REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Sientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED SEDDIK BEN YAHIA
JIJEL

N° d'ordre :
Série :

THÈSE

Présentée à la Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques
Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées (LMPA)

Pour l'obtention du diplôme de

Doctorat (LMD)

Spécialité Mathématiques Appliquées

Par

Moufida AMIOUR

Thème

Etude d'une classe d'opérateurs multivoques

Soutenue publiquement le 11/10/2018

Devant le jury composé de

Président :	M. Kerada	Prof	U.M.S.B.Y. Jijel
Directeur :	M. F. Yarou	Prof	U.M.S.B.Y. Jijel
Examinateurs :	Guezane-Lakoud Assia	Prof	U. Annaba
	T. Zerzaihi	Prof	U.M.S.B.Y. Jijel
	N. Abada	MCA	E.N.S Constantine
	D. Affane	MCA	U.M.S.B.Y. Jijel

Remrciements

En tout premier lieu, je remercie le bon Dieu, tout puisant, qui m'a donné la volonté et le courage pour mener au bout cette thèse.
Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse, Mr **Mustapha Fateh Yarou** Professeur à l'université de Jijel, pour m'avoir confié ce travail de recherche, ainsi que pour son aide et ses précieux conseils au cours de ces années. Sa générosité, sa disponibilité, sa rigueur, surtout son soutien constant m'ont permis de mener à bien ce projet, et j'ai une pensée pour son épouse.
J'aimerais aussi exprimer ma gratitude à Monsieur **M. Kerada** Professeur à l'université de Jijel, pour avoir accepté de présider le jury de ma soutenance.
J'adresse mes remerciements à Mme **Guezane-Lakoud Assia** Professeur à l'université de Annaba, Mr **Tahar Zerzaihi** Professeur à l'université de Jijel, **Mme Nadjet Abada** Maître de Conférence à l'E.N.S de Constantine, Mme **Doria Affane** Maître de Conférence à l'université de Jijel, pour avoir accepté d'être les examinateurs de ce travail.
Bien évidemment, cette thèse n'aurait pu voir le jour sans l'enseignement de qualité que j'ai reçu tout au long de ma formation. J'en profite pour remercier tous les enseignants du département de mathématiques qui yont contribué.

Je dédie ma thèse :

A mes parents *Hamid et Arid Aicha*

A mon mari *Himer Hocine*

A mes frères et mes soeurs, leur marient et ces enfants

A toute la famille de mon mari chacun a son nom

A toutes mes amies.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

Introduction générale

L'étude des problèmes mathématiques et physiques conduit généralement à la résolution des équations et inclusions différentielles. L'étude revient souvent à déterminer les solutions quand elles existent ou à donner une étude permettant d'etudier leurs proprietés.

Les résultats exposés dans cette thèse, présentent une contribution à l'étude, d'une part, des proprietés de l'invariance et l'invariance approchée des systèmes (S, F) associées aux inclusions différentielles autonomes du premier ordre de type

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(x(t)), \ p.p. \ t \in [0, T]; \\ x_0 = x(0), \end{cases} \tag{1.1}$$

sous l'hypothèse que F soit dissipative et d'autre part, de l'existence de solutions pour les inclusions différentielles à mémoire avec contrainte sur l'état.

La notion classique de l'invariance se définit comme suit : le système (S, F) est dit faiblement invariant si et seulement si pour tout $x_0 \in S$ il existe une trajectoire x de (1.1) tel que $x(t) \in S$ pour tout $t \in [0, T]$ de la même façon le système (S, F) est dit fortement invariant si et seulement si pour tout $x_0 \in S$ toute trajectoire x de (1.1) reste toujours dans S pour tout $t \in [0, T]$.

Dans la théorie de l'invariance il existe des sujets qui ont fourni la base pour la recherche actuelle considérable dans la théorie de controle et d'optimisation [3, 20, 30, 33, 32].

Le premier résultat de l'invariance a été établi par Nagumo pour les équations différentielles i.e. pour $F(x) = \{f(x)\}$ où $f(.)$ est continue, il a prouvé que l'invariance faible d'un système (S, F) est equivalente à la condition de type tangentielle

$$f(x) \in T_S^B(x) \quad \forall x \in S,$$

où

$$T_S^B(x) = \{v : \lim_{h \longrightarrow 0} d_S(\frac{x + hv}{h}) = 0\}$$

est le cône Bouligand de S au point x et $d_S(x) = \inf_{s \in S} \|x - s\|$, est la fonction distance. Si $f(.)$ est localement Lipschitz, la notion de l'invariance faible et forte coïncident. Dans [10], Brezis a redecouvert la caractérisation tangentielle où $f(.)$ est localement Lipschitz et Bony [8] a présenté le cône normal proximal

$$N_S^p(x) = \{\xi : \exists \sigma > 0 \; tel \; que \; \langle \xi, x^{'} - x \rangle \leq \sigma \|x^{'} - x\|^2 \quad \forall x^{'} \in S\},$$

et a prouvé que la condition normale

$$\langle f(x), \xi \rangle \leq 0 \quad \forall \xi \in N_S^p(x), \forall x \in S$$

est aussi une caractérisation de l'invariance (avec $f(.)$ est localement Lipschitz). Le cône normal joue un rôle majeur dans l'analyse non lisse. Dans [20], les auteurs ont prouvé que la condition tangentielle est suffisante pour l'invariance faible et il y'a une implication entre la condition tangentielle et la condition de type normal.

Hartman [40] a prouvé l'equivalence entre l'invariance faible et la condition tangentielle sous la condition de continuité. Independamment Grandall [35] a montré l'equivalence avec la condition normale, Redheffer et Wlater [52] ont fait des extensions à n'importe quel espace en remplaçant la supposition de régularité de $f(.)$ par la condition de quasimonotonie, dans laquelle les solutions des equations différentielles ordinaires sont uniques.

L'invariance faible a été plus largement étudiée que l'invariance forte. Dans un espace de dimension finie et le cas autonome la condition tangentielle suivante

$$F(x) \cap T_S^B(x) \neq \emptyset \quad \forall x \in S$$

est donnée par Haddad [39] pour caractérisé les systèmes faiblement invariants. Le critère de type normal a été d'abord prouvé par Veliov [56]. L'invariance faible est equivalente à

$$\min_{v \in F(x)} \langle \xi, v \rangle \leq 0 \; \forall \xi \in N_S^p(x) \quad \forall x \in S.$$

Les versions nonautonome des résultats de [20] peuvent être trouvées dans les travaux de Frankowska et Paskaz [32] et Dontchev [30]. Dans [4] Clarke a prouvé le premier théorème d'invariance qui est vraiment fort (quand l'invariance faible et forte ne coincident pas), en considérant la condition de Lipschitzité des multifonctions et a prouvé l'equivalence de l'invariance forte avec les conditions tangentielles, (les conditions tangentielles de l'invariance forte sont inclus [33]). La condition normale forte est

$$\max_{v \in F(x)} \langle \xi, v \rangle \leq 0 \; \forall \xi \in N_S^p(x) \quad \forall x \in S.$$

Krastanov a montré l'equivalence de l'invariance forte à la condition normale forte. Aprés Clarke, Ledyaev et Radulescu [18] ont aussi fait des extensions aux espaces de Hilbert sous les mêmes hypothéses de Clarck avec des modifications appropriées. Pour les inclusions différentielles à mémoire les premiers travaux ont été entrepris par V.Lakshmikathan, A.R, Mitchell et R.W. Mitchell [47] dans le cas des équations différentielles. Dans la même direction, O. Arino et S. Gautier [5] ont obtenu un résultat d'existence de solutions pour les équations différentielles à mémoire sous la condition de la continuité faible dans un espace de Banach reflexif. Ces résultats ont été généralisés par plusieurs auteurs. Dans [43] Syam a généralisé les résultats obtenus pour les équations différentielles à mémoire aux inclusions différentielles à mémoire et a donné un résultat d'existence de solutions viables pour l'ensemble E_0 ou E_0 c'est l'ensemble des fonctions continues sur $[-r, 0]$ à valeurs dans un espace de Banach E. Le même problème de Syam est résolu aussi par Haddad [39] mais dans un espace de dimension finie sous la condition de la semicontinuité globale. Ibrahim Ahmed Gamal [41] a aussi obtenu le même résultat dans un espace de dimension infinie en ajoutant les conditions de convexités et de compacités.

Cette thèse est constituée de 4 chapitres. Dans le premier chapitre on présente une introduction générale. Le deuxième chapitre est consacré à des notions de bases que nous avons utilisé au long de ce travail.

Dans le troisième chapitre, nous montrons l'equivalence entre l'invariance faible et l'invariance forte des systèmes (S, F) associés aux (1.1) où F une multifonction définit de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ une multifonction à valeurs non vides convexes compactes, dissipative et vérifie la condition de croissance linéaire et la semicontinuité superieure. On a obtenu aussi quelques propriétés de l'invariance faible et fort approchée dans un espace de Hilbert. Dans le quatrième chapitre nous présentons un résultat d'existence de solutions viables pour le problème suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(t, x(t)) \, p.p \; t \in [0, T], \\ x(0) = x_0, \\ x(t) \in D. \end{cases} \tag{1.2}$$

où D est un convexe fermé d'un espace de Banach séparable E et $F : [0, T] \times E \rightrightarrows ck(E)$, tel que ($ck(E)$ est l'ensemble des sous ensemles non vides convexes compacts de E), mesurable par rapport à la première variable et semicontinue superieurement par rapport à la deuxième satisfaisant

$$F(t, x) \cap T_D(x) \neq \emptyset,$$

et il existe un ensemble équilibré $K : F(t,x) \subset (1 + \|x\|)K$.

Aprés on résout le problème suivant à mémoire avec viabilité et retard

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(t, \tau(t-s)x) \; p.p. \; sur \; [0,T] \\ \tau(t-s)x = x_{t-s} \in D \quad \forall t \in [0,T] \\ x(t) = \varphi_0(t) \quad sur \; [-r,0] \end{cases} \tag{1.3}$$

où D est un convexe fermé d'un espace de Banach séparable E, r un réel strictement positif et $\varphi_0 \in E_s$, F est une multifonction définie de $[0,T] \times E_s$ à valeurs dans $ck(E)$ semicontinue supèrieurement par rapport à la deuxième variable où E_s est l'ensemble des fonctions continues sur $[-r,0]$ à valeurs dans E telles que $\varphi(s) \in D$ pour s fixé dans $[-r,0]$, et $\tau(t)x \in C([-r,0],E)$ définie par $\tau(t)x(s) = x(t+s)$ $\forall s \in [-r,0]$.
dans la deuxième partie, on résout le problème (1.3) où la contrainte est variable avec l'etat et F est semicontinue supèrieurement.
Les résultats du 3ème chapitre ont fait l'objet d'une publication dans "Bulletion of the Iranian Mathematical Society", et les résultats du 4ème chapitre sont soumis.

CHAPITRE 2

Concept de base et résultats préliminaires

Sommaire

2.0.1 Notations

Soient E un espace de Banach, $E^\star$ son dual topologique, $\|.\|$ la norme de E et H un espace de Hilbert.

On note par

$-$ $\sigma(E, E^\star)$ la topologie faible sur E.

$-$ $\bar{B}_E$ la boule fermée de E de centre 0 et de rayon 1.

$-$ $C_E([0,T])$ $T > 0$ l'espace de Banach des applications continues $u : [0,T] \longrightarrow E$.

$-$ $ck(E)$ l'ensemble des sous ensembles non vides convexes compacts de E.

$-$ $\pounds([0,T])$ la tribu de lebesgue sur $[0,T]$.

$-$ λ la mesure de lebesgue sur $\mathbb{R}$.

$-$ $\beta(I)(\beta(E))$ est la classe des sous ensembles non vides Borel-mesurables de I (respectivement de E).

$-$ $C_E([-r,0])$ est l'espace des fonctions continues de $[-r,0]$ à valeurs dans E, muni de la convergence uniforme.

$-$ $\tau_\lambda([0,T])$ est la σ-algèbre des ensembles mesurables de l'intervalle $[0,T]$ de $\mathbb{R}$.

$-$ $L^1_E(([0,T]), \|.\|_1)$ l'espace des applications definies sur $[0,T]$ à valeurs dans l'espace de Banach E.

$-$ $L^\infty_E([0,T], \|.\|_\infty)$ est l'espace de Banach des applications f essentiellelement bornées sur E.

$-$ $L^2_E([0,T], \|.\|_2)$ l'espace des applications de carré intégrable definies sur $[0,T]$ à valeurs dans l'espace de Banach E.

$-$ $diamA$ est le diamètre d'une partie non vide $A \subset E$.

$-$ $intA$ est l'intérieur de $A \subset E$.

$-$ $co(A)$ est l'enveloppe convexe de $A \subset E$.

$-\overline{co}(A)$ est l'enveloppe convexe fermée $A \subset E$.

Nous avons la caractérisation suivante

Théorème 2.0.1 *Soit A un sous ensemble non vide de E. Alors,*

$$co(A) = \{x \in E/\forall x^\star \in E^\star; \langle x^\star, x\rangle \leq \delta^\star(x^\star, A)\},$$

où $\delta^\star(x^\star, A)$ est la fonction d'appui de A, i.e.,

$$\delta^\star(x^\star, A) = \sup_{y\in A}\langle x^\star, y\rangle.$$

− On rappelle que pour un sous ensemble convexe fermé A de E, on a

$$d(x, A) = \sup_{x^\star\in \overline{B}_{E^\star}} (\langle x^\star, x\rangle + \delta^\star(x^\star, A)) \tag{2.1}$$

− Pour $t \geq 0$, $\mathbb{A}(x_0, t)$ l'ensemble des points de la forme $x(t)$, où x est une trajectoire sur $[0, t]$ vérifiant $x(0) = x_0$.

Dans la suite S sera toujours un sous ensemble fermé non vide de H.

Définition 2.0.2 *[21]*

La distance d'un point x par rapport à S est donnée par

$$d_S(x) = \inf\{\|x - s\| : s \in S\}.$$

Définition 2.0.3 *[21]*

On appellera projection de x sur S, l'ensemble des points de S les plus proches de x. Il sera noté

$$proj_S(x) = \{s \in S : \|x - s\| = d_S(x)\}.$$

Définition 2.0.4 *[18]*

La projection δ-métrique de x sur S est définit pour tout $x \in H$, pour tout $\delta > 0$ par

$$proj^\delta_S(x) = \{s \in S : \|x - s\|^2 \leq d^2_S(x) + \delta^2\}.$$

2.1 Cônes

Les définitions et les résultats suivants ont été pris des références [50, 31]

Cône normal proximal

Si $x \notin S$ et $s \in proj_S(x)$, alors le vecteur $x - s$ est une perpendiculaire à S au point s. L'ensemble des multiples positifs de tels vecteurs (i.e. scalaire positif ou nul) est noté $N_S^p(x)$ et est défini comme le cône normal proximal (ou cône P-normal) à S en x.

Si $x \in intS$ ou s'il n'y a pas de perpendiculaire en x, alors par convention on pose $N_S^p(x) = \{0\}$. De même, si $x \notin S$ on convient que $N_S^p(x) = \emptyset$.

Proposition 2.1.1 *Soit $\xi \in H$ et $x \in S$. Alors $\xi \in N_S^p(x)$ si et seulement si il existe $\sigma > 0$, tel que*

$$\sigma\|y - x\|^2 \geq \langle \xi, y - x\rangle \quad \forall y \in S.$$

Proposition 2.1.2 *Soit $x \in H \setminus S$, $\delta > 0$ et $s_\delta \in proj_S^\delta(x)$. Alors $\exists y_\delta \in H \setminus S$ et $\bar{s}_\delta \in S$ tel que*

$$y_\delta - \bar{s}_\delta \in N_S^P(\bar{s}_\delta),$$

$$\|(y_\delta - \bar{s}_\delta) - (x - s_\delta)\| \leq 0,$$

$$\|s_\delta - \bar{s}_\delta\| \leq \delta.$$

Définition 2.1.3 ***(Cône normal limite)*** *Le cône normal limite (òu le cône L-normal) à S en x est l'ensemble*

$$N_S^L(x) = \{\xi \in H : \xi_i \longrightarrow \xi,\ \xi_i \in N_S^p(x_i),\ x_i \longrightarrow x\}.$$

En particulier, on a $N_S^p(x) \subset N_S^L(x)$.

Définition 2.1.4 ***(Cône Bouligand (contigent))***

Le cône Bouligand à S en x est l'ensemble

$$T_S^B(x) = \{v : \liminf_{h \longrightarrow 0} \frac{d_S(x + hv)}{h} = 0\}.$$

Définition 2.1.5 *(**Cône Bouligand faible**) Le cône Bouligand faible à S en x est défini par l'ensemble suivant*

$$T_S^W(x) = \{v : \inf_{\{v_i\}} \liminf_{i \longrightarrow \infty h \longrightarrow 0} \frac{d_S(x + hv_i)}{h} = 0\}.$$

Définition 2.1.6 *(**Cône tangent de Clarck**) Le cône tangent de Clarck à S en x est défini par l'ensemble suivant*

$$T_S^C(x) = \{v : \limsup_{y \longrightarrow x h \longrightarrow 0} \frac{d_S(y + hv) - d_S(y)}{h} = 0\}.$$

Définition 2.1.7 *(**Cône normal de Clarck**) Le cône normal de Clarck (ou cône C-normal) à S en x est défini par*

$$N_S^C(x) = \overline{co}[N_S^L(x)].$$

Définition 2.1.8 *(**Cône tangent de Clarck**) Le cône tangent de Clarck à S en x est le cône polaire négatif de $N_S^C(x)$ c.à.d.*

$$T_S^C(x) = [N_S^C(x)]^\star = \{v \in H : \langle \xi, v \rangle \leq 0 \ \forall \xi \in N_S^p(x)\} = [N_S^L(x)]^\star.$$

Proposition 2.1.9 $\forall x \in S$

$$\overline{co} T_S^W(x) \subseteq [N_S^C(x)]^\star$$

$$co T_S^B(x) \subseteq [N_S^C(x)]^\star.$$

2.2 Quelques notions de mesurabilité

Les résultats suivants ont été pris des références [50, 31].

Définition 2.2.1 *Soit (X, Σ) un espace mesurable et Y un espace de Banach. Une fonction $f : X \longrightarrow Y$ est dite simple si f est Σ-mesurable et $f(X)$ est fini.*

Définition 2.2.2 ***(Fonction μ-mesurable)****. Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré fini et Y un espace de Banach.*
Une application $f : X \longrightarrow Y$ est dite μ-mesurable s'il existe une suite des fonctions simple (f_n) telle que $f_n \longrightarrow f$ μ-p.p.

Lemme 2.2.3 *Si Y est séparable, toute application mesurable est μ-mesurable.*

2.3 Notions sur les multifonctions et les sélections

Nous donnons dans cette section quelques définitions et résultats concernant les multi-application, aussi appelées correspondances, applications multivoques ou multi-application et leurs sélections. Pour plus de détails sur les multi-applications voir [14].

Définition 2.3.1 *Soient X, Y deux ensembles non vides, on appelle multi-application définie sur X à valeurs dans Y, toute application de X ayant sa valeur dans $P(Y)$ (ensemble des parties de Y). On note le domaine, le graphe et l'image de la multi-application $F : X \rightrightarrows Y$ par*

$$\mathcal{D}(F) := dom(F) = \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\}.$$

$$Gr(F) = \{(x, y) \in X \times Y : x \in \mathcal{D}(F),\ y \in F(x)\}.$$

$$Im(F) = \bigcup_{x \in \mathcal{D}(F)} F(x).$$

Définition 2.3.2 *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On appelle sélection de F toute application $f : X \longrightarrow Y$ vérifiant*

$$f(x) \in F(x), \quad \forall x \in X.$$

2.3.1 Mesurabilité des multi-applications

Définition 2.3.3 *Soit* (T, Σ) *un espace mesurable,* X *un espace métrique et* $F : T \rightrightarrows X$.

On dit que F *est* Σ*-mesurable où simplement mesurable si pour tout ouvert* V *de* X

$$F^{-1}(V) = \{t \in T : F(t) \cap V \neq \emptyset\} \in \Sigma.$$

Lemme 2.3.4 *Soient* (T, Σ) *un espace mesurable,* X *un espace de Banach séparable et* $F : T \rightrightarrows X$ *une multi-application à valeurs non vides convexes compactes, alors la* Σ*-mesurabilité de* F *est équivalente à la mesurabilité de la fonction* $\delta^{\star}(F(.), x^{'})$ *pour* $x^{'} \in X^{'}$.

Théorème 2.3.5 ***(Théorème d'existence des sélections mesurables)***
Soient (T, Σ) *un espace mesurable,* X *un espace métrique complet séparable et* $F : T \rightrightarrows X$ *un multi-application* Σ*-mesurable à valeurs fermées. Alors* F *admet au moins une sélection mesurable.*

Théorème 2.3.6 *Soient* (T, Σ) *un espace mesurable,* X *un espace de Banach séparable. Soient* $F : T \times X \rightrightarrows X$ *une multi-application* Σ*-mesurable,* $u : T \longrightarrow X$ *une application mesurable. Alors la multi-application* $F(., u(.))$ *est mesurable.*

2.3.2 Continuité des multi-applications

Définition 2.3.7 *Soit* X, Y *deux espaces topologiques, et soit* $F : X \longrightarrow Y$ *une multi-application.*

(1) *On dit que* F *est semicontinue supérieurement (s.c.s) au point* $x_0 \in X$ *si pour tout ouvert* U *de* Y *tel que* $F(x_0) \subset U$*, il existe un voisinage* V_{x_0} *de* x_0 *dans* X *tel que* $F(V_{x_0}) \subset U$.

Si cela est vrai pour tout $x_0 \in X$*, on dit que* F *est s.c.s sur* X.

(2) *Si* X *est un espace métrique et* Y *un espace vectoriel normé, on dit que* F *est*

scalairement semicontinue supérieurement si, pour tout $y^{'} \in Y^{'}$, la fonction à valeurs réelles $x \longmapsto \delta^{\star}(F(x), y^{'})$ est semicontinue supérieurement.

