REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
Université De Jijel
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N° d'ordre :
N° de Série :

MEMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de Magister en Mathématiques
Option : Probabilités et statistiques

THEME

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES RÉTROGRADES AVEC GÉNÉRATEURS LIPSCHITIZIENS STOCHASTIQUES

Par

ZEDOURI Med Cherif

Devant le jury :

Président	: Boutaghou Amor	MC.	Univ. Jijel
Rapporteur	: Aissaoui Med Zine	MC.	Univ. Guelma
Examinateurs	: Remita Mohamed Riad	MC.	Univ. Annaba
	: Haiour Mohamed	MC.	UnivAnnaba

Soutenu le, 18.04.2010

Table des matières

Abstract

In this work we study the results of the existence and the uniqueness for the solution in lipschitz (theorem of Pardoux-Peng) and monotony cases. We study the results of the existence and the uniqueness for the solution in localy lipschitz case, and, existence and uniqueness theorem for backward stochastic differential equations driven by a Brownian motion, where the uniform Lipschitz continuity is replaced by a stochastic condition.

Résumé

Dans ce travail, nous introduisons la notion des équations différentielles stochastiques rétrogrades. Nous étudions des résultats d'existence et d'unicité de la solution dans le cas lipschitzien et celui de monotonie ; nous voyons des exemples d'applications des EDSR en mathématiques financières et puis nous montrons le théorème d'existence et d'unicité pour les EDSR avec générateurs localement Lipschitiziens ainsi que les EDSR avec générateurs Lipschitiziens Stochastiques..

Introduction

La notion des équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) a été introduite par Pardoux-Peng [13]. Il s'agit de trouver un processus adapté (Y, Z) tel que,

$$Y_t = \xi + \int_t^T g(r, Y_r, Z_r)dr - \int_t^T Z_r dB_r, \quad 0 \leq t \leq T$$

où B est un mouvement brownien défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et ξ est une valeur aléatoire $\mathcal{F}_T-$mesurable ; $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est la filtration naturelle de B. Ce type d'équations est rencontré en contrôle optimal stochastique des diffusions [11], dans les jeux différentiels stochastiques de somme nulle ([10], [11]) ou alors en mathématiques financières [7].

La théorie de ces équations a connu un formidable développement à partir des années 1990. Elles sont apparues en 1973 sous forme linéaire par J.M.Bismut [5] dans un article qui concernait le contrôle stochastique optimal et la version de probabiliste du principe du maximum de Pontryagin. Pourtant le premier résultat général concernant les EDSR ne date que de 1990 et est dû à E. Pardoux et S. Peng [13]. Nous pourrions aborder les équations rétrogrades à travers des problèmes de modélisation : le contrôle stochastique, ou encore le problème du "pricing" et des stratégies de couverture en finance. Mais dans ce travail, la principale motivation provient des équations différentielles ordinaires.

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$y' = -g(t, y) \qquad et \qquad y(T) = x. \tag{0.1}$$

Les données de ce problème sont l'instant terminal $T > 0$, la donnée finale $x \in \mathbb{R}^k$ et la fonction $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$. L'inconnue y est en fait une fonction $y : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^k$, qui doit satisfaire la condition finale $y(T) = x$ et vérifier l'équation différentielle ordinaire (EDO) : $y'(t) = -g(t, y(t))$ pour tout $t \in [0,T]$. On peut réécrire (0.1) sous forme intégrale :

$$\forall t \in [0,T], \qquad y(t) = x + \int_t^T g(r, y(r))dr.$$

Sous de bonnes hypothèses de régularité sur g par rapport à y (théorème de Cauchy-Lipschitz par exemple), il y a une et une seule solution. De plus, on peut "retourner" le temps pour se ramener au même problème avec une donnée initiale. En effet si y est solution de (0.1), on définit l'application $t \longrightarrow \tilde{y}(t) = y(T-t)$. La fonction $\tilde{y}$ est solution de

$$\tilde{y}' = f(t, \tilde{y}) \quad \text{sur} \quad [0,T] \quad \text{et} \quad \tilde{y}(0) = x$$

avec $f(t,.) = g(T-t,.)$. En résumé dans cadre déterministe, se donner une condition initiale (i.e. en $t = 0$) ou finale (*i.e.* en $t = T$) revient à résoudre le même problème.

Dans le cas aléatoire, le problème est totalement différent. Sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$, considérons une variable aléatoire ξ supposée mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_T$. Cette donnée ξ peut être une fonction du prix d'une action à l'instant T en finance, la filtration représentant les informations disponibles sur le marché à chaque instant, ou la fonction-valeur à optimiser en théorie de contrôle stochastique.

On veut résoudre le problème (0.1) suivant :

$$y' = -g(t,y) \quad \text{et} \quad y(T) = \xi \Longleftrightarrow \forall t \in [0,T], \quad y(t) = \xi + \int_t^T g(r, y(r))dr$$

C'est l'équation qu'aurait à résoudre un agent cherchant une stratégie de couverture en n'utilisant qu'un actif sans risque [7]. Si ce problème admet une solution, cette solution est elle-même aléatoire car elle dépend de ξ, et à un instant $t < T$, elle est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_T$. Autrement dit à l'instant t elle dépend du futur T. Ceci est inacceptable dans de nombreuses applications ; en finance ceci s'apparente à un délit d'initié. Ainsi on voudrait résoudre la même EDO avec la condition supplémentaire que les solutions n'anticipent pas sur le futur, c'est à dire qu'elles soient adaptées à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

C'est là qu'interviennent les EDSR. Ce sont des équations de la forme

$$Y_t = \xi + \int_t^T g(r, Y_r, Z_r)dr - \int_t^T Z_r dB_r, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{0.2}$$

Telles que les données de cette équation sont :

1- Le temps final $T > 0$ qui peut être déterministe ou aléatoire (temps d'arrêt) ;

2- $(B_t)_{t\geq 0}$ qui est un mouvement brownien standard défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$;

3- La filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est la filtration augmentée du mouvement brownien, qui vérifie les hypothèses usuelles ;

4- La fonction $g : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ est progressivement mesurable ;

5- La valeur aléatoire ξ à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ et supposée $\mathcal{F}_T-$mesurable.

L'application g est appelée le **générateur** et ξ est la **donnée finale**.

Les inconnues sont les processus $\{Y_t\}_{t\in[0,T]}$ et $\{Z_t\}_{t\in[0,T]}$, à qui on impose d'être adaptés à la filtration brownienne : c'est le point crucial de cette théorie et c'est cette condition qui joue le rôle de seconde équation. En 1973, dans l'article [5], ces équations ont été introduites dans le cas où g est linéaire par rapport aux deux variables y et z. En 1990, E.Pardoux et S.Peng [13] ont montré un résultat d'existence et d'unicité des solutions dans un cadre non linéaire général. Leurs hypothèses étaient : g est lipschitzienne en y et z, et ξ ainsi que le processus $\{g(t, 0, 0)\}_{t\in[0,T]}$ sont de carré intégrable. Remarquons que la condition de régularité sur g est très proche de celle du théorème de Cauchy-Lipschitz sur les EDO. Ensuite leur résultat a été étendu par de très nombreux articles et la condition d'intégrabilité sur ξ, ainsi que les hypothèses concernant g ont pu être affaiblies. Il faut noter que dans cette théorie, si ξ et g sont déterministes, alors la solution de l'EDSR est : $Z = 0$ et Y solution de l'équation différentielle $y' = -g(t, y, 0)$ avec $Y_T = \xi$. On est ramené alors à la résolution du problème de Cauchy (0.1)

Le cas particulier auquel nous nous sommes intéressés dans ce travail est les équations différentielles stochastiques rétrogrades avec générateurs lipschitiziens stochastiques, c'est à dire, la condition de la continuité uniforme de Lipschitz est remplacée par une condition stochastique.

Dans **le premier chapitre,** nous allons expliquer la théorie du calcul stochastique, en donnant les définitions et les propriétés des processus continues ainsi que leurs résultats principaux (processus stochastiques, mouvement brownien, martingales) qui nous permettre de définir l'intégrale stochastique et puis l'existence et l'unicité de la solution d'une équation différentielle stochastique (EDS).

Le deuxième chapitre, nous allons montrer un premier résultat d'existence et d'unicité de la solution d'une EDSR, ce résultat est dû à E.Pardoux et S.Peng [13] et c'est le premier résultat d'existence et d'unicité pour les équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) dans le cas où le générateur non linéaire sous des hypothèses lipschitiziennes en (y, z), et puis nous montrons ce résultat dans des conditions plus fortes où g vérifie la condition de monotonie en y, c'est à dire, nous allons affaiblir la condition de Lipschitz en y par une condition de monotonie. A la fin de ce chapitre, nous allons voir des exemples d'applications des EDSR en mathématiques financières.

Le troisième chapitre, nous allons voir un résultat d'existence et d'unicité de solution des équations différentielles stochastiques rétrogrades où le générateur g est localement lipschitizien, c'est à dire n'est pas globalement lipschitizien.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude d'existence et d'unicité pour les équations différentielles stochastiques rétrogrades avec générateurs qui satisfont la condition stochastique de lipschitz, c'est à dire, la condition de la continuité uniforme de Lipschitz est remplacée par une condition stochastique.

Chapitre 1

Le calcul stochastique

Le calcul stochastique est une extension du calcul différentiel et intégrale classique, dans laquelle les processus à temps continus remplaçant les fonctions, et les martingales jouent le rôle des constantes.

Le but de ce chapitre est consacré à donner des définitions de base et des résultats principaux pour les utiliser aux prochains chapitres.

1.1 Généralités sur les processus stochastiques

Définition 1.1 (Processus Stochastique) *Soit T un ensemble. On appelle **processus stochastique** sur un espace de probabilité $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ indexé par T et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, une famille $(X_t)_{t\in T}$ d'applications mesurables de $(\Omega,\ \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}^d, \beta(\mathbb{R}^d))$; pour tout $t \in T$, X_t soit une variable aléatoire.*

Remarque 1.2 *Les fonctions $t \curvearrowright X_t(\omega)$ sont appelées les **trajectoires** du processus stochastique X_t.*

Définition 1.3 *On appelle* ***filtration*** $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *de* $(\Omega, \mathcal{F})$*, une famille croissante de sous tribus de* $\mathcal{F}$ *.i.e* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, $\forall s \leq t$.

Remarque 1.4 *Un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *muni d'une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ *est satisfait les conditions habituelles si :*

i) Les ensembles négligeables sont contenus dans $\mathcal{F}_0$.

ii) La filtration est continue à droite i.e. $\mathcal{F}_t = \cap_{s>t}\mathcal{F}_s \quad \forall t$.

La famille croissante de sous tribus $\mathcal{G}_t = \sigma(X_s \ s \leq t)$ s'appelle **la filtration naturelle** du processus stochastique X . Mais $\mathcal{G}_0$ ne contient pas nécessairement les ensembles négligeables $(\mathcal{N})$, c'est pour cela on introduit la filtration naturelle augmentée de X définie par $\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{N} \cup \mathcal{G}_t)$. Lorsque nous parlerons de filtration naturelle, il s'agira toujours de la filtration naturelle augmentée.

Définition 1.5 *Un processus stochastique* $(X_t)_{t\in T}$ *est adapté par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *si* $\forall t \geq 0, X_t \in \mathcal{F}_t$ *i.e.* X_t *est* $\mathcal{F}_t-$*mesurable pour tout* t.

Définition 1.6 *Soient* $(X_t)_{t\geq 0}$ *et* $(Y_t)_{t\geq 0}$ *deux processus stochastiques définis sur même espace* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

(i) X *est une modification (ou une version) de* Y *si : pour tout* $t \geq 0$, *les variables* X_t *et* Y_t *sont égales*

$$P - p.s \ \forall t P(X_t = Y_t \ ) = 1$$

(ii) X *et* Y *sont indistinguables si* $P - p.s.$*les trajectoires de* X *et* Y *sont les mêmes i.e.*

$$P(X_t = Y_t, \forall t \geq 0) = 1.$$

Définition 1.7 *Un processus stochastique* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est progressivement mesurable par rapport à* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$,*si l'application* $(s,\omega) \longrightarrow X_s(\omega)$ *de* $[0,t]\times\Omega$ *dans* $\mathbb{R}^d$ *est mesurable par rapport à* $\beta([0,t])\otimes\mathcal{F}_t$ *et* $\beta(\mathbb{R}^d)$.

Remarque 1.8 *Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté. On note aussi que si* X *est processus mesurable et adapté alors il possède une modification progressivement mesurable.*

Proposition 1.9 *Si* X *est un processus stochastique dont les trajectoires sont continues à droite (ou à gauche), alors* X *est mesurable et progressivement mesurables s'il est de plus adapté.*

Définition 1.10 *Un processus* $V = (V_t.t \geq 0)$ *est dit à variation bornée sur* $[0,t]$ *si*

$$\sup_{t_i}\sum_i \left|V_{t_{i+1}} - V_{t_i}\right| < K$$

Définition 1.11 *Un processus* $V = (V_t.t \geq 0)$ *est dit à variation finie sur* $[0,t]$ *si*

$$sup_{t_i}\sum_i \left|V_{t_{i+1}} - V_{t_i}\right| < \infty$$

Définition 1.12 *Les variables aléatoires* $X_t - X_s, 0 \leq s \leq t$, *sont appelées les* ***accroissements*** *du processus stochastique (* X_t*).*

(i) *Processus à accroissement indépendants :*

$$(X_t - X_s) \perp \mathcal{F}_t^X = \sigma(X_r\ , 0 \leq r \leq s)\forall 0 \leq s \leq t.$$

(ii) *Processus à accroissement stationnaires :*

$$X_t - X_s \sim X_{t-s} - X_0, \forall 0 \leq s \leq t.$$

Définition 1.13 (Temps d'arrêt) *Une variable aléatoire* $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ *est un **temps d'arrêt** si l'évènement* $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t,\ 0 \leq t < \infty$.

Définition 1.14 *On appelle **Mouvement Brownien** un processus stochastique* $(B_t)_{t \geq 0}$ *à valeurs réelles tel que :*

(i) Continuité $P - p.s$ *; la fonction* $s \longrightarrow B_s(\omega)$ *est une fonction continue ;*

(ii) Indépendance des accroissements : si $0 \leq s \leq t, B_t - B_s$ *est indépendant de*

$\mathcal{F}_s = \sigma(B_u, u \leq s)$ et de loi gaussienne centrée de variance $t - s$;

(iii) Stationnarité des accroissements : si $0 \leq s \leq t$, la loi de $B_t - B_s$ est identique à celle de $B_{t-s} - B_0 = B_{t-s}$

On dit qu'un mouvement brownien par rapport à x si $B_0 = x$.

Définition 1.15 *Un mouvement brownien est dit **standard si*** $B_0 = 0\ P - p.s, \mathbb{E}[B_t] = 0$ *et* $\mathbb{E}[B_t^2] = t$.

Dans la suite si on parlera de mouvement brownien sans précision, il s'agira d'un mouvement brownien standard

Proposition 1.16 *Soit* $(B_t)_{t \geq 0}$ *un mouvement brownien standard, alors* B_t *est un processus gaussien i.e. pour tout* n *et tous* $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq t_2 ..... \leq t_n, (B_{t_1}, ...B_{t_n})$ *est un vecteur gaussien.*

Théorème 1.17 X *est mouvement brownien standard si et seulement si* X *est un processus gaussien continu centré de fonction de covariance*

$$cov(X_s, X_t) = s \wedge t = min(s, t).$$

Proposition 1.18 *Soit B un mouvement brownien Standard, on a :*

1- pour tout $T > 0, \{B_{t+T} - B_T\}_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien indépendant de $\sigma(B_u, u \leq T)$

2- pour tout $c > 0, \{cB_{\frac{t}{c^2}}\}_{t\geq 0}$: est un mouvement brownien ;

3- Le processus défini par $X_0 = 0$ et $X_t = tB_{\frac{1}{t}}$ est un mouvement brownien ;

Proposition 1.19 *Soit B un mouvement brownien on a :*

***1-** $\forall t, P - p.s, .B_t$ n'est pas différentiable en aucun point t.*

***2-** B_t n'est pas à variation finie en aucun point t.*

Définition 1.20 *Un processus $(M_t)_{t\geq 0}$ est dit martingale si :*

(i) Pour tout $t \geq 0, M_t$ est $\mathcal{F}_t-$ mesurable ;

(ii)Pour tout $t \geq 0, M_t$ est intégrable i.e. $\mathbb{E}(|M_t|) < \infty$;

(iii) Pour tout $\forall t \geq s \geq 0$ $\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) = M_s \quad P-$ p.s.

