République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Seddik Ben Yahia – Jijel

Thèse

Présentée à la Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

Pour l'obtention du diplôme de

Doctorat en Sciences

Spécialité : Mathématiques
Option : Équations Différentielles

Par

SELAMNIA Fatiha

Thème

Contribution à l'étude de quelques problèmes d'évolution gouvernés par des opérateurs maximaux monotones

Soutenue publiquement le 04/12/2018

Devant le jury composé de :

N. ARADA	M.C.A Université M.S.B.Y. – Jijel	Président
D. AZZAM-LAOUIR	Prof. Université M.S.B.Y. – Jijel	Directeur de thèse
A. AIBECHE	Prof. Université – Sétif 1	Examinateur
A. BOUCHAIR	M.C.A Université M.S.B.Y. – Jijel	Examinateur
A. BERKANE	M.C.A Université – Constantine 1	Examinateur
N. ABADA	M.C.A Université – Constantine 3	Examinateur

Table des matières

1
Introduction générale

L'objectif entrepris à travers cette thèse est l'étude de l'existence de solutions pour quelques problèmes d'évolution du premier et second ordre.

Les processus de la rafle jouent un rôle important en élastoplasticité et en dynamique. L'existence de solutions pour les processus de la rafle a été étudiée par de nombreux auteurs depuis le travail novateur de J.J. Moreau dans les années 70 (voir [67]).

L'étude de ces inclusions différentielles a été motivée par ses diverses applications à des problèmes de mécanique. Voir [64, 67, 68, 66].

Il a exprimé ce processus de la rafle par l'inclusion différentielle d'évolution suivante

$$-\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(u(t)), \text{ p.p. } t \in [0,T]; \; u(0) = u_0 \in C(0), \tag{1.0.1}$$

où, pour tout $t \in [0,T], C(t)$ est un ensemble convexe fermé dans un espace de Hilbert H et où $N_{C(t)}(\cdot)$ désigne le cône normal vers l'extérieur de l'ensemble $C(t)$ au sens de l'analyse convexe (voir aussi [68] et [66]). Depuis, divers autres travaux ont été développés afin d'obtenir des résultats d'existence de solution dans d'autres contextes. Une première direction consiste à ajouter une perturbation comme suit :

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(u(t)) + F(t,u(t)), p.p. \; t \in [0,T] \\ u(t) \in C(t) \;\forall t \in [0,T] \\ u(0) = u_0 \in C(0), \end{cases} \tag{1.0.2}$$

où $F : I \times E \rightrightarrows E$ est une multi-application à valeurs non vides convexes compactes.

Beaucoup de travail a été fait dans un espace de dimension finie, nous nous référons par exemple à [28, 27, 40, 79].

Dans l'espace de Hilbert (dimension infinie), les auteurs des références [21, 48, 47, 79] et [9] ont montré l'existence de solutions de (1.0.2) quand les ensembles $C(t)$ sont prox-réguliers, cette propriété contourne la convexité des ensembles et est bien adaptée à la résolution des processus de la rafle.

Dans le cadre d'une multi-application $C(\cdot)$ à valeurs non convexes, mais avec $F \equiv \{0\}$, l'existence de solution pour le problème (1.0.2) a été établie via les méthodes utilisées par Castaing [26], en prenant $C(t)$ comme la translation d'un ensemble non convexe indépendant de t par un vecteur dépendant du temps.

Récemment, l'inclusion différentielle (1.0.2), où les ensembles dans le cône normal dépendent du temps et de l'état, a été étudié par de nombreux auteurs motivés par les applications de ce type de processus à des inégalités paraboliques quasi variationnelles et modélisation de problèmes d'évolution quasi-statiques 2D et 3D avec fonction, voir [60]. Le premier travail dans le cas convexe a été fait dans la thèse de Chraibi dans l'espace de dimension finie $\mathbb{R}^3$ (voir [35]), et dans un espace de Hilbert par Kunze et Marques dans [60]. Ensuite, dans le cas où $C(t, x)$ appartient à la classe plus générale d'ensembles prox-réguliers, certains résultats ont été établis avec divers types de perturbations en dimension finie et dans les espaces de Hilbert, voir [33, 29, 53, 7, 70, 54]. Le même problème avec la classe des ensembles sous-lisses qui contient strictement la classe des ensembles prox-réguliers, a été établie dans [55] avec une perturbation semi-continue supérieurement dans les espaces de Hilbert, et dans [58] avec une perturbation semi-continue mixte dans un espace de dimension finie. Récemment, certains résultats d'existence pour ce genre de problèmes avec des ensembles positivement α-lointains ont été prouvés par Jourani et Vilches dans [59].

Dans le cadre d'un espace de Banach réflexif séparable uniformément lisse, une étude détaillée de l'inclusion (1.0.2) a été faite par Bernicot et Venel dans [18], le processus est régi par le cône normal proximal.

Pour les processus de la rafle du premier ordre dans les espaces de Banach p-uniformément lisse et q-uniformément convexes, nous référons le lecteur à [22] pour un processus de la rafle dépendant du temps, à [20] pour un processus de la rafle non perturbé dépendant du temps et de l'état et à [1] pour le processus perturbé.

Un autre thème de recherche plus général a été considéré dans de nombreux travaux, il s'agit des inclusions différentielles gouvernées par les opérateurs sous-différentiels.

Le sous-différentiel est un concept permettant de décrire la variation locale d'une fonction non nécessairement différentiable au sens classique. Ce concept a trouvé de nombreuses applications importantes dans des problèmes d'optimisation convexe, d'économie, de mécanique ... etc. Parmi les sous-différentiels connus, on cite le sous-différentiel au sens de l'analyse convexe, le sous-différentiel généralisé de Clarke, le sous-différentiel proximal et les sous-différentiels de Fréchet.

Le sous-différentiel d'une fonction convexe généralise la notion de dérivée, et a fourni ses premiers exemples à la théorie des opérateurs maximaux monotones, et à la résolution des problèmes d'évolution. En effet, parmi les problèmes d'évolution non linéaires pour les inclusions différentielles, les problèmes gouvernés par les opérateurs maximaux monotones qui se présentent sous la forme

$$-\frac{du}{dt}(t) \in A(t)u(t) \;\; p.p, \; u(0) = u_0 \in D(A(0)). \tag{1.0.3}$$

et qui trouvent leurs motivations dans différentes applications, en mécanique, contrôle optimal et économétrie, etc ...

Ce type de problème a été d'abord étudié lorsque l'opérateur maximal monotone ne dépend pas du temps par H. Brézis [25] et V. Barbu [10, 11]. Dans le cas où l'opérateur A dépend du temps, différentes contributions se trouvent dans littérature voir [32, 52].

Si on considère le sous-différentiel d'une fonction propre, convexe et semi-continue inférieurement $\varphi(t, .)$, on retrouve l'inclusion différentiel régie par le sous-différentiel, dit au sens de l'analyse convexe, qui se présente sous la forme (1.0.3) car ce sous-différentiel est un opérateur maximal monotone.

Dans un espace de Hilbert H, l'existence de solutions absolument continues pour le problème suivant

$$\begin{cases} -\dfrac{du}{dt}(t) \in \partial\varphi(t, u(t)), \\ u(0) = x_0 \in dom\varphi(0, .), \end{cases} \tag{1.0.4}$$

où $\varphi : [0, T] \times H \longrightarrow [0, +\infty[$ est telle que pour tout $t \in [0, T]$, l'application $\varphi(t, .)$ est propre, semi-continue inférieurement et convexe, a été étudiée par J. C. Peralba dans [71], et dans [14], l'auteur a étudié le problème

$$\begin{cases} -\dfrac{du}{dt}(t) \in \partial\varphi(t, u(t)) + f(t), \\ u(0) = x_0 \in dom\varphi(0, .). \end{cases} \tag{1.0.5}$$

où $f \in L^2_H([0, T])$.

Dans la même tendance, le problème d'évolution

$$\begin{cases} \dot{u}(t) \in -\partial\varphi(u(t)) + F(u(t)), \\ u(0) = x_0 \in dom\varphi \subset \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{1.0.6}$$

où F est une multi-application semi-continue suppérieurement et à valeurs non vides compactes dans $\mathbb{R}^d$ et $F(x)$ est inclus dans le sous-différentiel d'une fonction convexe semi-continue inférieurement, a été étudié par Cellina-Staicu [32]. De nombreux autres travaux traitant les inclusions différentielles de premier ordre régies par le sous-différentiel peuvent être trouvés dans la littérature voir par exemple [14, 71, 76]

Notre thèse est constituée de trois chapitres, on commence par un chapitre préliminaire qui rappelle quelques résultats fondamentaux utiles pour la suite.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons l'étude, dans un espace de Banach E, du processus de la rafle du premier ordre dépendant du temps et de l'état avec une perturbation multivoque de la forme

$$\begin{cases} \dot{u}(t) \in -N_{K(t,u(t))}(u(t)) + F(t, u(t)), \ p.p. \ t \in [0, T]; \\ u(t) \in K(t, u(t)), \ \forall t \in [0, T]; \\ u(0) = u_0 \in K(0, u_0), \end{cases} \tag{1.0.7}$$

où $K : I \times E \rightrightarrows E$ est une multi-application à valeurs non vides, fermées et r-prox-régulières, $N_{K(t,u(t))}(\cdot)$ désigne le cône normal à $K(t, u(t))$, $F : I \times E \rightrightarrows E$ est une multi-application semi-continue supérieurement par rapport à la deuxième variable, à valeurs non vides convexes faiblement compactes.

Notre travail généralise celui de Bernicot et Venel dans [18], au cas du processus dépendant du temps et de l'état et la perturbation considérée est soumise à des hypothèses plus faibles que celles qui existent dans la littérature.

Dans le troisième chapitre, on établit, dans l'espace $\mathbb{R}^d$, l'existence de solutions pour un problème d'évolution du second ordre gouverné par l'opérateur sous-différentiel d'une fonction convexe, semi-continue inférieurement avec perturbation multivoque de la forme

$$\begin{cases} u(0) = u_0, \\ x(t) = x_0 + \displaystyle\int_0^t u(s)ds, \quad \forall t \in [0,T] \\ -\ddot{x}(t) \in \partial g(x(t)) + F(t, x(t), u(t)), \quad \text{p.p. } t \in [0,T], \end{cases} \tag{1.0.8}$$

où $g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe et semi-continue inférieurement et $F : [0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est une multi-application à valeurs non vides convexes faiblement compactes et est semi-continue supérieurement. Le cas où la perturbation est univoque est aussi considéré.

Les résultats du chapitre 3 ont fait l'objet d'une publication internationale dans le journal "Evolution Equations and Control Theory", et ceux du chapitre 4 sont rédigés et soumis pour publication.

2
Préliminaires et résultats de base

Sommaire

Dans ce premier chapitre, nous commençons par la présentation des notations utilisées tout au long de cette thèse, puis nous énonçons certaines définitions et certains concepts fondamentaux de l'analyse convexe, fonctionnelle et multivoque sous forme de résultats souvent avec preuve pour faciliter la compréhension de nos méthodes dans les preuves de l'existence des solutions des problèmes considérés.

2.1 Notations

Soient E un espace de Banach, E' son dual topologique, $\langle \,.\,,\,.\,\rangle$ leur produit de dualité et $\|\cdot\|$ la norme de E.

On note par

- $\sigma(E, E')$ la topologie faible sur E.
- $\sigma(E', E)$ la topologie faible* sur E'.
- $\overline{\mathbf{B}}_E(0, r)$ la boule fermée de E de centre 0 et de rayon r, $\overline{\mathbf{B}}_E$ la boule unité fermée de E et $\mathbf{S}_E$ la sphère unité de E.
- Si A est un sous-ensemble de E alors $\overline{A}$ est la fermeture de A.

  Soit $T > 0$ et $I = [0, T]$. On note par
- $\mathbf{C}(I, E)$ l'espace de Banach des applications continues $u : I \to E$, muni de la norme sup, i.e., $\|u(\cdot)\|_{\mathbf{C}} = \sup\limits_{t \in I} \|u(t)\|$, et $\mathbf{C}^1(I, E)$ l'espace de Banach des applications continues $u : I \to E$ ayant une dérivée continue, muni de la norme

$$\|u(\cdot)\|_{\mathbf{C}^1} = \max\{\max_{t \in I} \|u(t)\|, \max_{t \in I} \|\dot{u}(t)\|\}.$$

- $p.p$ presque partout.
- $\mathcal{L}(I)$ la tribu de Lebesgue sur I.
- $\lambda(\cdot)$ la mesure de Lebesgue.
- $\mathbf{L}^p(I, E)$ $\big(p \in [1, +\infty[\big)$ l'espace quotient de Banach des applications $u : I \to E$ mesurables et telles que $\displaystyle\int_I \|u(t)\|^p dt < +\infty$, muni de la norme

$$\|u(\cdot)\|_p = \left(\int_I \|u(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

- $\mathbf{L}^\infty(I,E)$ l'espace quotient de Banach des applications $u : I \to E$ essentiellement bornées, muni de la norme

$$\|u(\cdot)\|_\infty = \inf\big\{c \geq 0 : \ \|u(t)\| \leq c, \ p.p. \text{ sur } I\big\}.$$

- Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)$ est l'espace de Sobolev muni de la norme $\|\cdot\|_{m,p}$ définie par

$$\|u(\cdot)\|_{m,p} = \Bigg(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_p^p\Bigg)^{\frac{1}{p}} \ \text{ si } 1 \leq p < \infty$$
$$\|u(\cdot)\|_{m,\infty} = \max_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_\infty \ \text{ si } p = \infty.$$

- $l^p(\mathbb{Z})$, $1 \leq p \leq \infty$ désigne l'espace de Lebesgue défini par

$$l^p(\mathbb{Z}) = \Bigg\{(x_n)_{n\geq1} \subset \mathbb{Z}/\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p < \infty\Bigg\}, \text{ si } 1 \leq p < \infty$$
$$l^\infty(\mathbb{Z}) = \Bigg\{(\alpha_n)_{n\geq1} \subset \mathbb{Z}/\sup_{n\in\mathbb{N}}|\alpha_n| < \infty\Bigg\}.$$

- Pour $A \subset E,\ co(A)$ est l'enveloppe convexe de A et $\overline{co}(A)$ son enveloppe convexe fermée.
- $\delta(.,A)$ la fonction indicatrice de A, définie sur E par

$$\delta(x,A) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in A; \\ +\infty, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

- La fonction polaire associée à $\delta(.,A)$, appelée aussi fonction d'appui de A, est la fonction notée $\delta^*(.,A)$ et définie sur E' par

$$\delta^*(x',A) = \sup_{x\in A}\langle x', x\rangle, \quad \forall x' \in E'.$$

- $\mathbb{1}_A$ la fonction caractéristique de A, définie par

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A; \\ 0, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

2.2 La distance de Hausdorff

Définition 2.1. *([12]) Soient A, B deux sous-ensembles d'un espace métrique (X,d), l'écart entre A et B est défini par*

$$e(A,B) = \sup_{a\in A} d(a,\ B),$$

et la distance de Hausdorff entre A et B est définie par

$$\mathcal{H}(A,B) = max(e(A,B), e(B,A)).$$

Propriétés élémentaires

Soient $A, B, C \subset X$. Alors

1. $e(A,\emptyset) = \infty$ si $A \neq \emptyset$,
2. $e(\emptyset, B) = 0$,
3. $e(A,B) = 0 \Leftrightarrow A \subset \overline{B}$,
4. $e(A,B) \leq e(A,C) + e(C,B)$,
5. $\mathcal{H}(A,B) = 0 \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$,
6. $\mathcal{H}(A,B) \leq \mathcal{H}(A,C) + \mathcal{H}(C,B)$,
7. $|d(x,A) - d(x,B)| \leq \mathcal{H}(A,B)$, $\forall x \in X$.

2.3 Quelques notions de mesurabilité

Pour commencer, on donne quelques résultats sur la mesurabilité dans le cas univoque. Pour plus de détails se référer à [77, 6].

Définition 2.2. *Soient X un ensemble non vide, Σ une famille de sous-ensembles de X. Alors Σ est dite une tribu sur X si*

1. $\emptyset \in \Sigma$
2. $A \in \Sigma \Longrightarrow X \setminus A \in \Sigma$
3. $A_n \in \Sigma, \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcup\limits_n A_n \in \Sigma$

- Le couple (X, Σ) est appelé espace mesurable et les éléments de Σ sont appelés ensembles mesurables.
- Dans le cas où X est un espace topologique, la plus petite tribu contenant la topologie de X, autrement dit, la tribu engendrée par la topologie de X est appelée tribu *Borélienne* sur X et est notée $\mathcal{B}(X)$.

Définition 2.3. *Soient* (X_1, Σ_1), (X_2, Σ_2) *deux espaces mesurables et* f *une application définie sur* X_1 *à valeurs dans* X_2. *On dit que* f *est* (Σ_1, Σ_2)*-mesurable si pour tout* $A \in \Sigma_2$, $f^{-1}(A) \in \Sigma_1$.

Si X *est un espace topologique, une fonction* $(\Sigma, \mathcal{B}(X))$*-mesurable est dite fonction Borélienne.*

Définition 2.4. *Soient* (X, Σ) *un espace mesurable et* Y *un espace métrique. Alors une application* $f : X \to Y$, *est dite fortement mesurable ou Bochner mesurable si* f *est* $(\Sigma, \mathcal{B}(X))$*-mesurable et* $f(X)$ *est séparable.*

Définition 2.5. *Soient* (X, Σ) *un espace mesurable et* Y *un espace métrique. On dit que l'application* $f : X \to Y$ *est* Σ*-étagée (resp. dénombrablement* Σ*-étagée) si* f *est* $(\Sigma, \mathcal{B}(X))$*-mesurable et* $f(X)$ *fini (resp. dénombrable).*

Lemme 2.6. *Sous les notations de la Définition 2.5, nous avons équivalence entre les assertions suivantes*

1. f *est Bochner mesurable.*
2. *Il existe une suite de fonctions* Σ*-étagées définies sur* X *à valeurs dans* Y, *convergeant simplement vers* f.
3. *Il existe une suite de fonctions dénombrablement* Σ*-étagées définies sur* X *à valeurs dans* Y, *convergeant uniformément sur* X *vers* f.

Définition 2.7. *Soit* (X, Σ) *un espace mesurable. Alors la fonction* $\mu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}$ *est une mesure sur* X *si*

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. $\mu\Big(\bigcup\limits_n A_n\Big) = \sum\limits_n \mu(A_n)$ *pour toute suite dénombrable d'élément de* Σ *deux à deux disjoints.*

– Le triplet (X, Σ, μ) est appelé espace mesuré.
– Si $\mu(A) \geq 0$, pour tout $A \in \Sigma$, on dit que μ est une mesure positive et on note $\mu \geq 0$, ou que l'espace (X, Σ, μ) est positif.
– Si $\mu(A) < +\infty$ pour tout $A \in \Sigma$. On dit que μ est une mesure finie, ou que l'espace (X, Σ, μ) est fini.

– Si X est un espace topologique, la mesure $\mu : \mathcal{B}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ est appelée mesure Borélienne.

Définition 2.8. *Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré avec $\mu \geq 0$ et Z un sous-ensemble de X. On dit que Z est μ-négligeable s'il existe $A \in \Sigma$ tel que $Z \subset A$ et $\mu(A) = 0$.*

On dit qu'une propriété sur X est vraie μ-presque partout (μ-p.p.) si l'ensemble où elle n'est pas vérifiée est μ-négligeable.

La tribu μ-complétée de Σ notée Σ_μ est la tribu engendrée par Σ et les ensembles μ-négligeables, i.e.

$$\Sigma_\mu = \big\{A \cup Z /\ A \in \Sigma \text{ et } Z \text{ ensemble } \mu\text{-négligeable}\big\}.$$

La tribu Σ est dite complète si $\Sigma = \Sigma_\mu$, c'est-à-dire, si tout ensemble μ-négligeable appartient à Σ.

Définition 2.9. *Soit (X, Σ) un espace mesurable et E un espace de Banach. Une application $f : X \to E$ est dite simple si f est Σ-mesurable et $f(X)$ est fini.*

Définition 2.10. *Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré fini et E un espace de Banach. Une application $f : X \to E$ est dite μ-mesurable s'il existe une suite de fonctions simples (f_n) telle que $f_n \to f$ μ-p.p.*

Lemme 2.11. *Si E est séparable, toute application mesurable est μ-mesurable.*

Théorème 2.12. *Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré fini et E un espace de Banach séparable. Si $f : X \to E$ est mesurable, il existe une suite (f_n) de fonctions simples telles que $f_n \to f$ μ-p.p., et pour μ-presque tout $x \in X$, $\|f_n(x)\| \leq \|f(x)\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Définition 2.13. *Soient (Ω, Σ) un espace mesurable, X, Y deux espaces topologiques et $f : \Omega \times X \to Y$. On dit que f est une application de Carathéodory si $f(., x)$ est Σ-mesurable pour tout $x \in X$ fixé et $f(t, .)$ est continue pour tout $t \in \Omega$ fixé.*

Lemme 2.14. *Soient (Ω, Σ) un espace mesurable, X, Y deux espaces métriques séparables complets. Soit $\varphi : \Omega \times X \to Y$ une application de Carathéodory. Alors pour toute application mesurable $f : \Omega \to X$, l'application $t \mapsto \varphi(t, f(t))$ est mesurable.*

Preuve. Soit $g : \Omega \to \Omega \times X$ l'application définie par $g(t) = (t, f(t))$ et soit $V \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$, $V = V_1 \times V_2$, avec $V_1 \in \Sigma$ et $V_2 \in \mathcal{B}(X)$. Alors

$$\begin{aligned} g^{-1}(V) &= \{t \in \Omega :\ g(t) \in V\} \\ &= \{t \in \Omega :\ (t, f(t)) \in V_1 \times V_2\} \\ &= \{t \in \Omega :\ t \in V_1 \ \text{ et } \ f(t) \in V_2\} \\ &= \{t \in \Omega :\ t \in V_1\} \cap \{t \in \Omega :\ f(t) \in V_2\} \\ &= V_1 \cap f^{-1}(V_2) \in \Sigma, \end{aligned}$$

car $V_1 \in \Sigma$ et f est $(\Sigma, \mathcal{B}(X))$-mesurable. Donc g est mesurable.

Considérons maintenant l'application $h(\cdot) = \varphi(., f(\cdot)) : \Omega \to Y$ définie par

$$h(t) = \varphi(t, f(t)) = \varphi(g(t)).$$

Soit W un ouvert de Y, on a

$$\begin{aligned} h^{-1}(W) &= \{t \in \Omega :\ h(t) \in W\} \\ &= \{t \in \Omega :\ \varphi(t, f(t)) \in W\} \\ &= \{t \in \Omega :\ \varphi(g(t)) \in W\} \\ &= \{t \in \Omega :\ g(t) \in \varphi^{-1}(W)\} \\ &= g^{-1}(\varphi^{-1}(W)), \end{aligned}$$

comme φ est $\Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$-mesurable alors $\varphi^{-1}(W) \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$, et puisque g est mesurable on obtient $g^{-1}(\varphi^{-1}(W)) \in \Sigma$, c'est à dire, $h^{-1}(W) \in \Sigma$. Par conséquent $\varphi(., f(\cdot))$ est Σ-mesurable. □

Lemme 2.15. *Soient (Ω, Σ) un espace mesurable, X, Y deux espaces métriques séparables complets et soit $g : \Omega \times X \to Y$ une application de Carathéodory. Alors g est $\Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$-mesurable.*

2.4 Quelques résultats d'analyse fonctionnelle

Dans cette section, nous donnons quelques résultats d'analyse fonctionnelle. Pour plus de détails se référer à [41, 79].

Définition 2.16. *Soit X un espace vectoriel normé. Un hyperplan de X est un ensemble de la forme*

$$H = \{x \in X : f(x) = \alpha\},$$

où f est une forme linéaire sur X, non identiquement nulle $[f \not\equiv 0]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

On dit que H est l'hyperplan d'équation $[f = \alpha]$.

Si de plus f est continue, on dit que l'hyperplan H est fermé.

