REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Sientifique

UNIVERSITÉ MOHAMMED SEDDIK BEN YAHIA-JIJEL

THÈSE

Présentée à la Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

Pour l'obtention du diplôme de

Doctorat L.M.D

Spécialité Mathématiques Appliquées

Par

Meriem AISSOUS

Thème

Problèmes d'Évolution pour des Opérateurs Presque Convexes

Soutenue publiquement le 31/10/2018

Devant le jury composé de

Président :	**T. Zerzaihi**	**Prof.**	Université de Jijel
Directeur de Thèse :	**M. F. Yarou**	**Prof.**	Université de Jijel
Examinateurs :	**M. Deneche**	**Prof.**	Université de Constantine.1
	A. Guesmia	**M.C.Habilité.**	Université de Lorraine-France
	W. Chikouche	**M.C.A.**	Université de Jijel
Invité :	**D. Affane**	**M.C.A.**	Université de Jijel

Remerciements

Je remercie en premier lieu Dieu, qui m'a donné la fois et le courage de pouvoir terminer cette thèse.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de thèse ***Mustapha Fateh Yarou*** *Professeur à l'université de Jijel, d' avoir accepté de m'encadrer pendant la durée de ce travail, d'avoir assurer le bon déroulement du parcours du doctorat, et pour sa disponibilité et ses précieuse conseils au cours de ces années.*

Je voudrais adresser mes remerciement à Monsieur ***T. Zerzaihi*** *Professeur à l'université de Jijel, qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury.*

J'adresse de sincères remerciement également à Messieurs ***M. Denche*** *Professeur à l'université de constantine.1,* ***A. Guesmia*** *Maitre de Conférence Habilité à l'université de Lorraine, Madame* ***W. Chikouche*** *Maitre de Conférence à l'université de Jijel, pour avoir accepter d'examiner cette thèse, je vous remercie pour l'intérêt que vous avez porté à ce travail et pour vos précieuse remarques.*

Je tiens à exprimer aussi ma reconnaissance à Madame ***D. Affane*** *Maitre de Conférence à l'université de Jijel pour sa contribution remarquable dans cette thèse et son aide qui a permis de mener à bien ce travail.*

J'aimerais bien exprimer toute ma gratitude et mes remerciement à ma famille, mes collègues du laboratoire de recherche, et toute la famille du département de mathématiques de l'université de Jijel.

Table des matières

Introduction

Le processus de la rafle est une inclusion différentielle particulière de la forme générale

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(x(t)) \quad p.p\ t \geq 0 \\ x(0) \in C(0). \end{cases} \tag{1}$$

où $C(t)$ est un sous ensemble fermé qui dépend du temps t, et $N_{C(t)}(x(t))$ est le cône normal de $C(t)$ à $x(t)$. Ce problème d'évolution a été introduit la première fois par J.J. Moreau dans les années 70 où il considère $C(t)$ convexe et variant d'une manière absolument continue. Ce modèle mathématique a été utilisé essentiellement en mécanique non lisse, elastoplasticité, optimisation convexe, et en économie mathématique.

Depuis, divers autres travaux ont été développés sur le problème (1) afin d'obtenir des résultats d'existence plus généraux. Citons par exemple Henry[26] et Cornet[20] où ils ont introduit une force extérieure au système appelée perturbation multivoque, pour étudier des procédures de planing en économétrie. Le problème s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{C}(x(t)) + F(x(t)) \quad p.p\ t \geq 0 \\ x(0) \in C. \end{cases} \tag{2}$$

où C est fixé. Ce problème est appelé dans la littérature processus de la rafle perturbé autonome (c.a.d F ne dépend pas séparément du temps t). Henry a étudié l'existence de la solution de (2) en considérant C convexe et $F(.)$ semicontinue supérieurement à valeurs convexes. Ce résultat a été généralisé par de nombreux chercheurs dans le cas non autonome

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(x(t)) + F(t, x(t)) \quad p.p\ t \geq 0 \\ x(0) \in C(0). \end{cases} \tag{3}$$

en affaiblissant la condition de la convexité sur $C(t)$, ou sur $F(.)$ ou même les deux. Dans [5] les auteurs montrent l'existence d'une solution absolument continue du problème (2) où la perturbation est à valeurs non convexes, particulièrement presque convexes, qui est une condition plus faible introduite la première fois par Cellina-Ornelas dans [15] où la méthode de démonstration utilisée est la relaxation. Elle consiste à déduire la solution du problème (2) en fonction de la solution du problème avec perturbation à valeurs convexes établi dans [13].

Les hypothèses sur la perturbation ne sont pas restreintes sur la convexité des valeurs mais s'étendent aussi à la compacité et la bornitude, Noel et Thibault dans [29] ont étudié l'inclusion

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{C(t,x(t))}(x(t)) + F(t,x(t)) \quad p.p\ t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \in C(0,x_0). \end{cases} \tag{4}$$

en supposant que les valeurs de $F(.)$ ne sont pas nécessairement bornées mais admettent un élément de norme minimale borné, et ont montré que même avec cette condition, et sans compacité, le problème admet toujours au moins une solution.

Dans notre thèse, nous allons nous investir dans les deux travaux mentionnés ci-dessus pour montrer l'existence de solution du problème (3) où la perturbation est à valeurs convexes non nécessairement bornées en s'inspirant de la méthode de discrétisation dans [10] et [29], ensuite on utilisera ce résultat pour établir la solution du problème (2) où la perturbation $F(.)$ est à valeurs presque convexes en utilisant la relaxation développée dans [5].

Un autre axe de recherche prendra la semicontinuité des perturbations comme sujet principal. Il y a des travaux qui supposent la semicontinuité supérieure des perturbations comme [10, 13, 35]. D'autres qui la prennent semicontinue inférieurement comme [6, 21], et ceux qui combinent les deux c'est à dire en considérant des perturbations multivoques vérifiant la semicontinuité supérieure sur les points de la convexité et la semicontinuité inférieure sur les points de la non convexité c'est ce qu'on appelle la semicontinuité mixte. Ce terme apparait dans ce sens dans les travaux de Tolstonogove [34], où il démontre que les applications multivoques semicontinues mixtes admettent des multiselections à valeurs convexes

$$\begin{aligned} &\Phi : \mathcal{K} \rightrightarrows L^1([T_0,T],\mathbb{R}^n) \\ &\qquad u \rightarrow \Phi(u) = \{\phi(.) \ \ : \ \ \phi(t) \in F(t,u(t))\ \ p.p\ t \in [T_0,T]\} \end{aligned}$$

où $\mathcal{K}$ est un sous ensemble compact de $C([T_0,T],\mathbb{R}^n)$. Citons aussi le travail de Fryszkowski-Gorniewiczce [23]. Ces résultats ont ouvert la porte à de nombreuses applications pour le problème du processus de la rafle. Dans [25] les auteurs ont montré que le processus de la rafle non convexe dépendant du temps admet une solution absolument continue lorsque il est perturbé par une multiapplication semicontinue mixte dans un espace de dimension finie, et dans [24] ils ont étudié le même problème mais dans un espace de Hilbert où l'ensemble raflé est non convexe et dépend de l'état. Dans les deux travaux, la méthode de démonstration est basée sur le théorème d'existence d'une multiselection à valeurs convexes obtenue par [34] ainsi que l'utilisation du théorème du point fixe. Dans notre travail le but est toujours d'établir l'existence de solution au processus de la rafle perturbé, mais on va affaiblir la semicontinuité mixte de la perturbation par une nouvelle classe d'ensemble, appelée la presque semicontinue mixte. En d'autres termes, on pose la semicontinuité supérieure au points de la presque convexité, et la semicontinuité inférieure sur les voisinages des points de la non presque convexité, et on démontre l'existence de solution par la méthode de la relaxation au lieu du point fixe.

Cette thèse est composée de trois chapitres. Dans le premier, nous rappelons certaines notions préliminaires nécessaires à la compréhension de tous ce qui suit. Nous en profitons pour rappeler quelques concepts de l'analyse multivoque, des outils d'analyse non lisse, des théorèmes de convergence, l'ensemble admissible, et la notion de la presque convexité.

Le chapitre 2 est consacré à l'étude de processus de la rafle perturbé par une multiapplication à valeurs convexes non nécessairement bornées en utilisant l'algorithme de rattrapage de Moreau, puis on montre comment on peut utiliser ce résultat pour établir l'existence de la solution dans le cas où les valeurs de la perturbation sont presque convexes. Dans ce chapitre, nous allons aussi étudier les propriétés topologiques de l'ensemble des trajectoires et l'ensemble admissible pour les utiliser dans la résolution du problème de temps optimal en s'inspirant d'un travail de N. Papageorgiou dans [30].

Dans le chapitre 3, nous utilisons les résultats publies dans [25, 34] pour établir l'existence de solution pour un processus de la rafle perturbé par une multiapplication presque semicontinue mixte, puis on montrera que ce résultat peut être appliqué dans le problème de temps optimal en utilisant, comme dans le chapitre 2, les propriétés topologiques de l'ensemble admissible.

Chapitre 1

Notations et Préliminaires

Sommaire

Dans ce chapitre nous introduisons quelques notions essentielles d'analyse multivoque, notamment sur la semicontinuité et les théorèmes de sélection, ensuite nous rappelons quelques théorèmes et résultats de base sur la compacité. Nous allons aussi résumer quelques notions et résultats liées à l'analyse non lisse, qui forment un outil principal dans l'étude du *processus de la rafle*, et enfin nous présentons les concepts les plus importants dans la thèse l'ensemble admissible, et la *Presque Convexité.*

Nous commençons par donner quelques notations utilisées au cours de ce travail.

1.1 Notations

Dans ce qui suit on considère $\mathbb{R}^n$ l'espace euclidien de dimension finie n, de boule unité fermée $\overline{\mathbb{B}}$ [1], et de norme $\|.\|$. Pour $[T_0, T]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ on note

- $C_{\mathbb{R}^n}([T_0, T])$ l'espace de Banach de toutes les fonctions continues définies sur $[T_0, T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.
- $L^1_{\mathbb{R}^n}([T_0, T]) = \{f : [T_0, T] \to \mathbb{R}^n$ tq f est mesurable et $\int_{T_0}^{T} \|f(t)\| dt < +\infty\}$

1. Elle peut aussi designer la boule unité fermée de l'espace indiqué.

l'espace des fonctions intégrables, munie de la norme

$$\|f\|_{L^1} = \int_{T_0}^{T} \|f(t)\|dt.$$

. $L^{\infty}_{\mathbb{R}^n}([T_0,T]) = \{f : [T_0,T] \to \mathbb{R}^n$ tq f est mesurable et il existe une constante c vérifiant $\|f(t)\| \leq c$ p.p. sur $[T_0,T]\}$ muni de la norme

$$\|f\|_{L^{\infty}} = \inf\{c\ ;\ \|f(t)\| \leq c \quad \text{p.p. sur } [T_0,T]\}.$$

. $\sigma(L^1_{\mathbb{R}^n}, L^{\infty}_{\mathbb{R}^n})$ la topologie faible définie sur $L^1_{\mathbb{R}^n}([T_0,T])$.
. $\sigma(L^{\infty}_{\mathbb{R}^n}, L^1_{\mathbb{R}^n})$ la topologie faible* définie sur $L^{\infty}_{\mathbb{R}^n}([T_0,T])$.
. $\to$ désigne la convergence uniforme.
. $\mathcal{L}([T_0,T])$ la tribu de Lebesgue sur $[T_0,T]$.
.$\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ la tribu de Borel sur $\mathbb{R}^n$.
. $< .,. >$ le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$, et aussi il peut signifier le produit scalaire dans la dualité $L^1_{\mathbb{R}^n}([T_0,T])$, $L^{\infty}_{\mathbb{R}^n}([T_0,T])$.

Pour $\mathcal{A}$ un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$, on note par :
. $co(\mathcal{A})$ l'enveloppe convexe de $\mathcal{A}$.
. $\overline{co}(\mathcal{A})$ l'enveloppe convexe fermé de $\mathcal{A}$.
. $d(x,\mathcal{A})$ la distance entre le point $x \in \mathbb{R}^n$ et l'ensemble $\mathcal{A}$ définie par

$$d(x,\mathcal{A}) = \inf_{a\in\mathcal{A}} \|x-a\|.$$

. $\delta^*(.,\mathcal{A})$ la fonction support associée à $\mathcal{A}$ définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\delta^*(x,\mathcal{A}) = \sup_{a\in\mathcal{A}} < x, a >, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Lorsque $\mathcal{A}$ est fermé on note
. $Proj_{\mathcal{A}}(x)$ la projection du point $x \in \mathbb{R}^n$ dans l'ensemble $\mathcal{A}$, définie par

$$Proj_{\mathcal{A}}(x) = \{y \in \mathcal{A} \quad : \quad d(x,\mathcal{A}) = \|y-x\|\}$$

Si de plus $\mathcal{A}$ est convexe la projection est unique et vérifie

$$y \in Proj_{\mathcal{A}}(x) \Leftrightarrow\ y \in \mathcal{A} \ \text{ et } \ < x-y, y-a > \geq 0 \quad \forall a \in \mathcal{A}.$$

. $\mathbf{1}_{\mathcal{A}}$ et $\psi_{\mathcal{A}}$ désignent respectivement la fonction caractéristique et indicatrice associées à $\mathcal{A}$, données par

$$\mathbf{1}_{\mathcal{A}}(x) = \begin{cases} 1 \ \text{ si } x \in \mathcal{A}, \\ 0 \ \text{ si } x \notin \mathcal{A}. \end{cases}$$

$$\psi_{\mathcal{A}}(x) = \begin{cases} 0 \ \text{ si } x \in \mathcal{A}, \\ +\infty \ \text{ si } x \notin \mathcal{A}. \end{cases}$$

. La distance de Hausdorff entre deux ensembles fermés $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$, est définie par :

$$\mathcal{H}(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \max\{e(\mathcal{A},\mathcal{B}); e(\mathcal{B},\mathcal{A})\},$$

où $e(.,.)$ est l'excès entre deux ensembles, donné par

$$e(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \sup_{a\in\mathcal{A}} d(a,\mathcal{B}).$$

1.2 Préliminaires et Résultats de base

1.2.1 Notions d'analyse multivoque

L'analyse multivoque est une importante branche de mathématiques et un outil de base dans tous les domaines de mathématiques appliquées. Elle étudie les propriétés des relations définies d'un ensemble X dans un ensemble Y, appelées dans la littérature *applications multivoques, multiapplications, multifonctions*, ou *correspondances.*

Dans cette sous section, nous rappelons quelques notions de base de cette classe de relations, les définitions et les résultats suivants ont été pris des références [6, 7, 21].

Dans tout ce qui suit, sauf indication contraire, X et Y sont deux espaces topologiques.

Définition 1.2.1. *Une multiapplication F de X vers Y, est une relation de X vers Y qui à tout élément $x \in X$, fait correspondre un sous ensemble $F(x)$ de Y, on note*

$$\begin{aligned} F : &X \rightrightarrows Y \\ &x \to F(x) \subseteq Y \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

Définition 1.2.2. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multiapplication.*

1. *Le domaine de définition de F est l'ensemble $Dom(F) = \{x \in X \ : \ F(x) \neq \emptyset\}$.*
2. *Le graphe de F est le sous ensemble de $X \times Y$ noté $gph(F)$ et défini par*
$$gph(F) = \{(x,y) \in X \times Y \ : \ \ y \in F(x)\}$$
3. *On appelle image de F, l'ensemble $ImF = \{y \in Y \ : \ \exists x \in X \ , \ y \in F(x)\}$.*
4. *On appelle image d'une partie $\mathcal{A}$ de X par F, l'ensemble $F(\mathcal{A}) = \bigcup_{a\in\mathcal{A}} F(a)$.*
5. *On appelle image réciproque large (ou simplement pré-image)d' une partie non vide $\mathcal{B}$ de Y par F, l'ensemble*
$$F^{-1}(\mathcal{B}) = \{x \in X \ : \ F(x) \cap \mathcal{B} \neq \emptyset\}.$$
6. *On appelle image réciproque étroite de $\mathcal{B}$, l'ensemble*
$$F_{+}^{-1}(\mathcal{B}) = \{x \in X \ : \ F(x) \subseteq \mathcal{B}\}.$$

Aspect topologique des multiapplication

Définition 1.2.3. *(Semicontinuité supérieure)* $F : X \rightrightarrows Y$ *est dite semicontinue supérieurement (s.c.s) en* $x_0 \in X$ *si et seulement si pour tout ouvert* V *de* Y *telle que* $F(x_0) \subseteq V$*, il existe un voisinage* U *de* x_0 *dans* X *telle-que* $F(x) \subseteq V$, $\forall x \in U$.
F *est s.c.s, si et seulement si elle est s.c.s en tout point* x *de* X.

Proposition 1.2.1.
1) F *est s.c.s, si et seulement si l'image réciproque étroite de tout ouvert de* Y *est un ouvert de* X.
2) F *est s.c.s, si et seulement si la pré-image de tout fermé de* Y *est un fermé de* X.

Théorème 1.2.1. *Si* F *est une multiapplication s.c.s à valeurs fermées, alors* $gph(F)$ *est fermé.*

Le réciproque est donnée par le corollaire suivant

Corollaire 1.2.1. *Soit* $F : X \rightrightarrows Y$ *une multiapplication à valeurs non vides, avec* Y *un espace compact. Si* $gph(F)$ *est fermé alors* F *est s.c.s.*

Définition 1.2.4. *(Semicontinuité inférieure)* $F : X \rightrightarrows Y$ *est dite semicontinue inférieurement (s.c.i) en* $x_0 \in X$*, si et seulement si pour tout ouvert* V *de* Y *vérifiant* $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$*, il existe un voisinage* U *de* x_0 *dans* X*, telle-que pour tout* $x \in U$
$F(x) \cap V \neq \emptyset$.
Si F *est s.c.i en tout* $x \in X$*, on dit que* F *est s.c.i.*

Proposition 1.2.2.
1) F *est s.c.i , si et seulement si la pré-image de tout ouvert de* Y *est un ouvert de* X.
2) F *est s.c.i, si et seulement si l'image réciproque étroite de tout fermé de* Y *est un fermé de* X.

Théorème 1.2.2. *Soient* X *et* Y *deux espaces métriques,* $F : X \rightrightarrows Y$ *est s.c.i au point* x_0 *si et seulement si pour toute suite* (x_n) *de* X*, tel que* $x_n \to x_0$ *et pour tout* $y_0 \in F(x_0)$*, il existe une suite* (y_n) *tels que* $y_n \in F(x_n)$ *et* $y_n \to y_0$.

Définition 1.2.5. *(Continuité) On dit que* F *est continue si et seulement si, elle est s.c.s et s.c.i.*

Définition 1.2.6. *(Continuité au sens de Hausdorff) Soient* X *et* Y *deux espaces métriques,* $F : X \rightrightarrows Y$ *à valeurs compactes est dite* $\mathcal{H}$*-continue ou continue au sens de Hausdorff, si et seulement si pour toute suite* (x_n) *de* X *qui converge vers* x_0*, on a*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{H}(F(x_n), F(x_0)) = 0.$$

Mesurabilité

Définition 1.2.7. *Supposons que (T, Σ) est un espace mesurable, et Y un espace métrique, $F : T \rightrightarrows Y$ est mesurable, si et seulement si la pré-image de tout ouvert de Y, est un ensemble mesurable de T.*

Pour montrer la mesurabilité d'une multiapplication, il est recommandé d'utiliser un des résultats de la proposition suivante, ces résultats se trouvent dans une forme plus générale dans [**?**, 14], on les rédige dans $\mathbb{R}^n$ afin de ranger toutes les équivalences nécessaires dans les démonstrations de nos théorèmes.

Proposition 1.2.3. *Soit $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multiapplication à valeurs convexes compactes. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*
i) *F est mesurable.*
ii) *Pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ la fonction $d(y, F(.))$ est mesurable.*
iii) *Le graphe de F est $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \times \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ mesurable.*

Démonstration.
i) $\Rightarrow$ ***ii)***
Supposons que F est mesurable, pour tout y fixé de $\mathbb{R}^n$ on définit la fonction

$$\begin{aligned} g_y : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\to g_y(x) = d(y, F(x)). \end{aligned}$$

Soit $]-r, r[$ un ouvert de $\mathbb{R}$ $r \in \mathbb{R}$

$$g^{-1}(]-r, r[) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ d(y, F(x)) < r\} = F^{-1}(B(y, r)) \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$$

car F est mesurable. D'où

$$g^{-1}(]-r, r[) \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n).$$

On conclue que la fonction $d(y, F(.))$ est mesurable.

ii) $\Rightarrow$ ***iii)***
Supposons que pour tout y fixé de $\mathbb{R}^n$ la fonction $d(y, F(.))$ est mesurable, considérons le graphe de F

$$\begin{aligned} gph(F) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ : \ y \in F(x)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ : \ d(y, F(x)) = 0\} \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} \phi : &\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+ \\ &(x, y) \to \phi(y, x) = d(y, F(x)) \end{aligned}$$

donc

$$gph(F) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ : \ \phi(y, x) = 0\} = \phi^{-1}(\{0\}).$$

la fonction $\phi(.,.)$ est une fonction, continue par rapport à la premier et mesurable par rapport à la deuxième, alors elle est globalement mesurable, d'où

$$gph(F) = \phi^{-1}(\{0\}) \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$$

et le graphe de F est mesurable.
iii) $\Rightarrow$ i)
Supposons que $gph(F) \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$, soit $\mathcal{B}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} Proj_{\mathbb{R}^n}[gph(F) \cap (\mathbb{R}^n \times \mathcal{B})] &= \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \exists y \in \mathbb{R}^n \ \text{ tels que } \ (x, y) \in gph(F) \cap (\mathbb{R}^n \times \mathcal{B})\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \exists y \in \mathbb{R}^n \ \text{ tels que } \ y \in F(x) \text{ et } y \in \mathcal{B}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \exists y \in \mathbb{R}^n \ \text{ tels que } \ y \in F(x) \cap \mathcal{B}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ F(x) \cap \mathcal{B} \neq \emptyset\} \\ &= F^{-1}(\mathcal{B}) \end{aligned}$$

Comme $gph(F) \cap (\mathbb{R}^n \times \mathcal{B})$ appartient à $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$, alors $F^{-1}(\mathcal{B})$ est borélien, d'où F est mesurable. □

On s'intéresse dans la suite par l'enveloppe convexe de la multiapplication défini par

$$\begin{aligned} co(F) : &X \rightrightarrows Y \\ &x \to co(F)(x) = co(F(x)), \end{aligned}$$

Proposition 1.2.4. *Soit F une multiapplication définie de X à valeurs dans un espace de Banach de dimension finie Y. Si F est à valeurs compactes, alors*
i) $F(.)$ est semicontinue supérieurement $\Rightarrow$ $co(F)(.)$ est semicontinue supérieurement.
ii) $F(.)$ est semicontinue inférieurement $\Rightarrow$ $co(F)(.)$ est semicontinue inférieurement.
iii) Si X est un espace mesurable, $F(.)$ est mesurable $\Rightarrow$ $co(F)(.)$ est mesurable.

Sélection

Dans les démonstrations classiques des théorèmes de l'inclusion différentielle, le choix d'une fonction f vérifie : $f(x) \in F(x) \ \ \forall x \in Dom(F)$, forme une étape très importante. Cette fonction est dite sélection, et elle a plusieurs types citons par exemple : *sélection mesurable, sélection continue, la sélection de Chebyshev.* Dans ce travail on s'intéresse essentiellement par les sélections mesurables et minimales, qui seront apparues souvent dans nos démonstrations.

