}+\frac{\left(1-e^{-2\operatorname{Re}(\rho)}\right)^2}{\operatorname{Re}(\rho)})$$

$$+\frac{1}{\mathrm{Re}(\rho)}(|\rho|^2\|\Delta_{\delta S}\|+|\rho|(\|\Delta_{\delta R}\|+\|\Delta_{\gamma S}\|)+\|\Delta_{\gamma R}\|)$$
$$\frac{\left(1-e^{-\mathrm{Re}(\rho)}\right)^2}{\mathrm{Re}(\rho)}+\frac{1}{(\mathrm{Re}(\rho))^2}(|\rho|^2\|\Delta_S\|+2|\rho|\,\|\Delta_{RS}\|+\|\Delta_R\|)\left(1-e^{-\mathrm{Re}(\rho)}\right)^2\}$$
$$(3.20)$$

De même de (3.18) en faisant un raisonnement analogue, on obtient :
$$\int_x^1|\varphi_2(x\ ,s\ ,\lambda)|\,ds\leq\frac{e^{\mathrm{Re}(\rho)}}{|2\rho|}\{(|\rho|^4|\Delta_{\beta\delta}|+|\rho|^3(|\Delta_{\alpha\delta}|+|\Delta_{\beta\gamma}|)+|\rho|^2|\Delta_{\alpha\gamma}|)$$
$$\frac{1-e^{(x-1)\mathrm{Re}(\rho)}+e^{-(1+x)\mathrm{Re}(\rho)}-e^{-2\mathrm{Re}(\rho)}}{\mathrm{Re}(\rho)}+2|\rho|\,|\Delta_{\gamma\delta}|\frac{e^{-x\mathrm{Re}(\rho)}-e^{-\mathrm{Re}(\rho)}}{\mathrm{Re}(\rho)}$$
$$+2|\rho|^3|\Delta_{\alpha\delta}|\frac{e^{-\mathrm{Re}(\rho)}-e^{(x-2)\mathrm{Re}(\rho)}}{\mathrm{Re}(\rho)}$$
$$+\frac{1}{\mathrm{Re}(\rho)}(|\rho|^4\|\Delta_{\beta S}\|+|\rho|^3(\|\Delta_{\beta R}\|+\|\Delta_{\alpha S}\|)+|\rho|^2\|\Delta_{\alpha R}\|)$$
$$((1-x)\left(e^{-(1+x)\mathrm{Re}(\rho)}-e^{(x-1)\mathrm{Re}(\rho)}\right)+\frac{1-e^{(x-1)\mathrm{Re}(\rho)}-e^{-(1+x)\mathrm{Re}(\rho)}+e^{-2\mathrm{Re}(\rho)}}{\mathrm{Re}(\rho)})$$
$$+\frac{1}{\mathrm{Re}(\rho)}(|\rho|^2\|\Delta_{\delta S}\|+|\rho|(\|\Delta_{\delta R}\|+\|\Delta_{\gamma S}\|)+\|\Delta_{\gamma R}\|)((1-x)\left(e^{-x\mathrm{Re}(\rho)}-e^{(x-2)\mathrm{Re}(\rho)}\right)$$
$$+\frac{1-e^{(x-1)\mathrm{Re}(\rho)}-e^{-(1+x)\mathrm{Re}(\rho)}+e^{-2\mathrm{Re}(\rho)}}{\mathrm{Re}(\rho)})+\frac{1}{(\mathrm{Re}(\rho))^2}(|\rho|^2\|\Delta_S\|+2|\rho|\,\|\Delta_{RS}\|+\|\Delta_R\|)$$
$$\left(1-e^{-\mathrm{Re}(\rho)}\right)((1-x)\left(e^{-x\mathrm{Re}(\rho)}-e^{x\mathrm{Re}(\rho)}\right)+\frac{e^{\mathrm{Re}(\rho)}-e^{x\mathrm{Re}(\rho)}-e^{-x\mathrm{Re}(\rho)}+e^{-\mathrm{Re}(\rho)}}{\mathrm{Re}(\rho)})\}$$

Et comme les fonctions :

$$x\ \rightarrow\ \frac{1-e^{(x-1)\mathrm{Re}(\rho)}+e^{-(1+x)\mathrm{Re}(\rho)}-e^{-2\mathrm{Re}(\rho)}}{\mathrm{Re}(\rho)}$$
$$x\ \rightarrow\ \frac{e^{-x\mathrm{Re}(\rho)}-e^{-\mathrm{Re}(\rho)}}{\mathrm{Re}(\rho)}\ ,x\rightarrow\frac{e^{-\mathrm{Re}(\rho)}-e^{(x-2)\mathrm{Re}(\rho)}}{\mathrm{Re}(\rho)}$$
$$x\ \rightarrow\ (1-x)\left(e^{-(1+x)\mathrm{Re}(\rho)}-e^{(x-1)\mathrm{Re}(\rho)}\right)+\frac{1-e^{(x-1)\mathrm{Re}(\rho)}-e^{-(1+x)\mathrm{Re}(\rho)}+e^{-2\mathrm{Re}(\rho)}}{\mathrm{Re}(\rho)}$$
$$x\ \rightarrow\ (1-x)\left(e^{-x\mathrm{Re}(\rho)}-e^{(x-2)\mathrm{Re}(\rho)}\right)+\frac{1-e^{(x-1)\mathrm{Re}(\rho)}-e^{-(1+x)\mathrm{Re}(\rho)}+e^{-2\mathrm{Re}(\rho)}}{\mathrm{Re}(\rho)}$$
$$x\ \rightarrow\ (1-x)\left(e^{-x\mathrm{Re}(\rho)}-e^{x\mathrm{Re}(\rho)}\right)+\frac{e^{\mathrm{Re}(\rho)}-e^{x\mathrm{Re}(\rho)}-e^{-x\mathrm{Re}(\rho)}+e^{-\mathrm{Re}(\rho)}}{\mathrm{Re}(\rho)}$$

Sont des fonctions décroissantes sur l'intervalle $[0\ ,1]$, on obtient :
$$\sup_{0\leq x\leq 1}\int_x^1|\varphi_2(x\ ,s\ ,\lambda)|\,ds\leq\frac{e^{\mathrm{Re}(\rho)}}{|2\rho|}\{(|\rho|^4|\Delta_{\beta\delta}|+|\rho|^3(|\Delta_{\alpha\delta}|+|\Delta_{\beta\gamma}|)+|\rho|^2|\Delta_{\alpha\gamma}|)$$
$$\frac{1-e^{-2\mathrm{Re}(\rho)}}{\mathrm{Re}(\rho)}+2|\rho|\,|\Delta_{\gamma\delta}|\frac{1-e^{-\mathrm{Re}(\rho)}}{\mathrm{Re}(\rho)}+2|\rho|^3|\Delta_{\alpha\delta}|\frac{e^{-\mathrm{Re}(\rho)}-e^{-2\mathrm{Re}(\rho)}}{\mathrm{Re}(\rho)}$$
$$+\frac{1}{\mathrm{Re}(\rho)}(|\rho|^4\|\Delta_{\beta S}\|+|\rho|^3(\|\Delta_{\beta R}\|+\|\Delta_{\alpha S}\|)+|\rho|^2\|\Delta_{\alpha R}\|)\frac{\left(1-e^{-\mathrm{Re}(\rho)}\right)^2}{\mathrm{Re}(\rho)}$$

$$+\frac{1}{\mathrm{Re}\,(\rho)}(|\rho|^2\,\|\Delta_{\delta S}\|+|\rho|\,(\|\Delta_{\delta R}\|+\|\Delta_{\gamma S}\|)+\|\Delta_{\gamma R}\|)(1-e^{-2\,\mathrm{Re}(\rho)}+\frac{\left(1-e^{-\,\mathrm{Re}(\rho)}\right)^2}{\mathrm{Re}\,(\rho)})$$
$$+\frac{1}{(\mathrm{Re}\,(\rho))^2}(|\rho|^2\,\|\Delta_S\|+2\,|\rho|\,\,\|\Delta_{RS}\|+\|\Delta_R\|)\left(1-e^{-\,\mathrm{Re}(\rho)}\right)^2\left(e^{\mathrm{Re}(\rho)}-1\right)\}\tag{3.21}$$

D'autre part on a :

$$\sup_{0\leq x\leq 1}\int_0^1|N\ \ (x,s,\lambda)|\,ds\ \ \leq\ \ \sup_{0\leq x\leq 1}\int_0^1|\varphi\,(x,s,\lambda)|\,ds+\sup_{0\leq x\leq 1}\int_0^1|\varphi_i\ (x\ ,s\ ,t\ )|\,ds$$
$$;\ i\ \ =\ \ 1\ si\ x>s\ \ et\ \ \ i=2\ \ si\ \ \ x<s$$

D'après (3.19), (3.20) et (3.21) on obtient facilement :

Pour $x>s$ on a :

$$\sup_{0\leq x\leq 1}\int_0^1|N\ \ (x,s,\lambda)|\,ds\leq\sup_{0\leq x\leq 1}\int_0^1|\varphi\,(x,s,\lambda)|\,ds+\sup_{0\leq x\leq 1}\int_0^1|\varphi_1\,(x,s,\lambda)|\,ds$$

Donc :

$$\sup_{0\leq x\leq 1}\int_0^1|N\ (x,s,\lambda)|\,ds\leq\frac{e^{\mathrm{Re}(\rho)}}{2\,|\rho|}\{(|\rho|^4\,|\Delta_{\beta\delta}|+|\rho|^3\,(|\Delta_{\beta\gamma}|+|\Delta_{\alpha\delta}|)+|\rho|^2\,|\Delta_{\alpha\gamma}|)$$
$$\frac{3-2e^{-\,\mathrm{Re}(\rho)}-e^{-2\,\mathrm{Re}(\rho)}}{\mathrm{Re}\,(\rho)}+2\,|\rho|^5\,|\Delta_{\alpha\beta}|\,\frac{1-e^{-2\,\mathrm{Re}(\rho)}}{\mathrm{Re}\,(\rho)}+\frac{1}{\mathrm{Re}\,(\rho)}(|\rho|^4\,\|\Delta_{\beta S}\|+|\rho|^3$$
$$(\|\Delta_{\beta R}\|+\|\Delta_{\alpha S}\|)+|\rho|^2\,\|\Delta_{\alpha R}\|)(2-e^{-\,\mathrm{Re}(\rho)}-e^{-2\,\mathrm{Re}(\rho)}+\frac{\left(1-e^{-\,\mathrm{Re}(\rho)}\right)^2}{\mathrm{Re}\,(\rho)})$$
$$+\frac{1}{\mathrm{Re}\,(\rho)}(|\rho|^2\,\|\Delta_{\delta S}\|+|\rho|\,(\|\Delta_{\delta R}\|+\|\Delta_{\gamma S}\|)+\|\Delta_{\gamma R}\|)\left(1-e^{-\,\mathrm{Re}(\rho)}\right)(1+\frac{1-e^{-\,\mathrm{Re}(\rho)}}{\mathrm{Re}\,(\rho)})$$
$$+\frac{2}{(\mathrm{Re}\,(\rho))^2}(|\rho|^2\,\|\Delta_S\|+2\,|\rho|\,\,\|\Delta_{RS}\|+\|\Delta_R\|)(\frac{3}{2}+\frac{e^{-2\,\mathrm{Re}(\rho)}}{2}-\frac{2\left(1-e^{-\,\mathrm{Re}(\rho)}\right)}{\mathrm{Re}\,(\rho)})\}$$

D'où :

$$\sup_{0\leq x\leq 1}\int_0^1|N\ \ (x,s,\lambda)|\,ds\leq\frac{e^{\mathrm{Re}(\rho)}}{|\rho|\,\mathrm{Re}\,(\rho)}\{(3\,|\rho|^4\,|\Delta_{\beta\delta}|+|\rho|^3\,(|\Delta_{\beta\gamma}|+|\Delta_{\alpha\delta}|)$$
$$+\,|\rho|^2\,|\Delta_{\alpha\gamma}|+|\rho|^5\,|\Delta_{\alpha\beta}|)\left(1-e^{-\,\mathrm{Re}(\rho)}\right)+(|\rho|^4\,\|\Delta_{\beta S}\|+|\rho|^3\,(\|\Delta_{\beta R}\|+\|\Delta_{\alpha S}\|)$$
$$+\,|\rho|^2\,\|\Delta_{\alpha R}\|)\left(1-e^{-\,\mathrm{Re}(\rho)}\right)(\left(2+e^{-\,\mathrm{Re}(\rho)}\right)+\frac{1-e^{-\,\mathrm{Re}(\rho)}}{\mathrm{Re}\,(\rho)})$$
$$+(|\rho|^2\,\|\Delta_{\delta S}\|+|\rho|\,(\|\Delta_{\delta R}\|+\|\Delta_{\gamma S}\|)+\|\Delta_{\gamma R}\|)\left(1-e^{-\,\mathrm{Re}(\rho)}\right)(1+\frac{1-e^{-\,\mathrm{Re}(\rho)}}{\mathrm{Re}\,(\rho)})$$
$$+\frac{2}{(\mathrm{Re}\,(\rho))^2}(|\rho|^2\,\|\Delta_S\|+2\,|\rho|\,\,\|\Delta_{RS}\|+\|\Delta_R\|)(1+e^{-2\,\mathrm{Re}(\rho)}-\frac{\left(1-e^{-\,\mathrm{Re}(\rho)}\right)}{\mathrm{Re}\,(\rho)})\}$$

Et pour $x<s$, on a:

$$\sup_{0\leq x\leq 1}\int_0^1|N\ \ (x\ ,s\ ,\lambda)|\,ds\leq\sup_{0\leq x\leq 1}\int_0^1|\varphi\,(x\ ,s\ ,\lambda)|\,ds+\sup_{0\leq x\leq 1}\int_x^1|\varphi_2\,(x\ ,\ \ s\ ,\lambda)|\,ds$$

Donc :

$$\sup_{0\leq x\leq 1}\int_0^1 |N\ \ (x\ ,s,\lambda)|\,ds\leq\frac{e^{\operatorname{Re}(\rho)}}{2\,|\rho|}\{(|\rho|^4\,|\Delta_{\beta\delta}|+|\rho|^3\,(|\Delta_{\alpha\delta}|+|\Delta_{\beta\gamma}|)+|\rho|^2\,|\Delta_{\alpha\gamma}|)$$
$$\left(3+e^{-\operatorname{Re}(\rho)}\right)(\frac{1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})+2\,|\rho|\ |\Delta_{\gamma\delta}|\,\frac{1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)}+2\,|\rho|^3\,|\Delta_{\alpha\delta}|\,\frac{e^{-\operatorname{Re}(\rho)}-e^{-2\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)}$$
$$+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(|\rho|^4\,\|\Delta_{\beta S}\|+|\rho|^3\,(\|\Delta_{\beta R}\|+\|\Delta_{\alpha S}\|)+|\rho|^2\,\|\Delta_{\alpha R}\|)\left(1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}\right)$$
$$(1+\frac{1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(|\rho|^2\,\|\Delta_{\delta S}\|+|\rho|\,(\|\Delta_{\delta R}\|+\|\Delta_{\gamma S}\|)+\|\Delta_{\gamma R}\|)$$
$$\left(1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}\right)(2+e^{-\operatorname{Re}(\rho)}+\frac{1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})$$
$$+\frac{2}{(\operatorname{Re}(\rho))^2}(|\rho|^2\,\|\Delta_S\|+2\,|\rho|\ \|\Delta_{RS}\|+\|\Delta_R\|)(1+e^{-2\operatorname{Re}(\rho)}-\frac{\left(1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}\right)}{\operatorname{Re}(\rho)})\}$$

D'où :

$$\sup_{0\leq x\leq 1}\int_0^1 |N\ \ (x,s\ ,\lambda)|\,ds\leq\frac{e^{\operatorname{Re}(\rho)}}{|\rho|\operatorname{Re}(\rho)}\{(3\,|\rho|^4\,|\Delta_{\beta\delta}|+|\rho|^3\,(|\Delta_{\alpha\delta}|+|\Delta_{\beta\gamma}|)$$
$$+|\rho|^2\,|\Delta_{\alpha\gamma}|+|\rho|\ |\Delta_{\gamma\delta}|+|\rho|^3\,|\Delta_{\alpha\delta}|)\left(1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}\right)$$
$$+(|\rho|^4\,\|\Delta_{\beta S}\|+|\rho|^3\,(\|\Delta_{\beta R}\|+\|\Delta_{\alpha S}\|)+|\rho|^2\,\|\Delta_{\alpha R}\|)\left(1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}\right)(1+\frac{1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})$$
$$+(|\rho|^2\,\|\Delta_{\delta S}\|+|\rho|\,(\|\Delta_{\delta R}\|+\|\Delta_{\gamma S}\|)+\|\Delta_{\gamma R}\|)\left(1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}\right)(2+e^{-\operatorname{Re}(\rho)}$$
$$+\frac{1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})+\frac{2}{(\operatorname{Re}(\rho))^2}(|\rho|^2\,\|\Delta_S\|+2\,|\rho|\ \|\Delta_{RS}\|+\|\Delta_R\|)$$
$$(1+e^{-2\operatorname{Re}(\rho)}-\frac{\left(1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}\right)}{\operatorname{Re}(\rho)})$$

Finalement pour $x>s$ et $x<s$ on a :

$$\sup_{0\leq x\leq 1}\int_0^1 |N\ \ (x,s,\lambda)|\,ds\leq\frac{e^{\operatorname{Re}(\rho)}}{|\rho|\operatorname{Re}(\rho)}\{(3\,|\rho|^5\,|\Delta_{\alpha\beta}|+|\rho|^4\,|\Delta_{\beta\delta}|+|\rho|^3\,(|\Delta_{\beta\gamma}|+|\Delta_{\alpha\delta}|)$$
$$+|\rho|^2\,|\Delta_{\alpha\gamma}|+|\rho|\ |\Delta_{\gamma\delta}|)\left(1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}\right)+(|\rho|^4\,\|\Delta_{\beta S}\|+|\rho|^3\,(\|\Delta_{\beta R}\|+\|\Delta_{\alpha S}\|)$$
$$+|\rho|^2\,\|\Delta_{\alpha R}\|)\left(1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}\right)(1+\frac{1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})+(|\rho|^2\,\|\Delta_{\delta S}\|+|\rho|\,(\|\Delta_{\delta R}\|$$
$$+\|\Delta_{\gamma S}\|)+\|\Delta_{\gamma R}\|)\left(1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}\right)(2+e^{-\operatorname{Re}(\rho)}+\frac{1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})$$
$$+\frac{2}{(\operatorname{Re}(\rho))^2}(|\rho|^2\,\|\Delta_S\|+2\,|\rho|\ \|\Delta_{RS}\|+\|\Delta_R\|)(1+e^{-2\operatorname{Re}(\rho)}-\frac{\left(1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}\right)}{\operatorname{Re}(\rho)})\}\tag{3.22}$$

Comme $\rho\in\Sigma_{\frac{\delta}{2}}$ alors $|\arg(\rho)|<\dfrac{\delta}{2}\Rightarrow|\rho|\cos(\arg(\rho))>|\rho|\cos(\dfrac{\delta}{2})$.