Théorème 2.17 (Théorème de séparation)**.** *Soit X un espace vectoriel normé. Soit $A \subset X$ un sous-ensemble convexe fermé et non vide et soit $a \in X$ tel que $a \notin A$, alors il existe un hyperplan fermé H qui sépare A et a strictement i.e., il existe $x' \in X'$ $(x' \not\equiv 0)$, et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\langle x', x\rangle < \alpha \leq \langle x', a\rangle, \forall x \in A.$$

2.5 Quelques notions de continuité

Les résultats de cette section sont pris des références [80, 49].

Définition 2.18. *Soit X un espace topologique et soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Alors f est dite semi-continue inférieurement (s.c.i) au point $x_0 \in X$ si et seulement si*

$$\forall\, a \in \mathbb{R},\ a < f(x_0),\ \exists\, V \in V(x_0) \quad \textit{tel que}\ \ a < f(x),\ \forall x \in V.$$

Définition 2.19. *Soit X un espace topologique et soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Alors f est dite semi-continue supérieurement (s.c.s) au point $x_0 \in X$ si et seulement si*

$$\forall\, a \in \mathbb{R},\ a > f(x_0),\ \exists\, V \in V(x_0) \quad \textit{tel que}\ \ a > f(x)\ \ \forall x \in V.$$

Remarque 2.20. *Soit X un espace topologique et soit $x_0 \in X$. Si $f : X \to \mathbb{R}$. Alors*

1. *f est s.c.i au point x_0 si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists V_{x_0} \in \vartheta(x_0),\ \forall x \in V_{x_0} \Longrightarrow f(x) - f(x_0) > -\varepsilon,$$

2. *f est s.c.s au point x_0 si, et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists V_{x_0} \in \vartheta(x_0),\ \forall x \in V_{x_0} \Longrightarrow f(x) - f(x_0) < \varepsilon,$$

3. f est continue au point x_0 si, et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists V_{x_0} \in v(x_0), \forall x \in V_{x_0},\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Définition 2.21. *Soient X un espace topologique et $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Alors f est continue au point x_0 si et seulement si f est s.c.i et s.c.s au point $x_0 \in X$.*

Définition 2.22. *Soient X un espace topologique, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ et soit $x_0 \in X$ alors*

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) = \sup_{V \in v(x_0)} \inf_{x \in V} f(x).$$
$$\limsup_{x \to x_0} f(x) = \inf_{V \in v(x_0)} \sup_{x \in V} f(x).$$

Définition 2.23. *Soit E un espace de Banach, Y un sous-ensemble de E. On dit que la fonction $f : Y \to \mathbb{R}$ vérifie la condition de Lipschitz sur Y si pour un certain scalaire positif L on a*

$$|f(y) - f(y')| \leq L\|y - y'\|,$$

pour tous $y, y' \in Y$.

On dit que f est localement Lipschitzienne (de raport L), au voisinage de x si pour un certain $\varepsilon > 0$, f vérifie la condition de Lipschitz (de rapport L) sur l'ensemble $x + \varepsilon \mathbf{B}_E$ (c'est à dire dans un ε-voisinage de x).

Remarque 2.24. *Soient E un espace de Banach et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Si f est lipschitzienne. Alors f est localement lipschitzienne.

Définition 2.25. *Soient E un espace de Banach et $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \longrightarrow E$ une application. Alors f est dite absolument continue si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$, tel que pour toute partition dénombrable de $[a, b]$ par des intervalles disjoints $([b_n, a_n])_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $\sum\limits_n (b_n - a_n) < \delta$ alors $\sum\limits_n \| f(b_n) - f(a_n) \| < \varepsilon$.*

Théorème 2.26. *Soient E un espace de Banach et $f : [a, b] \to E$. Alors f est absolument continue si et seulement si il existe une application intégrable $v : [a, b] \to E$ telle que*

$$f(t) - f(a) = \int_a^t v(s) ds\,, \quad \forall t \in [a, b]$$

dans ce cas $\dot{f} = v$ p.p.

Remarque 2.27.

1. *Toute application Lipschizienne est absolument continue,*
2. *Toute application absolument continue est continue, par contre la réciproque est fausse.*

2.6 Quelques résultats d'analyse convexe

Pour plus de détails sur cette section, on peut se référer à [80].

Définition 2.28. *Soit X un espace vectoriel, et $a, b \in X$. On appelle segment fermé ou simplement segment d'extrémités a et b que l'on note $[a, b]$, l'ensemble*

$$\{\lambda a + (1-\lambda)b,\ 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Le segment ouvert est l'ensemble $\{\lambda a + (1-\lambda)b,\ 0 < \lambda < 1\}$, noté $]a, b[$.

Définition 2.29. *Une partie A d'un espace vectoriel X est dite convexe si, toutes les fois que deux points a et b appartiennent à A, le segment $[a, b]$ est contenu dans A, i.e.,*

$$\forall a, b \in A,\ \forall \lambda \in [0,1],\ \lambda a + (1-\lambda)b \in A.$$

Définition 2.30. *Soit A un sous-ensemble d'un espace vectoriel X. On appelle enveloppe convexe de A, que l'on note $co(A)$, l'intersection de tous les sous-ensembles convexes de X contenant A. C'est donc le plus petit convexe de X contenant A.*

Et on appelle enveloppe convexe fermée de A, que l'on note $\overline{co}(A)$, l'intersection de tous les sous-ensembles convexes fermés de X contenant A. C'est donc le plus petit convexe fermé de X contenant A.

Définition 2.31. *Soit X un espace topologique réel et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. On appelle domaine effectif de f qu'on note $D(f)$ l'ensemble défini par*

$$D(f) = \Big\{x \in X :\ f(x) < +\infty\Big\}.$$

Définition 2.32. *Soit X un espace topologique réel et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est convexe si et seulement si pour tous $x, y \in D(f)$, et pour tout $\lambda \in [0,1]$, nous avons*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

f est dite concave si $(-f)$ est convexe.

Proposition 2.33. *([75]) Soit X un espace topologique et f une fonction convexe sur un convexe ouvert non vide A de $\mathbb{R}^d$. Alors f est continue en tout point de A.*

Définition 2.34. *Soient X un espace vectoriel normé et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est propre si*

$$f : X \longrightarrow]-\infty, +\infty] \text{ et } f \not\equiv +\infty, \ (f \not\equiv +\infty \Longleftrightarrow \exists x_0 \in X;\ f(x_0) \neq +\infty).$$

Définition 2.35. *Soient X un espace vectoriel normé et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Alors f est dite sous additive si*

$$\forall\, x, y \in X,\ f(x+y) \leq f(x) + f(y),$$

f est dite positivement homogène si

$$\forall x \in X, \forall \lambda \geq 0,\ f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Remarque 2.36. *Soient X un espace vectoriel normé et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Alors f est dite sous linéaire si elle sous additive et positivement homogène.*

Proposition 2.37. *Soit H un espace de Hilbert et soit A un ensemble convexe fermé non vide de H. Alors la fonction indicatrice $\delta(., A)$ est convexe, propre et semi-continue inférieurement.*

Proposition 2.38. *([4]) Soit X un espace vectoriel normé et A un sous-ensemble non vide de X. Alors,*

$$\overline{co}(A) = \Big\{x \in X, \forall x' \in X', \langle x', x\rangle \leq \delta^*(x', A)\Big\}.$$

Preuve. On pose

$$B = \Big\{x \in X, \forall x' \in X', \langle x', x\rangle \leq \delta^*(x', A)\Big\}.$$

Soient $x, y \in B, \lambda \in [0, 1]$

$$\langle x', x\rangle \leq \delta^*(x', A) \ \ \forall x' \in X'$$
$$\langle x', y\rangle \leq \delta^*(x', A) \ \ \forall x' \in X'$$

$$\Longrightarrow \langle x', \lambda x\rangle \leq \lambda\delta^*(x', A) \ \ \forall x' \in X'$$
$$\langle x', (1-\lambda)y\rangle \leq (1-\lambda)\delta^*(x', A) \ \ \forall x' \in X'$$

$$\Longrightarrow \langle x', \lambda x + (1-\lambda)y\rangle \leq \delta^*(x', A) \ \ \forall x' \in X'$$
$$\Longrightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in B,$$

alors, B convexe.

Soit $(x_n)_n \subset B$ tq $x_n \longrightarrow x$, alors

$$\begin{aligned}
&\langle x', x_n\rangle \leq \delta^*(x', A) \ \ \forall x' \in X', \forall n \in \mathbb{N}\\
&\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \langle x', x_n\rangle \leq \delta^*(x', A) \ \ \forall x' \in X'\\
&\Longrightarrow \langle x', \lim_{n\to\infty} x_n\rangle \leq \delta^*(x', A) \ \ \forall x' \in X'\\
&\Longrightarrow \langle x', x\rangle \leq \delta^*(x', A) \ \ \forall x' \in X'\\
&\Longrightarrow x \in B
\end{aligned}$$

alors, B est fermé.

Soit

$$\begin{aligned}
x \in A \subset \overline{co}(A) &\Longrightarrow \langle x', x\rangle \leq \sup_{y\in A}\langle x', y\rangle\\
&\Longrightarrow \langle x', x\rangle \leq \delta^*(x', A)\\
&\Longrightarrow x \in B,
\end{aligned}$$

donc, $A \subset B$

B est un convexe fermé qui contient A, et $\overline{co}(A)$ est le plus petit convexe fermé qui contient A, alors $\overline{co}(A) \subset B$.

Montrons que $B \subset \overline{co}(A)$. Pour cela on suppose le contraire i.e., $\exists x \in B$ et $x \notin \overline{co}(A)$. Comme $\overline{co}(A)$ est un convexe fermé, par le théorème de séparation

$$\begin{aligned}
\exists x' \in X (x' \not\equiv 0) \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}, \text{ tq } \langle x', y\rangle \leq \alpha < \langle x', x\rangle \ \ \forall y \in \overline{co}(A) &\Longrightarrow \sup_{y\in A}\langle x', y\rangle \leq \alpha < \langle x', x\rangle\\
&\Longrightarrow \delta^*(x', A) < \langle x', x\rangle,
\end{aligned}$$

ce qui est en contradiction avec $x \in B$, alors $B \subset \overline{co}(A)$. D'où,

$$\overline{co}(A) = \Big\{x \in X, \forall x' \in X', \langle x', x\rangle \leq \delta^*(x', A)\Big\}. \qquad \square$$

Lemme 2.39. *([31]) Soient X un espace vectoriel normé, A un sous-ensemble non vide convexe compact de X. Alors*

$$d(x,A) = \sup_{x' \in \overline{\mathbb{B}}_{X'}} \big(\langle x', x \rangle - \delta^*(x', A) \big), \tag{2.6.1}$$

où

$$d(x,A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$$

est la distance du point x à l'ensemble A.

Preuve. On a

$$\begin{aligned} d(x,A) &= \inf_{a \in A} \|x - a\| \\ &= \inf_{a \in A} \big(\sup_{x' \in \overline{\mathbb{B}}_{X'}} \langle x', x - a \rangle \big) \\ &= \sup_{x' \in \overline{\mathbb{B}}_{X'}} \big(\inf_{a \in A} \langle x', x - a \rangle \big) \\ &= \sup_{x' \in \overline{\mathbb{B}}_{X'}} \inf_{a \in A} \big(\langle x', x \rangle - \langle x', a \rangle \big) \\ &= \sup_{x' \in \overline{\mathbb{B}}_{X'}} \big(\langle x', x \rangle + \inf_{a \in A} (-\langle x', a \rangle) \big) \\ &= \sup_{x' \in \overline{\mathbb{B}}_{X'}} \big(\langle x', x \rangle - \sup_{a \in A} \langle x', a \rangle \big) \\ &= \sup_{x' \in \overline{\mathbb{B}}_{X'}} \big(\langle x', x \rangle - \delta^*(x', A) \big). \end{aligned}$$

Dans le passage de la deuxième égalité à la troisième égalité, nous avons utilisé le théorème de l'inf sup, applicable ici, puisque A est un convexe compact. □

2.7 Sous-différentiabilité

Pour plus de détails voir [36, 78, 65]

2.7.1 Les dérivées classiques

Définition 2.40. *Soient E un espace de Banach et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne au voisinage d'un point donné $x_0 \in E$, et soit v un vecteur dans E. La dérivée directionnelle généralisée de f au point x_0 dans la direction v, notée $f^\circ(x_0, v)$*

est définie par

$$f^\circ(x_0, v) = \limsup_{\substack{y \to x_0 \\ t \downarrow 0}} \frac{f(y+tv) - f(y)}{t},$$

où y est un vecteur dans E et t est un scalaire positif.

Proposition 2.41. *([36]) Soient E un espace de Banach et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne au voisinage de $x \in E$ de rapport $L > 0$. Alors*

(a) *La fonction $v \mapsto f^\circ(x, v)$ est finie, positivement homogène, sous-additive et satisfait*

$$|f^\circ(x, v)| \leq L\|v\|;$$

(b) *la fonction $(x, v) \mapsto f^\circ(x, v)$ est semi-continue supérieurement comme fonction de (x, v), et comme fonction de v seulement elle est Lipschitzienne sur E de rapport L ;*

(c) *$f^\circ(x, -v) = (-f)^\circ(x, v)$.*

Définition 2.42. *Soient E un espace de Banach, $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et soit $x_0 \in D(f)$. On dit que f est différentiable au sens de Gâteaux (G-différentiable) au point x_0 s'il existe $x' \in E'$, tel que*

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = \langle x', v \rangle, \quad \forall x \in E. \tag{2.7.1}$$

Dans ce cas, x' est définie d'une façon unique et est appelé la différentielle de f au sens de Gâteaux au point x_0. On le note souvent par $x' = \nabla f(x_0)$ (appelée aussi gradient de f au point x_0).

Définition 2.43. *Soient E un espace de Banach, $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et $x_0 \in D(f)$. On dit que f est différentiable au sens de Fréchet (F-différentiable) au point x_0 si la convergence dans la relation (2.7.1) est uniforme par rapport à v sur les sous-ensemble bornés de E, i.e.,*

$$\begin{aligned} &\forall r > 0,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}, \\ &|t| < \delta \Longrightarrow \left| \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} - \langle x', v \rangle \right| < \varepsilon, \ \forall v \in \overline{\mathbf{B}}_E(0, r). \end{aligned}$$

Dans ce cas, x' est définie d'une façon unique par la relation précédente et est appelé la différentielle de f au sens de Fréchet au point x_0. On le note souvent par $x' = df(x_0)$ ou bien $x' = f'(x_0)$.

Proposition 2.44. *Soient E un espace de Banach, $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et $x_0 \in D(f)$. Alors f est F-différentiable si, et seulement si, il existe $x' \in E$, tel que*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \langle x', x - x_0 \rangle}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Proposition 2.45. *Soient E un espace de Banach, $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et $x_0 \in D(f)$. Si f est F-différentiable au point x_0, alors*

1) f est G-différentiable au point x_0, (l'inverse est faux),

2) f est continue au point x_0.

Remarque 2.46. *Soient E un espace de Banach, $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et $x_0 \in D(f)$. Si f est G-différentiable au point x_0, alors $f^\circ(x_0, v) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle$. Par contre, l'existence de toutes les dérivées directionnelles n'implique pas la G-différentiabilité de f au point x_0.*

2.7.2 Sous-différentiels

Définition 2.47. *([31]) Soient X un espace vectoriel normé, X' son dual topologique, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ et $x_0 \in D(f)$. On appelle sous-différentiel de f au point x_0 (au sens de l'analyse convexe), noté $\partial f(x_0)$, l'ensemble défini par*

$$\partial f(x_0) = \left\{ x' \in X' : \langle x', x - x_0 \rangle \leq f(x) - f(x_0), \ \forall x \in X \right\}.$$

Un point $x' \in \partial f(x_0)$ est dit sous-gradient de f au point x_0, on dit que f est sous-différentiable au point x_0 si $\partial f(x_0) \neq \emptyset$.

Théorème 2.48. *([57]) Soient E un espace de Banach et $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre convexe et continue au point $x_0 \in X$. Alors $\partial f(x_0)$ est non vide convexe faiblement* compact dans E'.*

Proposition 2.49. *([75]) Soient E un espace de Banach et $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction continue sur un sous-ensemble convexe ouvert S de E. Alors la multi-application $x \mapsto \partial f(x)$ est s.c.s sur S.*

Définition 2.50. *([36]) Soient E un espace de Banach, $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne au voisinage d'un point donné x et soit v un vecteur dans E. Le sous* *différentiel de Clarke de f au point x, noté $\partial_c f(x)$ est le sous-ensemble de E', donné par*

$$\partial_c f(x) = \Big\{\xi \in E' : \langle \xi, v\rangle \leq f^\circ(x,v), \text{ pour tout } v \in E\Big\}.$$

On note par $\|\xi\|_*$ la norme de ξ dans E', donnée par

$$\|\xi\|_* = \sup\Big\{\langle \xi, v\rangle : v \in X, \|v\| \leq 1\Big\}.$$

Proposition 2.51. *([36]) Soient E un espace de Banach, $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction Lipschtzienne de rapport L au voisinage de x. Alors*

- ***(a)*** *$\partial_c f(x)$ est un sous-ensemble non vide, convexe et faiblement* compact de E' et $\|\xi\|_* \leq L$ pour tout $\xi \in \partial_c f(x)$;*
- ***(b)*** *pour tout v dans E, on a*

$$f^\circ(x,v) = \max\Big\{\langle \xi, v\rangle : \xi \in \partial_c f(x)\Big\}.$$

- ***(c)*** *Soient $(x_n)_n$ et $(x'_n)_n$ deux suites respectivement dans E et E' telles que $x'_n \in \partial_c f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Supposons que $(x_n)_n$ converge vers x et $(x'_n)_n$ converge faiblement* vers x', alors $x' \in \partial_c f(x)$.*

Proposition 2.52. *([36]) Soient E un espace de Banach, $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction convexe localement Lipschitzienne au voisinage de x, alors $\partial_c f(x)$ coïncide avec $\partial f(x)$ et $f'(x,v)$ coïncide avec la dérivée directionnelle $f^\circ(x,v)$, pour tout v.*

Remarque 2.53. *Si $f(x_0) = +\infty$, alors $\partial f(x_0) = \emptyset$.*

En effet,

$$\begin{aligned} x' \in \partial f(x_0) &\Leftrightarrow f(y) \geqslant f(x_0) + \langle x', y - x\rangle, \forall y \in X \\ &\Leftrightarrow f(y) \geqslant +\infty + \langle x', y - x\rangle, \forall y \in X \\ &\Leftrightarrow f(y) \geqslant +\infty, \forall y \in X \\ &\Leftrightarrow f(y) = +\infty, \forall y \in X, \end{aligned}$$

contradiction, puisque f propre.

Définition 2.54. *Soient E un espace de Banach, $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne au voisinage de $x_0 \in E$. Le sous différentiel au sens de Fréchet de f au* *point x_0, noté $\partial^F f(x_0)$ est donné par l'ensemble de tous les vecteurs $x' \in E'$ vérifiant pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\langle x', x - x_0 \rangle \leq f(x) - f(x_0) + \varepsilon \|x - x_0\|,$$

pour tout $x \in x_0 + \delta \overline{\mathbf{B}}_E$.

2.8 Multi-applications et sélections

Nous donnons dans cette section quelques définitions et résultats concernant les multi-applications et leurs sélections. Pour une étude détaillée des multi-applications on peut se référer à [31, 6].

Définition 2.55. *Soient X, Y deux ensembles non vides. Une multi-application (ou fonction multivoque) F définie sur X à valeurs dans Y est une fonction qui à chaque élément $x \in X$ associe un sous-ensemble $F(x)$ de Y. On note $F : X \rightrightarrows Y$.*
Le domaine, le graphe et l'image de la multi-application $F : X \rightrightarrows Y$ sont donnés respectivement par

$$\mathcal{D}(F) = dom(F) = \{x \in X : \ F(x) \neq \emptyset\}.$$
$$Gr(F) = \{(x, y) \in X \times Y : \ x \in D(F), y \in F(x)\}.$$
$$Im(F) = \bigcup_{x \in D(F)} F(x).$$

Définition 2.56. *Soient X, Y deux ensembles non vides et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-appliction. On appelle multi-appplication inverse associée à F la multi-application*

$$\begin{array}{rcl} F^{-1} : Y & \rightrightarrows & X \\ y & \mapsto & F^{-1}(y), \end{array}$$

définie par

$$F^{-1}(y) = \big\{x \in X : y \in F(x)\big\}.$$

Définition 2.57. *Soient X, Y deux ensembles non vides et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On appelle sélection de F toute application $f : X \to Y$ vérifiant*

$$f(x) \in F(x), \ \ \forall \, x \in X.$$

2.8.1 Mesurabilité des multi-applications

Définition 2.58. *Soit* (Ω, Σ) *un espace mesurable et* X *un espace métrique et* $F : \Omega \rightrightarrows X$. *On dit que* F *est* Σ*-mesurable ou simplement mesurable si pour tout ouvert* V *de* X

$$F^{-1}(V) = \{t \in \Omega : \ F(t) \cap V \neq \emptyset\} \in \Sigma.$$

Lemme 2.59. *([31]) Soient* (Ω, Σ) *un espace mesurable,* X *un espace métrique complet séparable et* $F : \Omega \rightrightarrows X$ *une multi-application à valeurs non vides fermées.*
Considérons les propriétés suivantes

(i) $F^{-1}(\mathcal{B}) \in \Sigma$ *pour tout Borélienne* $\mathcal{B}$ *de* X.

(ii) $F^{-1}(C) \in \Sigma$ *pour tout fermé* C *de* X.

(iii) $F^{-1}(V) \in \Sigma$ *pour tout ouvert* V *de* X.

(iv) *Il existe une suite* $(\sigma_n)_n$ *de sélections mesurables de* F *telle que*

$$\forall t \in \Omega, \ F(t) = \overline{\{\sigma_n(t)\}}_{n \in \mathbb{N}}.$$

(v) $\forall\, x \in X$, *la fonction distance* $d(x, F(\cdot))$ *est mesurable.*

(vi) *Le graphe de* F *appartient à* $\Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$.

Alors $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v) \Rightarrow (vi)$.

Si F *est à valeurs non vides complètes alors* $(iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v) \Leftrightarrow (vi)$.

Si F *est à valeurs non vides compactes alors* $(iii) \Rightarrow (i)$.

Lemme 2.60. *([31]) Soit* (Ω, Σ, μ) *un espace mesuré avec* $\mu \geq 0$, σ*-finie et* Σ μ*-complète. Soient* X *un espace métrique complet,* $F : \Omega \rightrightarrows X$ *une multi-application à valeurs non vides fermées, alors* $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v) \Leftrightarrow (vi)$.

Théorème 2.61. ***(Théorème d'existence de sélections mesurables)****([31])*
Soient (Ω, Σ) *un espace mesurable,* X *un espace métrique complet séparable et* $F : \Omega \rightrightarrows X$ *une multi-application mesurable à valeurs fermées. Alors* F *admet au moins une sélection mesurable.*

Théorème 2.62. *Soient* (Ω, Σ) *un espace mesurable et* E *un espace de Banach séparable. Soient* $F : \Omega \times E \rightrightarrows E$ *une multi-application mesurable et* $u : \Omega \to E$ *une application mesurable. Alors la multi-application* $F(\cdot, u(\cdot))$ *est mesurable.*

Définition 2.63. *Soit* (Ω, Σ) *un espace mesurable et* X *un espace vectoriel normé. Soit* $F : \Omega \rightrightarrows X$ *une multi-application. On dit que* F *est scalairement mesurable si pour tout* $x' \in X'$*, l'application* $t \mapsto \delta^*(x', F(t))$ *est mesurable.*

Théorème 2.64. *(Représentation de Castaing) Soient* (Ω, Σ) *un espace mesurable,* (X, d) *un espace métrique séparable complet. Soit* $F : \Omega \rightrightarrows X$ *une multi-application à valeurs fermées. Alors,* F *est* $\Sigma-$*mesurable si et seulement si* $dom(F) \in \Sigma$ *et il existe une suite* $(f_n)_n$ *d'applications* $\Sigma-$*mesurables (*$f_n : dom(F) \to X$*) telle que pour chaque* $t \in dom(F)$ *on ait* $F(t) = \overline{(f_n(t))}_n$*. On dit que* $(f_n)_n$ *est une représentation de Castaing de* F*.*

Preuve. Pour chaque $x' \in X'$, la fonction $\delta^*(x', F(\cdot))$ est définie par

$$\begin{aligned} \delta^*(x', F(\cdot)) : \Omega &\to \overline{\mathbb{R}} \\ t &\mapsto \delta^*(x', F(t)) = \sup_{x \in F(t)} \langle x', x \rangle. \end{aligned}$$

On peut supposer que $dom(F) = \Omega$.

