REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE JIJEL

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET DES SIENCES DE LA NATURE ET DE LA VIE

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

ECOLE DOCTORALE – POLE DE CONSTANTINE

N° d'ordre : ....

N° de série : ....

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de :

MAGISTER

Spécialité mathématiques

OPTION

Probabilités statistiques

THEME

Importance conjointe en fiabilité

Par :

YAKOUBI FATIMA

Soutenu le 14 / 12 / 09 devant le jury:

Président	:	M. Denche	Professeur	**Université Constantine**
Rapporteur	:	M. Boushaba	M.C	**Université Constantine**
Examinateur	:	M. Dakhmouche	M.C	**Université Constantine**
Examinateur	:	A. Benchetteh	Professeur	**Université Annaba**

Table des matières

Introduction

L'importance en fiabilité d'un composant est la mesure de l'importance de chaque composant dans le système. Cette notion a été introduite par Birnbaum [13] en 1968, elle s'est développée avec Barlow et Prochan [13]. Avec le temps, Il s'est avèré que l'interaction de deux ou plusieurs composants dans les systèmes d'aujourd'hui, qui sont de plus en plus complexes, est déterminante dans le calcul de la fiabilité. En 1993, J.S. Hong et C.H. Lie [6] introduisent la notion d'importance jointe en fiabilité de deux composants. Depuis, plusieurs travaux qui ont été réalisés, on cite les travaux de Hamstrong en 1995, J.S. Hong et All en 2002. En 2007, X. Gao et All introduisent l'importance conjointe en fiabilité de plusieurs composants où ils généralisent les travaux antérieurs.

L'objet de notre travail est la synthèse de tous ces travaux. On signale que notre contribution dans ce mémoire est d'établir une formule explicite de l'importance conjointe de l composants dans le cas des systèmes du type k-sur-n où les composants sont indépendants mais non nécessairement identiques. On a établit ensuite un résultat qui nous donne la relation entre la fiabilité d'un système k-sur-n dont les composants sont indépendants et son équivalent dont les composants ne sont pas indépendants.

Ce mémoire se compose de quatre chapitres. Le chapitre un est un ensemble de rappels des notions de base de la théorie de fiabilité qui vont nous être utiles dans la suite de ce travail. Le chapitre deux est consacré à la présentation de l'importance jointe en fiabilité de deux composants. Ici, on a introduit la notion d'importance en structure, l'importance en fiabilité d'un composant, l'importance jointe en fiabilité de deux composants, l'importance conditionnelle et l'importance en défaillance. On établira quelques relations qui existent entre ces différents types d'importance. Le chapitre trois est une généralisation du chapitre précédent. En effet, dans ce chapitre, on a introduit la notion d'importance conjointe en fiabilité de l composants pour l>2 ainsi que l'importance conjointe en défaillance. Enfin on a montré que cette importance est comprise entre $(-2)^{l-1}$ et 2^{l-1}. Le chapitre quatre est une application aux systèmes k- sur- n. Dans ce cas, on établit une formule explicite de l'importance conjointe en fiabilité de l composants dans le cas où les composants sont indépendants mais nécessairement identiques. Enfin, on exprime l'erreur entre la fiabilité d'un système k-sur-n dont les composants sont indépendants non identiques et la fiabilité de son équivalent dont les composants ne sont pas indépendants .

Chapitre 1

Introduction à la théorie de fiabilité

1.1 Rappels sur la théorie de fiabilité

La fiabilité est un concept qui intéresse de nombreuse domaines de l'activité humaines : Scientifique, technique et industriel...etc. Elle est définit comme la probabilité d'un système à accomplir une fonction requise pendant un intervalle de temps donné dans des conditions données. Le système étant un ensemble d'éléments interconnectés.

La durée de vie d'un système peut être considérée comme une variable aléatoire continue et non-négative notée T, pour décrire la distribution de T, on fait appel aux fonctions suivantes :

La fonction de répartition de T est la probabilité que le système tombe en panne avant l'instant t.

$$\forall t \geq 0, F(t) = \Pr(T \leq t),$$

elle s'appelle aussi la fonction de défaillance.

La densité de T est définie, si elle existe, comme la dérivée de $F(t)$ par rapport à t :

$$\forall t \geq 0, f(t) = \frac{dF(t)}{dt}.$$

La fiabilité donne la probabilité pour que le système fonctionne sur tout l'intervalle $[0, t]$:

$$\forall t \geq 0, R(t) = 1 - F(t) = \Pr(T > t).$$

Le temps moyen jusqu'à la défaillance noté *MTTF (Mean Time To Failure),* est l'espérance de la durée de vie T :

$$MTTF = \mathbb{E}[T] = \int_0^\infty R(t)dt.$$

En effet,

$$\mathbb{E}[T] = \int_0^\infty tf(t)dt = \int_0^\infty t\left[-R'(t)\right]dt.$$

Par l'intégration par partie, on obtient :

$$\mathbb{E}[T] = \underbrace{[tR(t)]_0^\infty}_{=0} + \int_0^\infty R(t)dt.$$

Le taux de défaillance est définie par :

$$\begin{aligned}
\lambda(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Pr(t \leq T \leq t + \Delta t \backslash T \geq t)}{\Delta t} = \frac{f(t)}{R(t)} \\
\lambda(t) &= \frac{-R'(t)}{R(t)} = -\left[\log R(t)\right]' \\
&\Rightarrow R(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(u)du\right).
\end{aligned}$$

1.2 Fonction de structure

Considérons un système S formé de n composants, chaque composant possède deux états : Un état de marche et un état de panne. Nous allons étudier différentes représentations de la structure du système, c'est-à dire, différentes manières d'exprimer si le système est en marche ou en panne, à partir des états de ses composants.

Définition 1.2.1 *Soit un système de n composants, pour $i \in \{1, ..., n\}$, on note*

$$x_i = \begin{cases} 1, & si\ le\ composant\ i\ fonctionne. \\ 0, & si\ le\ composant\ i\ est\ en\ panne. \end{cases}$$

La fonction de structure Φ *de ce système est :*

$$\begin{aligned} \Phi &: \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\} \\ x &= (x_1, x_2, ..., x_n) \rightarrow \Phi(x) = \begin{cases} 1, & si\ le\ système\ fonctionne. \\ 0, & si\ le\ système\ est\ en\ panne. \end{cases} \end{aligned}$$

Définition 1.2.2 *Le système est dit cohérent si :*
a-*Il est en panne quand tous les composants sont en panne.*

$$\Phi\left(0,0,...,0\right) = 0.$$

b-*Il fonctionne quand tous les composants fonctionnent.*

$$\Phi\left(1,1,...,1\right) = 1.$$

c-*Sa fonction de structure* Φ *est croissante c'est à dire :*

$$\forall 1 \leq i \leq n, x_i \leq y_i, \Phi(x) \leq \Phi(y).$$

Ce qui traduit l'idée naturelle suivante : Si le système marche et qu'un composant est réparé, le système reste en marche. De façon symètrique, si le système est en panne et qu'un composant tombe en panne, il reste en panne.

Définition 1.2.3 *Soit* Φ *une fonction de structure cohérente d'ordre* n*,* x_i *sont les variables aléatoires de Bernoulli qui représentent l'état du* $i^{éme}$ *composant c'est à dire :*

$$x_i = \begin{cases} 1, & si\ le\ composant\ i\ fonctionne. \\ 0, & si\ le\ composant\ i\ est\ en\ panne. \end{cases}$$

$\Pr\left[x_i = 1\right] = p_i$ *où* p_i *est la fiabilité du* $i^{ème}$ *composant alors :*

$$\begin{aligned} R(p) &= \Pr\left[\Phi(x) = 1\right] \\ &= \Pr\left[le\ système\ fonctionne\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\Phi(x)\right]. \end{aligned}$$

exemple 1.2.1 *Soit le système suivant :*

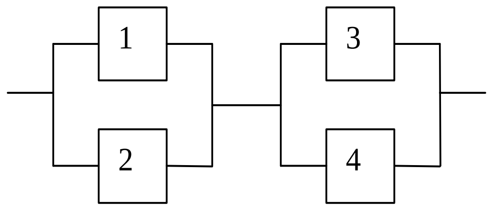


Fig.1.1.

Système de 2 sous systèmes série-parallèle. La fonction de structure correspendante est :

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \left(1 - \prod_{i=1}^{2}(1-x_i)\right)\left(1 - \prod_{i=3}^{4}(1-x_i)\right)\\ &= (1-(1-x_1)(1-x_2))\,(1-(1-x_3)(1-x_4)).\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}R(p) &= E(\Phi(x))\\ &= E\left[(1-(1-x_1)(1-x_2))\,(1-(1-x_3)(1-x_4))\right]\\ &= \left[(1-(1-p_1)(1-p_2))\,(1-(1-p_3)(1-p_4))\right]\\ &= p_1p_3+p_1p_2+p_2p_3+p_2p_4-p_1p_2p_3-p_2p_3p_4-p_1p_3p_4-p_1p_2p_4+p_1p_2p_3p_4.\end{aligned}$$

1.2.1 Décomposition pivotale

Soit Φ la fonction de structure d'un système de n composants. Pour un composant i fixé, et pour tout x, nous avons la relation :

$$\Phi(x) = x_i\Phi(x', 1_i) + (1-x_i)\Phi(x', 0_i),$$

où : $(x', 1_i) = (x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 1_i, x_{i+1}, ..., x_n)$, et $(x', 0_i) = (x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 0_i, x_{i+1}, ..., x_n)$.

Cette relation est appellée la décomposition pivotale de Φ selon le composant numéro i. Cette formule définie un algorithme qui permet de construire de proche en proche la fonction de structure. Il suffit pour cela de décomposer successivement selon les différents composants du système.

Pour calculer la fiabilité d'un système, on peut utiliser la décomposition de la fonction de structure Φ à partir d'un composant i, en prenant l'espérance de chaque terme. On obtient :

$$R(p) = p_iR(p', 1_i) + q_iR(p', 0_i),$$

où : $(p', 1_i) = R(p_1, p_2, ..., p_{i-1}, 1_i, p_{i+1}, ..., p_n)$, et $(p', 0_i) = R(p_1, p_2, ..., p_{i-1}, 0_i, p_{i+1}, ..., p_n)$.

1.3 Systèmes multicomposants

La distinction entre système à structure élémentaire et système à structure complexe est trés utile en fiabilité. Les systèmes à structure élémentaire concernent la structure série et la structure parallèle, ou plus précisément la structure $k - sur - n$ qui est une généralisation des deux précédents.

1.3.1 Système en série

Un système en série ne fonctionne que si tous ses composants fonctionnent. La panne d'un composant quelconque entraîne nécessairement la panne du système.
Il en résulte que :

$$T = \min\{T_1, ..., T_n\},$$

d'où

$$\begin{aligned} R(t) &= \Pr(T > t) \\ &= \Pr(T_1 > t, T_2 > t, ..., T_n > t) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \Pr(T_i > t) \\ &= \prod_{i=1}^{n} R_i(t), \end{aligned}$$

où, $R_i(t)$ c'est la fiabilité du $i^{éme}$ composant.

On constate que la fiabilité du système en série est plus fiable que celle du composant le moins fiable.

La fonction de structure d'un système en série est donnée par :

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \min(x_1, ..., x_n) \\ &= \prod_{i=1}^{n} x_i. \end{aligned}$$

1.3.2 Système en parallèle

Un système en parallèle fonctionne si au moins, un de ses composants fonctionne. La panne du système ne se produit donc que si tous les composants sont en panne.

Il en résulte que :

$$T = \max\{T_1, ..., T_n\},$$

d'où :

$$\begin{aligned} R(t) &= 1 - F(t) \\ &= 1 - \Pr(T \leq t) \\ &= 1 - \Pr(T_1 \leq t, T_2 \leq t, ..., T_n \leq t) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} \Pr(T_i \leq t) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - R_i(t)]. \end{aligned}$$

La fiabilité d'un système en parallèle est donc supérieure à celle du composant le plus fiable.

La fonction de structure d'un système en parallèle est donnée par :

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \max(x_1, ..., x_n) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} (1\text{-}x_i). \end{aligned}$$

1.3.3 Système $k - sur - n$

Un système $k - sur - n$ fonctionne si au moins k parmi n composants fonctionnent. Si ces composants ont la même fiabilité $R_1(t)$, le nombre de composants à l'instant t obéit à une ditribution binomiale et l'on trouve que :

$$R(t) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} R_1^i(t) [1 - R_1(t)]^{n-i}.$$

Notons que les systèmes $k - sur - n$ admettent comme cas particulier les systèmes en série $(k = n)$, et les sytèmes en parallèle $(k = 1)$.