Ainsi $\operatorname{Re}(\rho)>|\rho|\cos(\dfrac{\delta}{2})$. Finalement de (3.22) on trouve :

$$\sup_{0\leq x\leq 1}\int_0^1 |N\ \ (x,s,\lambda)|\,ds\leq\frac{e^{\operatorname{Re}(\rho)}\max(3,2,4)}{|\rho|^2\cos(\frac{\delta}{2})}\{|\rho|^5\,|\Delta_{\alpha\beta}|+|\rho|^4\,(|\Delta_{\beta\delta}|+\|\Delta_{\beta S}\|)$$

$+|\rho|^3(|\Delta_{\beta\gamma}|+|\Delta_{\alpha\delta}|+\|\Delta_{\beta R}\|+\|\Delta_{\alpha S}\|)+|\rho|^2(|\Delta_{\alpha\gamma}|+\|\Delta_{\alpha R}\|+\|\Delta_{\delta S}\|)+|\rho|$
$(|\Delta_{\gamma\delta}|+\|\Delta_{\delta R}\|+\|\Delta_{\gamma S}\|)+\|\Delta_{\gamma R}\|)+\dfrac{1}{|\rho|\cos\frac{\delta}{2}}(|\rho|^2\|\Delta_S\|+2|\rho|\ \|\Delta_{RS}\|+\|\Delta_R\|)\}$

$\max(3\ ,2\ ,4)=4$ et

$$\|R\ (\lambda\ ,L_\infty)\|\leq\frac{1}{|\Delta(\lambda)|}\sup_{0\leq x\leq1}\int_0^1|N\ \ (x\ ,s\ ,\lambda)|\,ds$$

Alors :

$$\begin{aligned}\|R\ (\lambda\ ,L_\infty)\|\leq&\frac{4}{|\Delta(\rho^2)|\ \ |\rho|^2\cos(\dfrac{\delta}{2})}e^{\mathrm{Re}(\rho)}\{|\rho|^5|\Delta_{\alpha\beta}|+|\rho|^2|\Delta_{\beta\delta}|+\|\Delta_{\beta S}\|\\&+|\rho|^3(|\Delta_{\beta\gamma}|+|\Delta_{\alpha\delta}|+\|\Delta_{\beta R}\|+\|\Delta_{\alpha S}\|)+|\rho|^2(|\Delta_{\alpha\gamma}|+\|\Delta_{\alpha R}\|+\|\Delta_{\delta S}\|)\\&+|\rho|(|\Delta_{\gamma\delta}|+\|\Delta_{\delta R}\|+\|\Delta_{\gamma S}\|)+\|\Delta_{\gamma R}\|)+\frac{1}{|\rho|\cos\frac{\delta}{2}}(|\rho|^2\|\Delta_S\|+2|\rho|\ \|\Delta_{RS}\|+\|\Delta_R\|)\leq\frac{F\ \ (\rho)}{|\rho|}\end{aligned}\tag{3.23}$$

où

$$\begin{aligned}F\ \ (\rho)=&\frac{4}{|\Delta(\rho^2)|\ \ |\rho|\cos(\dfrac{\delta}{2})}e^{\mathrm{Re}(\rho)}\{(|\rho|^5|\Delta_{\alpha\beta}|+|\rho|^2(|\Delta_{\beta\delta}|+\|\Delta_{\beta S}\|)+|\rho|^3\\&(|\Delta_{\beta\gamma}|+|\Delta_{\alpha\delta}|+\|\Delta_{\beta R}\|+\|\Delta_{\alpha S}\|)+|\rho|^2(|\Delta_{\alpha\gamma}|+\|\Delta_{\alpha R}\|+\|\Delta_{\delta S}\|)+|\rho|(|\Delta_{\gamma\delta}|\\&+\|\Delta_{\delta R}\|+\|\Delta_{\gamma S}\|)+\|\Delta_{\gamma R}\|)+\frac{1}{|\rho|\cos(\frac{\delta}{2})}(|\rho|^2\|\Delta_S\|+2|\rho|\ \|\Delta_{RS}\|+\|\Delta_R\|)\end{aligned}\tag{3.24}$$

3.3 Estimation du déterminant caractéristique de la fonction de Green :

On suppose que les coefficients $\alpha_i\ ,\beta_i\ ,\gamma_i\ ,\delta_i\in\mathbb{C}$ où $i=\overline{1\ ,2}$ et les fonctions $S_i\ ,R_i\in C^1([0\ ,1]\,,\mathbb{C})$, $i=\overline{1,2}$. D'après (3.11) on a :

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda)=&e^\rho[-\rho^4\Delta_{\beta\delta}+\rho(\rho^2\Delta_{\alpha\delta}-\rho^2\Delta_{\beta\gamma}+\Delta_{\alpha S}(0)-\rho^2\Delta_{\beta S}(1))+\rho^2\Delta_{\alpha\gamma}\\&+\rho^2\Delta_{\alpha S}(1)+\Delta_{\gamma S}(0)-\rho^2\Delta_{\beta R}(1)-\Delta_{\delta R}(0)+\Delta_S(1\ ,0)\\&+\frac{1}{\rho}(\rho^2\Delta_{\alpha R}(1)-\Delta_{\gamma R}(0)+\Delta_{RS}(0\ ,1))+\frac{1}{\rho^2}\Delta_R(0\ ,1)+\Psi(\rho)]\end{aligned}$$

D'où :

$\Delta(\lambda)=e^\rho[-\rho^4\Delta_{\beta\delta}+\rho^3(\Delta_{\alpha\delta}-\Delta_{\beta\gamma}-\Delta_{\beta S}(1))+\rho^2(\Delta_{\alpha\gamma}+\Delta_{\alpha S}(1)-\Delta_{\beta R}(1))$
$+\rho(\Delta_{\delta S}(0)+\Delta_{\alpha R}(1))+\Delta_{\gamma S}(0)-\Delta_{\delta R}(0)+\Delta_S(1,0)+\dfrac{1}{\rho}(-\Delta_{\gamma R}(0)$

$$+\Delta_{RS}(0,1)+\Delta_{RS}(1\ ,0))+\frac{1}{\rho^2}\Delta_R(0\ ,1)+\Psi(\rho)]$$

(3.25)

Où :

$$\Psi(\rho)=2e^{-\rho}[\rho^5\Delta_{\alpha\beta}-\rho^3\Delta_{\beta S}(1)+\rho(\Delta_{\gamma\delta}+\Delta_{\delta S}(0)-\Delta_{\alpha R}(0))+\frac{1}{\rho}(\Delta_{\gamma R}(1)$$
$$-\Delta_{RS}(0\ ,0)-\Delta_{RS}(1\ ,1)]+e^{-2\rho}[\rho^4\Delta_{\beta\delta}+\rho^3(\Delta_{\alpha\delta}-\Delta_{\beta\gamma}-\Delta_{\beta S}(1))$$
$$+\rho^2(-\Delta_{\alpha\gamma}-\Delta_{\alpha S}(1)+\Delta_{\beta R}(1))+\rho(\Delta_{\delta S}(0)+\Delta_{\alpha R}(1))-\Delta_{\gamma S}(0)+\Delta_{\delta R}(0)$$
$$-\Delta_S(1\ ,0)+\frac{1}{\rho}(-\Delta_{\gamma R}(0)+\Delta_{RS}(0\ ,1)+\Delta_{RS}(1\ ,0)+\frac{1}{\rho^2}\Delta_R(1\ ,0)]$$
$$+\frac{1}{\rho}\{\int_0^1(\rho^2\Delta_{\alpha R'}(t)+\rho^3(\Delta_{\alpha S'}(t)-\Delta_{\beta R'}(t))-\rho^4\Delta_{\beta S'}(t))e^{\rho(t-1)}dt$$
$$+\int_0^1(\rho^2\Delta_{\alpha R'}(t)+\rho^3(\Delta_{\beta R'}(t)-\Delta_{\alpha S'}(t))-\rho^4\Delta_{\beta S'}(t))e^{-\rho(t+1)}dt$$
$$+\int_0^1(\Delta_{\gamma R'}(t)+\rho(\Delta_{\gamma S'}(t)-\Delta_{\delta R'}(t))-\rho^2\Delta_{\delta S'}(t))e^{\rho(t-2)}dt$$
$$+\int_0^1(\Delta_{\gamma R'}(t)+\rho(\Delta_{\gamma R'}(t)-\Delta_{\delta S'}(t))-\rho^2\Delta_{\delta S'}(t))e^{-\rho t}dt$$
$$+\int_0^1(\Delta_{R'R}(0\ ,t)-\rho(\Delta_{R'S}(0\ ,t)+\Delta_{RS'}(t\ ,0))+\rho^2\Delta_{S'S}(1\ ,t))e^{-\rho(t+1)}dt\}$$
$$+\frac{1}{\rho^2}\{\int_0^1\Delta_{R'R}(t\ ,0)-(\rho\Delta_{R'S}(t\ ,0)+\Delta_{RS'}(0\ ,t))-\rho^2\Delta_{S'S}(t\ ,0))e^{\rho(t-1)}dt$$
$$+\int_0^1(\Delta_{R'R}(1\ ,t)+(\rho\Delta_{R'S}(1\ ,t)+\Delta_{RS'}(t\ ,1))+\rho^2\Delta_{S'S}(t\ ,1))e^{\rho(t-2)}dt$$
$$+\int_0^1(\Delta_{R'R}(t\ ,1)+\rho(\Delta_{R'S}(t\ ,1)+\Delta_{RS'}(1\ ,t))+\rho^2\Delta_{S'S}(1\ ,t))e^{-\rho t}dt$$
$$+\int_0^1\int_0^1(\Delta_{R'}(\varepsilon\ ,t)+\rho(\Delta_{R'S'}(t\ ,\varepsilon)+\Delta_{R'S'}(\varepsilon\ ,t))-\rho^2\Delta_{S'}(\varepsilon\ ,t))e^{\rho(\varepsilon-t-1)}d\varepsilon dt\}$$

Donc :

$$|\Psi(\rho)|\leq 2e^{-\operatorname{Re}(\rho)}[|\rho|^5|\Delta_{\alpha\beta}|+|\rho|^3|\Delta_{\beta s}(1)|+|\rho|(|\Delta_{\gamma\delta}|+|\Delta_{\delta s}(0)|+|\Delta_{\alpha R}(0)|)$$
$$+\left|\frac{1}{\rho}\right|(|\Delta_{\gamma R}(1)|+|\Delta_{RS}(0\ ,0)|+|\Delta_{RS}(1\ ,1)|)+e^{-2\operatorname{Re}(\rho)}[|\rho|^4|\Delta_{\beta\delta}|+|\rho|^3$$
$$(|\Delta_{\alpha\delta}|+|\Delta_{\beta\gamma}|+|\Delta_{\beta S}(1)|)+|\rho|^2(|\Delta_{\alpha\gamma}|+|\Delta_{\alpha S}(1)|+|\Delta_{\beta R}(1)|)$$
$$+|\rho|(|\Delta_{\delta S}(0)|+|\Delta_{\alpha R}(1)|)+|\Delta_{\gamma S}(0)|+|\Delta_{\delta R}(0)|+|\Delta_S(1\ ,0)|$$
$$+\left|\frac{1}{\rho}\right|(|\Delta_{\gamma R}(0)|+|\Delta_{RS}(0\ ,1)|+|\Delta_{RS}(1\ ,0)|)+\left|\frac{1}{\rho^2}\right||\Delta_R(1\ ,0)|]$$
$$+\frac{1}{|\rho|}\{(|\rho|^2\|\Delta_{\alpha R'}(t)\|+|\rho|^3(\|\Delta_{\alpha S'}(t)\|+\|\Delta_{\beta R'}(t)\|)+|\rho|^4\|\Delta_{\beta S'}(t)\|)\frac{1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)}$$
$$+(|\rho|^2\|\Delta_{\alpha R'}(t)\|+|\rho|^3(\|\Delta_{\beta R'}(t)\|+\|\Delta_{\alpha S'}(t)\|)+|\rho|^4\|\Delta_{\beta S'}(t)\|)$$
$$(\frac{e^{-\operatorname{Re}(\rho)}-e^{-2\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})+(\|\Delta_{\gamma R'}(t)\|+|\rho|(\|\Delta_{\gamma S'}(t)\|+\|\Delta_{\delta R'}(t)\|)+|\rho|^2\|\Delta_{\delta S'}(t)\|)$$

$$(\frac{e^{-\operatorname{Re}(\rho)}-e^{-2\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})+(\left\|\Delta_{\gamma R'}(t)\right\|+|\rho|(\left\|\Delta_{\gamma R'}(t)\right\|+\|\Delta_{\delta S'}(t)\|)+|\rho|^2\|\Delta_{\delta S'}(t)\|)$$
$$(\frac{1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})+(\|\Delta_{R'R}(0,t)\|+|\rho|(\|\Delta_{R'S}(0,t)\|+\|\Delta_{RS'}(t\ ,0)\|)+|\rho|^2$$
$$\|\Delta_{S'S}(1\ ,t)\|)(\frac{e^{-\operatorname{Re}(\rho)}-e^{-2\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})\}$$
$$+\frac{1}{|\rho|^2}\{(\|\Delta_{R'R}(t\ ,0)\|+|\rho|(\|\Delta_{R'S}(t\ ,0)\|+\|\Delta_{RS'}(0,t)\|)+|\rho|^2\|\Delta_{S'S}(t\ ,0)\|)$$
$$(\frac{1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})+(\|\Delta_{R'R}(1,t)\|+|\rho|(\|\Delta_{R'S}(1,t)\|+\|\Delta_{RS'}(t\ ,1)\|+|\rho|^2\|\Delta_{S'S}(t\ ,1)\|)$$
$$(\frac{e^{-\operatorname{Re}(\rho)}-e^{-2\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})$$
$$+(\|\Delta_{R'R}(t\ ,1)\|+|\rho|(\|\Delta_{R'S}(t\ ,1)\|+\|\Delta_{RS'}(1\ ,t)\|)+|\rho|^2\|\Delta_{S'S}(1\ ,t)\|)(\frac{1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})$$
$$+(\|\Delta_{R'}(\varepsilon\ ,t)\|+|\rho|(\|\Delta_{R'S'}(t\ ,\varepsilon)\|+\|\Delta_{R'S'}(\varepsilon\ ,t)\|)+|\rho|^2\|\Delta_{S'}(\varepsilon\ ,t)\|)\frac{\left(1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}\right)^2}{(\operatorname{Re}(\rho))^2}\}$$

Alors :

$$|\Psi(\rho)|\leq 2e^{-\operatorname{Re}(\rho)}[|\rho|^5|\Delta_{\alpha\beta}|+|\rho|^3|\Delta_{\beta S}(1)|+|\rho|(|\Delta_{\gamma\delta}|+|\Delta_{\delta S}(0)|+|\Delta_{\alpha R}(0)|)$$
$$+\frac{1}{|\rho|}(|\Delta_{\gamma R}(1)|+|\Delta_{RS}(0\ ,0)|+|\Delta_{RS}(1\ ,1)|)+e^{-2\operatorname{Re}(\rho)}[|\rho|^4|\Delta_{\beta\delta}|+|\rho|^3$$
$$(|\Delta_{\alpha\delta}|+|\Delta_{\beta\gamma}|+|\Delta_{\beta S}(1)|)+|\rho|^2(|\Delta_{\alpha\gamma}|+|\Delta_{\alpha S}(1)|+|\Delta_{\beta R}(1)|)+|\rho|(|\Delta_{\delta S}(0)|$$
$$+|\Delta_{\alpha R}(1)|)+|\Delta_{\gamma S}(0)|+|\Delta_{\delta R}(0)|+|\Delta_S(1\ ,0)|+\frac{1}{|\rho|}(|\Delta_{\gamma R}(0)|+|\Delta_{RS}(0\ ,1)|$$
$$+|\Delta_{RS}(1\ ,0)|)+\frac{1}{|\rho|^2}|\Delta_R(1\ ,0)|]+\frac{1}{|\rho|}\{(|\rho|^2\|\Delta_{\alpha R'}(t)\|+|\rho|^3(\|\Delta_{\alpha S'}(t)\|$$
$$+\left\|\Delta_{\beta R'}(t)\right\|)+|\rho|^4\left\|\Delta_{\beta S'}(t)\right\|)(\frac{2-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}-e^{-2\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})$$
$$+(\left\|\Delta_{\gamma R'}(t)\right\|+|\rho|(\left\|\Delta_{\gamma S'}(t)\right\|+\|\Delta_{\delta R'}(t)\|)+|\rho|^2\|\Delta_{\delta S'}(t)\|)(\frac{1-e^{-2\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})$$
$$+(\|\Delta_{R'R}(0\ ,t)\|+|\rho|(\|\Delta_{R'S}(0\ ,t)\|+\|\Delta_{RS'}(t\ ,0)\|)+|\rho|^2\|\Delta_{S'S}(1\ ,t)\|)$$
$$(\frac{e^{-\operatorname{Re}(\rho)}-e^{-2\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})\}+\frac{1}{|\rho|^2\operatorname{Re}(\rho)}(\|\Delta_{R'R}(t\ ,0)\|+|\rho|(\|\Delta_{R'S}(t\ ,0)\|$$
$$+\|\Delta_{RS'}(0,t)\|)+|\rho|^2\|\Delta_{S'S}(t\ ,0)\|)\left(1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}\right)\left(2+e^{-\operatorname{Re}(\rho)}\right)$$
$$+\frac{1}{(|\rho|\operatorname{Re}(\rho))^2}(\|\Delta_{R'}\|+2|\rho|\ \|\Delta_{R'S'}\|+|\rho|^2\|\Delta_{S'}\|)\left(1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}\right)^2$$

Pour $\operatorname{Re}(\rho)>0$ on a : $e^{\operatorname{Re}(\rho)}>\operatorname{Re}(\rho)$ alors : $e^{-\operatorname{Re}(\rho)}<\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}$donc :

$$|\Psi(\rho)|\leq\frac{2}{|\rho|\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)}[|\rho|^5|\Delta_{\alpha\beta}|+|\rho|^3|\Delta_{\beta S}(1)|+|\rho|(|\Delta_{\gamma\delta}|+|\Delta_{\delta S}(0)|+|\Delta_{\alpha R}(0)|)$$
$$+\frac{1}{|\rho|}(|\Delta_{\gamma R}(1)|+|\Delta_{RS}(0,0)|+|\Delta_{RS}(1,1)|)]+\frac{1}{|\rho|^2\cos^2(\frac{\delta}{2})}[|\rho|^4|\Delta_{\beta\delta}|+|\rho|^3$$
$$(|\Delta_{\alpha\delta}|+|\Delta_{\beta\gamma}|+|\Delta_{\beta S}(1)|)+|\rho|^2(|\Delta_{\alpha\gamma}|+|\Delta_{\alpha S}(1)|+|\Delta_{\beta R}(1)|)+|\rho|(|\Delta_{\delta S}(0)|$$
$$+|\Delta_{\alpha R}(1)|)+|\Delta_{\gamma S}(0)|+|\Delta_{\delta R}(0)|+|\Delta_S(1\ ,0)|+\frac{1}{|\rho|}(|\Delta_{\gamma R}(0)|+|\Delta_{RS}(0,1)|$$

$$+\left|\Delta_{RS}(1\ ,0)\right|)+\frac{1}{|\rho|^{2}}\left|\Delta_{R}(1,0)\right|]$$
$$+\frac{1}{\cos(\frac{\delta}{2})}(\|\Delta_{\alpha R'}(t)\|+|\rho|(\|\Delta_{\alpha S'}(t)\|+\left\|\Delta_{\beta R'}(t)\right\|)+|\rho|^{2}\left\|\Delta_{\beta S'}(t)\right\|)$$
$$+\frac{3}{|\rho|^{2}\cos(\frac{\delta}{2})}(\|\Delta_{R'R}\|+\left\|\Delta_{\gamma R'}\right\|+|\rho|(\|\Delta_{R'S}\|+\|\Delta_{RS'}\|+\left\|\Delta_{\gamma S'}\right\|+\|\Delta_{\delta R'}\|)$$
$$+|\rho|^{2}(\|\Delta_{S'S}\|+\|\Delta_{\delta S'}(t)\|))+\frac{1}{|\rho|^{2}\cos^{2}(\frac{\delta}{2})}(\|\Delta_{R'}\|+2|\rho|\ \|\Delta_{R'S'}\|+|\rho|^{2}\|\Delta_{S'}\|) \tag{3.26}$$

Distinguons maintenant différents cas :

cas 1 :supposons que $\Delta_{\beta\delta}\neq 0$, D'après (3.25) nous avons pour $|\rho|$ suffisament grand, alors :

$$\Delta(\lambda)\geq|\rho|^{4}e^{\mathrm{Re}(\rho)}[|\Delta_{\beta\delta}|+\frac{1}{|\rho|}(|\Delta_{\alpha\delta}|+|\Delta_{\beta\gamma}|+|\Delta_{\beta S}(1)|)+\frac{1}{|\rho|^{2}}(|\Delta_{\alpha\gamma}|+|\Delta_{\alpha S}(1)|$$
$$+|\Delta_{\beta R}(1)|)+\frac{1}{|\rho|^{3}}(|\Delta_{\delta S}(0)|+|\Delta_{\alpha R}(1)|)+\frac{1}{|\rho|^{4}}(|\Delta_{\gamma S}(0)|+|\Delta_{\delta R}(0)|+|\Delta_{S}(1,0)|)$$
$$+\frac{1}{|\rho|^{5}}(|\Delta_{\gamma R}(0)|+|\Delta_{RS}(0,1)|+|\Delta_{RS}(1,0)|)+\frac{1}{|\rho|^{6}}|\Delta_{R}(0,1)|+\frac{\Psi(\rho)}{|\rho|^{4}}]$$

D'après (3.26), nous déduisons que pour $\rho\in\sum_{\delta}$, $|\rho|\geq r_0>0$, on a :

$$|\Psi(\rho)|\leq\frac{c\ (r_0)}{|\rho|^{2}}$$

Alors, nous avons :

$$|\Delta(\lambda)|\geq|\rho|^{4}e^{\mathrm{Re}(\rho)}[|\Delta_{\beta\delta}|-\frac{1}{|\rho|}(|\Delta_{\alpha\delta}|+|\Delta_{\beta\gamma}|+|\Delta_{\beta S}(1)|)-\frac{1}{|\rho|^{2}}(|\Delta_{\alpha\gamma}|+|\Delta_{\alpha S}(1)|$$
$$+|\Delta_{\beta R}(1)|)-\frac{1}{|\rho|^{3}}(|\Delta_{\delta S}(0)|+|\Delta_{\alpha R}(1)|)-\frac{1}{|\rho|^{4}}(|\Delta_{\gamma S}(0)|+|\Delta_{\delta R}(0)|+|\Delta_{S}(1,0)|)$$
$$-\frac{1}{|\rho|^{5}}(|\Delta_{\gamma R}(0)|+|\Delta_{RS}(0,1)|+|\Delta_{RS}(1,0)|)-\frac{1}{|\rho|^{6}}|\Delta_{R}(0,1)|+\frac{c\ (r_0)}{|\rho|^{6}}]>0$$

Nous pouvons donc choisir $r_0>0$, tel que : $(|\rho|\geq r_0)\Rightarrow\frac{1}{|\rho|}\leq\frac{1}{r_0}$

$$\frac{1}{r_0}(|\Delta_{\alpha\delta}|+|\Delta_{\beta\gamma}|+|\Delta_{\beta S}(1)|)+\frac{1}{r_0^{2}}(|\Delta_{\alpha\gamma}|+|\Delta_{\alpha S}(1)|+|\Delta_{\beta R}(1)|)$$
$$+\frac{1}{r_0^{3}}(|\Delta_{\delta S}(0)|+|\Delta_{\alpha R}(1)|)+\frac{1}{r_0^{4}}(|\Delta_{\gamma S}(0)|+|\Delta_{\delta R}(0)|+|\Delta_{S}(1,0)|)$$
$$+\frac{1}{r_0^{5}}(|\Delta_{\gamma R}(0)|+|\Delta_{RS}(0,1)|+|\Delta_{RS}(1,0)|)+\frac{1}{r_0^{6}}|\Delta_{R}(0,1)|+\frac{c\ (r_0)}{r_0^{6}}\leq\frac{|\Delta_{\beta\delta}|}{2}$$