$\Longrightarrow)$

Supposons que F est $\Sigma-$mesurable. Soit $(f_n)_n$ une représentation de Castaing de F, i.e.,$F(t) = \overline{(f_n(t))}_{n\in\mathbb{N}}$.

Alors, pour chaque $x' \in X'$, $\delta^*(x', F(t)) = \sup_{x \in F(t)} \langle x', x \rangle = \sup_{n\in\mathbb{N}} \langle x', f_n(t) \rangle$.

Pour chaque $x' \in X'$ et chaque $n \in \mathbb{N}$, soit

$$\begin{aligned} g_{x',n} : \Omega &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto g_{x',n}(t) = \langle x', f_n(t) \rangle. \end{aligned}$$

Soit V un ouvert de $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} g^{-1}_{x',n}(V) &= \{t \in \Omega : g_{x'}(t) \in V\} \\ &= \{t \in \Omega : \langle x', f_n(t) \rangle \in V\} \\ &= \{t \in \Omega : x'(f_n(t)) \in V\} \\ &= (x' \circ f_n)^{-1}(V) \in \Sigma, \end{aligned}$$

car x' est continue et f_n est $\Sigma-$mesurable, et donc $g_{x',n}$ est $\Sigma-$mesurable.

Or, la fonction $t \longmapsto \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\langle x', f_n(t)\rangle \in \overline{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}\langle x', f_n(t)\rangle}$. Par conséquent la fonction $\delta^*(x', F(\cdot))$ est Σ-mesurable.

$\Longleftarrow$)

On donne la preuve de cette implication dans le cas ou X est réflexif.

Soit $(x'_n)_n$ une suite fixée partout dense dans $\overline{B}_{X'}$.

Pour chaque $x \in X$, considérons la fonction distance

$$\begin{aligned} d(x, F(\cdot)) : \Omega &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ t &\longmapsto d(x, F(t)). \end{aligned}$$

Comme $F(t)$ est convexe, nous avons

$$\begin{aligned} d(x, F(t)) &= \sup_{x'\in\overline{\mathbb{B}}_{X'}} \left[\langle x', x\rangle - \delta^*(x', F(t))\right] \\ &= \sup_{x'\in\overline{\{x'_n\}}} \left[\langle x', x\rangle - \delta^*(x', F(t))\right] \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left[\langle x', x\rangle - \delta^*(x', F(t))\right]. \end{aligned}$$

Considérons la fonction

$$\begin{aligned} g_x : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto g_x(t) = \langle x', x\rangle - \delta^*(x', F(t)), \end{aligned}$$

et soit $V =]-\varepsilon, \varepsilon[$ un ouvert de $\mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} g_x^{-1}(V) &= \{t \in \Omega : g_x(t) \in V\} \\ &= \{t \in \Omega : \langle x', x\rangle - \delta^*(x', F(t)) \in V\}. \end{aligned}$$

En posant $a = \langle x'_n, x\rangle$ on trouve

$$g_x^{-1} = \left[\delta^*(x'_n, F(\cdot))\right]^{-1}\Big(]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\Big) \in \Sigma.$$

Donc, la fonction $t \longmapsto d(x, F(t))$ est Σ-mesurable, et par conséquent F est Σ-mesurable.

$\square$

Proposition 2.65. *([57]) Soit (X, Σ) un espace mesurable, E un espace de Banach séparable. Si $F : X \rightrightarrows E$ est une multi-application à valeurs non vides convexes faiblement compactes, alors $F(\cdot)$ est mesurable si et seulement si elle est scalairement mesurable.*

Proposition 2.66. *([57]) Soit (X, Σ) un espace mesurable, E un espace de Banach séparable. Si $F_1, F_2 : X \rightrightarrows E$ sont deux multi-applications à valeurs non vides convexes faiblement compactes et scalairement mesurables, alors $t \mapsto (F_1 \cap F_2)(t)$ est scalairement mesurable.*

2.8.2 Continuité des multi-applications

Pour plus de détails sur les résultats de cette section voir [3, 12, 61].

Définition 2.67. *Soient X, Y deux espaces topologiques, et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. Alors F est dite semi-continue supérieurement (s.c.s) au point $x_0 \in X$ si pour tout ouvert U de Y tel que $F(x_0) \subset U$, il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 dans X tel que $F(V_{x_0}) \subset U$.*
Si cela est vrai pour tout $x_0 \in X$, on dit que F est s.c.s sur X.

Définition 2.68. *Soient X, Y deux espaces topologiques, et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. Alors F est dite semi-continue inférieurement (s.c.i) au point $x_0 \in X$ si pour tout ouvert U de Y tel que $F(x_0) \cap U \neq \emptyset$, il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 dans X tel que $F(x) \cap U \neq \emptyset$, pour tout $x \in V_{x_0}$.*
On dit que F est s.c.i sur X, si elle est s.c.i en tout $x \in X$.

Définition 2.69. *Soient X, Y deux espaces topologiques, et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. Alors F est continue au point x_0 si et seulement si elle est s.c.s et s.c.i au point x_0 et F est continue sur X si et seulement si elle est s.c.s et s.c.i sur X.*

Définition 2.70. *Soient X,Y deux espaces métriques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs compactes. Alors F est $\mathcal{H}$-continue (continue par rapport à la distance de Hausdorff) si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n \subset X$ convergeant vers x_0 nous avons*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{H}(F(x_n),\, F(x_0)) = 0.$$

Définition 2.71. *Soient X, Y deux espaces métriques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On dit que F est continue (res. Lipschitzienne de rapport $k > 0$), si pour tout $x \in X$ on a,*

$$\lim_{x' \to x} \mathcal{H}(F(x), F(x')) = 0$$

(res. pour tout $x, x' \in X$ on a,

$$\mathcal{H}(F(x), F(x')) \leq k\, d_X(x, x')),$$

où $\mathcal{H}$ est la distance de Hausdorff et d_X la distance sur X.

Définition 2.72. *Soient Y un espace métrique et $T > 0$, $F : [0,T] \rightrightarrows Y$ une multi-application. On dit que F est absolument continue si pour tout $y \in Y$ et tout $t, t' \in [0,T]$ on a*

$$|d(y, F(t)) - d(y, F(t'))| \leq |a(t) - a(t')|$$

où $a : [0,T] \to \mathbb{R}_+$ est une fonction absolument continue satisfaisant $\dot{a}(t) \neq 0$ p.p sur $[0,T]$. D'après la relation précédente nous avons pour $t \geq t'$

$$|d(y, F(t)) - d(y, F(t'))| \leq \int_{t'}^{t} |\dot{a}(s)| ds.$$

Remarque 2.73. *Une multi-application Lipschitzienne est absolument continue (dans le cadre de la définition précédente).*

Définition 2.74. *Soient X, Y deux espaces métriques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On dit que F est une multi-application de Carathéodory si $F(.,y)$ est Σ-mesurable pour tout $y \in Y$ fixé et $F(x,.)$ est continue pour tout $x \in X$ fixé.*

Proposition 2.75. *Soient X, Y deux espaces topologiques. Une multi-application $F : X \rightrightarrows Y$ à valeurs non vides est semi-continue supérieurement si et seulement si l'image inverse $F^{-1}(C) = \{x \in X : F(x) \cap C \neq \emptyset\}$ est fermée pour tout sous-ensemble fermé C de Y.*

Théorème 2.76. *Soient X un espace métrique, E un espace de Banach séparable et $F : X \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs convexes compactes. Alors F est semi-continue supérieurement si et seulement si pour chaque $\zeta \in X'$ sa fonction $\delta^*(\zeta, F(\cdot))$ est semi-continue supérieurement.*

Proposition 2.77. *Soit X un espace métrique complet localement convexe, (Ω, Σ, μ) un espace mesuré et $F : \Omega \rightrightarrows X$ une multi-application à valeurs convexes fermées, localement faiblement compactes.*

Si $\forall x' \in X'$, $\delta^*(x', G(t)) \leq \delta^*(x', F(t))$ μ-p.p.

Alors $G(t) \subset F(t)$ μ-p.p.

Théorème 2.78. *Soit (Ω, Σ) un espace mesurable, E un espace de Banach séparable. soit $f : \Omega \mapsto E$ une application mesurable et $g : \Omega \mapsto [0, \infty[$ une fonction mesurable. Alors*

1) $t \mapsto \mathbf{B}(f(t), g(t)$ est une multi-application mesurable.

2) Si F de Ω vers sous ensemble non vide fermé de E est mesurable. Alors

$$t \mapsto h(t) = \big\{x \in F(t), \quad \|f(t) - x\| = d(f(t), F(t)\big\}$$

est Σ-mesurable.

Théorème 2.79. *Soit X un espace Suslaine localement convexe, (Ω, Σ, μ) un espace mesuré fini avec $\mu \geq 0$ et $F : \Omega \rightrightarrows X$ une multi-application scalairement Σ-mesurable et scalairement intégrable à valeurs non vides convexes compactes, soit $g : \Omega \mapsto X$ une application mesurable. Alors*

$$\int_\Omega \delta^*\big(x', (gF)(t)\big) d\mu(t) = \delta^*\big(x', \int_\Omega gF\big) d\mu, \quad \forall x' \in X'.$$

2.8.3 Les multi-applications J_σ

Les multi-applications J_σ ont fait leur apparition dans l'étude de la prox-régularité d'un ensemble, par exemple dans le travail de F. Bernard, L. Thibault et N. Zlateva (voir [16]). On peut consulter aussi le travail de Z. B. Xu et G. F. Roach [84] pour plus de détails sur ces applications dans un cadre abstrait.

Définition 2.80. *([43]) Soit E un espace de Banach. Pour un nombre réel $\sigma > 1$, considérons la multi-application $J_\sigma : E \rightrightarrows E'$ définie par*

$$J_\sigma(x) = \big\{x' \in E', \ \langle x', x\rangle = \|x\|\|x'\| \text{ et } \|x'\| = \|x\|^{\sigma-1}\big\}.$$

Pour $\sigma = 2$, J_2 sera notée J et on l'appelle multi-application duale normalisée.

l'ensemble $J_\sigma(x) \neq \emptyset$. En effet, grâce au corollaire du théorème de Hahn-Banach,

$$\forall x \in E, \exists x' \in E', \|x'\| = 1 \text{ et } \langle x', x\rangle = \|x\|.$$

Soit $y' = \|x\|^{\sigma-1}x'$, on a $\|y'\| = \|x\|^{\sigma-1}$ et

$$\langle y', x\rangle = \left\langle \|x\|^{\sigma-1}x', x\right\rangle = \|x\|^{\sigma-1}\|x\| = \|y'\|\|x\|,$$

donc $J_\sigma(x) \neq \emptyset$, $\forall x \in E$.

La multi-application inverse de J_σ sera notée J_σ^{-1} et on a pour tout $x \in E$,

$$x' \in J_\sigma(x) \iff x \in J_\sigma^{-1}(x').$$

Si $\sigma = 2$, la multi-application inverse J^{-1} de J sera notée J^*.

Proposition 2.81. *([43]) Soit E un espace de Banach.*

1. *Pour tout $x \in E$, $J_\sigma(x)$ est convexe.*
2. *Pour tout $t \geq 0$, $J_\sigma(tx) = t^{\sigma-1}J_\sigma(x)$.*
3. *La multi-application J_σ est le sous-différentiel de la fonction convexe $\frac{1}{\sigma}\|\cdot\|^\sigma$ i.e. $J_\sigma = \partial(\frac{1}{\sigma}\|\cdot\|^\sigma)$.*

Preuve. 1. soient $x', y' \in J_\sigma(x)$, $\alpha \in [0,1]$ on a

$$x' \in J_\sigma(x) \iff \|x'\| = \|x\|^{\sigma-1} \text{ et } \langle x', x\rangle = \|x\|\|x'\| = \|x\|^\sigma.$$
$$y' \in J_\sigma(x) \iff \|y'\| = \|x\|^{\sigma-1} \text{ et } \langle y', x\rangle = \|x\|\|y'\| = \|x\|^\sigma.$$

D'autre part, on a

$$\langle \alpha x' + (1-\alpha)y', x\rangle \leq \|\alpha x' + (1-\alpha)y'\|\|x\|.$$

De plus,

$$\langle \alpha x' + (1-\alpha)y', x\rangle = \alpha\langle x', x\rangle + (1-\alpha)\langle y', x\rangle = \|x\|^\sigma,$$

ceci nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}\|x\|^{\sigma-1} \leq & \|\alpha x' + (1-\alpha)y'\| \\ \leq & \alpha\|x'\| + (1-\alpha)\|y'\| \\ = & \alpha\|x\|^{\sigma-1} + (1-\alpha)\|x\|^{\sigma-1} = \|x\|^{\sigma-1}.\end{aligned}$$

Donc, $\langle \alpha x' + (1-\alpha)y', x\rangle = \|x\|^{\sigma} = \|x\|\|\alpha x' + (1-\alpha)y'\|$ ce qui implique que,

$$\alpha x' + (1-\alpha)y' \in J_\sigma(x),\ \forall x \in E.$$

2. (a) si $t = 0$, on a

$$\begin{aligned}x' \in J_\sigma(0) \Leftrightarrow & \|x'\| = \|0\|^{\sigma-1} \text{ et } \langle x', 0\rangle = \|0\|\|x'\| = \|0\|^{\sigma} = 0^{\sigma}\|x\|^{\sigma} \\ \Leftrightarrow & x' = 0 = 0^{\sigma-1}J_\sigma(x).\end{aligned}$$

   (b) si $t > 0$, on a

$$\begin{aligned}x' \in J_\sigma(tx) \Leftrightarrow & \|x'\| = \|tx\|^{\sigma-1} \text{ et } \langle x', tx\rangle = \|tx\|\|x'\| = \|tx\|^{\sigma} = t^{\sigma}\|x\|^{\sigma} \\ \Leftrightarrow & \|x'\| = t^{\sigma-1}\|x\|^{\sigma-1}\text{et } \langle x', tx\rangle = t^{\sigma}\|x\|^{\sigma} \\ \Leftrightarrow & \Big\langle \frac{x'}{t^{\sigma-1}}, x\Big\rangle = \Big\|x\Big\|^{\sigma} \text{ et } \Big\|\frac{x'}{t^{\sigma-1}}\Big\| = \Big\|x\Big\|^{\sigma-1} \\ \Leftrightarrow & \Big\langle \frac{x'}{t^{\sigma-1}}, x\Big\rangle = \Big\|\frac{x'}{t^{\sigma-1}}\Big\|\Big\|x\Big\| \text{ et } \Big\|\frac{x'}{t^{\sigma-1}}\Big\| = \Big\|x\Big\|^{\sigma-1} \\ \Leftrightarrow & \frac{x'}{t^{\sigma-1}} \in J_\sigma(x) \\ \Leftrightarrow & x' \in t^{\sigma-1}J_\sigma(x),\end{aligned}$$

   d'où, pour tout $t \geq 0$, $J_\sigma(tx) = t^{\sigma-1}J_\sigma(x)$.

3. La multi-application J_σ est le sous-différentiel de la fonction convexe $\frac{1}{\sigma}\|\cdot\|^{\sigma}$ i.e. $J_\sigma = \partial(\frac{1}{\sigma}\|\cdot\|^{\sigma})$. En effet, soit φ_σ la fonction convexe définie par

$$\begin{aligned}\varphi_\sigma : E \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \varphi_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma}\|x\|^{\sigma}.\end{aligned}$$

   Nous avons

$$\begin{aligned}\partial\varphi_\sigma(x) &= \{x' \in E',\ \varphi_\sigma(y) \geq \varphi_\sigma(x) + \langle x', y - x\rangle,\ \forall y \in E\} \\ &= \{x' \in E', \frac{1}{\sigma}\|y\|^{\sigma} \geq \frac{1}{\sigma}\|x\|^{\sigma} + \langle x', y - x\rangle\}.\end{aligned}$$

On montre dans un premier lieu que $\partial\varphi_\sigma(x) = J_\sigma(x)$, pour $\sigma > 1$ et tout $x \in E$.

(a) si $x = 0$, on a $J_\sigma(0) = \{0\} = \partial\varphi_\sigma(0)$. En effet, on a

$$\begin{aligned} J_\sigma(0) &= \left\{x' \in E',\ \langle x', 0\rangle = \|0\|\|x'\| \text{ et } \|x'\| = \|0\|^{\sigma-1}\right\} \\ &= \left\{x' \in E',\ \langle x', 0\rangle = 0; \text{et } \|x'\| = 0\right\} \\ &= \{0\}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \partial\varphi_\sigma(0) &= \{x' \in E',\ \varphi_\sigma(y) \geq \varphi_\sigma(0) + \langle x', y - 0\rangle,\ \forall y \in E\} \\ &= \{x' \in E', \frac{1}{\sigma}\|y\|^\sigma \geq \frac{1}{\sigma}\|0\|^\sigma + \langle x', y\rangle,\ \forall y \in E\} \\ &= \{x' \in E', \|x'\| \leq \frac{1}{\sigma}\|y\|^{\sigma-1},\ \forall y \in E\} \\ &= \{0\}. \end{aligned}$$

(b) si $x \neq 0$, on montre que $\partial\varphi_\sigma(x) \subset J_\sigma(x)$.

Soit $x' \in \partial\varphi_\sigma(x)$, i.e.,

$$\langle x', y - x\rangle \leq \frac{1}{\sigma}\|y\|^\sigma - \frac{1}{\sigma}\|x\|^\sigma,\ \forall y \in E. \tag{2.8.1}$$

• Pour $y = \lambda x$ avec $\lambda > 1$, on aura par la relation (2.8.1),

$$\langle x', (\lambda - 1)x\rangle \leq \frac{1}{\sigma}\lambda^\sigma\|x\|^\sigma - \frac{1}{\sigma}\|x\|^\sigma$$

i.e.

$$\langle x', x\rangle \leq \frac{\lambda^\sigma - 1}{\sigma(\lambda - 1)}\|x\|^\sigma,\ \forall\lambda > 1.$$

Faisant tendre λ vers 1, on trouve

$$\langle x', x\rangle \leq \frac{1}{\sigma}\lim_{\lambda\to1}\frac{\lambda^\sigma - 1}{\lambda - 1}\|x\|^\sigma = \|x\|^\sigma. \tag{2.8.2}$$

• Pour $y = (1 - \lambda)x$, avec $\lambda > 0$ on aura par (2.8.1)

$$-\lambda\langle x', x\rangle \leq \frac{1}{\sigma}((1 - \lambda)^\sigma - 1)\|x\|^\sigma$$

ce qui est équivalent à

$$\langle x', x\rangle \geq \frac{(1 - (1 - \lambda)^\sigma)}{\sigma\lambda}\|x\|^\sigma.$$

Faisant tendre λ vers 0, on obtient

$$\langle x', x \rangle \geq \|x\|^{\sigma}. \tag{2.8.3}$$

De (2.8.2) et (2.8.3), on déduit que

$$\langle x', x \rangle = \|x\|^{\sigma}. \tag{2.8.4}$$

D'autre part, prenons $y \in E$ tel que $\|y\| \leq \|x\|$. Par la relation (2.8.1), on a

$$\langle x', y \rangle - \langle x', x \rangle \leq \frac{1}{\sigma}\|y\|^{\sigma} - \frac{1}{\sigma}\|x\|^{\sigma} \leq \frac{1}{\sigma}\|x\|^{\sigma} - \frac{1}{\sigma}\|x\|^{\sigma} = 0.$$

c'est à dire

$$\langle x', y \rangle \leq \langle x', x \rangle = \|x\|^{\sigma}.$$

et donc

$$\langle x', \frac{y}{\|x\|} \rangle \leq \|x\|^{\sigma-1}.$$

D'où $\langle x', z \rangle \leq \|x\|^{\sigma-1}$, pour tout $z \in \overline{\mathbf{B}}_E$ alors $\|x'\| = \sup\limits_{\|z\|\leq 1} |\langle x', z \rangle| \leq \|x\|^{\sigma-1}$, i.e., $\|x'\| = \|x\|^{\sigma-1}$, ce qui prouve que $\partial\varphi_{\sigma}(x) \subset J_{\sigma}(x)$.

Montrons maintenant que $J_{\sigma}(x) \subset \partial\varphi_{\sigma}(x)$.

Fixons $x' \in J_{\sigma}(x)$ et considérons la fonction $t \mapsto f(t) = \ln t,\ t > 0$, qui est une fonction concave puisque $f''(t) < 0$. Comme $\frac{1}{\sigma} < 1$ on aura pour tout $y \in E$,

$$\ln\Big(\frac{1}{\sigma}\|y\|^{\sigma} + \frac{\sigma - 1}{\sigma}\|x\|^{\sigma}\Big) \geq \frac{1}{\sigma}\ln\|y\|^{\sigma} + \frac{\sigma-1}{\sigma}\ln\|x\|^{\sigma} = ln\Big(\|y\| \cdot \|x\|^{\sigma-1}\Big),$$

d'où, $\frac{1}{\sigma}\|y\|^{\sigma} + \frac{\sigma-1}{\sigma}\|x\|^{\sigma} \geq \|y\|\|x\|^{\sigma-1}$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sigma}\|y\|^{\sigma} - \frac{1}{\sigma}\|x\|^{\sigma} \geq& \|y\|\|x\|^{\sigma-1} - \|x\|^{\sigma}\\ =&\|y\|\|x'\| - \langle x', x \rangle \geq \langle y, x' \rangle - \langle x', x \rangle\\ =&\langle x', y - x \rangle,\end{aligned}$$

on obtient $\frac{1}{\sigma}\|y\|^{\sigma} - \frac{1}{\sigma}\|x\|^{\sigma} \geq \langle x', y - x \rangle,\ \forall y \in E$, ceci implique que $x' \in \partial\varphi_{\sigma}(x)$.

On conclut que $\partial\varphi_{\sigma}(x) = J_{\sigma}(x),\ \forall x \in E.$ □

Remarque 2.82. *([43]) Si H est un espace de Hilbert, alors $J_2(x) = \{x\}$.*

En effet, on a

$$\begin{aligned} x' \in J_2(x) &\Leftrightarrow \|x'\| = \|x\|^{2-1} \text{ et } \langle x', x\rangle = \|x\|\|x'\| = \|x\|^2 \\ &\Leftrightarrow \|x'\| = \|x\| \text{ et } \langle x', x\rangle = \|x\|\|x'\| = \|x\|^2 \\ &\Leftrightarrow x' = x, \end{aligned}$$

alors, $J_2(x) = \{x\}$.

Définition 2.83. ***(Espace uniformément convexe)****([39, 43, 34]) Un espace vectoriel normé $(X, \|\cdot\|_X)$ est dit uniformément convexe ssi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que si $x,\ y \in X$ avec $\|x\|_X = \|y\|_X = 1$ et $\|x - y\|_X > \varepsilon$, alors $\|\frac{x+y}{2}\|_X \leq 1 - \delta$.*

C'est à dire, un espace vectoriel normé est uniformément convexe si pour tous points x et y distincts sur la sphère unité centrée à l'origine, le milieu du segment joignant x et y n'est jamais sur la sphère, mais est proche de la sphère si x et y sont suffisamment proches l'un de l'autre.

Définition 2.84. ***(Module de convexité)****([63]) On définit la fonction module de convexité d'un espace normé $(X, \|\cdot\|_X)$ par $\omega_{\|\cdot\|_X} : (0, 2] \to [0, 1]$, avec*

$$\omega_{\|\cdot\|_X}(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \|\frac{x+y}{2}\|_X,\ \|x\|_X = \|y\|_X = 1,\ \|x - y\|_X \geq \varepsilon\right\}.$$

Théorème 2.85. *([39, 43]) Un espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ est uniformément convexe si et seulement si $\omega_{\|\cdot\|}(\varepsilon) > 0$, pour tout $\varepsilon \in (0, 2]$.*

Le théorème suivant affirme l'uniforme convexité des espaces classiques de Lebesgue réflexifs.