On définit de manière similaire une sous-martingale si (iii) est remplacé par

$$\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) \geq M_s \ P- \ p.s.$$

Et sur-martingale si (iii) est remplacé par

$$(\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) \leq M_s) \ P - p.s, \forall t \geq s \geq 0.$$

Proposition 1.21 *Le mouvement brownien standard $(B_t, t \geq 0)$ est une martingale par rapport à sa filtration naturelle $\mathcal{F}_t^B = \sigma(B_s, 0 \leq s \leq t)$.*

Proposition 1.22 *soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien. Les processus suivants sont des martingales par rapport à $(\mathcal{F}_t^B)$:*

(i) $M_t = B_t^2 - t$,

(ii) $N_t = e^{(B_t - \frac{t}{2})}$.

Théorème 1.23 (de Lévy) *Soit X_t un processus stochastique à trajectoires continues, adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ et tel que :*

(i) X_t est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_t)$;

(ii) $(X_t^2 - t)$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_t)$;

alors X_t est un mouvement brownien.

Théorème 1.24 (Théorème d'arrêt) *Soit (M_t) est une martingale continue par rapport à $(\mathcal{F}_t)$ et T_1, T_2 deux temps d'arrêts tels que $0 \leq T_1(\omega) \leq T_2(\omega) \leq K < \infty, \ \forall \omega \in \Omega$. Alors*

$$\mathbb{E}(M_{T_2} \mid \mathcal{F}_{T_1}) = M_{T_1} \quad P- \ p.s \text{ et donc } \mathbb{E}(M_{T_2}) = \mathbb{E}(M_{T_1})$$

En particulier, si $0 \leq T(\omega) \leq K, \forall \omega \in \Omega$, alors $\mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_0)$.

Le théorème est encore valide pour une sous-martingale et une sur-martingale (avec les inégalités correspondantes).

Théorème 1.25 (Théorème d'arrêt de Doob) *Si X est une martingale et si σ et τ sont deux temps d'arrêt bornés tels que $\sigma \leq \tau, \mathbb{E}[X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma] = X_\sigma \quad P - p.s.$*

Théorème 1.26 (Inégalités de Burkholder-Davis-Gundy "BDG") *Soit $p \in \,]0, \infty[$. Il existe deux constantes c_p et C_p telles que, pour toute martingale continue X, nul en 0.*

$$c_p \mathbb{E}[\langle X, X\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}] \leq \mathbb{E}[\sup_{t\geq 0} |X_t|^p] \leq C_p \mathbb{E}[\langle X, X\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}].$$

Remarque 1.27 *En particulier, si $T > 0$,*

$$c_p \mathbb{E}[\langle X, X\rangle_T^{\frac{p}{2}}] \leq \mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^p] \leq C_p \mathbb{E}[\langle X, X\rangle_T^{\frac{p}{2}}].$$

Théorème 1.28 (Théorème de représentation des martingales) *Soit $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ la filtration naturelle du mouvement brownien standard $(B_t)_{0\leq t\leq T}$. Soit M une martingale continue de carré intégrable par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$. Alors il existe un processus adapté H tel que $\mathbb{E}(\int_0^T H_s^2 ds) < \infty$ et, pour tout $t \in [0,T]$,*

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s dB_s \qquad P-p.s$$

Définition 1.29 (Processus d'Itô) *On appelle processus d'Itô, un processus X à valeurs réelles tel que :*

$$\forall 0 \leq t \leq T, \qquad X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds \; + \int_0^t \sigma_s dB_s, \qquad P-p.s \tag{1.1}$$

où X_0 est $\mathcal{F}_0-$mesurable, b et σ sont deux processus progressivement mesurables vérifiant les conditions

$$\int_0^t |b_s|\, ds \; < \infty \qquad et \quad \int_0^t \|\sigma_s\|^2\, ds \; < \infty$$

Le coefficient b est le drift ou la dérivée, σ est le coefficient de diffusion.

Théorème 1.30 (Formule d'Itô) *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe C^1 par rapport à t, de classe C^2 par rapport à x, à dérivées bornées, on a*

$$f(t,X_t) = f(0,X_0) + \int_0^t f'_x(s,X_s)dX_s + \int_0^t f'_s(s,X_s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(s,X_s)\sigma_s^2 ds \tag{1.2}$$

ce qui l'on note

$$\begin{aligned} df(t,X_t) &= [f'_t(t,X_t) + \frac{1}{2}f''_{xx}(t,X_t)\sigma_t^2]dt + f'_x(t,X_t)dX_t \qquad (1.3)\\ &= f'_t(t,X_t)dt + f'_x(t,X_t)dX + \frac{1}{2}f''_{xx}(t,X_t)d\langle X\rangle_t \end{aligned}$$

Proposition 1.31 *La formule d'Itô montre que*

$$d[X_1X_2](t) = X_1(t)dX_2(t) + X_2(t)dX_1(t) + \sigma_1(t)\sigma_2(t)dt \tag{1.4}$$

Cette formule est connue sous le nom d'intégration par parties. La quantité $\sigma_1(t)\sigma_2(t)$ correspond au crochet de X_1, X_2 noté $\langle X_1, X_2\rangle$ est défini comme le processus à variation fini $\langle X_1, X_2\rangle = \int_0^t \sigma_1(s)\sigma_2(s)ds$.

1.2 Equations différentielles stochastiques(EDS)

Définition 1.32 *Une équation différentielle stochastique est une équation de la forme*

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s, \tag{1.5}$$

ou sous une forme

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)\ dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X_0 = x \end{cases} \tag{1.6}$$

Le coefficient b s'appelle le drifft et la matrice $\sigma\sigma^t$ s'appelle la matrice de diffusion

L'inconnu est le processus X. Le problème est, comme une équation différentielle ordinaire, de montrer que sous certaines conditions sur les coefficients, l'équation différentielle a une unique solution.

Définition 1.33 (Solution d'EDS) *Une solution (forte) de l'EDS (1.6) est un processus continu tel que :*

1- X est progressivement mesurable ;

2- $P-p.s$ $\int_0^t \{|b(s, X_s)|\} + \|\sigma(s, X_s)\|^2 ds < \infty$; où $\|\sigma\| = trace(\sigma\sigma^*)$;

3- $P-p.s$, on a : $X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s, 0 \leq t \leq T$.

On note :

$$\mathcal{S}^2 : \begin{cases} \text{l'espace des processus } X_t \text{ progressivement mesurables, tels que :} \\ \mathbb{E}(\sup\limits_{0\leq t\leq T} |X_t|^2) < \infty), \text{ muni de } \|X\| = \mathbb{E}\left(\left[\sup\limits_{0\leq t\leq T} |X_t|^2\right]^{1/2} < \infty\right) \end{cases}$$

$\mathcal{S}^2_c$: $\{$le sous espace de $\mathcal{S}^2$ formé des processus continus.$\}$

Lemme 1.34 (de Gronwall) *Soit $g : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant*

$$\forall t \in [0,T] \quad 0 \leq g(t) \leq \alpha(t) + \beta \int_0^t g(s)ds$$

pour une constante $\beta \geq 0$ et pour une fonction $\alpha : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable par rapport à la mesure de Lebèsgue. On a alors

$$\forall t \in [0,T] \;\; 0 \leq g(t) \leq \alpha(t) + \beta \int_0^t \alpha(s) e^{\beta(t-s)} ds$$

L'intérêt est notamment que g n'apparaît qu'une seule fois dans la nouvelle inéquation) en particulier, si α est une fonction constante, on trouve

$$\forall t \in [0,T], \qquad g(t) \leq \alpha e^{\beta t}$$

et si $\alpha = 0$, on a $g = 0$

Théorème 1.35 (Existence et unicité) *On suppose que*

a) les fonctions b et σ sont continues.

b) Il existe K tel que pout tout $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} (i) \;\; |b(t,x) - b(t,y)| + \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \leq K\,|x-y| \;\; (\textit{condition de Lipschitz}) \\ (ii) \;\; |b(t,x)| + \|\sigma(t,x)\| \leq K(1+|x|) \; (\textit{condition de croissance}) \end{cases} \tag{1.7}$$

c) $\mathbb{E}(\sup\limits_{0\leq t\leq T} |X_t|^2 < \infty)$.

Alors l'EDS (1.6) possède une unique solution, cette solution appartient à $\mathcal{S}^2$.

Définition 1.36 (Processus de Markov) *Soit* $(X_t, t \geq 0)$ *un processus stochastique.* (X_t) *est appelé processus de markov si pour tout* $0 < s < t$, *toute* $f \in C_b(\mathbb{R})$,

$$\mathbb{E}(f(X_t) \mid \mathcal{F}_s^X) = \mathbb{E}(f(X_t) \mid X_s),$$

où $\mathcal{F}_s^X \triangleq \sigma\{X_r,\ 0 \leq r \leq s\}$.

1.3 Changement de probabilité

Proposition 1.37 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)_{t \leq T}$ *un espace de probabilité filtré et soient* P *et* Q *deux probabilités sur* $(\Omega, \mathcal{F}_T)$.*On suppose* P *et* Q *équivalentes. Alors il existe* $(L_t, t \leq T)$, $P - (\mathcal{F}_t)$ *martingale strictement positive telle que* $Q = L_T P$ *sur* $\mathcal{F}_T$ *et* $Q \mid \mathcal{F}_t = L_t P \mid \mathcal{F}_t$, *c'est à dire telle que* $\mathbb{E}_Q(X) = \mathbb{E}_P(L_t X)$ *pour tout variable* X $Q-$*intégrable* $\mathcal{F}_t-$*mesurable pour tout* $t \leq T$. *De plus* $L_0 = 1$ *et* $\mathbb{E}_P(L_t) = 1, \forall t \leq T$

Théorème 1.38 (Girsanov) *Soit* $(B_t, t \geq 0)$ *un mouvement brownien sur un espace* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *et* $(\mathcal{F}_t)$ *sa filtration naturelle. Soit*

$$L_t = \exp\left[\int_0^t \theta_s dBs - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right],$$

où θ *est un processus* $(\mathcal{F}_t)$ *-adapté (autrement dit* $dL_t = L_t \theta_t dB_t$*).*

On suppose $\mathbb{E}(L_T) = 1$. Soit $dQ \mid \mathcal{F}_T = L_T dP \mid \mathcal{F}_T$. Le processus B_t s'écrit $B_t = \tilde{B}_t + \int_0^t \theta_s ds$ où $\tilde{B}_t$ est un Q-mouvement brownien. Sous la condition de Novikov $\mathbb{E}_P(\exp \frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds < \infty)$. L_t est une variable positive d'espérance 1 sous P et L est une P-martingale. Si L n'est pas d'espérance 1. L est une sur-martingale d'espérance strictement plus petit que 1. Une façon d'utiliser le théorème de Girsanov est la généralisation suivante

Proposition 1.39 *Soit Z une P-martingale locale continue et Q définit sur $\mathcal{F}_t$ par*

$$dQ = exp(Z_t - \frac{1}{2}\langle Z\rangle_t)dP = L_t dP$$

On suppose que Q est une probabilité . Si N est une P-martingale locale continue. Le processus $(N_t - \langle N, Z\rangle_t = N_t - \frac{1}{L_t}\langle N, L\rangle_t, \;\; t \geq 0)$ est une Q-martingale locale continue de crochet $\langle N\rangle_t$.

Chapitre 2

Equations différentielles stochastiques rétrogrades(EDSR)

2.1 Présentation du problème

Considérons un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$, une variable aléatoire ξ mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$. On veut résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \frac{-Y_t}{dt} = g(Y_t), \quad t \in [0,T] \\ Y_T = \xi \end{cases}$$

En imposant que pour tout instant t, Y_t ne dépende pas du futur après t c'est à dire que le processus Y soit adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Prenons l'exemple le plus simple à savoir $g \equiv 0$. Le candidat naturel est $Y_t = \xi$ qui n'est pas adapté si ξ n'est pas déterministe. La meilleure approximation - disons dans L_2 adaptée - est la martingale $Y_t = \mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{F}_t)$. Si on travaille avec la filtration naturelle d'un mouvement brownien, le théorème de représentation des martingales browniennes permet de construire un processus Z de carré intégrable et adapté tel que :

$$Y_t = \mathbb{E}\left(\xi \mid \mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}(\xi) + \int_0^t Z_s dB_s$$

ce qui implique que

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dB_s \quad i.e. \qquad - dY_t = -Z_t dB_t \quad \text{avec,} \qquad Y_T = \xi$$

On voit donc apparaitre sur l'exemple le plus simple une seconde inconnue qui est le processus Z dont le rôle est de rendre le processus Y adapté. Par conséquent, comme une seconde variable, apparaît, pour obtenir la plus grande généralité, on permet à g de dépendre du processus Z ; l'équation devient donc :

$$-dY_t = g(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dB_t, \quad avec, \quad Y_T = \xi$$

2.1.1 Notation

- Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité complet, B un mouvement brownien d-dimensionnel sur cet espace. On note $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration naturelle du mouvement brownien B. On travaille avec deux espaces de processus.
- On note $S^2(\mathbb{R}^k)$ l'espace vectoriel formé des processus Y, progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, tels que :$\|Y\|^2_{S^2} = \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2\right] < \infty$,
- $S^2_c(\mathbb{R}^k)$ le sous-espace formé par les processus continus.
- $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ le sous-espace formé par les processus Z, progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^{k\times d}$, tel que :$\|Z\|^2_{M^2} = \mathbb{E}\left[\int_0^T \|Z_t\|^2 dt\right] < \infty$
- Si $Z \in \mathbb{R}^{k\times d}$, $\|Z\|^2 = trace(Z, Z^*)$
- $M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ désigne l'ensemble des classes d'équivalences de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^{k\times d})$.

– Les espaces S^2, S_c^2, M^2 sont des espaces de Banach pour les normes définies précédemment.

– On désigne β^2 l'espace de Banach $S_c^2(\mathbb{R}^k)\ \times M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$.

– On donne une application aléatoire g définie sur $[0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ telle que pour tout $(y,z)\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$, le processus $\{g(t,y,z)\}_{0\leq t\leq T}$ soit progressivement mesurable.

– On considère une variable aléatoire ξ mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^k$.

Le problème est de résoudre l'équation différentielle stochastique rétrograde (EDSR) suivante :

$$-dY_t = g(t,Y_t,Z_t)dt - Z_t dB_t, \quad 0\leq t\leq T \qquad\qquad avec, \quad Y_T=\xi,$$

ou, de façon équivalente, sous forme intégrale,

$$Y_t = \xi + \int_t^T g(r,Y_r,Z_r)dr - \int_t^T Z_r dB_{r..} \qquad\qquad 0\leq t\leq T. \tag{2.1}$$

La fonction g s'appelle le générateur de l'EDSR et ξ la condition terminale.

Définition 2.1 *Une solution de l'EDSR (2.1) est un couple de processus* $\{(Y_t,Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ *vérifiant :*

1. Y et Z sont progressivement mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{k\times d}$ respectivement ;
2. $P-p.s.\quad \int_0^T \{|g(r,Y_r,Z_r)| + \|Z_r\|^2\}dr < \infty$;
3. $P-p.s$, on a :

$$Y_t = \xi + \int_t^T g(r,Y_r,Z_r)dr - \int_t^T Z_r dB_{.} \qquad\qquad 0\leq t\leq T.$$

On peut remarquer que les intégrales de l'équation (2.1) étant bien définies et comme le processus Y est progressivement mesurable, il est adapté et donc en particulier Y_0 est une quantité déterministe. Avant de donner un premier résultat d'existence et d'unicité, nous allons montrer que sous une hypothèse relativement faible sur le générateur g, le processus $Y \in S^2$.