Si les composants ne sont pas identiques, on peut exprimer la fonction de fiabilité du système comme suit :

$$R(t) = \sum_{j=0}^{n-k} \sum_{|J|=j} \left(\prod_{i \in J} F_i(t) \right) \left(\prod_{i' \notin J} \bar{F}_{i'}(t) \right),$$

$F_i(t)$ c'est la défaillance du $i^{éme}$ composant.

La fonction de structure d'un système $k - sur - n$ est donnée par :

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \geq k. \\ 0, \ autrement. \end{cases}$$

Chapitre 2

Importance jointe en fiabilité de deux composants

La mesure de l'importance en fiabilité est la première méthode pour définir l'importance de chaque composant dans le système. L'importance en fiabilité d'un composant mesure l'amélioration de la fiabilité du système par l'amélioration de la fiabilité de ce composant. Dans ce chapitre nous allons exposer les formules de l'importance en fiabilité et en défaillance, l'importance jointe conditionnelle. Nous donnerons aussi la relation entre ces formules.

Pour cela, nous aurons besoin des notation suivantes :

S : Le système.

n : Le nombre de composants dans le système.

$c_1, c_2, ..., c_n$: Les composants du système.

p_i : La fiabilité du $i^{\text{ème}}$ composant.

$q_i = 1 - p_i$: La probabilité de panne du $i^{\text{ème}}$ composant.

$R(p)$: La fiabilité du système.

$p = (p_1, p_2, ..., p_n)$.

2.1 Importance en structure

Dans la définition suivante, on donne l'importance en structure d'un composant dans le système.

Définition 2.1.1 *L'importance en structure d'un composant i notée* $I_\Phi(i)$

est donnée par :

$$I_\Phi(i) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\{X, x_i=1\}} [\Phi(1_i, X) - \Phi(0_i, X)] = \frac{1}{2^{n-1}} \eta_\Phi(i).$$

2^{n-1} étant bien sur le nombre total de toutes les situations possibles pour $n-1$ composants restants d'être soit à l'état 0 soit à l'état 1.

Notons alors que $\eta_\Phi(i)$ comptabilise le nombre de situation où le composant i est déterminant pour le fonctionnement du système.

Caractérisation :

$I_\Phi(i)$ est la proportion qui mesure le nombre de fois où la panne (respctivement le fonctionnement) du système est due exclusivement à la panne (respctivement le fonctionnement) du composant i.

2.2 Importance en fiabilité

Définition 2.2.1 *Supposons q'un système cohérent de n composants a une fonction de fiabilité $R(p)$. L'importance en fiabilité du composant c_i notée $RI(c_i)$, est donnée par la formule :*

$$RI(c_i) = \frac{\partial R(p)}{\partial p_i}.$$

C'est la dérivé partielle de la fonction de fiabilité du système par rapport à la fiabilité du composant c_i.

Remarque 2.2.1 *Si les composants sont indépendants, alors :*

$$\begin{aligned} RI(c_i) &= \frac{\partial R(p)}{\partial p_i} \\ &= \frac{\partial (p_i R(1_i, p') + q_i R(0_i, p'))}{\partial p_i} \\ &= R(1_i, p') - R(0_i, p'), \end{aligned}$$

tel que :
$(1_i, p') = (p_1, p_2, ..., p_{i-1}, 1_i, p_{i+1}, ..., p_n)$.
$(0_i, p') = (p_1, p_2, ..., p_{i-1}, 0_i, p_{i+1}, ..., p_n)$.
$R(1_i, p')$ *la fonction de fiabilité où le composant c_i fonctionne.*
$R(0_i, p')$ *la fonction de fiabilité où le composant c_i est en panne.*
p' *représente le vecteur p sans le composant i.*

Remarque 2.2.2 *Dans le cas où les composants sont identiques avec* $p_i = p = \frac{1}{2}$ *pour tout* $i = 1, 2, ..., n$. *L'importance du* $i^{éme}$ *composant coincide de avec l'importance de structure du composant i notée :* $SI(c_i)$

2.2.1 Importance jointe en fiabilité

L'importance jointe en fiabilité de deux composants est une mesure d'interaction de deux composants dans le systéme, on la note (JRI).

Définition 2.2.2 *Soit un système cohérent de n composants, on définit l'importance jointe en fiabilité pour deux composants par :*

$$JRI(c_i, c_j) = \frac{\partial^2 R(p)}{\partial p_i \partial p_j}, \qquad \text{pour tout } i, j = 1, ..., n.$$

Si, c_i et c_j sont indépendants, on a :

$$\begin{aligned}
JRI(c_i, c_j) &= \frac{\partial^2 R(p)}{\partial p_i \partial p_j} \\
&= \frac{\partial}{\partial p_j}\left[\frac{\partial R(p)}{\partial p_i}\right] \\
&= \frac{\partial (R(1_i, p) - R(0_i, p))}{\partial p_j} \\
&= \frac{\partial \left(p_j R(1_i, 1_j, p') + q_j R(1_i, 0_j, p') - p_j R(0_i, 1_j, p') - q_j R(0_i, 0_j, p')\right)}{\partial p_j} \\
&= R(1_i, 1_j, p') - R(1_i, 0_j, p') - R(0_i, 1_j, p') + R(0_i, 0_j, p'),
\end{aligned}$$

où, $R(1_i, 1_j, p')$ est la fonction de fiabilité du système quand les composants c_i et c_j fonctionnent.

$R(1_i, 0_j, p')$ est la fonction de fiabilité du système quand le composant c_i fonctionne et le composant c_j en panne.

$R(0_i, 1_j, p')$ est la fonction de fiabilité du système quand le composant c_i en panne et le composant c_j fonctionne.

$R(0_i, 0_j, p')$ est la fonction de fiabilité du système quand les composants c_i et c_j sont en panne.

Lemme 2.2.1 *La relation entre l'importance jointe en fiabilité de composants* c_i, c_j *et l'importance marginale en fiabilité de composant* c_i (*on la note* $MRI(c_i)$)

est donnée par :

$$\begin{aligned} JRI(c_i,c_j) &= \underset{s*c_j}{MRI}(c_i) - \underset{s-c_j}{MRI}(c_i). \\ JRI(c_i,c_j) &= \underset{S*C_i}{MRI}(c_j) - \underset{S-C_i}{MRI}(c_j), \end{aligned}$$

où :
$s * c_j$ *: Système tel que le composant* c_j *fonctionne.*
$s - c_j$ *: Système tel que le composant* c_j *est en panne.*

Remarque 2.2.3

$$\begin{aligned} JRI(c_i,c_j) &< 0 \Longleftrightarrow \underset{s*c_j}{MRI}(c_i) < \underset{s-c_j}{MRI}(c_i). \\ JRI(c_i,c_j) &> 0 \Longleftrightarrow \underset{s*c_j}{MRI}(c_i) > \underset{s-c_j}{MRI}(c_i). \\ JRI(c_i,c_j) &= 0 \Longleftrightarrow \underset{s*c_j}{MRI}(c_i) = \underset{s-c_j}{MRI}(c_i). \end{aligned}$$

Lemme 2.2.2 *Il ya une autre relation entre l'importance jointe en fiabilité de composants* c_i *et* c_j *et l'importance marginale en fiabilité du composant* c_i *(on la note* $MRI(c_i)$*) qui est exprimée par :*

$$\begin{aligned} JRI(c_i,c_j) &= \frac{\left(MRI(c_i) - \underset{s-c_j}{MRI}(c_i)\right)}{p_j}. \\ JRI(c_i,c_j) &= \frac{\left(MRI(c_j) - \underset{s-c_j}{MRI}(c_j)\right)}{p_i}. \end{aligned}$$

Preuve On a :

$$\begin{aligned} MRI(c_i) &= \frac{\partial}{\partial p_i}\left(R(p)\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial p_i}\left(p_j R(s*c_j) + q_j R(s-c_j)\right) \\ &= p_j \frac{\partial R(s*c_j)}{\partial p_i} + q_j \frac{\partial R(s-c_j)}{\partial p_i} \\ &= p_j \left(\underset{s*c_j}{MRI}(c_i) - \underset{s-c_j}{MRI}(c_i)\right) + \underset{s-cj}{MRI}(c_i) \end{aligned}$$

donc,

$$JRI(c_i, c_j) = \frac{MRI(c_i) - \underset{s-c_j}{MRI}(c_i)}{p_j}.$$

■

2.3 Importance en fiabilité conditionnelle

Dans la suite, on va définir l'importance et l'importance jointe en fiabilité sachant que les états de certains composants sont connus (fonctionnent ou bien sont en panne) en utilisant les définitions précédentes.

Définition 2.3.1 *Soit :*

$$z_i = \begin{cases} 1, & si\ le\ composant\ c_i\ fonctionne. \\ 0, & si\ le\ composant\ c_i\ est\ en\ panne. \end{cases}$$

On appelle importance en fiabilité conditionnelle du composant c_j, et notée par RI_j, la relation suivante :

$$RI(c_j/p_i = z_i) = \frac{\partial R(p_1, ..., p_{i-1}, z_i, p_{i+1}, ..., p_n)}{\partial p_j}.$$

Quand les composants sont indépendants, on a :

$$\begin{aligned} RI(c_j/p_i &= z_i) = \frac{\partial R(p_1, ..., p_{i-1}, z_i, p_{i+1}, ..., p_n)}{\partial p_j} \\ &= \frac{\partial \left(p_j R(p_1, ..., z_i, ..., p_{j-1}, 1_j, p_{j+1}, ..., p_n) + q_j R(p_1, ..., z_i, ..., p_{j-1}, 0_j, p_{j+1}, ..., p_n)\right)}{\partial p_j} \\ &= R(p_1, ..., z_i, ..., p_{j-1}, 1_j, p_{j+1}, ..., p_n) - R(p_1, ..., z_i, ..., p_{j-1}, 0_j, p_{j+1}, ..., p_n). \end{aligned}$$

Définition 2.3.2 *Dans un système où les composants sont indépendants, l'importance en fiabilité conditionnelle du composant c_l sachant que les états des composants c_i et c_j sont connus est donnée par :*

$$\begin{aligned} RI(c_l/p_i &= z_i, p_j = z_j) = \frac{\partial R(z_i, z_j, p_l, p)}{\partial p_l} \\ &= R(z_i, z_j, 1_l, p') - R(z_i, z_j, 0_l, p'), \end{aligned}$$

où, z_i et z_j : sont les états des composants c_i et c_j respectivement.

Pour deux composants, nous pouvons donner la définition suivante de l'importance jointe en fiabilité conditionnelle, qu'on notera par $JRI(c_i, c_j/p_l = z_l)$.

Définition 2.3.3 *L'importance jointe en fiabilité conditionnelle des composants c_j et c_i, quand l'état du composant c_l est connu, est :*

$$JRI(c_i, c_j/p_l = z_l) = \frac{\partial^2 R(p_1, ..., z_l, ..., p_n)}{\partial p_i \partial p_j}, \qquad l \neq i, j.$$

Si les composants sont indépendants, on a :

$$\begin{aligned} JRI(c_i, c_j/p_l &= z_l) = \frac{\partial^2 R(p_1, ..., z_l, ..., p_n)}{\partial p_i \partial p_j} \\ &= R(z_l, 1_i, 1_j, p) - R(z_l, 1_i, 0_j, p) - R(z_l, 0_i, 1_j, p) + R(z_l, 0_i, 0_j, p). \end{aligned}$$

Définition 2.3.4 *Dans un système où les composants sont indépendants, l'importance jointe en fiabilité conditionnelle des composants c_i et c_j quand les états des composants c_t et c_s sont connus, est donnée par la relation suivante :*

$$\begin{aligned} JRI(c_i, c_j/p_s &= z_s, p_t = z_t) = \frac{\partial^2 R(z_s, z_t, p)}{\partial p_i \partial p_j} \\ &= R(1_i, 1_j, z_s, z_t, p) - R(1_i, 0_j, z_s, z_t, p) \\ &\quad - R(0_i, 1_j, z_s, z_t, p) + R(0_i, 0_j, z_s, z_t, p), \end{aligned}$$

tel que : z_s et z_t sont les états des composants c_s et c_t, respectivement.

2.4 Importance en défaillance

Soit un système cohérent de n composants. Dans l'étude de l'importance en défaillance on se base sur la défaillance du système plus que sur sa fiabilité.