Proposition 2.86. *([39, 43, 34]) Si X est uniformément convexe et $1 < p < \infty$ alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_X^p \leq (1 - \delta)(\|x\|_X^p + \|y\|_X^p), \tag{2.8.5}$$

pour tous $x, y \in X$ tels que $\|x - y\|_X \geq \varepsilon \max(\|x\|_X, \|y\|_X)$.

Théorème 2.87. *([63]) Les espaces $\mathbf{L}^p(I,X)$, $1<p<\infty$ sont uniformément convexes.*

Preuve. Soit $\varepsilon>0$ et choisissons $\delta>0$ qu'on fera correspondre à $\varepsilon 4^{\frac{-1}{p}}$. Soient $\lambda(\cdot)$ la mesure de Lebesgue, $u,v\in\mathbf{L}^p(I,X)$, tels que $\|u\|_p,\|v\|_p\le 1$ avec $\|u-v\|_p\ge\varepsilon$. On pose

$$M=\Big\{s\in I,\varepsilon^p(\|u(s)\|_p+\|v(s)\|_p)\le 4\|u(s)-v(s)\|_p\Big\}.$$

Appliquant (2.8.5), on aura pour presque tout $s\in M$

$$\Big\|\frac{u(s)+v(s)}{2}\Big\|_p\le\Big(1-\delta\Big)\Big(\|u(s)\|_p+\|v(s)\|_p\Big). \tag{2.8.6}$$

D'autre part, en notant par M^C le complémentaire de M on a

$$\int_{M^C}\|u(s)-v(s)\|_p d\lambda(s)<\frac{\varepsilon^p}{4}\int_{M^C}(\|u(s)\|_p+\|v(s)\|_p)d\lambda(s)\le\frac{\varepsilon^p}{2}.$$

Utilisant le fait que $\|u-v\|_p\ge\varepsilon$, on obtient

$$\int_M\|u(s)-v(s)\|_p d\lambda(s)\ge\varepsilon^p\ge\frac{\varepsilon^p}{2}.$$

Prenant la restriction de u,v à M on trouve

$$\|u-v\|\ge\varepsilon 2^{\frac{-1}{p}}.$$

Donc,

$$2\sup(\|u\|,\|v\|)\ge\|u\|+\|v\|\ge\|u-v\|\ge\varepsilon\frac{1}{2^{\frac{1}{p}}},$$

i.e. $\sup(\|u\|,\|v\|)\ge\varepsilon\frac{1}{2^{\frac{1}{p}+1}}$, c'est à dire

$$\sup\bigg(\int_M\|u\|_p d\lambda,\int_M\|v\|_p d\lambda\bigg)\ge\frac{\varepsilon^p}{2^{p+1}}. \tag{2.8.7}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\int\bigg[\bigg(&\frac{\|u(s)\|_p+\|v(s)\|_p}{2}\bigg)-\bigg(\|\frac{u(s)+v(s)}{2}\|_p\bigg)\bigg]d\lambda(s)\\ &\ge\int_M\bigg[\bigg(\frac{\|u(s)\|_p+\|v(s)\|_p}{2}\bigg)-\bigg(\|\frac{u(s)+v(s)}{2}\|_p\bigg)\bigg]d\lambda(s)\\ &\ge\int_M\bigg[\bigg(\frac{\|u(s)\|_p+\|v(s)\|_p}{2}\bigg)+\bigg((\delta-1)\bigg(\frac{\|u(s)\|_p+\|v(s)\|_p}{2}\bigg)\bigg)\bigg]d\lambda(s)\\ &=\delta\int_M\frac{\|u(s)\|_p+\|v(s)\|_p}{2}d\lambda(s)\ge\delta\frac{\varepsilon^p}{2^{p+2}}.\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p =& \int_M \left\|\frac{u(w)+v(w)}{2}\right\|_p d\lambda(w)\\ \leq& \int_M \frac{\|u(w)\|_p+\|v(w)\|_p}{2} d\lambda(w) - \delta\frac{\varepsilon^p}{2^{p+2}}\\ \leq& 1-\delta\frac{\varepsilon^p}{2^{p+2}}.\end{aligned}$$ □

Un résultat intéressant à propos de l'uniforme convexité est le théorème de Milman-Pettis. Pour la preuve voir [63, 72, 43].

Théorème 2.88. ***(Milman-Pettis)*** *Tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif.*

Définition 2.89. ***(Espace lisse)*** *([34, 43]) Un espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ est dit lisse au point $x_0 \in E\setminus\{0\}$ s 'il existe un unique élement $x' \in E'$ tel que $\|x'\| = 1$ et $\langle x', x_0\rangle = \|x_0\|$. E est dit lisse s'il est lisse en tout point $x_0 \in E\setminus\{0\}$.*

Théorème 2.90. *([34, 43]) Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $x_0 \in E$, alors les assertions suivantes sont équivalentes*

- *E est lisse au point x_0,*
- *la norme de E est Gâteaux différentiable au point x_0.*

Preuve.

$$\begin{aligned}\|x\| \text{ est Gâteaux différentiable au point } x_0 \Longrightarrow& \exists x' \in E',\ \lim_{t\downarrow 0}\frac{\|x_0+tx_0\|-\|x_0\|}{t}\\ &- \langle x', x_0\rangle = 0 \ \ (\text{pour } v = x_0 \in E)\\ \Longleftrightarrow& \lim_{t\downarrow 0}\frac{(t+1)\|x_0\|-\|x_0\|}{t} - \langle x', x_0\rangle = 0\\ \Longleftrightarrow& \lim_{t\downarrow 0}\frac{t\|x_0\|}{t} - \langle x', x_0\rangle = 0\\ \Longleftrightarrow& \|x_0\| = \langle x', x_0\rangle,\end{aligned}$$

alors, $\exists x' \in E', \langle x', x_0\rangle = \|x_0\|$.

Donc, E est lisse au point x_0. □

Définition 2.91. ***(Espace uniformément lisse)****([34]) On dit qu'un espace de Banach E est uniformément lisse si sa norme est uniformément Fréchet différentiable.*

Remarque 2.92. *Si E est uniformément lisse, alors sa norme est $\mathbf{C}^1(E, \mathbb{R})$ sur $E \backslash \{0\}$.*

Proposition 2.93. *([34, 43]) Un espace de Banach E est uniformément lisse si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tels que pour tous $x, y \in E$ vérifiant $\|x\| = 1,\ \|y\| = \delta$*

$$\|x + y\| + \|x - y\| < 2 + \varepsilon\|y\|.$$

Définition 2.94. *Soit E un espace de Banach uniformément lisse. Pour un nombre réel $\sigma > 1$, considérons la multi-application $J_\sigma : E \rightrightarrows E'$ définie par*

$$J_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma}\big(\nabla\|.\|_E^\sigma\big)(x)$$

Proposition 2.95. *([34]) Soit E un espace de Banach uniformément lisse, alors pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, on a*

$$\langle(\nabla\|\cdot\|_E)(x), x\rangle = \|x\|_E.$$

Donc, $\|(\nabla\|\cdot\|_E)(x)\|_{E'} = 1$.

Preuve. E est lisse au point $x_0 \Longleftrightarrow \|\cdot\|_E$ est Gâteaux différentiable au point x_0.

on a

$$\big\langle(\nabla\|\cdot\|_E)(x), x_0\big\rangle = \lim_{t\downarrow 0}\frac{\|x + tx_0\| - \|x_0\|}{t}.$$

Si $x = x_0$

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{\|x + tx\| - \|x\|}{t} = \lim_{t\downarrow 0}\frac{(1+t)\|x\| - \|x\|}{t} = \lim_{t\downarrow 0}\|x\| = \|x\|.$$

Donc,

$$\langle(\nabla\|\cdot\|_E)(x), x\rangle = \|x\|_E.$$

On a

$$\big\|\nabla\|\cdot\|_E(x)\big\|_{E'} = \sup_{x\in\overline{\mathbb{B}}_E}\langle(\nabla\|\cdot\|_E)(x), x\rangle = \sup_{x\in\overline{\mathbb{B}}_E}\|x\|_E = 1$$

Alors, $\|(\nabla\|\cdot\|_E)(x)\|_{E'} = 1$. $\square$

Par la Remarque 2.92, on comprend que la norme d'un espace uniformément lisse pourrait être non différentiable à l'origine 0, nous allons alors nous intéresser à la fonction $x \mapsto \|x\|^p$ pour $p > 1$.

Proposition 2.96. *([34]) Soient E un espace de Banach uniformément lisse, $p \in (1,\infty)$. Alors la fonction $x \mapsto \|x\|^p$ est $\mathbf{C}^1(E,\mathbb{R})$ sur E.*

Définition 2.97. *(**Module de lissicité**) On définit la fonction module de lissicité d'un espace normé $(X, \|\cdot\|_X)$ par $\rho_{\|\cdot\|_X} : [0,\infty) \to [0,\infty)$, telle que*

$$\rho_{\|\cdot\|_X}(\tau) = \sup\left\{\frac{\|x+\tau y\|_X + \|x-\tau y\|_X}{2} - 1,\ \|x\|_X = \|y\|_X = 1\right\}.$$

Théorème 2.98. *([34]) Un espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ est uniformément lisse si et seulement si $\lim\limits_{\tau\to 0}\dfrac{\rho_{\|\cdot\|}(\tau)}{\tau} = 0$.*

Théorème 2.99. *([34]) Tout espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ uniformément lisse est lisse.*

Preuve. Supposons que E n'est pas lisse, donc il existe $x_0 \in E \setminus \{0\}$ et $x_1',\ x_2' \in E'$ tels que $x_1' \neq x_2'$, $\|x_1'\| = \|x_2'\| = 1$ et $\langle x_1', x_0\rangle = \|x_0\| = \langle x_2', x_0\rangle$, quitte à remplacer x_0 par $\frac{x_0}{\|x_0\|}$, on peut supposer que $\|x_0\| = 1$. Soit

$$\|x_1' - x_2'\| > 0 \Longleftrightarrow \sup_{y\in\mathbf{S}_E}\langle y, x_1' - x_2'\rangle > 0.$$

Donc il existe $y_0 \in \mathbf{S}_E$ $\big(\|y_0\| = 1\big)$ telle que $\langle y_0, x_1' - x_2'\rangle > 0$. Pour tout $\tau > 0$, on a

$$\begin{aligned} 0 < \tau\langle y_0, x_1' - x_2'\rangle &= \tau(\langle y_0, x_1'\rangle - \langle y_0, x_2'\rangle) \\ &= \frac{\langle x_0 + \tau y_0, x_1'\rangle + \langle x_0 - \tau y_0, x_2'\rangle}{2} - 1 \\ &\leq \frac{\|x_0 + \tau y_0\| + \|x_0 - \tau y_0\|}{2} - 1 \leq \rho_{\|\cdot\|}(\tau) \end{aligned}$$

alors, $0 < \langle y_0, x_1' - x_2'\rangle \leq \frac{\rho_{\|\cdot\|}(\tau)}{\tau}$ pour tout $\tau > 0$ et donc E n'est pas uniformément lisse. □

Théorème 2.100. *([34, 43]) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) la norme de E est uniformément Fréchet différentiable ;

(ii) E est uniformément lisse ;

(iii) E' est uniformément convexe.

Exemple 2.101. *([34, 43]) Tout espace de Hilbert H est uniformément convexe et uniformément lisse.*

En effet, soit $\varepsilon > 0$ et soient $x, y \in H$ tels que $\|x\| = \|y\| = 1$ et $\|x - y\| > \varepsilon$. Par l'inégalité du parallélogramme

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 =& 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x-y\|^2 \\ \leq& 4 - \varepsilon^2.\end{aligned}$$

Donc, pour $\delta = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{4 - \varepsilon^2}$, $\|\frac{x+y}{2}\| \leq 1 - \delta$. Alors, H est uniformément convexe et en vertu des Théorèmes 2.100 et 2.99 et le fait que tout espace de Hilbert est identifiable à son dual, on conclut que H est uniformément lisse et donc lisse.

Définition 2.102. ***(Espace strictement convexe)****([34, 43, 17]) Une norme $\|\cdot\|$ sur l'espace vectoriel X est dite strictement convexe si et seulement si pour tous éléments non nuls x, y de X vérifiant $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, il existe $\mu > 0$ tel que $y = \mu x$.*

Définition 2.103. ***(Espace strictement convexe)****([34, 43]) Soit X un espace normé de norme $\|\cdot\|$. On dit que X est un espace strictement convexe si, et seulement si, pour tous éléments non nuls x, y de X*
- il existe $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, tels que $\alpha + \beta > 0$ et $\alpha x = \beta y$.
- si $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ $(x \neq y)$ et $0 < t < 1$, alors $\|(1-t)x + ty\| < 1$.

Théorème 2.104. *([34]) Tout espace uniformément convexe est strictement convexe et réflexif.*

Remarque 2.105. *([34]) Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach uniformément convexe et uniformément lisse alors J_σ est univoque.*
En effet, nous avons d'après les Théorèmes 2.100 et 2.104, E' est strictement convexe. Soit $x \in E$ et soient $x', y' \in E'$ tels que $x', y' \in J_\sigma(x)$ et supposons $x' \neq y'$. On a, E' est strictement convexe, donc pour tout $\alpha \in [0, 1]$

$$\|\alpha x' + (1-\alpha)y'\| < \alpha\|x'\| + (1-\alpha)\|y'\| < \|x\|^{\sigma-1}.$$

D'autre part, J_σ est à valeurs convexes donc $\alpha x' + (1-\alpha)y' \in J_\sigma(x)$, i.e.
$\|x\|^{\sigma-1} = \|\alpha x' + (1-\alpha)y'\| < \|x\|^{\sigma-1}$. Contradiction, d'où $x' = y'$ et donc J_σ est univoque.

Nous avons vu dans le Théorème 2.87 un exemple d'espaces uniformément convexes. En utilisant la relation entre la stricte convexité et l'uniforme convexité (Théorème 2.104), on va montrer que d'autres espaces bien connus ne sont pas uniformément convexes. Il suffit donc de montrer qu'ils ne sont pas strictement convexes (voir [45]).

Exemple 2.106. *([34]) L'espace $l^1(\mathbb{Z})$ n'est pas strictement convexe.*
En effet, prenons $\varepsilon = 1$, $\bar{x} = (1,0,0,0,\dots)$ et $\bar{y} = (0,-1,0,0,\dots)$. Il est clair que $\bar{x}, \bar{y} \in l^1(\mathbb{Z})$ et $\|\bar{x}\|_{l^1} = 1 = \|\bar{y}\|_{l^1}$, $\|\bar{x} - \bar{y}\|_{l^1} = 2 > \varepsilon$. Par contre, $\|\frac{1}{2}(\bar{x} + \bar{y})\|_{l^1} = 1$. Ceci montre que $l^1(\mathbb{Z})$ n'est pas strictement convexe.

Exemple 2.107. *([34]) L'espace $l^\infty(\mathbb{Z})$ n'est pas strictement convexe.*

En effet, considérons $\bar{u} = (1,1,0,0,0,\dots)$ et $\bar{v} = (-1,1,0,0,0,\dots)$. Il est clair que $\bar{u}, \bar{v} \in l^\infty(\mathbb{Z})$.

Prenons $\varepsilon = 1$. Donc, $\|\bar{u}\|_\infty = 1 = \|\bar{v}\|_\infty$ et $\|\bar{u} - \bar{v}\|_\infty = 2 > \varepsilon$. Par contre, $\|\frac{\bar{u}+\bar{v}}{2}\| = 1$ et donc $l^\infty(\mathbb{Z})$ n'est pas strictement convexe.

La dualité entre stricte convexité et lissicité est illustrée dans le théorème suivant voir [62, 34].

Théorème 2.108. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et E' son dual topologique.*

1. *Si E' est strictement convexe alors E est lisse.*
2. *Si E' est lisse alors E est strictement convexe.*

Remarque 2.109. *Si E est réflexif, alors on a équivalence dans les assertions (1) et (2).*

Dans la proposition suivante, on donne une propriété très utile de la multi-appliation J_σ. Pour la preuve nous renvoyons le lecteur à [18, 34].

Proposition 2.110. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach uniformément lisse et $\sigma \in [2, \infty)$. Alors, J_σ est localement uniformément continue, i.e. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que pour tous $x, y \in E$*

$$\begin{cases} \|x\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1 \\ \|x-y\| \leq \delta \end{cases} \Longrightarrow \|J_\sigma(x) - J_\sigma(y)\| \leq \varepsilon. \tag{2.8.8}$$

2.9 Quelques résultats de compacité

Les résultats suivants sont pris des références [6, 61, 42].

Théorème 2.111 (Théorème de Banach Dieudonné).
Soit $(E, \|\cdot\|)$ *un espace de Banach séparable et* $\overline{\mathrm{B}}_{E'}$ *la boule unité fermée de* E'*. Alors sur* $\overline{\mathrm{B}}_{E'}$ *la topologie de la convergence faible coïncide avec la topologie de la convergence compacte et* $(\overline{\mathrm{B}}_{E'}, \sigma(E', E))$ *est métrisable.*

Proposition 2.112. *Soient* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace de Banach et soit* S *un sous-ensemble borné convexe de* E*. Alors* S *est compact si et seulement si la fonction* $E' \mapsto \delta^*(S, E')$ *est continue sur* $\overline{\mathrm{B}}_{X'}$ *muni de la topologie de la convergence uniforme.*

Théorème 2.113 (Théorème de Banach-Alaouglu-Bourbaki).
Soit $(E, \|\cdot\|)$ *un espace de Banach. Alors la boule unité fermée de* E' *est compacte pour la topologie faible étoile* $\sigma(E', E))$

Théorème 2.114 (Théorème d'Alaoglu). *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace de Banach séparable et soit* $S' \subset E'$*. Si* S' *est borné pour la norme de* E' *et fermé pour la topologie* $\sigma(E', E)$*, alors* S' *est compact pour cette topologie.*

Théorème 2.115 (Théorème d'Eberlin-Smũlian).
Soient $(E, \|\cdot\|)$ *un espace de Banach et soit* S *un sous-ensemble de* E*. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *S est faiblement (relativement) séquentiellement compact.*
2. *S est faiblement (relativement) compact.*

Théorème 2.116 (Théorème de Mazur).
Soient $(E, \|\cdot\|)$ *un espace de Banach et* S *un sous-ensemble compact de* E*. Alors* $\overline{co}(A)$ *est compact.*

Lemme 2.117 (Lemme de Mazur).
Soit $(E, \|\cdot\|)$ *un espace de Banach, et soit* (x_n) *une suite d'éléments de* E *convergeant faiblement vers* x*. Alors il existe une suite* (z_n) *(où* z_n *est une combinaison convexe des éléments* $x_n, x_{n+1}, \ldots$*) convergeant fortement vers* x*.*

Théorème 2.118. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et soit S un sous-ensemble convexe de E. Alors S est faiblement fermé si et seulement si S est fortement fermé.*

Théorème 2.119 (Théorème d'Ascoli-Arzelà)**.**
Soit X un espace métrique compact, Y un espace métrique complet, et K un sous-ensemble de $\mathbf{C}(X, Y)$, l'espace des applications continues définies sur X à valeurs dans Y, muni de la topologie de la convergence uniforme. Alors K est relativement compact si et seulement si K est équicontinu et $K(x)$ est relativement compact, avec

$$K(x) = \{f(x) : \ f \in K\}.$$

Le théorème qui suit est une conséquence du théorème d'Ascoli-Arzelà, voir [3] pour la démonstration.

Théorème 2.120. *Soient Ω un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}$, X un espace de dimension finie et soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions absolument continues définies sur Ω à valeurs dans X, satisfaisant les conditions suivantes*
1) $\forall t \in \Omega$, $(f_n(t))_n$ est un sous-ensemble relativement compact de X.
2) Il existe une fonction à valeurs réelles positives $h \in \mathbf{L}^1(\Omega, X)$ telle que $\|\dot{f}_n(t)\| \leq h(t)$ presque partout sur Ω.
Alors, il existe une sous-suite de (f_n) qu'on note aussi (f_n) et qui converge vers une fonction absolument continue $f : \Omega \to X$ au sens suivant
a) (f_n) converge uniformément vers f.
b) $(\dot{f}_n)$ converge faiblement vers f dans $\mathbf{L}^1(\Omega, X)$, c'est à dire, $(\dot{f}_n)$ converge vers f $\sigma(\mathbf{L}^1(\Omega, X), \mathbf{L}^\infty(\Omega, X))$.

Remarque 2.121. *Le résultat de ce théorème est aussi vrai dans le cas où X est un espace de Banach séparable et réflexif.*

3

Existence de solutions pour une inclusion différentielle du premier ordre gouvernée par un processus de la rafle dépendant du temps et de l'état dans un espace de Banach

Sommaire

3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude du processus de la rafle perturbée du premier ordre dépendant du temps et de l'état dans un espace de Banach séparable. La perturbation se présente par une multi-application semi-continue supérieurement.

Notre résultat est une extension du Théorème 6.5 dans [18], au cas où l'ensemble dans le cône dépend aussi de l'état, et la perturbation considérée est séparément scalairement s.c.s à valeurs non nécessairement bornées.

Dans [55], les auteurs ont traité le même problème mais dans un espace de Hilbert, avec une perturbation globalement s.c.s.

L'inclusion différentielle est de la forme

$$(\mathcal{P}_F)\begin{cases} \dot{u}(t) \in -N_{K(t,u(t))}(u(t)) + F(t,u(t)), \ p.p. \ t \in [0,T]; \\ u(t) \in K(t,u(t)), \ \forall t \in [0,T]; \\ u(0) = u_0 \in K(0,u_0), \end{cases}$$

où $K : [0,T] \times E \rightrightarrows E$ est une multi-application à valeurs non vides fermées et r-prox régulières et $F : [0,T] \times E \rightrightarrows E$ est une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs non vides convexes faiblement compactes. La preuve de notre résultat utilise des idées de [18] et [55].

On essayé de généraliser des théorèmes d'existence pour les processus de la rafle dépendant de l'état qui existent dans la littérature mais dans un espaces de Hilbert, au cas des espaces de Banach. Les arguments utilisés exigent des propriétés géométriques et topologiques de l'espace, qui se résument dans notre étude en la réflexivité, séparabilité, uniforme lissité et I-lisse faiblement. L'étude n'a pas pu généralisée à n'importe quel espace de Banach, mais au moins à des espaces importants dans l'analyse fonctionnelle tels les espaces $\mathbf{L}^p, l^p$ et les espaces de Sobolev $\mathbf{W}^{m,p}$.

3.2 Préliminaires

Dans tout ce chapitre $I = [0,T]$ $(0 < T)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et E est un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|$, K un sous-ensemble fermé de E.

3.2.1 Cônes normaux proximaux

Pour définir le cône normal proximal nous avons besoin de définir la projection sur un ensemble K.

Pour plus de détails sur les cônes normaux proximaux se référer à [36, 38].