Proposition 2.2 *Supposons qu'il existe un processus $\{g_t\}_{0\leq t\leq T}$ positif, appartient à $M^2(\mathbb{R})$ et une constante positive λ tels que*

$$\forall (t,y,z) \in [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d},\ \ |g(t,y,z)| \leq g_t + \lambda(|y| + \|z\|).$$

Si $\{(Y_t, Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ est une solution de l'EDSR (1.2) telle que $Z \in M^2$ alors Y appartient à S_c^2.

Démonstration. Le résultat est déduit de lemme du Gronwall et du fait que Y_0 est déterministe. En effet, on a pour tout $t \geq 0$

$$Y_t = Y_0 - \int_0^t g(r, Y_r, Z_r)dr + \int_0^t Z_r dB_r,$$

et par suite, utilisant l'hypothèse sur g

$$|Y_t| \leq |Y_0| + \int_0^T (g_r + \lambda\|Z\|_r)dr + \sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Z_r dB_r\right| + \lambda\int_0^t |Y_r|\, dr$$

Posons

$$\xi = |Y_0| + \int_0^T (g_r + \lambda\|Z_r\|)dr + \sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Z_r dB_r\right|$$

Par l'hypothèse, $Z \in M^2$, via l'inégalité de Doob, le troisième terme est de carré intégrable ; il en est de même pour $\{g_t\}_{0\leq t\leq T}$, et Y_0 est déterministe, donc de carré intégrable ; il s'en suit que ξ est une variable aléatoire de carré intégrable. Comme Y est un processus continu, le lemme de Gronwall fournit l'inégalité $\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t| \leq \xi e^{\lambda T}$ qui montre que $Y \in S^2$. Le résultat est encore valable lorsque $\|g_1\|$ est une variable aléatoire de carré intégrable. ■

Finissons par résultat d'intégrabilité :

Lemme 2.3 *Soient $Y \in S^2(\mathbb{R}^k)$ et $Z \in M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$. Alors $\{\int_0^t Y_s Z_s dB_s,\ t \in [0,T]\}$ est une martingale uniformément intégrable.*

Démonstration. Les inégalités de BDG, donnent

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Y_r Z_r dB_r\right|] &\leq c\mathbb{E}[\sqrt{\int_0^T |Y_r|^2 \|Z_r\|_s^2 dr}], \\
&\leq c\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_r|\sqrt{\int_0^T \|Z_r\|_s^2 dr}],
\end{aligned}$$

et par suite comme $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$,

$$\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Y_r Z_r dB_r\right|] \leq c'(\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_r|^2 + \mathbb{E}[\int_0^T \|Z_r\|^2 dr]).$$

■

2.2 Le cas Lipschitz

2.2.1 Le résultat de Pardoux-Peng

Hypothèses (L) :

Il existe une constante λ telle que $P - p.s$

(L1) La condition de Lipschitz en (y,z)

$$\text{pour tout} \quad t,y,y',z,z', \left|g(t,y,z)-g(t,y',z'\right| \leq \lambda(\left|y-y'\right|+\|z-z'\|);$$

(L2) La condition d'intégrabilité

$$\mathbb{E}\left[|\xi|^2+\int\limits_0^T |g(r,0,0)|^2\,dr\right]<\infty$$

Nous commencons par un cas très simple , celui où g ne dépend ni de y ni de z *i.e.* on se donne ξ de carré intégrable et un processus $\{G_t\}_{0\leq t\leq T}\in M^2(\mathbb{R}^k)$ et on veut trouver une solution de l'EDSR

$$Y_t=\xi+\int\limits_t^T G_r dr-\int\limits_t^T Z_r dB. \qquad 0\leq t\leq T \tag{2.2}$$

Lemme 2.4 *Soient* $\xi\in L^2(\mathcal{F}_T)$ *et* $\{G_t\}_{0\leq t\leq T}\in M^2(\mathbb{R}^k)$*, l'EDSR (2.2) possède une unique solution* (Y,Z) *telle que* $Z\in M^2$.

Démonstration. Supposons dans un premier temps que (Y,Z) soit une solution vérifiant $Z\in M^2$. Si on prend l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$. On a nécessairement,

$$Y_t=\mathbb{E}\left(\xi+\int\limits_t^T G_r dr\mid\mathcal{F}_t\right)$$

On définit donc Y à l'aide de la forme précédente et il reste à trouver Z. Remarquons que d'après le théorème de Fubuni, comme G est progressivement mesurable, $\int\limits_0^t G_r dr$ est un processus adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}$; en fait dans S_c^2 puisque G est de carré intégrable. On a alors, pout tout $t\in[0,T]$,

$$Y_t=\mathbb{E}(\xi+\int\limits_0^T G_r dr\mid\mathcal{F}_t)-\int\limits_0^t G_r dr=M_t-\int\limits_0^t G_r dr.$$

M est une martingale brownienne, via le théorème de représentations des martingales, on peut construire un processus Z appartenant à M^2 tel que :

$$Y_t = M_t - \int_0^t G_r dr = M_0 + \int_0^t Z_r dB_r - \int_0^t G_r dr$$

On peut vérifier facilement que (Y, Z) ainsi construit une solution de l'EDSR étudiée puisque comme $Y_T = \xi$,

$$\begin{aligned} Y_t - \xi &= M_0 + \int_0^t Z_r dB_r - \int_0^t G_r dr - \left(M_0 + \int_0^T Z_r dB_r - \int_0^T G_r dr \right) \\ &= \int_t^T G_r dr - \int_t^T Z_r dB_r. \end{aligned}$$

L'unicité est évidente pour les solutions vérifiant $Z \in M^2$. $\blacksquare$

Théorème 2.5 (Pardoux-Peng 90) *Sous les hypothèses (**L**), l'EDSR (2.1) possède une unique solution* (Y, Z) *telle que* $Z \in M^2$.

Démonstration. On utilise un argument de point fixe dans l'espace de Banach β^2, en construisant une application ψ de β^2 dans lui même, de sorte que $(Y, Z) \in \beta^2$ est une solution de l'EDSR (2.1) si et seulement si c'est un point fixe de Ψ.

Pour $(U, V) \in \beta^2$, on définit $(Y, Z) = \psi(U, V)$ comme étant la solution de l'EDSR :

$$Y_t = \xi + \int_t^T g(r, U_r, V_r) dr - \int_t^T Z_r dB_r, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Remarquons que cette EDSR possède une unique solution qui est dans β^2. En effet, posons $G_r = g(r, U_r, V_r)$. Ce processus appartient à M^2, puisque g étant lipschitz,

$$|G_r| \leq |g(r, 0, 0)| + \lambda\, |U_r| + \lambda \|V_r\|,$$

et ces trois derniers processus sont de carré intégrable. Par suite, on peut appliquer le lemme (2.4) pour obtenir une unique solution (Y, Z) telle que $Z \in M^2$ et (Y, Z) appartient à β^2 : L'intégralité de Z est obtenue par construction et, d'après la proposition (2.2), $Y \in S_c^2$. L'application ψ de β^2 dans lui même est donc bien définie.

Soient (U, V) et (U', V') deux élément de β^2 et $(Y, Z) = \psi(U, V)$, $(Y', Z') = \psi(U', V')$. Notons $y = Y - Y'$ et $z = Z - Z'$, on a $y_T = 0$ et

$$dy = -\{g(t, U_t, V_t) - g(t, U_t', V_t'\}dt + z_t dB_t.$$

On applique la formule d'Itô à $e^{\alpha t} |y_t|^2$ pour obtenir :

$$d(e^{\alpha t} |y_t|^2) = \alpha e^{\alpha t} |y_t|^2 dt - 2e^{\alpha t} y_t.\{g(t, U_t, V_t) - g(t, U_t', V_t'\}dt + 2e^{\alpha t} y_t.z_t dB_t + e^{\alpha t}\|z_t\|^2 dt$$

Par conséquent, intégrant entre t et T, on obtient

$$e^{\alpha t} |y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}\|z_r\|^2 dr = \int_t^T e^{\alpha r}(-\alpha |y_r|^2 + 2y_r.\{g(r, U_r, V_r) - g(r, U_r', V_r'\})dr - \int_t^T 2e^{\alpha r} y_r.z_r dB_r,$$

et comme g est Lipschitz, il vient, notant u et v pour $U - U'$ et $V - V'$ respectivement,

$$e^{\alpha t} |y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}\|z_r\|^2 dr \leq \int_t^T e^{\alpha r}(-\alpha |y_r|^2 + 2\lambda |y_r| u_r + 2\lambda |y_r| \|v_r\|)dr. - \int_t^T 2e^{\alpha r} y_r.z_r dB_r,$$

pour tout $\varepsilon > 0$,on a, $2ab \leq \frac{a^2}{\varepsilon} + \varepsilon b^2$, et donc l'inégalité précédente donne

$$e^{\alpha t} |y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}\|z_r\|^2 dr \leq \int_t^T e^{\alpha r}(-\alpha + \frac{2\lambda^2}{\varepsilon}) |y_r|^2 dr - \int_t^T 2e^{\alpha r} y_r.z_r dB_r + \varepsilon \int_t^T e^{\alpha r}(|u_r|^2 + \|v_r\|^2)dr,$$

et prenant, $\alpha = \frac{2\lambda^2}{\varepsilon}$,on a , notant $R_\varepsilon = \varepsilon \int_t^T e^{\alpha r}(|u_r|^2 + \|v_r\|^2)dr$,

$$\forall t \in [0, T], \quad e^{\alpha t} |y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}\|z_r\|^2 dr \leq R_\varepsilon - 2\int_t^T e^{\alpha r} y_r.z_r dB_r \tag{2.3}$$

d'après le lemme (2.3), la martingale locale $\left\{\int_0^t e^{\alpha r} y_r . z_r dB_r\right\}$ est une martingale nulle en 0 puisque Y, Y' appartiennent à S^2 et Z, Z' appartiennent à M^2. En particulier, prenons l'espérance, on obtient facilement pout $t = 0$,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha r} \|z_r\|^2 dr\right] \leq \mathbb{E}(R_\varepsilon). \tag{2.4}$$

Revenant à l'inégalité (2.3), les inégalités BDG fournissent,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} |y_t|^2\right] &\leq E(R_\varepsilon) + C\mathbb{E}\left[\sqrt{\int_0^T e^{2\alpha r} |y_r|^2 \|z_r\|^2 dr}\right] \\
&\leq \mathbb{E}(R_\varepsilon) + C\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\frac{\alpha t}{2}} |y_t| \sqrt{\int_0^T e^{\alpha r} \|z_r\|^2 dr}\right],
\end{aligned}$$

puis comme $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$,

$$\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} |y_t|^2] \leq \mathbb{E}(R_\varepsilon) + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} |y_t|^2\right] + \frac{C^2}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha r} \|z_r\|^2 dr\right].$$

prenant en considération l'inégalité (2.4), on obtient finalement

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} |y_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha r} \|z_r\|^2 dr\right] \leq (3 + C^2)\mathbb{E}(R_\varepsilon),$$

et par suite, revenant à la définition de R_ε,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} |y_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha r} \|z_r\|^2 dr\right] \leq \varepsilon(3 + C^2)(1 \vee T)\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} |u_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha r} \|v_r\|^2 dr\right].$$

prenant ϵ tel que $\varepsilon(3 + C^2)(1 \vee T) = \frac{1}{2}$, de sorte que l'application ψ est alors une contraction stricte de β^2 dans lui même si on le muni de la norme

$$\|(U, V)\|_\alpha = \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} |U_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha r} \|V_r\|^2 dr\right]^{\frac{1}{2}},$$

qui en fait un espace de Banach, cette dernière norme étant équivalente à la norme usuelle correspondante au cas $\alpha = 0$. ψ possède donc un unique point fixe, ce qui assure l'existence et l'unicité d'une solution de l'EDSR (2.1) dans β^2. On obtient ensuite une unique solution vérifiant $Z \in M^2$ puisque la proposition (2.2) implique qu'une telle solution appartient à β^2. ■

2.3 Cas monotone

L'objectif de ce paragraphe est s'établir un résultat d'existence et d'unicité pour les EDSR s'affranchissant partiellement de la condition de Lipschitz en y.

2.3.1 Présentation du problème

Nous allons affaiblir la condition de Lipschitz de g dans la variable y pour la remplacer par une condition de monotonie. Ce type d'hypothèse est apparu dans l'article de S.Peng [17] pour traiter le cas des EDSR avec temps terminal aléatoire c'est à dire EDSR pour lesquelles on impose la condition $Y_\tau = \xi$ avec τ temps d'arrêt. L'hypothèse de monotonie est très employée : elle permet de traiter les EDSR avec temps final aléatoire et d'autre part d'affaiblir l'hypothèse de croissance sur g en y.

Considérons B un mouvement brownien d-dimensionnel défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ complet. Soit $g : [0,T] \times \Omega \times R^k \times R^{k\times r} \to R^k$ une fonction aléatoire telle que pour tout (y, z) le processus $\{g(t, y, z)\}_{0\leq t\leq T}$ soit progressivement mesurable et soit ξ une variable aléatoire $\mathcal{F}_T-$mesurable.

Hypothèses (H) :

Il existe des constantes $K \geq 0$, $\mu \in R$, $C \geq 0$ et un processus progressivement mesurable $\{g_t\}_{0 \leq t \leq T}$, positif tels que, $P - p.s.$

(H1) $-$Condition de Lipschitz en z :

$$\forall (t,y), \forall (z,z'), \left| g(t,y,z) - g(t,y,z') \right| \leq K \left\| z - z' \right\| ;$$

(H2) $-$Monotonie en y : pour tout t, z :

$$\forall (y,y'), \quad y - y').(g(t,y,z) - g(t,y',z)) \leq \mu \left| y - y' \right|^2 ;$$

(H3) $-$Croissance linéaire en (y,z) :

$$\forall (t,y,z), \quad |g(t,y,z)| \leq g_t + C\,|y| + K\,\|z\| ;$$

(H4) $-$Continuité en y : pour tout $(t,y), z \to g(t,y,z)$ est continue ;

(H5) $-\xi$ est $\mathcal{F}_T-$mesurable et

$$\mathbb{E}\left[|\xi|^2 + \int_0^T g_t^2 dt \right] < \infty.$$

Notre objectif est d'étudier l'existence et l'unicité de l'EDSR

$$Y_t = \xi + \int_t g(r,Y_r,Z_r)dr - \int_t^T Z_r dB_r, \quad 0 \leq t \leq T \tag{2.5}$$

lorsque (ξ, g) vérifie l'hypothèse **H**

Corollaire 2.6 *Soient (ξ, g) et (ξ', g') vérifiant (**H**) avec (μ, K, C) et (μ', K', C'); soient (Y,Z) et (Y',Z') des solutions des EDSR associées telles que Z, Z' appartient à M^2. Il existe une constante universelle C_u telle que*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} e^{\alpha t} \left| \delta Y_t \right|^2 + \int_0^T e^{\alpha r} \left\| \delta Z_t \right\|^2 dt \right] \leq C_u \mathbb{E}\left[e^{\alpha T} \left| \delta \xi \right|^2 + \left(\int_0^T e^{\alpha r/2} \left| \delta g(t, Y_t', Z_t') \right| dt \right)^2 \right],$$

avec $\alpha = 2(\mu + K^2)$ *et les notations classiques* $\delta Y = Y - Y', \delta Z = Z - Z', \delta\xi = \xi - \xi'$ *de même que* $\delta g(t,y,z) = g(t,y,z) - g'(t,y,z)$.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que sous (**H**), dès que $Z \in M^2, (Y,Z)$ solution de l'EDSR de paramètres ξ et f appartient à β^2. Notons que $(\delta Y, \delta Z)$ est solution de l'EDSR de paramètres $\delta\varepsilon$ et $f(t,y,z) = g(t, y + Y'_t, z + Z'_t) - g'(t, Y', Z')$. Or, d'après l'hypothèse (**H**),

$$\begin{aligned} y.f(t,y,z) &= y.(g(t,y+Y'_t,z+Z'_t) - g(t,Y'_t,z+Z'_t)) + y.g(t,Y'_t,z+Z'_t) - g(t,Y'_t,Z'_t)) \\ &\quad + y.(g(t,Y'_t,Z'_t) - g'(t,Y',Z')) \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que $y.f(t,y,z) \leq \mu\,|y|^2 + K\,|y|\,\|z\| + |y|\,|\delta g(t,Y'_t,Z'_t)|$. ■

Proposition 2.7 *Soit* $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T)$.*Supposons qu'il existe des constantes* μ, K *et un processus* $\{g_t\}_{0\leq t\leq T}$ *appartient à* $M^2(\mathbb{R}^+)$ *tels que* $\mathbb{P} - p.s$

$$\forall (t,y,z), \qquad y.g(t,y,z) \leq |y|\,g_t + \mu\,|y|^2\,\|z\|\,.$$

Soit $(Y,Z) \in \beta^2$ *solution de l'EDSR (3.1), alors il existe une constante universelle* C_u *telle que*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\,|Y_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha t}\,\|Z_t\|^2\,dt\right] \leq C_u \mathbb{E}\left[e^{\alpha t}\,|\xi|^2 + (\int_0^T e^{\alpha t/2} g_t dt)^2\right],$$

avec $\alpha = 2(\mu + K^2)$. *De plus, on a, pour tout* $t \in [0,T]$, *notant* $\gamma = 1 + 2\mu + K^2$,

$$|Y_y|^2 \leq \mathbb{E}\left[e^{\alpha(T-t)}\,|\xi|^2 + (\int_t^T e^{\gamma(r-t)} g_r^2 dr \backslash F_t)^2\right]$$

2.3.2 Existence et unicité de solution

Théorème 2.8 *Sous les hypothèses **(H)**, l'EDSR* (2.5) *possède une unique solution telle que* $Z \in M^2$.