On définit l'importance en défaillance du i^{eme} composant et on la note $FI(c_i)$ comme suit :

$$FI(c_i) = \frac{\partial F(p)}{\partial q_i}, \qquad \forall i = 1, ..., n.$$

Lemme 2.4.1 *Si les composants sont indépendants, on a :*

$$\begin{aligned} FI(c_i) &= \frac{\partial F(p)}{\partial q_i} \\ &= \frac{\partial \left(p_i F(1_i, p') + q_i F(0_i, p')\right)}{\partial q_i} \\ &= F(0_i, p') - F(1_i, p'). \end{aligned}$$

Remarque 2.4.1

$$FI(c_i) = RI(c_i),$$

car :

$$\begin{aligned} FI(c_i) &= \frac{\partial F(p)}{\partial q_i} \\ &= \frac{\partial \left(1 - R(p)\right)}{\partial \left(1 - p_i\right)} \\ &= \frac{\partial R(p)}{\partial p_i} \\ &= RI(c_i) \end{aligned}$$

Définition 2.4.1 *Pour deux composants c_i et c_j l'importance jointe en défaillance est donnée par la relation :*

$$JFI(c_i, c_j) = \frac{\partial^2 F(p)}{\partial q_i \partial q_j} \qquad \forall i, j = 1, ..., n.$$

Lemme 2.4.2 *La relation entre l'importance jointe en défaillance et l'importance marginale en défaillance est :*

$$JFI(c_i, c_j) = \underset{s-c_j}{MFI}(c_j) - \underset{s*c_i}{MFI}(c_j),$$

ou :

$$JFI(c_i, c_j) = \underset{S-C_j}{MFI}(c_i) - \underset{s*c_j}{MFI}(c_i),$$

telle que,
$\underset{s-c_i}{MFI}(c_j)$ est l'importance marginale en défaillance du composant c_j sachant le composant c_i est en panne.
$\underset{s*c_i}{MFI}(c_j)$ est l'importance marginale en défaillance du composant c_j sachant le composant c_i fonctionne.

Remarque 2.4.2

$$
\begin{aligned}
JFI(c_i, c_j) &= \frac{\partial^2 F(p)}{\partial q_i \partial q_j} \\
&= \frac{\partial^2 \left(1 - R(p)\right)}{\partial \left(1 - p_i\right) \partial \left(1 - p_j\right)} \\
&= \frac{-\partial^2 R(p)}{\left(-\partial p_i\right)\left(-\partial p_j\right)} \\
&= -JRI(c_i, c_j).
\end{aligned}
$$

Chapitre 3

Importance conjointe en fiabilité de plusieurs composants

L'étude de l'importance en fiabilité est très importante. Mais, cette étude ne donne pas l'interaction entre les composants dans le système. C'est pour ça, on va étudier l'importance conjointe en fiabilité de plusieurs composants dans le système. Dans la suite, on utilise les mêmes notations qui se trouvent dans le chapitre précédent

3.1 Importance conjointe en fiabilité

Définition 3.1.1 *L'importance conjointe en fiabilité* (JRI) *de trois composants* c_i, c_j *et* c_h *est donnée par :*

$$JRI(c_i, c_j, c_h) = \frac{\partial^3 R(p)}{\partial p_i \partial p_j \partial p_h} \qquad \forall i, j, h = 1, ..., n$$

Théorème 3.1.1 [8]

Si les composants c_i, c_j et c_h sont indépendants, on a :

$$\begin{aligned} JRI(c_i, c_j, c_h) &= R(1_i, 1_j, 1_h, p') - R(1_i, 1_j, 0_h, p') - R(1_i, 0_j, 1_h, p') \\ &\quad - R(0_i, 1_j, 1_h, p') + R(0_i, 0_j, 1_h, p') + R(0_i, 1_j, 0_h, p') \\ &\quad + R(1_i, 0_j, 0_h, p') - R(0_i, 0_j, 0_h, p') \end{aligned}$$

Preuve Pour les composants c_i, c_j *et* c_h on a :

$$\begin{aligned}
JRI(c_i, c_j, c_h) &= \frac{\partial^3 R(p)}{\partial p_i \partial p_j \partial p_h} \\
&= \frac{\partial \left(\frac{\partial^2 R(p)}{\partial p_i \partial p_j} \right)}{\partial p_h} \\
&= \frac{\partial \left(R(1_i, 1_j, p') - R(1_i, 0_j, p') - R(0_i, 1_j, p') + R(0_i, 0_j p') \right)}{\partial p_h} \\
&= \frac{\partial \left[p_h R(1_i, 1_j, 1_h, p') + q_h R(1_i, 1_j, 0_h, p') - p_h R(1_i, 0_j, 1_h, p') \right]}{\partial p_h} \\
&\quad + \frac{\partial \left[-q_h R(1_i, 0_j, 0_h, p') - p_h R(0_i, 1_j, 1_h, p') - q_h R(0_i, 1_j, 0_h, p') \right]}{\partial p_h} \\
&\quad + \frac{\partial \left[p_h R(0_i, 0_j, 1_h, p') + q_h R(0_i, 0_j, 0_h, p') \right]}{\partial p_h} \\
&= R(1_i, 1_j, 1_h, p') - R(1_i, 1_j, 0_h, p') - R(1_i, 0_j, 1_h, p') \\
&\quad - R(0_i, 1_j, 1_h, p') + R(1_i, 0_j, 0_h, p') + R(0_i, 1_j, 0_h, p') \\
&\quad + R(0_i, 0_j, 1_h, p') - R(0_i, 0_j, 0_h, p'),
\end{aligned}$$

d'où le resultat du théorème. ■

Définition 3.1.2 *Soit un système de n composants, l'importance conjointe en fiabilité de l $(l \leq n)$ composants est :*

$$JRI(c_1, ..., c_l) = \frac{\partial^l R(p)}{\prod_{i=1}^{l} \partial p_i}.$$

Théorème 3.1.2 [13]

Si les composants $c_1, c_2, ..., c_l$ sont indépendants, on a :

$$\begin{aligned}
JRI(c_1, c_2, ..., c_l) &= R(1_1, 1_2, ..., 1_l, p') - R(1_1, 1_2, ..., 0_l, p') \\
&\quad \pm ... \pm R(0_1, 0_2, ..., 1_l, p') \pm R(0_1, 0_2, ..., 0_l, p').
\end{aligned}$$

Les signes entre les fonctions R sont positifs si :

♦ l **est impair** et le nombre des composants qui fonctionnent est impair,

♦ l **pair** et le nombre des composants qui fonctionnent est pair

Les signes entre les fonctions R sont négatifs si :

♦ l **est impair** et le nombre des composants qui fonctionnent est pair

♦ l **pair** et le nombre des composants qui fonctionnent est impair

Le signes de $R(0_1, 0_2, ..., 0_l, p)$ est négatif si l impair, et positif si l paire.

Corollaire 3.1.1

$$\begin{aligned} JRI(c_i, c_j, c_h) &= \underset{s*c_h}{JRI}(c_i, c_j) - \underset{s-c_h}{JRI}(c_i, c_j). \\ JRI(c_1, c_2, ..., c_l) &= \underset{s*c_l}{JRI}(c_1, ..., c_{l-1}) - \underset{s-c_l}{JRI}(c_1, ..., c_{l-1}). \end{aligned}$$

Preuve D'après la définition de $JRI(c_i, c_j, c_h)$ on a :

$$\begin{aligned} JRI(c_i, c_j, c_h) &= \frac{\partial^3 R(p)}{\partial p_i \partial p_j \partial p_h} \\ &= \frac{\partial}{\partial p_h}\left(\frac{\partial^2 R(p)}{\partial p_i \partial p_j}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial p_h}\left(JRI(c_i, c_j)\right) \\ &= \underset{s*c_h}{JRI}(c_i, c_j) - \underset{s-c_h}{JRI}(c_i, c_j) \end{aligned}$$

donc, $JRI(c_i, c_j, c_h) = \underset{s*c_h}{JRI}(c_i, c_j) - \underset{s-c_h}{JRI}(c_i, c_j)$. ■

Corollaire 3.1.2 *Pour $l > 1$ on a :*

$$\begin{aligned} JRI(c_1, ..., c_l) &< 0 \Longleftrightarrow \underset{s*c_l}{JRI}(c_1, ..., c_{n-1}) < \underset{s-c_l}{JRI}(c_1, ..., c_{l-1}). \\ JRI(c_1, ..., c_{l-1}) &> 0 \Longleftrightarrow \underset{s*c_l}{JRI}(c_1, ..., c_{l-1}) > \underset{s-c_l}{JRI}(c_1, ..., c_{l-1}). \\ JRI(c_1, ..., c_{l-1}) &= 0 \Longleftrightarrow \underset{s*c_l}{JRI}(c_1, ..., c_l) = \underset{s-c_l}{JRI}(c_1, ..., c_l). \end{aligned}$$

Corollaire 3.1.3 *Il existe une autre relation entre l'importance conjointe en fiabilité de trois composants et l'importance jointe en fiabilité de deux composants qui est donnée par :*

$$\begin{aligned} JRI(c_i, c_j, c_h) &= \frac{\left(JRI(c_i, c_j) - \underset{s-c_h}{JRI}(c_i, c_j)\right)}{p_h}. \\ JRI(c_1, ..., c_l) &= \frac{\left(JRI(c_1, ..., c_{l-1}) - \underset{s-c_l}{JRI}(c_1, ..., c_{l-1})\right)}{p_l}. \end{aligned}$$

Preuve

$$\begin{aligned} JRI(c_i, c_j) &= \frac{\partial^2 R(p)}{\partial p_i \partial p_j} \\ &= \frac{\partial^2 \left(p_h R(s * c_h) + q_h R(s - c_h)\right)}{\partial p_i \partial p_j} \\ &= p_h \underset{s*c_h}{JRI}(c_i, c_j) + q_h \underset{s-c_h}{JRI}(c_i, c_j) \\ &= p_h \left(\underset{s*c_h}{JRI}(c_i, c_j) - \underset{s-c_h}{JRI}(c_i, c_j) \right) + \underset{s-c_h}{JRI}(c_i, c_j) \\ &= p_h JRI(c_i, c_j, c_h) + \underset{s-c_h}{JRI}(c_i, c_j) \end{aligned}$$

Alors : $JRI(c_i, c_j, c_h) = \frac{\left(JRI(c_i,c_j) - \underset{s-c_h}{JRI}(c_i,c_j) \right)}{p_h}$. ■

Remarque 3.1.1 *$JRI(c_i, c_j, c_l)$ peut être exprimée par la relation suivante :*

$$JRI(c_i, c_j, c_l) = JRI(c_i, c_j/p_l = 1_l) - JRI(c_i, c_j/p_l = 0_l).$$

Preuve On a :

$$\begin{aligned} JRI(c_i, c_j/p_l &= z_l) = R(z_l, 1_i, 1_j, p) - R(z_l, 1_i, 0_j, p) \\ &\quad -R(z_l, 0_i, 1_j, p) + R(z_l, 0_i, 0_j, p) \end{aligned}$$

quand le composant c_l fonctionne alors :

$$\begin{aligned} JRI(c_i, c_j/p_l &= 1) = R(1_l, 1_i, 1_j, p) - R(1_l, 1_i, 0_j, p) \\ &\quad -R(1_l, 0_i, 1_j, p) + R(1_l, 0_i, 0_j, p) \end{aligned}$$

et quand le composant c_l est en panne on a :

$$\begin{aligned} JRI(c_i, c_j/p_l &= 0) = R(0_l, 1_i, 1_j, p) - R(0_l, 1_i, 0_j, p) \\ &\quad -R(0_l, 0_i, 1_j, p) + R(0_l, 0_i, 0_j, p) \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} JRI(c_i, c_j/p_l &= 1) - JRI(c_i, c_j/p_l = 0_l) = R(1_l, 1_i, 1_j, p) - R(1_l, 1_i, 0_j, p) \\ &\quad -R(1_l, 0_i, 1_j, p) + R(1_l, 0_i, 0_j, p) - R(0_l, 1_i, 1_j, p) + R(0_l, 1_i, 0_j, p) \\ &\quad +R(0_l, 0_i, 1_j, p) - R(0_l, 0_i, 0_j, p) \\ &= R(1_l, 1_i, 1_j, p) - R(1_l, 1_i, 0_j, p) - R(1_l, 0_i, 1_j, p) - R(0_l, 1_i, 1_j, p) \\ &\quad +R(1_l, 0_i, 0_j, p) + R(0_l, 1_i, 0_j, p) + R(0_l, 0_i, 1_j, p) - R(0_l, 0_i, 0_j, p) \\ &= JRI(c_i, c_j, c_l) \end{aligned}$$

donc : $JRI(c_i, c_j, c_l) = JRI(c_i, c_j/p_l = 1) - JRI(c_i, c_j/p_l = 0)$. ■

Corollaire 3.1.4 *Soit un système de n composants. Pour les composants c_i et c_j, on distingue les deux cas suivants :* $\begin{cases} JRI(c_i, c_j) \leq 0, & \text{si } c_i \text{ et } c_j \text{ sont en parallèle.} \\ JRI(c_i, c_j) \geq 0, & \text{si } c_i \text{ et } c_j \text{ sont en série.} \end{cases}$

a)Si les composants c_h et (c_i, c_j) sont en parallèle et (c_i, c_j) sont en parallèle, alors :

$$JRI(c_i, c_j, c_h) \geq 0.$$

b)Si les composants c_h et (c_i, c_j) sont en série et (c_i, c_j) sont en parallèle, alors :

$$JRI(c_i, c_j, c_h) \leq 0.$$

c)Si les composants c_h et (c_i, c_j) sont en parallèle et (c_i, c_j) sont en série, alors :

$$JRI(c_i, c_j, c_h) \leq 0.$$

d)Si les composants $c_h$et (c_i, c_j) sont en série et (c_i, c_j) sont en série, alors :

$$JRI(c_i, c_j, c_h) \geq 0.$$

exemple 3.1.1 *Soit le système représenté par la structure suivante :*

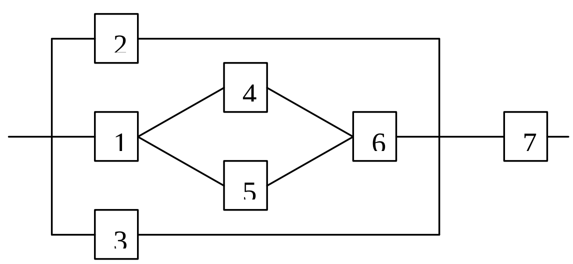


Fig.2.1.