Définition 3.1. *Soit E un espace de Banach, K un sous-ensemble non vide de E et $u \notin K$. On définit $P_K(u)$ la projection de u sur K (qui peut être vide) comme l'ensemble de tous les $y \in K$ dont la distance à u est minimale, c'est à dire, $\|u - y\| = d(u, K)$. D'où,*

$$P_K(u) = \big\{y \in K; \|u - y\| = d(u, K)\big\}.$$

Définition 3.2 (Cône normal proximal)**.** *Soit E un espace de Banach, K un sous-ensemble fermé de E et soit $x \in K$. On appelle vecteur primal normal proximal à K au point x tout vecteur p s'écrivant $\alpha(u - x)$, où $\alpha > 0$ et $u \notin K$ vérifiant $x \in P_K(u)$.*

L'ensemble de tous les vecteurs primaux normaux proximaux à K au point x sera noté $PN_K^P(x)$. C'est à dire

$$PN_K^P(x) = \{\xi \in E \; ; \exists \alpha > 0 \; t.q. \; x \in P_K(x + \alpha\xi)\}.$$

Définition 3.3. *Soit E un espace de Banach, K un sous-ensemble fermé de E. Une forme linéaire continue $p' \in E'$ est dite fonctionnelle normale proximale à K au point $x \in K$ ssi*

$$J^*(p') \in N_K^P(x), \; i.e. \; \exists \alpha > 0; \; x \in P_K(x + \alpha J^*(p')).$$

Le Cône de toutes les fonctionnelles normales proximales à K au point x est noté $N_K^P(x)$ ou bien $N^P(K; x)$. On peut aisément vérifier que si $p \in PN_K(x)$, alors $J(p) \in N_K^P(x)$, et que si $p' \in N_K^P(x)$, alors $J^*(p') \in PN_K(x)$. Donc, chacun des ensembles $N_K^P(x)$ et $PN_K(x)$ détermine l'autre. Dans le contexte où la norme est associée à un produit scalaire i.e. $(H, \langle , \rangle)$ est un espace de Hilbert, on a $x \in P_K(x + \alpha p)$ veut dire que $\langle p, u - x\rangle \leq \frac{1}{2\alpha}\|u - x\|^2$, $\forall u \in K$. Dans ce cas,

$$N_K^P(x) = \{p \in H, \; \exists \alpha > 0, \; \langle p, u - x\rangle \leq \frac{1}{2\alpha}\|u - x\|^2, \; \forall u \in K\}.$$

Remarque 3.4. *Soit E un espace de Banach, K un sous-ensemble fermé de E. Lorsque $x \notin K$, le cône normal proximal à K, $N_K^P(x)$ est indéfini. Par contre lorsqu'on a $x \in K$ avec $x \notin P_K(u)$ pour tout $u \notin K$ i.e., qu'il n'existe pas de point u extérieur à K tel que $x \in P_K(u)$ ce qui est le cas quant $x \in int(K)$, on pose $N_K^P(x) = \{0\}$.*

Dans notre travail, nous n'utiliserons que la notion du cône normal proximal, c'est pour quoi le cône $PN_K(x)$ sera simplement noté $N_K(x)$, i. e.,

$$N_K(x) = \Big\{v \in E; \exists \alpha > 0 \ \text{ t. q } \ x \in P_K\big(x + \alpha v\big)\Big\}.$$

Dans la preuve de notre théorème principal de ce chapitre nous aurons besoin du lemme suivant, voir Lemme 1.1 dans [16].

Lemme 3.5. *Soient E un espace de Banach, K un sous-ensemble fermé de E et $s > 0$. Alors pour $x \in E$ et $v \in E$ tel que $x \in P_K(x + sv)$ nous avons $x \in P_K(x + \lambda sv)$ pour tout $\lambda \in (0, 1)$.*

Preuve. Soient $u \in E$ et $z \in P_K(u)$, alors nous avons $z \in P_K(u + t(z - u))$, $\forall t \in (0, 1)$. En effet, pour tout $t \in (0, 1)$, posons $u_t = u + t(z - u)$. Nous avons

$$\begin{aligned} \|u_t - z\| &= \|u + t(z - u) - z\| \\ &= (1 - t)\|u - z\| \\ &= (1 - t)d(u, K). \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $y \in K$

$$\begin{aligned} \|u_t - y\| &= \|u + t(z - u) - y\| \\ &\geqslant \|u - y\| - t\|u - z\| \\ &\geqslant d(u, K) - t\|u - z\| \\ &= (1 - t)d(u, K) = \|u_t - z\|. \end{aligned}$$

Par conséquent $z \in P_K(u_t)$.
Maintenant, soient $x \in E$ et $v \in E$ tel que $x \in P_K(x + sv)$, par ce qui précède si nous prenons $t = 1 - \lambda$ on trouve que

$$x \in P_K\big(x + sv + (1 - \lambda)(x - x - sv)\big) = P_K(x + \lambda sv).$$

Ce qui finit la preuve. $\square$

Définition 3.6 (Cône tangent de Clarke)**.** *([36]) Soit E un espace de Banach, K un sous-ensemble fermé de E, on note par $T_K(x)$ le cône tangent de Clarke qui est défini comme suit, un vecteur $v \in T_K(x)$ si pour toute suite $(x_n)_n$ dans K convergeant vers x et pour toute suite de nombres positifs $(t_n)_n$ convergeant vers 0^+, il existe une suite $(v_n)_n \subset E$ qui converge vers v telle que $x_n + t_n v_n \in K$ pour tout n.*

Définition 3.7 (Cône normal de Clarke)**.** *Soit E un espace de Banach, K un sous-ensemble fermé de E, comme le Cône tangent de Clarke, le Cône normal de Clarke $N_K^{Cl}(x)$ de K au point $x \in K$ est défini par*

$$N_K^{Cl}(x) = \Big\{\zeta \in E' : \langle \zeta, v\rangle \leq 0, \ \forall v \in T_K(x)\Big\},$$

c'est à dire $N_K^{Cl}(x)$ est le cône dual (polaire) de $T_K(x)$.

Définition 3.8 (Cône normal limite)**.** *Soit E un espace de Banach, K un sous-ensemble fermé de E, on définit le cône normal limite par*

$$N_K^L(x) = \big\{\zeta \in E' : \zeta_n \rightharpoonup \zeta\,, \ \zeta_n \in N_K^P(x_n), \ x_n \xrightarrow{K} x\big\}.$$

Ici, $\zeta_n \rightharpoonup \zeta$ signifie que la suite (ζ_n) converge faiblement vers ζ, et $x_n \xrightarrow{K} x$ signifie que $x_n \to x$ avec $x_n \in K$ pour tout n.

3.2.2 Ensembles prox-réguliers

Une classe d'ensembles qui généralise la notion de convexité, est la classe des ensembles prox-réguliers. La notion de prox-régularité a été bien adaptée à la résolution des processus de la rafle.

Pour plus de détails on renvoie le lecteur à [16, 17, 73, 5].

Définition 3.9. *([73]) Soit E un espace de Banach, K un sous-ensemble fermé de E. On dit que K est r-prox-régulier (ou uniformément prox-régulier de constante r) s'il existe $r > 0$, fixé et pour tout $x \in K$ et tout $\zeta \in N_K^L(x)$ tel que $\|\zeta\| < 1$, on a $x = P_K(x + r\zeta)$.*

Définition 3.10. *Soit E un espace de Banach, un sous ensemble fermé K de E est dit uniformément r-prox régulier si, et seulement si, $\forall x \in K$, $\forall \zeta \in N_K(x)\backslash\{0\}$ on a*

$$\mathbf{B}_E(x + r\frac{\zeta}{\|\zeta\|}, r) \cap K = \emptyset$$

le r-enlargement $C(r)$ de K,

$$C(r) = \{x \in E;\ d(x, K) \leq r\},$$

le r-tube ouvert $U_K(r)$ autour de K,

$$U_K(r) = \{x \in E;\ 0 < d(x, K) < r\}$$

et l'ensemble des points r-distants à K par

$$D_K(r) = \{x \in E;\ d(x, K) = r\}.$$

Exemple 3.11. *On sait que l'union de deux sous-ensembles convexes K_1, K_2 d'un espace vectoriel normé X n'est pas forcément convexe, par contre cet ensemble est r-prox-régulier avec $r = d(K_1, K_2)$.*

Remarque 3.12. *On fait la convention $\frac{1}{r} = 0$ pour $r = +\infty$.*

Exemple 3.13.

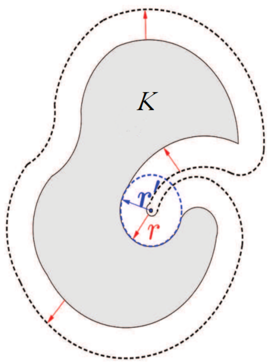

Figure 1 : K est r-prox régulier

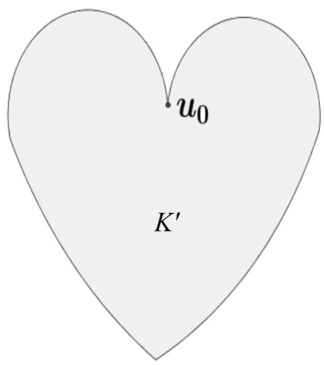

Figure 2 : K' n'est pas r-prox régulier au point u_0

Remarque 3.14. *Dans un espace de Hilbert H, pour $r = +\infty$, l'uniforme r-prox-régularité de K est équivalente à sa convexité.*

En effet, K est uniformément r-prox-régulier si et seulement si,

$$\forall x, y \in K, \forall t \in [0,1] \text{ avec } tx + (1-t)y \in U_K(r),$$
$$d_K(tx + (1-t)y) \leq \frac{1}{2r} t(1-t)\|x - y\|^2, \quad (3.2.1)$$

t.q

$$U_K(r) = \{z \in H,\ d_K(z) < r\}. \tag{3.2.2}$$

Si $r = +\infty$, on a

$$d_K(tx + (1-t)y) \leq 0 \Leftrightarrow d_K(tx + (1-t)y) = 0, \tag{3.2.3}$$

c'est à dire K convexe.

Ceci pour expliquer que les ensembles r-prox réguliers généralisent les ensembles convexes tout temps en possédant l'existence de la propriété de la projection qui utile dans la construction de notre algorithme.

Proposition 3.15. *Soient K un sous-ensemble fermé d'un espace de Hilbert H et $r \in]0, +\infty[$. Un ensemble K est dit r-prox-régulier si et seulement si pour tout $x \in K$ et tout $0 \neq \zeta \in N_K^P(x)$ on a*

$$\langle \zeta, y - x \rangle \leq \frac{\|\zeta\|}{2r} \|y - x\|^2,\ \forall\, y \in K.$$

Une autre caractérisation est la propriété d'hypomonotonie suivante : pour tout $x_i \in K (i = 1, 2)$, l'inégalité

$$\langle \zeta_1 - \zeta_2, x_1 - x_2 \rangle \geq -\frac{1}{r} \|x_1 - x_2\|^2,$$

est obtenue quand $\zeta_i \in N_K^L(x_i) \cap \mathrm{B}_E(0, r)$.

Définition 3.16. *Soient X, Y deux espaces normés. Une multi-application $G : X \rightrightarrows Y$ est dite $\frac{1}{q}$-Hölder continue sur son domaine de définition s'il existe $\gamma \geq 0$, pour tous $x, x' \in \mathcal{D}(G)$ et tous $y \in G(x)$, $y' \in G(x')$,*

$$\|y - y'\| \leq \gamma \|x - x'\|^{\frac{1}{q}}.$$

Dans toute la suite, E est un espace de Banach réel uniformément convexe muni d'une norme uniformément convexe et uniformément lisse et K est un sous ensemble fermé de E.

Définition 3.17. *On dit que K est prox-régulier ou $\|\cdot\|$-prox-régulier au point $\bar{x} \in K$ s'il existe $\varepsilon > 0$, $r > 0$ tels que pour tout $x \in K$ et tout $p^* \in N_K^p(x)$ avec $\|x - \bar{x}\| < \varepsilon$ et $\|p^*\| < 1$, le point x est le point de $\{x' \in K;\ \|x' - \bar{x}\| < \varepsilon\} = C$, le plus proche de $x + rJ^*(p^*)$, i.e. $x \in P_C(x + rJ^*(p^*))$.*

Définition 3.18. *Une multi-application $F : E \rightrightarrows E'$ est dite J-hypomonotone de degré $t \geq 0$ sur un sous ensemble $U \subset E$ si pour, $(x_i, x_i^*) \in gph(F)$, $i = 1, 2$ on a*

$$\langle J[J^*(x_1^*) - t(x_2 - x_1)] - J[J^*(x_2^*) - t(x_1 - x_2)], x_1 - x_2 \rangle \leq 0.$$

Il est commode pour $\delta \geq 0$ de noter par $N_K^{p;\delta}$ la m.a. N_K^p tronqué à $\delta\overline{\mathbf{B}}_{E'}$, i.e.

$$N_K^{p;\delta}(x) = N_K^p(x) \bigcap \delta\overline{\mathbf{B}}_{E'}, \ \forall x \in K.$$

Proposition 3.19. *Soit E un espace de Banach, K un sous ensemble fermé de E et U un sous ensemble ouvert de E. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes*

(a) P_K est univoque et norme-à-norme continue sur U,

(b) $\mathrm{d}^2(., K)$ est de classe $\mathbf{C}_E^1$ sur U.

En fait, ces propriétés sont équivalentes à la Fréchet sous différentiabilité de la fonction distance que nous pouvons voir dans la proposition suivante.

Proposition 3.20. *Soit E un espace de Banach. Pour tout ensemble fermé $K \subset E$ et tout ouvert $U \subset E$ les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *$\partial^F d(x, K)$ est non vide sur U,*
2. *$\partial^F d^2(x, K)$ est non vide sur U,*
3. *$d(., K)$ est Fréchet différentiable sur $U \setminus K$.*

Le théorème suivante résume quelques propriétés des ensembles r-prox-régulier (voir [16, 17]).

Théorème 3.21. *Supposons que le module de convexité et le module de licissité de la norme de E sont de type puissance.*

(i) Si K est un sous ensemble uniformément r-prox-régulier de E, alors les assertions ci-dessous auront lieu. Inversement (a) ou (b) entraine que K est uniformément r-prox-régulier et (f) implique que K est uniformément $\frac{r}{2}$-prox-régulier.

(a) $\mathrm{d}^2(., K)$ est de classe $\mathbf{C}_E^1$ sur $U_K(r)$,

(b) $d(.,K)$ *est Fréchet différentiable sur* $U_K(r)\setminus K$,

(c) P_K *est univoque et norme-à-norme continue sur* $U_K(r)$,

(d) pour $0\neq p\in PN_K(x)$ *avec* $x\in K$, *on a* $x\in P_K(x+r\frac{p}{\|p\|})$,

(e) si $u\in U_K(r)$ *et* $x\in P_K(u)$ *alors* $x\in P_K(u')$ *où* $u'=x+r\frac{u-x}{\|u-x\|}$,

(f) la multi-application $N_K^{p,r}$ *est J-hypomonotone de degré* $t\geq 1$.

Preuve. Pour la démonstration, nous allons suivre le schéma suivant ;

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & (b) & & & & \\
 & & & & \Downarrow & & & & \\
(i) & \Longleftrightarrow & (d) & \Longleftrightarrow & (e) & \Longrightarrow & (a) & \Longleftrightarrow & (c) \\
\Downarrow & & & & & & \Updownarrow & & \\
(f) & & & & & & (b) & &
\end{array}$$

$(d)\Rightarrow(i)$ découle du Lemme 3.5.
$(i)\Rightarrow(d)$. Fixons $0\neq p\in PN_K(x)$ et soit $p_n=\frac{p}{\|p\|+\frac{1}{n}}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.
Nous avons $\|p_n\|=\frac{\|p\|}{\|p\|+\frac{1}{n}}<1$ et $\frac{1}{\|p\|+\frac{1}{n}}J(p)\in N_K^p(x)$. Donc par (i), il existe $r>0$ tel que $x\in P_K(x+rp_n)$, d'où,

$$r\frac{\|p\|}{\|p\|+\frac{1}{n}}\leq\|x+rp_n-x'\|,\ \forall x'\in K.$$

Passant à la limite quand $n\to+\infty$, on trouve $r\leq\|x'-(x+r\frac{p}{\|p\|})\|$, $\forall x'\in K$. Donc $x\in P_C(x+r\frac{p}{\|p\|})$.
$(e)\Leftrightarrow(d)$. Evidente.
$(a)\Leftrightarrow(b)$. Conséquence de la Proposition 3.19 et du Proposition 3.20.
$(b)\Rightarrow(e)$. Nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 3.22. *[16] Soit* K *un sous ensemble fermé de* E. *Supposons que* d_K *est Fréchet différentiable sur un voisinage d'un point* $\bar{u}\notin K$. *Donc, il existe* $\delta>0$ *tels que pour tout* $\overline{\mathbf{B}}(\bar{u},\delta)$ *et* $P_K(u)=x$, *il existe* $t>0$ *tel que* $P_K(u_t)=x$ *et* $u_t=u+t(u-x)$.

Soit $u\in U_K(r)$ et $x=P_K(u)$. Puisque (b) eu lieu, par le Lemme 3.22 il existe $t_0>0$ tel que $x=P_K(u_t)$ avec $u_t=u+t\frac{u-x}{\|u-x\|}$ et $0<t<t_0$.

Soit $\lambda_0 = \sup\{t \in [0, r - d(u,K)],\ x = P_K(u_t)\}$. Utilisons l'équivalence (on note que $x \in K$ et $\|x - u_t\| = d(u,K) + t$)

$$x \in P_K(u_t) \Leftrightarrow \forall x' \in K,\ \|x' - u_t\| \geq d(u,K) + t,$$

il est facile de voir que le sup λ_0 est atteind. Montrons que $\lambda_0 = r - d(u,K)$. Supposons le contraire, i.e., $\lambda_0 < r - d(u,K)$. Donc, d'une part, on a $x \in U_K(r)$ et d'autre part $x = P_K(u_{\lambda_0})$ par (b) et la Proposition 3.19. Appliquant le Lemme 3.22 on obtient une contradiction. Par conséquent, $\lambda_0 = r - d(u,K)$. u_t peut s'écrire sous la forme $u_t = x + (d(u,K) + t)\frac{(u-x)}{\|u-x\|}$, $t = \lambda_0$ donne (e).
$(e) \Rightarrow (a)$. On montre que (e) implique "P_K est univoque et localement $\frac{1}{q}$-Hölder continue sur $U_K(r)$". On procède en cinq étapes.

Etape 1. On montre que $N_K^{p,r}(x)$ est J-hypomonotone de degré $t \geq 1$. Supposons que (e) est satisfaite. Pour tout $x^* \in N_K^{p,r}(x) = N_K^p(x) \bigcap r\overline{\mathbf{B}}_{E'}$ avec $x \in K$, alors de $(e) \Leftrightarrow (d)$, $x \in P_K(x + r\frac{J^*(x^*)}{\|x^*\|})$, et d'après le Lemme 3.5, pour tout $\alpha \in]0,1]$, $x \in P_K(x + r\alpha\frac{J^*(x^*)}{\|x^*\|})$. C'est à dire, $\forall x' \in K$,

$$\|x + r\alpha\frac{J^*(x^*)}{\|x^*\|} - x\| \leq \|x + r\alpha\frac{J^*(x^*)}{\|x^*\|} - x'\|.$$

En outre, puisque $J = \nabla(\frac{1}{2}\|\cdot\|^2)$, on a aussi

$$\frac{1}{2}\Big\|x + r\alpha\frac{J^*(x^*)}{\|x^*\|} - x'\Big\| + \Big\langle J(x + r\alpha\frac{J^*(x^*)}{\|x^*\|} - x'), x' - x\Big\rangle \leq \frac{1}{2}\Big\|r\alpha\frac{J^*(x^*)}{\|x^*\|}\Big\|^2.$$

D'où, $\big\langle J(J^*(x^*) - \frac{\|x^*\|}{r\alpha}(x' - x)), x' - x\big\rangle \leq 0$. Donc, il est possible de prendre $\alpha \in \Big]0, \frac{\|x^*\|}{r}\Big]$.
De là, pour tout $x_i \in K$, $x_i^* \in N_K^{p,r}(x_i)$, $i = 1,2$ et $t \geq 0$, on a

$$\big\langle J(J^*(x_1^*) - t(x_2 - x_1)), x_2 - x_1\big\rangle \leq 0,$$

et

$$\big\langle J(J^*(x_2^*) - t(x_1 - x_2)), x_1 - x_2\big\rangle \leq 0.$$

En additionant ces deux inégalités, on trouve

$$\big\langle J(J^*(x_1^*) - t(x_2 - x_1)) - J(J^*(x_2^*) - t(x_1 - x_2)), x_1 - x_2\big\rangle \leq 0,$$

d'où la J-hypomonotonie de $N_K^{p,r}$ de degré t pour tout $t \geq 0$. Et par conséquent, $(i) \Rightarrow (f)$.

Etape 2. On montre que P_K est non vide univoque et localement $\frac{1}{q}$-Hölder continue sur $U_K(\frac{r}{2})$. Pour cela, on utilise le Lemme suivant.

Lemme 3.23. *Soit $F : E \rightrightarrows E'$ une multi-application bornée et J-hypomonotone de degré $\bar{r}$. Alors, pour tout $r > 2\bar{r}$, $(I + r^{-1}J^* \circ F)^{-1}$ est univoque sur son domaine de définition et $\frac{1}{q}$-Hölder continue sur l'intersection de son domaine de définition avec tout sous ensemble borné.*

Soit $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$, nous avons de l'étape (1) et du Lemme 3.23, $(I+J^* \circ N_K^{p,\alpha r})^{-1}$ est $\frac{1}{q}$-Hölder continue sur l'intersection de son domaine de définition avec tout sous ensemble borné. Nous avons aussi, pour tout $r' > 0$

$$P_K(x) \subset (I + J^* \circ N_K^{p,r'})^{-1}(x), \ \forall x \in U_K(r'). \tag{3.2.4}$$

En effet, pour tout $x \in U_K(r')$, l'inclusion $y \in P_K(x)$ donne $J(x-y) \in N_K^p(y)$ et $\|y - x\| < r'$, par suite $J(x - y) \in N_K^{p,r'}(y)$, i.e. $y \in (I + J^* \circ N_K^{p,r'})^{-1}(x)$. Donc, pour tout $\alpha \in]0, \frac{1}{2}]$, P_K est $\frac{1}{q}$-Hölder continue sur l'intersection de tout sous ensemble borné avec $dom(P_K) \cap U_K(\alpha r)$, i.e. il existe $\gamma > 0$ tel que, pour tous $x, x' \in dom(P_K) \cap U_K(\alpha r)$

$$\|P_K(x) - P_K(x')\| \leq \gamma \|x - x'\|^{\frac{1}{q}}. \tag{3.2.5}$$

Montrons maintenant que $U_K(\alpha r) \subset dom(P_K)$.
Soit $x \in U_K(\alpha r)$ et soit $k \geq 1$ avec $\overline{\mathbf{B}}(x, \frac{1}{n}) \subset U_K(\alpha r)$. Puisque $\overline{G_\lambda} = E$, donc pour tout $n \geq k$, il existe $x_n \in G_\lambda \cap \overline{\mathbf{B}}(x, \frac{1}{n})$. Par la relation (3.2.5), pour tous entiers $n, m \geq k$,

$$\|P_K(x_n) - P_K(x_m)\| \leq \gamma \|x_n - x_m\|^{\frac{1}{q}}.$$

Ceci montre que $(P_K(x_n))_n$ est une suite de Cauchy. Soit z sa limite. Par définition, nous avons

$$\|P_K(x_n) - x_n\| = d(x_n, K) \leq \gamma \|x_n - y\|, \ \forall y \in K.$$

Passant à la limite, on aura

$$\|z - x\| \leq \gamma \|x - y\|^{\frac{1}{q}}, \ \forall y \in K,$$

c'est à dire, $z = P_K(x)$, d'où $x \in dom(P_K)$. Par conséquent, P_K est non vide univoque sur $U_K(\alpha r)$ et pour $\alpha = \frac{1}{2}$, P_K est non vide univoque et $\frac{1}{q}$-Hölder continue sur $U_K(\frac{1}{2r})$.

Etape 3. On utilisera les deux lemmes suivants (voir [16]). Rappelons que le segment reliant les deux point $u, v \in E$ est défini par $[u, v] = \{tu + (1-t)v,\ t \in [0, 1]\}$.

Lemme 3.24. *Soit K un sous ensemble non vide fermé d'un espace vectoriel normé $(Y, \|.\|)$. Soit $\rho > 0$ et $u \notin K(\rho)$. Alors les assertions suivantes ont lieu.*

(i) $d(u, K) = \rho + d(u, K(\rho)) = \rho + d(u, D_K(\rho))$,

(ii) si $u_0 \in P_K(u)$ et $y_0 \in [u_0, u] \cap D_C(\rho)$, alors $y_0 \in P_{K(\rho)}(u)$,

(iii) si $y \in P_{K(\rho)}(u)$ et $z \in P_K(y)$, alors $z \in P_K(u)$. De plus, si $P_{K(\rho)}(u) = \{y\}$ et $z \in P_K(y)$, alors $y \in [z, u]$ et $P_K(u) = \{z\}$.