Démonstration. Pour l'unicité, il suffit d'appliquer le corollaire (2.6). Pour **l'existence** nous utilisons un argument de point fixe basé sur la proposition précédente. Pour (U,V)élément de β^2, notons $(Y,Z)=\Psi(U,V)$ la solution de l'EDSR de la proposition précédente. Ψ est une application du β^2 dans lui même, si $(Y',Z')=\Psi(U',V')$. Les estimations à priori donnent, si $\alpha=2\mu$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|\delta Y_t|^2+\int_0^T\|\delta Z_t\|^2\,dt\right]\leq C_u e^{|\alpha|T}\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T\left|g(t,Y_t,V_t)-g(t,Y_t,V_t')\right|dt\right)^2\right],$$

où δ a sa signification habituelle. Linégalité de Hölder conduit à la majoration, comme g est K-Lipschitz en z,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|\delta Y_t|^2+\int_0^T\|\delta Z_t\|^2\,dt\right]\leq C_u e^{|\alpha|T}K^2T\mathbb{E}\left[\int_0^T\|\delta V_t\|^2\,dt\right];$$

cette dernière inégalité montre que Ψ est une contraction stricte si T est suffisamment petit et fournit donc le résultat sous cette restriction. Dans le cas général, il suffit de subdiviser, l'intervalle de temps $[0,T]$ en un nombre fini d'intervalles de longueur convenable : on résout d'abord sur $[T-\eta,T]$ puis sur $[T-2\eta,T-\eta]$. ■

2.4 Le rôle de Z

Nous allons voir que le rôle de Z, plus précisément celui du terme $\int_t^T Z_r dB_r$, et de rendre le processus Y adapté et que lorsque ceci n'est pas nécessaire Z est nul.

Proposition 2.9 *Soit (Y,Z) la solution de l'EDSR (2.1) et soit τ un temps d'arrêt majoré par T. On suppose, outre l'hypothèse (**L**) que ξ est $\mathcal{F}_\tau-$mesurable et que $g(t,y,z)=0$ dès que $t\geq\tau$. Alors $Y_t=Y_{t\wedge\tau}$ et $Z_t=0$ si $t\geq\tau$.*

Démonstration. On a $P.p.s$,

$$Y_t = \xi + \int_t^T g(r, Y_r, Z_r)dr - \int_t^T Z_r dB_{r..} \qquad 0 \leq t \leq T$$

et donc, pour tout $t = \tau$, comme $g(t, y, z) = 0$ dès que $t \geq \tau$,

$$Y_\tau = \xi + \int_\tau^T g(r, Y_r, Z_r)dr - \int_\tau^T Z_r dB_r = \xi - \int_\tau^T Z_r dB_r$$

il vient alors $Y_\tau = \mathbb{E}(\xi \backslash \mathcal{F}_\tau) = \xi$ et par suite $\int_\tau^T Z_r dB_r = 0$ d'où l'on tire que

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_\tau^T Z_r dB_r\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_\tau^T \|Z_r\|^2 dr\right] = 0$$

et finalement que $Z_r 1_{r \geq \tau} = 0$. Il s'en suit immédiatement que si, $t \geq \tau, Y_t = Y_\tau$, puisque par hypothèse,

$$Y_\tau = Y_t. + \int_\tau^t g(r, Y_r, Z_r)dr - \int_\tau^t Z_r dB_r = Y_t - 0 - 0,$$

ce qui termine la preuve. ■

Notons que dans le cas où ξ et g sont déterministes alors Z est nul et Y est la solution de l'équation différentielle

$$\frac{dY_t}{dt} = g(t, Y_t, 0), \qquad Y_T = \xi.$$

2.5 Exemples d'applications des EDSR en mathématiques financières

Les mathématiciens ont depuis longtemps essayé de résoudre les questions soulevées par le monde de finance. Une des caractéristiques de ces questions - il suffit de penser à la bourse pour s'en convaincre - est qu'elles font apparaitre des dynamiques d'apparence désordonnées et c'est pourquoi les modèles probabilistes semblent relativement bien adaptés à cette situation.

De nombreux probabilistes se sont penchés sur ces questions raffinant sans cesse les modèles utilisés.

- Le modèle de Black–Scholes conduit à un exemple d'EDSR linéaire. Prenons le cas le plus simple. On se place dans un marché financier sur lequel on a une action dont le prix d'une part est régi par l'EDS suivante :

$$dS_t = S_t \left(\mu dt + \sigma dB_t \right), \qquad S_0 = x \tag{2.6}$$

tel que S_t est le prix de l'action, où $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. Le paramètre σ s'appelle la volatilité et (B_t) un mouvement brownien standard. Le modèle à étudier sur l'intervalle $[0, T]$, où T est la date d'échéance de l'option à étudier. Parallèlement à cette action, on a un placement sans risque qui s'apparente à une obligation, dont le taux de rendement est constant, égale à r, alors que le prix de cette obligation est donné par :

$$dR_t = rR_t dt, \qquad R_0 = y \tag{2.7}$$

où r est une constante positive. Cela signifie que le taux d'intérêt sur le marché des placements sans risque est constant et égale à r. On posera $R_0 = y$, de sorte que $R_t = ye^{rt}$, pour $t \geq 0$. L'évolution du cours de l'action est régie par l'équation différentielle stochastique

$$dS_t = S_t \left(\mu dt + \sigma dB_t \right), \qquad S_0 = x.$$

telle que la solution de cette équiation est :

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t\right\} \text{ où } S_0 \text{ est le cours observé à la date } 0.$$

Un problème fréquent en finance consiste à donner un prix aux options. Une option européenne d'achat, un "call", de maturité T et de prix d'exercice K est un contrat qui donne le droit mais non l'obligation à son détenteur d'acheter une part d'action de prix d'exercice K à la date T. Le vendeur de l'option s'engage donc à payer à son détenteur la somme $(S_T - K)^+$ qui représente le profit que permet l'exercice de l'option. Plus généralement, on peut imaginer un actif contingent dont le bénéfice est une variable aléatoire positive ξ qui dépend de $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$. A quel prix v vendre l'option ? Le vendeur doit s'assurer qu'en vendant l'option à ce prix à la date $t = 0$, il disposera de la somme ξ à la date $t = T$. Pour trouver v, l'idée fondamentale est celle de duplication : le vendeur vend l'option au prix v et investi cette somme dans le marché en suivant la stratégie $(Z_t)_{0 \leq t \leq T}$ à trouver !La valeur de son portefeuille est régi par l'EDS

$$dV_t = rV_t dt + \theta Z_t dt + Z_t dB_t, \quad V_0 = v.$$

Le problème est alors de trouver v et $(Z_t)_{0 \leq t \leq T}$ de sorte que la solution de l'EDS précédente vérifie $V_T = \xi$; on dit dans ce cas v est le prix équitable. En d'autres termes, peut-on trouver $\{(V_t, Z_t)\}_{0 \leq t \leq T}$ adapté tels que :

$$dV_t = rV_t dt + \theta Z_t dt + Z_t dB_t, \qquad V_T = \xi,$$

auquel cas il suffit de vendre l'option au prix $v = V_0$. Il s'agit dans ce cas de résoudre une EDSR qui est linéaire.

– Supposons maintenant que "le régulateur du marché" veuille éviter la revente instantanée de l'action. Il peut soit interdire formellement cette transaction soit pénaliser les investisseurs qui se livrent à cette pratique par exemple en leur faisant verser une somme proportionnelle à $\beta\pi_t^- = \gamma Z_t^-$ $(\gamma > 0)$. Dans ce dernier cas, dupliquer un actif contingent revient à résoudre l'EDSR

$$dV_t = (rV_t + \theta Z_t dt - \gamma Z_t^-)dt + Z_t dB_t, \quad V_T = \xi$$

l'EDSR n'est pas linéaire mais vérifie néanmoins l'hypothèse (**L**).

– Un autre exemple d'EDSR non linéaire intervient en finance est le suivant

$$dV_t = (rV_t + \theta Z_t)dt + Z_t dB_t \; - (R - r)(V_t - Z_t/\sigma)^- dt, \;\; V_T = \xi$$

On est amené à résoudre cette dernière équation pour dupliquer un actif contingent lorsque le taux d'emprunt est $R > r$.auquel est rémunéré l'argent. Il n'est dans ce cas pas raisonnable d'emprunter de l'argent à un taux R et d'investir au même moment sur le placement sûr dont le taux est r.

Signalons que dans tous les exemples précédents, les stratégies sont addmissibles i.e.$V_t \geq 0$.

Chapitre 3

Equations différentielles stochastiques rétrogrades avec générateurs localement lipschitiziens

3.1 Présentation du problème

Nous allons étudier les équations rétrorgrades de générateur g ne vérifiant la condition (L_1) du théorème (2.4) que localement et non globalement.

Considérons ξ une variable aléatoire bornée et $\mathcal{F}_T-$mesurable, g une application de $[0,T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$, $P \otimes B(R^{p+1})-$mesurable satisfaisant à :

(C1) $\exists\ c > 0, \alpha \in]0.2[$ et h une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ finie sur les compacts tels que pour tout t, y et z on ait,

$$|g(t,y,z)| \leq c(1 + |y| + h(y).\,|z|^{\alpha})$$

(C2) $\forall N \in \mathbb{N}, \exists C_N > 0$ tel que $\forall\ t \in [0,T]\,, (y,z)$ et $(y',z') \in [-N,N]^{p+1}$ on ait

$$\left|g(t,y,z) - g(t,y',z')\right| \leq C_N(\left|y-y'\right| + \left|z-z'\right|)$$

Nous allons montrer que l'équation rétrograde de générateur g admet une seule solution. L'idée consiste à construire une suite convergente de solutions d'équations rétrogrades dont la limite (Y,Z) est solution de l'équation de générateur g. Nous aurons besoin pour cela du lemme suivant :

Lemme 3.1 *Soit Ψ une application de $[0,T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^+$ (resp $\mathbb{R}^-$) $P \otimes B(R^{p+1})-$mesurable vérifiant la condition **(C2)** ci-dessus. Il existe une suite croissante (resp décroissante $(\Psi_k, k \geq 0)$ d'applications définies sur $[0,T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^+$ (resp $\mathbb{R}^-$) $P \otimes B(R^{p+1})-$mesurable de limite Ψ vérifiant :*

$$\forall k \geq 0, \exists \bar{c}_k > 0 \text{ tel que } \forall t, y, y', z \text{ et } z' \ \left|\Psi_k(t,y,z) - \Psi_k(t,y',z')\right| \leq \bar{c}_k(\left|y-y'\right| + \left|z-z'\right|)$$

Remarque 3.2 *Pour tout $(t,\omega) \in [0,T] \times \Omega$ fixé, la convergence de la suite $(\psi_k(t,\omega,.,.))_{k\geq 0}$ vers $\psi(t,\omega,.,.)$ est uniforme sur les compacts de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$.*

Nous allons maintenant montrer que l'équation rétrograde de générateur g admet une solution.

3.2 Résultat d'existence et d'unicité

Théorème 3.3 *Il existe un processus* (Y,Z) $\mathbb{P}$*-mesurable à valeur dans* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p$ *tel que*

$$(i)\ \ \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(|Y_s|^2+|Z_s|^2\right)ds\right]<\infty$$

$$(ii)\ \ \begin{cases} dY_t=-g(t,Y_t,Z_t)dt+Z_tdB_t; & t\leq T\\ Y_T=\xi. \end{cases}$$

De plus $\|Y\|^*=Supp\left\{|Y_t(\omega)|\,,(t,\omega)\in[0,T]\times\Omega\right\}<\infty$.

Démonstration. Les applications $g1_{[g\geq 0]}$ et $g1_{[g<0]}$ satisfont la condition **(C2)** ci-dessus vérifie par g. Par suite il existe une suite $(\varphi^n,n\geq 0)$ (resp. $(\Psi^n,n\geq 0)$) croissante (resp. décroissante) d'applications lipschitiziennes de limite simple $g1_{[g\geq 0]}$ (resp. $g1_{[g<0]}$). Considérons alors pour m$\geq$ 0 et n$\geq$ 0 la suite d'applications $\varphi^{n,m}$ tel que $\varphi^{n,m}=\varphi^n+\psi^n$. Aussi pour m et n, $\varphi^{n,m}$ est lipschitizienne $\varphi^{n+1,m}\geq\varphi^{n,m}$ et $\varphi^{n,m}\geq\varphi^{n,m+1}$. De plus $|\varphi^{n,m}(t,\omega,y,z)|\leq c(1+|y|+h(y).\,|z|^\alpha)$ pour tout t,ω,y et z. Il s'en suit que $\varphi^{n,m}$ possède les propriétés de g du théorème (2.5). Par consiquent il existe un couple de processus $(Y^{n,m},Z^{n,m})\mathbb{P}-$mesurable tel que,

$$(i)\ \ \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(|Y_s^{n,m}|^2+|Z_s^{n,m}|^2\right)ds\right]<\infty.$$

$$(ii)\ \ \begin{cases} dY_t^{n,m}=-\varphi^{n,m}(t,Y_t^{n,m},Z_t^{n,m})dt+Z_t^{n,m}dB_t; & t\leq T\\ Y_T^{n,m}=\xi. \end{cases}$$

Le théorème de comparaison et les inégalités ci-dessus vérifiées par $\varphi^{n,m}$ nous permettent de déduire que $Y^{n+1,m}\geq Y^{n,m}$ et $Y^{n,m}\geq Y^{n,m+1}$. Montrons que pour tout n et $m\in\mathbb{N}$ $\|Y^{n,m}\|\leq C_Y$ et $\mathbb{E}\left[\int_0^T |Z_s^{n,m}|^2\,ds\right]<C_Z$ où C_Y et C_Z sont des constantes indépendantes de n et m.