Proposition 2.3.8 *Soient X, Y deux espaces topologiques. Une multi-application $F : X \rightrightarrows Y$ à valeurs non vides est semicontinue supérieurement si et seulement si l'image inverse $F^{-1}(C) := \{x \in X : F(x) \cap C \neq \emptyset\}$ est fermé pour tout sous ensemble fermé C de Y.*
Si $F : X \rightrightarrows Y$ est à valeurs non vides fermées est s.c.s alors son graphe $Gr(F)$ est fermé dans $X \times Y$.

Proposition 2.3.9 *Soient X un espace de Banach et Y un espace de Banach complet. Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs non vides. Si le graphe de F est fermé alors F est s.c.s.*

Proposition 2.3.10 *[23]*
Soient X, Y deux espaces de Banach et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs non vides. Alors F est s.c.s si et seulement si $d(y, F(.))$ est s.c.i pour tout $y \in Y$.

Proposition 2.3.11 *Soit F une multi-application définie sur un espace métrique X à valeurs dans un espace vectoriel normé Y est s.c.s à valeurs compactes, alors la fonction $(x, z) \in X \times Y^{'} \longmapsto \delta^{\star}(F(x), z)$ est s.c.s.*

Définition 2.3.12 *[23]*
Soient X, Y deux espaces de Banach. Alors la multi-application $F : X \rightrightarrows Y$ à valeurs non vides est dite ε-s.c.s si pour tout $x_0 \in X$ et $\varepsilon > 0$ il existe $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ tel que

$$F(x) \subset F(x_0) + \varepsilon \bar{B}_Y \quad \textit{pour tout } x \in x_0 + \delta \bar{B}_X.$$

Proposition 2.3.13 *[23]*
Soient X, Y deux espaces de Banach et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs

non vides.

Si F est s.c.s alors F est ε-s.c.s. L'inverse est vrai si F est à valeurs compactes.

Le résultat suivant est une version multivoque du théorème de Scorza-Dragoni due à Castaing-Marques (voir [12, 6]).

Théorème 2.3.14 *Soit I un intervalle compact de $\mathbb{R}$, X un espace métrique séparable complet et Y un espace métrique convexe compact. Soit $F : I \times X \rightrightarrows Y$ une multi-application de Carathéodory à valeurs non vides fermées et convexes, i.e.,*

(i) pour tout $t \in I$, la multi-application $F(t, .)$ est de graphe fermé dans $X \times Y$ ($F(t, .)$ est s.c.s),

(ii) pour tout $x \in X$, la multi-application $F(., x)$ est mesurable (admet une sélection mesurable).

Alors, il existe une multi-application $F_0 : I \times X \rightrightarrows Y$ à valeurs convexes fermées(possiblement vides) dont le graphe appartient à $\mathcal{L}(I)\otimes\mathcal{B}(X)\otimes\mathcal{B}(Y)$ qui possède les propriétés suivantes.

1. *Il existe un ensemble négligeable $N \subset I$ tel que*

$$F_0(t, x) \subset F(t, x),$$

pour tout $t \notin N$ et tout $x \in X$.

2. *Si $u : I \longrightarrow X$ et $v : I \longrightarrow Y$ sont deux applications mesurables telles que $v(t) \in F(t, u(t))$ p.p. sur I, alors $v(t) \in F_0(t, u(t))$ p.p. sur I.*

3. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $I_\varepsilon \subset I$, tel que $\lambda(I \setminus I_\varepsilon) < \varepsilon$ et tel que la restriction F_0 sur $I_\varepsilon \times X$ soit de graphe fermé et vérifie*

$$\emptyset \neq F_0(t, x) \subset F(t, x),$$

pour tout $(t, x) \in I_\varepsilon \times X$.

Avant d'énoncer le théorème suivant rappelons deux notions classiques connues.

Définition 2.3.15 *Soient X un espace topologique et U une partie de X.*

1. *On appelle recouvrement localement fini de U tout recouvrement ouvert (V_λ) de U vérifiant pour tout $x \in U$, il existe un voisinage ouvert V de x tel que l'ensemble $\{\lambda \in \Lambda : V_\lambda \cap V \neq \emptyset\}$ soit fini.*

2. *Une famille de fonctions continues $(\psi)_{\lambda\in\Lambda}$ définies sur X à valeurs dans $[0,1]$ est une partition continue de l'unité subordonée au recouvrement $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ si pour tout $\lambda \in \Lambda$, supp$(\psi_\lambda) \subset V_\lambda$ et pour tout $x \in V$ on a $\sum_{\lambda\in\Lambda} \psi_\lambda(x) = 1$. On désigne ici par supp(ψ_λ) le support de la fonction ψ_λ.*

Le résultat suivant est une version multivoque du théorème classique de Dugundji (voir [25]).

Théorème 2.3.16 *Soit X, Y deux espaces de Banach. Soient $K \subset X, D \subset Y$ deux fermés non vides et $F : K \times D \rightrightarrows X$ une multi-application semicontinue supérieurement à valeurs convexes et faiblement compacte telle que*

$$\forall (t,x) \in (K \times D), F(t,x) \subset c(t)(1 + \|x\|\overline{B}_Y),$$

où $c(.)$ est une fonction positive définie sur K. Soit $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ un recouvrement ouvert localement fini de $(X \setminus K)$ tel que pour tout $\lambda \in \Lambda$

$$0 < diam U < d(U_\lambda, K).$$

Soit $(\psi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une partition continue de l'unité relativement au recouvrement $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. pour tout $\lambda \in \Lambda$

$$0 < diam U < d(U_\lambda, K).$$

Soit $(\psi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une partition continue de l'unité relativement au recouvrement $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, soit $t_\lambda \in K$ tel que

$$d(t_\lambda, U_\lambda) < 2d(U_\lambda, K).$$

Alors, la multi-application $\tilde{F}$ *définie sur* $X \times D$, *par*

$$\tilde{F}(t,x) = \begin{cases} F(t,x), & si\ t \in K, x \in D \\ \sum_{\lambda \in \Lambda} \psi_\lambda(t) F(t,x) & si\ t \in X \setminus K, x \in D. \end{cases} \tag{2.2}$$

est une extension semicontinue supérieurement de F *à* $X \times D$ *à valeurs faiblement compactes. De plus on a,* $\tilde{F}(X \times D) \subset co(F(K \times D))$ *et si* c *est constante, on a* $\tilde{F}(t,x) \subset c(1 + \|x\|)\overline{B}_Y$. *En particulier, si pour tout* (t,x), $F(t,x) \subset C$ *où* C *est un convexe de* Y, *alors* $\tilde{F}(t,x) \subset C$.

Théorème 2.3.17 ***(Thèorème d'Ascoli-Arzelà)****[28] soient* J *un espace métrique compact,* (Y,d) *un espace métrique complet, et* K *un sous ensemble de* $C(J,Y)$, *l'espace des applications continues définies sur* J *à valeurs dans* Y, *muni de la topologie de la convergence uniforme. Alors* K *est relativement compact si et seulement si* K *est équicontinu et* $K(x)$ *est relativement compact, avec*

$$K(x) = \{f(x)\ :\ f \in K\}.$$

Théorème 2.3.18 ***(Corollaire du théorème d'Ascoli-Arzelà)****[28] soient* J *un ensemble compact de* $\mathbb{R}$, E *un espace de Banach de dimension finie et soit* (f_n) *une suite de fonctions absolument continues définie sur* J *à valeurs dans* E *vérifiant les conditions suivantes ;*

1.$\forall t \in J$, $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ *est un sous ensemble relativement compact dans* E;

2. *il existe une fonction à valeurs réelles positiveés* $h \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$ *telle que*

$$\|\dot{f}_n(t)\| \leq h(t), \quad p.p. \quad sur \quad J;$$

alors il existe une sous suite de $(f_n)_n$ *qui converge vers une fonction absolument continue* $f : J \longrightarrow E$ *au sens suivant :*

$-(f_n)_n$ *converge uniformément vers* f *;*

$-$ $(\dot{f}_n)_n$ *converge uniformément vers* $\dot{f}$ *dans* $L^1_E(J)$.

2.3.3 Lipschizité et dissipativité des multi-applications

Définition 2.3.19 *[20] Soit $F : H \rightrightarrows H$ une multi-application.*

• *On dit que F est lipschitzienne s'il existe $K > 0$ tel que*

$$\forall x, y \in H, \quad F(y) \subseteq F(x) + K\|y - x\|\overline{B}_H. \tag{2.3}$$

• *On dit que F est localement lipschitzienne si pour tout $x \in H$ il existe un voisinage V de x qu'on note $V(x)$, et une constante $K(x) > 0$ tel que*

$$\forall y, z \in V(x) \quad F(z) \subseteq F(y) + K(x)\|z - y\|\overline{B}_H.$$

Définition 2.3.20 *[57]*

Soit $F : H \rightrightarrows H$ une multi-application. On dit que F est dissipative si

$$\langle u - v, x - y\rangle \leq 0, \quad \forall u \in F(x)\ \forall v \in F(y).$$

2.3.4 Hamiltoniens

Définition 2.3.21 *[18]*

Les hamiltoniens maximisé et minimisé sont définis respectivement comme suit

$$\begin{aligned} H_F \ : \ H \times H \ &\to \mathbb{R} \\ (x, \xi) \ &\mapsto \ H_F(x, \xi) = \sup_{v \in F(x)} \langle v, \xi\rangle, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} h_F \ : \ H \times H \ &\to \mathbb{R} \\ (x, \xi) \ &\mapsto \ h_F(x, \xi) = \inf_{v \in F(x)} \langle v, \xi\rangle. \end{aligned}$$

En terme d'hamiltoniens la définition d'une multi-application dissipative devient comme suit

Définition 2.3.22 *[57] Soit $F : H \rightrightarrows H$ une multi-application. On dit que F est dissipative ssi*

$$H_F(y, y - x) - h_F(x, y - x) \leq 0 \quad \forall x, y \in H.$$

Proposition 2.3.23 *[18]*

$$H_F(x,\xi) = H_{\overline{co}F}(x,\xi) \quad \forall x,\xi \in H.$$

$$h_F(x,\xi) = h_{\overline{co}F}(x,\xi) \quad \forall x,\xi \in H.$$

Proposition 2.3.24 *Soit $x : [a,b] \longrightarrow H$ une trajectoire. Alors pour tout $t \in [a,b]$ et tout h assez petit positive,*

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{h} \in \bar{co}(F(x([t,t+h]))) = \bar{co}(\bigcup_{h\in[h,h+\tau]} F(x(\tau))).$$

CHAPITRE 3

Les systèmes invariants

Sommaire

Au début de ce chapitre, on va donner des notions et des propriétes concernant l'invariance et l'invariance approchée.

Considérons l'inclusion différentielle suivante

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(t, x(t)) \ p.p. \quad t \in [0, \infty[\\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

où F est une multifonction de $[0, \infty[\times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

Les hypothéses de base

$$(CH) \begin{cases} \forall (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \ F(t,x) \ est \ \grave{a} \ valeurs \ non \ vide, convexe \ compacte, \\ F \ est \ semicontinue \ suprieurement, \\ \exists c > 0, \forall (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : v \in F(t,x) \Longrightarrow \|v\| \le c(1 + \|x\|). \end{cases}$$

Proposition 3.0.25 *Une trajectoire x de (3.1) est une fonction absolument continue x telle que sa derivée $\dot{x}$ verifie (3.1).*

Proposition 3.0.26 *Toute fontion absolument continue $x : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}^n$ est un arc sur $[0, \infty[$.*

Proposition 3.0.27 *Tout arc verifié (3.1) est une trajectoire.*

3.1 Solution d'Euler

Considérons le problème de Cauchy suivant

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(a) = x_0, \tag{3.2}$$

où f est une fonction arbitraire définie de $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Puisqu'en général l'équation différentielle précédente n'admet pas une solution classique, nous construisons des solutions approchées linéaires par morceaux correspondant aux partitions de l'intervalle du temps.

Soit $\pi = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ une partition de l'intervalle $[a, b]$ avec $t_0 = a$ et $t_n = b$. Notons que $\mu_\pi = \max_{1\leq i\leq n-1}(t_{i+1} - t_i)$ est le diamétre de la partition. Sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ nous considérons la solution linéaire de la pente $f(t_i, x_i)$ où x_i est obtenue par réccurence. Donc nous obtenons un arc polygonale x_π appelé polygon d'Euler décrit de la façon suivante

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t_i, x_i), \quad sur\ [t_i, t_{i+1}], \\ x(t_i) = x_i, \end{cases} \tag{3.3}$$

$\forall i \in \{0, 1, ..., n-1\}$.

Une solution d'Euler de (3.2) est une fonction absolument continue qui est la limite uniforme des arcs polygonaux d'Euler x_{π_i} correspondant à certaines suites π_i avec μ_{π_i} qui tend vers 0 quand i tend vers ∞. Nous disons qu'un arc x sur $[a, b]$ est un arc d'Euler de f si x est une solution d'Euler de (3.2).

Proposition 3.1.1 ***(Gronwall)*** *Soit x un arc sur $[a, b]$ vérifiant*

$$\|\dot{x}(t)\| \leq \gamma\|x(t)\| + c \quad p.p.\ ; t \in [a, b]$$

avec γ, c sont des constantes positives. Alors pour tout $t \in [a, b]$ on a

$$\|x(t) - x(a)\| \leq (\exp(c(t-a)) - 1)(\|x(a)\| + \frac{c}{\gamma}).$$

Proposition 3.1.2 ***(Gronwall forme intégrale)*** *Soient $u, v : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ deux fonctions continues telle que, pour quelque $C \geq 0$, on ait :*

$$u(t) \leq C + \int_{t_0}^{t_1} u(s)v(s)ds \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Alors

$$u(t) \leq C \exp(\int_{t_0}^{t_1} v(s)ds) \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Proposition 3.1.3 *(Gronwall forme différentielle) Soient ϕ, ψ deux fonctions continues. Si l'équation differentielle suivante est vérifiée*

$$\frac{d\phi}{dt}(t) \leq \phi(t)\psi(t),$$

alors on a l'inégalité

$$\phi(t) \leq \phi(0)\exp(\int_{t_0}^{t} \psi(s)ds)$$

pour tout $t \geq t_0$. En particulier, si $\phi(t_0) = 0$, alors $\forall t \geq t_0 \quad \phi(t) \leq 0$.

Théorème 3.1.4 *Soit $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ qui vérifie la condition de croissance lineaire c.à.d.*

$$\exists c > 0, \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : v \in f(t, x) \Longrightarrow \|v\| \leq c(1 + \|x\|).$$

Alors

(1) Il existe au moins une solution d'Euler du problème de Cauchy (3.2) sur $[a, b]$, et toute arc d'Euler est Lipschitzienne.

(2) Toute solution d'Euler satisfait

$$\|x(t) - x(a)\| \leq (t - a)e^{c(t-a)}(c(1 + \|x(a)\|)) \quad a \leq t \leq b.$$

Preuve.

Soit $\pi = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ une partition de l'intervalle $[a, b]$ et x_π un arc polygonale d'Euler. Les noeuds de x_π sont notés par $x_0, x_1, ..., x_n$.

Sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ on a

$$\|\dot{x}_\pi(t)\| = \|f(t_i, x_i)\| \leq c(1 + \|x_i\|)$$

donc pour tout $i = 0, 1, ..., n$

$$\begin{aligned}
\|x_{i+1} - x_0\| &= \|x_{i+1} - x_i + x_i - x_0\| \\
&\leq \|x_{i+1} - x_i\| + \|x_i - x_0\| \\
&= \| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t_i, x_i) d\tau \| + \|x_i - x_0\| \\
&\leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f(t_i, x_i)\| d\tau + \|x_i - x_0\| \\
&= (t_{i+1} - t_i)\|f(t_i, x_i)\| + \|x_i - x_0\| \\
&\leq (t_{i+1} - t_i)(c(1 + \|x_i\|)) + \|x_i - x_0\| \\
&\leq (t_{i+1} - t_i)(c(1 + \|x_i - x_0\| + \|x_0\|)) + \|x_i - x_0\| \\
&= \|x_i - x_0\|(1 + c(t_{i+1} - t_i)) + c(t_{i+1} - t_i)(\|x_0\| + 1).
\end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\|x_n - x_0\| \leq e^{\sum\limits_{i=1}^{n} c(t_{i+1} - t_i)} \sum_{i=1}^{n} c(t_{i+1} - t_i)(\|x_0\| + 1)$$

$$\|x_n - x_0\| \leq (b - a)e^{c(b-a)}(c\|x_0\| + c).$$

et donc

$$\|x_i - x_0\| \leq (b - a)e^{c(b-a)}(c\|x_0\| + c), \quad \forall i = 1, 2, ..., n.$$

c.à.d.

$$x_i \in \overline{B}(x_0, M) \quad \forall i = 1, 2, ..., n,$$

avec

$$M = (b - a)e^{c(b-a)}(c\|x_0\| + c).$$

Par la convexité de $\overline{B}(x_0, M)$ on a

$$x_\pi(t) \in \overline{B}(x_0, M) \quad a \leq t \leq b.$$

De plus la dérivée est, le long de toute partie lineaire de x_π déterminée par les valeurs de f au niveaux des noeuds. On obtient la borne uniforme sur $[a, b]$

$$\begin{aligned} \|\dot{x}_\pi\|_\infty &= \sup_{a \le t \le b} \|\dot{x}_\pi(t)\| \\ &= \sup_{a \le t \le b} \|f(t, x_\pi(t))\| \\ &\le \sup_{a \le t \le b} (c(\|x_\pi(t)\| + 1)) \\ &= c \sup_{a \le t \le b} \|x_\pi(t)\| + c. \end{aligned}$$

D'après la proposition 3.1.1 on a

$$\|x_\pi(t)\| - \|x(a)\| \le \|x_\pi(t) - x(a)\| \le (e^{c(t-a)} - 1)(\|x(a)\| + 1).$$

Donc

$$\|x_\pi(t)\| \le e^{c(t-a)}(\|x(a)\| + 1) - 1.$$

Alors

$$\begin{aligned} \sup_{a \le t \le b} \|x_\pi(t)\| &\le \sup_{a \le t \le b} e^{c(t-a)}(\|x(a)\| + 1) - 1 \\ &\le (b-a)e^{c(b-a)}(\|x(a)\| + 1) \\ &\le c(b-a)e^{c(b-a)}(\|x(a)\| + 1) \\ &= M. \end{aligned}$$

$$\|\dot{x}_\pi\|_\infty \le c \sup_{a \le t \le b} \|x_\pi(t)\| + c \le cM + c = K.$$

On conclut que $\dot{x}_\pi$ est uniformément borné sur $[a, b]$ donc borné sur $[a, b]$ et alors x_π Lipschitz sur $[a, b]$ de rapport K.

Maintenant, soit x_{π_j} une suite de partition telles que π_j tend vers 0 c.à.d. quand j tend vers ∞, μ_{π_j}tend vers 0, alors les arcs polygonaux d'Euler sur $[a, b]$ qui correspondent à cette partition vérifient

$$x_{\pi_j(a)} = x_0 \qquad \|x_{\pi_j} - x_0\|_\infty \le M, \qquad \|\dot{x}_{\pi_j}\|_\infty \le K.$$

En effet

$$\|x_{\pi_j} - x_0\| = \sup_{a \leq t \leq b} \|x_{\pi_j}(t) - x_{\pi_j}(a)\|.$$

On a

$$x_{\pi_j}(t) \in \overline{B}(x_0, M), \qquad x_{\pi_j}(a) = x_0,$$

c.à.d.

$$\|x_{\pi_j}(t) - x_{\pi_j}(a)\| \leq M, \qquad \forall t \in [a, b],$$

donc

$$\sup_{a \leq t \leq b} \|x_{\pi_j}(t) - x_{\pi_j}(a)\| \leq M.$$

Alors

$$\|x_{\pi_j} - x_0\|_\infty \leq M.$$

$$\|\dot{x}_{\pi_j}\|_\infty = \sup_{a \leq t \leq b} \|\dot{x}_{\pi_j}(t)\| = \sup_{a \leq t \leq b} \|f(t, x_{\pi_j}(t))\| = \sup_{a \leq t \leq b} (c\|x_{\pi_j}(t)\| + c) \leq cM + c = K.$$

On conclue que $\dot{x}_{\pi_j}$ est uniformément borné sur $[a, b]$, donc Lipschitzienne sur $[a, b]$ et alors x_{π_j} uniformément borné sur $[a, b]$ d'où la Lipschitzité de $\{x_{\pi_j}\}$.

Il s'ensuit que $\{x_{\pi_j}\}$ est équicontinue, uniformément borné, alors par le Théorème d'Arzelà Ascoli $\{x_{\pi_j}\}$ converge uniformément vers la fonction continue x.

La fonction x hérite la lipschitzité de rang K sur $[a, b]$ et par conséquent est absolument continue (c.a.d. x est un arc). Ainsi par définition, x est une solution d'Euler du problème à valeurs initiales (3.2) sur $[a, b]$ et l'assertion (1) du théorème est prouvée.

Pour prouver l'inégalité de l'assertion (2), on a tout arc d'Euler x vérifie la condition de croissance linéaire et donc par la proposition 3.1.1 on trouve

$$\|x(t) - x(a)\| \leq (e^{c(t-a)} - 1)\|x(a)\| + \int_a^t ce^{c(t-s)} ds,$$

$$\|x(t) - x(a)\| \leq (e^{c(t-a)} - 1)\|x(a)\| + (e^{c(t-a)} - 1),$$

$$= (e^{c(t-a)} - 1)(\|x(a)\| + 1)$$

$$\|x(t) - x(a)\| \le (e^{c(t-a)} - 1)(\|x(a)\| + 1),$$

$$\le c(t-a)e^{c(t-a)}(\|x(a)\| + 1), \qquad a \le t \le b.$$

D'oú le résultat désiré. □

3.2 Compacité des trajectoires approchées

Maintenant nous considérons que les hypothèses (CH) sont vérifiées.
Soit f une sélection de F. Alors f évidemment vérifie la condition de croissance linéaire et par le Théorème 3.1.4 la solution d'Euler du problème (3.2) existe.