Définition 1.2.8. *(Sélection mesurable) On appelle sélection mesurable d'une multiapplication F définie d'un espace mesurable (T, Σ) dans Y, toute fonction mesurable $f : Dom(F) \to Y$, telle que $f(x) \in F(x)$, pour tout $x \in Dom(F)$.*

Proposition 1.2.5. *(Existence d'une sélection mesurable) Soient X un espace mesurable, Y un espace métrique complet séparable, et $F : X \rightrightarrows Y$ une multiapplication à valeurs fermées non vides. Si F est mesurable alors elle admet au moins une sélection mesurable.*

Définition 1.2.9. *(Sélection minimale) Soient X un espace métrique, Y un espace de Banach , et $F : X \rightrightarrows Y$ une multiapplication, on définit la multiapplication minimale de F par*

$$m(F(x)) = \{y \in F(x) \;\; : \;\; \|y\| = \min_{u \in F(x)} \|u\|\}.$$

Si Y est un espace de Hilbert, et F est à valeurs fermées convexes, alors la multiapplication minimale $m(F(.))$ devient une fonction univoque dite sélection minimale*, donnée explicitement par*

$$m(F(x)) = Proj_{F(x)}(0)$$

Dans la proposition suivante, nous allons voir que sous certaines hypothèses sur l'espace, la sélection minimale lorsque elle existe est mesurable, et donc elle est considérée comme un cas particulier des sélections mesurables.

Proposition 1.2.6. *Soient X un espace métrique complet mesuré σ-fini, Y un espace métrique complet séparable, et $F : X \rightrightarrows Y$ une multiapplication mesurable à valeurs fermées convexes. Alors la sélection minimale $m(F(.))$ est mesurable.*

Démonstration.
la preuve est basée sur le corollaire suivant

Corollaire 1.2.2. *[7] Sous les hypothèses de la proposition ci-dessus, et si de plus $g : X \to Y$ et $\rho : X \to \mathbb{R}_+$, sont deux fonctions univoques mesurables. Alors les applications suivantes sont mesurables*

1. $t \to \overline{\mathbb{B}}(g(x), \rho(x))$.
2. $t \to d(g(x), F(x))$.
3. $t \to Proj_{F(x)}(g(x))$.

Donc il suffit de considérer $g(.)$ la fonction nulle, c'est à dire

$$g(x) = 0 \quad \text{pour tout} \;\; t \in T,$$

puis déduire la mesurabilité de $m(F(.))$ directement du troisième point du corollaire. □

Théorèmes de fermeture

Les deux théorèmes suivants vont jouer un rôle très important dans cette thèse, pour leurs preuves voir [6, 14].

Commençons par énoncer le théorème dit : *The Convergence Theorem*, qui traite le cas autonome c.a.d lorsque F dépend d'une seule variable $x \in X$.

Théorème 1.2.3. *Soient X un espace de Hausdorff localement convexe, Y un espace de Banach, et $F : X \rightrightarrows Y$ une multiapplication s.c.s à valeurs fermées convexes. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_n : I \to X$, $y_n : I \to Y$ des fonctions mesurables de I deux suites mesurable, satisfaisant*

$$\forall\ t \in T,\ \forall\ O \in \mathcal{V}(0) \text{ dans } X \times Y, \text{ il existe un } n_0 = n_0(t, O), \text{ tels que } \forall n \geq n_0$$

$$(x_n(t), y_n(t)) \in gph(F) + O.$$

Si *i)* (x_n) *converge presque partout vers une fonction* x *de* T *dans* X,

ii) (y_n) *appartient à* $L^1(T, Y)$ *et converge faiblement vers* y *dans* $L^1(T, Y)$.

Alors $y(t) \in F(x(t))$ *p.p.* $t \in T$.

Le deuxième théorème est intéressé par le cas où F dépend aussi du temps i.e le cas non autonome.

Théorème 1.2.4. *Soient Y un espace de Banach séparable, X un espace topologique, T un intervalle de $\mathbb{R}$, et F une miltiapplication définie sur $T \times X$ à valeurs non vide convexes compactes dans Y et telle que pour tout $t \in T$ fixé, $F(t, .)$ est s.c.s. Soient (x_n), x des applications définies sur T à valeurs dans X et (y_n), y des applications intégrables définies sur T à valeurs dans Y. Supposons que*

1. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n(t) = x(t)$ *p.p. sur* T,
2. (y_n) *converge vers* y $\sigma(L^1_Y, L^\infty_{Y'})$,
3. $y_n(t) \in F(t, x_n(t))$, *p.p. sur* T.

Alors $y(t) \in F(t, x(t))$, *p.p. sur* T.

1.2.2 Quelques résultats de convergence

Commençons par rappeler le théorème d' *Ascoli-Arzelà*, mais tout d'abord on énonce la définition de l'équicontinuité

Définition 1.2.10. *(Fonctions équicontinues) Si (X, d) et (Y, d) sont des espaces métriques, une partie $\mathcal{A}$ de $C(X, Y)$ est dite équicontinue si :*

$$\forall x \in X,\ \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall f \in \mathcal{A},\ \forall x' \in X,\ d(x, x') < \delta\ \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \epsilon.$$

Autrement dit, toutes les fonctions f de $\mathcal{A}$ sont continues sur X, et elles sont continues "de la même façon".

Théorème 1.2.5. *Soient E un espace métrique compact, (H, d) un espace métrique complet et $\mathcal{A}$ un sous ensemble de l'espace des applications continues définies sur E à valeurs dans H, muni de la topologie de la convergence uniforme. Alors $\mathcal{A}$ est relativement compact si et seulement si $\mathcal{A}$ est équicontinue, et l'ensemble*

$$\mathcal{A}(x) = \{\, y(x) \;:\; y \in \mathcal{A}\,\}$$

est relativement compact.

Nous allons utiliser souvent dans nos démonstrations la conséquence d'*Ascoli-Arzelà*, qui se trouve en détail dans [6].

Théorème 1.2.6. *Soient I un sous ensemble compact réel, E un espace de Banach, et (x_n) une suite de fonctions absolument continues définies sur I à valeurs dans E satisfaisant les conditions suivantes*

$$\begin{cases} 1) \forall t \in I, \{x_n(t)\} \text{ est un sous ensemble relativement compact dans } E \\ 2) \text{Il existe une fonction à valeurs réelles positives } c(.) \in L^1_{\mathbb{R}}(I) \text{ telle que} \\ \qquad\qquad \|\dot{x}_n(t)\| \leq c(t) \quad p.p.\ t \in I \end{cases}$$

Alors il existe une sous suite de (x_n) (qu'on note aussi (x_n)) qui converge vers une application absolument continue $x : I \to E$ au sens suivant

$$\begin{cases} 1)(x_n) \text{ converge uniformément vers } x \\ 2)(\dot{x}_n) \text{ converge faiblement vers } \dot{x} \text{ dans } L^1_E(I). \end{cases}$$

Lemme 1.2.1. *Soit E un espace de Banach. Si (x_n) converge faiblement vers x dans E, alors il existe une suite (y_n) avec chaque y_n combinaison convexe des $(x_k)_{k \geq n}$, qui converge fortement vers x.*

1.2.3 Outils d'analyse non lisse

Dans cette sous section nous présentons quelques concepts classiques de l'analyse non lisse (sous différentiel, cône, prox-régularité, ...) ces outils servent à démontrer l'existence de solution du processus de la rafle dans ces différentes formes c.a.d. perturbé ou non, premier ou deuxième ordre, dépend de temps ou de l'état. Rappelons aussi que l'analyse non lisse à de nombreux utilisations dans les différentes branches de mathématique, citons comme exemple l'*Optimisation* et le *Contrôle Optimal.*

Soient X un espace vectoriel normé, $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction achevée à valeurs réelles, et $\overline{x} \in dom f$.

Définition 1.2.11. *(La dérivée directionnelle) La dérivé directionnelle de f en $\overline{x}$ dans la direction $v \in X$, est notée $f'(\overline{x}, v)$ et vaut*

$$f'(\overline{x}, v) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(\overline{x} + tv) - f(\overline{x})}{t}$$

si la limite existe.
Cette dérivée donne le taux de variation de f en $\overline{x}$ dans la direction v.

Définition 1.2.12. *(La dérivée directionnelle au sens de Clarke) Supposons que f est une fonction localement lipschitzienne en $\overline{x}$, alors la dérivée directionnelle au sens de Clarke de f en $\overline{x}$ dans la direction $v \in X$ est notée et définie par*

$$f^{\circ}(\overline{x}, v) = \limsup_{\substack{t \downarrow 0 \\ x \to \overline{x}}} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}.$$

Lorsque la fonction f est non différentiable en $\overline{x}$ (dite aussi non lisse), la dérivée classique de f est remplacée par le sous différentiel, ce dernier est généralement défini à travers les dérivées directionnelles quand elles existent.

Définition 1.2.13. *(Sous différentiel d'une fonction convexe) Soient f une fonction convexe définie sur X, on définit le sous différentiel de f en $\overline{x}$ par*

$$\partial f(\overline{x}) = \{y \in X^* \ : < y, v > \leq f'(\overline{x}, v), \ \forall v \in X\}.$$

Quand f est continue, le sous différentiel vérifie les propriétés suivantes

1. $\partial f(\overline{x}) = \{y \in X^* \ : < y, x - \overline{x} > \leq f(x) - f(\overline{x}), \forall x \in X\}$.

2. $\partial(f+g)(\overline{x}) = \partial f(\overline{x}) + \partial g(\overline{x})$, pour toute fonction convexe continue g définie sur X.

3. $\partial(\alpha f)(\overline{x}) = \alpha \partial f(\overline{x})$, pour tout α constant réel.

Définition 1.2.14. *(Le sous différentiel de Clarke) Le sous différentiel de Clarke, d'une fonction f localement lipschitzienne en $\overline{x} \in X$ est défini par*

$$\partial^C f(\overline{x}) = \{y \in X^* \ : < y, v > \leq f^{\circ}(\overline{x}, v), \ \forall v \in X\}$$

Définition 1.2.15. *(Le sous différentiel proximal) Le sous différentiel proximal de f localement lipschitzienne en $\overline{x} \in X$, est l'ensemble $\partial^p f(\overline{x})$ de tous les éléments y de X^* tels qu'il existe deux constantes réels positives $\sigma > 0$ et $\delta > 0$ vérifient*

$$< y, x - \overline{x} > \leq f(x) - f(\overline{x}) + \sigma \|x - \overline{x}\|^2 \ \ \forall \, x \in \mathbb{B}(\overline{x}, \delta).$$

On a toujours

$$\partial^p f(\overline{x}) \subset \partial^c f(\overline{x})$$

et si f est convexe continue

$$\partial^p f(\overline{x}) = \partial^c f(\overline{x}) = \partial f(\overline{x}).$$

Soient S un sous ensemble fermé de X et $\overline{x} \in S$, si S est convexe on définit

- **Le cône tangente** de S en $\overline{x}$

$$T_S(\overline{x}) = cl\{\alpha(s - \overline{x}) \ : \ \alpha \in \mathbb{R}^+, \ s \in S\}$$

- **Le cône normal** de S en $\overline{x}$

$$\begin{aligned} N_S(\overline{x}) &= \{y \in X^* \ :< y, v > \leq 0, \ \forall v \in T_S(\overline{x})\} \\ &= \{y \in X^* \ :< y, x - \overline{x} > \leq 0, \ \forall x \in S\} \end{aligned}$$

Il est connu aussi comme le sous différentiel de la fonction indicatrice

$$N_S(\overline{x}) = \partial \psi_S(\overline{x})$$

et vérifie les propriétés suivantes

Proposition 1.2.7. *Soit S un sous ensemble fermé convexe d'un espace de Hilbert H, alors pour tout $\overline{x} \in S$ on a*

1. $\partial d(\overline{x}, S) = N_S(\overline{x}) \cap \overline{\mathbb{B}}$.
2. $y \in N_S(\overline{x}) \ \Leftrightarrow < y, \overline{x} > = \delta^*(y, S)$.
3. $\overline{x} \in Proj_S(y) \ \Leftrightarrow \ y - \overline{x} \in N_S(\overline{x})$.

Démonstration.
1) Soit $y \in \partial d(\overline{x}, S)$, alors

$$\begin{aligned} < y, x - \overline{x} > &\leq d(x, S) - d(\overline{x}, S) \quad \forall x \in H \\ &\leq d(x, S) \quad \forall x \in H \end{aligned}$$

particulièrement si on prend $x \in S$ où $d(x, S) = 0$, on obtient

$$< y, x - \overline{x} > \leq 0 \ \ \forall x \in S,$$

d'où

$$y \in N_S(\overline{x}).$$

D'autre part, on sait que si $f : H \to \mathbb{R}$ est une fonction localement lipschitzienne de constante $k > 0$

$$f^\circ(\overline{x}, v) = \limsup_{\substack{t \downarrow 0 \\ x \to \overline{x}}} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} \leq \frac{k\|tv\|}{t} = k\|v\|,$$

et

$$\begin{aligned} \|y\|_{X^*} &= \sup_{\|v\|\leq 1} |< y, v >| \\ &\leq \sup_{\|v\|\leq 1} |f^{\circ}(\overline{x}, v)| \\ &\leq \sup_{\|v\|\leq 1} k\|v\| \leq k, \end{aligned}$$

d'où

$$\partial f(\overline{x}) \subset k\overline{\mathbb{B}}$$

et comme $d(., S)$ est localement lipschitzienne de constant 1

$$\partial d(\overline{x}, S) \subset \overline{\mathbb{B}}$$

on conclu que

$$\partial d(\overline{x}, S) \subset N_S(\overline{x}) \cap \overline{\mathbb{B}}.$$

Inversement, supposons que $y \in N_S(\overline{x}) \cap \overline{\mathbb{B}}$, donc

$$< y, x - \overline{x} > \leq 0 \quad \forall x \in H$$

et

$$\|y\| \leq 1$$

comme $d(x, S) \geq 0$ pour tout élément x de H, et $d(\overline{x}, S) = 0$

$$< y, x - \overline{x} > \leq d(x, S) - d(\overline{x}, S) \;\; \forall\, x \in H,$$

d'où

$$y \in \partial d(\overline{x}, S).$$

2) Condition nécessaire :
Soit $y \in N_S(\overline{x})$ alors

$$< y, x - \overline{x} > \leq 0 \;\; \forall x \in S,$$

d'où

$$< y, \overline{x} > \geq < y, x > \quad \forall x \in S$$

implique

$$< y, \overline{x} > \geq \sup_{x\in S} < y, x > = \delta^*(y, S),$$

de plus comme $\overline{x} \in S$, d'après la définition de la fonction support on a

$$< y, \overline{x} > \leq \sup_{x\in S} < y, x > = \delta^*(y, S),$$

par conséquent

$$< y, \overline{x} > = \delta^*(y, S).$$

Condition suffisante :

Soit $y \in H$ telle que $< y, \overline{x} >= \delta^*(y, S)$, alors

$$< y, \overline{x} > \geq < y, x >, \quad \forall\, x \in S,$$

d'où

$$< y, x > - < y, \overline{x} >=< y, x - \overline{x} > \leq 0, \quad \forall\, x \in S.$$

Par conséquent $\quad y \in N_S(\overline{x})$.
3) On a pour tout $x \in S$ l'inégalité du cône normal

$$< y - \overline{x}, x - \overline{x} > \leq 0,$$

est équivalente à l'inégalité de la projection

$$< y - \overline{x}, \overline{x} - x > \geq 0,$$

d'où (3) est vérifié.

$\square$

. **Le cône tangent de Clarke** de S en $\overline{x}$

$$T_S^c(\overline{x}) = \{v \in X \;:\; d_S^o(\overline{x}, v) = 0\}$$

. **Le cône normal de Clarke** de S en $\overline{x}$

$$N_S^c(\overline{x}) = \{y \in X^* \;:< y, v > \leq 0,\ \forall v \in T_S^c(\overline{x})\}$$

ou

$$N_S^c(\overline{x}) = \partial^c \psi_S(\overline{x})$$

. **Le cône normal proximal** de S en $\overline{x}$

$$N_S^p(\overline{x}) = \{y \in X^* \;:\; \exists \sigma, \delta > 0 \;< y, x - \overline{x} > \leq \sigma \|x - \overline{x}\|^2,\ \forall x \in (\overline{x} + \delta \mathbb{B}) \cap S\}$$

ou

$$N_S^p(\overline{x}) = \partial^p \psi_S(\overline{x})$$

il se caractérise par

$$y \in N_S^P(\overline{x}) \iff \exists \sigma = \sigma(y, \overline{x}) > 0 \text{ telle que } < y, x - \overline{x} > \leq \sigma \|x - \overline{x}\|^2 \text{ pour tout } x \in S.$$

Remarque 1.2.1. *Si L'ensemble S est convexe, alors tous les cônes cités ci-dessus coïncident*

$$N_S(\overline{x}) = N_S^c(\overline{x}) = N_S^p(\overline{x}).$$

Définition 1.2.16. *(Ensemble uniformément prox-régulier) pour un certain $\rho \in]0, +\infty]$, un sous ensemble S est uniformément ρ-prox-régulier si et seulement si pour tous $\overline{x} \in S$ et $y \in N_S^p(\overline{x})$ non nuls, on a*

$$< \frac{y}{\|y\|}, x - \overline{x} > \leq \frac{1}{2r} \|x - \overline{x}\|^2, \;\; \forall x \in S.$$

Notons que pour $r = +\infty$, l'uniformément prox-régularité est équivalente à la convexité.

La proposition suivante résume les propriétés essentielles des ensembles uniformément prox-réguliers.

Proposition 1.2.8. *Soient S un sous ensemble fermé d'un espace de Hilbert X et $\rho > 0$, si S est uniformément ρ-prox-régulier, alors*

1. *pour tout $x \in X$ où $d(x, S) < \rho$, $Proj_S(x)$ est non vide.*
2. *pour tout $\rho' \in]0, \rho[$, l'ensemble*
$$S(\rho') = \{x \in X \ : \ d(x, S) \leq \rho'\}$$
est uniformément $(\rho - \rho')$-prox-régulier.
3. *En tout $x \in X$ satisfaisant $d(x, S) < \rho$ on a*
$$\partial d(x, S) := \partial^p d(x, S) = \partial^c d(x, S)$$
4. *Le cône normal proximal de S coïncide avec le con normal de Clarke en tout point $x \in S$ et on note*
$$N_S(x) := N_S^p(x) = N_S^c(x)$$
5. *$\partial d_S(x) = N_S(x) \cap \overline{\mathbb{B}}$.*

Maintenant on donne un théorème de fermeture du sous différentiel de la fonction distance associée à une multiapplication à valeurs uniformément prox-régulières, supposons que Y est un espace de Hilbert

Théorème 1.2.7. *[8] Soient $\rho \in]0, +\infty]$, $\mathcal{O}$ un sous ensemble ouvert d'un espace vectoriel topologique X, et $C : \mathcal{O} \rightrightarrows Y$ une multiapplication continue au sens de Hausdorff, à valeurs uniformément ρ-prox-régulières sur $\mathcal{O}$. Alors pour $0 < \delta < \rho$, nous avons :*

pour tous $\overline{x} \in \mathcal{O}$, $\overline{y} \in C(\overline{x}) + (\rho - \delta)\overline{\mathbb{B}}$, $x_n \to \overline{x}$, $y_n \to \overline{y}$ avec $x_n \in \mathcal{O}$(y_n n'est pas nécessairement dans $C(x_n)$) et $z_n \in \partial d(y_n, C(x_n))$ avec (z_n) converge faiblement vers $\overline{z}$, alors
$$\overline{z} \in \partial d(\overline{y}, C(\overline{x})).$$

Remarque 1.2.2. *De ce théorème on peut déduire que la multiapplication*
$$(x, y) \to \partial d(y, C(x))$$
est scalairement semicontinue supérieurement, c'est à dire que la fonction support associée
$$(x, y) \to \delta^*(\xi, \partial d(y, C(x))) \quad \forall \, \xi \in Y$$
est semicontinue supérieurement.

1.2.4 L'ensemble Admissible

L'ensemble admissible d'une inclusion différentielle

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)) \quad , \quad x(0) = a. \tag{1.1}$$

est l'ensemble de toutes les valeurs possibles atteintes par les solutions de (1.1) dans un temps fini t.
Si on définit l'ensemble des trajectoires de (1.1) sur un intervalle $[0, t]$ de $\mathbb{R}_+$ par

$$\Upsilon_t(a) = \{u \in C_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}_+) \quad : \quad u \text{ est une solution absolument continue du (1.1) dans } [0, t]\}$$

L'ensemble admissible de (1.1) dans t est

$$S_a(t) = \{u(t) \quad : \quad u \in \Upsilon_t(a)\}$$

cet ensemble peut être écrit comme une multiapplication

$$t \to S_a(t),$$

d'un rang

$$S_a = \bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} S_a(t).$$

Un des importants problèmes étudiés dans la théorie des inclusions différentielle consiste à caractériser l'ensemble admissible et appliquer ses propriétés dans la résolution des problèmes du temps optimal. Dans [6] les auteurs ont été intéressés aux hypothèses nécessaire qui rendent l'ensemble des trajectoires et l'ensemble admissible semicontinue supérieurement (en tant que multiapplications) à valeurs compactes. Ces hypothèses sont appelées *" the Boundedness Assumption"*. Ils ont aussi comparés l'ensemble des trajectoires de deux multiapplications $\Phi(.)$ et $F(.)$ satisfaisant

$$gph(\Phi) \subset gph(F) + \delta\mathbb{B}$$

et obtenu le résultat

$$\Upsilon_t^{\Phi}(a) \subset \Upsilon_t^{F}(a) + \epsilon\mathbb{B}.$$

Ils ont arrivé à démontrer que l'ensemble $S_a(t)$ est connexe sans donner une application dans la théorie de contrôle. L'application des propriétés de l'ensemble admissible a été réalisée par Papageorgiou [30] où il a montré que la multiapplication $S_a(.)$ est faiblement semicontinue supérieurement à valeurs faiblement compactes, et le problème d'atteindre $a' \in S_a(t)$ dans un temps minimum t' admet une solution $u \in \Upsilon_t(a)$, il a pu même donner une description explicite de $S_a(t)$

$$S_a(t) = \{x \ : \ T(x) \leq t\}$$

où $T(.)$ est une fonction faiblement semicontinue inférieurement défini par

$$z \to T(z) = \inf\{t \in [0, T] \ : \ z \in S_a(t)\}$$

Quelques années après Affane-Azzam [5] ont étudiés l'ensemble admissible mais en remplaçant le problème (1.1), par le processus de la rafle perturbé

$$-\dot{x}(t) \in N_C(x(t)) + F(x(t)) \ \ , \ \ x(0) = a \in C.$$

elles ont démontré des propriétés plus fortes de $S_a(t)$ avec une application sur un problème de temps optimal. Dans le chapitre 2 nous allons voir comment peut on utiliser ces deux travaux pour obtenir de nouveaux résultats concernant l'ensemble admissible et ses applications.