Alors pour $\rho\in\sum_{\delta}$, $|\rho|\geq r_0>0$, nous obtenons

$$\Delta(\lambda)\geq|\rho|^{4}\frac{|\Delta_{\beta\delta}|}{2}e^{\mathrm{Re}(\rho)} \tag{3.27}$$

On a pour $\Delta_{\alpha\beta} = 0$

$$F(\rho) \leq \frac{F_0}{|\rho|^3}$$

Finalement d'après (3.24) nous avons démontré que $|\rho| F(\rho)$ reste bornée dans le secteur $\Sigma_{\frac{\delta}{2}}$ pour $|\rho|$ suffisamment grand, d'où :

$$\|R(\lambda\ , L_\infty)\| \leq \frac{F_0}{|\rho|^4}$$

Et pour $\Delta_{\alpha\beta} \neq 0$ on a

$$F(\rho) \leq F_0$$

Donc

$$\|R(\lambda\ , L_\infty)\| \leq \frac{F_0}{|\rho|}$$

cas 2 : Supposons que $(\Delta_{\alpha\delta} - \Delta_{\beta\gamma} - \Delta_{\beta S}(1) \neq 0$ et $\Delta_{\beta\delta} = 0)$. D'après (3.25) on a pour $|\rho|$ suffisamment grand :

$$\begin{aligned}|\Delta(\lambda)| \geq |\rho|^3 e^{\mathrm{Re}(\rho)}[&|\Delta_{\alpha\delta} - \Delta_{\beta\gamma} - \Delta_{\beta S}(1)| - \frac{1}{|\rho|}|\Delta_{\alpha\gamma} + \Delta_{\alpha S}(1) - \Delta_{\beta R}(1)| \\ &- \frac{1}{|\rho|^2}|\Delta_{\delta S}(0) + \Delta_{\alpha R}(1)| - \frac{1}{|\rho|^3}|\Delta_{\gamma S}(0) - \Delta_{\delta R}(0) + \Delta_S(1\ ,0)| \\ &- \frac{1}{|\rho|^4}|-\Delta_{\gamma R}(0) + \Delta_{RS}(0\ ,1) + \Delta_{RS}(1\ ,0)| - \frac{1}{|\rho|^5}|\Delta_R(0\ ,1)| - \frac{\Psi(\rho)}{|\rho|^3}]\end{aligned}$$

D'après (3.26) nous déduisons que pour $\rho \in \Sigma_{\frac{\delta}{2}}$, $|\rho| \geq r_0 > 0$, alors on a :

$$|\Psi(\rho)| \leq \frac{c_1(r_0)}{|\rho|}$$

Alors, nous avons :

$$\begin{aligned}|\Delta(\lambda)| \geq |\rho|^3 e^{\mathrm{Re}(\rho)}[&|\Delta_{\alpha\delta} - \Delta_{\beta\gamma} - \Delta_{\beta S}(1)| - \frac{1}{|r_0|}|\Delta_{\alpha\gamma} + \Delta_{\alpha S}(1) - \Delta_{\beta R}(1)| \\ &- \frac{1}{|r_0|^2}|\Delta_{\delta S}(0) + \Delta_{\alpha R}(1)| - \frac{1}{|r_0|^3}|\Delta_{\gamma S}(0) - \Delta_{\delta R}(0) + \Delta_S(1\ ,0)| \\ &- \frac{1}{|r_0|^4}|-\Delta_{\gamma R}(0) + \Delta_{RS}(0\ ,1) + \Delta_{RS}(1\ ,0)| - \frac{1}{|r_0|^5}|\Delta_R(0\ ,1)| - \frac{c_1(r_0)}{|r_0|^4}]\end{aligned}$$

Nous pouvons donc choisir $r_0 > 0$, tel que :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{r_0}|\Delta_{\alpha\gamma} + \Delta_{\alpha S}(1) - \Delta_{\beta R}(1)| + \frac{1}{r_0^2}|\Delta_{\delta S}(0) + \Delta_{\alpha R}(1)| \\ &+ \frac{1}{r_0^3}|\Delta_{\gamma S}(0) - \Delta_{\delta R}(0) + \Delta_S(1,0)| + \frac{1}{r_0^4}|-\Delta_{\gamma R}(0) + \Delta_{RS}(0,1) + \Delta_{RS}(1,0)| \\ &+ \frac{1}{r_0}|\Delta_R(0,1)| + \frac{c_1(r_0)}{r_0^4} \leq \frac{1}{2}|\Delta_{\alpha\delta} - \Delta_{\beta\gamma} - \Delta_{\beta S}(1)|\end{aligned}$$

Alors pour $\rho \in \Sigma_{\frac{\delta}{2}}$, $|\rho| \geq r_0 > 0$, nous obtenons :

$$|\Delta(\lambda)| \geq \frac{|\rho|^3 |\Delta_{\alpha\delta} - \Delta_{\beta\gamma} - \Delta_{\beta S}(1)|}{2} e^{\mathrm{Re}(\rho)} \tag{3.28}$$

Finalement d'après (3.24), on a :

$$F(\rho) \leq \frac{8}{|\Delta_{\alpha\delta} - \Delta_{\beta\gamma} - \Delta_{\beta S}(1)| \cos(\frac{\delta}{2})} \{|r_0| |\Delta_{\alpha\beta}| + \frac{1}{r_0^2} \|\Delta_{\beta S}\| + \frac{1}{r_0^2}(|\Delta_{\beta\gamma}|$$
$$+ |\Delta_{\alpha\delta}| + \|\Delta_{\beta R}\| + \|\Delta_{\alpha S}\|) + \frac{1}{r_0^2}(|\Delta_{\alpha\gamma}| + \|\Delta_{\alpha R}\| + \|\Delta_{\delta S}\|) + \frac{1}{r_0^3}(|\Delta_{\gamma\delta}| + \|\Delta_{\delta R}\|$$
$$+ \|\Delta_{\gamma S}\| + \|\Delta_{\gamma R}\|) + \frac{1}{\cos(\frac{\delta}{2})}(\frac{\|\Delta_S\|}{r_0^3} + \frac{2\|\Delta_{RS}\|}{r_0^4} + \frac{\|\Delta_R\|}{r_0^5})\} \equiv F_1$$

Ainsi nous avons démontré que $F(\rho)$ reste bornée dans le secteur $\sum_{\frac{\delta}{2}}$ pour $|\rho|$ suffisamment grand, d'où :

$$\|R(\lambda, L_\infty)\| \leq \frac{F_1(\rho)}{|\rho|}$$

cas 3 :On suppose que $\Delta_{\alpha\beta} = \Delta_{\beta\delta} = \Delta_{\alpha\delta} = \Delta_{\beta\gamma} = 0$, $\Delta_{\beta S} \equiv 0$ et $|\Delta_{\alpha\gamma} + \Delta_{\alpha S}(1) - \Delta_{\beta R}(1)| \neq 0$, d'après (3.25) nous avons pour $|\rho|$ suffisamment grand :

$$|\Delta(\lambda)| \geq |\rho|^2 e^{\mathrm{Re}(\rho)}[|\Delta_{\alpha\gamma} + \Delta_{\alpha S}(1) - \Delta_{\beta R}(1)| - \frac{1}{|\rho|}|\Delta_{\delta S}(0) + \Delta_{\alpha R}(1)|$$
$$- \frac{1}{|\rho|^2}|\Delta_{\gamma S}(0) - \Delta_{\delta R}(0) + \Delta_S(1,0)| - \frac{1}{|\rho|^3}|-\Delta_{\gamma R}(0) + \Delta_{RS}(0,1) + \Delta_{RS}(1,0)|$$
$$- \frac{1}{|\rho|^4}|\Delta_R(0,1)| - \frac{\Psi(\rho)}{|\rho|^2}]$$

D'après (3.26) nous déduisons pour $\rho \in \Sigma_{\frac{\delta}{2}}$, $|\rho| \geq r_0 > 0$

$$|\Psi(\rho)| \leq c_2(r_0)$$

Alors nous avons :

$$|\Delta(\lambda)| \geq |\rho|^2 e^{\mathrm{Re}(\rho)}[|\Delta_{\alpha\gamma} + \Delta_{\alpha S}(1) - \Delta_{\beta R}(1)| - \frac{1}{r_0}|\Delta_{\delta S}(0) + \Delta_{\alpha R}(1)|$$
$$- \frac{1}{r_0^2}|\Delta_{\gamma S}(0) - \Delta_{\delta R}(0) + \Delta_S(1, 0)| - \frac{1}{r_0^3}|-\Delta_{\gamma R}(0) + \Delta_{RS}(0, 1) + \Delta_{RS}(1, 0)|$$
$$- \frac{1}{r_0^4}|\Delta_R(0, 1)| - \frac{c_2(r_0)}{r_0^2}]$$

Nous pouvons choisir $r_0 > 0$ tel que :

$$\frac{1}{r_0}|\Delta_{\delta S}(0) + \Delta_{\alpha R}(1)| + \frac{1}{r_0^2}|\Delta_{\gamma S}(0) - \Delta_{\delta R}(0) + \Delta_S(1, 0)|$$
$$+ \frac{1}{r_0^3}|-\Delta_{\gamma R}(0) + \Delta_{RS}(0, 1) + \Delta_{RS}(1, 0)| \leq \frac{1}{2}|\Delta_{\alpha\gamma} + \Delta_{\alpha S}(1) - \Delta_{\beta R}(1)|$$

Alors pour $\rho \in \Sigma_{\frac{\delta}{2}}$, $|\rho| \geq r_0 > 0$ nous obtenons :

$$|\Delta(\lambda)| \geq \frac{1}{2}|\rho|^2 |\Delta_{\alpha\gamma} + \Delta_{\alpha S}(1) - \Delta_{\beta R}(1)| e^{\mathrm{Re}(\rho)} \tag{3.29}$$

Finalement d'après (3.24) on a :

$$F(\rho) \leq \frac{8}{|\Delta_{\alpha\gamma} + \Delta_{\alpha S}(1) - \Delta_{\beta R}(1)| \cos(\frac{\delta}{2})}\{(\|\Delta_{\beta R}\| + \|\Delta_{\alpha S}\|) + \frac{1}{r_0}(|\Delta_{\alpha\gamma}|$$
$$+ \|\Delta_{\alpha R}\| + \|\Delta_{\delta S}\|) + \frac{1}{r_0^2}(|\Delta_{\gamma\delta}| + \|\Delta_{\delta R}\| + \|\Delta_{\gamma S}\| + \|\Delta_{\gamma R}\|) + \frac{1}{\cos(\frac{\delta}{2})}$$
$$(\frac{\|\Delta_S\|}{r_0^2} + \frac{2\|\Delta_{RS}\|}{r_0^3} + \frac{\|\Delta_R\|}{r_0^4})\} \equiv F_2(\rho)$$

Ainsi nous avons démontré que $F(\rho)$ reste bornée dans le secteur $\Sigma_{\frac{\delta}{2}}$ pour $|\rho|$ suffisamment grand, d'où :

$$\|R(\lambda, L_\infty)\| \leq \frac{F_2(\rho)}{|\rho|}$$

cas 4 : On suppose que :$\Delta_{\alpha\beta} = 0$ et $\Delta_{\beta\delta} = \Delta_{\alpha\delta} = \Delta_{\beta\gamma} = \Delta_{\alpha\gamma} = \Delta_{\gamma\delta} = 0$ et $\Delta_{\beta S} \equiv \Delta_{\alpha S} \equiv \Delta_{\beta R} \equiv 0$ et $|\Delta_{\delta S}(0) + \Delta_{\alpha R}(1)| \neq 0$. D'après(3.25) on a pour $|\rho|$ suffisamment grand :

$$|\Delta(\lambda)| \geq |\rho| e^{\mathrm{Re}(\rho)}[|\Delta_{\delta S}(0) + \Delta_{\alpha R}(1)| - \frac{1}{|\rho|}|\Delta_{\gamma S}(0) - \Delta_{\delta R}(0) + \Delta_S(1,0)|$$
$$-\frac{1}{|\rho|^2}|-\Delta_{\gamma R}(0) + \Delta_{RS}(0,1) + \Delta_{RS}(1,0)| - \frac{1}{|\rho|^3}|\Delta_R(0,1)| - \frac{\Psi(\rho)}{|\rho|}]$$

D'après (3.26), nous déduisons pour $\rho \in \Sigma_{\frac{\delta}{2}}$, $|\rho| \geq r_0 > 0$

$$|\Psi(\rho)| \leq \frac{c_3(r_0)}{r_0}$$

Alors, nous avons :

$$|\Delta(\lambda)| \geq |\rho| e^{\mathrm{Re}(\rho)}[|\Delta_{\delta S}(0) + \Delta_{\alpha R}(1)| - \frac{1}{r_0}|\Delta_{\gamma S}(0) - \Delta_{\delta R}(0) + \Delta_S(1, 0)|$$
$$-\frac{1}{r_0^2}|-\Delta_{\gamma R}(0) + \Delta_{RS}(0, 1) + \Delta_{RS}(1, 0)| - \frac{1}{r_0^3}|\Delta_R(0, 1)| - \frac{c_3(r_0)}{r_0^2}]$$

Nous pouvons choisir $r_0 > 0$, tel que :

$$\frac{1}{r_0}|\Delta_{\gamma S}(0) - \Delta_{\delta R}(0) + \Delta_S(1, 0)| + \frac{1}{r_0^2}|-\Delta_{\gamma R}(0) + \Delta_{RS}(0, 1) + \Delta_{RS}(1, 0)|$$
$$+\frac{1}{r_0^3}|\Delta_R(0, 1)| + \frac{c_3(r_0)}{r_0^2} \leq \frac{1}{2}|\Delta_{\delta S}(0) + \Delta_{\alpha R}(1)|$$

Alors pour $\rho \in \Sigma_{\frac{\delta}{2}}$, $|\rho| \geq r_0 > 0$, nous obtenons :

$$|\Delta(\lambda)| \geq |\rho| \quad |\Delta_{\delta S}(0) + \Delta_{\alpha R}(1)| e^{\mathrm{Re}(\rho)} \tag{3.30}$$

Finalement d'après(3.24) on a :

$$F(\rho) \leq \frac{8}{|\Delta_{\delta S}(0) + \Delta_{\alpha R}| \cos(\frac{\delta}{2})}\{(\|\Delta_{\alpha R}\| + \|\Delta_{\delta S}\|) + \frac{1}{r_0}(|\Delta_{\gamma\delta}| + \|\Delta_{\delta R}\| + \|\Delta_{\gamma S}\|)$$
$$+ \|\Delta_{\gamma R}\| + \frac{1}{\cos(\frac{\delta}{2})}(\frac{\|\Delta_S\|}{r_0} + \frac{2\|\Delta_{RS}\|}{r_0^2} + \frac{\|\Delta_R\|}{r_0^3})\} \equiv F_3(\rho)$$

Ainsi nous avons démontré que $F(\rho)$ reste bornée dans le secteur $\Sigma_{\frac{\delta}{2}}$ pour $|\rho|$ suffisamment grand,d'où :

$$\|R(\lambda\ ,L_{\infty})\| \leq \frac{F_3(\rho)}{|\rho|}$$

cas 5 : On suppose que :$\Delta_{\alpha\beta} = \Delta_{\alpha\delta} = \Delta_{\alpha\gamma} = \Delta_{\beta\delta} = \Delta_{\beta\gamma} = \Delta_{\gamma\delta} = 0$ et $\Delta_{\beta S} \equiv \Delta_{\alpha S} \equiv \Delta_{\delta S} \equiv \Delta_{\alpha R} \equiv 0$ et $|\Delta_{\delta S}(0) - \Delta_{\delta R}(0) + \Delta_S(1\ ,0)| \neq 0$. D'après (3.25) on a pour $|\rho|$ suffisamment grand :

$$\begin{aligned}&|\Delta(\lambda)| \geq e^{\mathrm{Re}(\rho)}[|\Delta_{\gamma S}(0) + \Delta_{\delta R}(0) + \Delta_S(1\ ,0)| \\ &\quad + \frac{1}{|\rho|}|-\Delta_{\gamma R}(0) + \Delta_{RS}(0\ ,1) + \Delta_{RS}(1\ ,0)| + \frac{1}{|\rho|^2}|\Delta_R(0\ ,1)| + \Psi(\rho)]\end{aligned}$$

D'après (3.26), nous déduisons pour $\rho \in \Sigma_{\frac{\delta}{2}}, |\rho| \geq r_0 > 0$

$$|\rho|^2|\Psi(\rho)| \leq c_4(r_0)$$

Alors nous avons :

$$\begin{aligned}&|\Delta(\lambda)| \geq e^{\mathrm{Re}(\rho)}[|\Delta_{\gamma S}(0) + \Delta_{\delta R}(0) + \Delta_S(1\ ,0)| \\ &- \frac{1}{|\rho|}|-\Delta_{\gamma R}(0) + \Delta_{RS}(0\ ,1) + \Delta_{RS}(1\ ,0)| - \frac{1}{|\rho|^2}|\Delta_R(0\ ,1)| - \frac{c_4(r_0)}{|\rho|^2}\end{aligned}$$

Nous pouvons choisir $r_0 > 0$ tel que :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{r_0}|-\Delta_{\gamma R}(0) + \Delta_{RS}(0,1) + \Delta_{RS}(1,0)| + \frac{1}{r_0}|\Delta_R(0,1)| + |c_4(r_0)| \\ &\quad \leq \frac{1}{2}|\Delta_{\delta S}(0) + \Delta_{\delta R}(0) + \Delta_S(1,0)|\end{aligned}$$

Alors pour $\rho \in \Sigma_{\frac{\delta}{2}}$, $|\rho| \geq r_0 > 0$, nous obtenons :

$$|\Delta(\lambda)| \geq \frac{1}{2}e^{\mathrm{Re}(\rho)}|\Delta_{\gamma S}(0) + \Delta_{\delta R}(0) + \Delta_S(1,0)| \tag{3.31}$$

Finalement d'après (3.24), on a :

$$\begin{aligned}&F(\rho) \leq \frac{8}{|\Delta_{\gamma S}(0) + \Delta_{\delta R}(0) + \Delta_S(1,0)|\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)}\{\|\Delta_{\delta S}\| + \frac{1}{r_0}(|\Delta_{\gamma\delta}| + \|\Delta_{\delta R}\| \\ &+ \|\Delta_{\gamma S}\|) + \|\Delta_{\gamma R}\| + \frac{1}{\cos(\frac{\delta}{2})}(\frac{\|\Delta_S\|}{r_0} + \frac{2\|\Delta_{RS}\|}{r_0^2} + \frac{\|\Delta_R\|}{r_0^3})\} \equiv F_4(\rho)\end{aligned}$$

Ainsi nous avons démontré que $F(\rho)$ reste bornée dans le secteur $\Sigma_{\frac{\delta}{2}}$ pour $|\rho|$ suffisamment grand, d'où :

$$\|R(\lambda\ ,L_{\infty})\| \leq \frac{F_4(\rho)}{|\rho|}$$

cas 6 : On suppose que :$\Delta_{\alpha\beta} = \Delta_{\alpha\delta} = \Delta_{\alpha\gamma} = \Delta_{\beta\delta} = \Delta_{\beta\gamma} = \Delta_{\gamma\delta} = 0$ et $\Delta_{\beta s} \equiv \Delta_{\alpha s} \equiv \Delta_{\delta s} \equiv \Delta_{\alpha R} \equiv \Delta_{\beta R} \equiv \Delta_{\gamma s} \equiv \Delta_{\delta R} \equiv \Delta_s \equiv 0$

et $|-\Delta_{\gamma R}(0)+\Delta_{Rs}+\Delta_{Rs}(1,0)|\neq 0$. D'aprés (3.25) on a pour $|\rho|$ suffisamment grand :

$$|\Delta(\lambda)|\geq \frac{e^{\mathrm{Re}(\rho)}}{\rho}[|\Delta_{\gamma R}(0)+\Delta_{Rs}(0,1)+\Delta_{Rs}(1,0)|+\frac{1}{|\rho|}|\Delta_{R}(0,1)|+\Psi(\rho)|\rho|]$$

D'après (3.26) :$\rho\in\Sigma_{\frac{\delta}{2}}$, $|\rho|\geq r_0>0$

$$|\Psi(\rho)|\leq\frac{c_5(r_0)}{|\rho|^3}$$

Alors :

$$|\Delta(\lambda)|\geq\frac{e^{\mathrm{Re}(\rho)}}{2|\rho|}|\Delta_{\gamma R}(0)+\Delta_{RS}(0,1)+\Delta_{RS}(1,0)| \tag{3.32}$$

Donc :

$$\|R(\lambda\ ,L_\infty)\|\leq\frac{F_5(\rho)}{|\rho|}$$

cas 7 : On suppose que :$\Delta_{\alpha\beta}=\Delta_{\alpha\delta}=\Delta_{\alpha\gamma}=\Delta_{\beta\delta}=\Delta_{\beta\gamma}=\Delta_{\gamma\delta}=0$ et $\Delta_{\beta s}\equiv\Delta_{\alpha s}\equiv\Delta_{\delta s}\equiv\Delta_{\alpha R}\equiv\Delta_{\beta R}\equiv\Delta_{\gamma s}\equiv\Delta_{\delta R}\equiv\Delta_{s}\equiv\Delta_{\gamma R}\equiv\Delta_{Rs}\equiv0$
et $|\Delta_R(0,1)|\neq0$.
D'après (3.25) on a pour $|\rho|$ suffisamment grand :

$$|\Delta(\lambda)|\geq\frac{e^{\mathrm{Re}(\rho)}}{|\rho|^2}\left[|\Delta_R(0,1)|+\Phi(\rho)|\rho|^2\right]$$