Théorème 3.2.1 *Soit $\{x_i\}$ une suite des arcs sur $[a, b]$ tel que l'ensemble $\{x_i(a)\}$ soit borné et*

$$\dot{x}_i(t) \in F(\tau_i(t), x_i(t) + y_i(t)) + r_i(t)B), \text{ p.p.},$$

où $\{y_i\}, \{r_i\}, \{\tau_i\}$ des suites de fonctions mesurable sur $[a, b]$ avec y_i converge vers 0 dans L^2, $r_i \ge 0$ converge vers 0 dans L^2 et τ_i converge p.p. vers t. Alors il existe une sous suite de $\{x_i\}$ qui converge uniformément vers un arc x qui est trajectoire de (3.1) et sa dérivée converge faiblement vers $\dot{x}$.

Corollaire 3.2.2 *Soit f une sélection de F et x une solution d'Euler sur $[a, b]$ de $\dot{x} = f(t, x), \quad x(a) = x_0$. Alors x est une trajectoire de (3.1) sur $[a, b]$.*

3.3 Invariance

3.3.1 Invariance faible

La notion de la théorie classique des systèmes dynamiques c'est l'invariance. Quand le modéle de base est une équation différentielle ordinaire autonome $\dot{x}(t) = f(x(t))$ avec f est localement Lipschitzienne et S est un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$. Alors l'invariance faible du couple (S, f) est pour tout $x_0 \in S$ l'unique trajectoire x définie sur $[0, \infty[$ vérifie $x(t) \in S, \quad t \geq 0$, avec $x_0 = x(0)$. Dans cette section on va donner une généralisation de ce concept à des situations dans lesquelles l'équation différentielle est remplacée par une inclusion différentielle.

Supposons que nous étudions l'équation différentielle ordinaire suivante

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{3.4}$$

La question posée : Est-que la trajectoire x appartient au sous ensemble fermé S de $\mathbb{R}^n$. La façon naturelle de vérifier si c'est le cas est de choisir un point $s \in proj_S(x(t))$ (t donnéé) et de vérifier le signe de la quantité $\langle f(t, x(t)), x - s \rangle$ si elle est négative $\dot{x}(t)$ devient le point le plus proche à s donc certainement proche à S. Si cela prévaut à chaque $(t, x(t))$, alors $x(t) \in S$.

La proposition suivante confirme que l'observation précédente est dans le cadre géneral des arcs d'Euler.

Proposition 3.3.1 *Soit $f : [0, \infty[\times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction qui vérifie la condition de croissance linéaire c.à.d.*

$$\exists c > 0, \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : v \in f(t, x) \Longrightarrow \|v\| \leq c(1 + \|x\|),$$

et x est un arc d'Euler de f sur $[a, b]$. Soit Ω un ouvert qui contient $x(t)$ pour tout $t \in [a, b]$ et supposons que $\forall (t, z) \in [a, b] \times \Omega, \exists s \in proj_S(z) : \langle f(t, z), z - s \rangle \leq 0$. Alors

$$d_S(x(t)) \leq d_S(x(a)), \qquad t \in [a, b].$$

Preuve.

Soit x_π un arc polygonal de la suite x_{π_j} qui converge uniformément vers x. On note les noeuds de t par x_i $(i = 0, 1, 2, ..., n)$ et $x_0 = x(a)$. Supposons que $x_\pi(t) \in \Omega$ pour tout $t \in [a,b]$ et il existe i tel que $s_i \in proj_S(x_i) : \langle f(t_i,x_i), x_i - s_i\rangle \leq 0$.

$$\begin{array}{rcl} d_S^2(x_1) & \leq & \|x_1 - s_0\|^2 \qquad (s_0 \in S) \\ & = & \|x_1 - x_0 + x_0 - s_0\|^2 \\ & \leq & \|x_1 - x_0\|^2 + \|x_0 - s_0\|^2 + 2\langle x_1 - x_0, x_0 - s_0\rangle \\ & \leq & K^2(t_1 - t_0)^2 + d_S^2(x_0) + 2\displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \langle \dot{x}_\pi(t), x_0 - s_0\rangle dt \\ & \leq & K^2(t_1 - t_0)^2 + d_S^2(x_0) + 2\displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \langle f(t_0,x_0), x_0 - s_0\rangle dt \\ & = & K^2(t_1 - t_0)^2 + d_S^2(x_0). \end{array}$$

Par itération on obtient

$$\begin{array}{rcl} d_S^2(x_i) & \leq & K^2(t_i - t_{i-1})^2 + d_S^2(x_{i-1}) \\ & \leq & K^2(t_i - t_{i-1})^2 + K^2(t_{i-1} - t_{i-2})^2 + ... + K^2(t_1 - t_0)^2 + d_S^2(x_0) \\ & \leq & K^2\displaystyle\sum_{l=1}^{i}(t_l - t_{l-1})^2 + d_S^2(x_0) \\ & \leq & K^2\displaystyle\sum_{l=1}^{i}(t_l - t_{l-1})(t_l - t_{l-1}) + d_S^2(x_0) \\ & \leq & K^2\displaystyle\sum_{l=1}^{i}(t_l - t_{l-1}) \max_{1\leq l\leq i}(t_l - t_{l-1}) + d_S^2(x_0) \\ & \leq & K^2\mu_\pi\displaystyle\sum_{l=1}^{i}(t_l - t_{l-1}) + d_S^2(x_0) \\ & \leq & K^2\mu_\pi(b-a) + d_S^2(x_0). \end{array}$$

Considérons maintenat la suite x_{π_j} des arcs polygonaux qui converge uniformément vers x donc

$$d_S^2(x_j) \leq K^2\mu_{\pi_j}(b-a) + d_S^2(x_0),$$

comme μ_{π_j} tend vers 0 quand j tend vers ∞.

Nous concluons que $d_S^2(x) \leq d_S^2(x_0)$ et donc $d_S(x(t)) \leq d_S(x(a)), \qquad t \in [a,b]$.

Proposition 3.3.2 *Soit $f : [0,\infty[\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction qui vérifie la condition* *de croissance lineaire c.à.d.*

$$\exists c > 0, \forall (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, v \in f(t,x) \Longrightarrow \|v\| \leq c(1 + \|x\|),$$

et x *un arc d'Euler de* f *sur* $[a,b]$*. Soit* Ω *un ouvert qui contient* $x(t)$ *pour tout* $t \in [a,b]$ *et supposons que*

$$\forall (t,z) \in [a,b] \times \Omega,\ \exists s \in proj_S(z) :\ \langle f(t,z), z - s \rangle \leq \theta(t,z)\ d_S(z),$$

avec θ *une fonction continue. Alors*

$$\frac{d}{dt} d_S(x(t)) \leq \theta(t, x(t)), \quad p.p.$$

sur tout intervalle sur lequel $d_S(x(t)) > 0$*, ou sur un intervalle dans lequel* $\theta(t, x(t)) \geq 0$.

Dans ce qui suit on va donner les notions de l'invariance des systémes (S, F) associés à l'inclusion différentielle autonome suivante

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(x(t)) \ p.p.\ sur\ [0, \infty[. \\ x_0 = x(0). \end{cases} \tag{3.5}$$

Définition 3.3.3 *Le système* (S, F) *est dit faiblement invariant si pour tout* $x_0 \in S$*, il existe une trajectoire* x *de (3.5) sur* $[0, \infty[$ *tel que* $x(0) = x_0$*, et* $x(t) \in S \quad \forall t \geq 0$.

Le thèoréme suivant est une condition suffisante de l'invariance faible en terme d'Hamiltonien inférieur.

Théorème 3.3.4 *Supposons que* F *vérifie les hypothèses* (CH) *et*

$$h_F(x, \xi) \leq 0 \quad \forall \xi \in N_S^p(x), \quad \forall x \in S.$$

Alors (S, F) *est faiblement invariant.*

Preuve.

On définit la fonction f_p par : $\forall x \in \mathbb{R}$, on choisit $s = s(x) \in proj_S(x)$ et $v \in F(s)$ minimise la fonction $v \longmapsto \langle v, x - s\rangle$ sur $F(s)$ donc $f_p(x) = v$.

Si $s_0 \in \overline{B}(0,1) \in S$. Alors

$$\begin{aligned}
\|f_p(x)\| = \|v\| \leq c(1+\|s\|) \quad & (car\ F\ et\ \text{à}\ croissance\ lineaire) \\
\leq \; & c\|s-x\| + c\|x\| + c \\
= \; & cd_S(x) + c\|x\| + c \quad (car s \in proj_S(x)) \\
\leq \; & c\|x - s_0\| + c\|x\| + c \\
\leq \; & 2c\|x\| + c\|s_0\| + c \\
\leq \; & 2c\|x\| + 2c \\
= \; & c^{'}(1+\|x\|), \quad c^{'} = 2c \in \mathbb{R}_*^+.
\end{aligned}$$

Donc f_p vérifie la condition de croissance linéaire.

Maintenant soit $[a,b] = [0,1]$. On applique la proposition (précédente) pour tout $s_0 \in S$, on trouve que les solutions d'Euler de $\dot{x} = f_p(x),\ x(0) = x_0$ sur $[0,1]$ sont nécessairement dans S. On peut prolonger x sur $[0,\infty[$ par supposé le deuxième intervalle $[1,2]$ ect.

La preuve sera complétée si on peut démonter que x est une trajectoire de (3.5).

On définit la multifonction F_s par

$$F_s(x) = co\{F(s), s \in proj_S(x)\}.$$

F_s vérifie les hypothèses (CH) et $F_s(x) = F(s)$ si $x \in S$.

Remarquons que f_p est une selection de F_s alors par le corollaire 3.2.2 l'arc x est la trajectoire de (3.5) c.à.d. $\dot{x}(t) \in F_s(x(t)), \quad p.p.$ sur $[0,1]$. Mais comme $x(t) \in S$ sur $[0,1]$ et $F_s = F$ sur S il s'ensuit que x est une trajectoire de (3.5). $\square$

Corollaire 3.3.5 *Il existe une fonction f_p qui vérifie la condition de croissance linéaire et pour tout arc d'Euler x du problème*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_p(x(t)); \\ x_0 = x(0) \end{cases}$$

on a alors

$$d_S(x(t)) \leq d_S(x(0)), \quad t \geq 0.$$

En particulier (S, f_p) est invariant.

3.3.2 Les conditions tangentielles de l'invariance faible

L'invariance faible peut être caractérise par des conditions tangentielles comme suit

Théorème 3.3.6 *Supposons que F vérifie les hypothèses (CH). Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

(a) $\quad F(x) \cap T_S^B(x) \neq \emptyset \quad \forall x \in S.$

(b) $\quad F(x) \cap coT_S^B(x) \neq \emptyset \quad \forall x \in S.$

(c) $\quad h_F(x, \xi) \leq 0 \quad \forall \xi \in N_p^S(x) \quad \forall x \in S.$

(d) $\quad (S, F)$ *est faiblement invariant.*

(e) $\quad \forall x \in S, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta \in]0, \varepsilon[$ *tel que* $\mathbb{A}(x; \delta) \cap S \neq \emptyset.$

Preuve.

$(a) \Longrightarrow (b)$.

on a

$$\begin{aligned}
F(x) \cap T_S^B(x) \neq \emptyset, \quad \forall x \in S &\iff \exists z \in F(x) \cap T_S^B(x), \quad \forall x \in S \\
&\iff \exists z \in F(x) \wedge z \in T_S^B(x), \quad \forall x \in S \\
&\implies \exists z \in F(x) \wedge z \in coT_S^B(x), \quad \forall x \in S \quad (car\ T_S^B(x) \subset coT_S^B(x)) \\
&\iff F(x) \cap coT_S^B(x) \neq \emptyset, \quad \forall x \in S.
\end{aligned}$$

$(b) \Longrightarrow (c)$.

On a

$$\begin{aligned}
F(x) \cap coT_S^B(x) \neq \emptyset, \quad \forall x \in S &\iff \exists z \in F(x) \cap coT_S^B(x), \quad \forall x \in S \\
&\implies \exists z \in F(x) \wedge z \in coT_S^B(x), \quad \forall x \in S \\
&\implies \exists z \in F(x) \wedge z \in [N_S^p(x)]^\star, \quad \forall x \in S\ (car\ coT_S^B(x) \in [N_S^p(x)]^\star) \\
&\implies \exists z \in F(x) \wedge \langle z, \xi \rangle \leq 0, \quad \forall \xi \in N_S^p(x) \quad \forall x \in S \\
&\implies \inf_{z \in F(x)} \langle z, \xi \rangle \leq 0, \quad \forall \xi \in N_S^p(x) \quad \forall x \in S \\
&\iff h_F(x, \xi) \leq 0, \quad \forall \xi \in N_S^p(x) \quad \forall x \in S.
\end{aligned}$$

$(c) \Longrightarrow (d)$.

Déja démontré par le théorème 3.3.4.

$(d) \Longrightarrow (e)$.

On a (S, F) est faiblement invariant donc pour tout $x_0 \in S$ il existe une trajectoire x de (3.5) tel que $x(0) = x_0$ et $x(t) \in S, \quad \forall t \geq 0$, il s'ensuit que pour tout $x_0 \in S$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta \in]0, \varepsilon[$ et x trajectoire de (3.5) sur $[0, \delta]$ tel que $x(0) = x_0$ et $x(t) \in S$. D'où $\forall x \in S, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta \in (0, \varepsilon)$ tel que $\mathbb{A}(x; \delta) \cap S \neq \emptyset$.

$(e) \Longrightarrow (a)$.

Supposons que (e) est vérifiée c.à.d. pour une suite $\delta_i \longrightarrow 0$, il existe des trajectoires x_i sur $[0, \delta_i]$ avec $x_i(0) = x_0$, et $x_i(\delta_i) \in S$. Car les trajectoires ont la même constante de Lipschitzité i.e. $\exists K > 0 : |\frac{x_i(\delta_i) - x_0}{\delta_i}| < K$ pour tout i grand, alors on peut extraire une sous suite $(\frac{x_i(\delta_i)-x_0}{\delta_i})$ qui converge vers v, par définition du cône Bouligant $v \in T_S^B(x)$.

On a

$$x_i(\delta_i) - x_0 = \int_0^{\delta_i} \dot{x}_i(t)dt, \tag{3.6}$$

avec $\dot{x}_i(t) \in F(x_i(t)) \quad p.p. \quad 0 \leq t \leq \delta_i$.

Pour $\Delta > 0$, pour tout i suffisament grand l'ensemble $\{x_i(t), \quad 0 \leq t \leq \delta_i\} \in x_0 + \Delta B$. Pour tout $\varepsilon > 0$ on prend Δ assez petit ça peut assurer que $x \in x_0 + \Delta B$, donc

$$F(x) \in F(x_0 + \Delta B) \subset F(x_0) + \varepsilon B,$$

alors par (3.6)

$$\frac{x_i(\delta_i) - x_0}{\delta_i} \in F(x_0 + \Delta B) \Longrightarrow v \in F(x_0) + \varepsilon \overline{B}.$$

comme ε est arbitraire on obtient $v \in F(x_0)$. $\square$

3.3.3 l'invariance forte et la condition de Lipschitzité

Nous confirmons maintenant que si F est localement Lipschitzienne l'invariance faible du système (S, F) admet une (feedback) selection sous lequel tous les arcs d'Euler sont dans S.

Théorème 3.3.7 *Soit F une multi-application localement Lipschitz, (S, F) faiblement invariant. Alors il existe une (feedback) selection g_p de F sous lequel S sera invariant c.à.d. tout arc d'Euler x sur $[a, b]$ du problème $\dot{x} = g_p(x), x_0 = x(a)$ avec $x(a) \in S$ vérifie $x(t) \in S, \quad \forall t \in [a, b]$.*

Remarque 3.3.8 *Le terme de feedback est utilisé pour toute fonction désignée ou construite dans le but de genérer des solutions d'Euler.*

La conséquence suivante confirme que pour une multi-application F Lipschitzienne toute trajectoire peut être générée par une (feedback) selection.

Corollaire 3.3.9 *Supposons que F vérifie les hypothèses (CH). Si F est localement Lipschitzienne, un arc $\overline{x}$ sur $[a,b]$ est une trajectoire de (3.5) si et seulement si il existe une feedback selection f de F (n'est pas nécéssairement autonome) telle que $\overline{x}$ est une solution d'Euler sur $[a,b]$ pour le problème à valeurs initiales $\dot{x} = f(t,x), x(a) = \overline{x}(a)$, c'est à dire si $\overline{x}$ est une trajectoire de (3.5) sur $[a,b]$ alors il existe une (feedback)selection de F pour lesquel $\overline{x}$ est l'unique solution d'Euler du problème précédent.*

L'invariance forte

Définition 3.3.10 *Le système (S,F) est dit fortement invariant si toute trajectoire x de (3.5) sur $[0,\infty[$ avec $x(0) \in S$ vérifie $x(t) \in S, \quad \forall t \geq 0.$*

3.3.4 Les condition tangentielles de l'invariance forte

Nous caractérisons l'invariance forte en terme d'Hamiltonien supèrieur et en terme des condition tangentielles sous l'hypothèse que F soit localement Lipschitzienne.

Théorème 3.3.11 *Supposons que F est localement Lipschitzienne et vérifie les hypothèses (CH). Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

(a) $\quad F(x) \subseteq T_S^C(x), \quad \forall x \in S.$

(b) $\quad F(x) \subseteq T_S^B(x), \quad \forall x \in S.$

(c) $\quad F(x) \subseteq coT_S^B(x), \quad \forall x \in S.$

(d) $\quad H_F(x,\xi) \leq 0, \quad \forall \xi \in N_S^p(x), \quad \forall x \in S.$

(e) $\quad (S,F)$ *est fortement invariant.*

(f) $\quad \forall x \in S, \exists \varepsilon > 0,$ *tel que* $\mathbb{A}(x;\delta) \subseteq S, \quad \forall t \in [0,\varepsilon].$

Preuve.

$(a) \Longrightarrow (b)$ car $T_S^C(x) \subset T_S^B(x)$.

$(b) \Longrightarrow (c)$ car $T_S^B(x) \subset coT_S^B(x)$.

$(c) \Longrightarrow (d)$

On a $F(x) \subseteq T_S^B(x), \quad \forall x \in S$. Donc

$$\forall z \in F(x)\ , z \in coT_S^B(x) \quad (car\ T_S^B(x) \subset coT_S^B(x)).$$

Il s'ensuit que

$$\forall z \in F(x), \langle z, \xi \rangle \leq 0, \quad \forall \xi \in N_S^p(x), \quad \forall x \in S (car\ coT_S^B(x) \subseteq \overline{co}T_S^B(x) \subseteq (N_S^p(x))^\star$$

Alors

$$\sup_{z \in F(x)} \langle z, \xi \rangle \leq 0 \quad \forall \xi \in N_S^p(x) \quad \forall x \in S.$$

$(d) \Longrightarrow (e)$

Soit $\overline{x}$ une trajectoire de (3.5) sur $[a, b]$ avec $\overline{x}(a) \in S$. Par le corollaire 3.3.9 il existe une feedback selection f sous lesquel $\overline{x}$ est une solution d'Euler du problème $\dot{x} = f(t, x), x(a) = \overline{x}(a) = x_0$.

Soit $M > 0$, tel que toute les solutions d'Euler du problème précédent vérifient $\|x(t) - x_0\| < M, \quad a < t < b$.

Si $x \in x_0 + MB$ et $s \in proj_S(x)$ alors

$$\begin{aligned} \|s - x_0\| &= \|s - x_0 + x - x\| \\ &\leq \|s - x\| + \|x - x_0\| \\ &= d_S(x) + \|x - x_0\| \\ &\leq 2\|x - x_0\| \\ &\leq 2M, \end{aligned}$$

donc $s \in B(x_0, 2M)$.

Maintenant soit K la constante de Lipschitzité de F sur $x_0 + 2MB$ et considérons $x \in x_0 + MB$ et $s \in proj_S(x)$ alors $x - s \in N_S^p(x)$ (par définition du cône proximal.)

Comme F est localement Lipschitzienne donc $\exists K > 0, F(x) \subseteq F(s) + K\|x - s\|B$

et puisque $f(t,x) \in F(x)$ donc $\exists v \in F(s) : f(t,x) = v + K\|x-s\|z \;, z \in B$.

Par la condition (d) on a $\sup\limits_{v\in F(x)} \langle v, \xi\rangle \leq 0 \quad \forall \xi \in N_S^p(x) \quad \forall x \in S$, donc pour tout $v \in F(s) : \langle v, x-s\rangle \leq 0$. Donc on conclut que

$$\langle f(t,x) - K\|x-s\|z, x-s\rangle = \langle f(t,x), x-s\rangle + K\|x-s\|\langle z, x-s\rangle \leq 0,$$

d'où

$$\begin{aligned}\langle f(t,x), x-s\rangle &\leq K\|x-s\|\langle -z, x-s\rangle \\ &\leq K\|x-s\|^2\|z\| \\ &\leq K\|x-s\|^2 \\ &= Kd_S^2(x).\end{aligned}$$

Par la proposition 3.3.2 on obtient

$$\frac{d}{dt}d_S(x(t)) \leq K d_S(\overline{x}(t)) \quad a \leq t \leq b.$$

En utilisant la proposition 3.1.3 on trouve que

$$d_S(\overline{x}(t)) \leq e^{K(t-a)} d_S(\overline{x}(a)), \quad \forall t \in [a,b].$$

Donc

$$d_S(\overline{x}(t)) = 0, \quad \forall t \in [a,b], \quad (car\ \overline{x}(a) = x(a) \in S),$$

c.a.d

$$\overline{x}(t) \in S \quad \forall t \in [a,b].$$

$(e) \Longrightarrow (f)$

On a (S,F) est fortement invariant donc toute trajectoire x de (3.5) sur $[0,\infty[$ avec $x(0) \in S$ vérifie $x(t) \in S, \quad \forall t \geq 0$, il s'ensuit que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta \in]0,\varepsilon[$, toute trajectoire x sur $[0,\delta]$ tel que $x(0) = x_0$ et $x(t) \in S, \quad \forall t \geq 0$. D'où, $\forall x \in S, \exists \varepsilon > 0$, tel que $\mathbb{A}(x;\delta) \subseteq S \quad \forall t \in [0,\varepsilon]$.