Dans cette structure il y'a 7 composants indépendants et on a :
$JRI(c_1, c_2, c_4) = -p_3p_5p_6p_7 + p_3p_6p_7 + p_5p_6p_7 - p_6p_7.$
$JRI(c_1, c_2, c_6) = -p_3p_4p_5p_6 + p_3p_4p_7 + p_3p_5p_7 + p_4p_8p_7 - p_4p_7 - p_5p_7.$
$JRI(c_1, c_2, c_3) = -p_4p_5p_6p_7 + p_4p_6p_7 + p_5p_6p_7.$
$JRI(c_1, c_2, c_7) = -p_3p_4p_5p_6 + p_4p_5p_6 + p_3p_4p_6 - p_3p_5p_6 - p_5p_6 - p_4p_6.$
Pour $p_i = p$ telle que $0 \leq p \leq 1$.
$JRI(c_1, c_2, c_3) = -p^4 + 2p^3 = p^3\,(2 - p) > 0.$
$JRI(c_1, c_2, c_4) = JRI(c_1, c_2, c_5) = -p^4 + 2p^3 - p^2 = p^2\,(2p - 1 - p^2) < 0.$
$JRI(c_1, c_2, c_6) = -p^4 + p^3 - 2p^2 = p^2\,(p - p^2 - 2) < 0.$
$JRI(c_1, c_2, c_3) = -p^4 + 3p^3 - 2p^2 = p^2(3p - p^2 - 2) < 0.$

3.2 Importance conjointe en défaillance de l composants

Soit un système cohérent de n composants, on va étudier l'importance conjointe en défaillance de l composants et on la note JFI

Définition 3.2.1 *On peut définir l'importance conjointe en défaillance de multicomposants par la relation suivante :*

$$JFI(c_1, c_2, ..., c_l) = \frac{\partial^l F(p)}{\prod\limits_{i=1}^{l} \partial q_i},$$

pour $l \leq n$.

Remarque 3.2.1 *D'une façon générale on a :*

$$JFI(c_1, c_2, ..., c_l) = (-1)^{l+1} JRI(c_1, c_2, ..., c_l).$$

Preuve On fait cette démonstration par récurrence.

pour $l = 1$ on a :

$$\begin{aligned} FI(c_i) &= \frac{\partial F(p)}{\partial q_i} \\ &= \frac{\partial (1 - R(p))}{\partial (1 - p_i)} \\ &= \frac{\partial R(p)}{\partial p_i}. \end{aligned}$$

On suppose que la proposition est vraie jusqu'à l'ordre $(l-1)$ et on montre qu'elle est vraie à l'ordre l.

alors : $JFI(c_1, c_2, ..., c_{l-1}) = (-1)^l JRI(c_1, c_2, ..., c_{l-1})$.

Et on a :

$$\begin{aligned}
JFI(c_1, c_2, ..., c_l) &= \frac{\partial^l F(s)}{\prod\limits_{i=1}^{l} \partial q_i} \\
&= \frac{\partial}{\partial q_l}\left(\frac{\partial^{l-1} F(s)}{\prod\limits_{i=1}^{l-1} \partial q_i}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial q_l}\left(JFI(c_1, c_2, ..., c_{l-1})\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial q_l}\Big((-1)^l\, JRI(c_1, c_2, ..., c_{l-1})\Big) \\
&= \frac{\partial}{\partial\left(1-p_l\right)}\Big((-1)^l\, JRI(c_1, c_2, ..., c_{l-1})\Big) \\
&= (-1)^l\left(-JRI(c_1, c_2, ..., c_l)\right) \\
&= (-1)^{l+1}\left(JRI(c_1, c_2, ..., c_l)\right).
\end{aligned}$$

Donc : $JFI(c_1, c_2, ..., c_l) = (-1)^{l+1}\, JRI(c_1, c_2, ..., c_l)$. ■

On a les résultats suivants :

Corollaire 3.2.1 *Par symétrie avec le lemme 2.4.2, la relation entre JFI de trois composants et JFI de deux composants est :*

$$JFI(c_i, c_j, c_h) = \underset{s-c_h}{JFI}(c_i, c_j) - \underset{s*c_h}{JFI}(c_i, c_j).$$

Donc, la relation entre JFI de l composants et JFI de $(l-1)$ composants est :

$$JFI(c_1, ..., c_l) = \underset{s-c_l}{JFI}(c_1, ..., c_{l-1}) - \underset{s*c_l}{JFI}(c_1, ..., c_{l-1}).$$

Preuve Pour l>1 on a,

$$\begin{aligned}
JFI(c_1,...,c_l) &= \frac{\partial^l F(s)}{\prod\limits_{i=1}^{l}\partial q_i} = \frac{\partial^{l-1}(F(s))}{\left(\prod\limits_{i=1}^{l-1}\partial q_i\right)\partial q_l} \\
&= \frac{\partial^{l-1}}{\prod\limits_{i=1}^{l-1}\partial q_i}\left(\frac{\partial F(s)}{\partial q_l}\right) \\
&= \frac{\partial^{l-1}}{\prod\limits_{i=1}^{l-1}\partial q_i}\left(F(0_l,p') - F(1_l,p')\right) \\
&= \frac{\partial^{l-1}}{\prod\limits_{i=1}^{l-1}\partial q_i}F(0_l,p') - \frac{\partial^{l-1}}{\prod\limits_{i=1}^{l-1}\partial q_i}F(1_l,p') \\
&= \underset{s-c_l}{JFI}(c_1,...,c_l) - \underset{s*c_l}{JFI}(c_1,...,c_l)
\end{aligned}$$

alors, $JFI(c_1,...,c_l) = \underset{s-c_l}{JFI}(c_1,...,c_{l-1}) - \underset{s*c_l}{JFI}(c_1,...,c_{l-1})$. ■

Corollaire 3.2.2 *Dans un système où les composants sont indépendants, la valeur de l'importance conjointe en fiabilité de l composants est entre $\left(-2^{l-1}\right)$ et $\left(2^{l-1}\right)$.*

Preuve Les valeurs de l'importance en fiabilité conditionnelle du composant c_i, $MRI(c_i/p_j = 1)$ et $MRI(c_i/p_j = 0)$ sont comprises entre -1 et 1.

Quand les composants c_i et c_j sont indépendants on a :

$$JRI(c_i,c_j) = MRI(c_i/p_j = 1) - MRI(c_i/p_j = 0)$$

donc, $JRI(c_i,c_j) \in [-2,2]$.

Pour les trois composants c_i, c_j et c_h on a:

$$JRI(c_i,c_j,c_h) = JRI(c_i,c_j/p_h = 1) - JRI(c_i,c_j/p_h = 0)$$

alors, $JRI(c_i,c_j,c_h) \in [-2^2,2^2]$.

Pour l composants on a :

$$JRI(c_1,c_2,...,c_l) = JRI(c_1,...,c_{l-1}/p_l = 1) - JRI(c_1,...,c_{l-1}/p_l = 0)$$

on peut conclure que $JRI(c_1,c_2,...,c_l) \in \left[-2^{l-1},2^{l-1}\right]$. ■

Chapitre 4

Application aux systèmes $k - sur - n$

Supposons q'un système soit formé de n composants. Ce système est en état de marche (bon fonctionnement) lorsque k au moins des n composants sont en état de marche, ou, ce qui revient au même, lorsque $(n - k)$ au plus sont défaillants. Ce système est appelé $k - sur - n$, on le note k/n par fois on précise $k/n : G$ pour dire qu'il fonctionne $(Good)$ si au moins k composants fonctionnent pour le distinguer du système $k/n : F$ qui indique qu'il est en panne $(False)$ si au moins k composants sont en panne.

Le but de ce chapitre est de donner les formules de l'importance en fiabilité et l'importance conjointe en fiabilité dans un système $k - sur - n$, où les n composants sont indépendants et identiquement distribués $(i.i.d)$ et dans le cas indépendant mais non identique.

4.1 Importance jointe de deux composants

4.1.1 Cas où les composants sont indépendants et identiquement distribués

On remarque que dans ce cas $p_i = p \ \forall \ i = 1, ..., n$. On note par $R(k, n)$ On note par $R(k, n)$ la fonction de fiabilité du système $k - sur - n$ dans ce cas telle que :

$$R(k, n) = \sum_{r=k}^{n} \binom{n}{r} p^r q^{n-r}.$$

On définit l'importance en fiabilité de ce système comme suit :

$$\begin{aligned}
RI(c_i) &= \frac{\partial R(k,n)}{\partial p_i} \\
&= \frac{\partial p_i R(p';k,n/p_i=1)+q_i R(p';k,n/p_i=0)}{\partial p_i} \\
&= R(p';k,n/p_i=1)-R(p';k,n/p_i=0),
\end{aligned}$$

telle que :

$$R(p';k,n/p_i=1)=\sum_{r=k-1}^{n-1}\binom{n-1}{r}p^r q^{n-1-r}$$

$$R(p';,k,n/p_i=0)=\sum_{r=k}^{n-1}\binom{n-1}{r}p^r q^{n-1-r}$$

d'où,

$$\begin{aligned}
RI(c_i) &= \frac{\partial R(k,n)}{\partial p_i} \\
&= R(p';k,n/p_i=1)-R(p';,k,n/p_i=0) \\
&= \sum_{r=k-1}^{n-1}\tbinom{n-1}{r}p^r q^{n-r-1}-\sum_{r=k}^{n-1}\tbinom{n-1}{r}p^r q^{n-r-1} \\
&= \tbinom{n-1}{k-1}p^{k-1}q^{n-k}.
\end{aligned}$$

Théorème 4.1.1 [4]

Dans un système $k-sur-n$, où les composants sont i.i.d, l'importance jointe en fiabilité de c_i et c_j est donnée par :

$$\begin{aligned}
JRI(c_i,c_j) &= \frac{\partial^2 R(k,n)}{\partial p_i \partial p_j}=R(1_i,1_j,p')-R(1_i,0_j,p')-R(0_i,1_j,p')+R(0_i,0_j,p') \\
&= \sum_{r=k-2}^{n-2}\tbinom{n-2}{r}p^r q^{n-r-2}-\sum_{r=k-1}^{n-2}\tbinom{n-2}{r}p^r q^{n-r-2} \\
&\quad -\sum_{r=k-1}^{n-2}\tbinom{n-2}{r}p^r q^{n-r-2}+\sum_{r=k}^{n-2}\tbinom{n-2}{r}p^r q^{n-r-2} \\
&= p^{k-2}q^{n-k-1}\left[\tbinom{n-2}{k-2}-\tbinom{n-1}{k-1}p\right].
\end{aligned}$$

Corollaire 4.1.1 *On considère le système $k - sur - n$ où les composants sont i.i.d, pour $n \geq 3$ et $2 \leq k \leq n$ on a :*

$$\begin{aligned} JRI(c_i, c_j) &> 0 \quad si \quad 0 < p < \frac{k-1}{n-1}. \\ JRI(c_i, c_j) &= 0 \quad si \quad p = \frac{k-1}{n-1}. \\ JRI(c_i, c_j) &< 0 \quad si \quad \frac{k-1}{n-1} < p < 1. \end{aligned}$$