D'après (3.26) :$\rho\in\Sigma_{\frac{\delta}{2}}$, $|\rho|\geq r_0>0$

$$|\Phi(\rho)|\leq\frac{c_6(r_0)}{|\rho|^2}$$

Alors :

$$|\Delta(\lambda)|\geq\frac{e^{\mathrm{Re}(\rho)}}{2|\rho|}|\Delta_R(0\ ,1)| \tag{3.33}$$

D'où :

$$\|R(\lambda\ ,L_\infty)\|\leq\frac{F_6(\rho)}{|\rho|}$$

Définition 3.3.1 *les conditions aux limites dans*(3.1) *sont dites faiblement régulières si l'une des conditions suivantes est vérifiée.*

$1-$ $\Delta_{\beta\delta}\neq0$ *et* $\Delta_{\alpha\beta}\neq0$

$2-$ $\Delta_{\alpha\delta}-\Delta_{\beta\gamma}-\Delta_{\beta s}(1)\neq0$ *et* $\Delta_{\beta\delta}=0$

$3-$ $\Delta_{\alpha\beta}=0$ *et* $\Delta_{\beta\delta}=0$, $\Delta_{\alpha\delta}=0$, $\Delta_{\beta\gamma}=0$, $\Delta_{\beta s}=0$ *et* $|\Delta_{\alpha\gamma}+\Delta_{\alpha s}(1)-\Delta_{\beta R}(1)|\neq0$

$4-$ $\Delta_{\alpha\beta}=\Delta_{\beta\delta}=\Delta_{\alpha\delta}=\Delta_{\beta\gamma}=\Delta_{\alpha\gamma}=\Delta_{\gamma\delta}=0$ *et* $\Delta_{\beta s}\equiv\Delta_{\alpha s}\equiv\Delta_{\beta R}\equiv0$ *et* $|\Delta_{\delta s}(0)+\Delta_{\alpha R}(1)|\neq0$

$5-$ $\Delta_{\alpha\beta}=\Delta_{\alpha\delta}=\Delta_{\alpha\gamma}=\Delta_{\beta\delta}=\Delta_{\beta\gamma}=\Delta_{\gamma\delta}=0$ *et* $\Delta_{\beta s}\equiv\Delta_{\alpha s}\equiv\Delta_{\delta s}\equiv\Delta_{\alpha R}\equiv0$ *et*

$|\Delta_{\delta s}(0) - \Delta_{\delta R}(0) + \Delta_s(1,0)| \neq 0.$

$6 - \Delta_{\alpha\beta} = \Delta_{\alpha\delta} = \Delta_{\alpha\gamma} = \Delta_{\beta\delta} = \Delta_{\beta\gamma} = \Delta_{\gamma\delta} = 0$ *et* $\Delta_{\beta s} \equiv \Delta_{\alpha s} \equiv \Delta_{\delta s} \equiv \Delta_{\alpha R} \equiv \Delta_{\beta R} \equiv \Delta_{\gamma s} \equiv \Delta_{\delta R} \equiv \Delta_s \equiv 0$ *et* $|-\Delta_{\gamma R}(0) + \Delta_{Rs} + \Delta_{Rs}(1,0)| \neq 0$

$7 - \Delta_{\alpha\beta} = \Delta_{\alpha\delta} = \Delta_{\alpha\gamma} = \Delta_{\beta\delta} = \Delta_{\beta\gamma} = \Delta_{\gamma\delta} = 0$ *et* $\Delta_{\beta s} \equiv \Delta_{\alpha s} \equiv \Delta_{\delta s} \equiv \Delta_{\alpha R} \equiv \Delta_{\beta R} \equiv \Delta_{\gamma s} \equiv \Delta_{\delta R} \equiv \Delta_s \equiv \Delta_{\gamma R} \equiv \Delta_{Rs} \equiv 0$ *et* $|\Delta_R(0,1)| \neq 0$

Remarque 3.3.2 *les conditions aux limites sont faiblement régulières alors la décroissance de la résolvante est non maximale et du théorème* (2.3.4) *résulte que l'opérateur* L_∞ *est générateur d'un semi-groupe à singularité.*

Chapitre 4

Problème aux limites régulières pour équation différentielle du second ordre avec conditions aux limites non locales dans $\mathcal{L}^{\infty}(0,1)$

Ce chapitre est consecré à l'étude d'un classe de problèmes aux limites combinant des conditions aux limites non locales avec paramètre spectral avec d'autres integrales à poids, on montre la decroissance maximale de la résolvante et que l'opérateur en question génére un semi groupe analytique dans l'espace $\mathcal{L}^{\infty}(0,1)$.

Nous considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} L(u) = u'' \\ B_1(u) = (\lambda+\gamma)u(0) + \beta_1 u'(0) + \int\limits_0^1 (R_1(t)\,u(t) + S_1(t)\,u'(t))\,dt = 0 \\ B_2(u) = (\lambda+\delta)u(1) + \beta_2 u'(1) + \int\limits_0^1 (R_2(t)\,u(t) + S_2(t)\,u'(t))\,dt = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

où les fonctions R_i , $S_i \in C^1([0\ ,1]\,,\mathbb{C})$ $i=\overline{1,2}$, soit l'opérateur :

L_{∞} : $\mathcal{L}^{\infty}(0,1) \to \mathcal{L}^{\infty}(0,1)$. $u \to L_{\infty}(u) = u''$ de domaine :

$$D(L_{\infty}) = \left\{u \in W^{2.\infty}(0\ ,1)\,; B_i(u) = 0\ ,\ i=\overline{1,2}\right\}$$

4.1 Construction de la fonction de Green

Dans toute la suite on considère $\lambda \in \Sigma_\theta$ où

$$\Sigma_\theta = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \ , \ \ |\arg(\lambda)| \leq \theta \ , \ \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \right\}$$

Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} u'' - \lambda u = h(x) \\ B_1(u) = (\lambda+\gamma)u(0) + \beta_1 u'(0) + \int\limits_0^1 \left(R_1(t)\, u(t) + S_1(t)\, u'(t)\right) dt = 0 \\ B_2(u) = (\lambda+\delta)u(1) + \beta_2 u'(1) + \int\limits_0^1 \left(R_2(t)\, u(t) + S_2(t)\, u'(t)\right) dt = 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

On a : $G(x,s,\lambda)$ est solution du problème homogène. D'où $G(x,s,\lambda)$ se met sous la forme :

$$G(x,s,\lambda) = \begin{cases} a_1(s)\, e^{-\rho x} + a_2(s)\, e^{\rho x} & sur \ \ ]0\ ,s[\\ b_1(s)\, e^{-\rho x} + b_2(s)\, e^{\rho x} & sur \ \ ]s\ ,1[\end{cases} \tag{4.3}$$

D'après la condition 1 du théorème 2, on a :

$$-\left(a_1(s) - b_1(s)\right) e^{-\rho s} - \left(a_2(s) - b_2(s)\right) e^{\rho s} = 0 \tag{4.4}$$

D'après la condition 2 du même théorème , on a :

$$\left(a_1(s) - b_1(s)\right) \rho e^{-\rho s} - \left(a_2(s) - b_2(s)\right) \rho e^{\rho s} = 1 \tag{4.5}$$

Et d'après la condition 3, du théorème 2, on a

$$B_i(G) = 0 \qquad , \quad i = \overline{1\ ,2} \tag{4.6}$$

De (4.4), (4.5) , (4.6) on obtient le système :

$$\begin{cases} \left(a_1(s) - b_1(s)\right) \rho e^{-\rho s} - \left(a_2(s) - b_2(s)\right) \rho e^{\rho s} = 1 \\ -\left(a_1(s) - b_1(s)\right) e^{-\rho s} - \left(a_2(s) - b_2(s)\right) e^{\rho s} = 0 \\ B_1(G) = 0 \text{ et } B_2(G) = 0 \end{cases} \tag{4.7}$$

De (4.4) et (4.5) on a :

$$W = \begin{vmatrix} \rho e^{-\rho s} & -\rho e^{\rho s} \\ -e^{-\rho s} & -e^{\rho s} \end{vmatrix} = -2\rho$$

Ainsi :

$$a_1(s) - b_1(s) = \frac{-1}{2\rho}\begin{vmatrix} 1 & -\rho e^{\rho s} \\ 0 & -e^{\rho s} \end{vmatrix} = \frac{e^{\rho s}}{2\rho}$$

D'où :

$$a_1(s) = b_1(s) + \frac{e^{\rho s}}{2\rho} \tag{4.8}$$

Et

$$a_2(s) - b_2(s) = \frac{-1}{2\rho}\begin{vmatrix} \rho e^{-\rho s} & 1 \\ -e^{-\rho s} & 0 \end{vmatrix} = \frac{-e^{-\rho s}}{2\rho}$$

D'où

$$a_2(s) = b_2(s) - \frac{e^{-\rho s}}{2\rho} \tag{4.9}$$

D'après (4.6) on a :

$$\begin{aligned} &B_1(G) = (\lambda+\gamma)(a_1(s)+a_2(s)) + \beta_1 - \rho a_1(s) + \rho a_2(s) \\ &+\int_0^s [R_1(x)(a_1(s)e^{-\rho x} + a_2(s)e^{\rho x}) + S_1(x)(-\rho a_1(s)e^{-\rho x} + \rho a_2(s)e^{\rho x})]\,dx \\ &+\int_s^1 [R_1(x)(b_1(s)e^{-\rho x} + b_2(s)e^{\rho x}) + S_1(x)(-\rho b_1(s)e^{-\rho x} + \rho b_2(s)e^{\rho x})]\,dx = 0 \end{aligned}$$

Alors :

$$\left\{\begin{aligned} &B_1(G) = (\lambda+\gamma-\rho\beta_1)a_1(s) + (\lambda+\gamma+\rho\beta_1)a_2(s) \\ &+\int_0^s [(R_1(x)-\rho S_1(x))e^{-\rho x}a_1(s) + (R_1(x)+\rho S_1(x))e^{\rho x}a_2(x)]dx \\ &+\int_s^1 [(R_1(x)-\rho S_1(x))e^{-\rho x}b_1(s) + (R_1(x)+\rho S_1(x))e^{\rho x}b_2(x)]\,dx = 0 \\ &B_2(G) = (\lambda+\delta-\rho\beta_2)e^{-\rho}b_1(s) + (\lambda+\delta+\rho\beta_2)e^{\rho}b_2(s) \\ &+\int_0^s [(R_2(x)-\rho S_2(x))e^{-\rho x}a_1(s) + (R_2(x)+\rho S_2(x))e^{\rho x}a_2(x)]\,dx \\ &+\int_s^1 [(R_2(x)-\rho S_2(x))e^{-\rho x}b_1(s) + (R_2(x)+\rho S_2(x))e^{\rho x}b_2(x)]\,dx = 0 \end{aligned}\right. \tag{4.10}$$

En remplaçant (4.8) et (4.9) dans (4.10) on obtient :

$$\begin{aligned} &B_1(G) = [\lambda+\gamma-\rho\beta_1 + \int_0^1 [(R_1(x)-\rho S_1(x))e^{-\rho x}]\,dx]b_1(s) + [\lambda+\gamma+\rho\beta_1 \\ &+\int_0^1 [(R_1(x)+\rho S_1(x))e^{\rho x}]\,dx]b_2(s) + \frac{1}{2\rho}[(\lambda+\gamma-\rho\beta_1)e^{\rho s} - (\lambda+\gamma+\rho\beta_1) \\ &e^{-\rho s}] + \int_0^s [(R_1(x)-\rho S_1(x))\frac{e^{\rho(s-x)}}{2\rho} - (R_1(x)+\rho S_1(x))\frac{e^{\rho(x-s)}}{2\rho}]dx = 0 \\ &B_2(G) = [(\lambda+\delta-\rho\beta_2)e^{-\rho} + \int_0^1 [(R_2(x)-\rho S_2(x))e^{-\rho x}]\,dx]b_1(s) + [(\lambda+\delta \end{aligned}$$

$$+\rho\beta_2)e^{\rho}+\int_0^1\left[(R_2(x)+\rho S_2(x))\,e^{\rho x}\right]dx]b_2(s)+\int_0^s[(R_2(x)-\rho S_2(x))\,\frac{e^{\rho(s-x)}}{2\rho}$$

$$-(R_2(x)+\rho S_2(x))\,\frac{e^{\rho(x-s)}}{2\rho}]dx=0$$

Finalement on a :

$$\begin{cases} B_1(G)=[\lambda+\gamma-\rho\beta_1+\int_0^1(R_1(x)-\rho S_1(x))\,e^{-\rho x}dx]b_1(s)+ \\ \quad +[\lambda+\gamma+\rho\beta_1+\int_0^1(R_1(x)+\rho S_1(x))\,e^{\rho x}dx]b_2(s)+ \\ \quad +\frac{1}{2\rho}\left[(\lambda+\gamma-\rho\beta_1)e^{\rho s}-(\lambda+\gamma+\rho\beta_1)\,e^{-\rho s}\right] \\ +\frac{1}{2\rho}\int_0^s\left[(R_1(x)-\rho S_1(x))\,e^{\rho(s-x)}-(R_1(x)+\rho S_1(x))\,e^{\rho(x-s)}\right]dx=0 \\ B_2(G)=[(\lambda+\delta-\rho\beta_2)e^{-\rho}+\int_0^1(R_2(x)-\rho S_2(x))\,e^{-\rho x}dx]b_1(s)+ \\ \quad +[(\lambda+\delta+\rho\beta_2)e^{\rho}+\int_0^1(R_2(x)+\rho S_2(x))\,e^{\rho x}dx]b_2(s)+ \\ +\frac{1}{2\rho}\int_0^s\left[(R_2(x)-\rho S_2(x))\,e^{\rho(s-x)}-(R_2(x)+\rho S_2(x))\,e^{\rho(x-s)}\right]dx=0 \end{cases}$$

C'est-à-dire :

$$\begin{cases} B_1(G)=B_1(u_1)\,b_1(s)+B_1(u_2)\,b_2(s)+\frac{1}{2\rho}\{[(\lambda+\gamma-\rho\beta_1)\,e^{\rho s}-(\lambda+\gamma \\ +\rho\beta_1)e^{-\rho s}]+\int_0^s\left[(R_1(x)-\rho S_1(x))\,e^{\rho(s-x)}-(R_1(x)+\rho S_1(x))\,e^{\rho(x-s)}\right]dx\}=0 \\ B_2(G)=B_2(u_1)\,b_1(s)+B_2(u_2)\,b_2(s)+\frac{1}{2\rho}\int_0^s[(R_2(x)-\rho S_2(x))e^{\rho(s-x)} \\ \quad -(R_2(x)+\rho S_2(x))\,e^{\rho(x-s)}]dx=0 \end{cases}$$

où :

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} B_1(u_1) & B_1(u_2) \\ B_2(u_1) & B_2(u_2) \end{vmatrix}\neq 0 \tag{4.11}$$

Alors ce système admet une solution $(b_1(s)\ \ ,b_2(s))$:

$$b_1(s)=\frac{1}{2\rho\Delta(\lambda)}\{B_2(u_2)\left[((\lambda+\gamma-\rho\beta_1)\,e^{-\rho s}-(\lambda+\gamma+\rho\beta_1)\,e^{\rho s}\right)$$

$$-\int_0^s\left[(R_1(x)-\rho S_1(x))\,e^{\rho(s-x)}-(R_1(x)+\rho S_1(x))\,e^{\rho(x-s)}\right]dx$$

$$-B_1(u_2)\,[\int_0^s\left[(-R_2(x)+\rho S_2(x))\,e^{\rho(s-x)}+(R_2(x)+\rho S_2(x))\,e^{\rho(x-s)}\right]dx\}$$

$$\begin{cases} b_1(s) = \dfrac{1}{2\rho\Delta(\lambda)}\{B_2(u_2)\left[(\lambda+\gamma+\rho\beta_1)e^{-\rho s} - (\lambda+\gamma-\rho\beta_1)e^{\rho s} + \right. \\ \quad -\int\limits_0^s \left[(R_1(x) - \rho S_1(x))e^{\rho(s-x)} - (R_1(x)+\rho S_1(x))e^{\rho(x-s)}\right]dx \\ -B_1(u_2)\left[\int\limits_0^s \left[(-R_2(x)+\rho S_2(x))e^{\rho(s-x)} + (R_2(x)+\rho S_2(x))e^{\rho(x-s)}\right]dx\right\} \\ \qquad\qquad \text{et} \\ b_2(s) = \dfrac{1}{\Delta(\lambda)2\rho}\{B_2(u_1)\left[(\lambda+\gamma-\rho\beta_1)e^{\rho s} - (\lambda-\gamma+\rho\beta_1)e^{-\rho s}\right] \\ \quad +\int\limits_0^s \left[(R_1(x)-\rho S_1(x))e^{\rho(s-x)} - (R_1(x)+\rho S_1(x))e^{\rho(x-s)}\right]dx \\ -B_1(u_1)\int\limits_0^s \left[(R_2(x)-\rho S_2(x))e^{\rho(s-x)} - (R_2(x)+\rho S_2(x))e^{\rho(x-s)}\right]dx\} \end{cases}$$

Ainsi d'aprés la formule (4.3) , la fonction de Green s'écrit si $x > s$:

$$\begin{aligned} G(x\ ,s\ ,\lambda) &= \frac{1}{2\rho\Delta(\lambda)}[e^{\rho(x+s)}\{((\lambda+\gamma)(\lambda+\delta) - \rho((\lambda+\gamma)\beta_2 + \beta_1(\lambda+\delta)) \\ &+\rho^2\beta_1\beta_2)e^{-\rho} - \int\limits_0^s (-(\lambda+\delta)R_1(t) - \rho(-\beta_2 R_1(t) - (\lambda+\delta)S_1(t)) + \rho^2\beta_2 S_1(t)) \\ &e^{-\rho(t+1)}dt + \int\limits_s^1 ((\lambda+\gamma)R_2(t) - \rho((\lambda+\gamma)S_2(t) + \beta_1 R_2(t)) + \rho^2\beta_1 S_2(t))e^{-\rho t}dt \\ &+\int\limits_s^1\int\limits_0^s (\Delta_R(\varepsilon\ ,t) + \rho(\Delta_{RS}(t\ ,\varepsilon) - \Delta_{RS}(\varepsilon\ ,t)) + \rho^2\Delta_S(\varepsilon\ ,t))e^{-\rho(\varepsilon+t)}d\varepsilon dt\} \\ &+e^{-\rho(x+s)}\{(\lambda+\gamma)(\lambda+\delta) + \rho((\lambda+\gamma)\beta_2 + \beta_1(\lambda+\delta)) + \rho^2\beta_1\beta_2)e^{\rho} \\ &+\int\limits_0^s ((\lambda+\delta)R_1(t) + \rho(\beta_2 R_1(t) + (\lambda+\delta)S_1(t)) + \rho^2\beta_2 S_1(t))e^{\rho(t+1)}dt \\ &+\int\limits_s^1 ((\lambda+\gamma)R_2(t) + \rho(\beta_1 R_2(t) + (\lambda+\gamma)S_2(t)) + \rho^2\beta_1 S_2(t))e^{\rho t}dt \\ &+\int\limits_s^1\int\limits_0^s (\Delta_R(\varepsilon\ ,t) + \rho(\Delta_{RS}(\varepsilon\ ,t) - \Delta_{RS}(t\ ,\varepsilon)) + \rho^2\Delta_S(\varepsilon\ ,t))e^{\rho(\varepsilon+t)}d\varepsilon dt\} \\ &+e^{\rho(x-s)}\{(-(\lambda+\gamma)(\lambda+\delta) + \rho((\lambda+\gamma)\beta_2 - \beta_1(\lambda+\delta)) + \rho^2\beta_1\beta_2)e^{-\rho} \\ &+\int\limits_0^s ((\lambda+\gamma)R_2(t) + \rho((\lambda+\gamma)S_2(t) + \beta_1 R_2(t)) - \rho^2\beta_1 S_2(t))e^{\rho t}dt \\ &+\int\limits_0^s (-(\lambda+\delta)R_1(t) + \rho(-(\lambda+\delta)S_1(t) + \beta_2 R_1(t)) + \rho^2\beta_2 S_1(t))e^{\rho(t-1)}dt \\ &+\int\limits_s^1 ((\lambda+\gamma)R_2(t) + \rho(\beta_1 R_2(t) - (\lambda+\gamma)S_2(t)) - \rho^2\beta_1 S_2(t))e^{-\rho t}dt \\ &+\int\limits_0^1\int\limits_0^s (\Delta_R(t\ ,\varepsilon) + \rho(\Delta_{RS}(\varepsilon\ ,t) - \Delta_{RS}(t\ ,\varepsilon)) - \rho^2\Delta_S(t\ ,\varepsilon))e^{\rho(\varepsilon-t)}d\varepsilon dt\} \\ &+e^{\rho(s-x)}\{(-(\lambda+\gamma)(\lambda+\delta) + \rho(\beta_1(\lambda+\delta) - (\lambda+\gamma)\beta_2) + \rho^2\beta_1\beta_2)e^{\rho} \\ &+\int\limits_0^s ((\lambda+\gamma)R_2(t) + \rho(\beta_1 R_2(t) - (\lambda+\gamma)S_2(t)) - \rho^2\beta_1 S_2(t))e^{-\rho t}dt \\ &+\int\limits_0^s (-(\lambda+\delta)R_1(t) + \rho(-\beta_2 R_1(t) + (\lambda+\delta)S_1(t)) + \rho^2\beta_2 S_1(t))e^{\rho(1-t)}dt \end{aligned}$$

$-\int\limits_s^1 ((\lambda+\gamma)R_2(t)+\rho((\lambda+\gamma)S_2(t)-\beta_1 R_2(t))-\rho^2\beta_1 S_2(t))\, e^{\rho t}dt$