Pour compléter la preuve du théorème il suffit de prouver que $(d) \Longrightarrow (a)$.

Soit $\tilde{v} \in F(\tilde{x})$ on doit vérifier que $\tilde{v} \in (N_S^L(\tilde{x}))^\star = T_S^C(\tilde{x})$.

Soit $\xi \in N_S^L(\tilde{x})$ par définition $\xi = \lim\limits_{i \longrightarrow \infty} \xi_i, ou\ \xi_i \in N_S^p(x_i) \quad x_i \longrightarrow \tilde{x}, \quad x_i \in S$. On a $H_F(x,\xi) \leq 0, \quad \forall \xi \in N_S^P(x) \quad \forall x \in S$, donc $\forall v_i \in F(x_i) : \quad \langle v_i, \xi_i \rangle \leq 0$

$$\langle v_i, \xi_i \rangle = \langle v_i - \tilde{v}, \xi_i \rangle + \langle \tilde{v}, \xi_i \rangle \leq 0$$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{v}, \xi_i \rangle &\leq \langle \tilde{v} - v_i, \xi_i \rangle \\ &\leq \|\tilde{v} - v_i\| \|\xi_i\| \\ &\leq K\|x_i - \tilde{x}\| \|\xi_i\|. \end{aligned}$$

Prenons la limite quand $i \longrightarrow \infty$ on trouvera que

$$\lim_{i \longrightarrow \infty} \langle \tilde{v}, \xi_i \rangle \leq \lim_{i \longrightarrow \infty} K\|x_i - \tilde{x}\| \|\xi_i\| \leq 0$$

d'oú le résultat désiré. □

3.4 L'invariance approchée

L'invariance approchée est une génralisation du concept classique de l'invariance et il est basé sur la notion des ε-trajectoires d'une inclusion différentielle.

Dans toute la suite, on considère l'inclusion différentielle (3.5) avec $F : H \rightrightarrows H$ à valeurs non vide non convexe, non compacte et qui vérifie les hypothéses suivantes

$$(\mathcal{C}) \qquad \begin{cases} F \text{ est } \varepsilon - \text{semicontinue supérieurement}, \\ \\ \exists c > 0, \quad \forall x \in H, \quad \forall v \in F(x) : \quad \|v\| \leq c(1 + \|x\|). \end{cases}$$

Définition 3.4.1 *Une fonction absolument continue $x : [a,b] \longrightarrow H$ est dite ε-trajectoire de (3.5) si*

$$\dot{x}(t) \in F(x(t) + \varepsilon B) \ p.p. \ sur \ [a,b].$$

Proposition 3.4.2 *Sous les hypothèses* $(\mathcal{C})$ *toute* ε*-trajectoire est Lipschitzienne de rang* M.

Preuve.

Soit $\varepsilon \in [0,1[$ et x est ε-trajectoire de (3.5) avec $x(0) = x_0$. Alors par la condition de croissance linéaire on a

$$\|\dot{x}(t)\| \leq c(1 + \|x(t)\| + \varepsilon)$$

$$\leq c(2 + \|x(t)\| \quad (car\ \varepsilon < 1),$$

et par la proposition 3.1.1 on a

$$\|x(t)\| < \|x_0\|e^{ct} + (2(e^{ct} - 1))$$

$$< e^{ct}(\|x_0\| + 2) \quad \forall t \geq 0.$$

En particulier, pour T fixé positif et

$$K := e^{cT}(\|x_0\| + 2), \tag{3.7}$$

on a

$$\|x(t)\| < K \quad \forall t \in [0, T]. \tag{3.8}$$

Soit

$$M = c(2 + K). \tag{3.9}$$

D'après la condition de croissance linéaire on a

$$F(x) \subseteq c(1 + \|x\|)B$$

$$\subset c(1 + K)B$$

$$\subseteq c(2 + K)B$$

$$= MB$$

$$F(x) \subset MB, \quad \forall x \in (K+1)B,$$

donc $\|\dot{x}(t)\| < M$ *p.p.* $\forall t \in [0,T]$, c.à.d. x est Lipschitzienne de rang M sur $[0,T]$.

La proposition qui suit décrit la construction des ε-trajectoires de (3.5) en utilisant les solutions polygonaux d'Euler.

Proposition 3.4.3 *Supposons que $\mu(\pi) < \frac{\varepsilon}{2M}$ et que la solution polygonale d'Euler x de $\dot{x}(t) = f(x(t)),\ x(0) = x_0$ qui correspond à la partition π vérifie*

$$f(x(t_i)) \in F(x_i + \frac{\varepsilon}{2}B) \quad \forall t_i \in \pi.$$

Alors x est une ε-trajectoire de (3.5).

Preuve.

On définit

$$\hat{t} = \sup\{t' \in [0,T] : \|x(t)\| < K \quad \forall t \in [0,t']\}.$$

Notons que $\hat{t} > 0$ et x Lipschitzienne de rang M sur $[0,\hat{t}]$. Alors pour tout $t_i \in \pi$: $t_i < \hat{t}$ et tout $t \in [t_i, \min\{t_{i+1}, \hat{t}\}]$

$$\|x(t) - x(t_i)\| \leq M\mu(\pi) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En effet

Si $t_{i+1} > \hat{t}$: $\quad \min\{t_{i+1}, \hat{t}\} = \hat{t}$ donc $\forall t \in \pi\ :\ t_i < \hat{t}$ et $t_i \leq t \leq t_{i+1}$

$$\|x(t) - x(t_i)\| \leq M|t - t_i| \leq M|t_{i+1} - t_i| \leq M\mu(\pi) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si $\hat{t} > t_{i+1}$: $\quad \min\{t_{i+1}, \hat{t}\} = t_{i+1}$ donc $\forall t \in \pi\ :\ t_i < \hat{t}$ et $t_i \leq t \leq \hat{t}$

$$\|x(t) - x(t_i)\| \leq M|t - t_i| \leq |\hat{t} - t_i| \leq M\mu(\pi) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Finallement on a

$$\dot{x}(t) \in F(x(t_i) + \frac{\varepsilon}{2}B) \subseteq F(x(t) + \frac{\varepsilon}{2}B + \frac{\varepsilon}{2}B) \subseteq F(x(t) + \varepsilon B) \ p.p.\ \forall\ t \in [0,\hat{t}]$$

i.e. x est une ε-trajectoire de (3.5) sur $[0,\hat{t}]$.

Si $\hat{t} < T$, on a $\|x(t)\| < K, \quad \forall t \in [0,T]$ contradiction avec la définition de $\hat{t}$ et alors x est une ε-trajectoire sur $[0,T]$.

3.4.1 L'invariance faible approchée

Il était mentioné que le concept classique de l'invariance du système (S, F) exige que pour tout point $x_0 \in S$, il existe une trajectoire de (3.5) avec $x_0 = x(0)$ qui reste toujours dans S. Sous les hypothèses $(\mathcal{C})$ une trajectoire de (3.5) n'existe pas. Nous introduisons le concept de l'invariance faible approchée d'un ensemble S en ce qui concerne ε-trajectoire de (3.5).

Définition 3.4.4 *Le système (S, F) est dit faiblement invariant approché si pour tout $\varepsilon > 0$, $T > 0$, et pour tout $x_0 \in S$, il existe une ε-trajectoire x de (3.5) avec $x(0) = x_0$ tel que*

$$d_S(x(t)) \leq \varepsilon \quad \forall t \in [0, T]. \tag{3.10}$$

Proposition 3.4.5 *Le système (S, F) est approximativement faiblement invariant ssi $(\overline{S}, F)$ est approximativement faiblement invariant.*

Le théorème qui suit donne une condition nécéssaire et suffisante de l'invariance faible approchée en terme d'Hamiltonien inférieur.

Théorème 3.4.6 *Sous les hypothèses $(\mathcal{C})$, le système (S, F) est faiblement invariant approché si seulement si et*

$$h_F(x, \xi) \leq 0, \quad \forall \xi \in N_S^p(x), \quad \forall x \in S.$$

Preuve.

Supposons que $h_F(x, \xi) \leq 0, \quad \forall \xi \in N_S^p(x)$, $\forall x \in S$ et choisissons $x_0 \in S$, $T > 0$. Alors les constantes K et M sont définie par x, et T comme dans (3.7) et (3.9). On définit

$$G = \{x \in KB : d_S(x) < \frac{1}{2}\}.$$

Pour tout $\delta \in]0, \frac{1}{4}[$ et $x \in G$, on choisit $s_\delta(x) \in proj_S^\delta(x)$,(si $x \in S$, alors $s_\delta(x) = x$) par la proposition 2.1.2 il existe $y_\delta \in G/S$ et $\overline{s}_\delta \in S$, tel que

$$y_\delta - \overline{s}_\delta \in N_S^p(\overline{s}_\delta),$$

$$\|(y_\delta - \overline{s}_\delta) - (x - s_\delta)\| \leq 2\delta,$$

$$\|s_\delta - \overline{s}_\delta\| \leq \delta. \tag{3.11}$$

Puisque

$$h_F(x, \xi) \leq 0, \quad \forall \xi \in N_S^p(x), \quad \forall x \in S,$$

donc

$$\inf_{v \in F(x)} \langle v, \xi \rangle \leq 0 \quad \forall \xi \in N_S^p(x), \quad \forall x \in S$$

$$\Longrightarrow \exists v \in F(x) : \langle v, \xi \rangle \leq 0, \quad \forall \xi \in N_S^p(x), \quad \forall x \in S.$$

Pour $x = \overline{s}_\delta(x)$ et $\xi = y_\delta(x) - \overline{s}_\delta(x)$ on aura

$$\langle f_\delta(x), y_\delta(x) - \overline{s}_\delta(x) \rangle \leq 0 \leq 2M\delta,$$

$$v = f_\delta(x) \in F(\overline{s}_\delta(x)). \tag{3.12}$$

Et par (3.11) on a

$$f_\delta(x) \in F(s_\delta(x) + \delta B),$$

car pour tout $\delta < \frac{1}{4}$, $x \in G$ $\|\overline{s}_\delta(x) - x\| < 1$ et par (3.12) on obtient $f_\delta(x) \in F(x + B) \subseteq MB$ d'où

$$\|f_\delta(x)\| \leq M. \tag{3.13}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\langle f_\delta(x), x - s_\delta(x) \rangle &= \langle f_\delta(x), x - s_\delta(x) + y_\delta(x) - y_\delta(x) + \overline{s}_\delta(x) - \overline{s}_\delta(x) \rangle \\
&= \langle f_\delta(x), y_\delta(x) - \overline{s}_\delta(x) \rangle + \langle f_\delta(x), x - s_\delta(x) - y_\delta(x) + \overline{s}_\delta(x) \rangle \\
&\leq 2M\delta + \|f_\delta(x)\| \| - [(y_\delta(x) - \overline{s}_\delta(x)) - (x + s_\delta(x))\| \\
&\leq 2M\delta + 2M\delta \\
&= 4M\delta.
\end{aligned}$$

Alors

$$\langle f_\delta(x), x - s_\delta(x) \rangle \leq 4M\delta. \tag{3.14}$$

La deuxième étape est de voir pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver δ et certaines solutions polygonaux du problème de Cauchy

$$\dot{x} = f_\delta(x), x(0) = x_0 \tag{3.15}$$

satisfont (3.11) .

Comme la fonction f_δ est définie seulement sur G on peut la prolonger sur H par $f_\delta(x) = 0 \; \forall x \in H \backslash G$.

Le lemme suivant est nécéssaire pour la démonstration du théorème.

Lemme 3.4.7 *Soit $f_\delta : H \longrightarrow H$ vérifie (3.13) et (3.14) sur H. Alors pour tout $\widetilde{\varepsilon} > 0$, pour toute partition π sur $[0, T]$ avec*

$$\mu(\pi) \leq \min\{\frac{\widetilde{\varepsilon}}{2M}, \frac{\widetilde{\varepsilon}^2}{4T(M^2 + 8M + 1)}, \widetilde{\varepsilon}\} \tag{3.16}$$

et tout $\delta > 0$ tel que

$$\delta \leq \min_{0 \leq i \leq N} (t_{i+1} - t_i) \tag{3.17}$$

la solution polygonal d'Euler x de (3.15) correspondant à la partition π satisfaite

$$d_S(x(t)) \leq \widetilde{\varepsilon}.$$

Preuve.

En utilisant les notations suivantes

$$x_i = x(t_i), \quad s_i = s_\delta(x_i), \quad f_i = f_\delta(x_i).$$

Par la définition d'un polygone d'Euler

$$x(t) - x_i = \int_{t_i}^{t} f_i d\tau, \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}],$$

donc

$$\|x(t) - x_i\| = \|\int_{t_i}^{t} f_i d\tau\|, \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}],$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_{t_i}^{t} \|f_i\| d\tau, \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}] \\
&\leq M|t - t_i|, \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}].
\end{aligned}
$$

On a

$$
\begin{array}{rcl}
d_S^2(x_{i+1}) & = & \inf_{s_i \in S} \|x_{i+1} - s_i\|^2 \\
& \leq & \|x_{i+1} - s_i\|^2 \\
& = & \|x_{i+1} - s_i + x_i - x_i\|^2 \\
& \leq & \|x_{i+1} - x_i\|^2 + \|x_i - s_i\|^2 + 2\langle x_{i+1} - x_i, x_i - s_i \rangle \\
& \leq & M^2(t_{i+1} - t_i)^2 + d_S^2(x_i) + \delta^2 + 2\displaystyle\int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle f_i, x_i - s_i \rangle d\tau \\
& \leq & M^2(t_{i+1} - t_i)^2 + d_S^2(x_i) + \delta^2 + 8M\delta(t_{i+1} - t_i) \\
& \leq & M^2(t_{i+1} - t_i)\mu(\pi) + d_S^2(x_i) + \mu(\pi)(t_{i+1} - t_i) + 8M(t_{i+1} - t_i)\mu(\pi) \\
& \leq & (t_{i+1} - t_i)\mu(\pi)(M^2 + 8M + 1) + d_S^2(x_i) \\
& \leq & (t_{i+1} - t_i)\dfrac{\widetilde{\varepsilon}^2}{4T(M^2 + 8M + 1)}(M^2 + 8M + 1) + d_S^2(x_i) \\
& \leq & \dfrac{\widetilde{\varepsilon}^2}{4T}(t_{i+1} - t_i) + d_S^2(x_i).
\end{array}
$$

Par itération

$$
d_S^2(x_i) \quad \leq \quad \frac{\widetilde{\varepsilon}^2}{4T}(t_i - t_{i-1}) + d_S^2(x_{i-1})
$$

$$
d_S^2(x_{i-1}) \quad \leq \quad \frac{\widetilde{\varepsilon}^2}{4T}(t_{i-1} - t_{i-1-2}) + d_S^2(x_{i-2})
$$

$$
d_S^2(x_1) \quad \leq \quad \frac{\widetilde{\varepsilon}^2}{4T}(t_1 - t_0) + d_S^2(x_0),
$$

donc

$$\begin{aligned} d_S^2(x_{i+1}) &\leq \frac{\widetilde{\varepsilon}^2}{4T}(t_{i+1}-t_0) + d_S^2(x_0) \\ &\leq \frac{\widetilde{\varepsilon}^2}{4T}(t_{i+1}-t_0) \\ &= (\frac{\widetilde{\varepsilon}}{2})^2, \end{aligned}$$

d'où

$$d_S(x_{i+1}) \leq \frac{\widetilde{\varepsilon}}{2}, \quad \forall i = 0, 1, ...N-1.$$

Car d_S est Lipschitzienne de rang 1, i.e.

$$\begin{aligned} d_S(x(t)) &\leq d_S(x_i) + \|x(t) - x_i\| \\ &\leq \frac{\widetilde{\varepsilon}}{2} + M|t - t_i| \\ &\leq \frac{\widetilde{\varepsilon}}{2} + M\mu(\pi) \\ &\leq \frac{\widetilde{\varepsilon}}{2} + M\frac{\widetilde{\varepsilon}}{2M} \\ &\leq \frac{\widetilde{\varepsilon}}{2} + \frac{\widetilde{\varepsilon}}{2} \\ &\leq \widetilde{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Finalement on appliquera le lemme précédent pour $\widetilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{8}$ on obtient alors une solution polygonale d'Euler x de (3.15) pour une certaine partition π vérifiant (3.16) et vérifiant $d_S(x(t)) \leq \frac{\varepsilon}{8} \quad \forall t \in [0, T]$.

Maintenant on va voir que x est une ε-trajectoire de (3.5).

On définit

$$\hat{t} = \sup\{t' \in [0, T] : \|x(t)\| \in G \quad \forall t \in [0, t']\}.$$

De l'estimation précédente de la fonction distance on a l'implication suivante

$\hat{t} < T \Longrightarrow \|x(\hat{t})\| = K.$

Comme

$$\|x(t_i) - s_\delta(x_i)\|^2 \leq d_S^2(x(t_i)) + \delta^2 \leq (d_S(x(t_i)) + \delta)^2,$$

d'où

$$\begin{aligned}\|x(t_i) - s_\delta(x_i)\| &\leq d_S(x(t_i)) + \delta \\ &\leq \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} \\ &= \frac{\varepsilon}{4}.\end{aligned}$$

Par (3.12),(3.16) et (3.17) et pour tout $t_i \leq \hat{t}$ on a

$$f(x(t_i)) \in F(s_\delta(x(t_i)) + (\frac{\varepsilon}{4} + \delta)B) \subseteq F(x(t_i) + \frac{\varepsilon}{2}B).$$

comme

$$\|x(t) - x(t_i)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}],$$

on obtient

$$f(x(t_i)) \subseteq F(x(t) + \varepsilon B),$$

et donc x est une ε-trajectoire sur $[0, \hat{t}]$ et $\|x(t)\| < K, \quad \forall t \in [0, \hat{t}]$ avec

$K = e^{c\hat{t}}(2 + \|x_0\|)$ alors $\hat{t} = T$.

D'où (S, F) est faiblement invariant approchée. $\square$

L'implication inverse sera démontrée dans la section qui suit.

3.4.2 Les conditions tangentielles et la condition Hamiltonien de l'invariance faible approchée

Le théorème suivant est une relation entre les conditions tangentielles et la condition Hamiltonienne de l'invariance faible approchée.

Théorème 3.4.8 *Supposons que F satisfait les hypothèses $(\mathcal{C})$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

(a) $\overline{co}F(x) \cap T_S^W(x) \neq \emptyset, \quad \forall x \in S.$

(b) $\overline{co}F(x) \cap \overline{co}T_S^W(x) \neq \emptyset, \quad \forall x \in S.$

$(c)\quad h_F(x,\xi) \leq 0, \quad \forall \xi \in N_S^p(x), \forall x \in S.$

$(d)\quad (S,F)$ *est faiblement invariant approchée.*

Preuve.

$(a) \Longrightarrow (b)$.

On a

$$\overline{co}F(x) \cap T_S^W(x), \neq \emptyset \quad \forall x \in S,$$

donc

$$\exists z \in \overline{co}F(x) \wedge z \in T_S^W(x), \quad \forall x \in S$$

$$\Longrightarrow \exists z \in \overline{co}F(x) \wedge z \in \overline{co}T_S^W(x), \quad \forall x \in S, \quad (car T_S^W(x) \subseteq \overline{co}T_S^W(x)).$$

Alors

$$\overline{co}F(x) \cap \overline{co}T_S^W(x), \neq \emptyset \quad \forall x \in S.$$

$(b) \Longrightarrow (c)$.

Soit

$$\overline{co}F(x) \cap T_S^W(x), \neq \emptyset \quad \forall x \in S,$$

donc

$$\exists z \in \overline{co}F(x) \wedge z \in T_S^W(x), \quad \forall x \in S,$$

$$\Longrightarrow \exists z \in \overline{co}F(x) \wedge z \in \overline{co}T_S^W(x), \quad \forall x \in S \ (car\ T_S^W(x) \subseteq \overline{co}T_S^W(x))$$

$$\Longrightarrow \exists z \in \overline{co}F(x) \wedge z \in (N_S^p(x))^\star, \quad \forall x \in S \ (\ car\ \overline{co}F(x) \subseteq (N_S^p(x))^\star)$$

$$\Longrightarrow \exists z \in \overline{co}T_S^W(x) \wedge \langle z, \xi \rangle \leq 0 \quad \forall \xi \in N_S^p(x), \quad \forall x \in S$$

$$\Longrightarrow \inf_{z \in \overline{co}F(x)} \langle z, \xi \rangle \leq 0 \quad \forall \xi \in N_S^p(x), \quad \forall x \in S$$

$$\Longleftrightarrow h_{\overline{co}F}(x,\xi) \leq 0 \quad \forall \xi \in N_S^p(x), \quad \forall x \in S.$$

Comme

$$h_{\overline{co}F}(x,\xi) = h_F(x,\xi).$$

On obtient

$$h_F(x,\xi) \leq 0 \quad \forall \xi \in N_S^p(x), \quad \forall x \in S.$$

$(c) \Longrightarrow (d)$.

Déja prouvé dans le thèorème précédent.

$(d) \Longrightarrow (c)$.

Soit $x \in S$ et $\varepsilon_n \longrightarrow 0$. Car (S,F) est faiblement invariant approchée il existe une suite des ε_n-trajectoire x_n avec $x_n(0) = x$,

$$\dot{x}_n(t) \in F(x_n(t) + \varepsilon_n B) \quad p.p.\ sur\ [0,T] \tag{3.18}$$

et

$$d_S(x_n(t)) \leq \varepsilon_n \quad \forall t \in [0,T].$$

Pour $\varepsilon_n \in]0,1[$, x_n est Lipschitzienne de rang M (car toute ε-trajectoire est lipschitzienne de rang M.)