$\forall t \in [0,T]\,, \forall n,m \in \mathbb{N}, \forall s \in [t,T]$ on a,

$$\begin{aligned} Y_s^{n,m} &= \xi + \int_s^T \varphi^{n,m}(u, Y_u^{n,m}, Z_u^{n,m})du - \int_s^T Z_u^{n,m} dB_u \\ &= \xi + \int_s^T \varphi^{n,m}(u, Y_u^{n,m}, 0)du + \int_s^T (\varphi^{n,m}(u, Y_u^{n,m}, Z_u^{n,m})du \\ &\quad -\varphi^{n,m}(u, Y_u^{n,m}, 0))du - \int_s^T Z_u^{n,m} dB_u \end{aligned}$$

Soit alors $\delta\varphi^{n,m}(u,y,z)$ la suite de processus définis comme suit :

$$\delta\varphi^{n,m}(u,y,z) = \begin{cases} \frac{(\varphi^{n,m}(u,y,z) - \varphi^{n,m}(u,y,0))}{z} & \text{, si z} \neq 0 \\ 0 & \text{, sinon} \end{cases}$$

Il existe une constante $C_{n,m}$ tel que $|\varphi^{n,m}(u,y,z)| \leq C_{n,m}$,$\forall(t,\omega,n,m)$.Considérons $P^{n,m}$ la probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ équivalente à P [12] définie comme suit :

$$\begin{aligned} dP^{n,m}/dP &= L_T^{n,m} \\ &= \exp\left\{ \int_0^T \delta\varphi^{n,m}(u, Y_u^{n,m}, Z_u^{n,m})dB_u - \frac{1}{2}\int_0^T \left|\delta\varphi^{n,m}(u, Y_u^{n,m}, Z_u^{n,m})\right|^2 du \right\} \end{aligned}$$

Le processus $B^{n,m} = B - \int_0^{\cdot} \delta\varphi^{n,m}(u, Y_u^{n,m}, Z_u^{n,m})du$ est un $(\mathcal{F}_t, P^{n,m})$-mouvement brownien et pour tout $s \in [0,T]$ on a,

$$Y_s^{n,m} = \xi + \int_s^T \varphi^{n,m}(u, Y_u^{n,m}, 0)du - \int_s^T Z_u^{n,m} dB_u^{n,m},$$

Si $\mathbb{E}_{n,m}$ désigne l'espérance sous $\mathbb{P}^{n,m}$ alors,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{n,m}\left[\left(\int_0^T |Z_s^{n,m}|^2 \, ds \right)^{1/2} \right] &= \mathbb{E}\left[L_T^{n,m} \left(\int_0^T |Z_u^{n,m}|^2 \, du \right)^{1/2} \right] \\ &\leq \left(\mathbb{E}[(L_T^{n,m})^2].\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |Z_u^{n,m}|^2 \, du \right) \right] \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Or le second nombre de cette dernière inégalité est finie car $Z^{n,m}$ est un élément de $L^2([0,T] \times \Omega, dt \otimes dP)$ et $L_T^{n,m}$ est de carré intégrable puisque $\delta\varphi^{n,m}$ est uniformément borné en (t,ω). Il s'en suit que le processus $\int_0^T Z_u^{n,m} dB_u^{n,m}$ est une $(\mathcal{F}_t,\ P^{n,m})-$martingale car $\mathbb{E}_{n,m}\left[\sup_{t\leq T}\left|\int_0^t Z_u^{n,m} dB_u^{n,m}\right|\right] < \infty$ [12], par consiquent pour tout $s \in [0,T]$,

$$Y_s^{n,m} = \mathbb{E}_{n,m}[Y_s^{n,m} \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}_{n,m}[\xi \mid \mathcal{F}_s] + \int_s^T \mathbb{E}_{n,m}\left[\varphi^{n,m}(u, Y_u^{n,m}, 0) \mid \mathcal{F}_s\right] du$$

comme ξ est bornée alors,

$$|Y_s^{n,m}| \leq \tilde{c} + \int_s^T \mathbb{E}_{n,m}\left[|\varphi^{n,m}(u, Y_u^{n,m}, 0)| \mid \mathcal{F}_s\right] du; \quad s \in [0,T].$$

Par ailleurs pour tout n,m appartiennent à $\mathbb{N}$ et pour tout t,ω,y et z on a,

$$|\varphi^{n,m}(t,\omega,y,z)| \leq c(1 + |y| + h(y)\,|z|^{\alpha}).$$

Il s'en suit que,

$$|Y_s^{n,m}| \leq c'\left(1 + \int_s^T \mathbb{E}_{n,m}\left[|Y_u^{n,m}| \mid \mathcal{F}_s\right] du\right);\ s \in [0,T]$$

et c' est une constante indépendante de n,m.. Aussi, si t et s appartiennent à $[0,T]$ tels que $s \geq t$ alors,

$$\mathbb{E}_{n,m}\left[|Y_u^{n,m}| \mid \mathcal{F}_t\right] \leq \widetilde{c}\left(1 + \int_s^T \mathbb{E}_{n,m}\left[|Y_u^{n,m}| \mid \mathcal{F}_t\right] du\right)$$

Grace à l'inégalité de Gronwall on a

$$\mathbb{E}_{n,m}\left[|Y_u^{n,m}| \mid \mathcal{F}_t\right] \leq c' \exp\{c'(T-s)\}$$

et en prenant s=t on obtient

$$|Y_u^{n,m}| \leq c' \exp\{c'T\}, \forall t \in [0,T]$$

Ceci pour la première majoration. Montrons la deuxième, pour tout $n, m \in N$ et $s \in [0, T]$ on a, grace à la formule d'Itô appliquée de s à T,

$$\begin{aligned}(Y_s^{n;m})^2 + \int_s^T |Z_u^{n,m}|^2\, du &= \xi^2 + 2\int_s^T Y_u^{n,m}.\varphi^{n,m}(u, Y_u^{n,m}, Z_u^{n,m})du \\ &\quad -2\int_s^T Y_u^{n,m}.Z_u^{n,m} dB_u.\end{aligned}$$

En prenant l'espérance de chaque membre on obtient,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |Z_u^{n,m}|^2\, du\right] \leq E[\xi^2] + 2\int_0^T E\left[|Y_u^{n,m}.\varphi^{n,m}(u, Y_u^{n,m}, Z_u^{n,m})|\right] du$$

car $\int_0^{\cdot} Y_u^{n,m}.Z_u^{n,m} dB_u^{n,m}$ est une $(\mathcal{F}_t, P^{n,m})-$martingale. Le fait que $\varphi^{n,m}$ vérifie la condition **(C1)** et la bornitude de $Y_u^{n,m}$ impliquent que,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |Z_u^{n,m}|^2\, du\right] \leq \mathbb{E}[\xi^2] + c.\mathbb{E}\left[\int_s^T |Z_u^{n,m}|^\alpha\, du\right]$$

où c, jusqu'à la fin de cette épreuve, est une constante pouvant changer d'une ligne à une autre Grace à l'inégalité de Young [8] ($|a.b| \leq \frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{q}|b|^q), \forall a, b \in \mathbb{R}; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) on a,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |Z_u^{n,m}|^2\, du\right] \leq \mathbb{E}[\xi^2] + \frac{\alpha}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T |Z_u^{n,m}|^2\, du\right] + \left((2-\alpha)Tc^{2/(2-\alpha)}\right)/2.$$

Par suite il existe une constante C_Z indépendante de n et m telle que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |Z_u^{n,m}|^2\, du\right] \leq C_Z$$

Nous allons maintenant construire le processus (Y, Z) qui sera la solution recherchée. Pour tout m fixé $(Y^{n,m}, n \geq 0)$ est une suite croissante bornée, elle est donc convergente. Appelons Y^m sa limite. Comme pour tout m et $n \in \mathbb{N}$ on a, $Y^{n,m} \geq Y^{n,m+1}$ alors la suite $(Y^m, m \geq 0)$ est décroissante et bornée, elle est donc convergente. Notons Y sa limite. Il reste à construire

Z. Grace à la formule d'Itô on a, pour tout n, m, p et $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[\left(Y_0^{n,m} - Y_0^{p,k}\right)^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \left|Z_u^{n,m} - Z_u^{p,k}\right|^2 du\right] \\
= \; & 2\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(Y_u^{n,m} - Y_u^{p,k}\right)\left(\varphi^{n,m}(u, Y_u^{n,m}, Z_u^{n,m}) - \varphi^{p,k}(u, Y_u^{p,k}, Z_u^{p,k})\right) du\right] \\
\leq \; & c\left(\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|Y_u^{n,m} - Y_u^{p,k}\right| \left(1 + |Z_u^{n,m}|^\alpha + \left|Z_u^{p,k}\right|^\alpha\right) du\right]\right)
\end{aligned}$$

Car $(Y^{n,m})_{n,m}$ est bornée et pour tout $n, m, |\varphi^{n,m}(t, y, z)| \leq c(1 + |y| + h(y)\,|z|^\alpha)$.

$$\leq c\left(\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|Y_u^{n,m} - Y_u^{p,k}\right| du\right] + 2\left(E\left[\int_0^T \left|Y_u^{n,m} - Y_u^{p,k}\right|^\gamma du\right]\right)^{1/\gamma} .(C_Z)^{\alpha/2}\right)$$

Avec $\gamma = 2/(2-\alpha\ )$; cela est dû à l'inégalité de Hölder et au fait que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |Z_u^{n,m}|^2\, du\right] \leq C_Z, \forall n, m.$$

Or il existe une sous-suite $(Y^{k_{m,n}}, m \geq 0)$ de $(Y^{n,m}, n, m \geq 0)$ de limite Y dans $L^\gamma([0,T] \times \Omega, dt \otimes dP)$. Par consiquent la suite $(Z^{k_{m,n}}, m \geq 0)$ est de Cauchy dans $L^2([0,T] \times \Omega, dt \otimes dP)$ et est donc convergente dans ce même espace, vers un processus Z. Montrons enfin que (Y, Z) est solution de l'équation rétrograde considérée. Naturellement cela se fera par passage à la limite. Il existe une sous-suite $((Y^{k_{m,m}}, Z^{k_{m,m}}))_{m \geq 0}$ que l'on représentera toujours par $((Y^{k_{m,m}}, Z^{k_{m,m}}))_{m \geq 0}$ et un processus $\widetilde{Z}$ élément de $L^2([0,T] \times \Omega, dt \otimes dP)$ et à valeurs positives (sous-produit immédiat de la complétude des espaces L^2) tel que :

(i) La sous-suite $((Y^{k_{m,m}}, Z^{k_{m,m}}))_{m \geq 0}$ converge $dt \otimes dP - p.s$ vers (Y, Z).

(ii) $\forall m \geq 0, \left|Z^{k_{m,m}}\right| \leq \widetilde{Z}\ .dt \otimes dP - p.s.$

Aussi pour tout $m \in N$ et $t \in [0,T]$ on a,

$$Y_t^{k_{m,m}} = \xi + \int_0^T \varphi^{m,m}(u, Y_u^{m,m}, Z_u^{m,m}) - \int_0^T Z_u^{k_{m,m}} dB_u$$

Or,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[\sup_{t\le T}\left|\int_t^T Z_u^{k_{m,m}} dB_u - \int_t^T Z_u dB_u\right|\right] \\
\le \;& \mathbb{E}\left[\left|\int_0^T \left(Z_u^{k_{m,m}} - Z_u\right) dB_u\right|\right] + \mathbb{E}\left[\sup_{t\le T}\left|\int_0^t \left|Z_u^{k_{m,m}} - Z_u\right| dB_u\right|\right] \\
\le \;& c\left(\mathbb{E}\left[\left|\int_0^T \left|Z_u^{k_{m,m}} - Z_u\right|^2 dB_u\right|\right]\right)^{1/2} \longmapsto 0 \text{ quand } m \longmapsto \infty
\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[\sup_{t\le T}\left|\int_t^T \left(\varphi^{k_{m,m}}(u, Y_u^{k_{m,m}}, Z_u^{k_{m,m}}) - g(u, Y_u, Z_u)\right) du\right|\right] \\
\le \;& \mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\varphi^{k_{m,m}}(u, Y_u^{k_{m,m}}, Z_u^{k_{m,m}}) - g(u, Y_u, Z_u)\right| du\right] \\
\le \;& \mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\varphi^{k_{m,m}}(u, Y_u^{k_{m,m}}, Z_u^{k_{m,m}}) - g(u, Y_u^{k_{m,m}}, Z_u^{k_{m,m}})\right| .1_{\{\left|Z_u^{k_{m,m}}\right| \le \widetilde{Z}_u\}} du\right] \\
& + \mathbb{E}\left[\int_0^T \left|g(u, Y_u^{k_{m,m}}, Z_u^{k_{m,m}}) - g(u, Y_u, Z_u)\right| du\right].
\end{aligned}$$

et par application du théorème de la convergence dominée on obtient la convergence vers 0, quand $m \longmapsto \infty$, des deux derniers termes de la dernière inégalité. En effet, cela est possible grace à la convergence uniforme sur les compactes de $(\varphi^{k_{m,m}}(t, \omega, ., .))_{m\ge 0}$ vers $g(t, \omega, ., .)$, (remarque[3.2]) au fait que g et $(\varphi^{k_{m,m}}, m \ge 0)$ satisfont la condition $(\mathbf{H}_1)$, à la bornitude de $(Y^{k_{m,m}})_{m\ge 0}$ et aux points (i) et (ii) ci-dessus. Par consiquent si on pose, pour $t \le T$, $\widetilde{Y}_t = \xi + \int_t^T g(u, Y_u, Z_u) du - \int_t^T Z_u dB_u$ alors $\mathbb{E}\left[\sup_{t\le T}\left|Y_t^{k_{m,m}} - \widetilde{Y}_t\right|\right]$ tend vers 0 quand $m \longmapsto \infty$. Par suite $\forall t \le T, Y_t = \widetilde{Y}_t$ et donc $\forall t \le T, Y_t = \xi + \int_t^T g(u, Y_u, Z_u) du - \int_t^T Z_u dB_u$.

Unicité de la solution. Nous allons maintenant étudier la question de l'unicité de la solution de l'équation rétrograde de générateur g. Pour cela nous aurons besoin de plus d'hypothèses de régularité su g et ξ. Ausi supposons que les conditions $\mathbf{A}_1$et $\mathbf{A}_2$ sont satisfaites.

$[\mathbf{A}_1]$. g est une application définie sur $[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p$ telle que :

a) $\forall t\in[0,T], g(t,.,.)\in C^1(R\times R^p)$.

b) $\forall(t,y,z)\in[0,T]\times R\times R^p$,

$$|g(t,y,z)|\le c(1+|y|+|z|)$$

et

$$\left|g'_y(t,y,z)\right|\le c(1+Ln(1+Ln(1+|y|+|z|)))$$

où g' est la dérivée partielle de g par rapport à y et c une constante.

$[\mathbf{A}_2]$. La variable aléatoire ξ est élément de de $\mathrm{D}^{1,2}$, l'espace de Wiener[15]. De plus il existe une constante M telle que $\left|D_t^i\xi\right|\le M,\forall t\le T; i=1,p.$ $(D_t^i\xi)_{t\le T}$ est la dérivée de Wiener d'ordre i de ξ. Soit f une application de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ différentiable et de différentielle f' bornée. Si $\xi=f(B_T)$,alors $\forall t\le T$ $D_t\xi=f'(B_T);\xi$ vérifie donc la condition $[\mathbf{A}_2]$. ■

Proposition 3.4 *Il existe une constante $\eta>0$ et Y,Z deux processus $\mathbb{P}$-mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^p$ tel que :*

$$sup\left\{|Y_y|+|Z_t|, t\le T\right\}\le\eta$$

$$\begin{cases} dY_t=-g(t,Y_t,Z_t)dt+Z_tdB_t; \quad t\le T \\ Y_t=\xi. \end{cases}$$

Démonstration. Soit θ (resp $\tilde{\theta}$) une application indéfinement différentiable sur $\mathbb{R}$(resp $\mathbb{R}^p$) vérifiant $\theta(y) = 1$ si $|y| \leq 1, 0 \leq \theta \leq 1$ et $\theta(y) = 0$ si $|y| \geq 2$ (resp $\tilde{\theta}(z) = 1$ si $|z| \leq 1, 0 \leq \tilde{\theta} \leq 1$ et $\theta(z) = 0$ si $|z| \geq 2$). Pour $n \geq 1$, on définit l'application θ_n (resp $\tilde{\theta}_n$) par $\theta_n(y) = \theta(\frac{y}{n})$, $y \in \mathbb{R}$ (resp $\tilde{\theta}_n(z) = \tilde{\theta}_n(\frac{z}{n}), z \in \mathbb{R}^p$). Aussi, l'application g^n telle que $g^n(t, y, z) = g(t, y, z).\theta_n(y).\tilde{\theta}_n(z)$, $(t, y, z) \in [0, T] \times R \times R^p$, est différentiable en (y, z) et de différentielle bornée. Soit $\alpha = \sup\{\theta'(y), |y| \leq 2\}$ (θ' est la dérivée de θ) et N un entier ≥ 1. Il existe deux processus Y et Z (théorème [2.5]) P-mesurables à valeurs respectives dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^p$ tels que $\forall t \leq T$,

$$Y_t = \xi + \int_t^T g^N(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s.$$

De plus les pont (a) et (b) suivants sont satisfaits [15].

a) Pour tout $t \leq T, Y_t$ et Z_t sont les éléments de $\mathrm{D}^{1,2}$ et pour tout $u \in [0, T]$, le couple $(D_u Y_t, D_u Z_t)_{t \leq T}$ vérifie,

$$\begin{aligned} D_u Y_t &= D_u \xi + \int_t^T (g_y^N(s, Y_s, Z_s) D_u Y_s \\ &\qquad + g_z^N(s, Y_s, Z_s) D_u Z_s))ds - \int_t^T D_u Z_s dB_s. \end{aligned}$$

b)$\forall t \in [0, T], D_t Y_t = Z_t$.