$+\int\limits_0^1\int\limits_0^s(\Delta_R(t\ ,\varepsilon)-\rho(\Delta_{RS}(\varepsilon,t)+\Delta_{RS}(t\ ,\varepsilon))-\rho^2\Delta_S(t\ ,\varepsilon))e^{\rho(t-\varepsilon)}d\varepsilon dt\}]$

où :$\lambda=\rho^2$, $\mathrm{Re}(\rho)>0$. Alors ;

$G(x,s,\lambda)=\dfrac{1}{2\rho\Delta(\lambda)}[e^{\rho(x+s)}\{(\rho^4-\rho^3(\beta_1+\beta_2)+\rho^2(\gamma+\delta+\beta_1\beta_2)$

$-\rho(\gamma\beta_2+\delta\beta_1)+\gamma\delta)e^{-\rho}+\int\limits_0^s(-\rho^3 S_1(t)+\rho^2(R_1(t)+\beta_2 S_1(t))$

$-\rho(\beta_2 R_1(t)+\delta S_1(t))+\delta R_1(t))e^{-\rho(t+1)}dt$

$+\int\limits_s^1(-\rho^3 S_2(t)+\rho^2(R_2(t)+\beta_1 S_2(t))-\rho(\gamma S_2(t)+\beta_1 R_2(t))+\gamma R_2(t))\, e^{-\rho t}dt$

$+\int\limits_s^1\int\limits_0^s(\Delta_R(\varepsilon,t)+(\rho\Delta_{RS}(t\ ,\varepsilon)-\Delta_{RS}(\varepsilon,t))+\rho^2\Delta_S(\varepsilon,t))e^{-\rho(\varepsilon+t)}d\varepsilon dt\}$

$+e^{-\rho(x+s)}\{(\rho^4+\rho^3(\beta_1+\beta_2)+\rho^2(\gamma+\delta+\beta_1\beta_2)+\rho(\gamma\beta_2+\delta\beta_1)+\gamma\delta)\, e^{\rho}$

$+\int\limits_0^s(\rho^3 S_1(t)+\rho^2(R_1(t)+\beta_2 S_1(t))+\rho(\beta_2 R_1(t)+\delta S_1(t))+\delta R_1(t))\, e^{\rho(t+1)}dt$

$+\int\limits_s^1(\rho^3 S_2(t)+\rho^2(R_2(t)+\beta_1 S_2(t))+\rho(\beta_1 R_2(t)+\gamma S_2(t))+\gamma R_2(t))\, e^{\rho t}dt$

$+\int\limits_s^1\int\limits_0^s(\Delta_R(\varepsilon,t)+\rho(\Delta_{RS}(\varepsilon,t)-\Delta_{RS}(t,\varepsilon))+\rho^2\Delta_S(\varepsilon,t))\, e^{\rho(\varepsilon+t)}d\varepsilon dt\}$

$+e^{\rho(x-s)}\{(-\rho^4+\rho^3(\beta_2-\beta_1)-\rho^2(\gamma+\delta-\beta_1\beta_2)+\rho(\gamma\beta_2-\delta\beta_1)-\gamma\delta)\, e^{-\rho}$

$+\int\limits_0^s(\rho^3 S_2(t)+\rho^2(R_2(t)-\beta_1 S_2(t))+\rho(\gamma S_2(t)+\beta_1 R_2(t))+\gamma R_2(t))\, e^{\rho t}dt$

$+\int\limits_0^s(-\rho^3 S_1(t)-\rho^2(R_1(t)-\beta_2 S_1(t))-\rho(\beta_2 R_1(t)-\delta S_1(t))-\delta R_1(t))\, e^{\rho(t-1)}dt$

$+\int\limits_0^1(-\rho^3 S_2(t)+\rho^2(R_2(t)-\beta_1 S_2(t))+\rho(\beta_1 R_2(t)-\gamma S_2(t))+\gamma R_2(t))\, e^{-\rho t}dt$

$+\int\limits_0^1\int\limits_0^s(\Delta_R(t,\varepsilon)+\rho(\Delta_{RS}(\varepsilon,t)-\Delta_{RS}(t,\varepsilon))-\rho^2\Delta_S(t,\varepsilon))\, e^{\rho(\varepsilon-t)}d\varepsilon dt$

$+e^{\rho(S-x)}\{(-\rho^4+\rho^3(\beta_1-\beta_2)-\rho^2(\gamma+\delta-\beta_1\beta_2)+\rho(\delta\beta_1-\gamma\beta_2)-\gamma\delta)\, e^{\rho}$

$+\int\limits_0^s(-\rho^3 S_2(t)+\rho^2(R_2(t)-\beta_1 S_2(t))+\rho(\beta_1 R_2(t)-\gamma S_2(t))+\gamma R_2(t))\, e^{-\rho t}dt$

$+\int\limits_0^s(\rho^3 S_1(t)+\rho^2(-R_1(t)+\beta_2 S_1(t))+\rho(-\beta_2 R_1(t)+\delta S_1(t))-\delta R_1(t))\, e^{\rho(1-t)}dt$

$-\int\limits_0^1(\rho^3 S_2(t)+\rho^2(R_2(t)-\beta_1 S_2(t))+\rho(-\beta_1 R_2(t)+\gamma S_2(t))+\gamma R_2(t))\, e^{\rho t}dt$

$+\int\limits_0^1\int\limits_0^s(\Delta_R(t\ ,\varepsilon)-(\rho\Delta_{RS}(\varepsilon,t)+\Delta_{RS}(t\ ,\varepsilon))-\rho^2\Delta_S(t\ ,\varepsilon))e^{\rho(t-\varepsilon)}d\varepsilon dt\}]$

Et si $x<s$

$$G(x\ ,s\ ,\lambda)=b_1(s)\, e^{-\rho x}+b_2(s)\, e^{\rho x}+\frac{1}{2\rho}(e^{\rho(s-x)}-e^{\rho(x-s)})$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
G(x,s,\lambda) = \frac{1}{2\rho\Delta(\lambda)}[&e^{\rho(x+s)}\{(\rho^4 - \rho^3(\beta_1+\beta_2) + \rho^2(\gamma+\delta+\beta_1\beta_2) \\
&-\rho(\gamma\beta_2+\delta\beta_1)+\gamma\delta)e^{-\rho} \\
&+\int_0^s (-\rho^3 S_1(t) + \rho^2(R_1(t)+\beta_2 S_1(t)) - \rho(\beta_2 R_1(t)+\delta S_1(t)) + \delta R_1(t))\, e^{-\rho(t+1)}dt \\
&+\int_s^1 (-\rho^3 S_2(t) + \rho^2(R_2(t)+\beta_1 S_2(t)) - \rho(\gamma S_2(t)+\beta_1 R_2(t)) + \gamma R_2(t))\, e^{-\rho t}dt \\
&+\int_s^1\int_0^s (\Delta_R(\varepsilon,t) + \rho(\Delta_{RS}(t,\varepsilon) - \Delta_{RS}(\varepsilon,t)) + \rho^2\Delta_S(\varepsilon,t))\, e^{-\rho(\varepsilon+t)}d\varepsilon dt\} \\
&+e^{-\rho(x+s)}\{(\rho^4 + \rho^3(\beta_1+\beta_2) + \rho^2(\gamma+\delta+\beta_1\beta_2) + \rho(\gamma\beta_2+\delta\beta_1)+\gamma\delta)\, e^{\rho} \\
&+\int_0^s (\rho^3 S_1(t) + \rho^2(R_1(t)+\beta_2 S_1(t)) + \rho(\beta_2 R_1(t)+\delta S_1(t)) + \delta R_1(t))\, e^{\rho(t+1)}dt \\
&+\int_s^1 (\rho^3 S_2(t) + \rho^2(R_2(t)+\beta_1 S_2(t)) + \rho(\beta_1 R_2(t)+\gamma S_2(t)) + \gamma R_2(t))\, e^{\rho t}dt \\
&+\int_s^1\int_0^s (\Delta_R(\varepsilon,t) + \rho(\Delta_{RS}(\varepsilon,t) - \Delta_{RS}(t,\varepsilon)) + \rho^2\Delta_S(\varepsilon,t))\, e^{\rho(\varepsilon+t)}d\varepsilon dt\} \\
&+e^{\rho(x-s)}\{(-\rho^4 + \rho^3(\beta_1-\beta_2) + \rho^2(-\gamma-\delta+\beta_1\beta_2) + \rho(\delta\beta_1-\gamma\beta_2)+\gamma\delta) \\
&e^{\rho} - 2\rho^3\beta_2 - 2\rho\gamma\beta_2 \\
&-\int_s^1 (\rho^3 S_2(t) - \rho^2(R_2(t)-\beta_1 S_2(t)) + \rho(\gamma S_2(t)-\beta_1 R_2(t)) + \gamma R_2(t))\, e^{\rho t}dt \\
&-\int_s^1 (-\rho^3 S_1(t) - \rho^2(R_1(t)-\beta_2 S_1(t)) - \rho(\delta S_1(t)-\beta_2 R_1(t)) - \delta R_1(t))\, e^{\rho(t-1)}dt \\
&+\int_0^1 (-\rho^3 S_1(t) - \rho^2(R_1(t)-\beta_2 S_1(t)) + \rho(-\beta_2 R_1(t)+\delta S_1(t)) - \delta R_1(t))\, e^{\rho(1-t)}dt \\
&+\int_0^1\int_s^1 (\Delta_R(\varepsilon,t) - \rho(\Delta_{RS}(t,\varepsilon) + \Delta_{RS}(\varepsilon,t)) - \rho^2\Delta_S(\varepsilon,t))\, e^{\rho(\varepsilon+t)}d\varepsilon dt \\
&+e^{\rho(s-x)}\{(-\rho^4 + \rho^3(\beta_2-\beta_1) + \rho^2(-\gamma-\delta+\beta_1\beta_2) + \rho(\gamma\beta_2-\delta\beta_1)-\gamma\delta)\, e^{-\rho} \\
&-\int_s^1 (-\rho^3 S_2(t) + \rho^2(R_2(t)-\beta_1 S_2(t)) + \rho(\beta_1 R_2(t)-\gamma S_2(t)) + \gamma R_2(t))\, e^{-\rho t}dt \\
&-\int_s^1 (\rho^3 S_1(t) + \rho^2(-R_1(t)+\beta_2 S_1(t)) + \rho(-\beta_2 R_1(t)+\delta S_1(t)) - \delta R_1(t))\, e^{\rho(1-t)}dt \\
&+\int_0^1(-\rho^3 S_1(t) + \rho^2(-R_1(t)+\beta_2 S_1(t)) + \rho(-\delta S_1(t)+\beta_2 R_1(t)) - \delta R_1(t)) e^{\rho(t-1)}dt \\
&+\int_0^1\int_s^1 (\Delta_R(\varepsilon,t) + \rho(\Delta_{RS}(t,\varepsilon) + \Delta_{RS}(\varepsilon,t)) - \rho^2\Delta_S(\varepsilon,t))\, e^{\rho(t-\varepsilon)}d\varepsilon dt\}]
\end{aligned}$$

D'après la théorème (2-1-1) on a :

$$G(x\ ,s\ ,\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)}[\varphi(x\ ,s\ ,\lambda) + \varphi_i(x\ ,s,\lambda)]$$

Où :

$$\begin{cases} i=1\ ; x>s \\ i=2\ ; x<s \end{cases}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
\varphi(x\ ,s\ ,\lambda) = \frac{1}{2\rho}[&e^{\rho(x+s)}\{(\rho^4-\rho^3(\beta_1+\beta_2)+\rho^2(\gamma+\delta+\beta_1\beta_2)-\rho(\gamma\beta_2+\delta\beta_1)+\gamma\delta) \\
&e^{-\rho}+\int_0^s(-\rho^3S_1(t)+\rho^2(R_1(t)+\beta_2S_1(t))-\rho(\beta_2R_1(t)+\delta S_1(t))+\delta R_1(t))\,e^{-\rho(t+1)}dt \\
&+\int_s^1(-\rho^3S_2(t)+\rho^2(R_2(t)+\beta_1S_2(t))-\rho(\gamma S_2(t)+\beta_1R_2(t))+\gamma R_2(t))\,e^{-\rho t}dt \\
&+\int_s^1\int_0^s(\Delta_R(\varepsilon\ ,t)+\rho(\Delta_{RS}(t\ ,\varepsilon)-\Delta_{RS}(\varepsilon\ ,t)+\rho^2\Delta_S(\varepsilon\ ,t))e^{-\rho(\varepsilon+t)}d\varepsilon dt\} \\
&+e^{-\rho(x+s)}\{(\rho^4+\rho^3(\beta_1+\beta_2)+\rho^2(\gamma+\delta+\beta_1\beta_2)+\rho(\gamma\beta_2+\delta\beta_1)+\gamma\delta)\,e^{\rho} \\
&+\int_0^s(\rho^3S_1(t)+\rho^2(R_1(t)+\beta_2S_1(t))+\rho(\beta_2R_1(t)+\delta S_1(t))+\delta R_1(t))\,e^{\rho(t+1)}dt \\
&+\int_s^1(\rho^3S_2(t)+\rho^2(R_2(t)+\beta_1S_2(t))+\rho(\beta_1R_2(t)+\gamma S_2(t))+\gamma R_2(t))\,e^{\rho t}dt \\
&+\int_s^1\int_0^s(\Delta_R(\varepsilon,t)+\rho(\Delta_{RS}(\varepsilon,t)-\Delta_{RS}(t\ ,\varepsilon))+\rho^2\Delta_S(\varepsilon,t))e^{\rho(\varepsilon+t)}d\varepsilon dt\}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Ainsi que :

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x\ ,s\ ,\lambda) = \frac{1}{2\rho}[&e^{\rho(x-s)}\{(-\rho^4+\rho^3(\beta_2-\beta_1)-\rho^2(\gamma+\delta-\beta_1\beta_2)+ \\
&\rho(\gamma\beta_2-\delta\beta_1)-\gamma\delta)e^{-\rho} \\
&+\int_0^s(\rho^3S_2(t)+\rho^2(R_2(t)-\beta_1S_2(t))+\rho(\gamma S_2(t)+\beta_1R_2(t))+\gamma R_2(t))\,e^{\rho t}dt \\
&+\int_0^s(-\rho^3S_1(t)-\rho^2(R_1(t)-\beta_2S_1(t))-\rho(\delta S_1(t)-\beta_2R_1(t))-\delta R_1(t))\,e^{\rho(t-1)}dt \\
&+\int_0^1(-\rho^3S_2(t)+\rho^2(R_2(t)-\beta_1S_2(t))+\rho(\beta_1R_2(t)-\gamma S_2(t))+\gamma R_2(t))\,e^{-\rho t}dt \\
&+\int_0^1\int_0^s(\Delta_R(t\ ,\varepsilon)+\rho(\Delta_{RS}(\varepsilon\ ,t)-\Delta_{RS}(t\ ,\varepsilon))-\rho^2\Delta_S(t\ ,\varepsilon))e^{\rho(\varepsilon-t)}d\varepsilon dt \\
&+e^{\rho(s-x)}\{(-\rho^4+\rho^3(\beta_1-\beta_2)-\rho^2(\gamma+\delta-\beta_1\beta_2)+\rho(\delta\beta_1-\gamma\beta_2)-\gamma\delta)\,e^{\rho} \\
&+\int_0^s(-\rho^3S_2(t)+\rho^2(R_2(t)-\beta_1S_2(t))+\rho(\beta_1R_2(t)-\gamma S_2(t))+\gamma R_2(t))\,e^{-\rho t}dt \\
&+\int_0^s(\rho^3S_1(t)+\rho^2(-R_1(t)+\beta_2S_1(t))+\rho(-\beta_2R_1(t)+\delta S_1(t))-\delta R_1(t))\,e^{\rho(1-t)}dt \\
&-\int_0^1(\rho^3S_2(t)+\rho^2(R_2(t)-\beta_1S_2(t))+\rho(-\beta_1R_2(t)+\gamma S_2(t))+\gamma R_2(t))\,e^{\rho t}dt
\end{aligned}$$

$$+\int_0^1\int_0^s(\Delta_R(t\ ,\varepsilon)-\rho(\Delta_{RS}(\varepsilon,t)+\Delta_{RS}(t\ ,\varepsilon))-\rho^2\Delta_S(t\ ,\varepsilon))e^{\rho(t-\varepsilon)}d\varepsilon dt\}] \tag{4.13}$$

Et

$$\begin{aligned}
\varphi_2(x\ ,s\ ,\lambda) &= \frac{1}{2\rho}[e^{\rho(x-s)}\{(-\rho^4+\rho^3(\beta_1-\beta_2)+\rho^2(-\gamma-\delta+\beta_1\beta_2)\\
&+\rho(\delta\beta_1-\gamma\beta_2)-\gamma\delta)e^{\rho}-2\rho^3\beta_2-2\rho\gamma\beta_2\\
&-\int_s^1(\rho^3S_2(t)-\rho^2(R_2(t)-\beta_1S_2(t))+\rho(\gamma S_2(t)-\beta_1R_2(t))+\gamma R_2(t))\,e^{\rho t}dt\\
&-\int_s^1(-\rho^3S_1(t)-\rho^2(R_1(t)-\beta_2S_1(t))-\rho(\delta S_1(t)-\beta_2R_1(t))-\delta R_1(t))\,e^{\rho(t-1)}dt\\
&+\int_0^1(\rho^3S_1(t)-\rho^2(R_1(t)-\beta_2S_1(t))+\rho(-\beta_2R_1(t)+\delta S_1(t))-\delta R_1(t))\,e^{\rho(1-t)}dt\\
&+\int_0^1\int_s^1(\Delta_R(\varepsilon\ ,t)-\rho(\Delta_{RS}(t\ ,\varepsilon)+\Delta_{RS}(\varepsilon,t))-\rho^2\Delta_S(\varepsilon,t))e^{\rho(\varepsilon+t)}d\varepsilon dt\}\\
&+e^{\rho(s-x)}\{(-\rho^4+\rho^3(\beta_2-\beta_1)+\rho^2(-\gamma-\delta+\beta_1\beta_2)+\rho(\gamma\beta_2-\delta\beta_1)-\gamma\delta)\,e^{-\rho}\\
&-\int_s^1(-\rho^3S_2(t)+\rho^2(R_2(t)-\beta_1S_2(t))+\rho(\beta_1R_2(t)-\gamma S_2(t))+\gamma R_2(t))\,e^{-\rho t}dt\\
&-\int_s^1(\rho^3S_1(t)+\rho^2(-R_1(t)+\beta_2S_1(t))+\rho(-\beta_2R_1(t)+\delta S_1(t))-\delta R_1(t))\,e^{\rho(1-t)}dt\\
&+\int_0^1(-\rho^3S_1(t)+\rho^2(-R_1(t)+\beta_2S_1(t))+\rho(-\delta S_1(t)+\beta_2R_1(t))-\delta R_1(t))e^{\rho(t-1)}dt\\
&+\int_0^1\int_s^1(\Delta_R(\varepsilon,t)+\rho(\Delta_{RS}(t\ ,\varepsilon)+\Delta_{RS}(\varepsilon,t))-\rho^2\Delta_S(\varepsilon,t))e^{\rho(t-\varepsilon)}d\varepsilon dt\}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

D'après (3.15) on a :

$$\|R(\lambda\ ,L_\infty)h\|_{L^\infty(0\ ,1)}\leq\frac{1}{|\triangle\ (\lambda)|}Sup_{0\leq x\leq 1}\int_0^1|N(x\ ,s\ ,\lambda)|\ \ |h(s)|\,ds \tag{4.15}$$

D'autre part de (4.12) on a :

$$\begin{aligned}
|\varphi(x\ ,s\ ,\lambda)| &\leq \frac{1}{2|\rho|}e^{x\operatorname{Re}(\rho)}[\{(|\rho|^4+|\rho|^3|\beta_1+\beta_2|+|\rho|^2|\gamma+\delta+\beta_1\beta_2|+|\rho|\\
&|\gamma\beta_2+\delta\beta_1|+|\gamma\delta|)e^{(s-1)\operatorname{Re}(\rho)}+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(|\rho|^3\|S_1(t)\|+|\rho|^2(\|R_1(t)\|+|\beta_2|\|S_1(t)\|)\\
&+|\rho|(|\beta_2|\ \ \|R_1(t)\|+|\delta|\ \|S_1(t)\|)+|\delta|\ \|R_1(t)\|)(e^{(s-1)\operatorname{Re}(\rho)}-e^{-\operatorname{Re}(\rho)})\\
&+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(|\rho|^3\|S_2(t)\|+|\rho|^2(\|R_2(t)\|+|\beta_1|\ \|S_2(t)\|)+|\rho|(|\gamma|\ \|S_2(t)\|\\
&+|\beta_1|\ \|R_2(t)\|)+|\gamma|\,\|R_2(t)\|)(1-e^{(s-1)\operatorname{Re}(\rho)})+\frac{1}{(\operatorname{Re}(\rho))^2}(\|\Delta_R\|+2|\rho|\,\|\Delta_{RS}\|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+|\rho|^2\|\Delta_S\|)(e^{s\operatorname{Re}(\rho)}-1)(e^{-s\operatorname{Re}(\rho)}-e^{-\operatorname{Re}(\rho)})\}\\
&+\frac{1}{2|\rho|}e^{-x\operatorname{Re}(\rho)}\{(|\rho|^4+|\rho|^3|\beta_1+\beta_2|+|\rho|^2|\gamma+\delta+\beta_1\beta_2|+|\rho|\,|\gamma\beta_2+\delta\beta_1|+|\gamma\delta|)\\
&e^{(1-s)\operatorname{Re}(\rho)}+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(|\rho|^3\|S_1(t)\|+|\rho|^2(\|R_1(t)\|+|\beta_2|\,\|S_1(t)\|)+|\rho|(|\beta_2|\,\|R_1(t)\|\\
&+|\delta|\,\|S_1(t)\|)+|\delta|\,\|R_1(t)\|)(e^{\operatorname{Re}(\rho)}-e^{(1-s)\operatorname{Re}(\rho)})\\
&+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(|\rho|^3\|S_2(t)\|+|\rho|^2(\|R_2(t)\|+|\beta_1|\,\|S_2(t)\|)+|\rho|(|\beta_1|\,\|R_2(t)\|\\
&+|\gamma|\,\|S_2(t)\|)+|\gamma|\,\|R_2(t)\|)(e^{(1-s)\operatorname{Re}(\rho)}-1)\\
&+\frac{1}{(\operatorname{Re}(\rho))^2}(\|\Delta_R\|+2|\rho|\,\|\Delta_{RS}\|+|\rho|^2\|\Delta_S\|)(e^{\operatorname{Re}(\rho)}-e^{s\operatorname{Re}(\rho)})(1-e^{-s\operatorname{Re}(\rho)})\}
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