Définissons $t_n = \sqrt{\varepsilon_n}$, alors pour tout n assez grand

$$x_n(t) \in x + t_n MB, \quad \forall t \in [0,t_n].$$

Par l'inclusion ci-dessus et (3.18) on obtient

$$\dot{x}_n(t) \in F(x + (\varepsilon_n + t_n M)B).$$

Choisisons $\varepsilon > 0$ arbitraire. Comme F est ε-semicontinue supèrieurement pour n assez grand

$$F(x + (\varepsilon_n + t_n M)B) \subseteq F(x) + \varepsilon B\ p.p.\ \forall t \in [0,t_n],$$

il s'ensuit donc par la proposition 2.3.24 et l'inclusion précédente que

$$v_n = \frac{x(t_n) - x}{t_n} \in \overline{co}(F(x) + \varepsilon B)$$

$$\subseteq \overline{co}F(x) + \varepsilon B,$$

car v_n est bornée ($\|v_n\| = \|\frac{\|x(t_n)-x\|}{t_n} \leq \frac{Mt_n}{t_n} = M$).

On peut supposer que v_n converge faiblement vers certains v tel que $v \in \overline{co}F(x)+\varepsilon B$ donc $v \in \overline{co}F(x)$ car $\varepsilon > 0$ arbitraire.

Finallement

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_n}} d_S(x_n(t_n)) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_n}} d_S(x + t_n v_n) \leq \sqrt{\varepsilon_n}.$$

D'ou $v \in T_S^W(x)$ et alors l'assertion (a) est vérifiée.

3.4.3 L'invariance forte approchée

Le concept traditionnel de l'invariance forte du system (S, F) exige que toutes les trajectoires de (3.5) avec $x_0 \in S$ reste dans S pour tout $t \geq 0$. Le nouveau concept de l'invariance forte approchée exige que toute ε-trajectoire avec $x_0 \in S$ restent près de S si ε est assez petit.

Définition 3.4.9 *Le système (S, F) est dit approximativement fortement invariant si pour tout $\lambda > 0$, $T > 0$ et $x_0 \in S$, il existe $\varepsilon = \varepsilon(x_0, \lambda, T) > 0$ tel que toute ε-trajectoire x de (3.5) avec $x(0) = x_0$ satisfait*

$$d_S(x(t)) \leq \lambda \quad \forall t \in [0, T].$$

Le théorème qui suit est une condition nécéssaire et suffisante en terme d'Hamiltonien supérieur pour qu'un système (S, F) soit approximativement fortement invariant.

Théorème 3.4.10 *Supposons que F satisfait les hypothèses $(\mathcal{C})$. Si F est Lipschitzienne sur les ensembles bornés, (S, F) est approximativement fortement invariant si et seulement si*

$$H_F(x, \xi) \leq 0, \quad \forall \xi \in N_S^p(x), \quad \forall x \in S.$$

Le lemme suivant est utile pour la démonstration du théorème 3.4.10.

Lemme 3.4.11

$$\frac{d}{dt}W(t) \leq 4LW(t) + 2L\varepsilon \quad p.p., \quad \forall t \in [0, \hat{t}[.$$

3.5 Résultats Principaux.

Le but de cette section est d'étudier :

Premiérement, l'équivalence entre l'invariance faible et l'invariance forte du système (S, F) associées à l'inclusion différentielle suivante

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(x(t)) \; p.p., \quad t \in [0, T], \\ \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{3.19}$$

où $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ dissipative, vérifie les hypothèses (CH) et S est un sous ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$.

Deuxièment, la condition nécéssaire de l'invariance forte approchée ainsi que d'autre condition de l'invariance faible approchée du système (S, F) associé à l'inclusion différentielle (3.19) où $F : H \rightrightarrows H$ est à valeurs non convexe non compacte dissipative, satisfaisant les hypothèses $(\mathcal{C})$ et S un sous ensemble fermé d'un espace de Hilbert H.

Récemment, de nombreux articles (Voir par exemple [18], [21], [29], [54]) et nombreux résultats ont été obtenus sur les résultats de l'invariance forte et l'invariance forte approchée sous la condition de Lipschitzité.

Invariance

Théorème 3.5.1 *Supposons que (S, F) est faiblement invariant. Alors pour toute feedback selection f de F, toute solution d'Euler x du problème $\dot{x}(t) = f(x(t))$ avec $x(0) = x_0 \in S$ vérifie $x(t) \in S, \quad \forall t \in [0, T]$.*

Preuve.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $s_x \in proj_S(x)$ et on définie $\tilde{f}$ par $\tilde{f}(x) = v_x$ où $\inf\limits_{v \in F(x)} \langle v, x - s_x \rangle =$

$\langle v_x, x - s_x \rangle$.

Soit x une solution d'Euler du problème $\dot{x}(t) = f(x(t))$ avec $x(0) = x_0$ sur $[0, T]$ $(T > 0)$. On va montrer que $x(t) \in S, \quad \forall t \in [0, T]$. Comme (S, F) est faiblement invariant on a $h_F(s_x, x - s_x) \leq 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}^n$, par définition du cône normal on a $x - s_x \in N_S^p(s_x)$), et puisque F est dissipative on a aussi pour tout $f(x) \in F(x)$: $\langle f(x) - \tilde{f}(x), x - s_x \rangle \leq 0$.

Calculons maintenant

$$\begin{aligned}
\langle f(x), x - s_x \rangle &= \langle f(x) - \tilde{f}(x), x - s_x \rangle + \langle \tilde{f}(x), x - s_x \rangle \\
&= \langle f(x) - \tilde{f}(x), x - s_x \rangle + h_F(s_x, x - s_x) \\
&\leq \langle f(x) - \tilde{f}(x), x - s_x \rangle \\
&\leq 0,
\end{aligned}$$

donc par la proposition 3.3.1 on obtient

$$d_S(x(t)) \leq d_S(x(0)), \quad \forall t \in [0, T].$$

Tant que $x(0) = x_0 \in S$, on déduit que $d_S(x(t)) = 0$ i.e. $x(t) \in S \quad \forall t \in [0, T]$. $\square$

Corollaire 3.5.2 *Les solutions d'Euler obtenues par les selections f de F coincident avec les trajectoires de (3.19).*

Preuve.

La condition nécéssaire déja montrée par le corollaire 3.2.2 .

Soit $\bar{x}$ une trajectoire de (3.19). Soit

$$\tilde{S} := \{(t, \bar{x}(t)) : t \in [0, T]\},$$

et considérons la multifonction $\tilde{F}$ définie par

$$\tilde{F}(t, x) = (\{1\} \times F)(t, x) = \{1\} \times F(x), \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n.$$

Donc $\tilde{S}$ est un sous ensemble fermé de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $\tilde{F}$ dissipative, satisfait les hypothéses (CH) ainsi que $(S, \tilde{F})$ est faiblement invariant.

En effet

• Soit $\gamma_n \in \tilde{S}$ tel que γ_n converge vers $\gamma = (\tau, \delta)$. Tant que $\gamma_n \in \tilde{S}$ donc $\exists t_n \geq 0$: $\gamma_n = (t_n, \bar{x}(t_n))$. t_n converge vers τ et $\bar{x}$ Lipschitzienne donc $\bar{x}(t_n)$ converge vers $\bar{x}(\tau)$ d'ou $\exists t \geq 0$: $(t_n, \bar{x}(t_n))$ converge vers $(\tau, \delta) = (t, \bar{x}(t))$ c.a.d. $\gamma \in \tilde{S}$ et alors $\tilde{S}$ est un sous ensemble fermé de $\mathbb{R}^{n+1}$.

• Pour tout $(1, v) \in \tilde{F}(t, x)$: $\|(1, v)\| = 1 + \|v\|$. Par la condition de croissance linéaire de F on a

$$\|(1, v)\| \leq 1 + c(1 + \|x\|)$$

$$= (c + 1) + c\|x\|$$

$$\leq \gamma(1 + \|x\|),$$

où $\gamma = c + 1$ est donc $\tilde{F}$ et à croissance linéaire.

• $\tilde{F}(t, x) = (\{1\} \times F)(t, x) = \{1\} \times F(x) \neq \emptyset$.

• $\{1\}$ est à valeurs convexe compacte et F est à valeurs convexe compacte donc $\tilde{F}$ est à valeurs convexe et compacte.

• $\tilde{F}(t, x + \delta B) = \{1\} \times F(x + \delta B)$ et tant que F est semicontinue supérieurement on obtient $\{1\} \times F(x + \delta B) \subseteq (\{1\} \times F(x)) + \varepsilon B = \tilde{F}(t, x) + \varepsilon B$. D'oú la semicontinuité supérieure de $\tilde{F}$.

• $\forall u \in \tilde{F}(t, x)$, $\forall v \in \tilde{F}(t, y)$

$$\begin{aligned}
\langle (u - v), (t, x) - (\tau, y) \rangle &= \langle (1, u_1) - (1, v_1), (t, x) - (\tau, y) \rangle \\
&= \langle (0, u_1 - v_1), (t - \tau, x - y) \rangle \\
&= \langle u_1 - v_1, x - y \rangle \\
&\leq 0 \quad (\textit{car } F \textit{ est dissipative}).
\end{aligned}$$

Donc $\tilde{F}$ est dissipative.

(S, F) est faiblement invariant alors pour tout $x_0 \in S$, il existe $\bar{x}$ trajectoire de (3.19) tel que $x(t) \in S, \quad \forall t \in [0, T]$. On a aussi $1 \in \{1\}$ donc pour tout $(0, \bar{x}(0)) \in \tilde{S}$, il existe $(t, \bar{x}(t))$ trajectoire de (3.19) sur $[0, T]$ avec $F = \tilde{F}$ et tel que $(t, \bar{x}(t)) \in \tilde{S}, \quad \forall t \in [0, T]$ d'oú $(\tilde{S}, \tilde{F})$ est faiblement invariant.

Toute selection de $\tilde{F}$ est de la forme $1 \times f$ où f est une selecion de F. Si $\tilde{x}$ est une solution de $\dot{x}(t) = f(t, x(t)), x(0) = \bar{x}(0)$ alors $(t, \tilde{x}(t))$ est une slution d'Euler de $(\dot{y}, \dot{x})(t) = (1, f(x(t)))$ avec $(y, x)(0) = (0, \bar{x}(0))$ donc par le théorème 3.5.1 on obtient que $(t, \tilde{x}(t)) \in \tilde{S}, \quad \forall t \in [0, T]$. Il s'ensuit que $\tilde{x}(t) = \bar{x}(t), \quad \forall t \in [0, T]$ et donc $\bar{x}$ est une solution d'Euler. □

Théorème 3.5.3 *Supposons que F dissipative vérifie les hypothèses (CH). Si (S, F) est faiblement invariant alors (S, F) est fortement invariant.*

Preuve.

Soit $\bar{x}$ est une trajectoire de (3.19) avec $\bar{x}(0) \in S$. Par le corollaire 3.5.2 on a pour toute selection f, $\bar{x}$ est une solution d'Euler du problème $\dot{x}(t) = f(t, x(t)), x(0) = \bar{x}(0) = x_0$.

Car (S, F) est faiblement invariant, on conclut par le Théorème 3.5.1 que $\bar{x}(t) \in S, \quad \forall t \in [0, T]$ et donc (S, F) est fortement invariant. □

L'invariance approchée

Maintenant on va généralisé le Théorème 3.5.1 et le Corollaire 3.5.2 au cas d'un espace de Hilbert et on montre la condition nécéssaire de l'invariance forte approchée sous la condition dissipative.

Théorème 3.5.4 *Soit (S, F) est approximativement faiblement invariant, $\varepsilon > 0$ et π une partition de $[0, T]$ avec $d(\pi) \leq \min\{\frac{\varepsilon}{2M}, \frac{\varepsilon^2}{4T(M^2+8M+1)}, \varepsilon\}$. Alors pour tout $\delta > 0$ avec $\delta \leq \min\limits_{o \leq i \leq N-1} (t_{i+1} - t_i)$, et toute f_δ selection de F, le polygon d'Euler associe à*

$\dot{x} = f_\delta(x)$ *avec* $x(0) = x_0$ *vérifie* $d_S(x(t)) \leq \varepsilon, \quad \forall t \in [0, T]$.

Preuve.

Soit $x \in H, \delta > 0$, et $s_\delta(x) \in proj_S^\delta(x)$. Donc par la Proposition 2.1.2 il existe $y_\delta(x) \in H \backslash S$, $\bar{s}_\delta(x) \in S$ tel que

$$y_\delta(x) - \bar{s}_\delta(x) \in N_S^p(\bar{s}_\delta(x)),$$

$$\|(y_\delta(x) - \bar{s}_\delta(x)) - (x - s_\delta(x))\| \leq 2\delta,$$

$$\|s_\delta(x) - \bar{s}_\delta(x)\| \leq \delta.$$

On définit $v_\delta \in F(\bar{s}_\delta(x))$ tel que $\min\limits_{v \in F(\bar{s}_\delta(x))} \langle v, y_\delta(x) - \bar{s}_\delta(x)\rangle = \langle v_\delta, y_\delta(x) - \bar{s}_\delta(x)\rangle$.

Comme F est dissipative on a $\forall f_\delta(x) \in F(x), \forall v_\delta \in F(\bar{s}_\delta(x)) : \langle f(x) - v_\delta, x - \bar{s}_\delta(x)\rangle \leq 0$.

On va montrer que $\langle f_\delta(x), x - s_\delta(x)\rangle \leq 4M\delta$.

$$\langle f_\delta(x), x - s_\delta(x)\rangle = \langle f_\delta(x) - v_\delta, x - s_\delta(x)\rangle + \langle v_\delta, x - s_\delta(x)\rangle$$

$$= \langle f_\delta(x) - v_\delta, x - s_\delta(x) + \bar{s}_\delta(x) - \bar{s}_\delta(x)\rangle + \langle v_\delta, x - s_\delta(x) + y_\delta(x) - y_\delta(x) + \bar{s}_\delta(x) - \bar{s}_\delta(x)\rangle$$

$$= \langle f_\delta(x) - v_\delta, x - \bar{s}_\delta(x)\rangle + \langle f_\delta(x) - v_\delta, \bar{s}_\delta(x) - s_\delta(x)\rangle + \langle v_\delta, y_\delta(x) - \bar{s}_\delta(x)\rangle + \langle v_\delta, -(y_\delta(x) - \bar{s}_\delta(x) - x + s_\delta(x))\rangle$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|f_\delta(x) - v_\delta\|\|\bar{s}_\delta(x) - s_\delta(x)\| + \|v_\delta\|\| - (y_\delta(x) - \bar{s}_\delta(x) - x + s_\delta(x))\| \\
&\leq \delta(\|f_\delta(x)\| + \|v_\delta\|) + 2M\delta \\
&\leq 2M\delta + 2M\delta \\
&\leq 4M\delta.
\end{aligned}$$

Et on a $f_\delta(x) \in F(x)$ donc $\|f_\delta(x)\| \leq M$ et en utilisant le Lemme 3.4.7 le polygon d'Euler x de $\dot{x} = f_\delta(x)$, avec $x(0) = x_0$ satisfait $d_S(x(t)) \leq \varepsilon$, $\forall t \in [0, T]$. □

Corollaire 3.5.5 *Toute ε-trajectoire de (3.19) est un polygon d'Euler de* $\dot{x}(t) = f_\delta(x)$ *avec* $x_0 = x(0)$ *et* $d(\pi) \leq \frac{\varepsilon}{2M}$.

Preuve.

Soit $\bar{x}$ une ε-trajectoire de (3.19) et on définit

$$\tilde{S} = \{(t, \bar{x}(t)) : t > 0\}.$$

Considérons la multifonction

$$\tilde{F}(t,x) = (\{1\} \times F)(t,x) = \{1\} \times F(x), \quad \forall (t,x) \in [0, \infty[\times H.$$

Il est clair que $\tilde{S}$ est un sous ensemble fermé de $\mathbb{R} \times H$ et $\tilde{F}$ dissipative, satisfait les hypothèses $(\mathcal{C})$, De plus $(\tilde{S}, \tilde{F})$ est approximativement faiblement invariant.

En effet, Car (S, F) est approximativement faiblement invariant alors $\forall \varepsilon > 0, T > 0$ et tout $x_0 \in S$, il existe $\bar{x}$ une ε-trajectoire de (3.19) avec $x(0) = x_0$ satisfaite $d_S(\bar{x}(t)) \leq \varepsilon$ $\forall t \in [0, T]$. On a aussi $1 \in \{1\}$ donc pour tout $(0, \bar{x}(0)) \in \tilde{S}$, il existe $(t, \bar{x}(t))$ ε-trajectoire de (3.1) avec $F = \tilde{F}$ et $(t_0, x(t_0)) = (0, x_0)$ tel que $d_{\tilde{S}}(t, \bar{x}(t)) \leq \varepsilon, \quad \forall t \in [0, T]$. Par conséquent et par le théorème 3.5.4 pour toute selection de $\tilde{F}$ sous lesquel tout polygon d'Euler vérifie $\forall \varepsilon > 0 : d_{\tilde{S}}(t, x(t)) \leq \varepsilon \quad \forall t \in [0, T]$. (toute selection de $\tilde{F}$ est nécéssaire de la forme $\{1\} \times f$ ou f est une selection de F).

Si $\tilde{x}$ est un polygon de $\dot{x}(t) = f(t, x(t)), x(0) = \bar{x}(0)$ alors $(t, \tilde{x})$ est un polygon de $(\dot{y}, \dot{x})(t) = (1, f(t, x(t)))$ avec $(y, x)(0) = (0, \bar{x}(0))$. Finallement par le théorème 3.5.4 $\forall \varepsilon > 0$, $d_{\tilde{S}}(t, \tilde{x}(t)) \leq \varepsilon, \quad \forall t \in [0, T]$ et donc $\bar{x}$ est un polygon d'Euler. $\square$

Maintenant on va montrer la condition nécessaire forte sous la condition de dissipative.

Théorème 3.5.6 *Si $H_F(x, \xi) \leq 0$ $\forall \xi \in N_S^p(x)$, $\forall x \in S$ alors (S, F) est approximativement fortement invariant.*

Le lemme qui suit est nécéssaire pour la démonstration du théorème.

On note que $W(t) = d_S^2(x(t))$. Soit x est une ε-trajectoire, $T > 0$ et on suppose que

$H_F(x,\xi) \leq 0, \quad \forall \xi \in N_S^p(x),\ \forall x \in S.$

Soit $\hat{t} = \sup\{t' \in [0,T] : d_S(x(t)) < 1 \quad \forall t \in [0,t']\}$.

Lemme 3.5.7 $\forall t \in [0,\hat{t}[$

$$\frac{d}{dt}W(t) \leq \frac{4M}{\varepsilon}W(t).$$

Preuve.

Soit W et x différentiable en tout point $t \in [0,\hat{t}[$ et choisissons $s_\delta \in proj_S^\delta(x(t))$.

Alors

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}W(t) &= \lim_{\delta \longrightarrow 0} \frac{d_S^2(x(t+\delta)) - d_S^2(x(t))}{\delta} \\
&\leq \limsup_{\delta \longrightarrow 0} \frac{\|x(t+\delta) - s_\delta\|^2 - \|x(t) - s_\delta\|^2 + \delta^2}{\delta} \\
&\leq \limsup_{\delta \longrightarrow 0} \frac{\|x(t+\delta) - s_\delta - x(t) + x(t)\|^2 - \|x(t) - s_\delta\|^2 + \delta^2}{\delta}
\end{aligned}$$

$$\leq \limsup_{\delta \longrightarrow 0} \frac{\|x(t+\delta) - x(t)\|^2 + \|x(t) - s_\delta\|^2 + 2\langle x(t+\delta) - x(t), x(t) - s_\delta\rangle - \|x(t) - s_\delta\|^2 + \delta^2}{\delta}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \limsup_{\delta \longrightarrow 0} \frac{\|x(t+\delta) - x(t)\|^2}{\delta} + 2\limsup_{\delta \longrightarrow 0} \frac{\langle x(t+\delta) - x(t)}{\delta}, x(t) - s_\delta\rangle + \limsup_{\delta \longrightarrow 0} \frac{\delta^2}{\delta} \\
&\leq \limsup_{\delta \longrightarrow 0} \frac{(M(t+\delta - t))^2}{\delta} + 2\limsup_{\delta \longrightarrow 0} \frac{\langle x(t+\delta) - x(t)}{\delta}, x(t) - s_\delta\rangle \\
&\leq M^2 + 2\limsup_{\delta \longrightarrow 0} \langle \frac{x(t+\delta) - x(t)}{\delta}, x(t) - s_\delta\rangle \\
&= 2\limsup_{\delta \longrightarrow 0} \frac{\langle x(t+\delta) - x(t)}{\delta}, x(t) - s_\delta\rangle \\
&\leq 2\limsup_{\delta \longrightarrow 0} \langle \dot{x}(t), x(t) - s_\delta\rangle.
\end{aligned}$$

Maintenant on montre que $\limsup\limits_{\delta \longrightarrow 0} \langle \dot{x}(t), x(t) - s_\delta\rangle \leq W(t)\frac{2M}{\varepsilon}$.