Preuve Dans le système $k - sur - n$ on a :

$$JRI(c_i, c_j) = p^{k-2}q^{n-k-1}\left[\binom{n-2}{k-2} - \binom{n-1}{k-1}p\right]$$

$$\begin{aligned} JRI(c_i, c_j) &= 0 \Leftrightarrow p^{k-2}q^{n-k-1}\left[\binom{n-2}{k-2} - \binom{n-1}{k-1}p\right] = 0 \\ &\Leftrightarrow \binom{n-2}{k-2} = \binom{n-1}{k-1}p \end{aligned}$$

d'où,

$$\begin{aligned} p &= \frac{\binom{n-2}{k-2}}{\binom{n-1}{k-1}} \\ p &= \frac{k-1}{n-1}. \end{aligned}$$

Pour : $JRI(c_i, c_j) > 0$, on trouve :

$$p^{k-2}q^{n-k-1}\left[\binom{n-2}{k-2} - \binom{n-1}{k-1}p\right] > 0$$

on sait que $p^{k-2}q^{n-k-1} > 0$ donc :

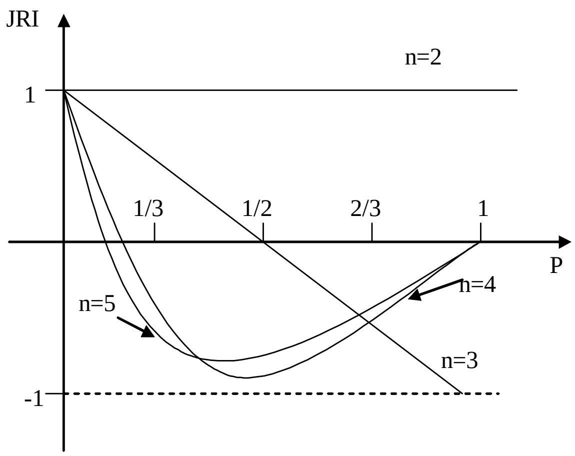
$$\begin{aligned} p &< \frac{\binom{n-2}{k-2}}{\binom{n-1}{k-1}} \\ p &< \frac{k-1}{n-1}. \end{aligned}$$

Le même pour $JRI(c_i, c_j) < 0$ on trouve : $p > \frac{k-1}{n-1}$. ■

exemple 4.1.1 *Soit un système* $2-sur-n$ *donc :*

$$JRI(c_1, c_2) = q^{n-3}(1-(n-1)p)$$

Pour $n = 3$ *on a :* $JRI(c_1, c_2) = 1 - 2p$.
Pour $n = 4$ *on a :* $JRI(c_1, c_2) = q(1 - 3p)$.
Pour $n = 5$ *ona :* $JRI(c_1, c_2) = q^2(1 - 4p)$.
On les résume dans le schéma suivant :



Comparaison de JRI *des systèmes* $2-sur-n$.

Dans le système $2-sur-3$ *on remarque que :*
$JRI(c_1, c_2) > 0 \quad si \ \ p < \frac{1}{2}$.
$JRI(c_1, c_2) < 0 \quad si \ \ p > \frac{1}{2}$.
Dans le système $2-sur-4$ *on remarque que :*
$JRI(c_1, c_2) > 0 \quad si \ \ p < \frac{1}{3}$.
$JRI(c_1, c_2) < 0 \quad si \ \ p > \frac{1}{3}$.
Dans le système $2-sur-5$ *on remarque que :*
$JRI(c_1, c_2) > 0 \quad si \ \ p < \frac{1}{4}$.
$JRI(c_1, c_2) < 0 \quad si \ \ p > \frac{1}{4}$.

Corollaire 4.1.2 *Dans un système* $k-sur-2k$ *où ses composants sont indépendants et identiquement distribués, on a la relation suivante :*

$$JRI_k(c_i, c_j) < JRI_{k+1}(c_i, c_j) \qquad si \qquad q < \frac{k}{6k-3}.$$

Preuve D'apré la définition de $JRI(c_i,c_j)$ dans le système $k-sur-2k$ on a :

$$\begin{array}{rcl} JRI_k(c_i,c_j) & = & p^{k-2}q^{2k-k-1}\left[\binom{2k-2}{k-2}-\binom{2k-1}{k-1}p\right] \\ & = & p^{k-2}q^{k-1}\left[\binom{2k-1}{k-1}q-\binom{2k-2}{k-1}\right], \end{array}$$

et,

$$JRI_{k+1}(c_i,c_j)=p^{k-1}q^{k}\left[\binom{2k+1}{k}q-\binom{2k}{k}\right].$$

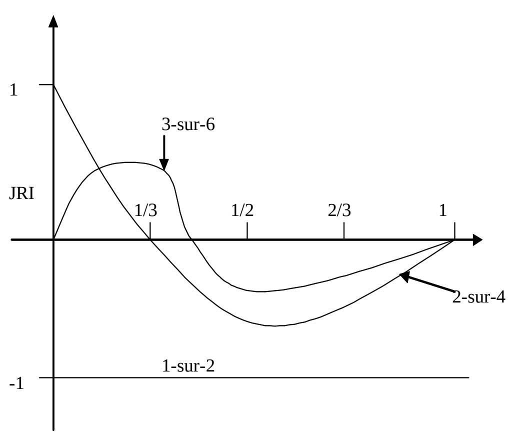
Donc,

$$\begin{array}{rcl} JRI_k(c_i,c_j)-JRI_{k+1}(c_i,c_j) & = & p^{k-2}q^{k-1}\left[\binom{2k-1}{k-1}q-\binom{2k-2}{k-1}\right. \\ & & \left.-\,pq^2\binom{2k+1}{k}+pq\binom{2k}{k}\right] \\ & < & p^{k-2}q^{k-1}\left[\binom{2k-1}{k-1}q-\binom{2k-2}{k-1}\right. \\ & & \left.+pq\binom{2k}{k}\right] \\ & < & p^{k-2}q^{k-1}\left[\binom{2k-1}{k-1}q-\binom{2k-2}{k-1}\right. \\ & & \left.+q\binom{2k}{k}\right], \end{array}$$

on sait que, $p^{k-2}q^{k-1}\geq 0$ alors : $JRI_k(c_i,c_j)<JRI_{k+1}(c_i,c_j)$ pour tout

$$q<\frac{\binom{2k-2}{k-1}}{\binom{2k-1}{k-1}+\binom{2k}{k}}=\frac{k}{(2k-1)+2(2k-1)}=\frac{k}{6k-3}. \blacksquare$$

exemple 4.1.2 *Soit un système $k-sur-2k$ pour k est varié, on obtient le schéma suivant :*



Variation de JRI dans les systèmes $k-sur-2k$.

Dans le système $1-sur-2$ *on remarque que :*
$JRI_1(c_i,c_j) < JRI_2(c_i,c_j)$ *pour* $q < \frac{1}{3}$.
Dans le système $2-sur-4$ *on remarque que :*
$JRI_2(c_i,c_j) < JRI_3(c_i,c_j)$ *pour* $q < \frac{2}{9}$.
Dans le système $3-sur-6$ *on remarque que :*
$JRI_3(c_i,c_j) < JRI_4(c_i,c_j)$ *pour* $q < \frac{3}{15}$.

4.1.2 Cas où les composants sont indépendants mais non identiques

Dans cette situation on procède de la même manière que précédemment.

On commencera par définir la fonction de fiabilité du système, Pour $n \geq k$ on a :

$$\begin{aligned} R(p;k,n) &= p_i R(p';k,n/p_i=1) + q_i R(p';k,n/p_i=0) \\ &= p_i R(p';k,n-1) + q_i R(p';k-1,n-1), \end{aligned}$$

de plus :

$$R(p';k,n-1) = p_j R(p';k,n-2) + q_j R(p';k-1,n-2),$$

et :

$$R(p';k-1,n-1) = p_j R(p';k-1,n-2) + q_j R(p';k-2,n-2),$$

alors :

$$\begin{aligned} R(p;k,n) &= p_i \left(p_j R(p';k,n-2) + q_j R(p';k-1,n-2)\right) \\ &\quad + q_i \left(p_j R(p';k-1,n-2) + q_j R(p';k-2,n-2)\right). \end{aligned}$$

Définition 4.1.1 *Soit un système* $k-sur-n$ *où ses composants sont indépendants mais non identiques, l'importance jointe en fiabilité des composants* i *et* j *est donnée par :*

$$\begin{aligned} JRI(c_i,c_j) &= R(p';k-2,n-2) + R(p';k,n-2) \\ &\quad - R(p';k-1,n-2) - R(p';k-1,n-2) \\ &= R(p';k-2,n-2) - R(p';k-1,n-2) \\ &\quad - \left[R(p';k-1,n-2) - R(p';k,n-2)\right] \\ &= R^*(p;k-2,n-2) - R^*(p;k-1,n-2), \end{aligned}$$

telle que : $R^*(p;k-2,n)=R(p;k-2,n)-R(p;k-1,n)$.

Preuve Soit un système $k-sur-n$.

D'après la définition de l'importance jointe en fiabilité de deux composants

on a :

$$JRI(c_i,c_j)=R(1_i,1_j,p')-R(1_i,0_j,p')-R(0_i,1_j,p')+R(0_i,0_j,p')$$

où :

$R(p';k,n/p_i=p_j=1)=R(p';k-2,n-2)$.
$R(p';k,n/p_i=p_j=0)=R(p';k,n-2)$.
$R(p';k,n/p_i=1,p_j=0)=R(p';k-1,n-2)$.
$R(p';k,n/p_i=0,p_j=1)=R(p';k-1,n-2)$.

Donc :

$$\begin{aligned} JRI(c_i,c_j) &= R(p';k-2,n-2)-R(p';k-1,n-2) \\ &\quad -\left[R(p';k-1,n-2)-R(p';k,n-2)\right]. \end{aligned}$$

donc la définition est vérifiée. ■

Lemme 4.1.1 *Pour $i=1,2,...,n$, alors :*

$$R^*(p;k-2,n)\leq R^*(p;k-1,n),\quad si\quad p_i\geq\frac{k-1}{n-1},$$

$$R^*(p;k-2,n)\geq R^*(p;k-1,n),\quad si\quad p_i\leq\frac{k-1}{n-1},$$

telle que :
$R^*(p;k-2,n)=R(p;k-2,n)-R(p;k-1,n)$.

Théorème 4.1.2 [6]

Dans un système $k-sur-n$ dont les composants sont non identiques ($k\geq 3$, $n\geq 2$), on a :

$$JRI(c_i,c_j)\geq 0\quad si\quad \Pr\leq\frac{k-1}{n-1},\quad \forall r=1,...,n,$$

et :

$$JRI(c_i,c_j)\leq 0\quad si\quad \Pr\geq\frac{k-1}{n-1},\quad \forall r=1,...,n.$$

Preuve Pour tout $i = 1, ..., n$ et $j = 1, ..., n$, l'importance jointe en fiabilité des composants i et j est donnée par :

$$\begin{aligned} JRI(c_i, c_j) &= R(p'; k-2, n-2) - R(p'; k-1, n-2) \\ &\quad - [R(p'; k-1, n-2) - R(p'; k, n-2)] \\ &= R^*(p; k-2, n-2) - R^*(p; k-1, n-2) \end{aligned}$$

et d'après le lemme 4.1.1, il vient que :

$$JRI(c_i, c_j) \geq 0 \quad si \quad \Pr \leq \frac{k-1}{n-1}, \forall r = 1, ..., n,$$

et :

$$JRI(c_i, c_j) \leq 0 \quad si \quad \Pr \geq \frac{k-1}{n-1}, \forall r = 1, ..., n.$$

D'où le résultat du théorème. ■

Définition 4.1.2 *Soient deux composants c_i et c_j, on dit que c_i et c_j sont symétrique si :*

$$R(1_i, 0_j, p) = R(0_i, 1_j, p).$$

Corollaire 4.1.3 *Si la fonction de fiabilité est Schur-convexe(respectivement Schur- concave), donc :*

$$JRI(c_i, c_j) \leq 0 \quad (\text{respectivement } JRI(c_i, c_j) \geq 0).$$

Preuve Pour $R(p)$ est Schur-convexe on a :

$$(p_i - p_j)\left(\frac{\partial R(p)}{\partial p_i} - \frac{\partial R(p)}{\partial p_j}\right) \geq 0.$$