1.2.5 La presque convexité

La presque convexité est une propriété topologique des ensembles, plus faible que la convexité, elle a été introduite par Cellina-Ornelas dans [15], et définie par

Définition 1.2.17. *L'ensemble $\mathcal{Q}$ d'un espace vectoriel est dit presque convexe si pour tout $q \in co(\mathcal{Q})$, il existe deux scalaires α_1 et α_2, $0 \leq \alpha_1 \leq 1 \leq \alpha_2$ tels que*

$$\alpha_1 q \in \mathcal{Q} \ \ et \ \ \alpha_2 q \in \mathcal{Q}$$

Remarquons que si l'ensemble $\mathcal{Q}$ est presque convexe et $0 \in co(\mathcal{Q})$, alors $\mathcal{Q}$ contient l'origine 0, car pour tous scalaires α_1 et α_2 on a

$$\alpha_1.0 = 0 \in \mathcal{Q} \ \text{ et } \ \alpha_2.0 = 0 \in \mathcal{Q}.$$

Exemples. *Citant quelques exemples concrets de la presque convexité :*

- *Tout ensemble convexe est presque convexe.*
  Il suffit de prendre $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

- *L'ensemble $\mathcal{K} = \partial\mathcal{Q}$, où $\mathcal{Q}$ est un convexe qui ne contient pas l'origine.*
  Considérons l'ensemble

  $$\mathcal{Q} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \setminus (x-3)^2 + (y-3)^2 < 4\}$$

  et

  $$\mathcal{K} = \partial\mathcal{Q} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \setminus (x-3)^2 + (y-3)^2 = 4\}$$

  comme $\mathcal{Q}$ est compact convexe, on a

  $$co(\mathcal{K}) = co(\partial\mathcal{Q}) = \overline{\mathcal{Q}}$$

  et pour $(x_0, y_0) = (2,2) \in co(\mathcal{K})$, il existe α_1, α_2

  $$0 \leq \alpha_1 = \frac{3-\sqrt{2}}{2} \leq 1 \leq \alpha_2 = \frac{3+\sqrt{2}}{2}$$

  telle que

  $$\frac{3-\sqrt{2}}{2}.(2,2) \in \mathcal{K} \quad et \quad \frac{3+\sqrt{2}}{2}.(2,2) \in \mathcal{K}.$$

- *L'ensemble $\mathcal{K} = \{0\} \cup \partial\mathcal{Q}$, où $\mathcal{Q}$ est un convexe qui contient l'origine. Posons*
$$\mathcal{Q} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \ x^2 + y^2 < 4\}$$
et prenons
$$\mathcal{K} = \{(0, 0)\} \cup \partial\mathcal{Q} = \{(0, 0)\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \ x^2 + y^2 = 4\}$$
on a
$$co(\mathcal{K}) = co\big(\{(0, 0\} \cup \partial\mathcal{Q}\big) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \ x^2 + y^2 \leq 4\}$$
et pour $(x_0, y_0) = (1, 1) \in co(\mathcal{K})$ il existe
$$\alpha_1 = 0 \quad et \quad \alpha_2 = \sqrt{2}$$
tels que
$$0.(1, 1) = 0 \in \mathcal{K} \quad et \quad \sqrt{2}.(1, 1) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}) \in \mathcal{K}.$$

Remarque :
1) Il existe une autre définition de la presque convexité apparait surtout dans les problèmes de l'optimisation convexe, par exemple dans [22] un sous ensemble C de $\mathbb{R}^n$ est presque convexe s' il vérifie les deux conditions suivantes

1. $\overline{C}$ est convexe.
2. L'intérieure relatif de $\overline{C}$ est contenu dans $\overline{C}$ i.e
$$ri(\overline{C}) \subset \overline{C}.$$

2) Il est claire que tout ensemble convexe est presque convexe, mais l'inverse en générale n'est pas nécessairement vrai. Observons l'ensemble
$$C = ([0, 1] \times [0, 1]) \backslash \{(0, y) \ : \ y \in (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})\} \subset \mathbb{R}^2.$$
C est presque convexe mais non convexe.

Notons que uniquement la définition présentée dans le début de la section sera considérée dans cette thèse.

Chapitre 2

Résultat d'existence pour le processus de la rafle perturbé par une multiapplication à valeurs presque convexes

Sommaire

2.1 Introduction du chapitre

L'ensemble admissible joue un rôle important dans la théorie de contrôle, car de nombreux problèmes d'optimisations, dynamiques, procédures de planifications dans les mathématiques économiques, et la théorie des jeux peuvent être modélisés et résolus en fonction de l'ensemble admissible. Dans l'étude de l'existence de solution pour les inclusions différentielles, l'hypothèse de la convexité est largement utilisée, particulièrement pour établir la fermeture de l'ensemble des solutions, qui est généralement non fermé sans la convexité. Le cas non convexe a été étudié par des méthodes diverses. Dans [15], les auteurs ont définit une généralisation de la convexité qu' ils ont appelé presque convexité. Ils ont montré en supposant cette condition que l'inclusion différentielle avec second membre semicontinue supérieurement admet une solution

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)) \ , \quad x(0) = x_0$$

Ils ont établis la fermeture de l'ensemble admissible au lieu de l'ensemble des solutions. Ce concept a été utilisé successivement par Affane-Azzam dans [4] et [5]. Dans [5], elles ont considéré un processus de la rafle perturbé par une multiapplication à valeurs presque convexes. Elles ont étudié l'existence de la solution et les propriétés topologiques de l'ensemble admissible. Dans ce chapitre, nous allons généraliser les travaux de [5] et [15] pour établir de nouveaux résultats, tout d'abord on va étudier l'existence de solution du problème

$$(I_{\mathbb{R}_+}) \begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(x(t)) + F(t, x(t)) \ \ p.p. \ \ t \in \mathbb{R}_+ \\ x(t) \in C(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \\ x(0) = a \in C(0). \end{cases}$$

où la perturbation $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ est semicontinue supérieurement à valeurs fermées non nécessairement bornées, et l'ensemble $C(t)$ est convexe en utilisant la méthode de rattrapage de Moreau (voir [10], et[27]). Ensuite on généralise ce résultat en prenant $C(t)$ uniformément ρ-prox-régulier. En utilisant le résultat d'existence obtenu, nous présentons quelques propriétés topologiques de l'ensemble des trajectoires ainsi que l'ensemble admissible.

En deuxième étape, on considère $C(t) = C$ fixé, et on étudie la version autonome du problème $(I_{\mathbb{R}_+})$

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_C(x(t)) + F(x(t)) \ \ p.p \ \ t \in \mathbb{R}_+ \\ x(t) \in C \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \\ x(0) = a \in C. \end{cases}$$

où on affaiblit la condition de la convexité des valeurs de F, par la presque convexité et on obtient un nouveau résultat d'existence à travers une méthode de relaxation inspiré de [4] et [5], qui consiste à trouver la solution du problème

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_C(x(t)) + co(F(x(t))) \ \ p.p \ \ t \in \mathbb{R}_+ \\ x(t) \in C \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \\ x(0) = a \in C. \end{cases}$$

On conclut le chapitre par la résolution d'un problème de temps optimal en utilisant la solution du problème $(\mathcal{P})$ et les propriétés topologiques de l'ensemble admissible du problème $(I_{\mathbb{R}_+})$.

Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet d'une publication avec Madame Doria Affane et Professeur Mustapha Fateh Yarou dans Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie [2].

2.2 Résultat d'existence pour une perturbation non bornée à valeurs convexes

Le résultat principal de cette section est l'étude de l'existence de solution du problème $(I_{\mathbb{R}_+})$.

Commençons par le cas où $C(.)$ est à valeurs convexes.

Théorème 2.2.1. *Soient $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multiapplication semicontinue supérieurement à valeurs non vides fermées convexes, et $C : \mathbb{R}_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multiapplication à valeurs non vides convexes fermées.*

Supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites

(H_1) *Pour un certain réel α strictement positif*

$$\|m(F(t,y))\| = d(0, F(t,y)) \leq \alpha, \quad \forall (t,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n.$$

(H_2) *Il existe une constante $\Lambda > 0$ tel que*

$$\mathcal{H}(C(t_1), C(t_2)) \leq \Lambda |t_1 - t_2| \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+.$$

Alors, pour tout $a \in C(0)$, il existe une fonction absolument continue $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ solution du $(I_{\mathbb{R}_+})$ tel que

$$\|\dot{u}(t)\| \leq \Lambda + 2\alpha, \quad p.p. \;\; t \in \mathbb{R}_+$$

Démonstration.
(a) Commençons par démontrer que sur tout intervalles compacts $[T_0, T] \subset \mathbb{R}_+$ le problème $(I_{\mathbb{R}_+})$ admet une solution absolument continue $u : [T_0, T] \to \mathbb{R}^n$, qui satisfait

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(u(t)) + F(t, u(t)) \;\; p.p. \;\; t \in [T_0, T], \\ u(t) \in C(t) \quad \forall t \in [T_0, T], \\ u(T_0) = u_0 \in C(T_0). \end{cases}$$

Pour tout entier $n \geq 0$, on considère la partition de $[T_0, T]$ par les points

$$t_k^n = T_0 + k e_n \;\;,\;\; e_n = \frac{T - T_0}{n} \;\;,\;\; k = 0, 1, 2, ..., n.$$

Étape 1 : Construction des solutions approximatives

Pour chaque $t \in [t_0^n, t_1^n[$, on définit

$$u_n(t) = \frac{t_1^n - t}{e_n} x_0^n + \frac{t - t_0^n}{e_n} x_1^n,$$

où $x_0^n = u_0 \in C(T_0)$ et

$$x_1^n = Proj_{C(t_1^n)}(x_0^n - e_n m(F(t_0^n, u_0))),$$

alors $u_n(t_0^n) = u_0$, et on a l'estimation

$$\begin{aligned} d(x_0^n - e_n m(F(t_0^n, u_n(t_0^n))), C(t_1^n)) &\leq d(x_0^n - e_n m(F(t_0^n, u_n(t_0^n))), x_0^n) + d(x_0^n, C(t_1^n)) \\ &\leq d(x_0^n - e_n m(F(t_0^n, u_n(t_0^n))), x_0^n) + e(C(t_0^n), C(t_1^n)) \\ &\leq d(x_0^n - e_n m(F(t_0^n, u_n(t_0^n))), x_0^n) + \mathcal{H}(C(t_0^n), C(t_1^n)) \end{aligned}$$

Par les hypothèses (H_1) et (H_2) on obtient

$$d(x_0^n - e_n m(F(t_0^n, u_n(t_0^n))), C(t_1^n)) \leq e_n\alpha + \Lambda|t_0^n - t_1^n| = e_n(\Lambda + \alpha)$$

et pour presque tout $t \in [t_0^n, t_1^n[$, la dérivée de $u_n(.)$ est

$$\dot{u}_n(t) = \frac{x_1^n - x_0^n}{e_n}.$$

Utilisons la définition de x_1^n et la caractérisation du cône normal en fonction de la projection on obtient

$$x_0^n - e_n m(F(t_0^n, u_0)) - x_1^n \in N_{C(t_1^n)}(x_1^n),$$

d'où

$$\dot{u}_n(t) = \frac{x_1^n - x_0^n}{e_n} \in -N_{C(t_1^n)}(x_1^n) - m(F(t_0^n, u_n(t_0^n)))$$

avec

$$\begin{aligned} \|x_0^n - e_n m(F(t_0^n, u_0)) - x_1^n\| &= d(x_0^n - e_n m(F(t_0^n, u_0)), C(t_1^n)) \\ &\leq (\Lambda + \alpha)e_n, \end{aligned}$$

alors

$$\|\dot{u}_n(t)\| = \|\frac{x_1^n - x_0^n}{e_n}\| \leq \Lambda + 2\alpha.$$

Pour tout $t \in [t_1^n, t_2^n[$, on définit

$$u_n(t) = \frac{t_2^n - t}{e_n}x_1^n + \frac{t - t_1^n}{e_n}x_2^n,$$

où $x_1^n = u_n(t_1^n) \in C(t_1^n)$ et

$$x_2^n = Proj_{C(t_2^n)}(x_1^n - e_n m(F(t_1^n, u_n(t_1^n)))),$$

d'autre part on a l'estimation

$$\begin{aligned} d(x_1^n - e_n m(F(t_1^n, u_n(t_1^n))), C(t_2^n)) &\leq d(x_1^n - e_n m(F(t_1^n, u_n(t_1^n))), x_1^n) + d(x_1^n, C(t_2^n)) \\ &\leq d(x_1^n - e_n m(F(t_1^n, u_n(t_1^n))), x_1^n) + e(C(t_1^n), C(t_2^n)) \\ &\leq d(x_1^n - e_n m(F(t_1^n, u_n(t_1^n))), x_1^n) + \mathcal{H}(C(t_1^n), C(t_2^n)) \end{aligned}$$

Par les hypothèses (H_1) et (H_2) on obtient

$$d(x_1^n - e_n m(F(t_1^n, u_n(t_1^n))), C(t_2^n)) \leq e_n\alpha + \Lambda|t_1^n - t_2^n| = e_n(\Lambda + \alpha)$$

et pour presque tout $t \in [t_1^n, t_2^n[$, la dérivée de $u_n(.)$ est

$$\dot{u}_n(t) = \frac{x_2^n - x_1^n}{e_n}.$$

Utilisons la définition de x_2^n et la caractérisation du cône normal en fonction de la projection on obtient

$$x_1^n - e_n m(F(t_1^n, u_n(t_1^n))) - x_2^n \in N_{C(t_2^n)}(x_2^n),$$

d'où

$$\dot{u}_n(t) = \frac{x_2^n - x_1^n}{e_n} \in -N_{C(t_2^n)}(x_2^n) - m(F(t_1^n, u_n(t_1^n))),$$

avec

$$\begin{aligned}\|x_1^n - e_n m(F(t_1^n, u_n(t_1^n))) - x_2^n\| &= d(x_1^n - e_n m(F(t_1^n, u_n(t_1^n))), C(t_2^n)) \\ &\leq (\Lambda + \alpha)e_n,\end{aligned}$$

alors

$$\|\dot{u}_n(t)\| = \|\frac{x_2^n - x_1^n}{e_n}\| \leq \Lambda + 2\alpha.$$

Supposons que (u_n) est bien définie sur $[t_{k-1}^n, t_k^n[$, avec

$$u_n(t_k^n) = x_k^n \quad \text{et} \quad \|\frac{x_k^n - x_{k-1}^n}{e_n}\| \leq \Lambda + 2\alpha.$$

Pour tout $t \in [t_k^n, t_{k+1}^n[$, on définit

$$u_n(t) = \frac{t_{k+1}^n - t}{e_n} x_k^n + \frac{t - t_k^n}{e_n} x_{k+1}^n,$$

où

$$x_{k+1}^n = Proj_{C(t_{k+1}^n)}(x_k^n - e_n m(F(t_k^n, u_n(t_k^n)))),$$

et

$$\dot{u}_n(t) = \frac{x_{k+1}^n - x_k^n}{e_n},$$

satisfait

$$\dot{u}_n(t) \in -N_{C(t_{k+1}^n)}(x_{k+1}^n) - m(F(t_k^n, u_n(t_k^n))), \tag{2.1}$$

avec l'estimation

$$\|\dot{u}_n(t)\| \leq \Lambda + 2\alpha. \tag{2.2}$$

Pour tout $t \in [T_0, T]$ et chaque $n \geq 1$, on pose

$$\delta_n(t) = \begin{cases} t_k^n & si \;\; t \in [t_k^n, t_{k+1}^n[\\ t_{n-1}^n & si \;\; t = T \end{cases}$$

et

$$\theta_n(t) = \begin{cases} t_{k+1}^n & si \ \ t \in [t_k^n, t_{k+1}^n[\\ T & si \ \ t = T \end{cases}$$

d'où par (2.1) on obtient

$$\dot{u}_n(t) \in -N_{C(\theta_n(t))}(u_n(\theta_n(t))) - m(F(\delta_n(t), u_n(\delta_n(t)))) \quad p.p. \ \ t \in [T_0, T]$$

il est claire que pour tous $n \geq 1$ et $t \in [T_0, T]$ les inclusions suivantes sont satisfaisantes

$$m(F(\delta_n(t), u_n(\delta_n(t)))) \in F(\delta_n(t), u_n(\delta_n(t))), \tag{2.3}$$

$$u_n(\delta_n(t))) \in C(\delta_n(t)), \tag{2.4}$$

$$u_n(\theta_n(t)) \in C(\theta_n(t)), \tag{2.5}$$

de plus

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(t) = \lim_{n\to\infty} \theta_n(t) = t. \tag{2.6}$$

En effet , pour tout $k \in \{0, .., n\}$ et $t \in [t_k^n, t_{k+1}^n[$ on a

$$|\delta_n(t) - t| = t - \delta_n(t) = t - t_k^n \leq t_{k+1}^n - t_k^n = \frac{T - T_0}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

de même

$$|\theta_n(t) - t| = \theta_n(t) - t = t_{k+1}^n - t \leq t_{k+1}^n - t_k^n = \frac{T - T_0}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

d'où par la comparaison des limites on obtient les égalités (2.6).

Étape 2 : convergence des suites

Pour tout $n \geq 1$ et pour presque tout $t \in [T_0, T]$, on a

$$\begin{aligned}
\|u_n(\theta_n(t)) - u_n(t)\| &= \|u_n(t_{k+1}^n) - u_n(t)\| \\
&= \|x_{k+1}^n - \frac{t_{k+1}^n - t}{e_n} x_k^n - \frac{t - t_k^n}{e_n} x_{k+1}^n\| \\
&= \|\frac{e_n x_{k+1}^n - t_{k+1}^n x_k^n + t x_k^n - t x_{k+1}^n + t_k^n x_{k+1}^n}{e_n}\| \\
&= \|\frac{t_{k+1}^n x_{k+1}^n - t_k^n x_{k+1}^n - t_{k+1}^n x_k^n + t x_k^n - t x_{k+1}^n + t_k^n x_{k+1}^n}{e_n}\| \\
&= \|\frac{t_{k+1}^n (x_{k+1}^n - x_k^n) + t(x_k^n - x_{k+1}^n)}{e_n}\| \\
&= \|\frac{x_{k+1}^n - x_k^n}{e_n}\| |t_{k+1}^n - t|,
\end{aligned}$$

implique

$$\|u_n(\theta_n(t)) - u_n(t)\| = \|\dot{u}_n(t)\|(\theta_n(t) - t) \leq (\Lambda + 2\alpha)(\theta_n(t) - t), \tag{2.7}$$

donc par (2.6)

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n(\theta_n(t))-u_n(t)\|=0.$$

et comme

$$\begin{aligned}\|x_k^n-x_0^n\| &\le \|x_k^n-x_{k-1}^n\|+\|x_{k-1}^n-x_{k-2}^n\|+.....+\|x_1^n-x_0^n\|\\ &\le e_n(\Lambda+2\alpha)+e_n(\Lambda+2\alpha)+...+e_n(\Lambda+2\alpha).\end{aligned}$$

de plus remarquons que

$$\|x_k^n\|-\|x_0^n\|\le\|x_k^n-x_0^n\| \quad \text{donc} \quad \|x_k^n\|\le\|x_k^n-x_0^n\|+\|x_0^n\|,$$

on obtient pour chaque k de 1 à n

$$\begin{aligned}\|u_n(t_k^n)\| &= \|x_k^n\|\\ &\le ke_n(\Lambda+2\alpha)+\|u_0\|\\ &\le (T-T_0)(\Lambda+2\alpha)+\|u_0\|,\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}\|u_n(t)\|-\|u_n(\theta_n(t))\| &\le \|u_n(t)-u_n(\theta_n(t))\|\\ &\le (\Lambda+2\alpha)(\theta_n(t)-t)\\ &\le (\Lambda+2\alpha)(T-T_0),\end{aligned}$$

utilisons l'estimation de $u_n(t_k^n)$ on obtient

$$\begin{aligned}\|u_n(t)\| &\le (\Lambda+2\alpha)(T-T_0)+\|u_n(t_k^n)\|\\ &\le 2(\Lambda+2\alpha)(T-T_0)+\|u_0\|,\end{aligned}$$

on conclue que la suite $(u_n(t))$ est relativement compacte.
D'autre part, pour tous $t_1,t_2\in[T_0,T]$ telle que $t_1\le t_2$ on a

$$\|u_n(t_2)-u_n(t_1)\|=\|\int_{t_1}^{t_2}\dot{u}_n(s)ds\|\le(\Lambda+2\alpha)(t_2-t_1)$$

ce qui montre que la suite des fonctions $(u_n(.))$ est equi-continue, par le théorème d'Ascoli-Arzéla on conclue que $(u_n(.))$ est relativement compactes dans $C_{\mathbb{R}^n}([T_0,T])$, comme $\|\dot{u}_n(t)\|\le\Lambda+2\alpha$ p.p. sur $[T_0,T]$, par la conséquence d'Ascoli-Arzéla on conclue qu'il existe une sous suite de $(u_n(.))$ (notée par $(u_n(.))$) converge vers une fonction absolument continue $u(.)$ dans le sens suivant

. $(u_n(.))$ converge uniformément vers $u(.)$,

. $(\dot{u}_n(.))$ converge $\sigma(L^1_{\mathbb{R}^n},L^\infty_{\mathbb{R}^n})$ vers $\dot{u}(.)$.

Alors

$$u(t)=\lim_{n\to\infty}u_n(t)=u_0+\lim_{n\to\infty}\int_{T_0}^t\dot{u}_n(s)ds=u_0+\int_{T_0}^t\dot{u}(s)ds.$$

On pose

$$m(F(\delta_n(.),u_n(\delta_n(.)))=f_n(.),\quad \forall n\ge 1 \text{ et } \forall t\in[T_0,T],$$

alors
$$\|f_n(t)\| \leq \alpha \;\; \forall t \in [T_0, T],$$
d'où la suite des fonctions $(f_n(.))$ est bornée dans $L^\infty_{\mathbb{R}^n}([T_0, T])$ et donc elle admet une sous suite (notée par $(f_n(.))$) converge $\sigma(L^\infty_{\mathbb{R}^n}, L^1_{\mathbb{R}^n})$ vers une fonction $f \in L^\infty_{\mathbb{R}^n}([T_0, T])$. Par conséquent, pour tout $v(.) \in L^1_{\mathbb{R}^n}([T_0, T])$ on a
$$\lim_{n\to\infty} < f_n(.), v(.) >=< f(.), v(.) > .$$
Soit $y(.) \in L^\infty_{\mathbb{R}^n}([T_0, T]) \subset L^1_{\mathbb{R}^n}([T_0, T])$, alors
$$\lim_{n\to\infty} < f_n(.), y(.) >=< f(.), y(.) >$$
implique que la suite $(f_n(.))$ est $\sigma(L^1_{\mathbb{R}^n}, L^\infty_{\mathbb{R}^n})$-convergente vers la fonction $f(.)$ qui vérifie
$$\|f(t)\| \leq \alpha \;\; p.p. \; t \in [T_0, T].$$
Étape 3 : montrons l'inclusion $\quad \dot{u}(t) + f(t) \in -N_{C(t)}(u(t))$

Montrons premièrement que $\quad u(t) \in C(t) \;\; \forall t \in [T_0, T]$.
Par (2.5), pour tous $t \in [T_0, T]$ et $n \geq 1$ on a
$$\begin{aligned} d(u_n(t), C(t)) &\leq d(u_n(t), u_n(\theta_n(t))) + d(u_n(\theta_n(t)), C(t)) \\ &\leq ||u_n(t) - u_n(\theta_n(t))|| + e(C(\theta_n(t)), C(t)) \\ &\leq ||u_n(t) - u_n(\theta_n(t))|| + \mathcal{H}(C(\theta_n(t)), C(t)) \\ &\leq ||u_n(t) - u_n(\theta_n(t))|| + \Lambda|\theta_n(t) - t| \end{aligned}$$
comme
$$\lim_{n\to\infty} ||u_n(t) - u_n(\theta_n(t))|| = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} |\theta_n(t) - t| = 0,$$
et le fait que $C(t)$ est fermé, par passage à la limite dans l'inégalité précédente on obtient
$$u(t) \in C(t), \;\; \forall t \in [T_0, T].$$
D'autre part, on a
$$\begin{aligned} \|\dot{u}_n(t) + f_n(t)\| &\leq \|\dot{u}_n(t)\| + \|f_n(t)\| \\ &\leq \Lambda + 3\alpha = \gamma \end{aligned}$$
d'où
$$\dot{u}_n(t) + f_n(t) \in \gamma\overline{\mathbb{B}},$$
et comme
$$\dot{u}_n(t) + f_n(t) \in -N_{C(\theta_n(t))}(u_n(\theta_n(t)))$$
par la proposition 1.2.7, on obtient
$$\dot{u}_n(t) + f_n(t) \in -\gamma\partial d(u_n(\theta_n(t)), C(\theta_n(t))).$$

D'après l'étape 2 les suites $(\dot{u}_n + f_n)$ et (f_n) convergent faiblement vers $(\dot{u} + f)$ et f respectivement, d'où par le théorème de Mazur il existe deux suites (w_n) et (v_n) vérifiant

$$w_n \in co\{\, \dot{u}_m + f_m \;:\; m \geq n\,\}$$

et

$$v_n \in co\{\, f_m \;:\; m \geq n\,\}$$

tels que (w_n) et (v_n) convergent fortement dans $L^1_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n}([T_0, T])$ vers $\dot{u} + f$ et f. On peut donc extraire de (w_n) et (v_n) des suites convergent ponctuellement presque partout vers $\dot{u} + f$ et f, i.e il existe un ensemble $N \subset [T_0, T]$ Lebesgue négligeable telle que pour tout $t \in [T_0, T] \backslash N$

$$\dot{u}(t) + f(t) \in \bigcap_{n \geq 0} \overline{\{w_k(t) \;:\; k \geq n\}} \subset \bigcap_{n \geq 0} \overline{co}\{\dot{u}_k(t) + f_k(t) \;:\; k \geq n\}, \tag{2.8}$$

et

$$f(t) \in \bigcap_{n \geq 0} \overline{\{v_k(t) \;:\; k \geq n\}} \subset \bigcap_{n \geq 0} \overline{co}\{f_k(t) \;:\; k \geq n\}. \tag{2.9}$$

Fixons $t \in [T_0, T] \backslash N$ et $\mu \in \mathbb{R}^n$, la semicontinuité supérieure de $\partial d(.C(.))$ et la relation (2.8) montre que

$$\begin{aligned} < \mu, \dot{u}(t) + f(t) > &\leq \limsup_{n \to \infty} \delta^*(\mu, -\gamma \partial d(u_n(\theta_n(t)), C(\theta_n(t))) \\ &\leq \delta^*(\mu, -\gamma \partial d(u(t), C(t))) \end{aligned}$$

comme l'ensemble $\partial d(., C(.))$ est convexe fermé, on conclut que

$$\dot{u}(t) + f(t) \in -\gamma \partial d(u(t), C(t)),$$

utilisons l'inclusion du sous différentiel de la fonction distance dans le cône normal, on obtient

$$\dot{u}(t) + f(t) \in -N_{C(t)}(u(t)) \tag{2.10}$$

de plus la relation (2.9) et la semicontinuité supérieure de $F(.,.)$ donnent

$$\begin{aligned} < \mu, f(t) > &\leq \limsup_{n \to \infty} \delta^*(\mu, F(\delta_n(t), u_n(\delta_n(t))) \\ &\leq \delta^*(\mu, F(t, u(t))), \end{aligned}$$

et comme F est à valeurs convexes fermées, on obtient

$$f(t) \in F(t, u(t)). \tag{2.11}$$

Par (2.10) et (2.11) on conclue que

$$-\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(u(t)) + F(t, u(t)) \quad p.p \;\; t \in [T_0, T].$$

d'où la première partie du théorème est démontrée.