Pour cela on a besoin de la proposition 2.1.2 pour déduire l'existence de $y_\delta \in H \setminus S$

et $\bar{s}_\delta \in S$ tel que

$$y_\delta - \bar{s}_\delta \in N_S^p(\bar{s}_\delta),$$

$$\|y_\delta - \bar{s}_\delta) - (x - s_\delta)\| \leq 2\delta,$$

$$\|s_\delta - \bar{s}_\delta\| \leq \delta.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\langle x(t) - s_\delta, \dot{x}(t)\rangle &= \langle x(t) - s_\delta - y_\delta + y_\delta - \bar{s}_\delta + \bar{s}_\delta, \dot{x}(t)\rangle \\
&\leq \langle y_\delta - \bar{s}_\delta, \dot{x}(t)\rangle + \langle x(t) - y_\delta - \bar{s}_\delta + \bar{s}_\delta, \dot{x}(t)\rangle \\
&\leq \langle y_\delta - \bar{s}_\delta, \dot{x}(t)\rangle + \|\dot{x}(t)\| - (y_\delta - \bar{s}_\delta) + (x(t) - s_\delta)\|
\end{aligned}$$

comme $\|\dot{x}(t)\|$ est borné on obtient

$$\langle x(t) - s_\delta, \dot{x}(t)\rangle \leq \langle y_\delta - s_\delta, \dot{x}(t)\rangle + 2M\delta.$$

Tant que $\dot{x}(t) \in F(x(t) + \varepsilon B), v \in F(\bar{s}_\delta)$ et F est dissipative on peut écrire

$$\langle \dot{x}(t) - v, x(t) + \varepsilon z - \bar{s}_\delta\rangle = \langle \dot{x}(t) - v, \varepsilon z\rangle + \langle \dot{x}(t) - v, x(t) - \bar{s}_\delta\rangle \leq 0$$

$$\langle \dot{x}(t) - v, \varepsilon z\rangle \leq \langle \dot{x}(t) - v, \bar{s}_\delta - x(t)\rangle$$

$$= \langle \dot{x}(t), \bar{s}_\delta - x(t)\rangle + \langle v, x(t) - \bar{s}_\delta\rangle$$

$$\leq \|\dot{x}(t)\|\|x(t) - \bar{s}_\delta\| + \|v\|\|x(t) - \bar{s}_\delta\|$$

$$\leq 2M\|x(t) - \bar{s}_\delta\|.$$

Par conséquent

$$\langle \dot{x}(t) - v, z\rangle \leq \frac{2M}{\varepsilon}\|x(t) - \bar{s}_\delta\|, \quad \forall z \in B.$$

En particulier pour $z = \frac{\dot{x}(t)-v}{\|\dot{x}(t)-v\|}$ on a

$$\langle \dot{x}(t) - v, \frac{\dot{x}(t) - v}{\|\dot{x}(t) - v\|}\rangle \leq \frac{2M}{\varepsilon}\|x(t) - \bar{s}_\delta\|$$

$$\frac{1}{\|\dot{x}(t) - v\|}\|\dot{x}(t) - v\|^2 \leq \frac{2M}{\varepsilon}\|x(t) - \bar{s}_\delta\|$$

$$\|\dot{x}(t) - v\| \leq \frac{2M}{\varepsilon}\|x(t) - \bar{s}_\delta\|.$$

Car $H_F(x,\xi) \leq 0, \quad \forall \xi \in N_S^p(x) \quad \forall x \in S$ et $y_\delta - \bar{s}_\delta \in N_S^p(\bar{s}_\delta)$ on obtient

$$\begin{aligned}\langle x(t) - s_\delta, \dot{x}(t)\rangle &\leq \langle y_\delta - \bar{s}_\delta, \dot{x}(t) - v\rangle + \langle y_\delta - \bar{s}_\delta, v\rangle + 2M\delta \\ &\leq \|y_\delta - \bar{s}_\delta\|\|\dot{x}(t) - v\| + 2M\delta \\ &\leq \|y_\delta - \bar{s}_\delta\|\frac{2M}{\varepsilon}\|x(t) - \bar{s}_\delta\| + 2M\delta.\end{aligned}$$

Passant à la limite sup quand $\delta \longrightarrow 0$ et en utilisant le faite que $y_\delta - \bar{s}_\delta \in N_S^p(\bar{s}_\delta)$ et $\|(y_\delta - \bar{s}_\delta) - (x - s_\delta)\| \leq 2\delta$ on trouve que

$$\begin{aligned}\limsup_{\delta\longrightarrow 0}\langle x(t) - s_\delta, \dot{x}(t)\rangle &\leq \limsup_{\delta\longrightarrow 0}((2\delta + \|x(t) - s_\delta\|)\|x(t) - \bar{s}_\delta\|\frac{2M}{\varepsilon} + 2M\delta) \\ &\leq \limsup_{\delta\longrightarrow 0}(3\delta + \|x(t) - \bar{s}_\delta\|)\|x(t) - \bar{s}_\delta\|\frac{2M}{\varepsilon} + 2M\delta \\ &\leq \limsup_{\delta\longrightarrow 0}\|x(t) - \bar{s}_\delta\|^2\frac{2M}{\varepsilon} \\ &\leq \limsup_{\delta\longrightarrow 0}(d_S^2(x(t)) + \delta)\frac{2M}{\varepsilon} \\ &\leq d_S^2(x(t))\frac{2M}{\varepsilon}.\end{aligned}$$

D'ou $\frac{d}{dt}W(t) \leq 2\limsup_{\delta\longrightarrow 0}\langle \dot{x}(t), x(t) - s_\delta\rangle \leq \frac{4M}{\varepsilon}W(t) \quad \forall t \in [0,\hat{t}]$. □

Revenant à la démonstration du théorème.

Preuve.

On prend arbitrairement $x_0 \in S$, $T > 0$ et $\lambda > 0$ et on va montrer que s'il existe $\varepsilon > \frac{-2MT}{\ln\frac{\sqrt{Z}}{\lambda}}$, alors toute ε-trajectoire x avec $x(0) = x_0$ satisait $d_S(x(t)) \leq \lambda \quad \forall t \in [0,T]$.

Resolvant l'inégalité différentielle du lemme précédent

$$\frac{d}{dt}W(t) \leq \frac{4M}{\varepsilon}W(t) \quad \forall t \in [0,\hat{t}].$$

On conclut que $W(t) \leq Ze^{\frac{4Mt}{\varepsilon}}$ avec $Z = e^c$, $c \in \mathbb{R}$.

Donc $d_S(x(t)) \leq \sqrt{Z}e^{\frac{2Mt}{\varepsilon}} \quad \forall t \in [0,T]$.

Pour $\varepsilon > \frac{-2MT}{\ln\sqrt{Z}}$ avec $0 < Z < 1$ on a

$$\frac{2MT}{\varepsilon} < -\ln\sqrt{Z}$$

$$e^{\frac{2MT}{\varepsilon}} < e^{\ln \frac{1}{\sqrt{Z}}}.$$

Multipliant par $\sqrt{Z}$

$$\sqrt{Z}e^{\frac{2MT}{\varepsilon}} < \sqrt{Z}e^{\ln \frac{1}{\sqrt{Z}}},$$

d'où $d_S(x(t)) \leq \sqrt{Z}e^{\frac{2MT}{\varepsilon}} < 1 \quad \forall t \in [0, T]$.

En plus si $\varepsilon > \frac{-2MT}{\ln \frac{\sqrt{z}}{\lambda}}$ on obtient $d_S(x(t)) \leq \lambda \quad \forall t \in [0, T]$, donc pour tout $\lambda > 0$, $x_0 \in S$ et $T > 0$, il existe $\varepsilon > \frac{-2MT}{\ln \frac{\sqrt{Z}}{\lambda}}$ $(0 < Z < 1)$ telle que toute ε-trajectoire x de (3.5) avec $x(0) = x_0$ satisfaite $d_S(x(t)) \leq \lambda \quad \forall t \in [0, T]$.

D'ou (S, F) est approximativement fortement invariant. $\square$

Corollaire 3.5.8 *Supposons que F vérifie les hypothèses $(\mathcal{C})$ et considérons les assertions suivantes*

(i) $F(x) \subseteq T_S^C(x) \quad \forall x \in S.$

(ii) $F(x) \subseteq T_S(x) \quad \forall x \in S.$

(iii) $F(x) \subseteq T_S^W(x) \quad \forall x \in S.$

(iv) $F(x) \subseteq \overline{co}T_S^W(x) \quad \forall x \in S.$

(v) $H_F(x, \xi) \leq 0 \quad \forall \xi \in N_S^p(x) \quad \forall x \in S.$

(vi) (S, F) *est approximativement fortement invariant.*

Alors on a (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (v) $\Longrightarrow$ (vi).

Preuve.

On a $(i) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (iii) \Longrightarrow (iv)$ car $T_S^C(x) \subseteq T_S(x) \subseteq T_S^W(x)$. Soit $v \in F(x)$ par (iv) on a $v \in \overline{co}T_S^W(x)$ et par la propostion 2.1.9 on a $v \in (N_S^p(x))^\star$ c.à.d. $\langle v, \xi \rangle \leq 0 \quad \forall \xi \in N_S^p(x)$ donc la condition Hamiltonien (v) est obtenue.

L'implication $(v) \Longrightarrow (vi)$ déja pouvée par le théorème précédent. $\square$

CHAPITRE 4

Résultat d'existence de solutions viables pour les inclusions différentielles à mémoire avec Contrainte sur l'état

Sommaire

4.1 Introduction

Les inclusions différentielles à mémoire, souvent appelées "functional differential inclusions", sont des inclusions différentielles où le système ne depend pas seulement, comme les inclusions différentielles ordinaires, de la valeur initiale mais aussi de l'état antérieur du système.

Dans ce chapitre on étudie des inclusions différentielles à mémoire du type

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(t, \tau(t)x), \ p.p. \ t \in [0, T]; \\ \tau(0)x = x_0 = \varphi \ sur \ [-r, 0]; \end{cases} \tag{4.1}$$

où $\varphi \in C([-r, 0], E)$, et pour tout $t > 0$, $\tau(t)x \in C([-r, 0], E)$ est définie par

$$x_t(s) = \tau(t)(x)(s) = x(t+s) \quad \forall s \in [-r, 0].$$

Dans la première partie, on resoud le problème

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \ p.p. \ t \in [0, T]; \\ x(0) = x_0; \\ x(t) \in D \ \forall t \in [0, T], \end{cases} \tag{4.2}$$

où D un convexe fermé d'un espace de Banach séparable E et $F : [0, T] \times D \rightrightarrows E$, mesurable par rapport à la première variable et semicontinue supérieurement par rapport a la deuxième variable vérifie

$$F(t, x) \cap T_D^B(x) \neq \emptyset$$

et il existe un ensemble équilibré $K \in ck(E)$ tel que

$$F(t, x) \subset (1 + \|x\|)K.$$

Après on résoud le problème suivant à mémoire avec viabilité

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(t, \tau(t-s)x), \ p.p. \ sur \ [0,T]; \\ \\ \tau(t-s)x = x_{t-s} \in E_s, \quad \forall t \in [0,T]; \\ \\ x(t) = \varphi_0(t) \ sur \ [-r, 0], \end{cases} \tag{4.3}$$

où D est un convexe fermé d'un espace de Banach séparable E, r est un réel strictement positif et $\varphi_0 \in E_s$, F est une multifonction définie de $[0,T] \times E_s$ à valeurs dans $ck(E)$, semicontinue supérieurement par rapport à la deuxième variable, et où E_s est l'ensemble des fonctions φ continues sur $[-r, 0]$ à valeurs dans E telles que $\varphi(s) \in D$ pour tout s fixé dans $[-r, 0]$.

Aprés on donne le même résultat pour $E_D = \bigcap\limits_{-r \leq s \leq 0} E_s$.

Dans la deuxième partie, la contrainte est variable avec l'état et F est semicontinue supèrieurement. Pour cela, on s'appuie sur les travaux de Castaing-Moussaoui-Syam [14], et Benabdellah-Castaing-Ibrahim [7].

Théorème 4.1.1 *Soit D un convexe fermé non vide de E. F une multi-application définie sur $[0,T] \times \mathcal{C}_0$ à valeurs dans $ck(E)$ vérifiant les conditions suivantes*

(i) F est $\tau_\lambda([0,T]) \bigotimes \beta(D)$-mesurable ;

(ii) pour tout t fixé dans $[0,T]$, $F(t, .)$ est semicontinue supérieurement sur D;

(iii) il existe $K \in ck(E)$ équilibré tel que pour tout $(t,x) \in [0,T] \times D$,

$$F(t, \theta) \subset (1 + \|x\|)K;$$

(iv) $F(t,x) \cap T_D(x) \neq \emptyset, \quad \forall (t, \theta) \in [0,T] \times D$.

Alors, pout tout $x_0 \in D$, il existe une fonction absolument continue $x : [0,T] \longrightarrow E$, telle que

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \ p.p. \ sur \ [0,T]; \\ \\ x(t) \in D, \quad \forall t \in [0,T]; \\ \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{4.4}$$

Théorème 4.1.2 *Soit* Γ *une multi-application de* $C_E([0,T])$ *, de graphe* G *fermé,* $F : G \longrightarrow ck(E)$ *une multifonction semicontinue supérieurement vérifiant*

$(i) \exists K \in ck(E) F(t,x) \subset (1+\|x\|)K, \quad \forall (t,x) \in G;$

(ii) $\forall t \in [0,T[, \forall x \in \Gamma(t), \forall \varepsilon > 0, \exists (t_\varepsilon, x_\varepsilon) \in G$ *tel que*

$$0 < t_\varepsilon - t \leq \varepsilon, \quad \frac{x_\varepsilon - x}{t_\varepsilon - t} \in F(t,x) + \varepsilon \overline{B_E}.$$

Alors, pour tout $a \in \Gamma(0)$, *il existe une fonction absolument continue* $X : [0,T] \longrightarrow E$ *telle que*

$$\begin{cases} X(t) = a + \int_0^t \dot{X}(s)ds, \ \forall t \in [0,T]; \\ X(t) \in \Gamma(t), \quad \forall t \in [0,T]; \\ \dot{X}(t) \in F(t, X(t)) \quad p.p. \ t \in [0,T]. \end{cases} \tag{4.5}$$

4.2 Résultats pricipaux

Le Théorème suivant consiste à montrer le résultat d'existence de solution pour le problème (4.4) dans le cas où la perturbation F est mesurable sur $[0,T]$ et semi-continue supérieurement sur D.

Théorème 4.2.1 *Soit* $I = [0,T]$ $(T > 0)$. *Soit* D *un sous ensemble de* E *convexe fermé et* $F : I \times D \rightrightarrows ck(E)$ *satisfaisant :*

(i) $\forall x \in E$ $t \longmapsto F(t,x)$ *est mesurable ;*

(ii) $\forall t \in I$ $x \longmapsto F(t,x)$ *est semicontinue supèrieurement sur* D;

(iii) *il existe un ensemble equilibré* $K \in ck(E) : \forall (t,x) \in I \times D$,

$$F(t,x) \subset (1+\|x\|)K;$$

(iv) $F(t,x) \cap T_D^B(x) \neq \emptyset \quad \forall (t,x) \in I \times D.$

Alors, pour tout $x \in D$, *il existe une fonction absolument continue* $x : I \longrightarrow E$ *telle* *que*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \ p.p. \ sur \ I; \\ x(t) \in D, \quad \forall t \in I; \\ x_0 = x(0). \end{cases} \tag{4.6}$$

Preuve.

Par le théorème de Scorza-Dragoni il existe une application mesurable $F_0 : I \times D \rightrightarrows E$ possédant les propriétés suivantes :

(1) Il existe un ensemble $N \subset I$, indépendant de t tel que $\lambda(N) = 0$ et $F_0(t, x) \subset F(t, x)$, pour tout $t \in I \setminus N$ et tout $x \in D$.

(2) Si $u, v : I \longrightarrow E$ sont des applications mesurables avec $v(t) \in F(t, x(t))$ *p.p.*, alors $v(t) \in F_0(t, x(t))$.

(3) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous ensemble compacte $J_\varepsilon \subset I$ tel que $\lambda(I \setminus J_\varepsilon) < \varepsilon$, la restriction de F_0 à $J_\varepsilon \times D$ est globalement semicontinue supérieurement et $\emptyset \neq F_0(t, x) \subset F(t, x)$ pour tout $(t, x) \in J_\varepsilon \times D$.

Par la troisième propriété, il existe une suite d'ensembles compacte $J_n \subset I$ avec $\lambda(I \setminus J_n) = \varepsilon_n \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$ telle que la restriction de F_0 sur $J_n \times D$ est semicontinue supérieurement et à valeurs non vides. Nous pouvons également supposer que J_n est Croissante. En vertu du Théorème de Dugundji, il existe un prolongement semicontinue supérieurement $\tilde{F}_n$ de $F_0 \setminus_{J_n \times D}$, et tel que

$$\tilde{F}_n(t, x) \subset (1 + \|x\|)K. \tag{4.7}$$

Puisque $T_D(x)$ est convexe et F_n satisfait la condition (iv) donc on aura

$$\tilde{F}_n(t, x) \cap T_D(x) \neq \emptyset \quad \forall (t, x) \in I \times D$$

D'où $\tilde{F}_n$ satisfait les hypothèses du Théorème 4.1.1, par suite $\forall x_0 \in D$, il existe une fonction absolument continue $x_n : I \longrightarrow E$ qui vérifie :

$$\begin{cases} \dot{x}_n(t) \in \tilde{F}_n(t, x_n(t)), \ p.p. \ \forall t \in I; \\ x_n(t) \in D, \quad \forall t \in I; \\ x_n(0) = x_0. \end{cases} \tag{4.8}$$

Par (4.7) et (4.8) on a pour presque tout $t \in I$,

$$\dot{x}_n(t) \in \tilde{F}_n(t, x_n(t)) \subset c(1 + \|x_n(t)\|)K.$$

puisque K est compact, il existe alors une contante $M > 0$ tel que

$$\|\tilde{F}_n(t, x_n(t))\| \leq c(1 + \|x_n(t)\|)M,$$

et x_n est absolument continue sur I alors

$$\|x_n(t) - x_n(0)\| \leq \int_0^t M(1 + \|x_n(w)\|)dw \quad \forall t \in I.$$

Par l'inégalité de Gronwall on obtient pour tout t

$$\|x_n(t)\| \leq (\|x_n(0)\| + MT)e^{MT},$$

et donc pour presque tout t

$$\dot{x}_n(t) \in \tilde{F}_n(t, x_n(t)) \subset (1 + l)K \tag{4.9}$$

avec $l = (\|x_n(0)\| + MT)e^{MT}$. Comme K est convexe compacte et grâce à (4.9) la suite $(\dot{x}_n)_n$ est relativement compacte dans $L^1_E(I)$. Donc on peut extraire une sous suite encore notée $(\dot{x}_n)_n$ qui converge $\sigma(L^1, L^\infty)$ vers une fonction $y \in L^1_E$. D'autre part, de (4.8), et du fait que (x_n) est absolument continue sur I, on obtient

$$\|\dot{x}_n(t)\| \leq (1 + l)M$$

et la suite $(x_n)_n$ est équicontinue aussi pour tout $t \in I$

$$(x_n(t))_n \subset x_n(0) + T(1+l)K.$$

D'aprés le Théorème d'Ascoli, il s'ensuit que $(x_n)_n$ converge uniformément sur I vers x où $x(t) = x(0) + \int_0^t y(s)ds$, $\forall t \in I$ donc $\dot{x}(t) = y(t)$ *p.p.*

Tant que D est fermé donc $x(t) \in D \quad \forall t \in I$.

On montre maintenant que $\forall t \in I \quad \dot{x}(t) \in F(t, x(t))$ *p.p.*

Puisque $x_n, \dot{x}_n$ sont mesurables et satisfont $\dot{x}_n(t) \in \tilde{F}_n(t, x_n(t))$ *p.p.*$\forall t \in I$, donc par la propriété (2) on aura

$$\dot{x}_n(t) \in F_0(t, x_n(t)) \ p.p.$$

i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exists N_n \subset J_n$ de mesure nulle tel que

$$\dot{x}_n(t) \in F_0(t, x_n(t)) \quad \forall t \in J_n \setminus N_n. \tag{4.10}$$

Posons $N_0 = (I \setminus \cup_n J_n) \cup (\cup_n N_n)$ qui est négligeable. En effet ;

$$\lambda(N_0) = \lambda((I \setminus \cup_n J_n) \cup (\cup_n N_n))$$

$$\leq \lambda(I \setminus \cup_n J_n) + \lambda(\cup_n N_n)$$

$$\leq \lambda(\cap_n (I \setminus J_n)) + \sum_n \lambda(N_n),$$

Nous avons que l'ensemble J_n est de mesure finie et la suite $(I \setminus J_n)$ est décroissante car (J_n) est croissante, alors

$$\lambda(\cap_n (I \setminus J_n)) = \lim_n \lambda(I \setminus J_n) = \lim_n \varepsilon_n = 0,$$

et donc

$$\lambda(N_0) \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} \lambda(I \setminus J_n) + \sum_n \lambda(N_n) = 0.$$

Pour tout $t \in I \setminus N_0$, il existe un entier $n_0 = n_0(t) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $t \in J_n \setminus N_0$, donc par la relation (4.10), on obtient

$$\dot{x}_n(t) \in F_0(t, x_n(t)), \quad \forall n \geq n_0.$$

D'autre part, puisque F_0 est semicontinue supérieurement sur $J_n \times E$ et $x_n(t) \longrightarrow x(t)$ quand $n \longrightarrow \infty$, on trouve que pour tout $x^\star \in E^\star$,

$$\limsup_{n \longrightarrow \infty} \delta^\star(x^\star, F_0(t, x_n(t))) \leq \delta^\star(x^\star, F_0(t, x(t)).$$

Pour tout $t \notin N_0$ et $n \geq n_0$, on a

$$\langle x^\star, \dot{x}_n(t) \rangle \leq \delta^\star(x^\star, F_0(t, x_n(t))),$$

donc

$$\begin{aligned} \limsup_{n \longrightarrow \infty} \langle x^\star, \dot{x}_n(t) \rangle &\leq \limsup_{n \longrightarrow \infty} \delta^\star(x^\star, F_0(t, x_n(t))) \\ &\leq \delta^\star(x^\star, F_0(t, x(t))), \end{aligned}$$

par le lemme de Fatou, on déduit que pour tout ensemble mesurable $B \subset I$ et tout $x^\star \in E^\star$,

$$\begin{aligned} \int_B \langle x^\star, \dot{x}(t) \rangle dt &= \lim_{n \longrightarrow \infty} \int_B \langle x^\star, \dot{x}_n(t) \rangle dt \\ &= \limsup_{n \longrightarrow \infty} \int_B \langle x^\star, \dot{x}_n(t) \rangle dt \\ &\leq \int_B \limsup_{n \longrightarrow \infty} \langle x^\star, \dot{x}_n(t) \rangle dt \\ &\leq \int_B \delta^\star(x^\star, F_0(t, x(t))) dt. \end{aligned}$$

D'où

$$\langle x^\star \dot{x}(t) \rangle \leq \delta^\star(x^\star, F_0(t, x(t)))\ p.p.$$

Alors

$$\sup_{x^\star \in E^\star} (\langle x^\star, \dot{x}(t) \rangle - \delta^\star(x^\star, F_0(t, x(t)))) \leq 0,$$

puisque F_0 est à valeurs non vides convexes et fermées, par la relation (2.1), on aura $d(\dot{x}(t), F_0(t, x(t))) = 0$, ça implique que, $\dot{x}(t) \in F_0(t, x(t))\ p.p.$

Par la propriété (1),

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \forall t \in I \setminus N_0,$$

ceci prouve que, $\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), p.p.\ t \in I.$ $\square$

4.2.1 Cas où la contrainte est non variable

Maintenant on va donner le théorème d'existence de solution viable pour l'ensemble E_s.