Et on a :

$$\frac{\partial R(p)}{\partial p_i} = p_j R(1_i, 1_j, p') + q_j R(1_i, 0_j, p') - p_j R(0_i, 1_j, p') - q_j R(0_i, 0_j, p').$$

Par symétrie on a :

$$\frac{\partial R(p)}{\partial p_j} = p_i R(1_i, 1_j, p') + q_i R(0_i, 1_j, p') - p_i R(1_i, 0_j, p') - q_i R(0_i, 0_j, p').$$

Il est claire que $R(1_i, 0_j, p') = R(0_i, 1_j, p')$ car c_i et c_j sont symétrique donc :

$$\frac{\partial R(p)}{\partial p_i} = p_j R(1_i, 1_j, p') - (1-p_j) R(0_i, 0_j, p') - 2p_j R(1_i, 0_j, p') + R(1_i, 0_j, p'), \tag{4/1}$$

et,

$$\frac{\partial R(p)}{\partial p_j} = p_i R(1_i, 1_j, p') - (1-p_i) R(0_i, 0_j, p') - 2p_i R(1_i, 0_j, p') + R(1_i, 0_j, p'). \tag{4/2}$$

Par soustraction (4/2) de (4/1) on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(p)}{\partial p_i} - \frac{\partial R(p)}{\partial p_j} &= (p_j - p_i)\left[(R(1_i, 1_j, p') - 2R(1_i, 0_j, p') + R(0_i, 0_j, p')\right] \\ &= -(p_i - p_j)\left[R(1_i, 1_j, p') - 2R(1_i, 0_j, p') + R(0_i, 0_j, p')\right], \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} (p_i - p_j)\left(\frac{\partial R(p)}{\partial p_i} - \frac{\partial R(p)}{\partial p_j}\right) &= -(p_i - p_j)^2\left[R(1_i, 1_j, p') - 2R(1_i, 0_j, p')\right. \\ &\quad \left. + R(0_i, 0_j, p')\right] \\ &= -(p_i - p_j)^2 JRI(c_i, c_j), \end{aligned}$$

si $R(p)$ est Schur-convexe, on a :

$$-(p_i - p_j)^2 JRI(c_i, c_j) \geq 0,$$

et comme $(p_i - p_j)^2 \geq 0$ alors : $JRI(c_i, c_j) \leq 0$. ■

4.2 Importance conjointe de plusieurs composants

4.2.1 Cas où les composants sont indépendants et identiquement distribués

Dans tout ce paragraphe,on considère que les systèmes $k-sur-n$ dont les composants sont indépendants et identiquement distribués

Définition 4.2.1 *Pour le système $k - sur - n$ où les composants sont indépendants et identiques, la formule de l'importance conjointe en fiabilité de trois composants est donnée par :*

$$\begin{aligned} JRI(c_i, c_j, c_h) &= p^{k-3}q^{n-k-2}\left(\binom{n-3}{k-3}q^2 - 2\binom{n-3}{k-2}pq + \binom{n-3}{k-1}p^2\right) \\ \forall i, j, h &\in \{1, ..., n\} \end{aligned}$$

pour $k \geq 3$.

Preuve Pour un système $k - sur - n$, dont les composants sont indépendants et identiques, sa fonction de fiabilité est donnée par :

$$R(p; k, n) = \sum_{r=k}^{n} \binom{n}{r} p^r (1-p)$$

et on a :

$$\begin{aligned} JRI(c_i, c_j, c_h) \quad = \quad & R(1_i, 1_j, 1_h, p') - R(1_i, 1_j, 0_h, p') - R(1_i, 0_j, 1_h, p') \\ & - R(0_i, 1_j, 1_h, p') + R(1_i, 0_j, 0_h, p') + R(0_i, 1_j, 0_h, p') \\ & + R(0_i, 0_j, 1_h, p') - R(0_i, 0_j, 0_h, p') \end{aligned}$$

La fonction de fiabilité du système $(k-3) - sur - (n-3)$ est donnée par la relation suivante :

$$R(p; k, n/p_1 = p_2 = p_3 = 1) = \sum_{r=k-3}^{n-3} \binom{n-3}{r} p^r q^{n-3-r}$$

$$\begin{aligned} R(p; , k, n/p_1 &= p_2 = 1, p_3 = 0) = R(p; k, n/p_1 = p_3 = 1, p_2 = 0) \\ &= R(p; k, n/p_1 = 0, p_2 = p_3 = 1) \\ &= \sum_{r=k-2}^{n-3} \binom{n-3}{r} p^r q^{n-3-r} \end{aligned}$$

$$R(p; k, n/p_1 = p_2 = p_3 = 0) = \sum_{r=k}^{n-3} \binom{n-3}{r} p^r q^{n-3-r}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} JRI(c_i,c_j,c_h) &= \sum_{r=k-3}^{n-3}\binom{n-3}{r}p^r q^{n-3-r}-\sum_{r=k-2}^{n-3}\binom{n-3}{r}p^r q^{n-3-r} \\ &-\sum_{r=k-2}^{n-3}\binom{n-3}{r}p^r q^{n-3-r}+\sum_{r=k-1}^{n-3}\binom{n-3}{r}p^r q^{n-3-r} \\ &-\sum_{r=k-2}^{n-3}\binom{n-3}{r}p^r q^{n-3-r}+\sum_{r=k-1}^{n-3}\binom{n-3}{r}p^r q^{n-3-r} \\ &+\sum_{r=k-1}^{n-3}\binom{n-3}{r}p^r q^{n-3-r}-\sum_{r=k}^{n-3}\binom{n-3}{r}p^r q^{n-3-r} \end{aligned}$$

On obtient finalement :
$JRI(c_i,c_j,c_h)=p^{k-3}q^{n-k-2}\left(\binom{n-3}{k-3}q^2-2\binom{n-3}{k-2}pq+\binom{n-3}{k-1}p^2\right)$. ■

Corollaire 4.2.1 *Soient deux systèmes $k-sur-n$ et $k-sur-(n+1)$, donc on a :*

$$JRI_n(c_i,c_j,c_h)>JRI_{n+1}(c_i,c_j,c_h),\quad si\quad p<\frac{2}{n-1}.$$

Preuve On sait que,

$$JRI(c_i,c_j,c_h)=p^{k-3}q^{n-k-2}\left(\binom{n-3}{k-3}q^2-2\binom{n-3}{k-2}pq+\binom{n-3}{k-1}p^2\right)$$

dans le système $3-sur-n$:

$$\begin{aligned} JRI_n(c_i,c_j,c_h) &= q^{n-5}\left(q^2-2\,(n-3)\,pq+\binom{n-3}{2}p^2\right) \\ JRI_{n+1}(c_i,c_j,c_h) &= q^{n-4}\left(q^2-2\,(n-2)\,pq+\binom{n-2}{2}p^2\right) \end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned} JRI_{n+1}(c_i,c_j,c_h)-JRI_n(c_i,c_j,c_h) &= q^{n-4}\left(q^2-2\,(n-2)\,pq+\binom{n-2}{2}p^2\right) \\ &\quad -q^{n-5}\left(q^2-2\,(n-3)\,pq+\binom{n-3}{2}p^2\right) \end{aligned}$$

on obtient :

$$JRI_{n+1}(c_i,c_j,c_h)-JRI_n(c_i,c_j,c_h)<q^{n-4}\left((n-1)\,p-2\right)$$

Si $JRI_{n+1}(c_i,c_j,c_h)>JRI_n(c_i,c_j,c_h)$, donc : $p<\frac{2}{n-1}$. ■

4.2.2 Cas où les composants sont indépendants mais non identiques

Soit un système $k-sur-n$ dont les composants sont indépendants mais non identiques.

Dans ce cas nous avons définie l'imporatnce conjointe en fiabilité de plusieurs composants dans ce système.

Théorème 4.2.1 *Soit un système $k-sur-n$ dont les composants sont non identiques, l'importance conjointe en fiabilité de trois composants est donnée par :*

$$\begin{aligned} JRI(c_i, c_j, c_h) &= R(p'; k, n-3) - 3R(p'; k-2, n-3) \\ &\quad +3R(p'; k-1, n-3) - R(p'; k, n-3). \end{aligned}$$

Preuve D'aprés la définition de l'importance conjointe en fiabilité de trois composants on a :

$$\begin{aligned} JRI(c_i, c_j, c_h) &= R(p'; k-3, n-3) - R(p'; k-2, n-3) - R(p'; k-2, n-3) \\ &\quad -R(p'; k-2, n-3) + R(p'; k-1, n-3) + R(p'; k-1, n-3) \\ &\quad +R(p'; k-1, n-3) - R(p'; k, n-3) \end{aligned}$$

où :

$R(p'; k, n/p_1 = p_2 = p_3 = 1) = R(p'; k-3, n-3)$.
$R(p'; k, n/p_1 = p_2 = 1, p_3 = 0) = R(p'; k-2, n-3)$.
$R(p'; k, n/p_1 = p_3 = 1, p_2 = 0) = R(p'; k-2, n-3)$.
$R(p'; k, n/p_2 = p_3 = 1, p_1 = 0) = R(p'; k-2, n-3)$.
$R(p'; k, n/p_1 = p_2 = 0, p_3 = 1) = R(p'; k-1, n-3)$.
$R(p'; k, n/p_1 = p_3 = 0, p_2 = 1) = R(p'; k-1, n-3)$.
$R(p'; k, n/p_2 = p_3 = 0, p_1 = 1) = R(p'; k-1, n-3)$.
$R(p'; k, n/p_1 = p_2 = p_3 = 0) = R(p'; k, n-3)$.

Donc :

$$\begin{aligned} JRI(c_i, c_j, c_h) &= R(p'; k-3, n-3) - R(p'; k-2, n-3) - R(p'; k-2, n-3) \\ &\quad -R(p'; k-2, n-3) + R(p'; k-1, n-3) + R(p'; k-1, n-3) \\ &\quad +R(p'; k-1, n-3) - R(p'; k, n-3) \\ &= R(p'; k, n-3) - 3R(p'; k-2, n-3) \\ &\quad +3R(p'; k-1, n-3) - R(p'; k, n-3) \end{aligned}$$

d'où la définition. ■

Finalement et pour $l \geq 3$ on a le théorème suivant.

Théorème 4.2.2 *Soit un système cohérent de n composants non identiques, l'importance conjointe en fiabilité de l composants est donnée par :*

$$JRI(c_1, c_2, ..., c_l) = \sum_{i=0}^{l} (-1)^i \binom{l}{l-i} R(p'; k-i, n-l) \quad \forall\ l \leq n,$$

tel que : $p' = (p_{l+1}, ..., p_n)$.

Si : $\{i_1, i_2, ..., i_l\} \subset \{1, 2, ..., n\}$, on a :

$$JRI(c_{i_1}, c_{i_2}, ..., c_{i_l}) = \sum_{i=0}^{l} (-1)^i \binom{l}{l-i} R(p'; k-i, n-l) \quad \forall\ l \leq n,$$

tel que : $p' = (p_1, ..., p_{i_1-1}, p_{i_1+1}, ..., p_{i_l-1}, p_{i_l+1}, ..., p_n)$.