(b) Observons que
$$\mathbb{R}_+ = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} [k, k+1[,$$
pour tout $k \in \mathbb{N}$ l'application du point (a) sur l'intervalle $[k, k+1]$ donne l'existence d'une fonction absolument continue $u_k : [k, k+1] \to \mathbb{R}^n$ solution du problème

$$\begin{cases} -\dot{u}_k(t) \in N_{C(t)}(u_k(t)) + F(t, u_k(t)) \ \ p.p. \ \ t \in [k, k+1], \\ u_k(t) \in C(t)\,, \quad \forall t \in [k, k+1], \\ u_k(k) \in C(k)\,, \end{cases}$$

Considérons la fonction $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$u(t) = u(t)|_{[k,k+1[} = u_k(t), \quad \forall t \in [k, k+1[.$$

Par conséquent, la fonction absolument continue u est la solution du problème $(I_{\mathbb{R}_+})$.
D'où le théorème est complètement démontré. □

Si la multiapplication $C(.)$ est à valeurs ρ-prox-régulières, on obtient le résultat suivant

Théorème 2.2.2. *Soit $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multiapplication semicontinue supérieurement à valeurs convexes fermées, et $C : \mathbb{R}_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multiapplication à valeurs non vide fermées, tels que les hypothèses (H_1) et (H_2) du théorème 2.2.1 sont satisfaites.*

Supposons que pour un certain $\rho \in]0, +\infty]$, $C(t)$ est uniformément ρ- prox-régulier pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Alors pour tout $a \in C(0)$ le problème $(I_{\mathbb{R}_+})$ admet une solution absolument continue.

Démonstration.
Comme dans le théorème précédant on montre le résultat sur l'intervalle $[T_0, T]$ de $\mathbb{R}_+$, c'est à dire on résout le problème

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_C(x(t)) + F(t, x(t)) \ \ p.p \ \ t \in [T_0, T], \\ x(t) \in C(t) \quad \forall t \in [T_0, T], \\ x(T_0) = u_0 \in C(T_0). \end{cases}$$

Fixons $n_0 \geq 0$, telle que
$$\frac{T(\Lambda + \alpha)}{n_0} \leq \frac{\rho}{2}. \tag{2.12}$$
Considérons pour tout $n \geq n_0$ la partition de $[T_0, T]$ par les intervalles

$$[t_k^n, t_{k+1}^n] : \quad k = 0, 1, 2, ..., n \ \text{ telle que } \ t_k^n = T_0 + k\frac{T - T_0}{n}.$$

Pour $t \in [t_0^n, t_1^n[$ on définit les approximations suivantes

$$u_n(t) = \frac{(t_1^n - t)n}{T - T_0} x_0^n + \frac{(t - t_0^n)n}{T - T_0} x_1^n,$$

où $x_0^n = u_0 \in C(T_0)$ et

$$x_1^n \in Proj_{C(t_1^n)}(x_0^n - \frac{T - T_0}{n} m(F(t_0^n, u_0))), \tag{2.13}$$

La relation (2.13) est bien définie. En effet

$$\begin{aligned} d(x_0^n - \frac{T-T_0}{n} m(F(t_0^n, u_n(t_0^n))), C(t_1^n)) &\leq d(x_0^n - \frac{T-T_0}{n} m(F(t_0^n, u_n(t_0^n))), x_0^n) + d(x_0^n, C(t_1^n)) \\ &\leq d(x_0^n - \frac{T-T_0}{n} m(F(t_0^n, u_n(t_0^n))), x_0^n) + e(C(t_0^n), C(t_1^n)) \\ &\leq d(x_0^n - \frac{T-T_0}{n} m(F(t_0^n, u_n(t_0^n))), x_0^n) + \mathcal{H}(C(t_0^n), C(t_1^n)) \\ &\leq \frac{T-T_0}{n} \| m(F(t_0^n, u_n(t_0^n))) \| + \Lambda |t_0^n - t_1^n| \\ &\leq \frac{T}{n} \alpha + \Lambda \frac{T}{n} \end{aligned}$$

par (2.12) on obtient

$$\begin{aligned} d(x_0^n - \frac{T-T_0}{n} m(F(t_0^n, u_n(t_0^n))), C(t_1^n)) &\leq \frac{T(\alpha + \Lambda)}{n_0} \\ &\leq \frac{\rho}{2} \\ &< \rho \end{aligned}$$

comme $C(t_1^n)$ est uniformément ρ- prox régulier, utilisons la proposition 1.2.8 et la dernière inégalité on conclue que la projection de $x_0^n - \frac{T-T_0}{n} m(F(t_0^n, u_n(t_0^n))$ dans $C(t_1^n)$ est non vide d'où le point x_1^n est bien choisi.

De la même manière, pour tout k de 1 à n et $t \in [t_k, t_{k+1}[$, on construit la suite des applications approximatives

$$u_n(t) = \frac{(t_{k+1}^n - t)n}{T - T_0} x_k^n + \frac{(t - t_k^n)n}{T - T_0} x_{k+1}^n$$

où

$$x_{k+1}^n \in Proj_{C(t_{k+1}^n)}(x_k^n - \frac{T - T_0}{n} m(F(t_k^n, u_n(t_k^n))))$$

et on suit les mêmes étapes de la démonstration du théorème 2.2.1 y compris le prolongement des solutions locales à une solution globale u défini sur $\mathbb{R}_+$. $\square$

Après le résultat d'existence de la solution du problème $(I_{\mathbb{R}_+})$, on s'intéresse maintenant à étudier les propriétés topologiques de l'ensemble des solutions, ainsi que l'ensemble admissible associé afin de les investir dans la résolution d'un problème de temps optimal.

Corollaire 2.2.1. *Supposons que les hypothèses (H_1) et (H_2) du théorème 2.2.1 sont satisfaisante. Alors pour tout $a \in C(a)$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$*

1. *L'ensemble des trajectoires $\Upsilon_t(a)$ est non vide compact.*
2. *La multiapplication $t \to S_a(t)$ est semicontinue supérieurement à valeurs non vides compactes.*

Démonstration.
1. D'après le théorème 2.2.1 le problème $(I_{\mathbb{R}_+})$ admet au moine une solution sur $\mathbb{R}_+$ donc sur $[0,t] \subset \mathbb{R}_+$, d'où l'ensemble $\Upsilon_a(t) \neq \emptyset$.
Soit (u_n) une suite des trajectoires de $\Upsilon_t(a)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(.)$ est une solution absolument continue vérifie

$$||\dot{u}_n(\tilde{t})|| \leq \Lambda + 2\alpha \;\; p.p \; \tilde{t} \in [0,t].$$

et

$$\begin{aligned} ||u_n(\tilde{t})|| &\leq ||a|| + \int_0^{\tilde{t}} ||\dot{u}_n(s)||ds \\ &\leq ||a|| + \int_0^{t} (\Lambda + 2\alpha)ds \\ &\leq ||a|| + (\Lambda + 2\alpha)t. \end{aligned}$$

ce qui implique que la suite $(u_n(\tilde{t}))$ est relativement compacte. De plus pour tous $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2 \in [0,t]$ telle que $\tilde{t}_1 \leq \tilde{t}_2$ on a

$$\begin{aligned} \|u_n(\tilde{t}_1) - u_n(\tilde{t}_2)\| &= \| \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \dot{u}_n(s)\, ds\| \\ &\leq \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \Lambda + 2\alpha \, ds \\ &\leq (\Lambda + 2\alpha)(\tilde{t}_2 - \tilde{t}_1), \end{aligned}$$

d'où la suite des fonctions (u_n) est equicontinue sur $[0,t]$ et d'après le théorème d'Ascoli- Arzela elle est relativement compacte dans $C_{\mathbb{R}^n}([0,t])$. D'autre part comme $\|\dot{u}_n(\tilde{t})\| \leq \Lambda + 2\alpha$ *p.p.* $\tilde{t} \in [0,t]$, la conséquence d'Ascoli- Arzela confirme l'existence d'une sous suite (u_n) (notée aussi par (u_n)) converge uniformément vers une fonction absolument continue $u(.)$ définit de $[0,t]$ dans $\mathbb{R}^n$, avec $(\dot{u}_n)$ converge $\sigma(L^1_{\mathbb{R}^n}, L^\infty_{\mathbb{R}^n})$ vers $\dot{u}(.)$ telle que

$$\|\dot{u}(\tilde{t})\| \leq \Lambda + 2\alpha, \;\; p.p \; \tilde{t} \in [0,t],$$

on a donc

$$u(\tilde{t}) = \lim_{n\to\infty} u_n(\tilde{t}) = a + \lim_{n\to\infty} \int_0^{\tilde{t}} \dot{u}_n(s)ds = a + \int_0^{\tilde{t}} \dot{u}(s)ds.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit la suite des fonction (f_n) où $f_n : [0,t] \to \mathbb{R}^n$ est la sélection minimale mesurable de la multiapplication $t \to F(t, u_n(t))$, par l'hypothèse (H_2) on a

$$\|f_n(\tilde{t})\| \leq \alpha \;\; \forall \tilde{t} \in [0,t]$$

alors (f_n) est bornée dans $L^\infty_{\mathbb{R}^n}([0,t])$ et elle admet une sous suite (f_n) converge $\sigma(L^\infty_{\mathbb{R}^n}, L^1_{\mathbb{R}^n})$ vers une fonction $f(.) \in L^\infty_{\mathbb{R}^n}([0,t])$, par conséquent pour tout $v(.) \in L^1_{\mathbb{R}^n}([0,t])$ on a

$$\lim_{n\to\infty} < f_n(.), v(.) >=< f(.), v(.) > .$$

Soit $y(.) \in L^\infty_{\mathbb{R}^n}([0,t]) \subset L^1_{\mathbb{R}^n}([0,t])$, de l'équation précédente on a

$$\lim_{n\to\infty} < f_n(.), y(.) >=< f(.), y(.) >,$$

d'où la suite (f_n) converge $\sigma(L^1_{\mathbb{R}^n}, L^\infty_{\mathbb{R}^n})$ vers $f(.)$ satisfait

$$\|f(\tilde{t})\| \leq \alpha \;\; p.p\; t \in [0,t].$$

Montrons maintenant que la limite $u(.)$ est une solution du problème.
Comme (u_n) est une suite des solutions et $f_n(\tilde{t}) \in F(\tilde{t}, u_n(\tilde{t}))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'inclusion suivante

$$-\dot{u}_n(\tilde{t}) - f_n(\tilde{t}) \in N_{C(\tilde{t})}(u_n(\tilde{t}))$$

avec l'estimation

$$\|\dot{u}_n(\tilde{t}) + f_n(\tilde{t})\| \leq \Lambda + 3\alpha = \gamma.$$

On obtient

$$\dot{u}_n(\tilde{t}) + f_n(\tilde{t}) \in -\gamma \partial d(u_n(\tilde{t}), C(\tilde{t})).$$

Pour passer de la convergence faible des suites $(\dot{u}_n + f_n)$ et (f_n) à la convergence forte, on applique le lemme de Mazur qui garantie l'existence des sous suites (r_n) et (s_n)

$$r_n \in co\{\, \dot{u}_m + f_m \;:\; m \geq n \,\}$$

$$s_n \in co\{\, f_m \;:\; m \geq n \,\}$$

tels que (r_n) ,(s_n) convergent fortement dans $L^1_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n}([0,t])$ vers $\dot{u}(.) + f(.)$,$f(.)$ respectivement, alors on peut extraire de (r_n), (s_n) deux sous suites convergent ponctuellement p.p vers $\dot{u}(.)+f(.)$ et $f(.)$, c'est à dire il existe un ensemble Lebesgue négligeable $N \subset [0,t]$ telle que pour tout $\tilde{t} \in [0,t]\backslash N$

$$\dot{u}(\tilde{t}) + f(\tilde{t}) \in \bigcap_{n\geq 0} \overline{\{r_m(\tilde{t}) \;:\; m \geq n\}} \subset \bigcap_{n\geq 0} \overline{co}\{\dot{u}_m(\tilde{t}) + f_m(\tilde{t}) \;:\; m \geq n\}, \tag{2.14}$$

$$f(\tilde{t}) \in \bigcap_{n\geq 0} \overline{\{s_m(\tilde{t}) \;:\; m \geq n\}} \subset \bigcap_{n\geq 0} \overline{co}\{f_m(\tilde{t}) \;:\; m \geq n\}. \tag{2.15}$$

Fixons $\mu \in \mathbb{R}^n$, de la relation (2.14) et la semicontinuité supérieure de la multiapplication $\partial d(.,C(.))$ on obtient

$$\begin{aligned} < \mu, \dot{u}(\tilde{t}) + f(\tilde{t}) > &\leq \limsup_{n\to\infty} \delta^*(\mu, -\gamma \partial d(u_n(\tilde{t}), C(\tilde{t}))) \\ &\leq \delta^*(\mu, -\gamma\, \partial d(u(\tilde{t}), C(\tilde{t}))) \end{aligned}$$

comme $\partial d(u(\tilde{t}), C(\tilde{t}))$ est un ensemble convexe fermé on a

$$\dot{u}(\tilde{t}) + f(\tilde{t}) \in -\gamma\, \partial d(u(\tilde{t}), C(\tilde{t}))$$

de plus la suite des valeurs $(u_n(\tilde{t}))$ vérifie que $u_n(\tilde{t}) \in C(\tilde{t})$ pour tout $\tilde{t} \in [0,t]$, et converge vers $u(\tilde{t})$, comme $C(.)$ est à valeurs fermées, alors $u(\tilde{t}) \in C(\tilde{t})$ et le sous différentiel associé à la fonction distance est inclue dans le cône normal, donc on aura

$$\dot{u}(\tilde{t}) + f(\tilde{t}) \in -N_{C(\tilde{t})}(u(\tilde{t})). \tag{2.16}$$

D'autre part F est semicontinue supérieurement, alors

$$< \mu, f(\tilde{t}) > \leq \limsup_{n\to\infty} \delta^*(\mu, F(\tilde{t}, u_n(\tilde{t})) \leq \delta^*(\mu, F(\tilde{t}, u(\tilde{t}))),$$

$F(.,.)$ est à valeurs convexes fermées, donc

$$f(\tilde{t}) \in F(\tilde{t}, u(\tilde{t})) \tag{2.17}$$

Par les inclusions (2.16) et (2.17) on conclue que

$$-\dot{u}(\tilde{t}) \in N_{C(\tilde{t})}(u(\tilde{t})) + F(\tilde{t}, u(\tilde{t})) \;\; p.p. \;\; \tilde{t} \in [0,t],$$

c'est à dire $u(.)$ est une solution du problème $(I_{\mathbb{R}_+})$ sur $[0,t]$, alors $u(.) \in \Upsilon_t(a)$ et l'ensemble des trajectoires est compact.

2. Soit $t \in \mathbb{R}_+$, montrons que $S_a(t)$ est fermé borné dans $\mathbb{R}^n$.

Soit (z_n) une suite de $S_a(t)$ converge vers z. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n \in S_a(t)$ donc il existe une suite des trajectoires (u_n) telle que

$$u_n(t) = z_n$$

comme (z_n) converge vers z, donc $(u_n(t))$ converge vers z, d'après (1) $\Upsilon_t(a)$ est compact donc il existe une solution $u(.) \in \Upsilon_t(a)$ telle que

$$u(t) = \lim_n u_n(t) = z$$

d'où, par la définition de l'ensemble admissible $z \in S_a(t)$, et $S_a(t)$ est fermé.

Reste à démontrer qu'il est borné. Considérons $z \in S_a(t)$, on a

$$\begin{aligned}\|z\| = \|u(t)\| &= \|a + \int_0^t \dot{u}(s)\,ds\| \\ &\leq \|a\| + \int_0^t \Lambda + 2\alpha\,ds \\ &\leq \|a\| + (\Lambda + 2\alpha)t.\end{aligned}$$

donc $S_a(t)$ est borné, comme l'espace $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie il est compact.

Démontrons la semicontinuité supérieure de $S_a(.)$ sur $\mathbb{R}_+$.

Soient $t \in \mathbb{R}_+$ et V un voisinage ouvert de $S_a(t)$ dans $\mathbb{R}^n$, il existe V_0 un voisinage ouvert de l'origine où

$$S_a(t) + V_0 \subseteq V$$

notons par $\Upsilon(a)$ l'ensemble des solutions du problème $(I_{\mathbb{R}_+})$ sur $\mathbb{R}_+$, d'après le théorème d' Ascoli-Arzela, il existe $\delta > 0$ tel que si $|t - t'| < \delta$: $u(t') - u(t) \in V_0$ pour tout $u(.) \in \Upsilon(a)$, comme $u(t) \in S_a(t)$

$$u(t') \in u(t) + V_0 \subset V \quad \forall u(.) \in \Upsilon(a)$$

d'où

$$S_a(t') \subset V \quad \forall t' \in B(t, \delta)$$

qui montre par définition que $S_a(.)$ est semicontinue supérieurement. $\square$

2.3 Résultat d'existence pour une perturbation à valeurs presque convexes

Dans cette section, on présente le résultat essentiel du chapitre qui consiste à montrer l'existence de solution d'un processus de la rafle du premier ordre perturbé par une multiapplication F à valeurs presque convexes. On a besoin du résultat suivant où on étudie la relation entre la solution du problème relaxé et non relaxé.

Théorème 2.3.1. *Soient C un sous ensemble fermé convexe de $\mathbb{R}^n$, $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multiapplication semicontinue supérieurement à valeurs compactes, $a \in C$ et $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ une solution absolument continue du problème*

$$(\mathcal{P}_{co}) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_C(u(t)) + co\big(F(u(t))\big), & p.p.\ \ t \in \mathbb{R}_+, \\ u(t) \in C, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \\ u(0) = a \in C. \end{cases}$$

Supposons qu'il existe deux fonctions intégrables $\xi_1(.)$ et $\xi_2(.)$ définis sur $\mathbb{R}_+$, tels que

$$0 \leq \xi_1(t) \leq 1 \leq \xi_2(t),$$

et

$$(H_3) \quad \xi_1(t)\, m\big(co\big(F(x(t))\big)\big) \in F(x(t)) \quad et \quad \xi_2(t)\, m\big(co\big(F(x(t))\big)\big) \in F(x(t)),\ p.p.\ t \in \mathbb{R}_+.$$

Alors le problème autonome

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_C(u(t)) + F(u(t)), & p.p.\ \ t \in \mathbb{R}_+, \\ u(t) \in C, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \\ u(0) = a \in C. \end{cases}$$

Admet une solution absolument continue.