Théorème 4.2.2 *Soit s fixé dans $[-r, 0]$, D un convexe fermé non vide de E. F une multifunction définie sur $[0, T] \times \mathcal{C}_0$ à valeurs dans $ck(E)$ vérifiant*

(i) $\forall \theta \in E_s$ $t \longmapsto F(t, \theta)$ est mesurable ;

(ii) pour tout t fixé dans $[0, T]$, $F(t, .)$ est semicontinue supèrieurement sur E_s;

(iii) il existe $K \in ck(E)$ équilibré tel que pour tout $(t, \theta) \in [0, T] \times E_s$,

$$F(t, \theta) \subset (1 + \|\theta(0)\|)K;$$

(iv) $F(t, \theta) \cap T_D(\theta(0)) \neq \emptyset, \quad \forall (t, \theta) \in [0, T] \times E_s$.

Alors, pour tout $\varphi_0 \in D$, il exist une fonction continue $x^s : [-r, T] \longrightarrow E$, absolument continues sur $[0, T]$ et vérifiant

$$\begin{cases} \dot{x}^s(t) \in F(t, \tau(t-s)x^s), \ p.p. \ sur \ [0, T]; \\ \tau(t-s)x^s = x^s_{t-s} \in E_s, \quad \forall t \in [0, T]; \\ x^s(t) = \varphi_0(t), \quad \forall t \in [-r, 0]. \end{cases} \tag{4.11}$$

Preuve.

Soit $\mathcal{P}_n$ une subdivision de $[0, T]$ définie par

$$\mathcal{P}_n = \{t_n^i = \frac{Ti}{2^n} : i = 0, 1, 2, ..., 2^n\}.$$

1ère étape. Construction des solutions approchées.

Pout tout $x \in D$, on définit $f_1^x : [-r, t_1^n] \longrightarrow E$ par

$$f_1^x(u) = \begin{cases} \varphi_0(u), & u \in [-r, s]; \\ \varphi_0(s) + \frac{u-s}{2^{-n}T}(x - \varphi_0(s)), & u \in [s, s + t_1^n]; \\ x, & u \in [s + t_1^n, t_1^n]. \end{cases}$$

Il est clair que $f_1^x \in \mathcal{C}_{t_1^n}$, $\tau(t_1^n)f_1^x(0) = x \in D$, c.a.d. $f_1^x \in E_s \subset \mathcal{C}_0$.

On définit alors la multifonction S_1^n sur $[0, t_1^n] \times D$ à valeurs dans $ck(E)$ par

$$S_1^n(t,x) = F(t, \tau(t_1^n)f_1^x) \qquad \forall (t,x) \in [0, t_1^n] \times D.$$

Observons que la fonction $x \longmapsto \tau(t_1^n)f_1^x$ est 1-lipschitzienne en vertu de

$$\begin{aligned}
\|\tau(t_1^n)f_1^x - \tau(t_1^n)f_1^y\|_s &= \sup_{-r\leq u\leq 0} \|\tau(t_1^n)f_1^x(u) - \tau(t_1^n)f_1^y(u)\| \\
&= \sup_{-r\leq u\leq 0} \|f_1^x(t_1^n + u) - f_1^y(t_1^n + u)\| \\
&= \sup_{-r-t_1^n\leq u\leq s-t_1^n} \|\varphi_0(t_1^n + u) - \varphi_0(t_1^n + u)\| \\
&+ \sup_{s-t_1^n\leq u\leq s} \|\varphi_0(s) + \frac{u + t_1^n - s}{2^{-n}T}(x - \varphi_0(s)) - \varphi_0(s) - \frac{u + t_1^n - s}{2^{-n}T}(y - \varphi_0(s))\| \\
&= \sup_{s-t_1^n\leq u\leq s} \|\frac{u + t_1^n - s}{2^{-n}T}(x - y)\| \\
&= \sup_{s-t_1^n\leq u\leq s} |\frac{u + t_1^n - s}{2^{-n}T}|\|x - y\| \\
&= \|x - y\|.
\end{aligned}$$

Pour tout t fixé dans $[0, t_1^n]$, par suite $S_1^n(t, .)$ est semi continue supérieurement sur D, et $S_1^n(., x)$ est mesurable. Par la condition (iii), on a pour tout $t \in [0, t_1^n]$ et tout $x \in D$,

$$F(t, \tau(t_1^n)f_1^x) = S_1^n(t,x) \subset (1 + \|f_1^x(t_1^n)\|)K = (1 + \|x\|)K.$$

On aura par la condition (iv),

$$S_1^n(t,x) \cap T_D(x) = F(t, \tau(t_1^n)f_1^x) \cap T_D(f_1^x(t_1^n)) \neq \emptyset, \quad \forall (t,x) \in [0, t_1^n] \times D.$$

Donc S_1^n vérifie les conditions du théorème 4.2.1, il s'ensuit l'existence d'une application $x_1^n : [0, t_1^n] \longrightarrow E$ absolument continue telle que

$$\begin{cases}
\dot{x}_1^n(t) \in S(t, x_1^n(t)), \ p.p. \ sur \ [0, t_1^n]; \\
x_1^n(t) = \varphi_0(0) + \int_0^t \dot{x}_1^n(w)dw, \quad \forall t \in [0, t_1^n]; \\
x_1^n(t) \in D, \quad \forall t \in [0, t_1^n]; \\
x_1^n(0) = \varphi_0(0).
\end{cases}$$

Et donc x_1^n est solution de

$$\begin{cases} \dot{x}_1^n(t) \in F(t, \tau(t_1^n(t) f_n^{x_1^n(t)}) \ p.p. \ sur \ [0, t_1^n]; \\ x_1^n(t) = \varphi_0(0) + \int_0^t \dot{x}_1^n(w)dw, \quad \forall t \in [0, t_1^n]; \\ x_1^n(t) \in D, \quad \forall t \in [0, t_n^1]; \\ x_1^n(0) = \varphi_0(0). \end{cases}$$

On pose

$$\begin{cases} x_n(t) = \varphi_0(t), \quad \forall t \in [-r, 0]; \\ x_n(t) = x_1^n(t), \quad \forall t \in [0, t_1^n]. \end{cases}$$

Comme précédemment, pour tout $x \in D$, on définit $f_2^x : [-r, t_2^n] \longrightarrow E$ par

$$f_2^x(u) = \begin{cases} x_n^s(u-s), & u \in [-r, t_1^n + s]; \\ x_n^s(t_1^n) + \frac{u - t_1^n - s}{2^{-n}T}(x - x_n^s(t_1^n)) & u \in [t_1^n + s, t_2^n + s]; \\ x, & u \in [s + t_2^n, t_2^n]. \end{cases}$$

; De la même façon du cas précedent, on considère la multifunction S_2^n définie sur $[t_1^n, t_2^n] \times D$ à valeurs dans $ck(E)$ par

$$S_2^n(t, x) = F(t, \tau(t_2^n) f_2^x) \quad \forall (t, x) \in [t_1^n, t_2^n] \times D.$$

La fonction $x \longmapsto f_2^x$ est 1-lipschitzienne en vertu de $\forall x, y \in D$

$$\|\tau(t_2^n) f_2^x - \tau(t_2^n) f_2^y\|_s = \sup_{-r \le u \le 0} \|f_2^x(t_2^n + u) - f_2^y(t_2^n + u)\|$$

pour tout $u \in [-r, s - 2^{-n}], u + t_2^n \in [-r, t_1^n + s]$ et $f_2^x = f_2^y = x_n^s$ sur $[-r, t_1^n + s]$ on a

$$\begin{aligned} \|\tau(t_2^n) f_2^x - \tau(t_2^n) f_2^y\|_s &= \sup_{s - 2^{-n} \le u \le s} \|\frac{u + t_2^n - t_1^n - s}{2^{-n}T}(x - y)\| \\ &= \|x - y\|. \end{aligned}$$

Pour tout $t \in [t_1^n, t_2^n]$ et tout $x \in D$ la condition (iii) implique $\exists K \in ck(E)$ tel que, pour tout $(t, x) \in [t_1^n, t_2^n] \times D$, $S_2^n(t, x) \subset (1 + \|\tau(t_2^n) f_2^x(0)\|)K$, avec $\tau(t_2^n) f_2^x)(0) = x$, et donc $S_2^n(t,x) \subset (1+\|x\|)K$. De plus on aura par la condition (iv), pour tout $(t,x) \in [t_1^n, t_2^n] \times D$,

$$S_2^n(t,x) \cap T_D(x) = F(t, \tau(t_2^n) f_2^x) \cap T_D(\tau(t_2^n) f_2^x(0)) \neq \emptyset.$$

Par le théorème 4.2.1 on obtient l'existence d'une fonction x_2^n absolument continue sur $[t_1^n, t_2^n]$ telle que

$$\begin{cases} \dot{x}_n^s(t) \in S_2^n(t, x_2^n(t)), \ p.p. \ sur \ [t_1^n, t_2^n]; \\ x_2^n(t) = x_n(t_1^n) + \int_{t_1^n}^t \dot{x}_2^n(w)dw, \quad \forall t \in [t_1^n, t_2^n]; \\ x_2^n(t) \in D, \quad \forall t \in [t_1^n, t_2^n]; \\ x_2^n(t_1^n) = x_n^s(t_1^n) = x_1^n(t_1^n). \end{cases}$$

Et donc x_2^n vérifie

$$\begin{cases} \dot{x}_n^s(t) \in F(t, \tau(t_2^n) f_2^{x_2^n(t)}), \ p.p. \ sur \ [t_1^n, t_2^n]; \\ x_2^n(t) = x_n(t_1^n) + \int_{t_1^n}^t \dot{x}_2^n(w)dw, \quad \forall t \in [t_1^n, t_2^n]; \\ x_2^n(t) \in D, \quad \forall t \in [t_1^n, t_2^n]; \\ x_2^n(t_1^n) = x_n^s(t_1^n) = x_1^n(t_1^n). \end{cases}$$

Supposons ainsi construite une solution x_n^s sur $[-r, t_k^n]$ telle que x_n^s est absolument continue sur $[0, t_k^n]$ et vérifiant

$$\begin{cases} \dot{x}_n^s(t) \in F(t, \tau(t_k^n) f_k^{x_n^s(t)}), \ p.p. \ sur \ [t_{k-1}^n, t_k^n]; \\ x_n^s(t) = x_n^s(t_{k-1}^n) + \int_{t_{k-1}^n}^t \dot{x}_n^s(w)dw, \quad \forall t \in [t_{k-1}^n, t_k^n]; \\ x_n^s(t) \in D, \ \forall t \in [t_{k-1}^n, t_k^n] \end{cases}$$

et construisons une solution sur $[t_{k-1}^n, t_k^n]$. Pour tout $x \in D$, on définit f_{k+1}^x : $[-r, t_{k+1}^n] \longrightarrow E$ par

$$f_{k+1}^x(u) = \begin{cases} x_n^s(u-s), \quad u \in [-r, t_k^n + s]; \\ x_n^s(t_k^n) + \frac{u - t_k^n - s}{2^{-n}T}(x - x_n^s(t_k^n)), \quad u \in [t_k^n + s, t_{k+1}^n + s]; \\ x, \qquad u \in [t_{k+1}^n + s, t_{k+1}^n]. \end{cases}$$

On remarque que $\tau(t_{k+1}^n) f_{k+1}^x(0) = x$ et $f_{k+1}^x \in \mathcal{C}_{t_{k+1}^n}$.

Considérons la multifonction S_{k+1}^n définie sur $[t_k^n, t_{k+1}^n] \times D$ à valeurs dans $ck(E)$ par

$$S_{k+1}^n(t,x) = F(t, \tau(t_{k+1}^n) f_{k+1}^x) \quad \forall (t,x) \in [t_k^n, t_{k+1}^n] \times D.$$

C'est clair que S_{k+1}^n vérifie les conditions du théorème 4.2.1. D'où l'existence d'une fonction x_{k+1}^n absolument continue sur $[t_k^n, t_{k+1}^n]$ et vérifiant

$$\begin{cases} \dot{x}_{k+1}^n(t) \in S_{k+1}^n(t, x_{k+1}^n(t)), \ p.p. \ sur \ [t_k^n, t_{k+1}^n]; \\ x_{k+1}^n(t) = x_n^s(t_k^n) + \int_{t_k^n}^t \dot{x}_{k+1}^n(w)dw, \quad \forall t \in [t_k^n, t_{k+1}^n]; \\ x_{k+1}^n(t) \in D, \quad \forall t \in [t_k^n, t_{k+1}^n]; \\ x_{k+1}^n(t_k^n) = x_n^s(t_k^n). \end{cases}$$

Et donc x_{k+1}^n vérifie

$$\begin{cases} \dot{x}_{k+1}^n(t) \in F(t, \tau(t_{k+1}^n) f_{k+1}^{x_{k+1}^n(t)}), \ p.p. \ sur \ [t_{k-1}^n, t_k^n]; \\ x_{k+1}^n(t) = x_k^n(t_k^n) + \int_{t_k^n}^t \dot{x}_{k+1}^n(w)dw, \quad \forall t \in [t_k^n, t_{k+1}^n]; \\ x_{k+1}^n(t) \in D, \quad \forall t \in [t_k^n, t_{k+1}^n]; \\ x_{k+1}^n(t_k^n) = x_n^s(t_k^n). \end{cases}$$

Par suite, on pose $x_n^s = x_{k+1}^n$ sur $[t_k^n, t_{k+1}^n]$ et pour tout $t \in [0,T]$, on pose $\vartheta_n(t) = t_i^n$, $\delta_n(t) = t_{i+1}^n$ pour tout $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$ et $\vartheta_n(T) = T$. On définit pout tout t fixé de

$[0,T]$, $f_n^{x_n^s(t)} \in \mathcal{C}_{\delta_n(t)}$, par

$$f_n^{x_n^s(t)}(u) = \begin{cases} x_n^s(u-s), \quad u \in [-r, \vartheta_n(t)+s]; \\ x_n^s(\theta_n(t)) + \frac{u-\vartheta_n(t)-s}{2^{-n}T}(x_n^s(t) - x_n^s(\vartheta_n(t))), \quad u \in [\vartheta_n(t)+s, \delta_n(t)+s]; \\ x_n^s(t), \quad u \in [\delta_n(t)+s, \delta_n(t)]. \end{cases}$$

Il est clair que par construction, x_n^s est continue sur $[-r,T]$, absolument continue sur $[0,T]$ et vérifie

$$\begin{cases} \dot{x}_n^s(t) \in F(t, \tau(\delta_n(t)) f_n^{x_n^s(t)}),\ p.p.\ sur[0,T]; \\ x_n^s(t) = \varphi(0) + \int_0^t \dot{x}_n^s(w)dw, \quad \forall t \in [0,T]; \\ x_n^s(t) \in D, \quad \forall t \in [0,T]; \\ x_n^s(t) = \varphi_0(t), \quad \forall t \in [-r,0]. \end{cases} \tag{4.12}$$

2ème étape. Compacité des suites approchées.

Dans cette étape on a besoin de montrer la compacité de la suite approximante. Nous affirmons d'abors que $(x_s^n)_n$ convergent vers une fonction absolument continue sur $[0,T]$.

Par (4.12) on a pour presque tout $t \in [0,T]$, $\exists K \in ck(E)$ tel que

$$\dot{x}_n^s(t) \in F(t, \tau(\delta_n(t) f_n^{x_n^s(t)})) \subset (1 + \|\tau(\delta_n(t) f_n^{x_n^s(t)})(0)\|)K,$$

avec $\tau(\delta_n(t) f_n^{x_n^s(t)})(0) = x_n^s(t)$. Comme K est compacte on peut l'écrire

$$\|F(t,\varphi)\| \leq (1 + \|\varphi(s)\|)M \quad \forall (t,\varphi) \in [0,T] \times E_s,$$

avec $M > 0$. D'où

$$\|F(t, \tau(\delta_n(t) f_n^{x_n^s(t)}))\| \leq (1 + \|x_n^s(t)\|)M.$$

Le faite que x_n^s est absolument continue et par la proposition 3.1.2, on aura pour tout t,

$$\|x_n^s(t)\| \leq (\|\varphi_0(0)\| + MT)e^{MT},$$

et donc pour presque tout t,

$$\dot{x}_n^s(t) \in F(t, \tau(\delta_n(t)) f_n^{x_n^s(t)}) \subset (1+l)K \tag{4.13}$$

où $l := (\|\varphi_0(0)\| + MT)e^{MT}$.

Grâce à (4.13) et comme K est convexe compacte et x_n^s est absolument continue on a

1. la suite $(\dot{x}_n^s)_n$ est relativement compacte dans $L_E^1([0,T])$ donc on peut extraire une sous suite notée encore $(\dot{x}_n^s)_n$ qui converge $\sigma(L^1, L^\infty)$ vers une fonction $y \in L_E^1$.
2. $\|\dot{x}_n^s(t)\| \leq (1+l)M$, et la suite $(x_n^s)_n$ est equicontinue.
3. Pour tout $t \in [0,T], (x_n^s(t))_n$ est inclus dans $\varphi_0(0) + (1+l)K$.

Appliquons le théorème 2.3.18, il s'ensuit que $(x_n^s)_n$ converge uniformément sur $[0,T]$ vers x^s ou $x^s(t) = \varphi_0(0) + \int_0^t y(w)dw, \quad \forall t \in [0,T]$ donc $\dot{x}^s(t) = y(t)$ $p.p.$ D étant fermé, implique que $x^s(t) \in D$ pour tout $t \in [0,T]$ et $\tau(t-s)x^s = x_{t-s}^s \in E_s$. Puisque $x_n^s = \varphi_0$ sur $[-r,0]$, on prolonge de manière évidente x^s par φ_0 sur $[-r,0]$.

$$\|\tau(\delta_n(t)) f_n^s(t)) - \tau(t-s)x^s\|_s = \sup_{-r \leq u \leq s-2^{-n}} \|x_n^s(u+\delta_n(t)-s) - x^s(u+t-s)$$

$$+ \sup_{s-2^{-n} \leq u \leq s} \|x_n^s(\vartheta_n(t)) + \frac{u+\delta_n(t)-\vartheta_n(t)-s}{2^{-n}T}(x_n^s(t) - x_n^s(\vartheta_n(t)) - x^s(u+t-s))\|.$$

D'un part on a

$$\sup_{-r \leq u \leq s-2^{-n}} \|x_n^s(u+\delta_n(t)-s) - x^s(u+t-s)\| = \sup_{-r \leq u \leq s-2^{-n}} \|x_n^s(u+\delta_n(t)-s) - x^s(u+\delta_n(t))\|$$

$$+ \sup_{-r \leq u \leq s-2^{-n}} \|x^s(u+\delta_n(t)) - x^s(u+t-s)\|, \tag{4.14}$$

pour tout $u \in [-r, s-2^{-n}]$ et $t \in [0,T]$ on a $u + \delta_n(t) \in [-r, \vartheta_n(t) + s]$.

D'autre part, pour tout $u \in [s-2^{-n}, s]$ on a

$$\sup_{s-2^{-n} \leq u \leq s} \|x_n^s(\vartheta_n(t)) + \frac{u+\delta_n(t)-\vartheta_n(t)-s}{2^{-n}T}(x_n^s(t) - x_n^s(\vartheta_n(t)) - x^s(u+t-s))\|$$

$$= \sup_{s-2^{-n} \leq u \leq s} \|x_n^s(\vartheta_n(t)) + \frac{u+\delta_n(t)-\vartheta_n(t)-s}{2^{-n}T} x_n^s(t) - \frac{u+\delta_n(t)-\vartheta_n(t)-s}{2^{-n}T}(x_n^s(\vartheta_n(t)) + x^s(u+t-s))\|$$

$$\leq \sup_{s-2^{-n}\leq u\leq s} \|\frac{u-s}{2^{-n}T}(x_n^s(\vartheta_n(t) - x_n^s(t)) + x_n^s(t) - x^s(u+t-s)\|$$

$$\leq \sup_{s-2^{-n}\leq u\leq s} \|\frac{u-s}{2^{-n}T}(x_n^s(\vartheta_n(t)) - x_n^s(t))\| + \sup_{s-2^{-n}\leq u\leq s} \|x_n^s(t) - x^s(u+t-s)\| \quad (4.15)$$

$$\leq \|x_n^s(\vartheta_n(t)) - x_n^s(t)\| + \sup_{s-2^{-n}\leq u\leq 2^{-n}} \|x_n^s(t) - x^s(t) + x^s(t) - x^s(u+t-s)\|$$

$$\leq \|x_n^s(\vartheta_n(t)) - x_n^s(t)\| + \sup_{s-2^{-n}\leq u\leq s} \|x^s(t) - x^s(u+t-s)\| + \|x_n^s(t) - x^s(t)\|.$$

Les suites $(\vartheta_n(t))_n$ et $(\delta_n(t))_n$ convergent simplement vers t à l'infini, et la suite $(x_n^s)_n$ converge uniformément vers la fonction x^s qui est uniformément continue sur $[0,T]$. Passant à la limite dans (4.14) et (4.15), on obtient donc

$$\lim_n \sup \|x_n^s(u+\delta_n(t)-s) - x^s(u+\delta_n(t))\| = 0$$

et

$$\lim_n \sup \|x^s(u+\delta_n(t)) - x^s(u+t-s)\| = 0.$$

d'où

$$\lim_n (\tau(\delta_n(t)) f_n^s)_n = \tau(t-s)x^s.$$

Par une application du théorème de fermeture, on déduit que $\dot{x}^s(t) \in F(t, \tau(t-s)x^s)$ *p.p.* sur $[0,T]$.