Preuve On fait cette démonstration par récurrence.

pour $l = 1$

$$\begin{aligned} IR(c_i) &= \frac{\partial R(p)}{\partial p_1} = R(p'; k, n-1) - R(p'; k-1, n-1) \\ &= \sum_{i=0}^{1} (-1)^i \binom{1}{0} R(p'; k-i, n-1). \end{aligned}$$

On suppose que la proposition est vraie jusqu'à l'ordre l et on montre qu'elle est vraie à l'ordre $(l+1)$ c'est à dire :

$JRI(c_1, c_2, ..., c_l) = \sum\limits_{i=0}^{l} (-1)^i \binom{l}{l-i} R(p'; k-i, n-l)$ donc,

$$
\begin{aligned}
JRI(c_1, c_2, ..., c_l, c_{l+1}) &= \frac{\partial}{\partial p_{l+1}} \left(\frac{\partial^l R(p)}{\prod\limits_{i=1}^{l} \partial p_i} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial p_{l+1}} JRI(c_1, c_2, ..., c_l) \\
&= \frac{\partial}{\partial p_{l+1}} \left[\sum_{i=0}^{l} (-1)^i \binom{l}{l-i} R(p'; k-i, n-l) \right] \\
&= \sum_{i=0}^{l} (-1)^i \binom{l}{l-i} \frac{\partial}{\partial p_{l+1}} \left[p_{l+1} R(p'; k-i, n-(l+1)) \right. \\
&\quad \left. + q_{l+1} R(p'; k-(i+1), n-(l+1)) \right] \\
&= \sum_{i=0}^{l} (-1)^i \binom{l}{l-i} \left[R(p'; k-i, n-(l+1)) \right. \\
&\quad \left. - R(p'; k-(i+1), n-(l+1)) \right]
\end{aligned}
$$

on prend $(-1)^i \binom{l}{l-i} = \alpha_i$ donc,

$$
\begin{aligned}
JRI(c_1, c_2, ..., c_l, c_{l+1}) &= \sum_{i=0}^{l} \alpha_i \left[R(p'; k-i, n-(l+1)) - R(p'; k-(i+1), n-(l+1)) \right] \\
&= \alpha_0 \left[R(p'; k, n-(l+1)) - R(p'; k-1, n-(l+1)) \right] \\
&\quad + \alpha_1 \left[R(p'; k-1, n-(l+1)) - R(p'; k-2, n-(l+1)) \right] \\
&\quad + \alpha_2 \left[R(p'; k-2, n-(l+1)) - R(p'; k-3, n-(l+1)) \right] + ... \\
&\quad + \alpha_l \left[R(p'; k-l, n-(l+1)) - R(p'; k-(l+1), n-(l+1)) \right]. \\
&= \alpha_0 R(p'; k, n-(l+1)) + (\alpha_1 - \alpha_0) R(p'; k-1, n-(l+1)) \\
&\quad + (\alpha_2 - \alpha_1) R(p'; k-2, n-(l+1)) + ... \\
&\quad - \alpha_l R(p'; k-(l+1), n-(l+1)) \\
&= R(p'; k, n-(l+1)) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{l} (-1)^i \binom{l+1}{(l+1)-i} R(p'; k-i, n-(l+1)) \\
&\quad + (-1)^{i+1} R(p'; k-(l+1), n-(l+1)) \\
&= \sum_{i=0}^{l+1} (-1)^i \binom{l+1}{(l+1)-i} R(p'; k-i, n-(l+1)).
\end{aligned}
$$

On obtient : $JRI(c_1, c_2, ..., c_l) = \sum_{i=0}^{l} (-1)^i \binom{l}{l-i} R(p'; k-i, n-l)$. ■

4.3 La relation entre la dépendance et l'indépendance des composants

Dans ce qui suit on va donner la mesure de l'erreur entre la fiabilité d'un système k-sur-n où les composants sont indépendants et l'équivalent de la fiabilité de ce système dans le cas où les composants sont dépendants. On montre que cette mesure est fonction de l'importance conjointe en fiabilité.

Dans les théorèmes suivants, on présente comment calculer cette erreur.

Théorème 4.3.1 [6]

Soit σ_{ij} la covariance entre les composants c_i et c_j. Considérons $R(p)$, la fonction de fiabilité du système où les composants c_i et c_j sont indépendants, et $R^{ij}(p)$ la fonction de fiabilité du système où les composants c_i et c_j sont dépendants. On définit l'erreur entre $R(p)$ et $R^{ij}(p)$ comme suit :

$$R^{ij}(p) - R(p) = \sigma_{ij} JRI(c_i, c_j), \qquad \text{pour tout } i, j = 1, 2, ..., n.$$

Preuve On sait que pour $i, j = 1, 2, ..., n$:

$$JRI(c_i, c_j) = R(1_i, 1_j, p') - R(1_i, 0_j, p') - R(0_i, 1_j, p') + R(0_i, 0_j, p')$$

La fonction de fiabilité du système où les composants sont indépendants est :

$R(p) = p_i p_j R(1_i, 1_j, p') + p_i q_j R(1_i, 0_j, p') + q_i p_j R(0_i, 1_j, p') + q_i q_j R(0_i, 0_j, p')$

la fonction de fiabilité du système où les composants sont dépendants est :

$R^{ij}(p) = p_{ij} R(1_i, 1_j, p') + p_{i\bar{j}} R(1_i, 0_j, p') + p_{\bar{i}j} R(0_i, 1_j, p') + p_{\bar{i}\bar{j}} R(0_i, 0_j, p')$

tel que :

$\sigma_{ij} = cov(X_i, X_j) = \mathbb{E}(X_i, X_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j) = p_{ij} - p_i p_j$

$p_i = \Pr(X_i = 1)$, $p_j = \Pr(X_j = 1)$

$p_{ij} = \Pr(X_i = 1, X_j = 1)$

$p_{i\bar{j}} = \Pr(X_i = 1, X_j = 0)$

$p_{\bar{i}j} = \Pr(X_i = 0, X_j = 1)$

$p_{\bar{i}\bar{j}} = \Pr(X_i = 0, X_j = 0)$

$p_{i\bar{j}} = p_i - p_{ij} = p_i - \sigma_{ij} - p_i p_j$

$p_{\bar{i}j} = p_j - p_{ij} = p_j - \sigma_{ij} - p_i p_j$

$p_{\bar{i}\,\bar{j}} = 1 - p_i - p_j + p_{ij} = 1 - p_i - p_j + \sigma_{ij} + p_i p_j$
alors :

$$\begin{aligned} R^{ij}(p) &= (\sigma_{ij} + p_i p_j)R(1_i, 1_j, p') + (p_i - \sigma_{ij} - p_i p_j)R(1_i, 0_j, p') \\ &\quad + (p_j - \sigma_{ij} - p_i p_j)\, R(0_i, 1_j, p') + (1 - p_i - p_j + \sigma_{ij} + p_i p_j)\, R(0_i, 0_j, p') \\ &= \sigma_{ij} JRI(c_i, c_j) + R(p) \end{aligned}$$

On obtient : $R^{ij}(p) - R(p) = \sigma_{ij} JRI(c_i, c_j)$. ■
Pour trois composants c_i, c_j et c_h on a le théorème suivant :

Théorème 4.3.2 *Pour $i = 1, ..., n$ et $j = 1, ..., n$ on a :*

$$\begin{aligned} R^{ijh}(p) - R(p) &= (p_{ijh} - p_i p_j p_h)\, JRI(c_i, c_j, c_h) + \sigma_{ij} JRI(c_i, c_j / p_h = 0) \\ +\sigma_{ih} JRI(c_i, c_h / p_j &= 0) + \sigma_{jh} JRI(c_j, c_h / p_i = 0) \end{aligned}$$

Preuve Pour les composants c_i, c_j et c_h on a :

$$\begin{aligned} JRI(c_i, c_j, c_h) &= R(1_i, 1_j, 1_h, p') - R(1_i, 1_j, 0_h, p') - R(1_i, 0_j, 1_h, p') \\ &\quad - R(0_i, 1_j, 1_h, p') + R(0_i, 0_j, 1_h, p') + R(0_i, 1_j, 0_h, p') \\ &\quad + R(1_i, 0_j, 0_h, p') - R(0_i, 0_j, 0_h, p') \end{aligned}$$

La fonction de fiabilité du système où les composants sont indépendants est :

$$\begin{aligned} R(p) &= p_i p_j p_h R(1_i, 1_j, 1_h, p') + p_i p_j q_h R(1_i, 1_j, 0_h, p') + p_i q_j p_h R(1_i, 0_j, 1_h, p') \\ &\quad + q_i p_j p_h R(0_i, 1_j, 1_h, p') + q_i q_j p_h R(0_i, 0_j, 1_h, p') + q_i p_j q_h R(0_i, 1_j, 0_h, p') \\ &\quad + p_i q_j q_h R(1_i, 0_j, 0_h, p') + q_i q_j q_h R(0_i, 0_j, 0_h, p') \end{aligned}$$

La fonction de fiabilité du système où les composants sont dépendants est :

$$\begin{aligned} R^{ijh}(p) &= p_{ijh} R(1_i, 1_j, 1_h, p') + p_{ij\bar{h}} R(1_i, 1_j, 0_h, p') + p_{i\bar{j}h} R(1_i, 0_j, 1_h, p') \\ &\quad + p_{\bar{i}jh} R(0_i, 1_j, 1_h, p') + p_{\bar{i}\,\bar{j}h} R(0_i, 0_j, 1_h, p') + p_{\bar{i}j\bar{h}} R(0_i, 1_j, 0_h, p') \\ &\quad + p_{i\bar{j}\bar{h}} R(1_i, 0_j, 0_h, p') + p_{\bar{i}\,\bar{j}\,\bar{h}} R(0_i, 0_j, 0_h, p') \end{aligned}$$

où :
$p_{ijh} = \Pr(X_i = 1, X_j = 1, X_h = 1)$
$p_{ij\bar{h}} = \Pr(X_i = 1, X_j = 1, X_h = 0)$
$p_{i\bar{j}h} = \Pr(X_i = 1, X_j = 0, X_h = 1)$

$p_{\bar{i}jh} = \Pr(X_i = 0, X_j = 1, X_h = 1)$
$p_{\bar{i}\bar{j}h} = \Pr(X_i = 0, X_j = 0, X_h = 1)$
$p_{\bar{i}j\bar{h}} = \Pr(X_i = 0, X_j = 1, X_h = 0)$
$p_{i\bar{j}\bar{h}} = \Pr(X_i = 1, X_j = 0, X_h = 0)$
$p_{\bar{i}\bar{j}\bar{h}} = \Pr(X_i = 0, X_j = 0, X_h = 0)$
$p_i = \Pr(X_i = 1), p_j = \Pr(X_j = 1), p_h = \Pr(X_h = 1)$
$\sigma_{ij} = cov(X_i, X_j) = p_{ij} - p_i p_j$
$p_{ij\bar{h}} = p_{ij} - p_{ijh} = \sigma_{ij} + p_i p_j - p_{ijh}$
$p_{i\bar{j}h} = p_{ih} - p_{ijh} = \sigma_{ih} + p_i p_h - p_{ijh}$
$p_{\bar{i}jh} = p_{jh} - p_{ijh} = \sigma_{jh} + p_j p_h - p_{ijh}$
$p_{\bar{i}\bar{j}h} = p_{\bar{i}h} - p_{\bar{i}jh} = p_h - \sigma_{ih} - p_i p_h - \sigma_{jh} - p_j p_h + p_{ijh}$
$p_{\bar{i}j\bar{h}} = p_{j\bar{h}} - p_{ij\bar{h}} = p_j - \sigma_{jh} - p_j p_h - \sigma_{ij} - p_i p_j + p_{ijh}$
$p_{i\bar{j}\bar{h}} = p_{i\bar{j}} - p_{\bar{i}\bar{j}h} = p_i - \sigma_{ij} - p_i p_j - \sigma_{ih} - p_i p_h + p_{ijh}$
$p_{\bar{i}\bar{j}\bar{h}} = 1 - p_i - p_j - p_h + \sigma_{ij} + p_i p_j + \sigma_{ih} + p_i p_h + \sigma_{jh} + p_j p_h - p_{ijh}$

$$\begin{aligned}
R^{ijh}(p) - R(p) \quad = \quad & (p_{ijh} - p_i p_j p_h)\, R(1_i, 1_j, 1_h, p') + (\sigma_{ij} - p_{ijh} + p_i p_j p_h)\, R(1_i, 1_j, 0_h, p') \\
& + (\sigma_{ih} - p_{ijh} + p_i p_j p_h)\, R(1_i, 0_j, 1_h, p') \\
& + (\sigma_{jh} - p_{ijh} + p_i p_j p_h)\, R(0_i, 1_j, 1_h, p') \\
& + (p_{ijh} - p_i p_j p_h - \sigma_{ih} - \sigma_{jh})\, R(0_i, 0_j, 1_h, p') \\
& + (p_{ijh} - p_i p_j p_h - \sigma_{jh} - \sigma_{ij})\, R(0_i, 1_j, 0_h, p') \\
& + (p_{ijh} - p_i p_j p_h - \sigma_{ij} - \sigma_{ih})\, R(1_i, 0_j, 0_h, p') \\
& + (\sigma_{ij} + \sigma_{ih} + \sigma_{jh} + p_i p_j p_h - p_{ijh})\, R(0_i, 0_j, 0_h, p')
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
R^{ijh}(p) - R(p) \quad &= \quad (p_{ijh} - p_i p_j p_h)\, JRI(c_i, c_j, c_h) + \sigma_{ij} JRI(c_i, c_j / X_h = 0) \\
+\sigma_{ih} JRI(c_i, c_h / X_j \quad &= \quad 0) + \sigma_{jh} JRI(c_j, c_h / X_i = 0).
\end{aligned}$$

D'où le resultat. ■

Pour l composants on a le théorème suivant :