Démonstration.
Montrons premièrement que pour tout $t \in [T_0, T]$ où $T > T_0 \geq 0$, il existe une fonction absolument continue

$$\begin{aligned} t(.) :&[T_0, T] \to [T_0, T] \\ &\tau \to t(\tau) \end{aligned}$$

telle que la fonction donnée par

$$\begin{aligned} \tilde{x}(.) :&[T_0, T] \to \mathbb{R}^n \\ &\tau \to \tilde{x}(\tau) = x(t(\tau)) \end{aligned}$$

est une solution du problème $(\mathcal{P})$ dans l'intervalle $[T_0, T]$, de plus les valeurs aux limites de $\tilde{x}(.)$ et $x(.)$ coïncide c'est à dire

$$\tilde{x}(T_0) = x(T_0) \quad \text{et} \quad \tilde{x}(T) = x(T).$$

Étape 1. Considérons l'intervalle $[a,b] \subset [T_0,T]$, Supposons qu'il existe deux fonctions intégrables $\xi_1(.)$ et $\xi_2(.)$ définis sur $[a,b]$ tels que

$$0 \leq \xi_1(t) \leq 1 \leq \xi_2(t) \quad \forall t \in [a,b]$$

vérifiant l'hypothèse (H_3), et que la fonction $\xi_1(t) > 0$ p.p. Montrons qu'il existe deux sous ensembles mesurables de $[a,b]$, admettent $\Psi_1(.)$ et $\Psi_2(.)$ comme fonctions caractéristiques, où

$$\Psi_1(.) + \Psi_2(.) = \Psi_{[a,b]}(.)$$

et il existe une fonction absolument continue $s(.)$ définie de $[a,b]$ dans lui même, avec

$$s(a) - s(b) = a - b$$

et

$$\dot{s}(\tau) = \Psi_1(\tau).\frac{1}{\xi_1(\tau)} + \Psi_2(\tau).\frac{1}{\xi_2(\tau)}.$$

En effet. On pose

$$\phi(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } \xi_1(\tau) = \xi_2(\tau) = 1 \\ \frac{\xi_2(\tau)-1}{\xi_2(\tau)-\xi_1(\tau)} & \text{si non.} \end{cases}$$

Comme $-1 \leq -\xi_1(\tau)$ donc $0 \leq \xi_2(\tau) - 1 \leq \xi_2(\tau) - \xi_1(\tau)$, d'où

$$0 \leq \frac{\xi_2(\tau) - 1}{\xi_2(\tau) - \xi_1(\tau)} = \phi(\tau) \leq 1.$$

de plus l'égalité suivante est toujours vérifiée

$$1 = \phi(\tau) + (1 - \phi(\tau)) = \phi(\tau).\xi_1(\tau) + (1 - \phi(\tau)).\xi_2(\tau).$$

Car :
Si $\xi_1(\tau) = \xi_2(\tau) = 1$, on obtient

$$\phi(\tau).\xi_1(\tau) + (1 - \phi(\tau)).\xi_2(\tau) = \frac{1}{2} + (1 - \frac{1}{2}) = 1.$$

si non

$$\begin{aligned}
\phi(\tau).\xi_1(\tau) + (1 - \phi(\tau)).\xi_2(\tau) &= \frac{\xi_1(\tau) - 1}{\xi_2(\tau) - \xi_1(\tau)}.\xi_1(\tau) + (1 - \frac{\xi_1(\tau) - 1}{\xi_2(\tau) - \xi_1(\tau)}).\xi_2(\tau) \\
&= \frac{\xi_1(\tau)\xi_2(\tau) - \xi_1(\tau)}{\xi_2(\tau) - \xi_1(\tau)} + \frac{\xi_2(\tau) - \xi_1(\tau) - \xi_2(\tau) + 1}{\xi_2(\tau) - \xi_1(\tau)}.\xi_2(\tau) \\
&= \frac{\xi_1(\tau).\xi_2(\tau) - \xi_1(\tau)}{\xi_2(\tau) - \xi_1(\tau)} + \frac{\xi_2(\tau) - \xi_1(\tau)\xi_2(\tau)}{\xi_2(\tau) - \xi_1(\tau)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Particulièrement on a

$$\int_a^b 1 \, d\tau = \int_a^b \big(\phi(\tau) + (1-\phi(\tau))\big) \, d\tau = \int_a^b \big(\frac{\phi(\tau)\xi_1(\tau)}{\xi_1(\tau)} + \frac{(1-\phi(\tau))\xi_2(\tau)}{\xi_2(\tau)}\big) \, d\tau.$$

On souhaite d'appliquer le théorème de Liapunov pour garantir l'existence de deux sous ensembles mesurables de fonctions caractéristiques $\chi_1(.)$ et $\chi_2(.)$ tels que

$$\Psi_1(.) + \Psi_2(.) = \Psi_{[a,b]}(.)$$

et

$$\int_a^b 1 \, d\tau = \int_a^b \big(\Psi_1(\tau)\frac{1}{\xi_1(\tau)} + \Psi_2(\tau)\frac{1}{\xi_2(\tau)}\big) \, d\tau.$$

Mais la fonction $\frac{1}{\xi_1(\tau)}$ n'est pas nécessairement intégrable, donc on considère la suite des ensembles disjoints définis par

$$I^n = \{\tau \in [a,b] \ : \ n < \frac{1}{\xi_1(\tau)} \leq n+1\},$$

on a

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I^n = [a,b].$$

En effet, par définition $I^n \subset [a,b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$ donc $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} I^n \subset [a,b]$. D'autre par soit $\tau \in [a,b]$, on a $0 < \xi_1(\tau) \leq 1$ alors $\frac{1}{\xi_1(\tau)} > 1$ est un nombre réel positif, il résulte de la propriété d'Archimède sur $\mathbb{R}$ qu'il existe un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$n < \frac{1}{\xi_1(\tau)} \leq n+1$$

donc $\tau \in I^n$ et par conséquent $\tau \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I^n = [a,b]$.
Appliquons maintenant le théorème de Liapunov sur chaque I^n et remarquons que la version utilisée est plus explicite

Théorème de Liapunov :
Soient $f_1, f_2, ..., f_n$ des fonctions intégrables définies de $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ des fonctions mesurables qui vérifient : pour tout i de 1 à n

$$0 \leq \alpha_i(t) \leq 1 \quad \text{et} \quad \sum_i \alpha_i(t) = 1.$$

Alors il existe une suites d'ensembles mesurables (A_i) forment une partition de $[a,b]$ tels que

$$\int_a^b \sum_i \alpha_i(t) f_i(t) dt = \int_a^b \sum_i \Psi_i(t) f_i(t) dt$$

où $(\Psi_i(.))$ sont les fonctions caractéristiques associées à (A_i).
Donc par ce théorème, on affirme l'existence de deux suites des sous ensembles mesurables (I_1^n) et (I_2^n), admettent pour fonctions caractéristiques $(\Psi_1^n(.))$ et $(\Psi_2^n(.))$, tel que

$$\int_{I^n} 1 \, d\tau = \int_{I^n} \big(\Psi_1^n(\tau)\frac{1}{\xi_1(\tau)} + \Psi_2^n(\tau)\frac{1}{\xi_2(\tau)}\big) \, d\tau.$$

On pose $I_1 = \underset{n}{\cup} I_1^n$ et $I_2 = \underset{n}{\cup} I_2^n$, $\Psi_1(.) = \sum\limits_n \Psi_1^n(.)$ et $\Psi_2(.) = \sum\limits_n \Psi_2^n(.)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction

$$\sigma_k(\tau) = \sum_{n=0}^{k} \big(\Psi_1^n(\tau)\frac{1}{\xi_1(\tau)} + \Psi_2^n(\tau)\frac{1}{\xi_2(\tau)}\big),$$

est positive et la suite des fonctions $(\sigma_k(.))$ est croissante simplement convergente vers la fonction

$$\sigma(\tau) = \Psi_1(\tau)\frac{1}{\xi_1(\tau)} + \Psi_2(\tau)\frac{1}{\xi_2(\tau)}.$$

D'autre part on considère la suite des ensembles (V_k) où pour tout $k \in \mathbb{N}$ $V^k = \bigcup_{n=0}^k I^n$, il est claire que cette suite est strictement croissante et converge vers l'intervalle $[a, b]$, donc

$$\int_a^b 1 \, d\tau = \int_{\cup_k V^k} 1 \, d\tau = \int_{\cup_n I^n} 1 \, d\tau$$

avec

$$\int_{\cup_k V^k} 1 \, d\tau = \lim_{k\to\infty} \int_{V^k} 1 \, d\tau.$$

Comme les ensembles (I^n), sont disjoints on obtient

$$\int_a^b 1 \, d\tau = \lim_{k\to\infty} \int_{V^k} 1 \, d\tau = \lim_{k\to\infty} \int_{\bigcup_{n=0}^k I^n} 1 \, d\tau = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \int_{I^n} 1 \, d\tau.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\int_a^b 1 \, d\tau &= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \int_{I^n} \big(\Psi_1^n(\tau)\frac{1}{\xi_1(\tau)} + \Psi_2^n(\tau)\frac{1}{\xi_2(\tau)}\big) \, d\tau \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \int_{I^n} \sum_{n=0}^{k} \big(\Psi_1^n(\tau)\frac{1}{\xi_1(\tau)} + \Psi_2^n(\tau)\frac{1}{\xi_2(\tau)}\big) \, d\tau \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \int_{I^n} \sigma_k(\tau) \, d\tau = \lim_{k\to\infty} \int_{\bigcup_{n=0}^k I^n} \sigma_k(\tau) \, d\tau \\
&= \int_{\bigcup_n I^n} \sigma(\tau) \, d\tau \\
&= \int_a^b \sigma(\tau) \, d\tau.
\end{aligned}$$

On conclue que

$$\int_a^b 1\, d\tau = \int_a^b \Psi_1(\tau)\frac{1}{\xi_1(\tau)} + \Psi_2(\tau)\frac{1}{\xi_2(\tau)}\, d\tau.$$

On considère

$$\dot{s}(\tau) = \sigma(\tau)$$

et on obtient

$$\int_a^b \dot{s}(\tau) d\tau = b - a.$$

Étape 2. Considérons l'ensemble

$$K = \{\tau \in [T_0, T] : m\big(co(F(x(\tau)))\big) = 0\}.$$

K est fermé. En effet, soit (τ_n) une suite de K converge vers $\tau \in [T_0, T]$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\tau_n \in [T_0, T]$ et $m\big(co(F(x(\tau_n)))\big) = 0$, d'où $0 \in co(F(x(\tau_n)))$, comme $x(.)$ est continue et $co(F(.))$ est semicontinue supérieurement à valeurs compactes, le graphe de $co(F(x(.)))$ est fermé et $0 \in co(F(x(\tau)))$, donc $m\big(co(F(x(\tau)))\big) = 0$ d'où $\tau \in K$ et K est fermé.

a) Si $K = \emptyset$ dans ce cas $\xi_1(\tau) > 0$, car si on considère le contraire c'est à dire

$$\exists \tau_0 \in [T_0, T] \text{ tel que } \xi_1(\tau_0) = 0,$$

on obtient par l'hypothèse (H_3)

$$\xi_1(\tau_0).m\big(co(F(x(\tau_0)))\big) = 0 \in F(x(\tau_0)) \subset co(F(x(\tau_0))),$$

qui donne $m\big(co(F(x(\tau_0)))\big) = 0$ d'où $\tau_0 \in K$, contradiction avec la supposition $K = \emptyset$.
On applique l'étape.1 sur l'intervalle $[T_0, T]$, on pose

$$s(\tau) = \int_{T_0}^{\tau} \dot{s}(\omega) d\omega$$

$s(.)$ est croissante et satisfait

$$s(T_0) = T_0 \text{ et } s(T) = T,$$

donc $s(.)$ est défini de $[T_0, T]$ dans lui même. Soit la fonction

$$\begin{aligned} t(.) : [T_0, T] &\to [T_0, T] \\ \tau &\to t(\tau) = s^{-1}(\tau), \end{aligned}$$

où $s^{-1}(.)$ est la fonction inverse de $s(.)$ donc $t(T_0) = T_0, t(T) = T$, et sa dérivée est

$$\dot{t}(\tau) = \frac{1}{\dot{s}(t(\tau))} = \xi_1\big(t(\tau)\big)\Psi_1\big(t(\tau)\big) + \xi_2\big(t(\tau)\big)\Psi_2\big(t(\tau)\big).$$

Soit $\tilde{x}(.) : [T_0, T] \to \mathbb{R}^n$ la fonction définie par

$$\tilde{x}(\tau) = x\left(t(\tau)\right) \quad \forall \tau \in [T_0, T],$$

on a

$$\begin{aligned} -\frac{d}{d\tau}\tilde{x}(\tau) &= -\dot{x}(t(\tau))\dot{t}(\tau) \\ &= -\dot{x}\big(t(\tau)\big)\Big(\xi_1\big(t(\tau)\big)\Psi_1\big(t(\tau)\big) + \xi_2\big(t(\tau)\big)\Psi_2\big(t(\tau)\big)\Big), \end{aligned}$$

comme $x(.)$ est une solution du problème $(\mathcal{P}_{co})$, la démonstration du Théorème 2.2.1 donne

$$-\frac{d}{d\tau}\tilde{x}(\tau) \in \Big(\xi_1\big(t(\tau)\big)\Psi_1\big(t(\tau)\big) + \xi_2\big(t(\tau)\big)\Psi_2\big(t(\tau)\big)\Big)\ \Big(N_C\big(x\big(t(\tau)\big)\big) + m\big(co\big(F(x\big(t(\tau)\big))\big)\big)\Big),$$

par les propriétés du cône normal on aura

$$-\frac{d}{d\tau}\tilde{x}(\tau) \in N_C\big(x\big(t(\tau)\big)\big) + \Big(\xi_1\big(t(\tau)\big)\Psi_1\big(t(\tau)\big) + \xi_2\big(t(\tau)\big)\Psi_2\big(t(\tau)\big)\Big)\ \Big(m\big(co\big(G(x\big(t(\tau)\big))\big)\big)\Big),$$

utilisons l'hypothèse (H_3) on obtient

$$-\frac{d}{d\tau}\tilde{x}(\tau) \in N_C\big(x\big(t(\tau)\big)\big) + G\big(x\big(t(\tau)\big)\big)$$

substituons $x(t(\tau))$ par $\tilde{x}(\tau)$

$$-\dot{\tilde{x}}(\tau) \in N_C\big(\tilde{x}(\tau)\big) + G\big(\tilde{x}(\tau)\big)$$

d'où $\tilde{x}$ est une solution du problème $(\mathcal{P})$.

b) Si $K \neq \emptyset$. Soit

$$l = \sup\{\tau \in [T_0, T] \ : \ \tau \in K\}$$

Comme K est fermé $l \in K$.
L'ensemble complémentaire de K est relativement ouvert à $[T_0, T]$, donc il constitue d'une famille des intervalles ouverts au plus dénombrables de la forme $]a_i, b_i[$, avec la possibilité que deux intervalles sont de la forme $[T_0, b_1[$ et $]l, b_i[$.
Pour tout i appliquons l'étape.1, il existe deux sous ensembles mesurables de $]a_i, b_i[$ de fonctions caractéristiques $\Psi_{i,1}(.)$ et $\Psi_{i,2}(.)$ tels que

$$\Psi_{i,1}(.) + \Psi_{i,2}(.) = \Psi_{]a_i,b_i[}(.)$$

On pose
$$\dot{s}(\tau) = \frac{1}{\xi_1(\tau)}\Psi_{i,1}(\tau) + \frac{1}{\xi_2(\tau)}\Psi_{i,2}(\tau),$$
alors
$$\int_{a_i}^{b_i} \dot{s}(\omega)d\omega = b_i - a_i.$$
Pour tout $\tau \in [T_0, l]$, on considère
$$\dot{s}(\tau) = \frac{1}{\xi_2(\tau)}\Psi_K(\tau) + \sum_i \left(\frac{1}{\xi_1(\tau)}\Psi_{i,1}(\tau) + \frac{1}{\xi_2(\tau)}\Psi_{i,2}(\tau)\right)$$
où la somme compte tous les intervalles du complémentaire de K contenue dans $[T_0, l]$, de plus $\xi_2(\tau) \geq 1$, donc
$$\int_{T_0}^{l} \dot{s}(\omega)\ d\omega = p \leq l - T_0.$$
Posons
$$s(\tau) = T_0 + \int_{T_0}^{\tau} \dot{s}(\omega)d\omega$$
$s(.)$ est une fonction inversible de $[T_0, l]$ vers $[T_0, p]$.
On définit $t : [T_0, p] \to [T_0, l]$ comme la fonction inverse de $s(.)$, et on la prolonge de la manière suivante
$$\tilde{t}(\tau) = \begin{cases} t(\tau) & \text{si } \tau \in [T_0, p], \\ l & \text{si } \tau \in]p, l]. \end{cases}$$
Montrons que la fonction $\tilde{x}(\tau) = x(\tilde{t}(\tau))$ est une solution du problème $(\mathcal{P})$ sur l'intervalle $[T_0, l]$ et satisfait $\tilde{x}(l) = x(l)$.
Observant que pour $\tau \in [T_0, p], \tilde{t}(\tau) = t(\tau)$ est inversible et
$$\dot{t}(\tau) = \xi_2\big(t(\tau)\big)\Psi_K\big(t(\tau)\big) + \sum_i \Big(\xi_1\big(t(\tau)\big)\Psi_{i,1}\big(t(\tau)\big) + \xi_2\big(t(\tau)\big)\Psi_{i,2}\big(t(\tau)\big)\Big).$$
Alors
$$\begin{aligned}
-\frac{d}{d\tau}\tilde{x}(\tau) &= -\dot{x}\big(t(\tau)\big)\bigg(\xi_2\big(t(\tau)\big)\Psi_K\big(t(\tau)\big) + \sum_i \Big(\xi_1\big(t(\tau)\big)\Psi_{i,1}\big(t(\tau)\big) + \xi_2\big(t(\tau)\big)\Psi_{i,2}\big(t(\tau)\big)\Big)\bigg) \\
&\in \bigg(N_C\big(x(t(\tau))\big) + m\Big(co\Big(F\big(x(t(\tau))\big)\Big)\Big)\bigg) \\
&\times \bigg(\xi_2(t(\tau))\Psi_K(t(\tau)) + \sum_i \big(\xi_1(t(\tau))\Psi_{i,1}(t(\tau)) + \xi_2(t(\tau))\Psi_{i,2}(t(\tau))\big)\bigg) \\
&\in N_C\big(x\big(t(\tau)\big)\big) + F\big(x\big(t(\tau)\big)\big) = N_C\big(\tilde{x}(\tau)\big) + F\big(\tilde{x}(\tau)\big).
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Pour $\tau \in]p, l]$, $\tilde{t}(\tau) = l$, d'où

$$\tilde{x}(\tau) = x(\tilde{t}(\tau)) = x(l)$$

donc $\tilde{x}(.)$ est constant, et comme K est non vide on aura

$$-\frac{d}{d\tau}\tilde{x}(\tau) = 0 \in co\big(F(x(l))\big) = co\big(F(\tilde{x}(\tau))\big), \quad \forall \tau \in]p, l] \tag{2.19}$$

D'autre part $0 \in N_C(\tilde{x}(\tau))$, utilisons l'inclusion (2.19) et (H_3) on conclue que pour $\tau \in]p, l]$

$$-\frac{d}{d\tau}\tilde{x}(\tau) = 0 \in N_C(\tilde{x}(\tau)) + F(\tilde{x}(\tau)) \tag{2.20}$$

de plus

$$\tilde{x}(l) = x(\tilde{t}(l)) = x(l)$$

de (2.18) et (2.20) $\tilde{x}(.)$ est une solution de problème $(\mathcal{P})$ sur $[T_0, l]$.
Sur $]l, T]$, K est vide et $\xi_1(\tau) > 0$, on peut alors répéter les arguments de l'étape une et (a), pour obtenir une solution du problème $(\mathcal{P})$.

On généralise maintenant ce résultat sur $\mathbb{R}_+$. Sur chaque intervalle $[k, k+1], k \in \mathbb{N}$ il existe une solution absolument continue $\tilde{x}_k(.)$ du problème $(\mathcal{P})$.
On pose $\tilde{x} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ une fonction satisfait

$$\tilde{x}(\tau) = \tilde{x}_k(\tau), \quad \forall \tau \in [k, k+1].$$

Il est claire que sous cette définition $\tilde{x}(.)$ est une solution absolument continue du problème $(\mathcal{P})$ sur $\mathbb{R}_+$. □

Présentons maintenant le théorème essentiel de la section.

Théorème 2.3.2. *Soit C un sous ensemble convexe fermé de $\mathbb{R}^n$, et $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multiapplication semicontinue supérieurement à valeurs compactes presque convexes. Alors pour tout $a \in C$*

1. *Le problème*

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_C(u(t)) + F(u(t)), \;\; p.p. \;\; t \in \mathbb{R}_+, \\ u(t) \in C, \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+, \\ u(0) = a \in C. \end{cases}$$

   Admet une solution absolument continue.

2. *Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'ensemble admissible du problème $(\mathcal{P})$, $S_a^{\mathcal{P}}(t)$ coïncide avec $S_a^{co}(t)$ l'ensemble admissible du problème $(\mathcal{P}_{co})$, où*

$$S_a^{\mathcal{P}}(t) = \{u(t) \; : \; u(.) \text{ est une solution absolument continue du } (\mathcal{P}) \text{ sur } [0, t]\}.$$

   et

$$S_a^{co}(t) = \{u(t) \; : \; u(.) \text{ est une solution absolument continue du } (\mathcal{P}_{co}) \text{ sur } [0, t]\}.$$

Démonstration.
1) Observons que la multiapplication $co(F) : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ est semicontinue supérieurement à valeurs convexes compactes, alors pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $co(F(y))$ est fermé borné et admet un élément à norme minimale unique, donc il existe un réel positif $\alpha > 0$ tel que

$$\|m\big(co(F(y)\big)\| \leq \alpha, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Grâce au théorème 2.2.1 le problème $(\mathcal{P}_{co})$ admet une solution absolument continue

$$u(.) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n.$$

Montons qu'il existe deux fonctions intégrables $\xi_1(.)$ et $\xi_2(.)$ définis sur $\mathbb{R}_+$ telles que

$$0 \leq \xi_1(t) \leq 1 \leq \xi_2(t)$$

et

$$\xi_1(t)\, m\big(co\big(F(x(t))\big)\big) \in F(x(t)) \quad \text{et} \quad \xi_2(t)\, m\big(co\big(F(x(t))\big) \in F(x(t)) \;\; p.p.\; t \in \mathbb{R}_+.$$

Comme $F(.)$ est à valeurs presque convexes, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, il existe deux multiapplications à valeurs non vides $\Gamma_1(.)$ et $\Gamma_2(.)$ où

$$\begin{aligned} &\Gamma_1(.) : \mathbb{R}_+ \rightrightarrows [0,1] \\ &\qquad t \rightrightarrows \Gamma_1(t) = \{\xi_1 \in [0,1] \;:\; \xi_1 m\big(co\big(F(u(t))\big)\big) \in F(u(t))\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\Gamma_2(.) : \mathbb{R}_+ \rightrightarrows [1,+\infty[\\ &\qquad t \rightrightarrows \Gamma_2(t) = \{\xi_2 \in [1,+\infty[\;:\; \xi_2 m\big(co\big(F(u(t))\big)\big) \in F(u(t))\} \end{aligned}$$

La multiapplication $\Gamma_1(.)$ est mesurable. En effet, considérons son graphe défini par

$$\begin{aligned} gph(\Gamma_1) &= \{(t,\xi_1) \in \mathbb{R}^+ \times [0,1] \;:\; \xi_1 m\big(co(F(u(t)))) \in F(u(t)\big)\} \\ &= \{(t,\xi_1) \in \mathbb{R}^+ \times [0,1] \;:\; d\big(\xi_1 m(co(F(u(t)))), F(u(t))\big) = 0\} \\ &= \varphi^{-1}(\{0\}) \cap (\mathbb{R}^+ \times [0,1]), \end{aligned}$$

Observons que la fonction

$$\varphi : (t,\xi_1) \to d\big(\xi_1 m(co(F(u(t)))), F(u(t))\big)$$

est mesurable car elle est la composition des fonctions mesurables

$$t \to u(t), \qquad\qquad x \to co(F(x)),$$

donc la pré-image de $\{0\}$ par $\varphi : \varphi^{-1}\{0\}$ est mesurable, de plus $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$ est mesurable donc l'intersection qui forme le graphe de Γ_1 est mesurable, par conséquent la multiapplication $\Gamma_1(.)$ est mesurable borné, alors elle admet une sélection intégrable $\xi_1(.)$ satisfait pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$0 \leq \xi_1(t) \leq 1$$

et

$$\xi_1(t)m\big(co\big(F(u(t))\big)\big) \in F(u(t))$$

La démonstration de l'existence de $\xi_2(.)$ est similaire, on a

$$\begin{aligned} gph(\Gamma_2) &= \{(t, \xi_2) \in \mathbb{R}^+ \times [1, +\infty[\;:\; \xi_2 m\big(co(F(u(t)))\big) \in F(u(t)\big)\} \\ &= \{(t, \xi_2) \in \mathbb{R}^+ \times [0, +\infty[\;:\; d\big(\xi_2 m(co(F(u(t)))), F(u(t))\big) = 0\} \\ &= \varphi^{-1}(\{0\}) \cap (\mathbb{R}^+ \times [0, +\infty[), \end{aligned}$$

est mesurable, car la fonction

$$\varphi : (t, \xi_2) \to d\big(\xi_2 m(co(F(u(t)))), F(u(t))\big)$$

est mesurable. Donc $\Gamma_2(.)$ est mesurable, de plus $F(.)$ est à valeurs bornées d'où $\Gamma_2(.)$ est aussi à valeurs bornées, alors elle admet une sélection intégrable $\xi_2(.)$ vérifiée pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$\xi_2(t) \geq 1$$

et

$$\xi_2(t)m\big(co\big(F(u(t))\big)\big) \in F(u(t)).$$

Appliquant le théorème 2.3.1, il existe une fonction absolument continue $\tilde{u}(.)$ solution du problème $(\mathcal{P})$.