Et donc x^s vérifie

$$\begin{cases} F(t,\tau(t-s)x^s) \ p.p. \ sur \ [0,T] \\ \tau(t-s)x^s = x_{t-s}^s \in E_s \quad \forall t \in [0,T] \\ x^s(t) = \varphi_0(t) \quad \forall t \in [-r,0]. \end{cases}$$

ceci termine la démonstration. □

Remarque 4.2.3 *Pour tout s fixé dans $[-r,0]$, par construction on a*

$$\tau(\delta_n(t)) f_n^{x_n^s(t)} \in E_u \quad \forall u \in [s,0]$$

. Alors

$$\tau(\delta_n(t)) f_n^{x_n^s(t)} \in \bigcap_{s\leq u\leq 0} E_u.$$

Donc on peut la remplacer dans le théorème ; en particulier on a

$$E_D = \bigcap_{-r\leq u\leq 0} E_u$$

on peut déduire le résultat suivant.

Théorème 4.2.4 *Soit* $E_D = \{\varphi \in \mathcal{C}_0, \varphi(s) \in D, \forall s \in [-r,0]\}$. *Supposons que* F *une multifunction définie sur* $[0,T]\times\mathcal{C}_0$ *à valeurs dans* $ck(E)$ *vérifiant les conditions suivantes*

(i) $\forall \theta \in E_D$, $F(.,\theta)$ *est mesurable ;*

(ii) pour tout t *fixé dans* $[0,T]$, $F(t,.)$ *est semicontinue supèrieurement sur* E_D;

(iii) il existe $K \in ck(E)$ *équilibré tel que pour tout* $(t,\theta) \in [0,T] \times E_0$,

$$F(t,\theta) \subset (1 + \|\theta(0)\|)K;$$

(iv) $F(t,\theta) \cap T_D(\theta(0)) \neq \emptyset, \quad \forall(t,\theta) \in [0,T] \times E_0.$

Alors, pour tout $\varphi_0 \in E_D$, *il exist une fonction continue* $x : [-r,T] \longrightarrow E$, *absolument continue sur* $[0,T]$, *et vérifiant*

$$\begin{cases} \dot{x}^s(t) \in F(t, \tau(t-s)x^s) \text{ p.p. sur } [0,T] \\ \tau(t-s)x^s = x^s_{t-s} \in D, \quad \forall t \in [0,T] \\ x^s(t) = \varphi_0(t) \quad \forall t \in [-r,0]. \end{cases}$$

4.2.2 Cas où la contrainte est variable

La généralisation du théorème 4.2.2 au cas où le fermé D est variable en t et F est globalement semicontinue superieurement est obtenue par le théorème suivant . Pour tout $t \in [0,T]$ et $s \in [-r,0]$, on définit

$$H_s(t) = \{\varphi \in \mathcal{C}_0 : \varphi(s) \in \Gamma(t)\}.$$

Théorème 4.2.5 *Soit* Γ *une multifonction définie sur* $[0,T]$ *à valeurs dans* $c(E)$, *de graphe* G *fermé,* $F : [0,T] \times \mathcal{C}_0 \longrightarrow ck(E)$ *une multifonction qui vérifie* *(i) F est semicontinue supérieurement sur $[0,T] \times H_s(t)$;*

(ii) il existe un convexe compacte equilibré K de E tel que

$$F(t,\varphi) \subset (1 + \|\varphi(0)\|)K, \quad \forall (t,\varphi) \in [0,T] \times H_0(t);$$

(iii) $\forall (t,\varphi,\varepsilon) \in [0,T[\times H_0(t) \times \mathbb{R}_+^*, \exists (t_\varepsilon, \varphi_\varepsilon) \in Gr(H_0)$ tel que

$$0 < t_\varepsilon - t \leq \varepsilon, \quad \frac{\varphi_\varepsilon(0) - \varphi(0)}{t_\varepsilon - t} \in F(t,x) + \varepsilon \overline{B_E}.$$

Alors, pour tout $\varphi_0 \in H_s(t)$, il existe une fonction absolument continue $x^s : [-r,T] \longrightarrow E$ telle que

$$\begin{cases} x^s(t) \in F(t, \tau(t-s)x^s), \ p.p. \ \forall t \in [0,T]; \\ x^s(t) \in \Gamma(t), \quad \forall t \in [0,T]; \\ x^s(t) = \varphi_0(t), \quad \forall t \in [-r,0]. \end{cases} \tag{4.16}$$

Preuve.

Soit $\mathcal{P}_n$ une suite de subdivision de $[0,T]$ définie par

$$\mathcal{P}_n = \{t_i^n = \frac{iT}{2^{-n}} : i = 0,1,2,...,2^n\}.$$

1ère étape. Construction des suites approximantes. Pout tout $x \in D$, on définit $f_1^x : [-r, t_1^n] \longrightarrow E$ par

$$f_1^x(u) = \begin{cases} \varphi_0(u), & u \in [-r,s]; \\ \varphi_0(s) + \frac{u-s}{2^{-n}}(x - \varphi_0(s)), & u \in [s, s+t_1^n]; \\ x, & u \in [s+t_1^n, s]. \end{cases}$$

Il est clair que $f_1^x \in \mathcal{C}_{t_1^n}$, $\tau(t_1^n) f_1^x(0) = x \in D$, c.a.d. $f_1^x \in E_s \subset \mathcal{C}_0$.

On définit alors la multifonction S_1^n sur $[0,t_1^n] \times D$ à valeurs dans $ck(E)$ par

$$S_1^n(t,x) = F(t, \tau(t_1^n) f_1^x) \quad \forall (t,x) \in [0,t_1^n] \times D.$$

Comme dans la preuve du théorème précédent, S_1^n vérifie les hypothèses du théorème 4.1.2. Il est facile de démontrer que la multifonction S_1^n satisfait la condition tangentielle (ii) du théorème 4.1.2. En effet, soit $(t,x) \in Gr(\Gamma)$. On pose $\varphi = \tau(t_1^n)f_1^x$, on a $\varphi \in \mathcal{C}_0$ et $\varphi(0) = f_1^x(t_1^n) = x \in \Gamma(t)$ c'est à dire que $\varphi \in H_0(t)$. Soit $\varepsilon > 0$, d'après la condition (iii), il existe $(t_\varepsilon, \varphi_\varepsilon) \in gr(H_0)$ i.e. $\varphi_\varepsilon(0) \in \Gamma(t)$ tel que $0 < t_\varepsilon \leq \varepsilon$, on ait

$$\varphi_\varepsilon(0) \in \Gamma(t_\varepsilon) \quad et \quad \frac{\varphi_\varepsilon(0) - \varphi(0)}{t_\varepsilon - t} \in S_1^n(t,x) + \varepsilon\overline{B_E}.$$

On appliquant le théorème 4.1.2 à la multifonction S_1^n, il existe une fonction x_1^n absolument continue sur $[0, t_1^n]$ et vérifiant

$$\begin{cases} \dot{x}_1^n(t) \in S_1^n(t, x_1^n(t)),\ p.p.\ sur\ [0, t_1^n]; \\ x_1^n(t) = \varphi_0(0) + \int_0^t \dot{x}_1^n(w)dw, \quad \forall t \in [0, t_1^n]; \\ x_1^n(t) \in \Gamma(t), \quad \forall t \in [0, t_1^n]; \end{cases}$$

c'est à dire

$$\begin{cases} \dot{x}_1^n(t) \in F(t, \tau(t_1^n)f_1^{x_1^n(t)}),\ p.p.\ sur\ [0, t_1^n]; \\ x_1^n(t) = \varphi_0(0) + \int_0^t \dot{x}_1^n(w)dw, \quad \forall t \in [0, t_1^n]; \\ x_1^n(t) \in \Gamma(t), \quad \forall t \in [0, t_1^n]. \end{cases}$$

De la même façon de la preuve du théorème 4.2.2, on a l'existence d'une solution x_n^s sur $[-r, 1]$ telle que x_n^s est absolument continue sur $[0, T]$, et vérifiant pour tout $0 \leq k \leq 2^n$

$$\begin{cases} \dot{x}_n^s(t) \in F(t, \tau(t_n^k)f_k^{x_n^s(t)}),\ p.p.\ sur\ [0, t_1^n]; \\ x_n^s(t) = x_n(t_{k+1}^n) + \int_{t_{k+1}^n}^t \dot{x}_n^s(w)dw, \quad \forall t \in [t_{k-1}^n, t_k^n]; \\ x_n^s(t) \in \Gamma(t), \quad \forall t \in [t_{k-1}^n, t_k^n]; \end{cases}$$

où pour tout t fixé de $[0,T]$, $f_n^{x_n^s(t)} \in \mathcal{C}_{\delta_n(t)}$ définie par

$$f_n^{x_n^s(t)}(u) = \begin{cases} x_n^s(u-s), \quad u \in [-r, \theta_n(t)+s]; \\ x_n^s(\vartheta_n(t)) + \frac{u-\vartheta_n(t)-s}{2^{-n}T}(x_n^s(t) - x_n^s(\vartheta_n(t))), \quad u \in [\vartheta_n(t)+s, \delta_n(t)+s]; \\ x, \qquad\qquad u \in [\delta_n(t)+s, s]. \end{cases}$$

Par construction, $x_n^s \in \mathcal{C}_T$, absolument continue sur $[0,T]$ et vérifie

$$\begin{cases} \dot{x}_n^s(t) \in F(t, \tau(\delta_n(t)) f_n^{x_n^s(t)}),\ p.p.\ sur\ [0,T] \\ x_n^s(t) = \varphi_0(0) + \int_0^t \dot{x}_n^s(w)dw, \quad \forall t \in [0,T]; \\ x_n^s(t) \in \Gamma(t), \quad \forall t \in [0,T]; \\ x_n^s(t) = \varphi_0(t), \quad \forall t \in [-r,0]. \end{cases} \tag{4.17}$$

Par le même raisonnement du théorème 4.2.2, on déduit l'existence d'une sous suite de $(x_n^s)_n$ encore notée $(x_n^s)_n$ qui converge uniformement sur $[0,T]$ vers une fonction absolument continue x^s et telle que $(\dot{x}_n^s)_n$ converge faiblement dans L^1 vers $\dot{x}^s$, avec

$$x^s(t) = \varphi_0(0) + \int_0^t \dot{x}^s(w)dw \quad \forall t \in [0,T].$$

On déduit que

$$\lim_n \tau(\delta_n(t)) f_n^{x_n^s(t)} = \tau(t-s)x^s \quad \forall t \in [0,T].$$

Comme Γ est de graphe fermé, on a $x^s(t) \in \Gamma(t)$, $\forall t \in [0,T]$. De plus, puisque $x_n^s = \varphi_0$ sur $[-r,0]$, on prolonge x^s par φ_0 sur $[-r,0]$ et par suite, x^s est une solution de

$$\begin{cases} \dot{x}^s(t) \in F(t, \tau(t-s)x^s),\ p.p.\ sur\ [0,T]; \\ x^s(t) = \varphi_0(0) + \int_0^t \dot{x}^s(w)dw, \quad \forall t \in [0,T]; \\ x^s(t) \in \Gamma(t), \quad \forall t \in [0,T]; \\ x^s(t) = \varphi_0(t), \quad \forall t \in [-r,0]. \end{cases} \tag{4.18}$$

Donc x^s est une solution de

$$\begin{cases} \dot{x}^s(t) \in F(t, \tau(t-s)x^s), \ p.p. \ sur \ [0,T]; \\ x^s(t) = \varphi_0(0) + \int_0^t \dot{x}^s(w)dw, \quad \forall t \in [0,T]; \\ x^s(t) \in \Gamma(t), \quad \forall t \in [0,T]; \\ x^s(t) = \varphi_0(t) \quad \forall t \in [-r, 0]. \end{cases} \tag{4.19}$$

Ce qui termine la démonstration. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Amiour, M. F. Yarou, *Invariant systems with dissipative operators*, Bulletin of the Iranian Mathematical Society. June 2018, Volume 44, Issue 3, pp 643-657.

[2] A. Amrani, C. Castaing et M. Valadier, *Convergence forte dans L^1 impliquée par la convergence faible, Méthodes de troncature*, C.R. Acad. Sci. Paris t.314, Série I, p. 37-40 (1992).

[3] J.-P. Aubin, *Viability theory*, Springer-Verlag, Boston, 1991.

[4] J.-P. Aubin et A. Cellina, *Differential inclusions*, Springer-Verlag, New York, 1984.

[5] O. Arino et S. Gautier, *Stabilité d'un ensemble fermé pour une équation différentielle à argument retardé*, C.R. Acad. Sciences. t.287, série A.1101(1978).

[6] H. Benabdelah et A. Faik, *Perturbations convexex et non convexes des equations d'évolution*, Port. Math. 53(1996) 187-208.

[7] H. Benabdelah, C. Castaing, M. A. Gamal Ibrahim, *BV solutions of multivalued differential equations on closed moving sets in Banach spaces*, Geometry in Nonlinear Control and Differential Inclusion, V.32(1995), 53-81.

[8] J.-M. Bony, *Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptique dégénérés* , Ann. Inst. Fourier Grenoble

19 (1969)277-304.

[9] J. M. Borwein and D. Preiss, *Asmooth variational priciple with applications to subdifferentiability and differentiability of convex functions.* Trans. Am. Math. Soc. 303(1987), 517-527.

[10] H. Brezis, *On a characterization of flow-invariant sets*, Commun. Pure Appl. Math. 23 (1970)261-263.

[11] O. Cârja and I. I. Vrabie,*Some new viability results for semilinear differential inclusions*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl., 4(1997), 401-424.

[12] C. Castaing, *Quelque résultats de compacité liés à l'integration.* C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. 1270, pp. 1732-1735, (1970).

[13] C. Castaing, M.D.P. Monteiro Marques, *Topological properties of solution sets for sweeping process with delay*, Preprint, 1996/5, Université de Montpellier II.

[14] C. Castaing, M. Moussaoui, A. Syam *Multivalued differential equations on closed convex sets in Banach spaces*, Set-Valued Analysis,1 (1994), 329-353.

[15] C. Castaing, M. Valadier, *Convex analysis and measurable multifunctions*, Lecture Notes in Math. 580, Springer Verlag, Berlin 1977.

[16] F. H. Clarke, *Generalized gradients and applications*, Trans. Am. Math. Soc. 205(1975), 247-262.

[17] F. H. Clarke and J.-P. Aubin, *Monotone invariant solutions to differential inclusions.* J.London Math. Soc. 16(1977), 357-366.

[18] F. Clarke, Yu. Ledyaev, M. Radulescu, *Approximate invaraince and differential inclusions in Hilbert spaces*, J. Dyn. Control Syst. **3** (1997)493-518.

[19] F. H. Clarke, Yu. S. Leayaev and R. J. Stern,*Invariance, monotonocity and applications*, Nonlinear Analysis, Differential Equations and Control, F.H.Clarke and R.J. Stern Editors, Kluwer Academic Publishers, 1999, 207-305.

[20] F. Clarke, Yu. Ledyaev, R. Stern, P. Wolneski, *Nonsmooth Analysis and Control Theory*, Springer, New York, 1998.

[21] F. Clarke, Yu. Ledyaev, R. Stern, P. Wolneski, *Qualitative properties of trajectories of control theory : A survey*, J. Dynamical Control Systems, **1** (1995), pp. 1-48. Anal. 1(1993) 305-317.

[22] M. G. Crandall,*Differential equations on closed sets*, J. Math. Soc. Japan, 22(1970), 443-455.

[23] K. Deimling, *Multivalued Diffrential Equations on closed sets*, Differential and Integral Equations,1, pp. 23-30,(1988).

[24] K. Deimling, *Multivalued Diffrential Equations*, De Gruyter, Berlin, 1992.

[25] K. Deimling *Nonlinear Functional Analysis*, Springer Verlag 1985.

[26] K. Deimling *Ordinary differential equations in Banach spaces*, Lect. Notes Math. 596(1977).

[27] K. Deimling, P. Szilágyi, *Periodic solutions of dry friction problems*, Z. angew. Math. phys., **45** (1994), 53-60.

[28] R. Descombe, *Cours d'analyse*, Libraire Vuibert, Paris, (1962).

[29] T. Donchev, V. Rios, P. Wolneski, *Strong invariance and one-sided Lipschitz multifunctions*, Nonlinear Analysis TMA, 60(2005), 849-862.

[30] T. Donchev, *Properties of the reachable set of control theory systems*, System control Lett., 46(2002), pp 379-386.

[31] N. Dinculeanu, Vector measures, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1967.

[32] H. Frankowska, S. Plaskacz, *A measurable upper semicontinuous viability theorem for tubes*, Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications, 26(1996), pp. 565-582.

[33] H. Frankowska, S. Plaskacz, T-Rzezuchowski, *Measurable viability the orems and the Hamilton-Jacobi-Bellman equation*, Journal of differential Equation, 116(1995), pp 265-305.

[34] A. Gavioli, *Approximation from the interior of a multifunction and its Applications in the "Sweeping Process"*, Journal of Differential Equations 92, pp, 373-383, (1991).

[35] M. G. Grandall, *A generalization of Peano's theorem and flow invariance*, Proc. Am. Math. Soc. 36(1972) 51-55.

[36] T. Gnava Bhaskar, V. Lakshmikanthan, *Generalized proximal normals and flow invariance for differential inclusions*, Nonlinear Studies, 10(2003), 29-37.

[37] M. G. Grandall, *A generalization of peano's theorem and flow invariance*, Proc. Amer. Math. Soc., 36(1972), pp. 151-155.

[38] Kh.Guseiniov and V.N. Ushakov, *Strogly and Weakly invariant sets with respect to differential inclusions.* (Russian) Differ. Uravneniya 26(1990), 1888-1894.

[39] G. Haddad, *Monotone trajectories for functional differential inclusions*, J. Differ. Equations, 42 (1981), 1-24.

[40] P. Hartman, *On invariant sets and on a theorem of Warewski*, Proc. Amer. Math. Soc., 32(1972), pp. 511-520.

[41] A. G. Ibrahim, *On differential inclusions with memory in Banach spaces*, Proc. Math. Phys. Soc. Egypt, 67(1992), 1-26.

[42] W. Jachimiak, *Viability for functional differential equations*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematics, V.42, n.1,1994, 55-61.

[43] S. Kato, *Existence, uniqueness and continuous dependence of solutions of delay-differential equations with infinite delays in Banach space*, J. Math. Anal. Appl., 195 (1995), 82-91.

[44] M. Krastanov, *Forward invariant sets, homogeneity and small-time local controlability*, Geometry in Nonlinear Control and Differential Inclusion, B. Jakubczyk et al. eds., Banach Center Publ., 32 Polish Acad. Sci., Warsaw, 1995, 267-300.

[45] Yu. S. Ledyaev, *Creteria for viability of trajectories of non autonomous differential inclusions and their applications*, J-Math. Anal. App. 182(1)(1994) 165-188.

[46] V. Lakshmikantham, A. R. Mitchell, R.W. Mitchell, *On the existence of solutions of differential equations of retard type in Banach space*, Ann.Polonici.Math.XXXV(1978).

[47] V. Lakshmikantham, L. Wen, B. Zhang, *Theory of differential equations with unbounded delay*, Kluwer Academic Publishers 1994.

[48] E. Mitidier, I. I. Vrabie, *Existence for nonlinear functional differential equation*, Hiroshima Math. J., 17 (1987) 627-649.

[49] M. Moussaoui, *Approximations lipschitziennes de Multifonctions.* Application aux conditions necessaires d'optimalité, Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier. Exposé n06,(1990).

[50] V. S. Pugachev et I. N. Sinitsyn, *Lecture on Fonctional Analysis and Applications, World scientific*, Singapore 1999.

[51] A. E. Rapaport, R. B. Vinter,*Invariance properties of time measurable differential inclusions and dynamic programming*, J-Dyn. Control Syst, 2(3)(1996) 423-448.

[52] R. M. Redheffer, W. Walter, *Flow-invariant sets and differential inequaalities in normed spaces*, Applicable Analysis, 5(1975), pp 149-161.

[53] V. Rios *Dissipative Lipschitz Dynamics*, Thesis, Louisiana State University, 2005.

[54] V. Rios, P. Wolneski, *A characterization of strong invariant for systems for a class of non-Lipschitz multifunctions*, Proceedings IEEE Conference on Decision and Control, Maui, Hawaii USA, 2003, pp. 2593-2594.

[55] A. Syam, *Contribution aux inclusions différentielles*, Thèse. Université de Montpellier II. 1993.

[56] V. M. Veliov, *Sufficient conditions for viability under imperfect measurement*, Set-valued Anal. 1(1993) 305-317.

[57] R. Vinter, *Optimal control*, Birkhäuser, Boston, 2000.

[58] I. I. Vrabie, *Nagumo viability theorem.* Revisited Nonlinear Anal., 64(2006), 2043-2052.

[59] I. I. Vrabie, *A viability result for a class of ordinary differential equations in Banach space*, Mathematical Analysis and Applications, 14-157, AIP Conference Proceedings, Volume 835, AIP conf. Proc., 835 Amer, Inst. Phys.Melville NY,2006.

[60] M. F. Yarou ; Discretization Methods For Nonconvex Differential Inclusions, Electr. J. Qual. Theo. Diff. Equ. 12, (2009) 1-10.

[61] J. A. Yorke,*Invariance for ordinary differential equations*, Math, Systems Theory, 1(1967),353-372.