Théorème 4.3.3 *Pour* $I_l = \{i_1, i_2, ..., i_l\} = \{j_1, j_2, ..., j_l\} \subset \{1, 2, ..., n\}$ *, on a :*

$$\begin{aligned}
R^{I_l}(p) - R(p) \quad = \quad & \left(p_{\prod\limits_{i \in I_l} i} - \prod_{i \in I_l} p_i \right) JRI(c_{i_1}, ..., c_{i_l}) \\
& + \sum_{s=2}^{l-1} \sigma^{I_l}_{j_1 \ldots j_s} JRI\left(c_{j_1}, ..., c_{j_s} / X_h = 0,\ h \in S_h\right),
\end{aligned}$$

telle que :
$S_h = I_l - \{j_1, j_2, ..., j_s\}$ *avec* $\{j_1, j_2, ..., j_s\}$ *une version de* I_l *c'est à dire* $\forall$ $j_i \in I \;\; \exists\, h \in \{1, 2, ..., l\}\; i_h = j_i \in I_l$

Pour $s = 2$
$\sigma^{I_l}_{j_1 j_2} JRI(c_{j_1}, c_{j_2}/X_h = 0,\, h \in S_h) = \sigma^{I_l}_{i_1 i_2} JRI(c_{i_1}, c_{i_2}/X_h = 0,\, h \in S_h) + \sigma^{I_l}_{i_1 i_3} JRI(c_{i_1}, c_{i_3}/X_h = 0,\, h \in S_h) + ... + \sigma^{I_l}_{i_1 i_l} JRI(c_{i_1}, c_{i_2}/X_h = 0,\, h \in S_h) + ... + \sigma^{I_l}_{i_{l-1} i_l} JRI(c_{i_{l-1}}, c_{i_l}/X_h = 0,\, h \in S_h)$
pour $s = 3$
$\sigma^{I_l}_{j_1 j_2 j_3} JRI(c_{j_1}, c_{j_2}, c_{j_3}/X_h = 0,\, h \in S_h) = \sigma^{I_l}_{i_1 i_2 i_3} JRI(c_{i_1}, c_{i_2}, c_{i_3}/X_h = 0,\, h \in S_h) + \sigma^{I_l}_{i_1 i_2 i_4} JRI(c_{i_1}, c_{i_2}, c_{i_4}/X_h = 0, h \in S_h) + ... + \sigma^{I_l}_{i_1 i_2 i_l} JRI(c_{i_1}, c_{i_2}, c_{i_l}/X_h = 0, h \in S_h) + ... + \sigma^{I_l}_{i_1 i_{l-1} i_l} JRI(c_{i_{l-1}}, c_{i_l}/X_h = 0, h \in S_h) + ... + \sigma^{I_l}_{i_1 i_2} JRI(c_{i_1}, c_{i_2}/X_h = 0,\, h \in S_h) + \sigma^{I_l}_{i_1 i_3} JRI(c_{i_1}, c_{i_3}/X_h = 0,\, h \in S_h) + ... + \sigma^{I_l}_{i_1 i_l} JRI(c_{i_1}, c_{i_2}/X_h = 0,\, h \in S_h) + ... + \sigma^{I_l}_{i_{l-1} i_l} JRI(c_{i_{l-1}}, c_{i_l}/X_h = 0,\, h \in S_h)$
et pour *s quelconque*
$\sigma^{I_l}_{j_1 j_2 ... j_s} JRI(c_{j_1}, c_{j_2}, ..., c_{j_s}/X_h = 0, h \in S_h) = \sigma^{I_l}_{i_1 i_2 ... i_s} JRI(c_{i_1}, c_{i_2}, ..., c_{i_s}/X_h = 0,\, h \in S_h) + \sigma^{I_l}_{i_1 i_2 ... i_{s-1} i_{s+1}} JRI(c_{i_1}, c_{i_2}, ..., c_{i_{s-1}}, c_{i_{s+1}}/X_h = 0,\, h \in S_h) + ... + \sigma^{I_l}_{i_1 i_2 ... i_{s-1} i_l} JRI(c_{i_1}, c_{i_2}, ..., c_{i_{s-1}}, c_{i_l}/X_h = 0, h \in S_h) + \sigma^{I_l}_{i_1 i_2 ... i_{s+1} i_{s+2}} JRI(c_{i_1}, c_{i_2}, ..., c_{i_{s+1}}, c_{i_{s+2}}/X_h = 0,\, h \in S_h) + ... + \sigma^{I_l}_{i_1 i_2 ... i_{s+1} i_l} JRI(c_{i_1}, c_{i_2}, ..., c_{i_{s+1}}, c_{i_l}/X_h = 0,\, h \in S_h) + \sigma^{I_l}_{i_2 i_3 ... i_s} JRI(c_{i_2}, c_{i_3}, ..., c_{i_s}/X_h = 0, h \in S_h) + \sigma^{I_l}_{i_2 i_3 ... i_{s-1} i_{s+1}} JRI(c_{i_2}, c_{i_3}, ..., c_{i_{s-1}}, c_{i_{s+1}}/X_h = 0,\, h \in S_h) + ... + \sigma^{I_l}_{i_2 i_3 ... i_{s-1} i_l} JRI(c_{i_2}, c_{i_3}, ..., c_{i_{s-1}}, c_{i_l}/X_h = 0,\, h \in S_h) + \sigma^{I_l}_{i_2 i_3 ... i_{s+1} i_{s+2}} JRI(c_{i_2}, c_{i_3}, ..., c_{i_{s+1}}, c_{i_{s+2}}/X_h = 0, h \in S_h) + ... + \sigma^{I_l}_{i_2 i_3 ... i_{s+1} i_l} JRI(c_{i_2}, c_{i_3}, ..., c_{i_{s+1}}, c_{i_l}/X_h = 0,\, h \in S_h) + ... + \sigma^{I_l}_{i_{l-s+1} i_{l-s} ... i_l} JRI(c_{i_{l-s+1}}, c_{i_{l-s}}, ..., c_{i_l}/X_h = 0,\, h \in S_h)$.

Corollaire 4.3.1 *Si la dépendance d'ordre inférieur à l est inexistante ie* $\sigma^{I_l}_{j_1 ... j_s} = 0$ *alors :*

$$R^{I_l}(p) - R(p) = \left(p_{\prod_{i \in I_l} i} - \prod_{i \in I_l} p_i \right) JRI(c_{i_1}, ..., c_{i_l}).$$

Conclusion

L'importance conjointe en fiabilité est une mesure importante dans la caractérisatisation des systèmes cohérents. La plupart des travaux traitent le cas des systèmes dichotomiques dont les composants sont indépendants et identiques. Quelques résultats ont été élaborés dans le cas non identique et ils concernent beaucoup plus l'importance jointe de deux composants seulement. Dans ce travail, nous avons traité le cas des systèmes k-sur-n dont les composants sont non identiques où on a donné une formule explicite de l'importance conjointe en fiabilité de l composants $l<n$. D'autre part, On a généralisé le travail [6] on donnant une formule explicite de l'erreur qui existe entre la fiabilité d'un système k-sur-n dont les composants sont indépendants et la fiabilité du système équivalent mais dont les composants sont non indépendants. Beaucoup de problèmes restent ouverts comme les cas des systèmes k-consécutifs-sur-n, les systèmes m-consécutifs-sur-n, pour ne citer que ces deux là. Par ailleurs, beaucoup d'investigations restent à entreprendre quant aux systèmes multi états qui sont plus proches de la réalité, pour l'analyse de l'importance conjointe en fiabilité. Il est indéniable que la connaissance de cette mesure est outil important d'aide à la décision afin de concevoir des systèmes plus fiables pour une population de plus en plus exigeante.

Bibliographie

[1] **A. AISSANI,** Modèle Stochastique de la Théorie de Fiabilité, Office des publications universitaire 11-1992.

[2] **Gerald Baillargeon,** Méthode statistique de l'ingénieur, 1990, SMG,

[3] **R. E. Barlow, and F. Proschan**, Statistical Theory of Reliability and Life Testing Probability Models. To Begin With, Silver-Spring, MD.,1981.

[4] **Z. W. Birnbaun**, On The Importance Of different Composants in a Multicomponent System, University of Washington, Tecnical Report No. 54, May 20, 1968.

[5] **J. L. Bon**, fiabilité des système, méthodes mathématique, Masson,.Paris, 1995.

[6] **H. Caruso, A.Dasgupta**, A fundamental overview of accelerated testing analytical models, 1998, IEEE Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium, Tutorial notes, USA.

[7] **H-W. Chang, S. Jan**, Joint Reliability Importance of $k-$out-of$-n$ Systems and Series-Parallal Systms, Department of Applied Mathematics Tatung University Taipei, Taiwan, ROC.

[8] **S. W. Cheng, J.C Fu**, Estimation of mixed weibull parameters in life testing, IEEE Trans. Reliability, Vol R-31, 1982, pp 377-381.

[9] **C. Cocozza- Thivent**, processus stochastiques et fiabilité de système,Springer, 1997.

[10] **X. Gao, L. Cui, J. Li**, Analysis for joint importance of components in a coherent system, European Journal of Operational Research, Vol. 182, pp. 282-299, 2007.

[11] **P. Hoang**, Handbook of Reliability Engineering, Ed Springer, 2003.

[12] **J. S. Hong, H. Y. Koo, C. H. Lie**, Joint reliability importance of $k-$out-of$-n$ systems, European Journal of Operational Research, Vol. 142, pp. 539-547, 2002.

[13] **D. Kececioglu**, Reliability life testing Handbook vol 1, 1993, Ed Prentice Hall.

[14] **W. Kuo- M. J. Zuo**, optial reliabilitity, John Willy and sons, 2003.

[15] **Nikolaos Limnios,** Arbres de défaillances, Lavoisier, 2005.

[16] **K. B. MISRA**, Reliability Analysis end Prediction, Elsivier Amestrdam-Oxford-Newyork-Tokyo, 1992.

[17] **S. Morand**, fiabilité- mantenabilité-disponibilité.

[18] **P. O'connor**, Testing for reliability, Quality and reliability engineering, vol. 19, 2003, pp. 73-84.

[19] **H. Procaccia, P. Morilhat**, Fiabilité des structures des installations industrielles,1996, Ed Eyrolles.

[20] **P. Sander, R.Badoux,** Bayesian Methods in Reliability, 1991, Kluwer Academic Publisher.

[21] **B. YCART**, Notion de Fiabilité et Files d'Attente, Centre de publication universitaire, Tunis, 2004.

ملخص: أهمية الموثوقية المشتركة

هذا العمل يقدم لنا تحليلا لأهمية الموثوقية المشتركة في نظام متناسق. على أساس النتائج العامة المتحصل عليها فيما يخص أنظمة مختلفة قمنا بتقديم عبارة لحساب أهمية الموثوقية المشتركة في نظام ك-من بين-ن حيث تكون مكوناته مستقلة لكن ليست بالضرورة متطابقة. أخيرا، أعطينا عبارة الخطأ الموجود بين موثوقية نظام ك-من بين-ن حيث تكون مكوناته مستقلة و ما يعادله في حالة المكونات غير المستقلة، هذا الخطأ تم التعبير عنه بدلالة أهمية الموثوقية المشتركة.

الكلمات المفاتيح أهمية الموثوقية المشتركة، نظام ك-من بين-ن، أهمية العطب المشتركة، أهمية الموثوقية الشرطية.

Résumé :Importance cojointe en fiabilité

Le travail que nous avons présenté dans ce mémoire est une analyse de l'importance conjointe en fiabilité d'un système cohérent. Sur la base des résultats générales obtenus sur des systèmes quelconques on a applique ceux-ci sur les systèmes k-sur-n. On a donné une formule explicite de l'importance conjointe en fiabilité de l composants l<n dans le cas d'un système k-sur-n dont les composants sont indépendants non nécessairement identiques. Enfin, on établit une formule de l'erreur qui existe entre la fiabilité d'un système k-sur-n dont les composants sont indépendants et la fiabilité du système équivalent mais dont l composants sont non indépendants. Cette erreur a été exprimée en fonction de l'importance conjointe en fiabilité.

Mot clés : Importance conjointe en fiabilité, Système k-sur-n, Importance conjointe en défaillance, Importance conditionnelle en fiabilité.

Abstract:Joint reliability importance

The work wich we presented in this report is an analysis of the joint reliability importance of a coherent system. On the basis result general obtaind on any system we implement these system k-out-of-n . We gave an explicit formula for the joint reliability importance of l component (l<n) in the case of a k-out-of-n system from which component are independent but not necessarily identical. Finally, we establish a formula for the error between the reliability of a k-out-of-n system whos component are independent and system reliability equivalant but whose components are not independent. This error has been expressed in terms of joint reliability importance.

Key-words: Joint reliability importance, System k-out-of-n, Joint failure importance, conditional reliability importance.