Le fait que g_z^N soit uniformément borné implique que (comme la preuve du théorème [3.3] en considérant l'équation rétrograde du point a) pour tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} |D_t Z_t| &\leq M.\exp\{(T - t). \sup_{(t,y,z)} \left|g_y^N(t, y, z)\right|\} \\ &\leq M.\exp\{T. \sup_{(t,y,z)} \left|g_y^N(t, y, z)\right|\} \end{aligned}$$

Or

$$\forall(t,y,z),\ \ \left|g_y^N(t,y,z)\right| \leq |g_y(t,y,z)| + \frac{\alpha}{N}\,|g(t,y,z)|$$

et que $\left|g^N(t,y,z)\right| = 0$ si $|y| \geq 2N$ ou $|z| \geq 2N$. Par suite pour tout $t \leq T$. $|D_tY_t| \leq M.\exp(T\left|g'_y\right|_N^* + \frac{T}{N}\alpha\,|g|_N^*)$ où pour toute application f définie sur $[0,T]\times\mathbb{R}^{p+1}$, $|f|_N^* = \sup\{|f(t,y,z)|\,,(t,|y|\,,|z|)\in[0,T]\times[0,2N]^2\}$. Aussi grace à l'hypothèse $[A_1]$

$$\begin{aligned}|D_tZ_t| &\leq M.\exp\{cT(1+Ln(1+Ln(1+4N))).\exp\frac{T}{N}c\alpha(1+4N)\}\\ &\leq c'(1+Ln(1+4N))^{cT}.\exp\frac{T}{N}c\alpha(1+4N)\end{aligned}$$

où c' est une constante. Par ailleurs soit $(\tilde{Y},\tilde{Z})$ et $(\bar{Y},\bar{Z})$ les solutions des equations rétrogrades suivantes : $\forall t\leq T$,

$$\tilde{Y}_t = \xi + \int_t^T c(1+\left|\tilde{Y}_s\right| + \left|\tilde{Z}_s\right|)ds - \int_t^T \tilde{Z}_s dB_s;$$

$$\bar{Y}_t = \xi + \int_t^T c(1+\left|\bar{Y}_s\right| + \left|\bar{Z}_s\right|)ds - \int_t^T \bar{Z}_s dB_s;$$

Aussi comme la preuve du théorème [3.3], on montre qu'il existe deux constantes $\tilde{M}$ et $\bar{M}$ positives telles que pour tout $t\leq T, \left|\tilde{Y}_t\right| \leq \tilde{M}$ et $\left|\bar{Y}_t\right| \leq \bar{M}$. De plus comme g^N est de croissance linéaire, alors le théorème de comparaison nous permet de déduire que pour tout $t\in[0,T]$, on a $\tilde{Y}_t \leq Y_t \leq \bar{Y}_t$ et donc $|Y_t|$ est borné par $max(\tilde{M},\bar{M})$. Par consiquent si N est plus grand que $max(\tilde{M},\bar{M})$ ainsi que $c'(1+Ln(1+4N))^{cT}.\exp\frac{T}{N}c\alpha(1+4N)$ alors $g^N(t,Y_t,Z_t) = g(t,Y_t,Z_t), \forall t\in[0,T]$, Il s'en suit que le processus (Y,Z) vérifie :

$$\begin{aligned}&(i)\quad \sup\{|Y_t|+|Z_t|\,,t\leq T\} \leq 2N = \eta\\ &(ii)\quad Y_t = \xi + \int_t^T g(s,Y_s,Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s. \qquad t\leq T\end{aligned}$$

■

Théorème 3.5 *Si le couple (g, ξ) vérifie les conditions $[A_1]$ et $[A_2]$ ci-dessus, alors la solution de l'équation rétrograde de générateur g est unique.*

Démonstration. Soit (Y', Z') une autre solution de cette équation. Comme ξ est bornée et g de croissance linéaire alors Y' est bornée. Par ailleurs pour tout t appartient à $[0, T]$ on a,

$$Y_t = \xi + \int_t^T g(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dB_s. \quad t \leq T$$

et

$$Y'_t = \xi + \int_t^T g(s, Y'_s, Z'_s) ds - \int_t^T Z'_s dB_s. \quad t \leq T$$

Il s'en suit que,

$$\begin{aligned} Y_t - Y'_t &= \int_t^T \left(g(s, Y_s, Z_s) - g(s, Y'_s, Z'_s)\right) ds - \int_t^T \left(Z_s - Z'_s\right) dB_s \\ &= \int_t^T \left(g(s, Y_s, Z_s) - g(s, Y'_s, Z_s)\right) ds \\ &\quad + \int_t^T \left(g(s, Y'_s, Z_s) - g(s, Y'_s, Z'_s)\right) ds - \int_t^T \left(Z_s - Z'_s\right) dB_s \end{aligned}$$

Aussi, appelons $\delta g = ((\delta g)_t)_{t \leq T}$ le processus tel que pour tout $t \leq T$, $(\delta g)_t = (g(t, Y'_t, Z_t) - g(t, Y'_t, Z'_t))(Z_t - Z'_t)^{-1}$ si $Z_t - Z'_t \neq 0$ et 0 sinon. La bornitude de Y' et Z impliquent que δg est un processus uniformément borné. Il existe donc une probabilité P' sur Ω équivalente à P telle que $B' = B - \int_0^{\cdot} (\delta g)_s ds$ est un $(\mathcal{F}_t, P')-$mouvement brownien. Par suite pour tout $t \in [0, T]$ on a,

$$Y_t - Y'_t = \int_t^T \left(g(s, Y_s, Z_s) - g(s, Y'_s, Z'_s)\right) ds - \int_t^T \left(Z_s - Z'_s\right) dB_s$$

Aussi grace à la bornitude de Y, Y' et Z, et le lemme de Gronwall on déduit (comme dans théotème [3.3])que $|Y_t - Y'_t| = 0, \forall t \leq T$, cela entraine aussi que $Z_t = Z'_t, \forall t \leq T$ et donc l'unicité de la solution de l'équation. ■

Remarque 3.6 *Les résultats des proposition* [3.4](i) *et le théorème* [3.5](ii) *se généralisent au cas multidimentionnel. Par ailleurs il reste vrais si la condition* A_1 *ci-dessus portant un* g_y *énonce comme suit :*

$$\forall (t, y, z) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p, \ \left|g'_y(t, y, z)\right| \leq c(1 + Ln(1 + (|y| + |z|)^\beta))$$

avec β *sufisamment petit.*

Chapitre 4

Equations différentielles stochastiques rétrogrades avec générateurs lipschitiziens stochastiques

4.1 Présentation du problème et notations

Dans ce chapitre, nous allons étudier les équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) de forme :

$$\begin{cases} -dY_t = g(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dB_t \\ Y_\iota = \xi \end{cases}$$

Comme nous avons vu aux chapitres précédents, le résultat d'existence et d'unicité de solution a été obtenu par Pardoux et Peng [13] dans le cas où le temps d'arrêt est déterministe et le générateur g est uniformément Lipschitizien. Mais cette dernière condition est très restrictive et ne peut pas être supposée dans beaucoups d'applications intéressantes. En finance par exemple, une question très importante est de traiter le problème d'évaluation d'une option européenne d'un produit financier, prenant le cas le plus simple, celui du modéle de Black-Scholes et d'un "call européen" le prix d'évaluation de cette option est équivalente à résoudre l'EDSR linéaire

$$-dY_t = [-r_t Y_t + \theta_t Z_t]dt - Z_t dB_t, \qquad Y_T = \xi$$

où r_t est le taux d'intérêt et θ_t est le vecteur de "risk premium". Tous les deux ne sont pas bornés en général. Ainsi le théorème de Pardoux-Peng ne peut pas être appliqué dans ce cas. En conséquent, nous sommes intéressés à détendre l'état de Lipschitz, c'est à dire, nous devons renforcer d'autres conditions tout en dépendant la continuité de Lipschitz. En effet, nous aurons des conditions plus fortes d'intégrabilités sur le générateur g aussi bien que sur les solutions de l'EDSR. Ces états d'intégrabilité permettent pour remplacer l'état uniforme de Lipschitz par état stochastique.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}, P)$ un espace de probabilité filtré. Soit (B_t) un mouvement brownien d-dimensionnel à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Notons $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration naturelle du MB dont on suppose qu'elle vérifie les conditions habituelles (c'est à dire qu'on la suppose continue à droite et complète). On se donne un instant terminal $T > 0$ et une fonction $g : \Omega\times[0,T]\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d} \to \mathbb{R}^k$, telle que pour tout $(y,z) \in \mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$, le processus $\{g(,,y,z)\}$ est progressivement mesurable et soit $\xi \in \mathbb{R}^k$ est un vecteur aléatoire $\mathcal{F}_T-$mesurable. On note par $H_t = \int\limits_0^t h_s^2 ds$, pour tout processus $(h_t)_{t\geq 0}$ $\mathcal{F}_t-$adapté. On considère les espaces suivants :

Soit $\alpha > 0$, et pour tout processus $(h_t)_{t\geq 0}$ $\mathcal{F}_t-$adapté, on a :

– $\mathcal{M}(\alpha, h, \tau, \mathbb{R}^k) = \{\xi$ à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, et $\mathcal{F}_\tau-$mesurable tel que

$$\|\xi\|_\alpha^2 = \mathbb{E}[e^{\alpha H_\tau} |\xi|^2] < \infty\}.$$

– $\mathcal{M}(\alpha, h, [0,\tau], \mathbb{R}^k) = \{Y : \Omega \times [0,\tau] \to \mathbb{R}^k$, $\mathcal{F}_t-$adapté et telle que

$$\|Y\|_\alpha^2 = \mathbb{E}[\int\limits_0^\tau e^{\alpha H_s} |Y_s|^2 ds] < \infty\}.$$

– $\mathcal{M}^h(\alpha, h, [0,\tau], \mathbb{R}^k) = \{Y : \Omega \times [0,\tau] \to \mathbb{R}^k$, $\mathcal{F}_t-$adapté et telle que :

$$\|hY\|_\alpha^2 < \infty\}$$

.

– $\mathcal{M}^c(\alpha, h, [0,\tau], \mathbb{R}^k) = \{Y : \Omega \times [0,\tau] \to \mathbb{R}^k$ continu et $\mathcal{F}_t-$adapté et telle que :

$$\|hY\|_{\alpha,c}^2 = \mathbb{E} \sup_{0\leq t\leq \tau} e^{\alpha H_t} |Y_t|^2 < \infty.$$

Notons que $\mathcal{M}(\alpha, h, [0,\tau], \mathbb{R}^k)$ muni de la norme $\|Y\|_\alpha$ et $\mathcal{M}^h(\alpha, h, [0,\tau], \mathbb{R}^k)$ muni de la norme $\|hY\|_\alpha$ sont des espaces de Banach. Par conséquent

$$S(\alpha, h, \tau) = \mathcal{M}^h(\alpha, h, [0,\tau], \mathbb{R}^k) \times \mathcal{M}(\alpha, h, [0,\tau], \mathbb{R}^{k\times d})$$

est un espace de Banach avec la norme :

$$\|(Y,Z)\|_\alpha^2 = \|hY\|_\alpha^2 + \|Z\|_\alpha^2$$

On s'intéresse aussi par le sous espace de $S^c(\alpha, h, \tau)$ tel que :

$$S^c(\alpha, h, \tau) = [\mathcal{M}^h(\alpha, h, [0,\tau], \mathbb{R}^k) \cap \mathcal{M}^c(\alpha, h, [0,\tau], \mathbb{R}^k)] \times \mathcal{M}(\alpha, h, [0,\tau], \mathbb{R}^{k\times d})$$

muni de la norme :

$$\|(Y,Z)\|^2_{\alpha,c} = \|Y\|^2_{\alpha,c} + \|hY\|^2_{\alpha} + \|Z\|^2_{\alpha}$$

Dans ce contexte, nous voulons résoudre l'équation différentielle stochastique réctograde (EDSR) suivante :

$$\begin{cases} -dY_t = g(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dB_t \\ Y_\tau = \xi \end{cases} \tag{4.1}$$

Définition 4.1 *Soit $\alpha > 0$, $(h_t)_{t\geq 0}$ un processus $\mathcal{F}_t-$adapté, positif, et pour $\tau > 0$ $\mathcal{F}_t-$temps d'arrêt, et ξ v.a $\mathcal{F}_\tau-$mesurable dand $\mathbb{R}^k$, on appelle solution de l'EDSR* (4.1) *tout couple $(Y,Z) \in S^c(\alpha, h, T)$ vérifiant :*

$$Y_{t\wedge\tau} = \xi + \int_{t\wedge\tau}^{\tau} g(s, Y_s, Z_s)ds - \int_{t\wedge\tau}^{\tau} Z_s dB_s \tag{4.2}$$

l'équation (4.1) *admet une unique solution.*

Hypothèses (S)

Soit $\alpha > 0$, supposons qu'on a :

(S1) τ est un temps d'arrêt de la filtration $\mathcal{F}_t$;

(S2) Ils existent deux processus $(u_t)_{t\geq 0}, (v_t)_{t\geq 0}-\mathcal{F}_t-$adaptés tels que $P.p.s.\forall t \in [0,T], \forall y, y' \in \mathbb{R}^k, \forall z, z' \in \mathbb{R}^{k\times d}$,

$$\left|g(t,y,z) - g(t,y',z')\right| \leq u_t \left|y - y'\right| + v_t \left|z - z'\right|$$

Nous nous référons **(S2)** comme état de **Lipschitz stochastique**.

(S3) $\exists\ \varepsilon > 0 : h_t^2 = u_t + v_t^2 \geq \varepsilon$.

(S4) $\xi \in \mathcal{M}(\alpha, h, \tau, \mathbb{R}^k)$;

(S5) $\frac{g(.,.,0,0)}{h} \in \mathcal{M}(\alpha, h, [0,\tau], \mathbb{R}^k)$.

4.2 Estimations à priori

Dans ce paragraphe nous donnons des estimations "à priori" concernant les solutions de l'EDSR, ces estimations traduisent l'indépendance de la solution d'une EDSR par rapport aux paramètres d'entrée i.e le générateur et la condition terminale.