2) Comme $F(x) \subset co(F(x))\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, toute solution $\tilde{u}(.)$ de $(\mathcal{P})$ satisfait l'inclusion suivante

$$-\dot{\tilde{u}}(t) \in N_C(\tilde{u}(t)) + F(\tilde{u}(t)) \subset N_C(\tilde{u}(t)) + co(F(\tilde{u}(t)))\ p.p.\ t \in \mathbb{R}_+.$$

D'où toute solution $\tilde{u}(.)$ de $(\mathcal{P})$ est une solution de $(\mathcal{P}_{co})$, donc pour tous $t \in \mathbb{R}_+$ et $\tilde{u}(t) \in S_a(t)$ on a $\tilde{u}(t) \in S_a^{co}(t)$, d'où

$$S_a^{\mathcal{P}}(t) \subset S_a^{co}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+. \tag{2.21}$$

Inversement, soit $u(t) \in S_a^{co}(t)$, alors $u(.)$ est une solution absolument continue de $(\mathcal{P}_{co})$ sur $[0, t]$, grâce au Théorème 2.3.1 il existe une solution $\tilde{u}(.)$ de $(\mathcal{P})$ coïncide avec $u(.)$ sur les bornes de tous intervalles compacts, donc sur $[0, t]$ on a $\tilde{u}(t) = u(t)$, d'où $u(t) \in S_a^{\mathcal{P}}(t)$ et par conséquent

$$S_a^{co}(t) \subset S_a^{\mathcal{P}}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+. \tag{2.22}$$

Par (2.21) et (2.22) on a l'égalité

$$S_a^{\mathcal{P}}(t) = S_a^{co}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

□

2.4 Application au problème de temps optimal

L'objectif d'un problème de contrôle optimal est d'amener un système d'un état initial le plus prés possible d'un état final en minimisant (ou maximisant) un critère d'optimisation. Historiquement, le problème de contrôle optimal est apparu à la continuation de la recherche du calcul des variations. Il est fortement lié à la mécanique classique (principe de Fermat, problème de la brachistochrone, équations d'Euler-Lagrange,... etc).
La théorie moderne du contrôle optimal a commencé dans les années 50 avec le principe du maximum de Pontryagin, découvert par L.S. Pontryagin en 1956. Il donne une condition nécessaire d'optimalité. Cette théorie est développée plus tard dans différentes branches mathématiques : le problème de contrôle optimal d'équations aux dérivées partielles, la théorie de contrôle stochastique, et la théorie des jeux.
De nos jours, la théorie de contrôle optimal a de nombreuses applications : les guidages aérospatiaux et aéronautiques, automobile, robotique, réseaux informatiques, bioréacteurs, contrôles des procédes chimiques, ... etc [36].
Dans un problème de temps optimal, on cherche le temps minimal pour qu'une trajectoire u(.) de système atteint d'un point initial arbitraire a au point final précis z.
Notre but dans cette section est de démonter l'objectif ci-dessus sur le processus de la rafle perturbé lequel a été étudié et résolu dans la section.3.
Si on pose
. $\Upsilon(a)$ l'ensemble des trajectoires du problème $(\mathcal{P})$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$.
. $S_a^{\mathcal{P}} = \bigcup\limits_{t\in[0,+\infty[} S_a^{\mathcal{P}}(t)$.
Le problème considéré prend la forme

$$\forall z \in S_a^{\mathcal{P}} \;\; \exists ? u(.) \in \Upsilon(a) \;\; \text{tel que} \;\; u(\tau) = z \;\; \text{où} \;\; \tau = \inf t \in [0, +\infty[.$$

Au cours de la démonstration nous allons utiliser deux résultats obtenus précédemment

- L'existence de solution du $(\mathcal{P})$, et sa relation avec la solution du problème relaxé associé $(\mathcal{P}_{co})$.
- Les propriétés topologiques des ensembles $S_a(t)$ et $\Upsilon_t(a)$ obtenues dans le corollaire 2.2.1.

Notons que ce résultat s'est inspiré des travaux dans [5] et [30], où ils ont étudié le même principe de minimisation mais dans des contextes différents.

Théorème 2.4.1. *Soit C un sous ensemble fermé convexe de $\mathbb{R}^n$, $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multiapplication semicontinue supérieurement à valeurs compactes presque convexes, et $a \in C$. Alors*

Pour tout $z \in S_a^{\mathcal{P}}$, il existe une solution de $(\mathcal{P})$ atteint z en temps optimal.

Démonstration.
Considérons l'ensemble

$$\mathcal{M} = \{t \in [0, +\infty[: \ u(t) = z \text{ tq } u(.) \in \Upsilon(a)\}$$

D'après les hypothèses le problème $(\mathcal{P})$ admet au moine une solution sur $\mathbb{R}_+$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ l'ensemble des trajectoires $\Upsilon(a)$ est non vide d'où $\mathcal{M} \neq \emptyset$.
Comme $\mathcal{M}$ est non vide minoré elle admet une borne inférieure notée

$$\tau = \inf \mathcal{M}.$$

Par les propriétés de la borne inférieure il existe une suite décroissante (τ_n) de $\mathcal{M}$ converge vers τ, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe une fonction $u_n(.)$ solution de

$$-\dot{u}(t) \in N_C(u(t)) + F(u(t)), \text{ p.p. } \ t \in [0, \tau_n],$$

tels que $u_n(\tau_n) = z$ et $u_n(0) = a$. Comme $F(u(t)) \subset co(F(u(t)))$, $u_n(.)$ est aussi une solution de

$$-\dot{u}(t) \in N_C(u(t)) + co(F(u(t))), \text{ p.p. } t \in [0, \tau_n],$$

pour tout $n \geq 1$. Soit $w_n(t) = u_n(t)$ pour $t \in [0, \tau]$ et $n \geq 1$ donc $w_n(.) \in \Upsilon_\tau(a)$, par le corollaire 2.2.1 l'ensemble $\Upsilon_\tau(a)$ est compact d'où la suite des fonctions $(w_n(.))$ admet une sous suite (noté encore $(w_n(.))$) converge vers $w(.) \in \Upsilon_\tau(a)$. D'autre part on a

$$z = u_n(\tau_n) \in S_a^{co}(\tau_n)$$

avec la multiapplication $S_a^{co}(.)$ est semicontinue supérieurement à valeurs compactes par le même corollaire, on obtient

$$\limsup_{n \to \infty} S_a^{co}(\tau_n) = S_a^{co}(\tau).$$

donc

$$z \in S_a^{co}(\tau)$$

par l'équivalence entre $S_a^{co}(\tau)$ et $S_a^{\mathcal{P}}(\tau)$ obtenue dans la partie 2 du Théorème 2.3.2

$$z \in S_a^{\mathcal{P}}(\tau)$$

par conséquent la fonction $w(.)$ satisfait

$$w(\tau) = \lim_n w_n(\tau_n) = \lim_n u_n(\tau_n) = z$$

est la solution atteint $z \in S_a^{\mathcal{P}}$ en un temps minimum τ. $\square$

Chapitre 3

Existence de solution pour une inclusion différentielle avec une perturbation presque semicontinue mixte

Sommaire

3.1 Introduction du chapitre

Les multiapplications semicontinues mixtes forment une classe spécifique des multiapplications, elles mélangent entre la semicontinuité supérieure et inférieure dans des manières différentes. Pour son caractère spéciale et différent de la semicontinuité classique cette classe a été étudié par des nombreux chercheurs, citant Deimling [21] et Fryszkowski -Gorniewicz [23], qui ont considéré ce concept dans le sens suivant :

– Pour tout x où l'image de la multiapplication $F(x)$ est convexe, $F(.)$ est semicontinue supérieure.

– Pour x où $F(x)$ est non convexe, $F(.)$ est continue.

Puis ils ont utilisé cette propriété pour résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(x(t)) \;\; p.p. \;\; t \in [0,T], \\ x(0) = u_0 \end{cases}$$

Dans [34], Tolstonogove a étudié la semicontinuité mixte mais dans un sens plus faible, il a considéré la multiapplication $F(.)$ semicontinue supérieurement dans les points de la convexité, et semicontinue inférieurement dans les points de la non convexité des images, et utiliser cette condition faible pour montrer l'existence d'une multisélection à valeurs convexes fermées de la multiapplication en question. Son résultat a motivé beaucoup des chercheurs pour étudier l'existence des solutions des inclusions différentielles perturbées par les multiapplications semicontinue mixte précisément le processus de la rafle perturbé

$$(P_F) \begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(x(t)) + F(t, x(t)) \;\; p.p. \;\; t \in [T_0, T], \\ x(t) \in C(t)\,, \quad \forall t \in [T_0, T], \\ x(T_0) = u_0 \in C(T_0)\,, \end{cases}$$

où $C(t)$ est un sous ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$ qui dépend de temps, $N_{C(t)}(x(t))$ est le cône normale de $C(t)$ en $x(t)$, et $F : [T_0, T] \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ présente la perturbation, on peut citer par exemple Haddad-Thibault [25] où ils ont démontré l'existence de solution du (P_F), quand F satisfait la semicontinuité mixte dans le sens de Tolstonogove et une condition de croissance linière par intersection.

Le but de ce chapitre est d'utiliser ce type de semicontinuité avec la presque convexité pour introduire un concept de la semicontinuité encore plus faible que les deux cités ci-dessus, on l'appelle la presque semicontinuité mixte. Cet affaiblissement s'effectue au niveau de la semicontinuité par la rendre mixte, et au niveau de la propriété topologique des images de la multiapplications par la rendre presque convexe / non presque convexe.

On commence par l'étude des propriétés topologique de l'ensemble admissible du problème (P_F) qui est non vide grâce aux résultats de [25], en suite inspirons toujours par les techniques de [4] et [5] nous montrerons l'existence de solution du problème autonome

$$(P_G) \begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_C(x(t)) + G(x(t)) \;\; p.p. \;\; t \in [T_0, T], \\ x(t) \in C\,, \quad \forall t \in [T_0, T], \\ x(0) = u_0 \in C\,, \end{cases}$$

où la perturbation $G : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ vérifie notre nouvelle semicontinuité . Enfin nous allons voir comment ces deux résultats nous permettent de résoudre un problème de temps optimal

$$(P_h) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_C(u(t)) + h(u(t), z(t)), \; p.p. \;\; t \in [T_0, T], \\ z(t) \in Z(u(t)), \; \forall t \in [T_0, T], \\ u(t) \in C, \; \forall t \in [T_0, T], \\ u(T_0) = u_0, \end{cases}$$

où cette fois le problème est perturbé par une application univoque $h(.,.)$ contrôlée au niveau de la deuxième variable par une multiapplication $Z(.)$ presque semicontinue mixte.

3.2 Résultats Préliminaires

Une multiapplication $F : [T_0, T] \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ est dite semicontinue mixte (s.c.m) si elle vérifie

Pour tout $t \in [T_0, T]$, en tout $x \in \mathbb{R}^n$ où $F(t, x)$ est convexe $F(t, .)$ est semicontinue supérieurement, et si $F(t, x)$ est non convexe $F(t, .)$ est semicontinue inférieurement sur un voisinage de x.

$G : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ est dite presque semicontinue mixte (p.s.c.m) si

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ où $G(x)$ est compact presque convexe $G(.)$ est semicontinue supérieurement et si $G(x)$ est non presque convexe $G(.)$ est semicontinue inférieurement sur un voisinages de x.

On donne maintenant deux théorèmes importants liés à la semicontinuité mixte, dont nous aurons besoins pour les démonstrations de nos résultats principaux, pour les preuves et plus de détails on peut se référer respectivement à [34] et [25].

Théorème 3.2.1. *Soit $M : [T_0, T] \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multiapplication à valeurs fermées, globalement mesurable, semicontinue mixte, supposons qu'il existe une fonction de Carathéodory $f : [T_0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ intégrablement bornée sur les parties bornées de $\mathbb{R}^n$, satisfait*

$$M(t, x) \cap \overline{\mathbb{B}}(0, f(t, x)) \neq \emptyset, \quad \forall (t, x) \in [T_0, T] \times \mathbb{R}^n.$$

Alors pour tout ϵ strictement positive, et tout ensemble compact $\mathcal{K} \subset C([T_0, T], \mathbb{R}^n)$, il existe une multiapplication

$$\Phi : \mathcal{K} \rightrightarrows L^1([T_0, T], \mathbb{R}^n)$$

à valeurs non vide fermées convexes, admet un graphe séquentiellement fermé respectivement pour la topologie de la convergence uniforme dans $\mathcal{K}$ et la topologie faible $\sigma(L^1_{\mathbb{R}^n}, L^\infty_{\mathbb{R}^n})$ dans $L^1([T_0, T], \mathbb{R}^n)$ tels que pour tous $u \in \mathcal{K}$ et $\phi \in \Phi(u)$, on a

$$\phi(t) \in M(t, u(t)) \;\; et \;\; \|\phi(t)\| \leq f(t, u(t)) + \epsilon \;\; p.p\; t \in [T_0, T].$$

Théorème 3.2.2. *Soient $C(t)$ un ensemble non vide fermé de $\mathbb{R}^n$, et $F : [T_0, T] \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multiapplication globalement mesurable à valeurs fermées. Supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaisantes*

(H_1) les ensembles $C(t)$ sont uniformément ρ-prox-réguliers pour certain $\rho \in]0, +\infty]$ fixé.

(H_2) il existe une fonction absolument continue $\zeta : [T_0, T] \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$|d(x, C(t)) - d(y, C(s))| \leq \|x - y\| + |\zeta(t) - \zeta(s)|$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ *et* $s, t \in [T_0, T]$.

(H_3) *Pour tout* $(t, x) \in [T_0, T] \times \mathbb{R}^n$, *pour certains fonctions* $\alpha(.), \beta(.) \in L^1_{\mathbb{R}^n}([T_0, T])$

$$G(t, x) \cap (\alpha(t) + \beta(t)\|x\|)\overline{\mathbb{B}} \neq \emptyset.$$

Supposons de plus que F *est s.c.m. Alors, pour tout* $x_0 \in C(T_0)$, *il existe une solution absolument continue de l'inclusion différentielle*

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(x(t)) + F(t, x(t)) \ \ p.p. \ \ t \in [T_0, T] \\ x(T_0) = x_0 \in C(T_0). \end{cases}$$

Le théorème suivant montre l'équivalence en sens de solution entre une inclusion différentielle avec et sans contraintes. Sa preuve se trouve dans [25].

Théorème 3.2.3. *Soit* $C(t)$ *un sous ensemble fermé d'un espace de Hilbert* H *de dimension finie, uniformément* ρ*- prox-régulier pour certain* $\rho \in]0, +\infty]$ *et satisfait l'hypothèse suivante*

Il existe une fonction absolument continue non décroissante $v : [0, T] \to \mathbb{R}_+$ *tel que pour tous* $s, t \in [0, T]$ *et* $x, y \in H$

$$|d(x, C(t)) - d(y, C(s))| \leq \|x - y\| + |v(t) - v(s)|$$

Alors $u : [0, T] \to H$ *est une solution absolument continue de l'inclusion différentielle avec contrainte*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in -N_{C(t)}(x(t)) \ \ p.p. \ \ t \in [0, T], \\ x(t) \in C(t) \quad \forall\, t \in [0, T], \\ x(0) \in C(0). \end{cases}$$

si et seulement si est une solution du problème sans contrainte

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in -\dot{v}(t)\partial d(x(t), C(t)) \ \ p.p \ \ t \in [0, T], \\ x(0) \in C(0). \end{cases}$$

3.3 Propriétés topologique de l'ensemble admissible du problème avec perturbation s.c.m.

Dans cette section nous allons étudier une propriété topologique essentielle de l'ensemble admissible qui est la compacité. L'origine du problème considéré est présenté et résolu dans le théorème.3.2.2, mais nous allons travailler sous une version plus faible où on remplace la condition de la croissance linéaire par intersection, par une condition de croissance linéaire sur l'élément de norme minimale.

Théorème 3.3.1. *Soit $C : [T_0, T] \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multiapplication à valeurs non vides fermées satisfait*

(H_1) *Il existe un constant $\rho \in]0, +\infty]$ où pour tout $t \in [T_0, T]$ les ensembles $C(t)$ sont uniformément ρ- prox réguliers.*

(H_2) *$C(t)$ varie d'une manière absolument continue i.e il existe une fonction positive absolument continue $\eta : [T_0, T] \to \mathbb{R}_+$ vérifie pour chaque $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $s, t \in [T_0, T]$*

$$|d(x, C(t)) - d(y, C(s))| \leq \|x - y\| + |\eta(t) - \eta(s)|.$$

Soit $F : [T_0, T] \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multiapplication semicontinue mixte à valeurs fermées, telle que

(*i*) *F est $\mathcal{L}([T_0, T]) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$- mesurable.*

(*ii*) *Il existe deux constantes positives p, q tel que pour tout $(t, x) \in [T_0, T] \times \mathbb{R}^n$*

$$\|Proj_{F(t,x)}(0)\| \leq p + q\|x\|.$$

Alors pour chaque $u_0 \in C(T_0)$ et en tout temps $\tilde{t} \in [T_0, T]$, l'ensemble admissible du problème (P_F)

$$\mathfrak{A}_{u_0}(\tilde{t}) = \{u(\tilde{t}) \ : \ u(.) \textit{ solution absolument continue de } (P_F)\}$$

est compact.

Avant de donner la démonstration il est indispensable de passer par l'étude de l'ensemble des solutions

$$\mathcal{T}(u_0) = \{u \in C_{\mathbb{R}^n}([T_0, T]) \ : \ u \text{ solution absolument continue de } (P_F)\}.$$

Proposition 3.3.1. *Sous les mêmes hypothèses du théorème.3.3.1, l'ensemble $\mathcal{T}(u_0)$ est non vide compact.*

Démonstration. $\mathcal{T}(u_0)$ est non vide grâce au Théorème 3.2.2, où on peut choisir la fonction de Carathéodory intégrablement bornée

$$f(t, x) = p + q\|x\|,$$

On suit les même étapes dans la démonstration du théorème 3.2.2, et on conclue que (P_F) admet une solution absolument continue définie sur $[T_0, T]$ et satisfait

$$\|\dot{u}(t)\| \leq \gamma(t) \quad \text{p.p.} \quad t \in [T_0, T], \tag{3.1}$$

où $\gamma(t) = |\dot{\eta}(t)| + 2\dot{\delta}(t)$, et $\delta : [T_0, T] \to \mathbb{R}_+$ est une solution absolument continue de l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{cases} \dot{\delta}(t) = \sigma(t) + 2q\delta(t) \\ \delta(T_0) = 0 \end{cases}$$

avec $\sigma(t) = \epsilon + p + q\Big(\|u_0\| + \int_{T_0}^{t} |\dot{\eta}(s)| ds\Big)$ et $\epsilon > 0$ fixé.
Montrons maintenant la compacité de $\mathcal{T}(u_0)$.

Soit $(u_n(.))$ une suite des éléments de $\mathcal{T}(u_0)$, donc pour touts $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [T_0, T]$, l'estimation (3.1) donne

$$\begin{aligned} \|u_n(t)\| &= \|u_0 + \int_{T_0}^{t} \dot{u}_n(s) ds\| \\ &\leq \|u_0\| + \int_{T_0}^{t} \|\dot{u}_n(s)\| ds \\ &\leq \|u_0\| + \int_{T_0}^{t} \gamma(s)\, ds \\ &\leq \|u_0\| + \int_{T_0}^{T} \gamma(s)\, ds \\ &\leq \|u_0\| + \|\gamma\|_{L^1_{\mathbb{R}}([T_0,T])} \end{aligned} \tag{3.2}$$

D'où $(u_n(t))$ est relativement compacte, et on a pour tous $t, t' \in [T_0, T]$ tel que $t \leq t'$

$$\|u_n(t') - u_n(t)\| = \| \int_{t}^{t'} \dot{u}_n(s)\, ds\| \leq \int_{t}^{t'} \gamma(s)\, ds$$

qui montre que $(u_n(.))$ est équicontinue, on peut déduire par le théorème d'Ascoli-Arzéla que la suite des fonctions absolument continues $(u_n(.))$ est relativement compacte. Par la conséquence d'Ascoli- Arzela $(u_n(.))$ admet une sous suite (notée $(u_n(.))$) converge vers une fonction absolument continue $u(.)$ définie de $[T_0, T]$ vers $\mathbb{R}^n$ dans le sens

$$\begin{cases} (u_n(.)) \text{ converge uniformément vers } u(.) \\ (\dot{u}_n(.)) \text{ converge } \sigma(L^1_{\mathbb{R}^n}, L^\infty_{\mathbb{R}^n}) \text{ vers } \dot{u}(.) \end{cases} \tag{3.3}$$

et

$$u(t) = \lim_{n\to\infty} u_n(t) = u_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{T_0}^{t} \dot{u}_n(s)\, ds = u_0 + \int_{T_0}^{t} \dot{u}(s)\, ds.$$

Considérons l'ensemble

$$\mathcal{K} = \{v \in C_{\mathbb{R}^n}([T_0, T]) \ : \ v(t) = u_0 + \int_{T_0}^{t} \dot{v}(s)ds \quad \text{et} \quad \|\dot{v}(t)\| \leq \gamma(t) \ \text{ p.p. dans } \ [T_0, T]\},$$

$\mathcal{K}$ est convexe compact. En effet

$\mathcal{K}$ **est convexe**. Soient $v_1, v_2 \in \mathcal{K}$ et $0 \leq \alpha \leq 1$, on a

$$\begin{aligned}
\alpha v_1(t) + (1-\alpha)v_2(t) &= \alpha[u_0 + \int_{T_0}^{t} \dot{v}_1(s)ds] + (1-\alpha)[u_0 + \int_{T_0}^{t} \dot{v}_2(s)ds] \\
&= u_0 + \alpha \int_{T_0}^{t} \dot{v}_1(s)ds + (1-\alpha) \int_{T_0}^{t} \dot{v}_1(s)ds \\
&= u_0 + \int_{T_0}^{t} (\alpha \dot{v}_1 + (1-\alpha)\dot{v}_2)(s)ds
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|\alpha \dot{v}_1(t) + (1-\alpha)\dot{v}_2(t)\| &\leq \alpha\|\dot{v}_1(t)\| + (1-\alpha)\|\dot{v}_2(t)\| \\
&\leq \alpha\gamma(t) + (1-\alpha)\gamma(t) = \gamma(t)
\end{aligned}$$

alors $\alpha v_1 + (1-\alpha)v_2 \in \mathcal{K}$, et $\mathcal{K}$ est convexe.