Et d'après (4.13) on a :

$$
\begin{aligned}
&|\varphi_1(x\ ,s\ ,\lambda)|\leq\frac{1}{2\rho}e^{-x\operatorname{Re}(\rho)}\{(|\rho|^4+|\rho|^3|\beta_1-\beta_2|+|\rho|^2|\gamma+\delta-\beta_1\beta_2|\\
&+|\rho|\,|\delta\beta_1-\gamma\beta_2|+|\gamma\delta|)e^{(s+1)\operatorname{Re}(\rho)}+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(|\rho|^3\|S_2(t)\|+|\rho|^2(\|R_2(t)\|\\
&+|\beta_1|\,\|S_2(t)\|)+|\rho|(|\beta_1|\,\|R_2(t)\|+|\gamma|\,\|S_2(t)\|)+|\gamma|\,\|R_2(t)\|)\\
&(e^{(s+1)\operatorname{Re}(\rho)}-1)+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(|\rho|^3\|S_1(t)\|+|\rho|^2(\|R_1(t)\|+|\beta_2|\,\|S_1(t)\|)\\
&+|\rho|(|\beta_2|\,\|R_1(t)\|+|\delta|\,\|S_1(t)\|)+|\delta|\,\|R_1(t)\|)(e^{(s+1)\operatorname{Re}(\rho)}-e^{s\operatorname{Re}(\rho)})\\
&+\frac{1}{(\operatorname{Re}(\rho))^2}(\|\Delta_R\|+2|\rho|\,\|\Delta_{RS}\|+|\rho|^2\|\Delta_S\|)(e^{\operatorname{Re}(\rho)}-1)(e^{s\operatorname{Re}(\rho)}-1)\}\\
&+\frac{1}{2\rho}e^{x\operatorname{Re}(\rho)}\{(|\rho|^4+|\rho|^3|\beta_2-\beta_1|+|\rho|^2|\gamma+\delta-\beta_1\beta_2|+|\rho|\,|\gamma\beta_2-\delta\beta_1|\\
&+|\gamma\delta|)e^{-(s+1)\operatorname{Re}(\rho)}+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(|\rho|^3\|S_2(t)\|+|\rho|^2(\|R_2(t)\|+|\beta_1|\,\|S_2(t)\|)\\
&+|\rho|(|\gamma|\,\|S_2(t)\|+|\beta_1|\,\|R_2(t)\|)+|\gamma|\,\|R_2(t)\|)(1-e^{-(s+1)\operatorname{Re}(\rho)})\\
&+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(|\rho|^3\|S_1(t)\|+|\rho|^2(\|R_1(t)\|+|\beta_2|\,\|S_1(t)\|)+|\rho|(|\delta|\,\|S_1(t)\|\\
&+|\beta_2|\,\|R_1(t)\|)+|\delta|\,\|R_1(t)\|(e^{-\operatorname{Re}(\rho)}-e^{-(s-1)\operatorname{Re}(\rho)})\\
&+\frac{1}{(\operatorname{Re}(\rho))^2}(\|\Delta_R\|+2|\rho|\,\|\Delta_{RS}\|+|\rho|^2\|\Delta_S\|)(1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)})(1-e^{-s\operatorname{Re}(\rho)})\}
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

Et d'après (4.14) on obtient :

$$
\begin{aligned}
|\varphi_2(x\ ,s\ ,\lambda)|\leq{}&\frac{1}{2\rho}e^{-x\operatorname{Re}(\rho)}\{(|\rho|^4+|\rho|^3|\beta_2-\beta_1|+|\rho|^2|-\gamma-\delta+\beta_1\beta_2|\\
&+|\rho|\,|\gamma\beta_2-\delta\beta_1|+|\gamma\delta|)e^{(s-1)\operatorname{Re}(\rho)}+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(|\rho|^3\|S_2(t)\|+|\rho|^2(\|R_2(t)\|\\
&+|\beta_1|\,\|S_2(t)\|)+|\rho|(|\beta_1|\,\|R_2(t)\|+|\gamma|\,\|S_2(t)\|)+|\gamma|\,\|R_2(t)\|)\\
&(1-e^{(s-1)\operatorname{Re}(\rho)})+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(|\rho|^3\|S_1(t)\|+|\rho|^2(\|R_1(t)\|+|\beta_2|\,\|S_1(t)\|)
\end{aligned}
$$

$$+\left|\rho\right|(\left|\beta_2\right|\left\|R_1(t)\right\|+\left|\delta\right|\left\|S_1(t)\right\|)+\left|\delta\right|\left\|R_1(t)\right\|)(e^{\operatorname{Re}(\rho)}-e^{(s-1)\operatorname{Re}(\rho)})$$
$$+\frac{1}{2\rho}e^{x\operatorname{Re}(\rho)}\{(\left|\rho\right|^4+\left|\rho\right|^3\left|\beta_1-\beta_2\right|+\left|\rho\right|^2\left|-\gamma-\delta+\beta_1\beta_2\right|+\left|\rho\right|\left|\delta\beta_1-\gamma\beta_2\right|$$
$$+\left|\gamma\delta\right|)e^{(1-s)\operatorname{Re}(\rho)}+2\left|\rho\right|(\left|\rho\right|^2+\left|\gamma\right|)\left|\beta_2\right|e^{-s\operatorname{Re}(\rho)}+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(\left|\rho\right|^3\left\|S_2(t)\right\|+\left|\rho\right|^2$$
$$(\left\|R_2(t)\right\|+\left|\beta_1\right|\left\|S_2(t)\right\|)+\left|\rho\right|(\left|\gamma\right|\left\|S_2(t)\right\|+\left|\beta_1\right|\left\|R_2(t)\right\|)+\left|\gamma\right|\left\|R_2(t)\right\|)$$
$$(e^{(1-s)\operatorname{Re}(\rho)}-1)+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(\left|\rho\right|^3\left\|S_1(t)\right\|+\left|\rho\right|^2(\left\|R_1(t)\right\|+\left|\beta_2\right|\left\|S_1(t)\right\|)$$
$$+\left|\rho\right|(\left|\delta\right|\left\|S_1(t)\right\|+\left|\beta_2\right|\left\|R_1(t)\right\|)+\left|\delta\right|\left\|R_1(t)\right\|)(e^{(1-s)\operatorname{Re}(\rho)}-e^{-\operatorname{Re}(\rho)})$$
$$+\frac{1}{(\operatorname{Re}(\rho))^2}(\left\|\Delta_R\right\|+2\left|\rho\right|\left\|\Delta_{RS}\right\|+\left|\rho\right|^2\left\|\Delta_S\right\|)(e^{(1-s)\operatorname{Re}(\rho)}-1)(e^{\operatorname{Re}(\rho)}-1)\}$$

(4.18)

4.2 Estimation du numérateur de la fonction de Green dans $L^\infty(0,1)$

On intégrant la formule (4.16) on obtient :

$$\int_0^1\left|\varphi(x\ ,s\ ,\lambda)\right|ds\leq\frac{1}{2\left|\rho\right|}e^{x\operatorname{Re}(\rho)}[\{(\left|\rho\right|^4+\left|\rho\right|^3\left|\beta_1+\beta_2\right|+\left|\rho\right|^2\left|\gamma+\delta+\beta_1\beta_2\right|$$
$$+\left|\rho\right|\left|\gamma\beta_2+\delta\beta_1\right|+\left|\gamma\delta\right|)(\frac{1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(\left|\rho\right|^3\left\|S_1(t)\right\|+\left|\rho\right|^2(\left\|R_1(t)\right\|$$
$$+\left|\beta_2\right|\left\|S_1(t)\right\|)+\left|\rho\right|(\left|\beta_2\right|\left\|R_1(t)\right\|+\left|\delta\right|\left\|S_1(t)\right\|)+\left|\delta\right|\left\|R_1(t)\right\|)$$
$$(\frac{1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)}-e^{-\operatorname{Re}(\rho)})+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(\left|\rho\right|^3\left\|S_2(t)\right\|+\left|\rho\right|^2(\left\|R_2(t)\right\|+\left|\beta_1\right|\left\|S_2(t)\right\|)$$
$$+\left|\rho\right|(\left|\gamma\right|\left\|S_2(t)\right\|+\left|\beta_1\right|\left\|R_2(t)\right\|)+\left|\gamma\right|\left\|R_2(t)\right\|)(1-\frac{1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})$$
$$+\frac{1}{(\operatorname{Re}(\rho))^2}(\left\|\Delta_R\right\|+2\left|\rho\right|\left\|\Delta_{RS}\right\|+\left|\rho\right|^2\left\|\Delta_S\right\|)(1+e^{-\operatorname{Re}(\rho)}-2(\frac{1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)}))\}$$
$$+\frac{1}{2\left|\rho\right|}e^{(1-x)\operatorname{Re}(\rho)}\{(\left|\rho\right|^4+\left|\rho\right|^3\left|\beta_1+\beta_2\right|+\left|\rho\right|^2\left|\gamma+\delta+\beta_1\beta_2\right|+\left|\rho\right|\left|\gamma\beta_2+\delta\beta_1\right|$$
$$+\left|\gamma\delta\right|)(\frac{1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(\left|\rho\right|^3\left\|S_1(t)\right\|+\left|\rho\right|^2(\left\|R_1(t)\right\|+\left|\beta_2\right|\left\|S_1(t)\right\|)$$
$$+\left|\rho\right|(\left|\beta_2\right|\left\|R_1(t)\right\|+\left|\delta\right|\left\|S_1(t)\right\|)+\left|\delta\right|\left\|R_1(t)\right\|)(1+\frac{e^{-\operatorname{Re}(\rho)}-1}{\operatorname{Re}(\rho)})$$
$$+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(\left|\rho\right|^3\left\|S_2(t)\right\|+\left|\rho\right|^2(\left\|R_2(t)\right\|+\left|\beta_1\right|\left\|S_2(t)\right\|)+\left|\rho\right|(\left|\beta_1\right|\left\|R_2(t)\right\|$$
$$+\left|\gamma\right|\left\|S_2(t)\right\|)+\left|\gamma\right|\left\|R_2(t)\right\|)(\frac{1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)}-e^{-\operatorname{Re}(\rho)})$$
$$+\frac{1}{(\operatorname{Re}(\rho))^2}(\left\|\Delta_R\right\|+2\left|\rho\right|\left\|\Delta_{RS}\right\|+\left|\rho\right|^2\left\|\Delta_S\right\|)(1+e^{\operatorname{Re}(\rho)}+2(\frac{e^{-\operatorname{Re}(\rho)}-1}{\operatorname{Re}(\rho)}))\}$$

Comme la fonction $x \to e^{x \operatorname{Re}(\rho)}$ est croissante sur l'intervalle $[0,1]$, et que la fonction $x \to e^{(1-x)\operatorname{Re}(\rho)}$ est décroissante sur le même intervalle ,

on a : $\sup_{0\leq x\leq 1} e^{x \operatorname{Re}(\rho)} = e^{\operatorname{Re}(\rho)}$ et $\sup_{0\leq x\leq 1} e^{(1-x)\operatorname{Re}(\rho)} = e^{\operatorname{Re}(\rho)}$ Ainsi on a :

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\leq x\leq 1}\int_0^1 |\varphi(x\ ,s\ ,\lambda)|\, ds \leq \frac{1}{2|\rho|}e^{\operatorname{Re}(\rho)}\{(|\rho|^4 + |\rho|^3|\beta_1+\beta_2| + |\rho|^2|\gamma+\delta+\beta_1\beta_2| \\
&+|\rho|\ |\gamma\beta_2+\delta\beta_1| + |\gamma\delta|)2(\frac{1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)}) \\
&+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(|\rho|^3\|S_1(t)\| + |\rho|^2(\|R_1(t)\| + |\beta_2|\ \|S_1(t)\|) + |\rho|(|\beta_2|\ \|R_1(t)\| \\
&+|\delta|\ \|S_1(t)\|) + |\delta|\ \|R_1(t)\|)(1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}) \\
&+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(|\rho|^3\|S_2(t)\| + |\rho|^2(\|R_2(t)\| + |\beta_1|\ \|S_2(t)\|) + |\rho|(|\gamma|\ \|S_2(t)\| \\
&+|\beta_1|\ \|R_2(t)\|) + |\gamma|\ \|R_2(t)\|)(1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}) \\
&+\frac{2}{(\operatorname{Re}(\rho))^2}(\|\Delta_R\| + 2|\rho|\ \|\Delta_{RS}\| + |\rho|^2\|\Delta_S\|)(1+e^{-\operatorname{Re}(\rho)} - 2(\frac{1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)}))\}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

De même d'après(4.17) , on a :

$$\begin{aligned}
&\int_0^x |\varphi_1(x\ ,s\ ,\lambda)|\, ds \leq \frac{e^{\operatorname{Re}(\rho)}}{2|\rho|}\{(|\rho|^4 + |\rho|^3|\beta_1-\beta_2| + |\rho|^2|\gamma+\delta-\beta_1\beta_2| \\
&+|\rho|\ |\delta\beta_1-\gamma\beta_2| + |\gamma\delta|)(\frac{1-e^{-x\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)}) \\
&+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(|\rho|^3\|S_2(t)\| + |\rho|^2(\|R_2(t)\| + |\beta_1|\ \|S_2(t)\|) + |\rho|(|\beta_1|\ \|R_2(t)\| \\
&+|\gamma|\ \|S_2(t)\|) + |\gamma|\ \|R_2(t)\|)(\frac{1-e^{-x\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)} - xe^{-(x+1)\operatorname{Re}(\rho)}) \\
&+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(|\rho|^3\|S_1(t)\| + |\rho|^2(\|R_1(t)\| + |\beta_2|\ \|S_1(t)\|) + |\rho|(|\beta_2|\ \|R_1(t)\| \\
&+|\delta|\ \|S_1(t)\|) + |\delta|\ \|R_1(t)\|)(\frac{1-e^{-x\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)} - xe^{-x\operatorname{Re}(\rho)}) \\
&+\frac{1}{(\operatorname{Re}(\rho))^2}(|\rho|^2\|\Delta_s\| + 2|\rho|\ \|\Delta_{Rs}\| + \|\Delta_R\|)\left(1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}\right)(\frac{1-e^{-x\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)} \\
&-xe^{-x\operatorname{Re}(\rho)}) + (|\rho|^4 + |\rho|^3|\beta_2-\beta_1| + |\rho|^2|\gamma+\delta-\beta_1\beta_2| + |\rho|\ |\gamma\beta_2-\delta\beta_1| \\
&+|\gamma\delta|)(\frac{e^{(x-2)\operatorname{Re}(\rho)} - e^{-\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)}) \\
&+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(|\rho|^3\|S_2(t)\| + |\rho|^2(\|R_2(t)\| + |\beta_1|\ \|S_2(t)\|) + |\rho|(|\gamma|\ \|S_2(t)\| \\
&+|\beta_1|\ \|R_2(t)\|) + |\gamma|\ \|R_2(t)\|)(xe^{(x-1)\operatorname{Re}(\rho)} + \frac{e^{-2\operatorname{Re}(\rho)} - e^{(x-2)\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)}) \\
&+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(|\rho|^3\|S_1(t)\| + |\rho|^2(\|R_1(t)\| + |\beta_2|\ \|S_1(t)\|) + |\rho|(|\beta_2|\ \|R_1(t)\| \\
&+|\delta|\ \|S_1(t)\|) + |\delta|\ \|R_1(t)\|)(xe^{(x-2)\operatorname{Re}(\rho)} + \frac{e^{-2\operatorname{Re}(\rho)} - e^{(x-2)\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{(\operatorname{Re}(\rho))^2}(|\rho|^2\|\Delta_s\|+2|\rho|\ \|\Delta_{Rs}\|+\|\Delta_R\|)\left(1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}\right)$$
$$(xe^{(x-1)\operatorname{Re}(\rho)}+\frac{e^{-\operatorname{Re}(\rho)}-e^{(x-1)\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})\}$$

Et comme les fonctions :

$$\begin{aligned}
x &\rightarrow \frac{1-e^{-x\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)},\ x\rightarrow\frac{1-e^{-x\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)}-xe^{-(x+1)\operatorname{Re}(\rho)}\\
x &\rightarrow \frac{1-e^{-x\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)}-xe^{-x\operatorname{Re}(\rho)},\ x\rightarrow\frac{e^{-\operatorname{Re}(\rho)}-e^{-(x+1)\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)}-xe^{-(x+1)\operatorname{Re}(\rho)}\\
x &\rightarrow \frac{e^{(x-2)\operatorname{Re}(\rho)}-e^{-2\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)},\ x\rightarrow xe^{(x-1)\operatorname{Re}(\rho)}+\frac{e^{-2\operatorname{Re}(\rho)}-e^{(x-2)\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)}\\
x &\rightarrow xe^{(x-2)\operatorname{Re}(\rho)}+\frac{e^{-2\operatorname{Re}(\rho)}-e^{(x-2)\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)}\\
x &\rightarrow xe^{(x-1)\operatorname{Re}(\rho)}+\frac{e^{-\operatorname{Re}(\rho)}-e^{(x-1)\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)}
\end{aligned}$$

Sont des fonctions croissantes sur l'intervalle $[0\ ,1]$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\le x\le 1}\int_0^1|\varphi_1(x,s,\lambda)|\,ds\le\frac{e^{\operatorname{Re}(\rho)}}{2|\rho|}\{(|\rho|^4+|\rho|^3|\beta_1-\beta_2|+|\rho|^2|\gamma+\delta-\beta_1\beta_2|\\
&+|\rho|\ |\delta\beta_1-\gamma\beta_2|+|\gamma\delta|)(\frac{1-e^{-2\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})\\
&+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(|\rho|^3\|S_2(t)\|+|\rho|^2(\|R_2(t)\|+|\beta_1|\ \|S_2(t)\|)+|\rho|(|\beta_1|\ \|R_2(t)\|\\
&+|\gamma|\ \|S_2(t)\|)+|\gamma|\ \|R_2(t)\|)(\frac{(1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)})^2}{\operatorname{Re}(\rho)}+1-e^{-2\operatorname{Re}(\rho)})\\
&+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(|\rho|^3\|S_1(t)\|+|\rho|^2(\|R_1(t)\|+|\beta_2|\ \|S_1(t)\|)+|\rho|(|\beta_2|\ \|R_1(t)\|\\
&+|\delta|\ \|S_1(t)\|)+|\delta|\ \|R_1(t)\|)\frac{(1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)})^2}{\operatorname{Re}(\rho)}\\
&+\frac{1}{(\operatorname{Re}(\rho))^2}\left(|\rho|^2\|\Delta_s\|+2|\rho|\ \ \|\Delta_{Rs}\|+\|\Delta_R\|\right)\left(1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}\right)^2\}
\end{aligned}\tag{4.20}$$

De même de (4.18) en faisant un raisonnement analogue , on obtient :

$$\begin{aligned}
&\int_x^1|\varphi_2(x\ ,s\ ,\lambda)|\,ds\le\frac{e^{\operatorname{Re}(\rho)}}{|2\rho|}\{(|\rho|^4+|\rho|^3|\beta_2-\beta_1|+|\rho|^2|-\gamma-\delta+\beta_1\beta_2|\\
&+|\rho|\ |\gamma\beta_2-\delta\beta_1|+|\gamma\delta|)(\frac{1-e^{(x-1)\operatorname{Re}(\rho)}+e^{-(1+x)\operatorname{Re}(\rho)}-e^{-2\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})\\
&+2(|\rho|^3|\beta_2|+|\rho|\ |\gamma\beta_2|)(\frac{e^{-\operatorname{Re}(\rho)}-e^{(x-2)\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})\\
&+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(|\rho|^3\|S_2(t)\|+|\rho|^2(\|R_2(t)\|+|\beta_1|\ \|S_2(t)\|)+|\rho|(|\beta_1|\ \|R_2(t)\|
\end{aligned}$$

$$+|\gamma|\ \|S_2(t)\|)+|\gamma|\ \|R_2(t)\|)((1-x)\left(e^{-(1+x)\operatorname{Re}(\rho)}-e^{(x-1)\operatorname{Re}(\rho)}\right)$$
$$+\frac{1-e^{(x-1)\operatorname{Re}(\rho)}-e^{-(1+x)\operatorname{Re}(\rho)}+e^{-2\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})$$
$$+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(|\rho|^3\|S_1(t)\|+|\rho|^2(\|R_1(t)\|+|\beta_2|\ \|S_1(t)\|)+|\rho|(|\delta|\ \|S_1(t)\|$$
$$+|\beta_2|\ \|R_1(t)\|)+|\delta|\ \|R_1(t)\|)((1-x)\left(e^{-x\operatorname{Re}(\rho)}-e^{(x-2)\operatorname{Re}(\rho)}\right)$$
$$+\frac{1-e^{(x-1)\operatorname{Re}(\rho)}-e^{-(1+x)\operatorname{Re}(\rho)}+e^{-2\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})$$
$$+\frac{1}{(\operatorname{Re}(\rho))^2}\left(|\rho|^2\|\Delta_s\|+2|\rho|\ \ \|\Delta_{Rs}\|+\|\Delta_R\|\right)\left(1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}\right)$$
$$((1-x)\left(e^{-x\operatorname{Re}(\rho)}-e^{x\operatorname{Re}(\rho)}\right)+\frac{e^{\operatorname{Re}(\rho)}-e^{x\operatorname{Re}(\rho)}-e^{-x\operatorname{Re}(\rho)}+e^{-\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})\}$$