Lemme 4.2 (Estimations à priori) *Soit* (τ, ξ, g) *un triple qui satisfait les données* ***(S1)*** *et* ***(S4)*** *et Soit* $\alpha > 0$, *et pour tout processus* $(h_t)_{t\geq 0}$ $\mathcal{F}_t-$*adapté tel que* $h \geq \varepsilon \geq 0$. *Soit* (Y, Z) *solution de l'EDSR* (4.2), *et supposons que :*

$$\frac{g(t, Y_t, Z_t)}{h} \in \mathcal{M}(\alpha, h, [0,\tau], \mathbb{R}^k)$$

Alors on a :

$$\|hY\|_\alpha^2 \leq \frac{2}{\alpha}\,\|\xi\|_\alpha^2 + \frac{4}{\alpha^2}\left\|\frac{g(t, Y_t, Z_t)}{h}\right\|_\alpha^2 \tag{4.3}$$

$$\|Y\|_{\alpha,c}^2 \leq c\|\xi\|_\alpha^2 + \frac{C'}{\alpha^2}\left\|\frac{g(t, Y_t, Z_t)}{h}\right\|_\alpha^2 \tag{4.4}$$

$$\|Z\|_\alpha^2 \leq \|\xi\|_\alpha^2 + \frac{2}{\alpha}\left\|\frac{g(t, Y_t, Z_t)}{h}\right\|_\alpha^2 \tag{4.5}$$

Pour tout $C, C' > 0$ indépendants de α et τ.

Démonstration. Soit (Y,Z) est une solution de l'EDSR , on obtient par (4.2) pour tout $0 \leq t \leq T$

$$Y_{t\wedge \iota} = Y_{T\wedge\tau} + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} g(s,Y_s,Z_s)ds - \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} Z_s dB_s$$

Notons par $H_t = \int_0^t h_s^2 ds$ et $\langle .,.\rangle$ le produit scalaire dans $\mathbb{R}^m$. On applique la formule d'Itô à $|Y_{t\wedge\tau}|^2 e^{\alpha H_{t\wedge\tau}}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
& |Y_{t\wedge\tau}|^2 e^{\alpha H_{t\wedge\tau}} + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\alpha H_s} |Z_s|^2 ds \\
= \; & |Y_{T\wedge\tau}|^2 e^{\alpha H_{T\wedge\tau}} - \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\alpha H_s} \left[\alpha h_s^2 |Y_s|^2 + 2\langle g(s,Y_s,Z_s), Y_s\rangle\right] ds \\
& + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\alpha H_s} \langle Y_s, Z_s dB_s\rangle \\
\leq \; & |Y_{T\wedge\tau}|^2 e^{\alpha H_{T\wedge\tau}} + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\alpha H_s} [-\alpha h_s^2 |Y_s|^2 + 2 |g(s,Y_s,Z_s)| \, |Y_s|] ds \\
& + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\alpha H_s} \langle Y_s, Z_s dB_s\rangle \\
\leq \; & |Y_{T\wedge\tau}|^2 e^{\alpha H_{T\wedge\tau}} + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\alpha H_s} [\frac{-\alpha h_s^2}{2} |Y_s|^2 \\
& \quad + \frac{2}{\alpha h_s^2} |g(s,Y_s,Z_s)|^2] ds + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\alpha H_s} \langle Y_s, Z_s dB_s\rangle
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Notons que $\left\{ \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\alpha H_s} \langle Y_s, Z_s dB_s\rangle \right\}$ est une martingale. Prenons l'espérance, on obtient pour $t = 0$,

$$\begin{aligned}
& 2\mathbb{E}\left[\int_0^{T\wedge\tau} e^{\alpha H_s} |Z_s|^2 ds\right] + \left[\mathbb{E}\int_0^{T\wedge\tau} e^{\alpha H_s} \alpha h_s^2 |Y_s|^2 ds\right] \\
\leq \; & 2\mathbb{E}\left[|Y_{T\wedge\tau}|^2 e^{\alpha H_{T\wedge\tau}}\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^{T\wedge\tau} e^{\alpha H_s} \frac{4}{\alpha h_s^2} |g(s,Y_s,Z_s)|^2 ds\right],
\end{aligned}$$

sachant que $\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq\tau} e^{H_t}\left|Y_t\right|^2<\infty$ car $(Y,Z)\in S^c(\alpha,h,\tau)$, si $T\longmapsto\infty$, on obtient par le théorème de la convergence dominée

$$\begin{aligned}
&2\mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{\alpha H_s}\left|Z_s\right|^2 ds\right]+\alpha\mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{\alpha H_s}h_s^2\left|Y_s\right|^2 ds\right]\\
\leq\ &2\mathbb{E}[e^{\alpha H_\tau}\left|\xi\right|^2]+\frac{4}{\alpha}\mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{\alpha H_s}\frac{1}{h_s^2}\left|g(s,Y_s,Z_s)\right|^2 ds\right]
\end{aligned}$$

On obtient facilement (4.3) et (4.5). Les inégalités Bulkholder-Davis-Gundy (BDG) fournissent :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T\wedge\tau}\left|\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\alpha H_s}\langle Y_s,Z_s dB_s\rangle\right|\right] &\leq \mathbb{E}\left|\int_0^{T\wedge\tau} e^{\alpha H_s}\langle Y_s,Z_s dB_s\rangle\right|+\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T\wedge\tau}\left|\int_0^{t\wedge\tau} e^{\alpha H_s}\langle Y_s,Z_s dB_s\rangle\right|\right]\\
&\leq 2K\mathbb{E}\sqrt{\int_0^{T\wedge\tau} e^{2\alpha H_s}\left|Y_s\right|^2\left|Z_s\right|^2 ds}\\
&\leq 2K\mathbb{E}\left[\sqrt{\sup_{0\leq t\leq T\wedge\tau} e^{\alpha H_t}\left|Y_t\right|^2}\sqrt{\int_0^{T\wedge\tau} e^{\alpha H_s}\left|Z_s\right|^2 ds}\right]
\end{aligned}$$

$$\leq\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T\wedge\tau} e^{\alpha H_t}\left|Y_t\right|^2\right]+2K^2\mathbb{E}\left[\int_0^{T\wedge\tau} e^{\alpha H_s}\left|Z_s\right|^2 ds\right]\tag{4.7}$$

Utilison les inégalités (4.6) et (4.7), on obtient,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\left[\sup_{0\leq t\leq T\wedge} e^{\alpha H_t}\left|Y_t\right|^2\right] &\leq \mathbb{E}\left[e^{\alpha H_{T\wedge\tau}}\left|Y_{T\wedge\tau}\right|^2\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^{T\wedge\tau} e^{\alpha H_s}\frac{2}{\alpha h_s^2}\left|g(s,Y_s,Z_s)\right|^2 ds\right]\\
&\quad+\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T\wedge\tau}\left|\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\alpha H_s}\langle Y_s,Z_s dB_s\rangle\right|\\
&\leq \mathbb{E}[\left|Y_{T\wedge\tau}\right|^2 e^{\alpha H_{T\wedge\tau}}]+\mathbb{E}[\left[\int_0^{T\wedge\tau} e^{\alpha H_s}\frac{2}{\alpha h_s^2}\left|g(s,Y_s,Z_s)\right|^2 ds\right]\\
&\quad+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T\wedge\tau}\left|Y_t\right|^2 e^{\alpha H_t}\right]+2K^2\mathbb{E}\left[\int_0^{T\wedge\tau} e^{\alpha H_s}\left|Z_s\right|^2 ds\right]
\end{aligned}$$

On a aussi :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T\wedge\tau} e^{\alpha H_{t\wedge\tau}}\left|Y_t\right|^2\right] \leq 2\mathbb{E}\left[\left|Y_{T\wedge\tau}\right|^2 e^{\alpha H_{T\wedge\tau}}\right] + 4\mathbb{E}\left[\int_0^{T\wedge\tau} e^{\alpha H_s}\frac{1}{\alpha h_s^2}\left|g(s,Y_s,Z_s)\right|^2 ds\right]$$
$$+4K^2\mathbb{E}\left[\int_0^{T\wedge\tau} e^{\alpha H_s}\left|Z_s\right|^2 ds\right]$$

Si $T\longrightarrow\infty$ et selon le lemme de Fatou et le théorème de convergence dominée et l'inégalité (4.5), on obtient,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq\tau} e^{\alpha H_{t\wedge\tau}}\left|Y_t\right|^2\right] &\leq \lim_{T\longrightarrow\infty}\left(\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T\wedge\tau}\left|Y_{t\wedge\tau}\right|^2 e^{\alpha H_{t\wedge\tau}}\right]\right)\\ &\leq (2+4K^2)\mathbb{E}[e^{\alpha H_T}\left|\xi\right|^2] + \frac{4+8K^2}{\alpha}\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha H_s}\frac{1}{h_s^2}\left|g(s,Y_s,Z_s)\right|^2 ds\right]\end{aligned}$$

On obtient (4.4), ce qui termine la preuve. ■

Lemme 4.3 *Soient* (Y,Z') *et* (Y,Z') *deux solutions de l'*$ESDR(\tau,\xi,g)$ *et* $ESDR(\tau,\xi',g')$ *respectivement, alors,*

$$\frac{g(t,Y'_t,Z'_t)-g'(t,Y'_t,Z'_t)}{h}\in\mathcal{M}(\alpha,h,[0,\tau],\mathbb{R}^k) \tag{4.8}$$

$$\frac{g(t,Y_t,Z_t)-g'(t,Y'_t,Z'_t)}{h}\in\mathcal{M}(\alpha,h,[0,\tau],\mathbb{R}^k) \tag{4.9}$$

et de plus

$$\left\|\frac{g(t,Y_t,Z_t)-g'(t,Y'_t,Z'_t)}{h}\right\|_\alpha^2\leq 3\left[\left\|h(Y_t-Y'_t)\right\|_\alpha^2+\left\|Z_t-Z'_t\right\|_\alpha^2+\left\|\frac{g(t,Y'_t,Z'_t)-g'(t,Y'_t,Z'_t)}{h}\right\|_\alpha^2\right] \tag{4.10}$$

Démonstration. Par la condition Lipschitizienne stochastique (**S2**), on a :

$$\begin{aligned}\left|g(t,Y_t,Z_t)-g'(t,Y'_t,Z'_t)\right| &\leq \left|g(t,Y_t,Z_t)-g(t,Y'_t,Z'_t)\right|+\left|g(t,Y'_t,Z'_t)-g'(t,Y'_t,Z'_t)\right|\\ &\leq u_t\left|Y_t-Y'_t\right|+v_t\left|Z_t-Z'_t\right|+\left|g(t,Y'_t,Z'_t)-g'(t,Y'_t,Z'_t)\right|\end{aligned}$$

Par l'intégralité de Young et la définition de h^2;

$$\begin{aligned}\left|g(t,Y_t,Z_t)-g'(t,Y'_t,Z'_t)\right|^2 &\leq 3[u_t^2\left|Y_t-Y'_t\right|^2+v_t^2\left|Z_t-Z'_t\right|^2+\left|g(t,Y'_t,Z'_t)-g'(t,Y'_t,Z'_t)\right|^2] \\ &\leq 3h_t^2[h_t^2\left|Y_t-Y'_t\right|^2+\left|Z_t-Z'_t\right|^2+\frac{\left|g(t,Y'_t,Z'_t)-g'(t,Y'_t,Z'_t)\right|^2}{h_t^2}]\end{aligned}$$

Par conséquent ,

$$\begin{aligned}&\frac{|g(t,Y'_t,Z'_t)-g'(t,Y'_t,Z'_t)|^2}{h_t^2}e^{\alpha H_t} \\ \leq\ & 3e^{\alpha H_t}\left[h_t^2\left|Y_t-Y'_t\right|^2+\left|Z_t-Z'_t\right|^2+\frac{|g(t,Y'_t,Z'_t)-g'(t,Y'_t,Z'_t)|^2}{h_t^2}\right]\end{aligned}$$

Intégrant de 0 à τ et prenant l'espérance, on obtient (4.10). D'autre part, on a :

$$\left\|\frac{g(t,Y'_t,Z'_t)-g'(t,Y'_t,Z'_t)}{h}\right\|_\alpha^2 \leq \left\|\frac{g(t,Y'_t,Z'_t)}{h}\right\|_\alpha^2+\left\|\frac{g'(t,Y'_t,Z'_t)}{h}\right\|_\alpha^2$$

Par **(S2)**,

$$\left|g(t,Y'_t,Z'_t)\right| \leq u_t\left|Y'_t\right|+v_t\left|Z'_t\right|+|g(t,0,0)|$$

Par l'inégalité de Young et la définition de h^2 on obtient :

$$\frac{|g(t,Y'_t,Z'_t)|^2}{h_t^2} \leq 3\left[h_t^2\left|Y'_t\right|^2+\left|Z'_t\right|^2+\frac{|g(t,0,0)|^2}{h_t^2}\right]$$

Utilisons **(S5)** on obtient $\left\|\frac{g(t,Y'_t,Z'_t)}{h}\right\|_\alpha^2 \langle\infty$, et on peut facilement vérifier que

$$\left\|\frac{g'(t,Y'_t,Z'_t)}{h}\right\|_\alpha^2 < \infty$$

■

Proposition 4.4 *Soit* $\alpha>0$, $(h_t)_{t\geq 0}$ *un processus* $\mathcal{F}_t-$*adapté positif et borné et pour* $\varepsilon>0$.

Supposons $\frac{g}{h}\in\mathcal{M}(\alpha,h,[0,\tau],\mathbb{R}^k)$ *et* $\xi\in\mathcal{M}(\alpha,h,[0,\tau],\mathbb{R}^k)$. *L' EDSR suivante*

$$\begin{cases}-dY_t=g(t)dt-Z_tdB_t \\ \\ Y_\tau=\xi\end{cases} \tag{4.11}$$

a une solution unique.

Démonstration. L'idée de la preuve est identique à [13], mais elle devient de loin plus technique en raison de la situation générale. Donnons d'abord un argument heuristique. Soit (Y, Z) une solution de l'EDSR, on a

$$Y_{t\wedge\tau} = \xi + \int_{t\wedge\tau}^{\tau} g(s)ds + \int_{t\wedge\tau}^{\tau} Z_s dB_s$$

En utilisant l'espérance conditionnelle

$$\begin{aligned} Y_{t\wedge\tau} &= \mathbb{E}[Y_{t\wedge\tau} \mid \mathcal{F}_{t\wedge\tau}] \\ &= \mathbb{E}\left[\xi + \int_0^{\tau} g(s)ds \mid \mathcal{F}_{t\wedge\tau}\right] - \int_0^{t\wedge\tau} g(s)ds \end{aligned}$$

Ainsi nous avons un candidat pour une part de la solution. Définissons

$$\begin{aligned} M_{t\wedge\tau} &= \mathbb{E}\left[\xi + \int_0^{\tau} g(s)ds / \mathcal{F}_{t\wedge\tau}\right] \\ Y_{t\wedge\tau} &= M_{t\wedge\tau} - \int_0^{t\wedge\tau} g(s)ds \end{aligned}$$

On obtient une estimation de M et Y. ■

Lemme 4.5

$$\mathbb{E}[|M_{t\wedge\tau}|^2] \leq 2\mathbb{E}\,|\xi|^2 + \frac{2}{\alpha}\mathbb{E}\int_0^{\tau} \frac{|g(s)^2|}{h_s^2} e^{\alpha H_s} ds \tag{4.12}$$

$$\mathbb{E}\ sup_{t\leq\tau}\left[e^{\alpha H_t}\,|Y_t|^2\right] \leq 8\mathbb{E}\,|\xi|^2\, e^{\alpha H_\tau} + \frac{8}{\alpha}\mathbb{E}\int_0^{\tau} \frac{|g(s)^2|}{h_s^2} e^{\alpha H_s} ds \tag{4.13}$$

Par consiquent : $M_t (t \in [0, \tau])$est une martingale de carré intégrable.