Lemme 3.25. *Si K satisfait l'assertion (e) du Théorème 3.21 avec un paramètre r et P_K est non vide univoque sur $U_K(\alpha r)$ pour $\alpha \in]0, 1]$. Alors, pour tout $\alpha' \in]0, \alpha[$, l'ensemble $K(\alpha' r)$ satisfait (e) avec le paramètre $r(1-\alpha')$.*

Etape 4. Pour $\alpha \in]0.1]$, considérons la propriété suivante

$$\mathcal{P}(\alpha) \begin{cases} K \text{ satisfait (e) avec un paramètre } r \text{ et} \\ P_K \text{ est univoque localement Hölder continue sur } U_K(\alpha r). \end{cases}$$

On montre que $\mathcal{P}(\alpha) \Rightarrow \mathcal{P}(\frac{\alpha+1}{2})$.
Supposons que $\mathcal{P}(\alpha)$ est satisfaite. De l'étape 3, 1 et 2, on a pour tout $\alpha' \in]0, \alpha[$

$$P_{K(\alpha' r)} \text{ est univoque localement Hölder continue sur } U_{K(\alpha' r)}\left(\frac{r(1-\alpha')}{2}\right). \tag{3.2.6}$$

Soit $u \in U_K(\alpha' r + \frac{r(1-\alpha')}{2})$ tel que $r' = d(u, K) > \alpha' r$. Par (i) du Lemme 3.24 on a $d(u, K(\alpha' r)) = r' - \alpha' r$, et donc

$$u \in U_{K(\alpha' r)}\left(\frac{r(1-\alpha')}{2}\right), \tag{3.2.7}$$

puisque $r' - \alpha' r < \frac{r(1-\alpha')}{2}$ car on a $u \in U_K(\alpha' r + \frac{r(1-\alpha')}{2})$. On pose (par la relation 3.2.6) $y = P_{K(\alpha' r)}(u)$ et par la deuxième assertion de $\mathcal{P}(\alpha)$, $z = P_K(y)$. Donc, par (iii) du Lemme 3.24, $z = P_K(u)$ et par suite $P_K(u) = z = P_K \circ P_{K(\alpha' r)}(u)$.
Donc, pour $\alpha \in]0, \alpha[$, les relations (3.2.6), (3.2.7) et $\mathcal{P}(\alpha)$ assurent que P_K est univoque et localement Hölder continue sur $U_K(\alpha' r + \frac{r(1-\alpha')}{2}) \setminus K(\alpha' r)$. Par hypothèse elle est aussi localement Hölder continue sur $U_K(\alpha r)$ et donc P_K est univoque, localement Hölder

continue sur $U_K(\alpha' r + \frac{r(1-\alpha')}{2})$ pour tout $\alpha' \in]0, \alpha[$ et donc sur $U_K(\alpha r + \frac{r(1-\alpha)}{2}) = U_C(\frac{r(1-\alpha)}{2})$. D'où, $\mathcal{P}(\frac{\alpha+1}{2})$ est satisfaite. Ce qui achève la preuve de l'étape 4.

Etape 5. Définissons $(\alpha_n)_n$ par $\alpha_0 = \frac{1}{2}$, $\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n+1}{2}$. On a $\alpha_n \longrightarrow 1$, et par l'étape 1, $\mathcal{P}(\alpha_n) \Rightarrow \mathcal{P}(\frac{\alpha_n+1}{2})$. Puisque $\mathcal{P}(\alpha_0)$ est satisfaite par l'étape 1, donc $\mathcal{P}(\alpha_n)$ l'est aussi, et par conséquent, $\mathcal{P}(1)$, i.e. P_C est univoque localement Hölder continue sur $U_K(r)$, d'où (c). $\square$

3.2.3 Ensemble I-lisse faiblement compact

L'hypothèse I-lisse faiblement compact supposée sur E est nécessaire dans notre étude, elle nous permet avec d'autres hypothèses, de prouver l'existence de solutions du problème considéré. Nous donnons dans la suite sa définition et quelques unes de ses propriétés utiles dans notre preuve.

Définition 3.26. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Un espace de Banach E réflexif séparable et uniformément lisse est dit "I-lisse faiblement compact" pour un exposant $p \in (1, \infty)$ si pour toute suite bornée $(x_n)_{n\geq 0}$ de $\mathbf{L}^\infty(I, E)$, on peut extraire une sous-suite $(y_n)_{n\geq 0}$ qui converge faiblement* vers $y \in \mathbf{L}^\infty(I, E)$ et telle que pour tous $z \in \mathbf{L}^\infty(I, E)$, $\phi \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R})$,*

$$\limsup_{n\to\infty} \int_I \langle J_p\big(z(t)+y_n(t)\big) - J_p\big(y_n(t)\big), y_n(t)\rangle \phi(t)dt = \int_I \langle J_p\big(z(t) + y(t)\big) - J_p\big(y(t)\big), y(t)\rangle \phi(t)dt. \tag{3.2.8}$$

La notion de "I-lisse faiblement compact" ne dépend pas de l'intervalle de temps I.

Remarque 3.27. *Puisque E est réflexif, $\mathbf{L}^\infty(I, E) = \Big(\mathbf{L}^1(I, E')\Big)'$ et par le théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki, on sait qu'on peut extraire de la suite $(x_n)_n$ une sous-suite $(y_n)_n$ qui converge faiblement*. Par contre cette convergence n'est pas suffisante pour assurer (3.2.8) en général.*

Dans [18], les auteurs ont donné quelques exemples afin de souligner le sens non trivial de cette définition. Nous les exposons ici.

Proposition 3.28. *Tout espace de Hilbert H est I-lisse faiblement compact pour $p = 2$.*

Preuve. On sait que dans un espace de Hilbert H, J_2 est définie par $J_2(x) = x$. Donc (3.2.8) correspond à

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \langle z(t), y_n(t)\rangle \phi(t)dt = \int_I \langle z(t), y(t)\rangle \phi(t)dt. \tag{3.2.9}$$

Sachant que $\mathbf{L}^\infty(I,H) = \Big(\mathbf{L}^1(I,H)\Big)'$ et comme $(y_n)_n$ est bornée dans $\mathbf{L}^\infty_H(I)$, on peut en extraire une sous-suite qui converge faiblement* vers $y \in \mathbf{L}^\infty(I,H)$. Pour tout $z \in \mathbf{L}^\infty(I,H)$ et tout $\phi \in \mathbf{L}^1(I,H)$, on a $z(\cdot)\phi(\cdot) \in \mathbf{L}^1(I,H)$, on conclut que

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \langle z(t)\phi(t), y_n(t)\rangle dt = \int_I \langle z(t)\phi(t), y(t)\rangle dt.$$

D'où la relation (3.2.9). □

Sous une hypothèse supplémentaire sur la suite $(x_n)_n$, les auteurs dans [18] montrent que les espaces de Lebesgue et les espaces de Sobolev jouissent de la propriété "I−lisse faiblement compact".

Proposition 3.29. *Soit U un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ ou une variété Riemannienne. Pour tout entier pair p, l'espace de Sobolev $E = W^{1,p}(U,\mathbb{R}^n)$ est I-lisse faiblement compact pour p sous la contrainte suivante : de toute suite bornée $(x_n)_n$ de $\mathbf{L}^\infty(I,E)$, bornée aussi dans $\mathbf{L}^\infty(I, W^{2,p}(U,\mathbb{R}^n))$, on peut extraire une sous-suite $(y_n)_n$ satisfaisant (3.2.8).*

Proposition 3.30. *Pour tout entier $p \in [2,\infty)$, l'espace $l^p(\mathbb{Z})$ est I-lisse faiblement compact.*

Dans la suite nous allons présenter la propriété de la "continuité faible de la multi-application P_K (voir[18]). Pour la clarté de lecture nous exposons sa preuve.

Proposition 3.31. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach réflexif séparable uniformément lisse. Soit $K \subset E$ un sous-ensemble fermé. Supposons qu'il existe un exposant $p \in [2,\infty)$ et pour une suite bornée $(v_n)_{n\geq 0}$ de $\mathbf{L}^\infty(I,E)$, on peut extraire une sous-suite $(v_{k(n)})_{n\geq 0}$ qui converge faiblement* vers $v \in \mathbf{L}^\infty(I,E)$ telle que pour tout $z \in \mathbf{L}^\infty(I,E)$ et $\phi \in \mathbf{L}^1(I,\mathbb{R})$,*

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \int_I \Big\langle J_p(z(t)+v_{k(n)}(t)) - J_p(v_{k(n)}(t)), v_{k(n)}(t)\Big\rangle \phi(t)dt \\ \leq \int_I \Big\langle J_p(z(t)+v(t)) - J_p(v(t)), v(t)\Big\rangle \phi(t)dt. \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

Alors, la projection P_K est faiblement continue dans $\mathbf{L}^\infty(I,E)$ (relativement aux directions données par la suite $(v_n)_n$) dans le sens suivant : pour tout $r>0$ et toute suite bornée $(u_n)_n$ de $\mathbf{L}^\infty(I,E)$ satisfaisant

$$\begin{cases} u_n \to u \ dans\ \mathbf{L}^\infty(I,E), \\ u_n(t) \in P_K(u_n(t)+rv_n(t)) \quad p.p.\ t\in I, \end{cases}$$

on a pour presque tout $t \in I$

$$u(t) \in P_K(u(t)+rv(t)).$$

L'assertion ci-dessus est satisfaite si l'espace de Banach E est supposé "I-lisse faiblement compact" pour un exposant $p\in[2,\infty)$.

Preuve. Par l'homogénéité de J_p ($J_p(sx)=s^{p-1}J_p(x)$), en remplaçant $sz(t)$ par $z(t)$ dans (3.2.10), on a pour tout $s\in(0,r)$

$$\limsup_{n\to\infty}\int_I \big\langle J_p(z(t)+sv_{k(n)}(t)) - J_p(sv_{k(n)}(t)), v_{k(n)}(t)\big\rangle \phi(t)dt \\ \leq \int_I \big\langle J_p(z(t)+sv(t)) - J_p(sv(t)), v(t)\big\rangle\phi(t)dt. \quad (3.2.11)$$

Il reste à montrer que pour presque tout $t\in I$, $u(t)\in P_K(u(t)+rv(t))$. Fixons $\xi\in K$, pour tout entier n et presque tout $t\in I$, puisque $u_{k(n)}(t)\in P_K(u_{k(n)}(t)+rv_{k(n)}(t))$, on a

$$\|u_{k(n)}(t)+rv_{k(n)}(t)-\xi\|^p - \|rv_{k(n)}(t)\|^p \geq 0.$$

Par la Proposition 2.96, cette inégalité peut s'écrire sous la forme

$$\int_0^r \frac{d}{ds}\Big[\|u_{k(n)}(t)+sv_{k(n)}(t)-\xi\|^p - \|sv_{k(n)}(t)\|^p\Big]ds \geq -\|u_{k(n)}(t)-\xi\|^p,$$

et donc

$$\int_0^r \big\langle J_p(u_{k(n)}(t)+sv_{k(n)}(t)-\xi) - J_p(sv_{k(n)}(t)), v_{k(n)}(t)\big\rangle ds \geq -\frac{1}{p}\|u_{k(n)}(t)-\xi\|^p.$$

Alors pour toute fonction strictement positive $\phi\in L^1(I,\mathbb{R})$, on a

$$\int_0^r\int_I \phi(t)\langle J_p(u_{k(n)}(t)+sv_{k(n)}(t)-\xi) - J_p(sv_{k(n)}(t)), v_{k(n)}(t)\rangle dtds \\ \geq -\frac{1}{p}\int_I \|u_{k(n)}(t)-\xi\|^p\phi(t)dt. \quad (3.2.12)$$

Nous cherchons maintenant le passage à la limite dans cette dernière inégalité afin d'obtenir

$$\int_0^r \int_I \phi(t)\langle J_p(u(t)+sv(t)-\xi)-J_p(sv(t)),v(t)\rangle dtds \geq -\frac{1}{p}\int_I \|u(t)-\xi\|^p\phi(t)dt. \tag{3.2.13}$$

Puisque $(u_n)_n$ est bornée dans $L^\infty(I,E)$ et converge fortement vers u dans $L^\infty(I,E)$, il est clair que

$$\lim_{n\to\infty}\int_I \phi(t)\|u_{k(n)}(t)-\xi\|^p dt = \int_I \phi(t)\|u(t)-\xi\|^p dt.$$

Considérons la partie gauche dans l'inégalité (3.2.12). On sait que J_p est localement bornée dans E' et localement uniformément continue puisque E est uniformément lisse (Proposition 2.96). Pour presque tout $t\in I$ et $s\in[0,r]$, on a

$$\lim_{n\to\infty}\langle J_p\big(u_{k(n)}(t)+sv_{k(n)}(t)-\xi\big)-J_p\big(u(t)+sv_{k(n)}(t)-\xi\big),v_{k(n)}(t)\rangle = 0,$$

et cette convergence est uniforme pour tout $t\in I$ et $s\in(0,r)$. Donc la limite et les intégrales peuvent être inversés (selon le Théorème de Lebesgue) et alors

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\Big|\int_0^r\int_I \phi(t)\langle J_p\big(u_{k(n)}(t)+sv_{k(n)}(t)-\xi\big)-J_p\big(sv_{k(n)}(t)\big),v_{k(n)}(t)\rangle dtds\\ -\int_0^r\int_I \phi(t)\langle J_p\big(u(t)+sv_{k(n)}(t)-\xi\big)-J_p\big(sv_{k(n)}(t)\big),v_{k(n)}(t)\rangle dtds\Big| = 0.\end{aligned}$$

Par la relation (3.2.11) avec $z(t)=u(t)-\xi$ et par le lemme de Fatou, on obtient

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}&\int_0^r\int_I \phi(t)\langle J_p\big(u_{k(n)}(t)+sv_{k(n)}(t)-\xi\big)-J_p\big(sv_{k(n)}(t)\big),v_{k(n)}(t)\rangle dtds\\ &\leq \int_0^r\int_I \limsup_{n\to\infty}\phi(t)\Big\langle J_p\big(u_{k(n)}(t)+sv_{k(n)}(t)-\xi\big)-J_p\big(sv_{k(n)}(t)\big),v_{k(n)}(t)\Big\rangle dtds\\ &= \int_0^r\int_I \limsup_{n\to\infty}\phi(t)\Big\langle J_p\big(u(t)+sv_{k(n)}(t)-\xi\big)-J_p\big(sv_{k(n)}(t)\big),v_{k(n)}(t)\Big\rangle dtds\\ &\leq \int_0^r\int_I \phi(t)\Big\langle J_p\big(u(t)+sv(t)-\xi\big)-J_p\big(sv(t)\big),v(t)\Big\rangle dtds.\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

Par (3.2.12) et (3.2.14), on peut conclure la preuve de (3.2.13).

Nous produisons le raisonnement inverse en intégrant le gradient J_p. On a

$$\frac{d}{ds}(\|u(t)+sv(t)-\xi\|^p-\|sv(t)\|^p) = p\langle J_p(u(t)+sv(t)-\xi)-J_p(sv(t)),v(t)\rangle$$

donc

$$\int_0^r \frac{d}{ds}(\|u(t)+sv(t)-\xi\|^p - \|sv(t)\|^p)ds = \int_0^r p\langle J_p(u(t)+sv(t)-\xi) - J_p(sv(t)), v(t)\rangle ds$$
$$= \|u(t)+rv(t)-\xi\|^p - \|rv(t)\|^p - \|u(t)-\xi\|^p.$$

Alors, pour toute fonction non négative $\phi \in L^1(I,\mathbb{R})$, on a par (3.2.13)

$$\begin{aligned}\int_0^r \int_I &\phi(t)\langle J_p(u(t)+sv(t)-\xi) - J_p(sv(t)), v(t)\rangle dtds \\ &= \frac{1}{p}\int_I \phi(t)(\|u(t)+rv(t)-\xi\|^p - \|rv(t)\|^p - \|u(t)-\xi\|^p)dt \\ &\geq -\frac{1}{p}\int_I \phi(t)\|u(t)-\xi\|^p dt.\end{aligned}$$

Par suite

$$\int_I \phi(t)(\|u(t)+rv(t)-\xi\|^p - \|rv(t)\|^p)dt \geq 0. \tag{3.2.15}$$

Cette dernière inégalité est vérifiée pour toute fonction non négative $\phi \in L^1(I,\mathbb{R})$, donc on déduit qu'il existe un ensemble mesurable $A_\xi \subset I$ satisfaisant $\lambda(A_\xi)=0$ et tel que pour tout $t \in I\backslash A_\xi$

$$\|u(t)+rv(t)-\xi\| \geq \|rv(t)\|.$$

Sachant que K est séparable car E est séparable, en prenant une suite dense $(\xi_i)_{i\geq 0}$ de K, on définit $A = \cup_{i\geq 0} A_{\xi_i}$. D'où, $\lambda(A)=0$ et pour tout $t \in I\backslash A$ et tout $i \geq 0$, on aura

$$\|u(t)+rv(t)-\xi_i\| \geq \|rv(t)\|.$$

Par la définition de la densité, on trouve que cette dernière inégalité est vérifiée pour tout $\xi \in K$. Ceci montre que

$$u(t) \in P_K(u(t)+rv(t)).$$

La preuve est donc achevée. □

Remarque 3.32. *Dans la preuve de la proposition précédente, on a fixé un point $\xi \in K$. Nous soulignons que pour une fonction bornée $\xi(\cdot)$ définie sur I à valeurs dans K,* (3.2.15) *est aussi satisfaite en utilisant la séparabilité de $L^\infty(I,E)$ pour la norme de $L^1(I,E)$.*

Par cet argument, on généralise le résultat de la Proposition 3.31 au cas d'un l'ensemble mobile $K(t)$. (Voir [18]).

Proposition 3.33. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach réflexif séparable uniformément lisse. Soient K_n et $K : I \rightrightarrows E$ des multi-applications à valeurs non vides fermées, satisfaisant*

$$\sup_{t\in I} \mathcal{H}(K_n(t), K(t)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{3.2.16}$$

Supposons que pour un exposant $p \in [2, \infty)$ et une suite bornée $(v_n)_{n\geq 0}$ de $L^\infty(I, E)$, on peut extraire une sous-suite $(v_{k(n)})_{n\geq 0}$ qui converge faiblement vers $v \in L^\infty(I, E)$ et telle que pour tous $z \in L^\infty(I, E)$ et $\phi \in L^1(I, \mathbb{R})$,*

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \int_I &\langle J_p(z(t) + v_{k(n)}(t)) - J_p(v_{k(n)}(t)), v_{k(n)}(t)\rangle \phi(t)dt \\ &\leq \int_I \langle J_p(z(t) + v(t)) - J_p(v(t)), v(t)\rangle \phi(t)dt. \end{aligned} \tag{3.2.17}$$

Alors, la projection $P_{K(\cdot)}$ est faiblement continue dans $L^\infty(I, E)$ (relativement aux directions données par la suite $(v_n)_n$) dans le sens suivant : pour tout $r > 0$ et toute suite bornée $(u_n)_n$ de $L^\infty(I, E)$ satisfaisant

$$\begin{cases} u_n \to u \text{ dans } L^\infty(I, E) \\ u_n(t) \in P_{K_n(t)}(u_n(t) + rv_n(t)) \quad p.p.\ t \in I, \end{cases}$$

on a pour presque tout $t \in I$

$$u(t) \in P_{K(t)}\big(u(t) + rv(t)\big).$$

Preuve. Soit $\xi(\cdot) \in L^\infty(I, E)$ une fonction vérifiant $\xi(t) \in K(t)$ pour tout $t \in I$. Soit $\xi_n(t) \in P_{K_n(t)}(\xi(t))$ pour tout $t \in I$. Par la relation (3.2.16) $(\xi_n)_n$ converge vers ξ dans $L^\infty(I, E)$ et donc elle est bornée. Les arguments de la Proposition 3.31 sont satisfaits pour l'application non-constante $\xi(\cdot)$ et permettent de montrer que pour tout $\phi \in L^1(I, \mathbb{R})$,

$$\int_I \phi(t)(\|u(t) + rv(t) - \xi\|^p - \|rv(t)\|^p)dt \geq 0. \tag{3.2.18}$$

La Remarque 3.32, nous conduit à l'achèvement de la preuve. □

3.3 Résultat d'existence

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer et prouver notre résultat d'existence de solutions pour le problème considéré.

Théorème 3.34. *Soit $I = [0, T]$ $(T > 0)$ et soit E un espace de Banach réflexif séparable uniformément lisse et I-lisse faiblement compact pour un exposant $p \in [2, \infty)$. Soit $F : I \times E \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs non vides, convexes et faiblement compactes telle que*

(H_1) *F est scalairement $\mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(E)$-mesurable, c'est-à-dire pour tout $e \in E'$, la fonction scalaire $\delta^*(e, F(\cdot, \cdot))$ est $\mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(E)$-mesurable ;*

(H_2) *pour tout $t \in I$, $F(t, .)$ est scalairement semi-continue supérieurement, c'est-à-dire pour tout $e \in E$, la fonction scalaire $\delta^*(e, F(t, .))$ est semi-continue supérieurement sur E.*

De plus, nous supposons que pour une constante réelle $m \geq 0$

$$\|P_{F(t,x)}(0)\| = d(0, F(t, x)) \leq m, \ \forall (t, x) \in I \times E. \tag{3.3.1}$$

Soit $r > 0$ et soit $K : I \times E \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs non-vides fermées et r-prox-régulières. Supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites.

(i) *Il existe deux constantes réelles $k_1 > 0$, $0 \leq k_2 < 1$ telles que, pour tout $s, t \in I$ et $u, v, x \in E$*

$$\big|d\big(x, K(t, u)\big) - d\big(x, K(s, v)\big)\big| \leq k_1|t - s| + k_2\|u - v\|. \tag{3.3.2}$$

(ii) *Pour tout borné $A \subset E$, l'ensemble $K(I \times A)$ est relativement boule compact, i.e., l'intersection de $K(I \times A)$ avec toute boule fermée est relativement compacte.*

Alors, pour tout $u_0 \in K(0, u_0)$, l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} u(0) = u_0; \\ u(t) \in K(t, u(t)), \ \forall t \in I; \\ -\dot{u}(t) \in N_{K(t,u(t))}(u(t)) + F(t, u(t)), \ \text{p.p. } t \in I, \end{cases}$$

admet une solution lipschitzienne $u : I \to E$. De plus, on a pour presque tout $t \in I$

$$\|\dot{u}(t)\| \leq \frac{2m(2 - k_2) + k_1}{1 - k_2}.$$

Preuve.

Étape 1. Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{T}{n_0}\left(\frac{k_1 + m(1+k_2)}{1-k_2}\right) \leq \frac{r}{2}. \tag{3.3.3}$$

Pour tout $n \geq n_0$, considérons la partition $(\{t_{n,0}\}, I_{n,i})$ $0 \leq i \leq n-1$, de l'intervalle $I = [0, T]$, où $I_{n,i} = (t_{n,i}, t_{n,i+1}]$, $t_{n,i} = ih_n$ pour $0 \leq i \leq n$ et $h_n = \frac{T}{n}$.

Pour chaque $(t, x) \in I \times E$, soit $f(t, x)$ un élément de norme minimale de $F(t, x)$, c'est-à-dire

$$f(t, x) = P_{F(t,x)}(0) \;\; \forall (t, x) \in I \times E,$$

l'existence de cet élément est assurée par la convexité et la fermeture des valeurs de F.

D'autre part, F est scalairement mesurable et à valeurs convexes faiblement compactes et E est séparable, alors pour tout $x \in E$, l'application $t \mapsto f(t, x)$ est Lebesgue mesurable (voir le théorème 2.78), et par (3.3.1) elle est Lebesgue-intégrable.