$\mathcal{K}$ **est compact**. $\mathcal{K}$ est equicontinu car toute fonction v de $\mathcal{K}$ vérifie

$$\|v(t_1) - v(t_2)\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \gamma(t)dt \quad \forall\, t_1 \leq t_2 \ \text{ de } \ [T_0, T]$$

et comme

$$\|v(t)\| \leq \|u_0\| + \int_{T_0}^{T} \gamma(s)ds$$

$\mathcal{K}(t)$ est relativement compact, on obtient par le théorème d'Ascoli-Arzéla que l'ensemble $\mathcal{K}$ est relativement compact. Il reste à montrer qu'il est fermé, soit $(v_n(.))$ une suite de $\mathcal{K}$ converge vers $u \in C_{\mathbb{R}^n}([T_0, T])$, comme

$$\|\dot{v}_n(t)\| \leq \gamma(t)$$

$(\dot{v}_n(.))$ admet une sous suite (notée par $(\dot{v}_n(.))$) converge faiblement dans $L^1_{\mathbb{R}^n}([T_0, T])$ vers $w(.)$. Posons

$$v(t) = u_0 + \int_{T_0}^{t} w(s)ds$$

$v(.)$ est absolument continue vérifie $\dot{v}(t) = w(t)$ et

$$\|\dot{v}(t)\| \leq \gamma(t)$$

car l'ensemble

$$\{y \in L^1_{\mathbb{R}^n}([T_0,T]) \ : \ \|y(t)\| \leq \gamma(t)\}$$

est convexe fermé dans $L^1_{\mathbb{R}^n}([T_0,T])$. Considérons une base de $\mathbb{R}^n$ notée $(e_i)_{i\in\overline{1,n}}$, pour tous $i \in \overline{1,n}$ la convergence faible de $(\dot{v}_n(.))$ donne

$$\lim_{n\to\infty}\int_{T_0}^{T} < \mathbf{1}_{[T_0,t]}(s)e_i, \dot{v}_n(s) > ds = \int_{T_0}^{T} < \mathbf{1}_{[T_0,t]}(s)e_i, w(s) > ds$$

qui montre que pour tout $t \in [T_0,T]$

$$\lim_{n\to\infty} v_n(t) = v(t).$$

Alors $v = u$, donc $u \in \mathcal{K}$ et $\mathcal{K}$ est fermé.
D'après le théorème 3.2.1 il existe une multiapplication à valeurs fermées convexes

$$\Phi : \mathcal{K} \rightrightarrows L^1_{\mathbb{R}^n}([T_0,T])$$

de graphe séquentiellement fermé respectivement pour la topologie de la convergence uniforme dans $\mathcal{K}$ et la topologie faible $\sigma(L^1_{\mathbb{R}^n}, L^\infty_{\mathbb{R}^n})$ dans $L^1_{\mathbb{R}^n}([T_0,T])$, tels que pour tous $\phi_n \in \Phi(u_n)$ et $n \in \mathbb{N}$

$$\phi_n(t) \in F(t,u_n(t)) \ \text{ et } \ \|\phi_n(t)\| \leq p + q\|u_n(t)\| + \epsilon \quad \text{p.p.} \quad t \in [T_0,T]$$

Comme $(u_n(.))$ forme une suite des solutions de (P_F), la démonstration du théorème 3.2.2 montre que $(u_n(.))$ vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$-\dot{u}_n(t) \in N_{C(t)}(u_n(t)) + \phi_n(t) \quad \text{p.p.} \quad t \in [T_0,T]$$

d'où

$$-\dot{u}_n(t) - \phi_n(t) \in N_{C(t)}(u_n(t)).$$

Comme

$$\begin{aligned}
\|\dot{u}_n(t) + \phi_n(t)\| &\leq \|\dot{u}_n(t)\| + \|\phi_n(t)\| \\
&\leq \gamma(t) + p + q\|u_n(t)\| + \epsilon \\
&\leq \gamma(t) + p + q[\|u_0\| + \int_{T_0}^{t} \|\dot{u}_n(s)\|ds] + \epsilon \\
&\leq \gamma(t) + \epsilon + p + q[\|u_0\| + \int_{T_0}^{t} |\dot{\eta}(s)|ds] + 2q\delta(t) \\
&\leq \gamma(t) + \sigma(t) + 2q\delta(t) = \gamma(t) + \dot{\delta}(t) = \mu(t)
\end{aligned}$$

on obtient

$$-\dot{u}_n(t) - \phi_n(t) \in \mu(t)\overline{\mathbb{B}}$$

appliquons la proposition 1.2.8

$$\dot{u}_n(t) + \phi_n(t) \in -\mu(t)\partial d(u_n(t), C(t)) \quad \text{p.p.} \quad t \in [T_0, T].$$

D'autre par la relation (3.2) donne l'estimation

$$\|\phi_n(t)\| \leq p + q\Bigg(\|u_0\| + \|\gamma\|_{L^1_{\mathbb{R}}([T_0,T])}\Bigg) + \epsilon$$

d'après cette inégalité (ϕ_n) est bornée dans $L^\infty_{\mathbb{R}^n}([T_0, T])$, donc elle admet une sous suite (notée par (ϕ_n)) converge $\sigma(L^\infty_{\mathbb{R}^n}, L^1_{\mathbb{R}^n})$ vers une fonction ϕ, d'où pour tout $y \in L^1_{\mathbb{R}^n}([T_0, T])$ on a

$$\lim_{n\to\infty} < \phi_n, y_n >=< \phi, y >$$

soit $z \in L^\infty_{\mathbb{R}^n}([T_0, T]) \subset L^1_{\mathbb{R}^n}([T_0, T])$, vérifie

$$\lim_{n\to\infty} < \phi_n, z >=< \phi, z >$$

implique que la suite (ϕ_n) est $\sigma(L^1_{\mathbb{R}^n}, L^\infty_{\mathbb{R}^n})$ convergente vers ϕ, et par conséquent la suite de somme $(\dot{u}_n + \phi_n)$ converge faiblement dans $L^1_{\mathbb{R}^n}([T_0, T])$ vers $\dot{u} + \phi$, comme (u_n) converge uniformément vers u, et la multiapplication

$$x \mapsto \mu(t)\partial d(x, C(t))$$

est semicontinue supérieurement à valeurs convexes fermées sur $\mathbb{R}^n$, le théorèmes de fermeture 1.2.4 confirme que

$$\dot{u}(t) + \phi(t) \in -\mu(t)\partial d(u(t), C(t)). \tag{3.4}$$

De plus, la propriété du graphe de Φ citée ci dessus et le fait que $\phi_n \in \Phi(u_n)$, (u_n) converge uniformément vers u dans $\mathcal{K}$ et (ϕ_n) converge faiblement dans $L^1_{\mathbb{R}^n}([T_0, T])$ vers ϕ, on obtient l'inclusion

$$\phi \in \Phi(u)$$

qui implique

$$\phi(t) \in F(t, u(t))$$

avec

$$\|\phi(t)\| \leq p + q\Bigg(\|u_0\| + \|\gamma\|_{L^1_{\mathbb{R}}([T_0,T])}\Bigg) + \epsilon.$$

Afin de compléter la démonstration, il suffit de montrer l'inclusion

$$-\dot{u}(t) - \phi(t) \in N_{C(t)}(u(t)) \ \text{ p.p. } \ t \in [T_0, T].$$

Considérons la transformation classique, dont on pose pour tout $t \in [T_0, T]$

$$y(t) = \int_{T_0}^{t} \phi(s)ds,$$

$$J(t) = C(t) + y(t),$$
$$z(t) = u(t) + y(t).$$

On obtient une inclusion équivalente à (3.4)

$$-\dot{z}(t) \in \mu(t)\partial d(z(t), J(t)) \ \ p.p. \ \ t \in [T_0, T]$$

avec

$$z(T_0) = u_0 \in J(T_0) = C(T_0).$$

Pour tout $t \in [T_0, T]$ l'ensemble $J(t)$ est fermé, uniformément ρ-prox-régulier, et satisfait l'hypothèse (H_2). En effet

$J(t)$ est uniformément ρ-prox-régulier :

Soit $\overline{x} \in J(t)$ et $l \in N^p_{J(t)}(\overline{x})$, comme

$$N^p_{J(t)}(\overline{x}) = N^p_{C(t)+y(t)}(\overline{x} - y(t) + y(t)) = N^p_{C(t)}(\overline{x} - y(t))$$

avec $\overline{x} - y(t) \in C(t)$, alors $l \in N^p_{C(t)}(\overline{x} - y(t))$ et la prox-régularité uniforme de $C(t)$ donne pour tout $x' \in J(t)$

$$\begin{aligned} < \frac{l}{\|l\|}, x' - \overline{x} > &= < \frac{l}{\|l\|}, [x' - y(t)] - [\overline{x} - y(t)] > \\ &\leq \frac{1}{2\rho}\|[x' - y(t)] - [\overline{x} - y(t)]\|^2 = \frac{1}{2\rho}\|x' - \overline{x}\|^2. \end{aligned}$$

D'où par la définition 1.2.16 $J(t)$ est uniformément ρ-prox-régulier.

$J(t)$ satisfait (H_2) :

Soient x_1, x_2 dans $\mathbb{R}^n$ et $s \leq t$ dans $[T_0, T]$

$$\begin{aligned} |d(x_1, J(t)) - d(x_2, J(s))| &= |d(x_1, C(t) + y(t)) - d(x_2, C(s) + y(s))| \\ &= |d(x_1 - y(t), C(t)) - d(x_2 - y(s), C(s))| \\ &\leq \|x_1 - y(t) - x_2 + y(s)\| + |\eta(t) - \eta(s)| \\ &\leq \|x_1 - x_2\| + 3\|y(t) - y(s)\| + |\eta(t) - \eta(s)| \\ &\leq \|x_1 - x_2\| + \int_s^t 3\|\phi(\tau)\| d\tau + \int_s^t |\dot{\eta}(\tau)| d\tau \\ &\leq \|x_1 - x_2\| + |V(t) - V(s)| \end{aligned}$$

où

$$V(t) = \int_{T_0}^t \dot{\eta}(\tau) + 3\dot{\delta}(\tau) d\tau = \int_{T_0}^t \mu(\tau) d\tau$$

est la variation absolument continue de $J(t)$.

Appliquant le théorème 3.2.3 on obtient que $z(.)$ satisfait

$$\begin{cases} -\dot{z}(t) \in N_{J(t)}(z(t)) \quad \text{p.p.} \quad t \in [T_0, T] \\ z(T_0) = u_0 \in J(T_0), \end{cases}$$

inversant la transformation on trouve

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(u(t)) + \phi(t) \;\; p.p. \;\; t \in [T_0, T] \\ u(T_0) = u_0 \in C(T_0); \end{cases}$$

Comme $\phi(t) \in F(t, u(t))$, on conclu que

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(u(t)) + F(t, u(t)) \;\; p.p. \;\; t \in [T_0, T] \\ u(T_0) = u_0 \in C(T_0). \end{cases}$$

Alors la limite u est une solution de (P_F) , donc elle appartient à $\mathcal{T}(u_0)$ et montre sa compacité. □

Démonstration. (Démonstration du Théorème 3.3.1) Montrons que $\mathfrak{A}_{u_0}(\tilde{t})$ est fermé borné dans $\mathbb{R}^n$.
1) Soit (x_n) une suite de $\mathfrak{A}_{u_0}(\tilde{t})$ converge vers $x_0 \in \mathbb{R}^n$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe une solution $u_n(.)$ satisfait

$$u_n(\tilde{t}) = x_n$$

Comme la suite (u_n) est dans l'ensemble compact $\mathcal{T}(u_0)$, on peut extraire une sous suite (notée par (u_n)) converge uniformément vers $u \in \mathcal{T}(u_0)$ avec

$$u(\tilde{t}) = \lim_{n\to\infty} u_n(\tilde{t}) = \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

donc $u(\tilde{t}) = x_0$, et comme $u \in \mathcal{T}(u_0)$ on obtient $x_0 \in \mathfrak{A}_{u_0}(\tilde{t})$, d'où $\mathfrak{A}_{u_0}(\tilde{t})$ est fermé.
2) Soit $x \in \mathfrak{A}_{u_0}(\tilde{t})$

$$\begin{aligned} \|x\| = \|u(\tilde{t})\| &= \|u_0 + \int_{T_0}^{\tilde{t}} \dot{u}(\tau)\, d\tau\| \\ &\leq \|u_0\| + \int_{T_0}^{\tilde{t}} \|\dot{u}(\tau)\|\, d\tau \\ &\leq \|u_0\| + \int_{T_0}^{T} \gamma(\tau)\, d\tau \\ &\leq \|u_0\| + \|\gamma\|_{L^1_{\mathbb{R}_+}([T_0,T])} \end{aligned}$$

Donc $\mathfrak{A}_{u_0}(\tilde{t})$ est borné dans $\mathbb{R}^n$.
De 1) et 2) on conclue que $\mathfrak{A}_{u_0}(\tilde{t})$ est compact. □

3.4 Existence de solution dont la perturbation est presque semicontinue mixte

Nous démontrons dans cette section un théorème d'existence pour le processus de la rafle non convexe perturbé par une multiapplication presque semicontinue mixte. Nous allons étudier aussi la relation entre les ensembles admissibles du problème avec perturbation presque semicontinue mixte et semicontinue mixte, afin de résoudre un problème de temps optimal.
Commençons d'abord par une proposition essentielle.

Proposition 3.4.1. *Soient C un sous ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$ uniformément ρ-prox-régulier pour un $\rho \in]0, +\infty]$, et $G : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multiapplication mesurable à valeurs fermées, satisfait les hypothèses suivantes*

(i) *G est presque semicontinue mixte i.e pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $G(x)$ est compact presque convexe la multiapplication $G(.)$ est semicontinue supérieurement, et quand $G(x)$ est non presque convexe, $G(.)$ est semicontinue inférieurement sur un voisinages de x.*

(ii) *Il existe deux constantes positives p et q tel que*

$$\|Proj_{G(x)}(0)\| \leq p + q\|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Soit $u : [T_0, T] \to \mathbb{R}^n$ une solution absolument continue de l'inclusion différentielle

$$(P_{co}) \begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_C(x(t)) + F(x(t)) \;\; p.p. \;\; t \in [T_0, T], \\ x(t) \in C\,, \quad \forall t \in [T_0, T], \\ x(T_0) = u_0 \in C\,. \end{cases}$$

où

$$F(u(t)) = \begin{cases} co\big(G(u(t))\big) & si \quad t \in D(u), \\ G(u(t)) & si \quad t \in [T_0, T] \backslash D(u), \end{cases}$$

avec D est une multiapplication définie par

$$\begin{aligned} D : \mathbb{R}^n &\rightrightarrows \mathcal{L}([T_0, T]) \\ u &\mapsto D(u) = \{t \in [T_0, T] \;:\; G(u(.)) \text{ est semicontinue supérieurement}\} \end{aligned}$$

On note par $g(.) : D(u) \to \mathbb{R}^n$ la sélection mesurable de $co\big(G(u(.))\big)$ vérifiant

$$-\dot{u}(t) \in N_C(u(t)) + g(t) \quad p.p. \quad t \in D(u).$$

Alors,
1) *Il existe deux fonctions intégrables $\lambda_1(.), \lambda_2(.)$, définies sur $D(u)$, satisfaisant*

$$0 \leq \lambda_1(t) \leq 1 \leq \lambda_2(t)$$

et

$$\lambda_1(t)g(t) \in G(u(t)) \quad et \quad \lambda_2(t)g(t) \in G(u(t)),\ \forall t \in D(u).$$

2) *Il existe une fonction absolument continue non décroissante*

$$\theta : D(u) \to D(u)$$

tel que l'application $\tilde{u} : [T_0, T] \to \mathbb{R}^n$ *donnée par*

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(\theta(t)) & si \quad t \in D(u), \\ u(t) & si \quad t \in [T_0, T] \backslash D(u), \end{cases}$$

est une solution du problème (P_G)*, de plus* $\tilde{u}$ *coïncide avec* u

$$\tilde{u}(T) = u(T) \quad et \quad \tilde{u}(T_0) = u(T_0).$$

Démonstration.
1) Comme $G(u(t))$ est presque convexe pour tout $t \in D(u)$, il existe deux multiapplications à valeurs non vides

$$\begin{aligned} \Delta_1 :\ & D(u) \rightrightarrows [0,1] \\ & t \mapsto \Delta_1(t) = \{\lambda_1 \in [0,1] : \lambda_1 g(t) \in G(u(t))\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Delta_2 :\ & D(u) \rightrightarrows [1,+\infty[\\ & t \mapsto \Delta_2(t) = \{\lambda_2 \in [1,+\infty[: \lambda_2 g(t) \in G(u(t))\}. \end{aligned}$$

Posons

$$Z = \{t \in D(u) : g(t) = 0\}.$$

Sans perdre la généralité on peut supposer que pour tout $t \in Z$

$$\Delta_1(t) = \Delta_2(t) = \{1\}.$$

Montrons le résultat 1) sur $I = D(u)\backslash Z$. Commençons par $\Delta_1(.)$, considérons

$$\begin{aligned} gph\Delta_1 &= \{(t,\lambda_1) \in I \times [0,1]\ : \lambda_1 g(t) \in G(u(t))\} \\ &= \{(t,\lambda_1) \in I \times [0,1]\ : d(\lambda_1 g(t), G(u(t))) = 0\} \\ &= \big(I \times [0,1]\big) \cap \sigma^{-1}(\{0\}), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} & \sigma : I \times [0,1] \to \mathbb{R}_+ \\ & (t,\lambda_1) \mapsto \sigma(t,\lambda_1) = d(\lambda_1 g(t), G(u(t))). \end{aligned}$$

Le graphe de $\Delta_1(.)$ est l'intersection de l'ensemble mesurable $I \times [0,1]$ et l'image réciproque de $\{0\}$ par la fonction mesurable σ d'où $gph\Delta_1$ est mesurable, de plus $\Delta_1(.)$ est à valeurs bornées donc elle est intégrable.

Suivant la même méthode on obtient que $\Delta_2(.)$ est mesurable sur I, mais ses valeurs ne sont pas nécessairement bornées, pour résoudre cette situation on écrit I sous la forme d'une union dénombrable des ensembles

$$B_n = \{t : \|g(t)\| \geq \frac{1}{n}\}$$

sur chaque B_n, $\Delta_2(.)$ est mesurable à valeurs bornées donc elle admet une sélection intégrable qu'on la prolonge sur toute I.
On conclu qu'il existe deux fonctions intégrables $\lambda_1(.), \lambda_2(.)$ définis sur $D(u)$, à valeurs dans $[0, 1]$ et $[1, +\infty[$ respectivement, satisfaisant

$$\lambda_1(t)g(t) \in G(u(t)) \quad \text{et} \quad \lambda_2(t)g(t) \in G(u(t)),\ \forall t \in D(u).$$

2) La semi continuité supérieure de $G(.)$ et la continuité de $u(.)$ entraine que $D(.)$ est à valeurs fermées dans $[T_0, T]$, on peut écrire $D(u)$ comme l'union dénombrable des intervalles ouverts i.e sous la forme

$$D(u) = \bigcup_{k\in I\subseteq \mathbb{N}}]a_k, b_k[$$

où pour tout k, $]a_k, b_k[$ sont des sous intervalles de $D(u)$.
Soit $[a, b] \subset D(u)$ un intervalle quelconque, par le point (1) il existe deux fonctions intégrables $\lambda_1(.)$, $\lambda_2(.)$ définis sur $D(u)$ donc sur $[a, b]$ tel que

$$0 \leq \lambda_1(t) \leq 1 \leq \lambda_2(t).$$

Supposons que $\lambda_1(.) > 0$ et montrons qu'il existe deux sous ensembles mesurables de $[a, b]$ admet $\chi_1(.)$ et $\chi_2(.)$ comme fonctions caractéristiques vérifient $\chi_1 + \chi_2 = \chi_{[a,b]}$, et une fonction absolument continue $\gamma : [a, b] \to [a, b]$ satisfait

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{1}{\lambda_1(t)}\chi_1(t) + \frac{1}{\lambda_2(t)}\chi_2(t) \quad \text{et} \quad \gamma(b) - \gamma(a) = b - a.$$

La technique de démonstration est la même que celle dans la démonstration du Théorème 2.3.1, mais pour que le chapitre soit autonome on la répète .

On pose

$$\mu(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } \lambda_1(\tau) = \lambda_2(\tau) = 1 \\ \frac{\lambda_2(\tau)-1}{\lambda_2(\tau)-\lambda_1(\tau)} & \text{si non.} \end{cases}$$

D'après cette définition

$$0 \leq \mu(\tau) \leq 1$$

et vérifie

$$1 = \mu(\tau) + (1 - \mu(\tau)) = \mu(\tau).\lambda_1(\tau) + (1 - \mu(\tau)).\lambda_2(\tau).$$

Particulièrement on a

$$\int_a^b 1\, d\tau = \int_a^b \big(\mu(\tau) + (1-\mu(\tau))\big)\, d\tau = \int_a^b \big(\frac{\mu(\tau)\lambda_1(\tau)}{\lambda_1(\tau)} + \frac{(1-\mu(\tau))\lambda_2(\tau)}{\lambda_2(\tau)}\big)\, d\tau.$$

On souhaite d'appliquer le théorème de Liapunov pour garantir l'existence de deux sous ensembles mesurables de fonctions caractéristiques $\chi_1(.)$ et $\chi_2(.)$ tels que $\chi_1(.)+\chi_2(.) = \chi_{[a,b]}(.)$ et

$$\int_a^b 1\, d\tau = \int_a^b \big(\chi_1(\tau)\frac{1}{\lambda_1(\tau)} + \chi_2(\tau)\frac{1}{\lambda_2(\tau)}\big)\, d\tau.$$

Mais la fonction $\frac{1}{\lambda_1(\tau)}$ n'est pas nécessairement intégrable, donc on considère la suite des ensembles disjoints définis par

$$J^n = \{\tau \in [a,b] \ :\ n < \frac{1}{\lambda_1(\tau)} \leq n+1\}$$

où $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J^n = [a,b]$. Appliquons maintenant le théorème de Liapunov sur chaque J^n, on affirme l'existence de deux suites des sous ensembles mesurables (J_1^n) et (J_2^n), admettent pour fonctions caractéristiques $(\chi_1^n(.))$ et $(\chi_2^n(.))$, tels que

$$\int_{J^n} 1\, d\tau = \int_{J^n} \big(\chi_1^n(\tau)\frac{1}{\lambda_1(\tau)} + \chi_2^n(\tau)\frac{1}{\lambda_2(\tau)}\big)\, d\tau.$$

On pose $J_1 = \cup_n J_1^n$ et $J_2 = \cup_n J_2^n$, $\chi_1(.) = \sum_n \chi_1^n(.)$ et $\chi_2(.) = \sum_n \chi_2^n(.)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ la fonction

$$\sigma_k(\tau) = \sum_{n=0}^{k} \big(\chi_1^n(\tau)\frac{1}{\lambda_1(\tau)} + \chi_2^n(\tau)\frac{1}{\lambda_2(\tau)}\big),$$

est positive et la suite des fonctions $(\sigma_k(.))$ est croissante, simplement convergente vers la fonction

$$\sigma(\tau) = \chi_1(\tau)\frac{1}{\lambda_1(\tau)} + \chi_2(\tau)\frac{1}{\lambda_2(\tau)}.$$

D'autre part on considère la suite des ensembles (V_k) où pour tout $k \in \mathbb{N}$ $V^k = \bigcup_{n=0}^k J^n$, il est claire que cette suite est strictement croissante et converge vers l'intervalle $[a,b]$, donc

$$\int_a^b 1\, d\tau = \int_{\cup_k V^k} 1\, d\tau = \int_{\cup_n I^n} 1\, d\tau$$

avec

$$\int_{\cup_k V^k} 1\, d\tau = \lim_{k\to\infty} \int_{V^k} 1\, d\tau.$$

Comme les ensembles (J^n), sont disjoints on obtient

$$\int_a^b 1\ d\tau = \lim_{k\to\infty}\int_{V^k} 1\ d\tau = \lim_{k\to\infty}\int_{\bigcup_{n=0}^k J^n} 1\ d\tau = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^k \int_{J^n} 1\ d\tau.$$

Alors

$$\begin{aligned}\int_a^b 1\ d\tau &= \lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^k\int_{J^n}\big(\chi_1^n(\tau)\frac{1}{\lambda_1(\tau)}+\chi_2^n(\tau)\frac{1}{\lambda_2(\tau)}\big)\ d\tau\\ &= \lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^k\int_{J^n}\sum_{n=0}^k\big(\chi_1^n(\tau)\frac{1}{\lambda_1(\tau)}+\chi_2^n(\tau)\frac{1}{\lambda_2(\tau)}\big)\ d\tau\\ &= \lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^k\int_{J^n}\sigma_k(\tau)\ d\tau = \lim_{k\to\infty}\int_{\bigcup_{n=0}^k J^n}\sigma_k(\tau)\ d\tau\\ &= \int_{\bigcup_n J^n}\sigma(\tau)\ d\tau\\ &= \int_a^b\sigma(\tau)\ d\tau.\end{aligned}$$