Et comme les fonctions :

$$x \ \rightarrow\ \frac{1-e^{(x-1)\operatorname{Re}(\rho)}+e^{-(1+x)\operatorname{Re}(\rho)}-e^{-2\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)},\ x\rightarrow\frac{e^{-\operatorname{Re}(\rho)}-e^{(x-2)\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)}$$
$$x \ \rightarrow\ (1-x)\left(e^{-(1+x)\operatorname{Re}(\rho)}-e^{(x-1)\operatorname{Re}(\rho)}\right)+\frac{1-e^{(x-1)\operatorname{Re}(\rho)}-e^{-(1+x)\operatorname{Re}(\rho)}+e^{-2\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)}$$
$$x \ \rightarrow\ (1-x)\left(e^{-x\operatorname{Re}(\rho)}-e^{(x-2)\operatorname{Re}(\rho)}\right)+\frac{1-e^{(x-1)\operatorname{Re}(\rho)}-e^{-(1+x)\operatorname{Re}(\rho)}+e^{-2\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)}$$
$$x \ \rightarrow\ (1-x)\left(e^{-x\operatorname{Re}(\rho)}-e^{x\operatorname{Re}(\rho)}\right)+\frac{e^{\operatorname{Re}(\rho)}-e^{x\operatorname{Re}(\rho)}-e^{-x\operatorname{Re}(\rho)}+e^{-\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)}$$

Sont des fonctions décroissantes sur l'intervalle $[0\ ,1]$, on obtient :

$$\sup_{0\leq x\leq 1}\int_x^1|\varphi_2(x,s,\lambda)|\,ds\leq\frac{e^{\operatorname{Re}(\rho)}}{|2\rho|}\{(|\rho|^4+|\rho|^3|\beta_2-\beta_1|+|\rho|^2|-\gamma-\delta+\beta_1\beta_2|$$
$$+|\rho|\ |\gamma\beta_2-\delta\beta_1|+|\gamma\delta|)(\frac{1-e^{-2\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})+2(|\rho|^3|\beta_2|+|\rho|\ |\gamma\beta_2|)$$
$$(\frac{e^{-\operatorname{Re}(\rho)}-e^{-2\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})$$
$$+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(|\rho|^3\|S_2(t)\|+|\rho|^2(\|R_2(t)\|+|\beta_1|\ \|S_2(t)\|)+|\rho|(|\beta_1|\ \|R_2(t)\|$$
$$+|\gamma|\ \|S_2(t)\|)+|\gamma|\ \|R_2(t)\|)\frac{\left(1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}\right)^2}{\operatorname{Re}(\rho)}$$
$$+\frac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}(|\rho|^3\|S_1(t)\|+|\rho|^2(\|R_1(t)\|+|\beta_2|\ \|S_1(t)\|)+|\rho|(|\delta|\ \|S_1(t)\|$$
$$+|\beta_2|\ \|R_1(t)\|)+|\delta|\ \|R_1(t)\|)(1-e^{-2\operatorname{Re}(\rho)}+\frac{\left(1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}\right)^2}{\operatorname{Re}(\rho)})$$
$$+\frac{1}{(\operatorname{Re}(\rho))^2}(|\rho|^2\|\Delta_s\|+2|\rho|\ \|\Delta_{Rs}\|+\|\Delta_R\|)\left(1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}\right)^2\left(e^{\operatorname{Re}(\rho)}-1\right)\}$$

(4.21)

D'autre part on a :

$$\sup_{0\leq x\leq 1}\int_0^1 |N(x\ ,s\ ,\lambda)|\,ds \leq \sup_{0\leq x\leq 1}\int_0^1 |\varphi(x\ ,s\ ,\lambda)|\,ds+\sup_{0\leq x\leq 1}\int_0^1 |\varphi_i(x\ ,s\ ,\lambda)|\,ds$$
$$\{\ i = 1\ si\ x>s\ \ et\ \ i=2\ \ si\ \ x<s\ \}$$

D'après (4.19), (4.20) et (4.21) on obtient facilement :

Pour $x>s$ on a :

$$\begin{aligned}
&\sup_{S\leq x\leq 1}\int_0^1 |N\ \ (x,s,\lambda)|\,ds \leq \frac{e^{\operatorname{Re}(\rho)}}{2|\rho|\operatorname{Re}(\rho)}\{(|\rho|^4+|\rho|^3|\beta_1-\beta_2|+|\rho|^2|\gamma+\delta-\beta_1\beta_2|\\
&\quad+|\rho|\ |\delta\beta_1-\gamma\beta_2|+|\gamma\delta|)3(1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)})\\
&\quad+(|\rho|^3\|S_2(t)\|+|\rho|^2(\|R_2(t)\|+|\beta_1|\ \|S_2(t)\|)+|\rho|(|\beta_1|\,\|R_2(t)\|+|\gamma|\,\|S_2(t)\|)\\
&\quad+|\gamma|\ \|R_2(t)\|)(1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)})(\frac{1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)}+2+e^{-\operatorname{Re}(\rho)})\\
&\quad+(|\rho|^3\|S_1(t)\|+|\rho|^2(\|R_1(t)\|+|\beta_2|\ \|S_1(t)\|)+|\rho|(|\beta_2|\,\|R_1(t)\|+|\delta|\,\|S_1(t)\|)\\
&\quad+|\delta|\ \|R_1(t)\|)(1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)})(1+\frac{1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})\\
&\quad+\frac{2}{\operatorname{Re}(\rho)}(|\rho|^2\|\Delta_S\|+2|\rho|\ \|\Delta_{RS}\|+\|\Delta_R\|)(\frac{3+e^{-2\operatorname{Re}(\rho)}}{2}-2\frac{1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})\}
\end{aligned}$$

Et Pour $x<s$ on a:

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\leq x\leq S}\int_0^1 |N\ \ (x\ ,s\ ,\lambda)|\,ds \leq \frac{e^{\operatorname{Re}(\rho)}}{2|\rho|\operatorname{Re}(\rho)}\{(|\rho|^4+|\rho|^3|\beta_1-\beta_2|+|\rho|^2|\gamma+\delta-\beta_1\beta_2|\\
&\quad+|\rho|\ |\delta\beta_1-\gamma\beta_2|+|\gamma\delta|)(1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)})(3+e^{-\operatorname{Re}(\rho)})+2(|\rho|^3|\beta_2|+|\rho|\ |\gamma\beta_2|)\\
&\quad(e^{-\operatorname{Re}(\rho)}-e^{-2\operatorname{Re}(\rho)})\\
&\quad+(|\rho|^3\|S_2(t)\|+|\rho|^2(\|R_2(t)\|+|\beta_1|\ \|S_2(t)\|)+|\rho|(|\beta_1|\ \|R_2(t)\|\\
&\quad+|\gamma|\ \|S_2(t)\|)+|\gamma|\ \|R_2(t)\|)(1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)})(1+\frac{1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)})\\
&\quad+(|\rho|^3\|S_1(t)\|+|\rho|^2(\|R_1(t)\|+|\beta_2|\ \|S_1(t)\|)+|\rho|(|\beta_2|\ \|R_1(t)\|\\
&\quad+|\delta|\ \|S_1(t)\|)+|\delta|\ \|R_1(t)\|)(1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)})(\frac{1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}}{\operatorname{Re}(\rho)}+2+e^{-\operatorname{Re}(\rho)})\\
&\quad+\frac{2}{\operatorname{Re}(\rho)}(|\rho|^2\|\Delta_S\|+2|\rho|\ \|\Delta_{RS}\|+\|\Delta_R\|)\\
&\quad(1+e^{-\operatorname{Re}(\rho)}-\frac{(1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)})(3-e^{-\operatorname{Re}(\rho)})}{\operatorname{Re}(\rho)})\}
\end{aligned}$$

Comme $\rho\in\Sigma_{\frac{\delta}{2}}$ alors $|\arg(\rho)|<\dfrac{\delta}{2}\Rightarrow|\rho|\cos(\arg(\rho))>|\rho|\cos(\dfrac{\delta}{2})$.
Ainsi $\operatorname{Re}(\rho)>|\rho|\cos(\dfrac{\delta}{2})$.
Finalement on trouve :

$$\sup_{0\leq x\leq 1}\int_0^1 |N(x,s\ ,\lambda)|\,ds \leq \frac{e^{\operatorname{Re}(\rho)}}{|\rho|^2\cos(\frac{\delta}{2})}\{4(|\rho|^4+|\rho|^3|\beta_1-\beta_2|+|\rho|^2|\gamma+\delta-\beta_1\beta_2|$$
$$+|\rho|\ |\delta\beta_1-\gamma\beta_2|+|\gamma\delta|)+2(|\rho|^3|\beta_2|+|\rho|\ |\gamma\beta_2|)+3(|\rho|^3\|S_1(t)\|+|\rho|^2(\|R_1(t)\|$$
$$+|\beta_2|\ \|S_1(t)\|)+|\rho|(|\beta_2|\ \|R_1(t)\|+|\delta|\ \|S_1(t)\|)+|\delta|\ \|R_1(t)\|)+3(|\rho|^3\|S_2(t)\|$$
$$+|\rho|^2(\|R_2(t)\|+|\beta_1|\ \|S_2(t)\|)+|\rho|(|\beta_1|\ \|R_2(t)\|+|\gamma|\ \|S_2(t)\|)+|\gamma|\ \|R_2(t)\|)$$
$$+\frac{4}{\operatorname{Re}(\rho)}(|\rho|^2\|\Delta_S\|+2|\rho|\ \|\Delta_{RS}\|+\|\Delta_R\|)\}$$

Alors :

$$\sup_{0\leq x\leq 1}\int_0^1 |N(x,s\ ,\lambda)|\,ds \leq \frac{4e^{\operatorname{Re}(\rho)}}{|\rho|^2\cos(\frac{\delta}{2})}\{[|\rho|^4+|\rho|^3(|\beta_1|+|\beta_2|+\|S_1(t)\|$$
$$+\|S_2(t)\|)+|\rho|^2(|\gamma|+|\delta|+|\beta_1\beta_2|+\|R_1(t)\|+\|R_2(t)\|+|\beta_2|\ \|S_1(t)\|$$
$$+|\beta_1|\ \|S_2(t)\|)+|\rho|(|\delta\beta_1|+|\gamma\beta_2|+|\beta_2|\,\|R_1(t)\|+|\beta_1|\,\|R_2(t)\|+|\delta|\,\|S_1(t)\|$$
$$+|\gamma|\ \|S_2(t)\|)+|\gamma\delta|+|\delta|\ \|S_1(t)\|+|\gamma|\ \|S_2(t)\|]$$
$$+\frac{1}{|\rho|\cos(\frac{\delta}{2})}(|\rho|^2\|\Delta_s\|+2|\rho|\ \|\Delta_{Rs}\|+\|\Delta_R\|)\} \tag{4.22}$$

Et

$$\|R(\lambda\ ,L_\infty)\| \leq \frac{1}{|\Delta(\lambda)|}\sup_{0\leq x\leq 1}\int_0^1 |N(x\ ,s\ ,\lambda)|\,ds$$

Alors :

$$\|R(\lambda,L_\infty)\| \leq \frac{4}{|\Delta(\rho^2)|\ \ |\rho|^2\cos(\frac{\delta}{2})}e^{\operatorname{Re}(\rho)}\{[|\rho|^4+|\rho|^3(|\beta_1|+|\beta_2|+\|S_1(t)\|$$
$$+\|S_2(t)\|)+|\rho|^2(|\gamma|+|\delta|+|\beta_1\beta_2|+\|R_1(t)\|+\|R_2(t)\|+|\beta_2|\ \|S_1(t)\|$$
$$+|\beta_1|\ \|S_2(t)\|)+|\rho|(|\delta\beta_1|+|\gamma\beta_2|+|\beta_2|\ \|R_1(t)\|+|\beta_1|\ \|R_2(t)\|$$
$$+|\delta|\ \|S_1(t)\|+|\gamma|\ \|S_2(t)\|)+|\gamma\delta|+|\delta|\ \|S_1(t)\|+|\gamma|\ \|S_2(t)\|]$$
$$+\frac{1}{|\rho|\cos(\frac{\delta}{2})}(|\rho|^2\|\Delta_S\|+2|\rho|\ \|\Delta_{RS}\|+\|\Delta_R\|)\}\leq\frac{F(\rho)}{|\rho|} \tag{4.23}$$

Où :

$$F\ (\rho)=\frac{4}{|\Delta(\rho^2)|\ \ |\rho|\cos\left(\dfrac{\delta}{2}\right)}e^{\operatorname{Re}(\rho)}\{[|\rho|^4+|\rho|^3(|\beta_1|+|\beta_2|+\|S_1(t)\|+\|S_2(t)\|)$$
$$+|\rho|^2(|\gamma|+|\delta|+|\beta_1\beta_2|+\|R_1(t)\|+\|R_2(t)\|+|\beta_2|\ \|S_1(t)\|+|\beta_1|\ \|S_2(t)\|)$$
$$+|\rho|(|\delta\beta_1|+|\gamma\beta_2|+|\beta_2|\ \|R_1(t)\|$$
$$+|\beta_1|\ \|R_2(t)\|+|\delta|\ \|S_1(t)\|+|\gamma|\ \|S_2(t)\|)+|\gamma\delta|+|\delta|\ \|S_1(t)\|+|\gamma|\ \|S_2(t)\|]$$

$$+\frac{1}{|\rho|\cos(\frac{\delta}{2})}(|\rho|^2\|\Delta_S\|+2|\rho|\ \|\Delta_{RS}\|+\|\Delta_R\|)\}$$

(4.24)

4.3 Estimation du déterminant caractéristique de la fonction de Green :

On suppose que les coefficients $\alpha_i\ ,\beta_i\ ,\gamma_i\ ,\delta_i\in\mathbb{C}$ où $i=\overline{1,2}$ et les fonctions $S_i\ ,R_i\in C^1([0,1],\mathbb{C})$, $i=\overline{1,2}$. D'après (4.11) on a :

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda) &= e^{\rho}[-\rho^2\beta_1\beta_2+\rho((\lambda+\gamma)\beta_2-\beta_1(\lambda+\delta))-\beta_2S_1(0)-\beta_1S_2(1))\\ &+(\lambda+\gamma)(\lambda+\delta)+(\lambda+\delta)S_2(1)-(\lambda+\delta)S_1(0)-\beta_1R_2(1)+\beta_2R_1(0)\\ &+\Delta_S(1\ ,0)+\frac{1}{\rho}((\lambda+\delta)R_2(1)+(\lambda+\delta)R_1(0)+\Delta_{RS}(0,1)+\Delta_{RS}(1,0))\\ &+\frac{1}{\rho^2}\Delta_R(0,1)+\Psi(\rho)]\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda) &= e^{\rho}[\rho^4+\rho^3(\beta_2-\beta_1)+\rho^2(-\beta_1\beta_2+\gamma+\delta+S_2(1)-S_1(0))\\ &+\rho(\gamma\beta_2-\beta_1\delta-\beta_2S_1(0)-\beta_1S_2(1)+R_2(1)+R_1(0))+\gamma\delta+\gamma S_2(1)\\ &-\delta S_1(0)-\beta_1R_2(1)+\beta_2R_1(0)+\Delta_s(1,0)\\ &+\frac{1}{\rho}(\delta R_2(1)+\delta R_1(0)+\Delta_{Rs}(0,1)+\Delta_{Rs}(1,0))+\frac{1}{\rho^2}\Delta_R(0,1)+\Psi(\rho)]\end{aligned}$$

(4.25)

Où :

$$\begin{aligned}\Psi(\rho) &= 2e^{-\rho}[\rho(-\beta_2S_1(0)-\beta_1S_2(1))+\frac{1}{\rho}(-(\lambda+\delta)R_1(1)-(\lambda+\delta)R_2(0)\\ &-\Delta_{RS}(0,0)-\Delta_{RS}(1,1)]+e^{-2\rho}[\rho^2\beta_1\beta_2+\rho((\lambda+\gamma)\beta_2-\beta_1(\lambda+\delta))-\beta_2S_1(0)\\ &-\beta_1S_2(1))-(\lambda+\gamma)(\lambda+\delta)-(\lambda+\delta)S_2(1)\\ &+(\lambda+\delta)S_1(0)+\beta_1R_2(1)-\beta_2R_1(0)-\Delta_S(1,0)\\ &+\frac{1}{\rho}((\lambda+\delta)R_2(1)+(\lambda+\delta)R_1(0)+\Delta_{RS}(0,1)+\Delta_{RS}(1,0))+\frac{1}{\rho^2}\Delta_R(0,1)]\\ &+\frac{1}{\rho}[\int_0^1((\lambda+\gamma)R_2'(t)+\rho((\lambda+\gamma)S_2'(t)-\beta_1R_2'(t))-\rho^2\beta_1S_2'(t))e^{\rho(t-1)}dt\\ &+\int_0^1((\lambda+\gamma)R_2'(t)+\rho(\beta_1R_2'(t)-(\lambda+\gamma)S_2'(t))-\rho^2\beta_1S_2'(t))e^{-\rho(t+1)}dt\\ &+\int_0^1(-(\lambda+\delta)R_1'(t)+\rho(-(\lambda+\delta)S_2'(t)+\beta_2R_1'(t))-\rho^2\beta_2S_1'(t))e^{\rho(t-2)}dt\\ &+\int_0^1(-(\lambda+\delta)R_1'(t)+\rho(-\beta_2R_1'(t)+(\lambda+\delta)S_2'(t))+\rho^2\beta_2S_1'(t))e^{-\rho t}dt\\ &+\int_0^1(\Delta_{R'R}(0,t)-\rho(\Delta_{R'S}(0,t)+\Delta_{RS'}(t\ ,0))+\rho^2\Delta_{S'S}(1,t))e^{-\rho(t+1)}dt\}\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{\rho^2}\{\int_0^1(\Delta_{R'R}(t\ ,0)-\rho(\Delta_{R'S}(t\ ,0)+\Delta_{RS'}(0\ ,t))-\rho^2\Delta_{S'S}(t\ ,0))e^{\rho(t-1)}dt$$
$$+\int_0^1(\Delta_{R'R}\,(1,t)+\rho(\Delta_{R'S}\,(1,t)+\Delta_{RS'}(t\ ,1))+\rho^2\Delta_{S'S}(t\ ,1))e^{\rho(t-2)}dt$$
$$+\int_0^1(\Delta_{R'R}(t\ ,1)+(\rho\Delta_{R'S}(t\ ,1)+\Delta_{RS'}\,(1,t))+\rho^2\Delta_{S'S}\,(1,t))e^{-\rho t}dt$$
$$+\int_0^1\int_0^1(\Delta_{R'}\,(\varepsilon,t)+(\rho\Delta_{R'S'}(t\ ,\varepsilon)+\Delta_{R'S'}\,(\varepsilon,t))-\rho^2\Delta_{S'}\,(\varepsilon,t))e^{\rho(\varepsilon-t-1)}d\varepsilon dt\}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
|\Psi\,(\rho)| \le\ & 2e^{-\operatorname{Re}(\rho)}[|\rho|\,(|R_1\,(1)|+|\beta_2|\ |S_1\,(0)|+|\beta_1|\ |S_2\,(1)|)+\frac{1}{|\rho|}\\
& (|R_2\,(0)|+|\delta|\ \ |R_1\,(1)|+|\gamma|\ \ |R_2\,(0)|+|\Delta_{RS}\,(0,0)|+|\Delta_{RS}\,(1,1)|)]+e^{-2\operatorname{Re}(\rho)}\\
& [|\rho|^4+|\rho|^3\,(|\beta_2|+|\beta_1|)+|\rho|^2\,(|\beta_1\beta_2|+|\gamma|+|\delta|+|S_2\,(1)|+|S_1\,(0)|)+|\rho|\\
& (|\gamma|\ |\beta_2|+|\beta_1|\ |\delta|+|\beta_2|\ |S_1\,(0)|+|\beta_1|\ |S_2\,(1)|+|R_2\,(1)|+|R_1\,(0)|)\\
& +|\gamma\delta|+|\gamma|\ |S_2\,(1)|+|\delta|\ |S_1\,(0)|+|\beta_1|\ |R_2\,(1)|+|\beta_2|\ |R_1\,(1)|+|\Delta_S\,(1\ ,0)|\\
& +\frac{1}{|\rho|}\,(|\gamma|\ \ |R_2\,(1)|+|\delta|\ \ |R_1\,(0)|+|\Delta_{RS}\,(0,1)|+|\Delta_{RS}\,(1,0)|)+\frac{1}{|\rho|^2}\,|\Delta_R\,(1,0)|]\\
& +\frac{1}{|\rho|\operatorname{Re}(\rho)}\{(|\rho|^3\,\|S_2'\,(t)\|+|\rho|^2\,(\|R_2'\,(t)\|+|\beta_1|\ \ \|S_2'\,(t)\|)+|\rho|\,(|\gamma|\ \|S_2'\,(t)\|\\
& +|\beta_1|\ \|R_2'\,(t)\|)+|\gamma|\ \|R_2'\,(t)\|)(1-e^{-2\operatorname{Re}(\rho)})\\
& +(|\rho|^3\,\|S_1'\,(t)\|+|\rho|^2\,(\|R_1'\,(t)\|+|\beta_2|\ \ \|S_1'\,(t)\|)+|\rho|\,(|\delta|\ \|S_1'\,(t)\|+|\beta_2|\ \|R_1'\,(t)\|)\\
& +|\delta|\ \|R_1'\,(t)\|)(1-e^{-2\operatorname{Re}(\rho)})+(\|\Delta_{R'R}\|+|\rho|\,(\|\Delta_{R'S}\|+\|\Delta_{RS'}\|)+|\rho|^2\,\|\Delta_{S'S}\|)\\
& (e^{-\operatorname{Re}(\rho)}-e^{-2\operatorname{Re}(\rho)})\}+\frac{1}{|\rho|^2\operatorname{Re}(\rho)}\{(\|\Delta_{R'R}\|+|\rho|\,(\|\Delta_{R's}\|+\|\Delta_{Rs'}\|)+|\rho|^2\,\|\Delta_{S'S}\|)\\
& (1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)})(2+e^{-\operatorname{Re}(\rho)})\}\\
& +\frac{1}{(\operatorname{Re}(\rho))^2}(\|\Delta_{R'}\|+|\rho|\,(\|\Delta_{R'S'}\|+\|\Delta_{R'S'}\|)+|\rho|^2\,\|\Delta_{S'}\|)\left(1-e^{-\operatorname{Re}(\rho)}\right)^2
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
|\Psi\,(\rho)| \le\ & 2e^{-\operatorname{Re}(\rho)}[|\rho|\,(|R_1\,(1)|+|\beta_2|\ |S_1\,(0)|+|\beta_1|\ |S_2\,(1)|)+\frac{1}{|\rho|}(|R_2\,(0)|\\
& +|\delta|\ |R_1\,(1)|+|\gamma|\ |R_2\,(0)|+|\Delta_{RS}\,(0\ ,0)|+|\Delta_{RS}\,(1\ ,1)|)]+e^{-2\operatorname{Re}(\rho)}\\
& [|\rho|^4+|\rho|^3\,(|\beta_2|+|\beta_1|)+|\rho|^2\,(|\beta_1\beta_2|+|\gamma|+|\delta|+|S_2\,(1)|+|S_1\,(0)|)+|\rho|\\
& (|\gamma|\ |\beta_2|+|\beta_1|\ |\delta|+|\beta_2|\ |S_1\,(0)|+|\beta_1|\ |S_2\,(1)|+|R_2\,(1)|+|R_1\,(0)|)\\
& +|\gamma\delta|+|\gamma|\ |S_2\,(1)|+|\delta|\ |S_1\,(0)|+|\beta_1|\ |R_2\,(1)|+|\beta_2|\ |R_1\,(1)|+|\Delta_S\,(1\ ,0)|\\
& +\frac{1}{|\rho|}\,(|\gamma|\ \ |R_2\,(1)|+|\delta|\ \ |R_1\,(0)|+|\Delta_{RS}\,(0\ ,1)|+|\Delta_{RS}\,(1\ ,0)|)+\frac{1}{|\rho|^2}\,|\Delta_R\,(1\ ,0)|]\\
& +\frac{1}{|\rho|\operatorname{Re}(\rho)}\{(|\rho|^3\,(\|S_2'\,(t)\|+\|S_1'\,(t)\|)+|\rho|^2\,(\|R_2'\,(t)\|+\|R_1'\,(t)\|+|\beta_2|\ \|S_1'\,(t)\|\\
& +|\beta_1|\ \|S_2'\,(t)\|)\\
& +|\rho|\,(|\gamma|\,\|S_2'\,(t)\|+|\delta|\,\|S_1'\,(t)\|+|\beta_2|\ \|R_1'\,(t)\|+|\beta_1|\ \|R_2'\,(t)\|)+|\gamma|\ \|R_2'\,(t)\|
\end{aligned}$$