Pour chaque $n \geq n_0$, on construit une suite finie $\{u_{n,i} : i = 0, \ldots, n\}$, telle que $u_{n,0} = u_0 \in K(0, u_0)$;

$$u_{n,i+1} = P_{K(t_{n,i+1}, u_{n,i})}\left(u_{n,i} - \int_{t_{n,i}}^{t_{n,i+1}} f(s, u_{n,i})\, ds\right); \tag{3.3.4}$$

$$\|u_{n,i+1} - u_{n,i}\| \leq h_n \frac{2m + k_1}{1 - k_2}. \tag{3.3.5}$$

Nous procédons par induction. Posons $u_{n,0} = u_0 \in K(0, u_0)$. Puisque les constantes m, k_1 et k_2 vérifient la relation (3.3.3), F satisfait (3.3.1), K satisfait (3.3.2) et les ensembles $K(t, x)$ sont r-prox-réguliers, on a

$$\begin{aligned}
d\Big(u_{n,0} - \int_{t_{n,0}}^{t_{n,1}} f(s, u_{n,0})\, ds, K(t_{n,1}, u_{n,0})\Big)& \\
&\leq d(u_{n,0}, K(t_{n,1}, u_{n,0})) + \int_{t_{n,0}}^{t_{n,1}} \|f(s, u_{n,0})\|\, ds \\
&= \big|d\big(u_{n,0}, K(t_{n,1}, u_{n,0})\big) - d\big(u_{n,0}, K(t_{n,0}, u_{n,0})\big)\big| + \int_{t_{n,0}}^{t_{n,1}} \|f(s, u_{n,0})\|\, ds \\
&\leq k_1|t_{n,1} - t_{n,0}| + h_n\, m = h_n(m + k_1) \leq h_{n_0}(m + k_1) \leq \frac{r}{2} < r.
\end{aligned}$$

Par la Proposition 3.21, on a $P_{K(t_{n,1},u_{n,0})}\big(u_{n,0}-\int_{t_{n,0}}^{t_{n,1}} f(s,u_{n,0})\,ds\big)$ est un ensemble non vide et univoque. Alors on définit le point $u_{n,1}\in K(t_{n,1},u_{n,0})$ par

$$u_{n,1}=P_{K(t_{n,1},u_{n,0})}\big(u_{n,0}-\int_{t_{n,0}}^{t_{n,1}} f(s,u_{n,0})\big)\,ds.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
\big\|u_{n,1}-u_{n,0}\big\| &= \big\|P_{K(t_{n,1},u_{n,0})}\big(u_{n,0}-\int_{t_{n,0}}^{t_{n,1}} f(s,u_{n,0})\,ds\big)-u_{n,0}\big\|\\
&\le \big\|P_{K(t_{n,1},u_{n,0})}\big(u_{n,0}-\int_{t_{n,0}}^{t_{n,1}} f(s,u_{n,0})\,ds\big)-\big(u_{n,0}-\int_{t_{n,0}}^{t_{n,1}} f(s,u_{n,0})\,ds\big)\big\|\\
&+\int_{t_{n,0}}^{t_{n,1}}\|f(s,u_{n,0})\|\,ds\\
&= d\big(u_{n,0}-\int_{t_{n,0}}^{t_{n,1}} f(s,u_{n,0})\,ds, K(t_{n,1},u_{n,0})\big)+\int_{t_{n,0}}^{t_{n,1}}\|f(s,u_{n,0})\|\,ds\\
&\le d\big(u_{n,0},K(t_{n,1},u_{n,0})\big)+2\int_{t_{n,0}}^{t_{n,1}}\|f(s,u_{n,0})\|\,ds\\
&= \big|d\big(u_{n,0},K(t_{n,1},u_{n,0})\big)-d\big(u_{n,0},K(t_{n,0},u_{n,0})\big)\big|+2\int_{t_{n,0}}^{t_{n,1}}\|f(s,u_{n,0})\|\,ds\\
&\le k_1\big|t_{n,1}-t_{n,0}\big|+2mh_n=h_n(2m+k_1)\leqslant h_n\frac{2m+k_1}{1-k_2},
\end{aligned}$$

car $0\leqslant k_2<1$. Clairement, les conditions de récurrence sont satisfaites à l'étape $i=0$.

Supposons que, pour $i\in\{1,\dots,n-1\}$, la suite $\{u_{n,j}:j=0,\dots,i\}$ est bien définie satisfaisant (3.3.4) et (3.3.5). On définit $u_{n,i+1}$. Par la relation (3.3.4), $u_{n,i}\in K(t_{n,i},u_{n,i-1})$, nous avons alors par (3.3.2)

$$\begin{aligned}
d\big(u_{n,i}-&\int_{t_{n,i}}^{t_{n,i+1}} f(s,u_{n,i})\,ds, K(t_{n,i+1},u_{n,i})\big)\\
&\le d\big(u_{n,i},K(t_{n,i+1},u_{n,i})\big)+\int_{t_{n,i}}^{t_{n,i+1}}\|f(s,u_{n,i})\|\,ds\\
&= \big|d\big(u_{n,i},K(t_{n,i+1},u_{n,i})\big)-d\big(u_{n,i},K(t_{n,i},u_{n,i-1})\big)\big|+\int_{t_{n,i}}^{t_{n,i+1}}\|f(s,u_{n,i})\|\,ds\\
&\le k_1|t_{n,i+1}-t_{n,i}|+k_2\|u_{n,i}-u_{n,i-1}\|+h_nm\\
&\le h_n(m+k_1)+k_2h_n\frac{2m+k_1}{1-k_2}\\
&= h_n\frac{k_1+m(1+k_2)}{1-k_2}\le\frac{r}{2}<r.
\end{aligned}$$

Par la Proposition 3.21, nous avons que $P_{K(t_{n,i+1},u_{n,i})}\big(u_{n,i}-\int_{t_{n,i}}^{t_{n,i+1}} f(s,u_{n,i})\,ds\big)$ est un ensemble non vide univoque. Alors on définit le point $u_{n,i+1}\in K(t_{n,i+1},u_{n,i})$, par

$$u_{n,i+1}=P_{K(t_{n,i+1},u_{n,i})}\bigg(u_{n,i}-\int_{t_{n,i}}^{t_{n,i+1}} f(s,u_{n,i})\,ds\bigg).$$

De plus, nous avons par (3.3.2)

$$\begin{aligned}
\big\|u_{n,i+1}-u_{n,i}\big\| &= \big\|P_{K(t_{n,i+1},u_{n,i})}\big(u_{n,i}-\int_{t_{n,i}}^{t_{n,i+1}} f(s,u_{n,i})\,ds\big)-u_{n,i}\big\| \\
&\le \big\|P_{K(t_{n,i+1},u_{n,i})}\big(u_{n,i}-\int_{t_{n,i}}^{t_{n,i+1}} f(s,u_{n,i})\,ds\big)-\big(u_{n,i}-\int_{t_{n,i}}^{t_{n,i+1}} f(s,u_{n,i})\,ds\big)\big\| \\
&\quad+\int_{t_{n,i}}^{t_{n,i+1}}\|f(s,u_{n,i})\|\,ds \\
&= d\big(u_{n,i}-\int_{t_{n,i}}^{t_{n,i+1}} f(s,u_{n,i})\,ds, K(t_{n,i+1},u_{n,i})\big)+\int_{t_{n,i}}^{t_{n,i+1}}\|f(s,u_{n,i})\|\,ds \\
&\le d\big(u_{n,i},K(t_{n,i+1},u_{n,i})\big)+2\int_{t_{n,i}}^{t_{n,i+1}}\|f(s,u_{n,i})\|\,ds \\
&= \big|d\big(u_{n,i},K(t_{n,i+1},u_{n,i})\big)-d\big(u_{n,i},K(t_{n,i},u_{n,i-1})\big)\big|+2\int_{t_{n,i}}^{t_{n,i+1}}\|f(s,u_{n,i})\|\,ds \\
&\le k_1\big|t_{n,i+1}-t_{n,i}\big|+k_2\|u_{n,i}-u_{n,i-1}\|+2mh_n \\
&\le h_n(2m+k_1)+k_2h_n\frac{2m+k_1}{1-k_2}=h_n\frac{2m+k_1}{1-k_2}.
\end{aligned}$$

D'où la suite finie $\{u_{n,i}: i=0,\dots,n\}$ est bien définie satisfaisant (3.3.4) et (3.3.5).

Observons que la relation (3.3.4) et la Proposition 3.21 donnent

$$u_{n,i+1}=P_{K(t_{n,i+1},u_{n,i})}\Bigg(u_{n,i+1}+r\frac{u_{n,i}-\int_{t_{n,i}}^{t_{n,i+1}} f(s,u_{n,i})\,ds-u_{n,i+1}}{\|u_{n,i}-\int_{t_{n,i}}^{t_{n,i+1}} f(s,u_{n,i})\,ds-u_{n,i+1}\|}\Bigg). \tag{3.3.6}$$

Étape 2. Pour chaque $t\in I_{n,i}$, avec $i=0,\dots,n-1$, nous définissons les applications u_n, z_n par

$$\begin{aligned}
&u_n(t)=\big(\frac{t}{h_n}-i\big)\big(u_{n,i+1}-u_{n,i}+\int_{t_{n,i}}^{t_{n,i+1}} f(s,u_{n,i})\,ds\big)+u_{n,i}-\int_{t_{n,i}}^{t} f(s,u_{n,i})\,ds,\\
&z_n(t)=f(t,u_{n,i}).
\end{aligned}$$

Il est clair que u_n est une application continue, que $u_n(t_{n,i+1})=u_{n,i+1}$ et que pour presque tout $t\in I_{n,i}$

$$\dot u_n(t)=\frac{1}{h_n}\big(u_{n,i+1}-u_{n,i}+\int_{t_{n,i}}^{t_{n,i+1}} f(s,u_{n,i})\,ds\big)-f(t,u_{n,i}).$$

Pour presque tout $t \in I_{n,i}$ nous posons

$$\Delta_n(t) = \dot{u}_n(t) + z_n(t) = \frac{1}{h_n}\big(u_{n,i+1} - u_{n,i} + \int_{t_{n,i}}^{t_{n,i+1}} f(s, u_{n,i})\, ds\big).$$

En premier lieu, vérifions que $\Delta_n(t)$ est un vecteur borné. En effet, en utilisant la relation (3.3.5) nous avons pour presque tout $t \in I_{n,i}$

$$\begin{aligned}\|\Delta_n(t)\| &\leq \frac{1}{h_n}\|u_{n,i+1} - u_{n,i}\| + m \\ &\leq \frac{2m + k_1}{1 - k_2} + m = \frac{k_1 + m(3 - k_2)}{1 - k_2} =: M.\end{aligned}$$

D'où,

$$\|\Delta_n(t)\| \leq M \text{ } p.p. \text{ } t \in I_{n,i}. \tag{3.3.7}$$

Dans la suite, considérons le vecteur $v = u_{n,i} - \int_{t_{n,i}}^{t_{n,i+1}} f(s, u_{n,i})\, ds$, et posons pour chaque $t \in I_{n,i}$ $K_n(t) = K(t_{n,i+1}, u_{n,i})$. Comme K est à valeurs r-prox-régulières, les relations (3.3.6) et (3.3.4) donnent

$$u_{n,i+1} = P_{K_n(t)}\left(P_{K_n(t)}(v) - r\frac{P_{K_n(t)}(v) - v}{\|P_{K_n(t)}(v) - v\|}\right). \tag{3.3.8}$$

Observons que, par la relation (3.3.7), nous avons $\frac{\|P_{K_n(t)}(v) - v\|}{h_n M} \leq 1$. Alors, en appliquant le Lemme 3.5 à la relation (3.3.8), avec $\lambda = \frac{1}{h_n M}\|P_{K_n(t)}(v) - v\|$, on obtient

$$\begin{aligned}u_{n,i+1} &\in P_{K_n(t)}\left(P_{K_n(t)}(v) - r\frac{\|P_{K_n(t)}(v) - v\|}{h_n M}\frac{P_{K_n(t)}(v) - v}{\|P_{K_n(t)}(v) - v\|}\right) \\ &= P_{K_n(t)}\left(P_{K_n(t)}(v) - \frac{r}{h_n M}(P_{K_n(t)}(v) - v)\right) \\ &= P_{K_n(t)}\left(P_{K_n(t)}(v) - \frac{r}{M}\Delta_n(t)\right),\end{aligned}$$

d'où,

$$u_{n,i+1} \in P_{K_n(t)}\big(u_{n,i+1} - \frac{r}{M}\Delta_n(t)\big) \text{ } p.p. \text{ } sur \text{ } I_{n,i}. \tag{3.3.9}$$

Étape 3. Existence de limite. Tout d'abord, on montre la convergence de la suite $(u_n(\cdot)) \subset \mathbf{C}(I, E)$.

Par les relations (3.3.1) et (3.3.7), nous avons pour presque tout $t \in I$,

$$\begin{aligned}\|\dot{u}_n(t)\| &= \|\dot{u}(t) + z_n(t) - z_n(t)\|\\ &\leq \|\dot{u}(t) + z_n(t)\| + \|z_n(t)\|\\ &= \|\Delta_n(t)\| + \|z_n(t)\|\\ &\leq M + m =: \alpha.\end{aligned}$$

D'où

$$\|\dot{u}_n(t)\| \leq \alpha. \tag{3.3.10}$$

Ceci montre que $(\dot{u}_n(\cdot))$ est uniformément bornée par α. Donc $(u_n(\cdot))$ est une suite bornée de $\mathbf{C}(I, E)$ puisque pour tout $t \in I$

$$\|u_n(t)\| \leq \|u_0\| + \int_0^t \|\dot{u}_n(s)\|ds \leq \|u_0\| + T\alpha =: \beta. \tag{3.3.11}$$

Maintenant, nous allons montrer que $(u_n(\cdot))_{n\geq n_0}$ est relativement compacte. Il est clair que $(u_n(\cdot))$ est équicontinue. En effet, pour tout $t, s \in I$ $(t > s)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\|u_n(t) - u_n(s)\| &= \left\|u_0 + \int_0^t \dot{u}_n(\tau)d\tau - u_0 - \int_0^s \dot{u}_n(\tau)d\tau\right\|\\ &\leq \int_s^t \|\dot{u}(\tau)\|d\tau\\ &\leq \alpha|t-s|.\end{aligned}$$

D'où

$$\|u_n(t) - u_n(s)\| \leq \alpha|t-s| \tag{3.3.12}$$

Prouvons que pour chaque $t \in I$ fixé, la suite $(u_n(t))_{n\geq n_0}$ est relativement compacte.

Considérons les fonctions $\theta_n, \delta_n : I \to I$ définies par $\theta_n(t) = t_{n,i+1}$, $\delta_n(t) = t_{n,i}$ si $t \in I_{n,i}$ et $\theta_n(0) = \delta_n(0) = 0$, et observons que

$$\lim_{n\to\infty} |\delta_n(t) - t| = \lim_{n\to\infty} (t - t_{n,i}) \leq \lim_{n\to\infty} (t_{n,i+1} - t_{n,i}) = \lim_{n\to\infty} \frac{T}{n} = 0,$$

d'où, $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n(t) = t$.

Et

$$\lim_{n\to\infty} |\theta_n(t) - t| = \lim_{n\to\infty} (t_{n,i+1} - t) \leq \lim_{n\to\infty} (t_{n,i+1} - t_{n,i}) = \lim_{n\to\infty} \frac{T}{n} = 0,$$

d'où $\lim_{n\to\infty} \theta_n(t) = t$.

Alors la relation (3.3.4) et la définition de u_n montrent que

$$u_n(\theta_n(t)) \in K\big(\theta_n(t), u_n(\delta_n(t))\big) \ \forall t \in I. \tag{3.3.13}$$

Cette dernière relation avec (3.3.11) implique que

$$(u_n(\theta_n(t))) \subset K\big(I \times \beta\overline{\mathbf{B}}_E\big) \cap \beta\overline{\mathbf{B}}_E.$$

Alors, l'hypothèse (ii) assure que la suite $(u_n(\theta_n(t)))$ est relativement compacte. Mais, comme pour chaque $t \in I$

$$\|u_n(\theta_n(t)) - u_n(t)\| \le \alpha|\theta_n(t) - t| \to 0 \ \text{ as } \ n \to +\infty, \tag{3.3.14}$$

il découle que la suite $(u_n(t))_{n\ge n_0}$ est aussi relativement compacte.

Par le théorème d'Ascoli-Arzelà, on obtient que $(u_n)_n$ est relativement compacte. Par extraction d'une sous-suite, on conclut que $(u_n)_n$ converge uniformément vers $u \in \mathbf{C}(I, E)$.

Dans ce qui suit, rappelons que $z_n(t) = f\big(t, u_n(\delta_n(t))\big) \in F\big(t, u_n(\delta_n(t))\big)$ pour tout $t \in I$, et montrons la convergence des suites $(z_n(\cdot))$ et $(\dot{u}_n(\cdot))$ (on utilise les techniques de [31]).

Nous avons pour tout $t \in I$, grâce à relation (3.3.12) et la convergence uniforme de $(u_n)_n$ vers u

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|u_n(\delta_n(t)) - u(t)\| &\le \lim_{n\to\infty} (\|u_n(\delta_n(t)) - u_n(t)\| + \|u_n(t) - u(t)\|)\\ &\le \lim_{n\to\infty} (\alpha|t - \delta_n(t)| + \|u_n(t) - u(t)\|) = 0,\end{aligned}$$

et donc,

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n(\delta_n(t)) - u(t)\| = 0. \tag{3.3.15}$$

De la même, manière, la convergence de la suite $(u_n(\theta_n(\cdot)))_n$ vers $u(\cdot)$ est aussi obtenue,

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\| \le \lim_{n\to\infty} (\|u_n(\theta_n(t)) - u_n(t)\| + \|u_n(t) - u(t)\|) \tag{3.3.16}$$

$$\le \lim_{n\to\infty} (\alpha|\theta_n(t) - t| + \|u_n(t) - u(t)\|) = 0. \tag{3.3.17}$$

Maintenant, la relation (3.3.1), implique que $(z_n(\cdot))_n$ est une suite bornée dans $\mathbf{L}^\infty(I,E)$. On peut alors extraire une sous-suite notée $(z_n(\cdot))$, qui converge $\sigma(\mathbf{L}^\infty(I,E),\mathbf{L}^1(I,E'))$ vers une fonction $z(\cdot)$ dans $\mathbf{L}^\infty(I,E) = \big(\mathbf{L}^1(I,E')\big)'$ car E est réflexif, i.e. pour tout $\zeta(\cdot) \in \mathbf{L}^1(I,E')$, on a

$$\lim_{n\to\infty}\langle z_n(\cdot),\zeta(\cdot)\rangle = \langle z(\cdot),\zeta(\cdot)\rangle. \tag{3.3.18}$$

Puisque $\mathbf{L}^\infty(I,E') \subset \mathbf{L}^1(I,E')$, par la relation (3.3.18) on déduit que pour tout $\zeta(\cdot) \in \mathbf{L}^\infty(I,E')$,

$$\lim_{n\to\infty}\langle z_n(\cdot),\zeta(\cdot)\rangle = \langle z(\cdot),\zeta(\cdot)\rangle,$$

d'où, $(z_n(\cdot))$ converge $\sigma\big(\mathbf{L}^1(I,E),\mathbf{L}^\infty(I,E')\big)$ vers $z(\cdot)$ dans $\mathbf{L}^1(I,E)$, le lemme de Mazur assure, l'existence d'une suite $(\xi_n(\cdot))$ (où $\xi_n(\cdot)$ est une combinaison convexe de $\{z_k(\cdot),\ k \geq n\}$) qui converge vers $z(\cdot)$ dans $\mathbf{L}^1(I,E)$. On peut alors extraire de la suite $(\xi_n(\cdot))$ une sous-suite qui converge p.p. vers $z(\cdot)$.

Alors,

$$z(t) \in \overline{\{\xi_n(t),\ n\in\mathbb{N}\}} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{\xi_n(t)\}},\ \text{p.p. } t \in I,$$

il s'ensuit que

$$z(t) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{co}\{z_k(t),\ k\geq n\},\ \text{p.p. } t\in I.$$

Posons

$$A_n = \{z_k(t),\ k \geq n\}.$$

Alors, par la proposition (2.38), on obtient pour tout $x' \in E'$,

$$\begin{aligned}\langle x', z(t)\rangle &\leq \delta^*(x', A_n),\ \forall n\in\mathbb{N}\\ &= \sup_{k\geq n}\langle x', z_k(t)\rangle,\ \ \forall n \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned}\langle x', z(t)\rangle &\leq \inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{k\geq n}\langle x', z_k(t)\rangle\\ &= \limsup_{n\to\infty}\langle x', z_n(t)\rangle \leq \limsup_{n\to\infty}\delta^*\big(x', F(t,u_n(\delta_n(t)))\big),\end{aligned}$$

et par la semicontinuité supérieure de $F(t,.)$ (voir (H_2)) il vient que

$$\langle x', z(t)\rangle \leq \limsup_{n\to\infty}\delta^*(x', F(t,u_n(\delta_n(t))) \leq \delta^*(x', F(t,u(t)))\ \forall x' \in E',$$

et alors

$$\langle x', z(t)\rangle \leq \delta^*\big(x', F(t,u(t))\big)\ \forall x' \in E'.$$

Puisque par (H_1) $t \mapsto F(t,u(t))$ est scalairement mesurable et comme F est à valeurs convexes faiblement compactes et E est séparable, par la proposition (2.77) on obtient

$$z(t) \in F(t,u(t)),\ \text{p.p. } t \in I. \tag{3.3.19}$$

D'autre part, on voit par la relation (3.3.10), que $(\dot{u}_n(\cdot))_n$ est bornée dans $\mathbf{L}^\infty(I,E)$, par extraction d'une sous-suite, on suppose que $(\dot{u}_n(\cdot))_n$ converge faiblement* dans $\mathbf{L}^\infty(I,E)$ vers une application $w(\cdot)$ et que $w(\cdot) = \dot{u}(\cdot)$. En effet, pour tout $y \in \mathbf{L}^1(I,E')$,

$$\lim_{n\to\infty} \langle \dot{u}_n(\cdot), y(\cdot)\rangle = \langle w(\cdot), y(\cdot)\rangle,$$

i.e.,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \langle \dot{u}_n(s), y(s)\rangle ds = \int_0^T \langle w(s), y(s)\rangle ds,$$

en particulier pour $y(\cdot) = \mathbb{1}_{[0,t]}(\cdot)e_j$, avec $t \in I$, $\mathbb{1}_{[0,t]}$ la fonction caractéristique de l'intervalle $[0,t]$, et (e_j) une suite de l'espace E' qui sépare les points de E (une telle suite existe car E est séparable), alors par le théorème (2.79) on obtient

$$\Big\langle \lim_{n\to\infty} \int_0^t \dot{u}_n(s)ds, e_j\Big\rangle = \Big\langle \int_0^t w(s)ds, e_j\Big\rangle,\ \forall j,$$

ceci assure que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \dot{u}_n(s)ds = \int_0^t w(s)ds.$$

Puisque $(u_n(\cdot))$ est une suite d'applications absolument continues, on a l'égalité suivante

$$\lim_{n\to\infty} (u_n(t) - u_n(0)) = \lim_{n\to\infty} \int_0^t \dot{u}_n(s)ds = \int_0^t w(s)ds,$$

alors

$$u(t) = u(0) + \int_0^t w(s)ds,$$

donc $u(\cdot)$ est absolument continue, et $w(\cdot) = \dot{u}(\cdot).p.p.$

Observons de plus, que pour tout $t \in I$, on a par (3.3.2)

$$\begin{aligned}\mathcal{H}\Big(K_n(t), K(t,u(t))\Big) &= \mathcal{H}\Big(K\big(\theta_n(t), u_n(\delta_n(t))\big), K(t,u(t))\Big)\\ &\leq k_1|\theta_n(t) - t| + k_2\|u_n(\delta_n(t)) - u(t)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.\end{aligned} \tag{3.3.20}$$

De plus, pour chaque $t \in I$, on a en utilisant (3.3.15), (3.3.17) et (3.3.2)

$$\begin{aligned} d\big(u(t), K(t, u(t))\big) &= \big|d\big(u(t), K(t, u(t))\big) - d\big(u_n(\theta_n(t)), K\big(\theta_n(t), u_n(\delta_n(t))\big)\big)\big| \\ &\leq \|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\| + k_1|\theta_n(t) - t| + k_2\|u_n(\delta_n(t)) - u(t)\|, \end{aligned}$$

l'expression dans le membre de droite tend vers 0 quand $n \to \infty$. Par conséquent, $u(t) \in K(t, u(t))$ pour tout $t \in I$ puisque $K(t, u(t))$ est un ensemble fermé.