On conclue que

$$\int_a^b 1\ d\tau = \int_a^b \chi_1(\tau)\frac{1}{\lambda_1(\tau)}+\chi_2(\tau)\frac{1}{\lambda_2(\tau)}\ d\tau.$$

On considère

$$\dot\gamma(\tau)=\sigma(\tau)$$

et on obtient

$$\int_a^b\dot\gamma(\tau)d\tau = b-a.$$

Considérons l'ensemble fermé relativement à $D(u)$:

$$\Omega=\{t\in D(u)\ :\ 0\in G(u(t))\}$$

a) Supposons que Ω est vide, dans ce cas $\lambda_1(.)>0$ sur $D(u)$, comme $D(u)=\bigcup_{k\in I}]a_k,b_k[$, par l'étape précédente sur chaque intervalle $]a_k,b_k[$ il existe une fonction absolument continue non décroissante $\gamma(.)$ de $]a_k,b_k[$ dans lui même s'écrit

$$\gamma(t)=a_k+\int_{a_k}^t\dot\gamma(\tau)d\tau$$

et vérifie $\gamma(a_k)=a_k$, et $\gamma(b_k)=b_k$. Posons $\theta_k :]a_k,b_k[\to]a_k,b_k[$ la fonction inverse de $\gamma(.)$, donc $\theta(a_k)=a_k$, $\theta(b_k)=b_k$ et

$$\dot\theta_k(t)=\frac{1}{\dot\gamma(\theta_k(t))}=\lambda_1(\theta_k(t))\chi_1^k(\theta_k(t))+\lambda_2(\theta_k(t))\chi_2^k(\theta_k(t)).$$

soit

$$\begin{aligned} \theta : D(u) &\to D(u) \\ t \to \theta(t) &= \sum_{k\in I} \theta_k(t). \end{aligned}$$

avec

$$\dot{\theta}(t) = \sum_{k\in I} \dot{\theta}_k(t) = \sum_{k\in I} \Big(\lambda_1(\theta_k(t))\chi_1^k(\theta_k(t)) + \lambda_2(\theta_k(t))\chi_2^k(\theta_k(t)) \Big).$$

Définissons $\tilde{u} : [T_0, T] \to \mathbb{R}^n$ par

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(\theta(t)) & \text{si} \quad t \in D(u), \\ u(t) & \text{si} \quad t \in [T_0, T] \backslash D(u), \end{cases}$$

alors pour tout $t \in D(u)$ on a

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}\tilde{u}(t) &= -\dot{\theta}(t)\frac{d}{dt}u(\theta(t)) \\ &\in \dot{\theta}(t)\Big(N_C(u(\theta(t))) + g(\theta(t)) \Big), \end{aligned}$$

d'après les propriétés du cône normal et le point (1) on obtient pour presque tout $t \in D(u)$

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}\tilde{u}(t) &\in N_C(u(\theta(t))) + \dot{\theta}(t)g(\theta(t)) \\ &\in N_C(u(\theta(t))) + G(u(\theta(t))) \\ &\in N_C(\tilde{u}(t)) + G(\tilde{u}(t)). \end{aligned}$$

d'où $\tilde{u}(.)$ est une solution de (P_F) quand Ω est vide.

b) Supposons que $\Omega \neq \emptyset$, soit τ la borne supérieure de Ω, comme Ω est fermé relativement à $D(u)$, τ appartient à Ω et son complémentaire relative à $D(u)$ est ouvert, d'où il est constitué d'une famille au plus dénombrable des intervalles ouverts $(]a_i, b_i[)_i$, sur chaque intervalle $]a_i, b_i[$ il existe deux sous ensembles mesurables de fonctions caractéristiques $\chi_1^i(.)$, $\chi_2^i(.)$ tel que

$$\chi_1^i(.) + \chi_2^i(.) = \chi_{]a_i,b_i[}$$

et une fonction absolument continue non décroissante $\gamma :]a_i, b_i[\to]a_i, b_i[$

$$\dot{\gamma}(t) = \chi_1^i(t)\frac{1}{\lambda_1(t)} + \chi_2^i(t)\frac{1}{\lambda_2(t)} \quad \text{et} \quad \int_{a_i}^{b_i} \dot{\gamma}(\tau)d\tau = b_i - a_i.$$

Comme l'ensemble $D(u)$ est fermé il contient ses bornes supérieure et inférieure

$$m = \inf D(u) \in D(u)$$

$$M = \sup D(u) \in D(u)$$

On discute l'existence de la solution dans deux intervalles disjoints
1) Dans $[m, \tau]$ on pose

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{1}{\lambda_2(t)}\chi_\Omega(t) + \sum_i \big(\chi_1^i(t)\frac{1}{\lambda_1(t)} + \chi_2^i(t)\frac{1}{\lambda_2(t)}\big)$$

où la somme est sur tous les intervalles $(]a_i, b_i[)_i$ contenues dans $[m, \tau]$, comme $\lambda_2(t) \geq 1$ et $\int_{a_i}^{b_i} \dot{\gamma}(t)dt = b_i - a_i$ on obtient

$$\int_m^\tau \dot{\gamma}(t)dt = l \leq \tau - m.$$

Alors $\gamma(.)$ donnée par

$$\gamma(t) = \int_m^t \dot{\gamma}(s)ds$$

est une fonction inversible de $[m, \tau]$ dans $[m, l]$. Soit $\theta : [m, l] \to [m, \tau]$ la fonction inverse de $\gamma(.)$, on la prolonge d'une manière absolument continue à la fonction

$$\tilde{\theta} : [m, \tau] \to [m, \tau]$$

dont on pose $\dot{\tilde{\theta}}(t) = 0 \ \ \forall t \in]l, \tau]$.
Montrons que la fonction $\tilde{u}(t) = u(\tilde{\theta}(t))$ est une solution de (P_G) sur $[m, \tau]$ satisfait $\tilde{u}(\tau) = u(\tau)$.
. Pour tout $t \in [m, l]$ la fonction $\tilde{\theta}(.)$ coïncide avec $\theta(.)$, elle est inversible et de dérivée

$$\dot{\theta}(t) = \lambda_2(\theta(t))\chi_\Omega(\theta(t)) + \sum_i \big(\chi_1^i(\theta(t))\lambda_1(\theta(t)) + \chi_2^i(\theta(t))\lambda_2(\theta(t))\big).$$

Comme

$$\frac{d}{dt}\tilde{u}(t) = \dot{\tilde{\theta}}(t)\dot{u}(\tilde{\theta}(t)) = \dot{\theta}(t)\dot{u}(\theta(t)),$$

on obtient

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{dt}\tilde{u}(t) &\in \dot{\theta}(t)\Big(N_C(u(\theta(t))) + g(\theta(t))\Big) \\
&\in \Big(\lambda_2(\theta(t))\chi_\Omega(\theta(t)) + \sum_i \big(\chi_1^i(\theta(t))\lambda_1(\theta(t)) + \chi_2^i(\theta(t))\lambda_2(\theta(t))\big)\Big) \times (N_C(u(\theta(t))) + g(\theta(t \\
&\in N_C(u(\theta(t))) + \Big(\lambda_2(\theta(t))\chi_\Omega(\theta(t)) + \sum_i \big(\chi_1^i(\theta(t))\lambda_1(\theta(t)) + \chi_2^i(\theta(t))\lambda_2(\theta(t))\big)\Big)g(\theta(t)) \\
&\in N_C(u(\theta(t))) + G(u(\theta(t))) = N_C(\tilde{u}(t)) + G(\tilde{u}(t)).
\end{aligned}$$

où la dernière et l'avant dernière inclusion viennent de la propriété du cône normal et le point 1) de la proposition.
. Pour $t \in]l, \tau]$ on a $\dot{\tilde{\theta}}(t) = 0$ donc $\tilde{\theta}$ est constante de valeur

$$\tilde{\theta}(t) = \tilde{\theta}(l) = \theta(l) = \gamma^{-1}(l) = \tau$$

donc on obtient sur $]l,\tau]$

$$\tilde{u}(t) = u(\tilde{\theta}(t)) = u(\tau).$$

Alors $\tilde{u}(.)$ est constante sur $]l,\tau]$ vérifie $\tilde{u}(\tau) = u(\tilde{\theta}(\tau)) = u(\tau)$. Comme $\tau \in \Omega$, par définition

$$0 \in G(u(\tau)) = G(\tilde{u}(\tau))$$

de plus

$$0 \in N_C(\tilde{u}(\tau))$$

on conclu que

$$-\frac{d}{dt}\tilde{u}(t) = 0 \in N_C(\tilde{u}(t)) + G(\tilde{u}(t))$$

Par conséquent $\tilde{u}(.)$ est une solution de (P_G) sur $[m,\tau]$ vérifie $\tilde{u}(\tau) = u(\tau)$.

Vérifiant que la solution $\tilde{u}(.)$ satisfait la condition initial

$$\tilde{u}(T_0) = u(T_0) = u_0.$$

On distinct deux cas, si $T_0 \notin D(u)$ alors $\tilde{u}(T_0) = u(T_0) = u_0$. Si non T_0 est la borne inférieure du premier intervalle $[a_1, b_1[= [T_0, b_1[$ de $D(u)$, comme

$$\theta(T_0) = \theta_1(T_0) = T_0 \ \text{ on obtient } \ \tilde{u}(T_0) = u(\theta(T_0)) = u(T_0).$$

$\tilde{u}(.)$ coïncide avec $u(.)$ en T. En effet si $T \notin D(u)$ on aura par définition $\tilde{u}(T) = u(T)$, si non T est la borne supérieure du dernier intervalle de $D(u)$ i.e $]a_n, b_n] =]a_n, T]$, et

$$\theta(T) = \theta_n(T) = T \ \text{ donc } \ \tilde{u}(T) = u(\theta(T)) = u(T).$$

□

Maintenant nous allons énoncer le théorème essentielle de la section.

Théorème 3.4.1. *Soient C un sous ensemble fermé uniformément ρ-prox-régulier de $\mathbb{R}^n$, et $G : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multiapplication à valeurs fermées satisfait les hypothèses (i) et (ii). Alors pour tout $u_0 \in C$*

1. *Le problème (P_G) admet au moins une solution absolument continue.*
2. *Pour tout $\tilde{t}$ fixé de $[T_0, T]$ les ensembles admissibles*

$$\mathfrak{A}_{u_0}(\tilde{t}) = \{u(\tilde{t}) \ \ : \ \ u(.) \ \ \textit{une solution absolument continue de } (P_G)\}$$

et

$$\mathfrak{A}^{co}_{u_0}(\tilde{t}) = \{u(\tilde{t}) \ \ : \ \ u(.) \ \ \textit{une solution absolument continue de } (P_{co})\}$$

sont équivalents.

Démonstration.
1) Observons que $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ donnée par

$$F(x(t)) = \begin{cases} coG(x(t)) & \text{si } t \in D(x), \\ G(x(t)) & \text{si } t \in [T_0, T] \backslash D(x). \end{cases}$$

où $D(.)$ est la multiapplication défini dans la proposition précédente, est semicontinue mixte. De plus comme $G(x) \subset F(x)$ on a

$$\|Proj_{F(x)}(0)\| \leq \|Proj_{G(x)}(0)\| \leq p + q\|x\|, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

par conséquent toutes les hypothèses de la proposition 3.3.1 sont satisfaisant et le problème (P_{co}) admet une solution absolument continue $u : [T_0, T] \to \mathbb{R}^n$, appliquons en suite la proposition 3.4.1 le problème (P_G) admet une solution $\tilde{u} : [T_0, T] \to \mathbb{R}^n$ s'écrit en fonction de $u(.)$ et vérifie $\tilde{u}(T) = u(T)$.

2) Il est claire que pour tout $\tilde{t} \in [T_0, T]$ l'ensemble admissible du (P_G) : $\mathcal{A}_{u_0}(\tilde{t})$ est contenu dans celui du problème (P_{co}) : $\mathcal{A}^{co}_{u_0}(\tilde{t})$, donc il suffit de montrer que

$$\mathcal{A}^{co}_{u_0}(\tilde{t}) \subset \mathcal{A}_{u_0}(\tilde{t})$$

Soit $u(\tilde{t}) \in \mathcal{A}^{co}_{u_0}(\tilde{t})$, donc $u(.)$ est une solution de (P_{co}), appliquant la proposition 3.4.1 sur l'intervalle $[T_0, \tilde{t}]$, il existe une solution absolument continue $\tilde{u}(.)$ de (P_G) satisfait $\tilde{u}(\tilde{t}) = u(\tilde{t}) \in \mathcal{A}_{u_0}(\tilde{t})$ d'où $\mathcal{A}^{co}_{u_0}(\tilde{t}) \subset \mathcal{A}_{u_0}(\tilde{t})$. □

3.5 Solution d'un problème de temps minimal

Le résultat de cette section est une application des théorèmes démontrés précédemment, dont le but est de résoudre un problème de temps minimal de l'inclusion différentielle

$$(P_h)\begin{cases} \dot{u}(t) \in -N_C(u(t)) + h(u(t), z(t)),\ p.p.\ \ t \in [T_0, T], \\ z(t) \in Z(u(t)),\ \forall t \in [T_0, T], \\ u(t) \in C,\ \forall t \in [T_0, T], \\ u(T_0) = u_0, \end{cases}$$

utilisant l'existence du solution d'un processus de la rafle perturbé par une multiapplication presque semicontinue mixte et l'équivalence entre les ensemble admissibles $\mathcal{A}_{u_0}(t)$ et $\mathcal{A}^{co}_{u_0}(t)$ en tout t de l'intervalle $[T_0, T]$, on cherche à démontrer l'existence d'une solution de (P_h) qui peut atteindre un élément u_1 de l'ensemble admissible de (P_h) à partir de la condition initial u_0 dans un temps minimum t_1.

Corollaire 3.5.1. *Soit C un sous ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$ uniformément ρ-prox-régulier, $\mathfrak{D}$ un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ et $Z : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multiapplication à valeurs non vide semicontinue supérieurement en tout x de $\mathfrak{D}$, et quand $x \notin \mathfrak{D}$, $Z(.)$ est semicontinue inférieurement en certains voisinages de x.*
Soit $h : gph(Z) \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue satisfait
$(\mathcal{H}_h)$ il existe deux constants positifs p et q tel que

$$\|h(x,z)\| \leq p + q\|x\|,\ \forall (x,z) \in gph(Z).$$

On associe avec ces donnés une multiapplication $G : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ définie par

$$G(x) = \{h(x,z)\}_{z \in Z(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Supposons qu'elle est à valeurs fermées, compactes et presque convexes pour tout x de $\mathfrak{D}$.
Soit u_0, u_1 deux points de $\mathbb{R}^n$, et supposons qu'il existe $t \in [T_0, T]$ où $u_1 \in \mathcal{A}_{u_0}(t)$. Alors le problème d'atteindre u_1 de u_0 pendant un temps minimum admet une solution.

Démonstration. Sous les hypothèses sur $h(.)$ et $Z(.)$ la multiapplication $G(.)$ est presque semicontinue mixte, satisfait

$$\|Proj_{G(x)}(0)\| \leq p + q\|x\|,\ \forall (x,z) \in gph(Z).$$

donc le problème (P_h) qui est équivalant en sens de solution au (P_G) admet au moins une solution, et il a le même ensemble admissible $\mathcal{A}_{u_0}(t), t \in [T_0, T]$.
Soit

$$t_1 = \inf\{\tau \in [T_0, T] :\ u_1 \in \mathcal{A}_{u_0}(\tau)\}$$

notons (t_n) une suite décroissante de $\{\tau \in [T_0, T] : \ u_1 \in \mathcal{A}_{u_0}(\tau)\}$ converge vers t_1, et (u_n) une suite des solutions du problème

$$\begin{cases} \dot{u}(t) \in -N_C(u(t)) + G(u(t)), \ p.p. \ \ t \in [T_0, t_n], \\ u(t) \in C, \ \forall t \in [T_0, t_n], \\ u(T_0) = u_0 \end{cases}$$

vérifie $u_n(t_n) = u_1$. Pour tout $\tau \in [T_0, t_1]$ on définit la suite des fonctions $(\overline{u}_n(.))$ par $\bar{u}_n(\tau) = u_n(\tau)$, alors

$$(\bar{u}_n(\tau)) \subset \mathcal{A}_{u_0}(\tau) = \mathcal{A}^{co}_{u_0}(\tau).$$

Comme $\mathcal{A}^{co}_{u_0}(\tau)$ est compact, la suite $(\overline{u}_n(\tau))$ admet une sous suite (notée $(\overline{u}_n(\tau))$) converge vers $\overline{u}(\tau) \in \mathcal{A}^{co}_{u_0}(\tau)$ d'où on obtient

$$u_1 = \lim_{n \to \infty} \overline{u}_n(t_n) = \overline{u}(t_1) \in \mathcal{A}^{co}_{u_0}(t_1)$$

on a d'après le théorème 3.4.1 $\mathcal{A}^{co}_{u_0}(t_1) = \mathcal{A}_{u_0}(t_1)$, donc $u_1 = \overline{u}(t_1) \in \mathcal{A}_{u_0}(t_1)$ c'est à dire $\overline{u}(.)$ est la solution de (P_h) qui atteint u_1 dans un temps minimum t_1. $\square$

Bibliographie

[1] D. Affane , *Quelque Problème de Contrôle optimal pour des inclusions différentielles*, Thèse de Doctorat en Sciences, Université Mohammed Seddik Benyahia de Jijel, (2012).

[2] D. Affane, M. Aissous, M. F. Yarou, *Existence results for sweeping process with almost convex perturbation*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie **61**, **No. 2**, 119-134 (2018).

[3] D. Affane, M. Aissous, M. F Yarou, *Almost mixed semicontinuous perturbation of Moreau's sweeping processes*, soumis.

[4] D. Affane and D. Azzam-Laouir, *Second-order differential inclusions with almost convex right-hand sides*. Electronic. J. Qual. Theory of Dif. Equ. **34**, 1-14 (2011).

[5] D. Affane and D. Azzam-Laouir, *Almost convex valued perturbation to time optimal control sweeping processes*, Essaim : control, optimisation and calculus of variations. **23** **1**, 1-12 (2017).

[6] J. P. Aubin and A. Cellina, *Differential inclusions*, Springer-Verlag, New York, (1984).

[7] J. P. Aubin and H. Frankowska, *Set-valued analysis*, Birkhauser, Boston. Basel. Berlin, (1990).

[8] M. Bounkhel and L. Thibault, *Nonconvex sweeping process and prox-regularity in Hilbert space*, J. Nonlinear Convex Anal. **Vol. 6**, **No. 2**, 1-12 (2005).

[9] M. Bounkhel and M. F. Yarou, *Existence results for first and second order nonconvex sweeping processs with delay*, Portugaliae Mathematica. **61**, 207-230 (2004).

[10] C. Castaing, A. G. Ibrahim and M. Yarou, *Existence problem in second order evolution inclusion : discretization and variational approach*, Taiwanese Journal of mathematics. **12**, 1433-1475 (2008).

[11] C. Castaing, A. G. Ibrahim and M. F. Yarou , *Some contributions to nonconvex sweeping process*, J. Nonlinear Convex Anal. **10**, 1-20 (2009).

[12] C. Castaing, T. X. Duc Ha, M. Valadier, *Evolution equation governed by the sweeping process*, Set-Valued Anal. **1**, 109-139 (1993).

[13] C. Castaing, A. Salvadori, L. Thibault, *Functional evolution equations governed by nonconvex sweeping process*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis. **Vol 2**, 217-241 (2001).

[14] C. Castaing and M. Valadier, *Convex Analysis and Measurable Multifunctions,* Lectures Notes in Mathematics, Springer-Verlag,Berlin. **580**, (1977).

[15] A. Cellina and A.Ornelas , *Existence of solution to differential inclusion and optimal control problems in the autonomous case,* Siam J. Control Optim. **42**, 260-265 (2003).

[16] A. Cellina and G. Colombo, *On a classical problem of the calculus of variations without convexity assumption*, Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linear. **7**, 97-106 (1990).

[17] L. Cesari, *Optimization Theory and Applications*, Springer-Verlag New York, (1983).

[18] F. Clarke, Yu. Ledyaev, R. Stern and P. Wolneski, *Nonsmooth Analysis and Control Theory*, Springer, New York, (1998).

[19] F. Clarke, R. L. Stern and P. R. Wolenski *Proximal smoothness and the lower C^2 property*, J. Convex Anal., 02 : 117-144 (1995).

[20] B. Cornet, *Existence of slow solutions for a class of differential inclusions*, J. Math. Anal. Appl. **96** 130-147 (1983).

[21] K. Deimling, *Multivalued Diffrential Equations*, De Gruyter, Berlin, (1992).

[22] J. B. G Frenk, G. Kassay, *Lagrangian duality and cone convexlike functions*, Journal of Optimization Theory and Applications, **134 (2)**, 207-222 (2007).

[23] A. Fryszkowski and L. Gorniewicz, *Mixed Semicontinuous Mappings and Their Applications to Differential Inclusions*, Set-Valued Analysis. **8**, 203-217 (2000).

[24] T. Haddad I. Kecis and L. Thibault, *Reduction of state dependent sweeping process to unconstrained differential inclusion,* J Glob Optim. **62**, 167-182 (2015).

[25] T. Haddad and L. Thibault, *Mixed semicontinuous perturbation of nonconvex sweeping process,* Math. Program. Ser. **B 123**, 225-240 (2010).

[26] C. Henry, *An existence theorem for a class of differential equation with multi-valued right hand side*, J. Math. Anal. Appl. **41**, 179-186 (1973).

[27] M. Kunze and M.D.P. Marques *An Introduction to Moreau's Sweeping Process*, Brogliato B. (eds) Impacts in Mechanical Systems. Lecture Notes in Physics, **vol 551**, (2000).

[28] J. J. Moreau , *Evolution problem asssociated with a moving convex set in a Hilbert space*, J. Diff. Eqs. **26**, 347-374 (1977).

[29] J. Noel and L. Thibault, *Nonconvex sweeping process with a moving set depending on the state*, Vietnam Journal of Mathematics. **42**, 595-612 (2014).

[30] N.S. Papageorgiou, *On the attainable set of differential inclusions and control systems*, Journal Of Mathematical Analysis and Applications, **125**, 305-322 (1987).

[31] R.A. Poliquin , R.T.Rockafellar and L. Thibault *Local differentiability of distance functions*, Trans. Math. Soc. 352, 11 : 5231-5249 (2000).

[32] S. Saidi, L. Thibault and M. F. Yarou, *Relaxation of optimal control problems involving time dependent subdifferential operators*, Numerical Functional Analysis and Optimization. **34(10)**, 1156-1186 (2013).

[33] S. Saidi and M. F. Yarou, *Set-valued perturbation for time dependent subdifferential operator*, Topol. Meth. Nonlin. Anal. **46 (1)**, 447-470 (2015).

[34] A. A. Tolstonogov, *Solutions of a differential inclusion with unbounded right-hand side*, (Russian) Sib. Math. Zh.**29**(5), (1988) 212-225, 241 translation in Sib. Math. J. **29** (5), 857-868 (1988).

[35] L. Thibault, *Sweeping process with regular and nonregular sets,* J. Differential Equation. **193** 1-26 (2003).

[36] C. T. Wu, *Contrôle en temps optimal*, Mémoire Mastere 2, Université de lorraine (2012).