$$+\left|\delta\right|\ \left\|R_1'(t)\right\|)+(\left\|\Delta_{R'R}\right\|+\left|\rho\right|(\left\|\Delta_{R'S}\right\|+\left\|\Delta_{RS'}\right\|)+\left|\rho\right|^2\left\|\Delta_{S'S}\right\|)\}$$
$$+\frac{3}{\left|\rho\right|^2\operatorname{Re}(\rho)}\{(\left\|\Delta_{R'R}\right\|+\left|\rho\right|(\left\|\Delta_{R'S}\right\|+\left\|\Delta_{RS'}\right\|)+\left|\rho\right|^2\left\|\Delta_{S'S}\right\|)\}$$
$$+\frac{1}{(\operatorname{Re}(\rho))^2}\left(\left\|\Delta_{R'}\right\|+\left|\rho\right|(\left\|\Delta_{R'S'}\right\|+\left\|\Delta_{R'S'}\right\|)+\left|\rho\right|^2\left\|\Delta_{S'}\right\|\right).$$

On a :$\operatorname{Re}(\rho)>0\Rightarrow\operatorname{Re}(\rho)=|\rho|\cos\theta$ et $e^{-\operatorname{Re}(\rho)}<\dfrac{1}{\operatorname{Re}(\rho)}=\dfrac{1}{|\rho|\cos\theta}$

Donc :

$$\begin{aligned}
\left|\Psi(\rho)\right| \leq\ & \frac{2}{|\rho|\cos\frac{\theta}{2}}[|\rho|(|R_1(1)|+|\beta_2|\ |S_1(0)|+|\beta_1|\ |S_2(1)|)+\frac{1}{|\rho|}(|R_2(0)| \\
& +|\delta|\ |R_1(1)|+|\gamma|\ |R_2(0)|+|\Delta_{RS}(0,0)|+|\Delta_{RS}(1,1)|)]+\frac{1}{|\rho|^2(\cos\frac{\theta}{2})^2} \\
& [|\rho|^4+|\rho|^3(|\beta_2|+|\beta_1|)+|\rho|^2(|\beta_1\beta_2|+|\gamma|+|\delta|+|S_2(1)|+|S_1(0)|) \\
& +|\rho|(|\gamma|\ |\beta_2|+|\beta_1|\ |\delta|+|\beta_2|\ |S_1(0)|+|\beta_1|\ |S_2(1)|+|R_2(1)|+|R_1(0)|) \\
& +|\gamma\delta|+|\gamma|\ |S_2(1)|+|\delta|\ |S_1(0)|+|\beta_1|\ |R_2(1)|+|\beta_2|\ |R_1(1)|+|\Delta_S(1,0)| \\
& +\frac{1}{|\rho|}(|\gamma|\ \ |R_2(1)|+|\delta|\ \ |R_1(0)|+|\Delta_{RS}(0,1)|+|\Delta_{RS}(1,0)|)+\frac{1}{|\rho|^2}|\Delta_R(1,0)|] \\
& +\frac{1}{|\rho|^2\cos(\frac{\theta}{2})}\{(|\rho|^3(\|S_2'(t)\|+\|S_1'(t)\|)+|\rho|^2(\|R_2'(t)\|+\|R_1'(t)\| \\
& +|\beta_2|\ \|S_1'(t)\|+|\beta_1|\ \|S_2'(t)\|)+|\rho|(|\gamma|\ \|S_2'(t)\|+|\delta|\ \|S_1'(t)\| \\
& +|\beta_2|\ \|R_1'(t)\|+|\beta_1|\ \|R_2'(t)\|)+|\gamma|\ \|R_2'(t)\|+|\delta|\ \|R_1'(t)\|) \\
& +(\|\Delta_{R'R}\|+|\rho|(\|\Delta_{R'S}\|+\|\Delta_{RS'}\|)+|\rho|^2\|\Delta_{S'S}\|)\} \\
& +\frac{3}{|\rho|^2\cos\frac{\theta}{2}}\{(\|\Delta_{R'R}\|+|\rho|(\|\Delta_{R'S}\|+\|\Delta_{RS'}\|)+|\rho|^2\|\Delta_{S'S}\|)\} \\
& +\frac{1}{|\rho|^2\cos^2(\frac{\theta}{2})}(\|\Delta_{R'}\|+|\rho|(\|\Delta_{R'S'}\|+\|\Delta_{R'S'}\|)+|\rho|^2\|\Delta_{S'}\|)
\end{aligned} \tag{4.26}$$

D'après (4.25) nous avons pour $|\rho|$ sufisamment grand :

$$\begin{aligned}
\Delta(\lambda) \geq\ & |\rho|^4 e^{-\operatorname{Re}(\rho)}[1-\frac{1}{|\rho|}|\beta_2-\beta_1|-\frac{1}{|\rho|^2}|-\beta_1\beta_2+\gamma+\delta+S_2(1)| \\
& -\frac{1}{|\rho|^3}|\gamma\beta_2-\beta_1\delta-\beta_2S_1(0)-\beta_1S_2(1)+R_2(1)+R_1(0)| \\
& -\frac{1}{|\rho|^4}|\gamma\delta+\gamma S_2(1)-\delta S_1(0)-\beta_1R_2(1)+\beta_2R_1(0)+\Delta_S(1\ ,0)| \\
& -\frac{1}{|\rho|^5}|\delta R_2(1)+\delta R_1(0)+\Delta_{RS}(0\ ,1)+\Delta_{RS}(1\ ,0)|-\frac{1}{|\rho|^6}|\Delta_R(0\ ,1)|-\frac{1}{|\rho|^4}|\Psi(\rho)|]
\end{aligned}$$

Et d'après (4.26), nous déduisons que pour $\rho\in\sum_{\frac{\theta}{2}}$, $|\rho|\geq r_0>0$,on a

$$|\Psi(\rho)|\leq\frac{c(r_0)}{|\rho|^2}$$

Alors, nous avons :
$\Delta\left(\lambda\right)\geq\left|\rho\right|^{4}e^{-\operatorname{Re}(\rho)}\{1-\dfrac{1}{r_{0}}\left|\beta_{2}-\beta_{1}\right|-\dfrac{1}{r_{0}^{2}}\left|-\beta_{1}\beta_{2}+\gamma+\delta+S_{2}\left(1\right)\right|$
$-\dfrac{1}{r_{0}^{3}}\left|\gamma\beta_{2}-\beta_{1}\delta-\beta_{2}S_{1}\left(0\right)-\beta_{1}S_{2}\left(1\right)+R_{2}\left(1\right)+R_{1}\left(0\right)\right|$
$-\dfrac{1}{r_{0}^{4}}\left|\gamma\delta+\gamma S_{2}\left(1\right)-\delta S_{1}\left(0\right)-\beta_{1}R_{2}\left(1\right)+\beta_{2}R_{1}\left(0\right)+\Delta_{S}\left(1,0\right)\right|$
$-\dfrac{1}{r_{0}^{5}}\left|\delta R_{2}\left(1\right)+\delta R_{1}\left(0\right)+\Delta_{RS}\left(0,1\right)+\Delta_{RS}\left(1,0\right)\right|-\dfrac{1}{r_{0}^{6}}\left|\Delta_{R}\left(0,1\right)\right|-\dfrac{1}{r_{0}^{6}}\left|c(r_{0})\right|]$

Nous pouvons donc choisir $r_0 > 0$,tel que :
$\dfrac{1}{r_{0}}\left|\beta_{2}-\beta_{1}\right|+\dfrac{1}{r_{0}^{2}}\left|-\beta_{1}\beta_{2}+\gamma+\delta+S_{2}\left(1\right)\right|$
$+\dfrac{1}{r_{0}^{3}}\left|\gamma\beta_{2}-\beta_{1}\delta-\beta_{2}S_{1}\left(0\right)-\beta_{1}S_{2}\left(1\right)+R_{2}\left(1\right)+R_{1}\left(0\right)\right|$
$+\dfrac{1}{r_{0}^{4}}\left|\gamma\delta+\gamma S_{2}\left(1\right)-\delta S_{1}\left(0\right)-\beta_{1}R_{2}\left(1\right)+\beta_{2}R_{1}\left(0\right)+\Delta_{S}\left(1,0\right)\right|$
$+\dfrac{1}{r_{0}^{5}}\left|\delta R_{2}\left(1\right)+\delta R_{1}\left(0\right)+\Delta_{RS}\left(0,1\right)+\Delta_{RS}\left(1,0\right)\right|+\dfrac{1}{r_{0}^{6}}\left|\Delta_{R}\left(0,1\right)\right|+\dfrac{1}{r_{0}^{6}}\left|c(r_{0})\right|\leq\dfrac{1}{2}$

Alors pour$\rho\in\Sigma_{\frac{\theta}{2}}$, $|\rho|\geq r_0>0$, nous obtenons

$$\Delta\left(\lambda\right)\geq\left|\rho\right|^{4}\frac{e^{\operatorname{Re}(\rho)}}{2} \tag{4.27}$$

Finalement d'après (4.24) nous avons démontré que $\left|\rho\right|F\left(\rho\right)$ reste bornée dans le secteur pour $|\rho|$ suffisamment grand, d'où :

$$\left\|R\left(\lambda\ ,L_{\infty}\right)\right\|\leq\frac{F_{0}}{\left|\rho\right|}$$

Remarque 4.3.1 *les conditions aux limites dans* (4.1) *sont régulières.*

Théorème 4.3.2 *Si les fonctions* $R_i, S_i\in C^1([0,1]\,,\mathbb{C})$, $i=\overline{1,2}$, *alors on a* $\sum_{\delta}\subset\rho(L_\infty)$ *et il existe* $c>0$ *tel que :*

$$\|R(\lambda,L_\infty)\|\leq\frac{c}{|\lambda|}$$

Remarque 4.3.3 *et du théorème* (2.3.4) *on résulte que l'opérateur* L_∞ *est générateur d'un semi-groupe analytique.*

Bibliographie

[1] A . LUNARDI . Analytic semi groups and optimal regularity in parabolic problems , Birkhäuser , Boston , 1995.

[2] A . PAZY . Semigroups of linear operators and applications to partial differntial equations . Springer Verlag , New York , 1983.

[3] Beilin S . A . : Existance of solutions for one-dimensional equations with non local conditions . Electronic Journal of Differential Equations , 2001(2001) . 76 , 1-8.

[4] Benzinger H . E . : Green's function of ordinary differential operators , J . Differen . Equations , 7(1970) , 478-496.

[5] Birkhoff G , D , : Boundary vlue problems and expension problems of ordinary differential equation . Trans . Amer . Math . Soc . 9(1908) , 373-395.

[6] Birkhoff G , D , : Note on the expansion problems of ordinary linear differential equation . Rend . Circ . Mat . Palermo XXXVI . (1913).

[7] Birkhoff G , D , : on the assymptotic character of the solutions of centain linear differential equations containning . parameter . Trans . Amer , Math . Soc . 9 (1908) .219-231 .

[8] Cahlon B. , Kulkrani D. M., Shi P. : Stepwise stability for the heat equation with nonlocal constraint , Siam J. Numer . Anal. , 32 (1995) , 571-593.

[9] Cannon J. H . : The solution of the heat equation subject to specification energy, .Quart Appl . Math., 21 (1963) , 2 , 155-16.

[10] Coddington E . A . and Levinson N . : Theory of ordinary Differential equation . Mc Graw-hill . (1955).

[11] Denche . M . : Defect –Goerciveness for non regular transmission problem . Adances in Mathematical Sciences and Applications , 9 (1999) , 1 , 229-241 .

[12] Denche . M . Kourta A : Boundary value problem for second-order differential oprators with mixed non local boundary conditions . Journal of Inequalties in pure and Applied Mathematics , 5 , 2 (2004) .Article 38 , 16pp.

[13] Denche . M . , Marhoune A . L . : Mixed problem with nonlocal boundary conditions for a third-order partial differential equation of Mixed type . IJMMS , 26 , 7(2001) , 417-426.

[14] Denche , M. , Marhoune A . L . : Mixed problem with integral boundary condition for a high order mixed type partial differential equation , Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis 16 , 1 (2003) , 69-79 .

[15] Denche , M. , Meziani A Boundary Value Problem for Second-OrderDifferential Operators with Nonlocal Boundary Conditions Journal of Differential Equations , 56 , (2007) , 1-21.

[16] Dunford N . , Schwartz J .T . : Linear Operators . Part III . Spectral operators , Interscience , New York , 1971.

[17] Gallardo J .M. : Generation of analitic semi-groups by second-order differential operators with nonseparated boundary conditions . Rocky Mountain journal of mathematics , 30 (2000) 2 , 869-899 .

[18] Gallardo J . M . : second-order differential operators with integral boundary conditions and generation of analitic semigroups . Rocky Mountain journal of mathematics , 30(2000) , 4 , 1265-1291.

[19] Gallardo J. M . : Differential operators with mixed boundary conditions . : generation of analitic semi-groups , Nonlinear Analsis , 47 (2001) , 1333-1344 .

[20] Ionkin N . I. : Solution of a boundary-value problem in heat condution theory with nonlocal boundary condition , Differ . Uravn . 13 (1977) , 294-304.

[21] Ionkin N . I. : Stability of a problem in heat conduction theory with nonlocal boundary conditions , Differ . Uravn . , 15 (1979) , 7 , 1279-1283.

[22] Ionkin N . I . , Moiseev E . I. : A problem for the heat conduction equation with two-point boundary condition , Differ. Uravn. , 15 (1979) , 7 , 1284-1295.

[23] Lunardi A , : Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems. Progress in Nonlinear Differential Equations and Applications , 16 . Birkhauser Verlag , Basel (1995)

[24] Naimark M. A . : Linear differential operators , vols . 1-2 , Ungar publishing , (1967).

[25] Rasulov M.L. : Applications of the contour Integral Method , Nauka , Moscow , 1975.

[26] Samarskii A . A. : Some problems in differential equations theory , Differ. Uravn . 16.(1980) , 11 , 1925-1935.

[27] Samarskii A . A. : Some problems on the modern theory of differential equations , Differentsilnye Uravneniya (en Russe) , 16 (1980) , 11 , 1221-1228.

[28] Shi P. , Shillor M. : Design of contact Patterns in one Dimentional Thermoelasticity , in Theoretical Aspects of Industrial Design , Society for Industrial and Applied Mathematics , Philadelphia , PA , (1992).

[29] Silchenko Y.T. : Differential equations with non-densely defined operator coefficients , generating semigroups with singularities . Nonlinear Analysis .Oxford , 36 (1999) , 345-352.

[30] Silchenko J . T. : Differential equations with non-densely defined operator coefficients , generating semigroups with singularities . Nonlinear Anal ., 36 (1999) , 3 , Ser . A : Theory Methods , 345-352 .

[31] Silchenko Yu . T . : An ordinary differential operator with irregular boundary conditions . (Russian) Sibirsk . Mat . Zh . 40 (1999) , 1 , 183-190 , iv ; translation in siberian Math . J. 40 (1999) , 1 , 158-164.

[32] Silchenko Yu . T . : On a class of semigoups . (Russian) Funktsionl . Anal. i Prilozhen. 33 (1999) , 4 , 90-93 ; translation in Funct . Anal . Appl . 33 (1999) , 4 , 315-317 (2000).

[33] Silchenko Yu . T. : On an estimate for the resolvent of a second-order differential operator with irregular boundary conditions . (Russian) Izv. Vyssh. Uchebn . Zaved. Mat . (2000) , 2 , 65-68 ; translation in Russian Math. (Iz. VUZ) 44 (2000) , 2 , 63-66.

[34] Silchenko Yu . T. : On a mixed problem for a second-order differential equation with respect to time . (Russian) Izv . Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat . (2001) , 5 , 64-71 ; translation in Russian Math.(Iz .VUZ) , 45 (2001) , 5 , 61-68.

[35] Skubachevskii A. L ,Stelbov G.M. : On spectrum of differential operators with domain nondense in $\boldsymbol{L}_2(0,1)$, Dokladi ANSSR , 321 (1991) , 6 , 1158-1163.

[36] Stone M. H. : Irregular differantial system of order two and related expansion problems , Trans . Amer . Math. Soc., 29 (1927) , 23-53.

[37] Tamarkin J . D. : About Certain General Problems of Theory of Ordinary Linear Differential Equations and about Expansions of Derivative Functions into series , Petrograd , (1917).

[38] Yakubov S. : Linnear Differential-Operator Equations and Their Applications Elm , Baku , (1985).

[39] yakubov Y : Irregular boundary value problems for ordinary differential equations . Analysis (Munich) 18 (1998) , 4 , 359-402.

[40] Yurchuk N .I . : Mixed problem with an integral condition for certain parabolic equations , Differ . Uravn . , 22 (12) (1986) , 2117-2126.

Résumé

Le but de cette recherche est l'étude d'un operateur différentiel du second ordre avec des conditions aux limites combinant, une condition intégrale et les valeurs de la fonction inconnue aux extrémités de l'intervalle, ainsi que ses dérivées.

On trouve des conditions suffisantes sur les coefficients des conditions aux limites pour lesquelles l'opérateur considéré est générateur d'un semi-groupe analytique, ou analytique à singularités.

Enfin on applique les résultats obtenus à l'étude d'un problème aux limites.

Abstract

In this work we study second order differential operators with boundary conditions that combine weighting integral. And two point boundary conditions.

We determine sufficient conditions on the coefficients of boundary conditions guaranteeing that the considered operators are the generators of analytic and analytic with singularities semigroups.

Finally. We apply the obtained results to the study of a class of parabolic partial differential equation with non local boundary conditions.

ملخص

الهدف من هدا بحث هو دراسة مؤثر تفاضلي من الرتبة الثانية المرفق بشروط حدية تكاملية مع قيم للتابع المجهول و مشتقه بحدي المجال .

والمبتغي منه هو إيجاد شروط كافية على عوامل الشروط الحدية حتى يكون المؤثر المفترض مولد لنصف زمرة تحليلية أو لنصف زمرة تحليلية شاده,

نستعمل النتائج المحصل عليها لحل معادلة تفاضلية ذات مشتقات جزئية مرفقة بشروط حدية تكاملية مع قيم لتابع المجهول.