Démonstration. Par la définition de Y et l'utilisation de l'inégalité de Jensen, Young et Holder, respectivement, on obtient,

$$\begin{aligned}
e^{\frac{\alpha}{2}H_{t\wedge\tau}}\left|Y_{t\wedge\tau}\right| &= \left|\mathbb{E}\left[\xi+\int\limits_{t\wedge\tau}^{\tau}g(s)ds \mid \mathcal{F}_{t\wedge\tau}\right]\right|e^{\frac{\alpha}{2}H_{t\wedge\tau}} \\
&\leq \mathbb{E}[\sqrt{\left|\xi+\int\limits_{t\wedge\tau}^{\tau}g(s)ds\right|^{2}e^{\alpha H_{t\wedge\tau}}} \mid \mathcal{F}_{t\wedge\tau}] \\
&\leq \sqrt{2}\mathbb{E}\left[\sqrt{\left|\xi\right|^{2}e^{\alpha H_{\tau}}+\left|\int\limits_{t\wedge\tau}^{\tau}g(s)ds\right|^{2}e^{\alpha H_{t\wedge\tau}}} \mid \mathcal{F}_{t\wedge\tau}\right] \\
&\leq \sqrt{2}\mathbb{E}\left[\sqrt{\left|\xi\right|^{2}e^{\alpha H_{\tau}}+\left(\int\limits_{t\wedge\tau}^{\tau}h_s^2e^{-\alpha H_s}ds\right)\left(\int\limits_{t\wedge\tau}^{\tau}\frac{\left|g(s)\right|^{2}}{h_s^2}e^{\alpha H_s}ds\right)e^{\alpha H_{t\wedge\tau}}} \mid \mathcal{F}_{t\wedge\tau}\right] \\
&\leq \sqrt{2}\mathbb{E}\left[\sqrt{\left|\xi\right|^{2}e^{\alpha H_{\tau}}+\frac{1}{\alpha}\int\limits_{0}^{\tau}\frac{\left|g(s)\right|^{2}}{h_s^2}e^{\alpha H_s}ds} \mid \mathcal{F}_{t\wedge\tau}\right]
\end{aligned}$$

Donc, $e^{\frac{\alpha}{2}H_{t\wedge\tau}} \mid Y_{t\wedge\tau}^2$ est dominé par une martingale. Par l'inégalité de Doob et l'inégalité de Jensen, on obtien une estimation de Y. Une estimation de M se fait d'une manière similaire.

Maintenant construisons la deuxième partie de la solution. Car M est une martingale de carré intégrable, en utilisant le théorème de représentation des martingales, on obtient :

Soit $Z : \Omega \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow R^{m\times d}$ est un processus $\mathcal{F}_t-$adapté tel que :

$$P\left(\int\limits_0^\infty \left|Z_s\right| ds < \infty\right) = 1 \qquad \text{et} \quad M_{t\wedge\tau} = M_0 + \int\limits_0^{t\wedge\tau} Z_s dB_s$$

On peut montrer (en utilisant les définitions ci-dessus) que pour $T < \infty$ et $t \leq T$

$$Y_{t\wedge\tau} = Y_{T\wedge\tau} + \int\limits_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} g(s)ds - \int\limits_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} Z_s dB_s \tag{4.14}$$

Si $T \longrightarrow \infty$ nous voyons que Z est le candidat normal pour la deuxième partie de la solution, et que $Y_{T\wedge\tau} \longrightarrow \xi$ $(P-p.s)$. Nous distinquons deux cas :

i) Soit $\{\tau \leq T\}$ pour $T < \infty$ [12], on obtient,

$$\mathbb{E}\left[\xi + \int_0^\tau g(s)ds/\mathcal{F}_{t\wedge\tau}\right] = \mathbb{E}\left[\xi + \int_0^\tau g(s)ds/\mathcal{F}_\tau\right] = \xi + \int_0^\tau g(s)ds$$

Par conséquent $Y_{T\wedge\tau} \longrightarrow \xi$ en $\{\tau \leq T\}$.

(ii) Si $\{\tau = \infty\}$ et comme $\frac{g}{h} \in \mathcal{M}(\alpha, h, [0, \tau], \mathbb{R}^k)$ et $\xi \in \mathcal{M}(\alpha, h, [0, \tau], \mathbb{R}^k)$, on a $g = 0$ et $\xi = 0$ en $\{\tau = \infty\}$. Ainsi $Y_{T\wedge\tau} \longrightarrow \infty$. Notons que nous avons besoin de h loin de 0, pour conclure cela, g et ξ égale 0. Par consiquent

$$Y_{t\wedge\tau} = \xi + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} g(s)ds - \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} Z_s dB_s$$

On va montrer que $(Y, Z) \in S^c(\alpha, h, \tau)$. ■

Lemme 4.6

$$(Y, Z) \in S^c(\alpha, h, \tau)$$

Démonstration. On sait que $Y \in \mathcal{M}^c(\alpha, h, [0, \tau], \mathbb{R}^k)$, on applique la formule d'Itô à $e^{\alpha H_{t\wedge\tau}} |Y_{t\wedge\tau}|^2$, on obtient :

$$\begin{aligned} |Y_{t\wedge\tau}|^2 e^{\alpha H_{t\wedge\tau}} + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\alpha H_s} |Z_s|^2 ds \quad &= \quad |Y_{t\wedge\tau}|^2 e^{\alpha H_{t\wedge\tau}} - \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\alpha H_s}[\alpha h_s^2 |Y_s|^2 + 2\langle g(s), Y_s\rangle]ds \\ &+ \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\alpha H_s} \langle Y_s, Z_s dB_s\rangle \end{aligned}$$

Nous devons payer à attention au fait cela $\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\alpha H_s} \langle Y_s, Z_s dB_s\rangle$ peut être une vraie martingale locale. Par conséquent, nous ne pouvons pas assumer cela car $\mathbb{E}\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\alpha H_s} \langle Y_s, Z_s dB_s\rangle = 0$. Mais comme aux estimations a priori dans le lemme (4.5), on a (en utilisant l'inégalité de

Burkholder - Davis-Gundy)

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_0^{T\wedge\tau} e^{\alpha H_s}\left|Z_s\right|^2 ds+\mathbb{E}\int_0^{T\wedge\tau} e^{\alpha H_s}[\alpha\left|h_sY_s\right|^2 ds \\
\leq\quad & C[\mathbb{E}\left|Y_{t\wedge\tau}\right|^2 e^{\alpha H_{t\wedge\tau}}+\mathbb{E}\int_0^{\tau}\left|g(s)\right|^2 e^{\alpha H_s}ds+\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq\tau}(e^{\alpha H_t}\left|Y_t\right|^2)]
\end{aligned}$$

avec C une constante qui dépend seul à α et ne dépend pas à T. Alors nous pouvons servir le lemme (4.5) et passer à la limite pour obtenir le résutat. Il reste à prouver l'unicité. Soit $\xi=0$ et $g=0$. On applique la formule d'Itô à $\left|Y_{t\wedge\tau}\right|^2$, on obtient,

$$\mathbb{E}\left|Y_{t\wedge\tau}\right|^2=-\mathbb{E}\int_{t\wedge\tau}^{\tau}\left|Z_s\right|^2 ds$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
&Y_{t\wedge\tau}=0\quad P-p.s \\
&Z_t=0\quad P-p.s\qquad\text{pour tout } t\in[0,\tau]
\end{aligned}$$

L'unicité suit du linéarité de l'équation. La preuve de la proposition (4.4) est complète maintenant. ■

4.3 Existence et unicité de solution

Nous pouvons maintenant énoncer les résultats principaux

Théorème 4.7 *l'EDSR (4,1) a une solution unique.*

Démonstration. On fixe $(y,z)\in\mathcal{S}(\alpha,h,\tau)$ et on considère EDSR

$$\begin{aligned}
-dY_t &= g(t,y_t,z_t)dt-Z_tdB_t \qquad (4.15)\\
Y_\tau &= \xi
\end{aligned}$$

Par **(S2)**

$$|g(t, y_t, z_t)| \leq u_t |y_t| + v_t |z_t| + |g(t, 0, 0)|$$

Par l'inégalité de Young et la définition de h^2

$$\frac{|g(t, y_t, z_t)|^2}{h_t^2} \leq 3 \left(h_t^2 |y_t|^2 + |z_t|^2) + \frac{|g(t, 0, 0)|^2}{h_t^2} \right)$$

En utilisant **(S5),** on obtient :

$$\frac{g(t, y_t, z_t)}{h_t} \in \mathcal{M}^c(\alpha, h, [0, \tau], \mathbb{R}^k)$$

Donc l'EDSR (4.14) a une unique solution par proposition (4.4).

On définit l'opérateur :

$$\Pi : \mathcal{S}(\alpha, h, \tau) \longrightarrow \mathcal{S}^c(\alpha, h, \tau) \subset \mathcal{S}(\alpha, h, \tau),$$

tel que $\Pi(y, z)$ est une solution de l'EDSR (4.14). Nous montrerons, que pour α assez un grand, Π est une contraction. En utilisant la contraction, nous trouvons un pint fixe unique ce qui nous donnent l'unicité de la solution de l'EDSR (4.2). supposons $(y, z), (y', z\prime) \in \mathcal{S}(\alpha, h, \tau)$, par le lemme (4.3), on a :

$$\left\| \frac{g(t, y_t, z_t) - g(t, y'_t, z'_t)}{h} \right\|_\alpha^2 \leq 3(\|h(y_t - y'_t)\|_\alpha^2 + \|z_t - z'_t\|_\alpha^2)$$

on combine cette inégalité avec le résultat de lemme (4.2) et en utilisant le fait que $\Pi(y, z) - \Pi(y', z')$ est une solution de l'EDSR donnée par $(\tau, 0, g(t, y_t, z_t) - g(t, y'_t, z'_t))$.

$$\begin{aligned} \|\Pi(y, z) - \Pi(y', z')\|_\alpha^2 &\leq (\frac{12}{\alpha^2} + \frac{6}{\alpha})(\|h(y_t - y'_t)\|_\alpha^2 + \|z_t - z'_t\|_\alpha^2) \\ &\leq \left(\frac{12}{\alpha^2} + \frac{6}{\alpha} \right) \|(y, z) - (y', z\prime)\|_\alpha^2 \end{aligned}$$

Par conséquent, pour α assez grand Π est une contraction . Ainsi EDSR (4.2) possède une unique solution. Ce qui termine la preuve. Il reste à prouver la propriété de continuité et la dépendance. ■

Théorème 4.8 *Supposons (τ,ξ,g) et (τ,ξ',g') les données standards associeés aux solutions (Y,Z) et (Y',Z'). pour α assez grand, il existe une constante $K>0$ indépendante de τ tel que :*

$$\|(Y,Z)-(Y',Z')\|^2_{\alpha,c} = K\|\xi-\xi'\|^2_\alpha + K\left\|\frac{g(t,Y_t,Z_t)-g'(t,Y'_t,Z'_t)}{h}\right\|_\alpha$$

Démonstration. Soit :

$$f(t,y,z) = g(t,y+Y'_t,z+Z'_t) - g'(t,-y-Y_t,-z-Z_t)$$

telle que $(Y-Y',Z-Z')$ est une solution de l'EDSR$(\tau,\xi-\xi',g)$. Par le lemme (4.3), on a

$$\frac{f(t,Y_t-Y'_t,Z_t-Z'_t)}{h} \in \mathcal{M}(\alpha,h,[0,\tau],\mathbb{R}^k)$$

Par conséquent, en appliquant le lemme (4.2), on obtient :

$$\begin{aligned}
\|Y-Y',Z-Z'\|^2_\alpha &\leq \left(C+1+\frac{2}{\alpha}\right)\|\xi-\xi'\|^2_\alpha + \left(\frac{C'+2}{\alpha}+\frac{4}{\alpha^2}\right)\left\|\frac{g(t,Y_t,Z_t)-g'(t,Y'_t,Z'_t)}{h}\right\|^2_\alpha \\
&\leq \left(C+1+\frac{2}{\alpha}\right)\|\xi-\xi'\|^2_\alpha + 3\left(\frac{C'+2}{\alpha}+\frac{4}{\alpha^2}\right)\left[\|h(Y_t-Y'_t)\|^2_\alpha + \|Z_t-Z'_t\|^2_\alpha\right] \\
&\quad + \left\|\frac{g(t,Y'_t,Z'_t)-g'(t,Y'_t,Z'_t)}{h}\right\|^2_\alpha
\end{aligned}$$

la seconde inégalité est obtenue par le lemme (4.3). en choisissant α assez grand pour terminer la preuve. Finalement, nous comparons ces résultats avec le théorème de Pardoux-Peng dans le cas de l'arrangement standard, ainsi le temps d'arrêt τ lié par un certains $T_0<\infty$ et laissant une prise d'état de Lipschitz d'uniforme i.e

$$\left|g(t,y,z)-g(t,y',z')\right| \leq K\left(\left|y-y'\right|+\left|z-z'\right|\right)$$

Évidemment, dans ces prétentions **(S4)** et **(S5)** soient équivalentes à

(S′4) $\xi \in \mathcal{M}(0, 0, \tau, \mathbb{R}^k)$;

(S′5) $g(....., 0, 0) \in \mathcal{M}(0, 0, [0, \tau], \mathbb{R}^k)$. ■

Bibliographie

[1] **C. Bender, M. Kohlman,** BSDES with stochastic lipschitz condition, The second author gratefully acknowledges support from the Center of Finance and Econometrics at the University of Konstanz, Germany.

[2] **P. Briand**, Equations Différentielles Stochastiques Rétrogrades, cours, Mars 2001. Univ. Paul Sabatier

[3] **Ph. Briand and R. Carmona**, BSDEs with polynomial growth generators, J. Appl. Math Stochastic Anal. 13 (2000), no. 3, 207– 238.

[4] **Ph. Briand and Y. Hu**, Stability of BSDEs with random terminal time and homogenization of semilinear elliptic PDEs, J. Funct Anal. 155 (1998), N°. 2, 455– 494.

[5] **J. M. Bismut**, "Conjugate Convex Functions in Optimal Stochastic Control", J. Math.Anal. Appl., 1973, 44, 384-404.

[6] **R. Buckdahn, M. Quincampoix**, **and A. Rascanu**, Propriété de viabilité pour des équations differentielles stochastiques rétrogrades et appl ications à des équations aux dérivées partielles C. R. Acad. Sci. Pari Sér. I Math . 325 (1997), no. 11, 1159–1162.

[7] **N. El-karoui, S. Peng et M. C. Quenez**, Backward stochastic differential equation,

Finance and optimization, Preprint.

[8] **J. Genet**, Mesure et Intégration, Vuibert, 1976, Paris.

[9] **S. Hamadène**, Equations différentielles stochastiques rétrogrades : le cas localement lipschitizien, Annales de l'I.H.P, section B, tome 32, N° 5 (1996), p. 645-659.

[10] **H. Hamadène et J.-P. Lepeltier**, Zero sum stochastic differential games and backward equation , Systems and control letters, vol **24**, 1995, p. 259-263.

[11] **H. Hamadène et J.-P. Lepeltier**, Backward equations, optimal control and zero sum stochastic differential games, à paraitre dans stochastics.

[12] **I. Karatzas et S. E. Shreve**, Brownian motion and stochastic calculus, Second édition, Springer, 1991.

[13] **E. Pardoux et S. Peng**, Adapted solution of a backward stochastic differential equation, *Systems and control letters*, vol **14**, 1990, p, 54-61.

[14] **E. Pardoux et S. Peng**, Some backward stochastic differential equations with non-lipschitz coefficients, Preprint.

[15] **E. Pardoux et S. Peng**, Backward stochastic differential equations and quasilinear Parabolic Partial Differential Equations. *Lecture notes in CIS*, vol. **176**, 1992, p. 200-217. Springer.

[16] **E. Pardoux**, BSDEs weak convergence and homogenization on of semilinear ar PDEs,Nonlinear analysis, differential equations and control Montreal, QC, 1998), Kluwer Acad. Publ, Dordrecht, 1999, pp. 503 –549.

[17] **S. Peng**, Probabilistic interpretation for systems of quasilinear parabolc partial differentialequations, Stochastics Stochastics Rep. 37 (1991), N°. 1-2, 61– 74.

[18] **S. Peng,** Stochastic Hamilton,Jacobi Bellman equations, SIAM J. Control Optim. 30 (1992), N°. 2, 284– 304.

[19] **A. Popier**, Equations différentielles stochastiques réctogrades avec condition finale singulière, thèse de Doctorat setenue le 10.12.2004.Université de Provence.

[20] **O. Revière**, Equations différentielles stochastiques progressives réctogrades couplées, thèse de doctorat setenue 13.12.2005.Université René Descartes -Paris 54.

[21] **J. Yong, X. Y. Shou,** Stochastic controls : Hamiltonian systems and HJB equations, Springer Verlag , New York 1999.