Montrons maintenant que pour presque tout $t \in I$

$$u(t) \in P_{K(t,u(t))}\bigg(u(t) - \frac{r}{M}(\dot{u}(t) + z(t))\bigg).$$

On pose $r' = \frac{r}{M}$. On a $\Delta_n(t) = \dot{u}_n(t) + z_n(t)$ et par les arguments cités ci dessus on sait que $(\Delta_n(\cdot))_n$ converge faiblement* dans $\mathbf{L}^\infty(I, E)$ vers $\dot{u}(\cdot) + z(\cdot) =: \Delta(\cdot)$. Puisque E satisfait la propriété "I-lisse faiblement compact", donc on peut appliquer la relation (3.2.8) à la suite $(r'\Delta_n(\cdot))_n$ pour obtenir pour tout $y \in \mathbf{L}^\infty(I, E)$ et tout $\phi \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_I \big\langle J_p(y(t) - r'\Delta_n(t)) - J_p(-r'\Delta_n(t)), \Delta_n(t)\big\rangle \phi(t)dt \\ = \int_I \big\langle J_p(y(t) - r'\Delta(t)) - J_p(-r'\Delta(t)), \Delta(t)\big\rangle \phi(t)dt. \end{aligned}$$

Par (3.3.9) on sait que pour presque tout $t \in I$

$$u_n(\theta_n(t)) \in P_{K_n(t)}\big(u_n(\theta_n(t)) - r'\Delta_n(t)\big),$$

et puisque la suite $(u_n(\theta_n(\cdot)))_n$ converge fortement dans $\mathbf{L}^\infty(I, E)$ vers $u(\cdot)$, par la relation (3.3.17), on conclut par la Proposition 3.33, que pour presque tout $t \in I$

$$u(t) \in P_{K(t,u(t))}\big(u(t) - r'\Delta(t)\big),$$

d'où, $-\Delta(t) \in N_{K(t,u(t))}(u(t))$ (voir la Définition 3.2 du cône proximal normal), ou de manière équivalente

$$-\dot{u}(t) - z(t) \in N_{K(t,u(t))}(u(t)), \ p.p. \ t \in I,$$

et par (3.3.19) on obtient

$$-\dot{u}(t) \in N_{K(t,u(t))}(u(t)) + F(t, u(t)), \ p.p. \ t \in I$$

avec $u(0) = 0$, d'où, notre problème $(\mathcal{P}_F)$ admet au moins une solution Lipschitzienne $u(\cdot)$.

De plus, par (3.3.10)

$$\|\dot{u}(t)\| \leq \frac{2m(2-k_2)+k_1}{1-k_2} \quad p.p.\ t \in I.$$

ceci finit notre preuve. □

En considérant le cas particulier du Théorème 3.34 avec $F(t,x) = \{f(t,x)\}$ où f est une application univoque nous obtenons le corollaire suivant.

Corollaire 3.35. *Soit $I = [0,T]$ $(T > 0)$ et E un espace de Banach séparable, réflexif, uniformément lisse et I-lisse faiblement compact pour un exposant $p \in [2,\infty)$. Soit $f : I \times E \to E$ une application de Carathéodory, i.e, pour chaque $x \in E$ $f(\cdot,x)$ est Lebesgue-mesurable et pour tout $t \in I$ $f(t,.)$ est continue sur E. De plus, on suppose que pour une constante réelle $m \geq 0$*

$$\|f(t,x)\| \leq m,\ \forall (t,x) \in I \times E.$$

Soit $r > 0$ et soit $K : [0,T] \times E \rightrightarrows E$ vérifiant les mêmes hypothèses du Théorème 3.34. Alors pour tout $u_0 \in K(0,u_0)$, l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} u(0) = u_0; \\ u(t) \in K(t,u(t)),\ \forall t \in I; \\ -\dot{u}(t) \in N_{K(t,u(t))}(u(t)) + f(t,u(t)),\ p.p.\ t \in I, \end{cases}$$

admet une solution Lipschitzienne $u : I \to E$. De plus,

$$\|\dot{u}(t)\| \leq \frac{2m(2-k_2)+k_1}{1-k_2} \quad p.p.t \in I.$$

Remarques 3.36. *Nous terminons ce chapitre par quelques remarques importantes concernant nos résultats.*

1. *Notre théorème principal est nouveau même dans le cas où les ensembles dans le processus sont supposés être convexes.*

2. *Dans [29, 33, 60] et [70], les auteurs ont utilisé dans leurs preuves l'algorithme implicite*

$$u_{n,i} = P_{K(t_{n,i},u_{n,i})}(u_{n,i-1})$$

et ont utilisé les théorèmes de point fixe de Darbo ou de Schauder appliqués à l'application continue $v \mapsto P_{K(t,v)}(u)$. *La preuve de la continuité de cette application se base sur la structure euclidienne ou hilbertienne de l'espace. Dans notre étude, nous n'avons pas pu prouver cette continuité dans le contexte des espaces de Banach, c'est une question ouverte.*

3. *Dans la preuve de notre théorème principal,* $k_2 < 1$ *est nécessaire pour obtenir notre résultat. Cette inégalité ne peut être contournée. En fait, dans [60], les auteurs ont montré par des exemples concrets que ce type de problèmes peut ne pas avoir de solution lorsque* $k_2 \geq 1$.

4. *Dans le même esprit que [60, 1], considérons par exemple* $E = l^p(\mathbb{Z})$ *qui est un espace de Banach séparable, réflexif, uniformément lisse et I-faiblement compact pour* $p \geq 2$ *([18]), et soit* $J : E \longrightarrow E'$ *l'application de dualité entre* E *et* E'. *Si nous considérons* K *et* F *comme dans le Théorème 3.34 et nous considérons le problème qui consiste à trouver une application absolument continue* $u : I \longrightarrow E$ *tel qu'il existe une application mesurable* $g : I \longrightarrow E$ *satisfaisant pour presque tout* $t \in I$, $u(t) \in K(t, u(t))$, $g(t) \in F(t, u(t))$, $u(0) = u_0 \in K(0, u_0)$ *et*

$$\begin{aligned}&\big\langle \dot{u}(t) + g(t), J\big(\dot{u}(t) + g(t)\big) - J\big(\dot{u}(t) + g(t) + w - u(t)\big)\big\rangle \\ &\qquad\qquad \leq \big\langle w - u(t), J\big(\dot{u}(t) + g(t) + w - u(t)\big)\big\rangle, \ \forall w \in K(t, u(t)),\end{aligned}$$

alors, nous pouvons montrer que ce problème peut être réécrit sous la forme de notre inclusion différentielle $(\mathcal{P}_F)$. *Par conséquent, le Théorème 3.34 assure l'existence d'une solution Lipschitzienne de l'inégalité variationnelle.*

4

Existence de solutions pour des inclusions différentielles du second ordre gouvernées par un opérateur sous-différentiel avec une perturbation semi-continue supérieurement

Sommaire

4.1 Introduction

Le problème de ce chapitre, concerne l'existence de solutions pour un problème d'évolution du second ordre gouverné par l'opérateur sous-différentiel d'une fonction convexe semi-continue inférieurement avec perturbation multivoque de la forme

$$(\mathcal{P}_F) \begin{cases} u(0) = u_0, \\ x(t) = x_0 + \displaystyle\int_0^t u(s)ds, \qquad \forall t \in [0,T] \\ -\ddot{x}(t) \in \partial g(x(t)) + F(t, x(t), u(t)), \;\; p.p.\ t \in [0,T], \end{cases} \tag{4.1.1}$$

où $F : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est une multi-application à valeurs non vides convexes fermées, semi-continue supérieurement par rapport à la deuxième et troisième variable.

Dans la section 2 de ce chapitre, on reprend le même problème $(\mathcal{P}_F)$, en considérant une perturbation univoque de type Carathéodory.

Dans un premier temps la perturbation est bornée par une fonction positive intégrable.

Dans un second temps, on généralise au cas où cette perturbation vérifie une condition de croissance linéaire.

4.2 Quelques préliminaires

Dans tout ce chapitre $I = [0,T]$ $(T > 0)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|)$ est l'espace euclidien.

Proposition 4.1. *([25]) Soit H un espace de Hilbert. Soit $f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre convexe et semi-continue inférieurement. Alors*

(i) $\partial f(x)$ est un sous-ensemble non vide convexe et faiblement compacte de H et il existe $M > 0$ telle que $|\xi| \leq M$, pour tout $\xi \in \partial f(x)$.

(ii) Si (x_n) et (y_n) sont des suites de H telles que $y_n \in \partial f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et si $(x_n)_n$ converge vers x et $(y_n)_n$ converge faiblement vers y, alors $y \in \partial f(x)$.

Proposition 4.2. *([75]) Soit H un espace de Hilbert. Soit $f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre convexe et semi-continue inférieurement, et $D = int(dom(f))$ est non vide. Alors f est continue sur D.*

Proposition 4.3. *([75]) Soit H un espace de Hilbert. Soit $f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre convexe sur $int(D(f))$, alors ∂f est semi-continue supérieurement sur $int(D(f))$.*

4.3 Existence de solutions

Cette section est consacrée à l'étude dans l'espace de dimension finie $\mathbb{R}^d$, d'un problème gouverné par le sous-différentiel d'une fonction convexe semi-continue inférieurement dans les deux cas, avec perturbation multivoque et avec perturbation univoque.

4.3.1 Existence de solutions pour une inclusion différentielle du second ordre avec une perturbation multivoque semi-continue supérieurement

Théorème 4.4. *Soit $F : I \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une multi-application à valeurs non vides, convexes et faiblement compactes telle que*

(H_1) F est scalairement $\mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-mesurable, c'est-à-dire pour tout $e \in \mathbb{R}^d$, la fonction scalaire $\delta^*(e, F(.,.,.))$ est $\mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-mesurable ;

(H_2) pour tout $t \in I$, $F(t,.,.)$ est scalairement semi-continue supérieurement, c'est-à-dire pour tout $e \in \mathbb{R}^d$, la fonction scalaire $\delta^*(e, F(t,.,.))$ est semi-continue supérieurement sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

(H_3) il existe une fonction $\beta(\cdot)$ positive Lebesgue intégrable définie sur I (i.e. $\beta \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^+)$) tel que

$$d(0, F(t,x,y)) \leq \beta(t), \ \forall (t,x,y) \in I \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d. \tag{4.3.1}$$

Soit $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et semi-continue inférieurement. Alors, pour chaque $(u_0, x_0) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, il existe deux applications Lipschitziennes $u, x : I \to \mathbb{R}^d$ satisfaisant l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} u(0) = u_0, \\ x(t) = x_0 + \displaystyle\int_0^t u(s)ds, \qquad \forall t \in I, \\ -\dot{u}(t) \in \partial g(x(t)) + F(t, x(t), u(t)), \ \ p.p. \ t \in I. \end{cases}$$

En d'autres termes, l'inclusion différentielle

$$(\mathcal{P}_F)\begin{cases}-\ddot{x}(t)\in\partial g(x(t))+F(t,x(t),\dot{x}(t)), & p.p.\ t\in I,\\ x(0)=x_0;\ \ \dot{x}(0)=u_0\end{cases}$$

admet au moins une solution Lipschitzienne $x\in\mathbf{C}^1(I,\mathbb{R}^d)$.

Preuve.

La preuve se base sur la construction de suites d'applications approximantes dont la limite sera la solution du problème considéré.

Étape 1. Construction de suites approximantes.

Puisque g est une fonction réelle convexe et semi-continue inférieurement alors, d'après la Proposition 4.1, il existe $M>0$ tel que

$$\partial g(x)\subset M\overline{B}\quad\ \forall x\in\mathbb{R}^d. \tag{4.3.2}$$

Pour chaque $n\in\mathbb{N}^*$, considérons la partition $(\{t_{n,0}\},I_{n,i})$ $0\le i\le n-1$, de l'intervalle I, où $I_{n,i}=(t_{n,i},t_{n,i+1}]$, $t_{n,i}=ih_n$ pour $0\le i\le n$ et $h_n=\frac{T}{n}$.

Pour chaque $(t,x,y)\in I\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$, soit $h(t,x,y)$ l'élément de norme minimale de $F(t,x,y)$, c'est-à-dire

$$h(t,x,y)=P_{F(t,x,y)}(0)\ \ \forall(t,x,y)\in I\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d.$$

L'existence de cet élément est assurée par la convexité et la fermeture des valeurs de F.

Par la relation (4.3.1)

$$\|h(t,x,y)\|\le\beta(t), \tag{4.3.3}$$

D'autre part, F étant scalairement mesurable et à valeurs convexes faiblement compactes et $\mathbb{R}^d$ étant séparable, il vient que pour tout $x\in\mathbb{R}^d$, l'application $t\mapsto f(t,x,y)$ est Lebesgue mesurable (voir le théorème 2.78) et par (4.3.1) elle est Lebesgue-intégrable.

Pour tout $n\ge1$, nous allons définir des applications approximantes sur chaque intervalle $I_{n,i}$. Soit $u_{n,0}=u_0$, $x_{n,0}=x_0$, et comme $\partial g(x_{n,0})$ est un ensemble non vide, on choisit un point $y_{n,0} \in \partial g(x_{n,0})$.

Soit pour tout $t \in I_{n,0} = (t_{n,0}, t_{n,1}]$

$$\begin{cases} u_n(t) = u_{n,0} + (t - t_{n,0})y_{n,0} + \displaystyle\int_{t_{n,0}}^{t} h(s, x_{n,0}, u_{n,0})ds; \\ x_n(t) = x_{n,0} + \displaystyle\int_0^t u_n(s)ds. \end{cases}$$

Soit $u_{n,1} = u_n(t_{n,1}), x_{n,1} = x_n(t_{n,1})$. Nous choisissons un point $y_{n,1} \in \partial g(x_{n,1})$ et pour tout $t \in I_{n,1} = (t_{n,1}, t_{n,2}]$ posons

$$\begin{cases} u_n(t) = u_{n,1} + (t - t_{n,1})y_{n,1} + \displaystyle\int_{t_{n,1}}^{t} h(s, x_{n,1}, u_{n,1})ds, \\ x_n(t) = x_0 + \displaystyle\int_0^t u_n(s)ds. \end{cases}$$

Similairement, on pose par induction, pour $0 \leq i \leq n-1$

$u_{n,i} = u_n(t_{n,i})$, $x_{n,i} = x_n(t_{n,i})$, on choisit $y_{n,i} \in \partial g(x_{n,i})$ et pour tout $t \in I_{n,i} = (t_{n,i}, t_{n,i+1}]$, on pose

$$\begin{cases} u_n(t) = u_{n,i} + (t - t_{n,i})y_{n,i} + \displaystyle\int_{t_{n,i}}^{t} h(s, x_{n,i}, u_{n,i})ds, \\ x_n(t) = x_0 + \displaystyle\int_0^t u_n(s)ds. \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\dot{u}_n(t) = y_{n,i} + h(t, x_{n,i}, u_{n,i}), \ \ \forall t \in]t_{n,i}, t_{n,i+1}[.$$

Nous définissons les applications $y_n, h_n : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ par $y_n(t) = y_{n,i}$ et $h_n(t) = h(t, x_{n,i}, u_{n,i})$ si $t \in I_{n,i}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Soit $\theta_n(\cdot) : I \longrightarrow I$ la fonction définie par $\theta_n(t) = t_{n,i}$ si $t \in I_{n,i}(i = 0, \ldots, n-1)$ et $\theta_n(0) = 0$. Remarquons que $|\theta_n(t) - t| = |t_{n,i} - t| \leq (t_{n,i+1} - t_{n,i})| = \frac{T}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, pour tout $t \in I$

$$\lim_{n\to+\infty} \theta_n(t) = t. \tag{4.3.4}$$

Par suite, pour tout $t \in I$

$$u_n(t) = u_n(\theta_n(t)) + (t - \theta_n(t))y_n(t) + \int_{\theta_n(t)}^{t} h_n(s)ds,$$

$$y_n(t) \in \partial g\big(x_n(\theta_n(t))\big),$$

et

$$\dot{u}_n(t) = y_n(t) + h_n(t) \;\; p.p. \; t \in I,$$

i.e.,

$$\dot{u}(t) - h_n(t) \in \partial g\big(x_n(\theta_n(t))\big) \;\; p.p. \; t \in I. \tag{4.3.5}$$

Étape 2. Convergence des applications approximantes.

Remarquons par (4.3.2) et (4.3.3) que pour presque tout $t \in I$

$$\begin{aligned} \parallel \dot{u}_n(t) \parallel &\leq \|y_n(t)\| + \|h_n(t)\| \\ &\leq M + \beta(t) = \beta_1(t), \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

et que

$$\begin{aligned} \parallel u_n(t) \parallel &\leq \|u_0\| + \int_0^t \parallel \dot{u}_n(t) \parallel ds \\ &\leq \|u_0\| + \int_0^T \beta(s) ds \\ &\leq \|u_0\| + \|\beta\|_1 = M_1, \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

donc, $u_n(t) \in \overline{B}(0, M_1)$, pour tout $t \in I$, i.e, $(u_n(t))_n$ est relativement compacte dans $\mathbb{R}^d$.

D'autre part, pour tous $t, s \in I$ $(s < t)$ nous avons

$$\begin{aligned} \parallel u_n(t) - u_n(s) \parallel &= \left\| \int_0^t \dot{u}_n(\tau) d\tau - \int_0^s \dot{u}_n(\tau) d\tau \right\| \\ &\leq \int_s^t \|\dot{u}_n(\tau)\| d\tau \\ &\leq \int_s^t \beta_1(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

c'est à dire $(u_n(\cdot))$ est equicontinue. Par le théorème d'Ascoli-Arzelà, la suite $(u_n(\cdot))_n$ est relativement compacte dans $\mathbf{C}(I, \mathbb{R}^d)$, on peut alors lui extraire une sous-suite notée aussi $(u_n(\cdot))$ qui converge uniformément vers une application $u(\cdot) \in \mathbf{C}(I, \mathbb{R}^d)$. Il est clair que $u(0) = u_0$.

Maintenant, on va montrer la convergence de $(x_n(\cdot))$ dans $\mathbf{C}(I,\mathbb{R}^d)$. Pour tous $t, s \in I$ $(0 \leq s < t \leq T)$

$$\begin{aligned}
\|x_n(t) - x_n(s)\| &= \left\| x_0 + \int_0^t u_n(s)ds - x_0 - \int_0^s u_n(s)ds \right\| \\
&= \left\| \int_s^t u_n(s)ds \right\| \\
&\leq \int_s^t \|u_n(s)\|ds \\
&\leq M_1|t-s|.
\end{aligned}$$

Donc, $(x_n(\cdot))$ est equicontinue. En outre, pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned}
\|x_n(t)\| &= \left\| x_0 + \int_0^t u_n(s)ds \right\| \\
&\leq \|x_0\| + \int_0^t \|u_n(s)\|ds \\
&\leq \|x_0\| + M_1 T = M_2.
\end{aligned}$$

Par conséquent $(x_n(t))_n$ est relativement compacte dans $\mathbb{R}^d$.

Alors on peut appliquer le théorème d'Ascoli-Arzelà une deuxième fois pour conclure l'existence d'une sous-suite, encore notée $(x_n(\cdot))$, qui converge uniformément vers $x(\cdot) \in \mathbf{C}(I,\mathbb{R}^d)$. Il est clair que $x(0) = x_0$.
Observons que pour tout $t \in I$,

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t) = x_0 + \int_0^t \lim_{n\to\infty} u_n(s)ds = x_0 + \int_0^t u(s)ds \tag{4.3.8}$$

ceci en utilisant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue car $(u_n(\cdot))$ est équibornée (relation (4.3.7)), d'où, $\dot{x}(\cdot) = u(\cdot)$ presque partout.

Par (4.3.4) et la convergence uniforme de $(x_n(\cdot))$ vers x nous avons pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned}
\|x_n(\theta_n(t)) - x(t)\| &\leq \|x_n(\theta_n(t)) - x_n(t)\| + \|x_n(t) - x(t)\| \\
&\leq M_2|\theta_n(t) - t| + \|x_n(t) - x(t)\|,
\end{aligned}$$

i.e.,

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n(\theta_n(t)) - x(t)\| = 0, \forall t \in I. \tag{4.3.9}$$

D'autre part, en utilisant la convergence uniforme de $(u_n(\cdot))$ vers u nous avons pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned}\|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\| &\leq \|u_n(\theta_n(t)) - u_n(t)\| + \|u_n(t) - u(t)\| \\ &\leq M_1\|\theta_n(t) - t\| + \|u_n(t) - u(t)\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

i.e.,

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\| = 0, \forall t \in I. \tag{4.3.10}$$

D'où, la convergence des suites $\big(x_n(\theta_n(t))\big)_n$ et $\big(u_n(\theta_n(t))\big)$ vers $x(t)$ et $u(t)$ respectivement.

Maintenant, par la définition de h et h_n, nous avons pour tout $t \in I$,

$$h_n(t) \in F(t, x_n(\theta_n(t)), u_n(\theta_n(t))). \tag{4.3.11}$$

Pour tout $t \in I$, on pose $s_n(t) = \dfrac{h_n(t)}{\beta_1(t)}$. Alors $\|s_n(t)\| \leq 1$, donc $s_n(\cdot) \in \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{L}^\infty}$, qui est faiblement*compacte dans $\mathbf{L}^\infty(I, \mathbb{R}^d)$ (d'après le Théorème de Banach-Aloaglu-Bourbaki, Théorème 2.113), donc par extraction d'une sous-suite on peut supposer que $(s_n(\cdot))_n$ converge faiblement* vers une application $s(\cdot) \in \mathbf{L}^\infty(I, \mathbb{R}^d)$, c'est à dire pour tout $\zeta(\cdot) \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \langle s_n(\cdot), \zeta(\cdot)\rangle = \langle s(\cdot), \zeta(\cdot)\rangle.$$

Soit $y(\cdot) \in \mathbf{L}^\infty(I, \mathbb{R}^d)$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^T \|\beta_1(t)y(t)\|dt &\leq \int_0^T \|y\|_\infty \beta_1(t)\, dt \\ &= \|y\|_\infty \int_0^T \beta_1(t)\, dt \\ &= \|y\|_\infty \|\beta_1\|_1 < +\infty,\end{aligned}$$

c'est à dire, $\beta_1(\cdot)y(\cdot) \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$.

Donc

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\langle h_n(\cdot), y(\cdot)\rangle &= \lim_{n\to+\infty}\int_0^T \Big\langle h_n(t), y(t)\Big\rangle dt \\
&= \lim_{n\to+\infty}\int_0^T \Big\langle \beta_1(t)s_n(t), y(t)\Big\rangle dt \\
&= \lim_{n\to+\infty}\int_0^T \Big\langle s_n(t), \beta_1(t)y(t)\Big\rangle dt \\
&= \lim_{n\to+\infty}\langle s_n(\cdot), \beta_1(\cdot)y(\cdot)\rangle \\
&= \langle s(\cdot), \beta_1(\cdot)y(\cdot)\rangle \\
&= \int_0^T \Big\langle s(t), \beta_1(t)y(t)\Big\rangle dt \\
&= \int_0^T \Big\langle \beta_1(t)s(t), y(t)\Big\rangle dt \\
&= \langle \beta_1(\cdot)s(\cdot), y(\cdot)\rangle,
\end{aligned}$$

par suite, $(h_n(\cdot))$ converge vers $h(\cdot)=\beta_1(\cdot)s(\cdot)$ pour la topologie $\sigma(\mathbf{L}^1(I,\mathbb{R}^d),\mathbf{L}^\infty(I,\mathbb{R}^d))$, le lemme de Mazur assure l'existence d'une suite $(\xi_n(\cdot))$ (où $\xi_n(\cdot)$ est une combinaison convexe de $\{h_k(\cdot),\ k\geq n\}$) qui converge fortement vers $h(\cdot)$ dans $\mathbf{L}^1(I,\mathbb{R}^d)$. On peut alors extraire de la suite $(\xi_n(\cdot))$ une sous-suite qui converge p.p. vers $h(\cdot)$.
Alors,

$$h(t)\in\overline{\{\xi_n(t),\ n\in\mathbb{N}\}}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{\{\xi_n(t)\}},\ \text{p.p. } t\in I,$$

d'où,

$$h(t)\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{co}\{h_k(t),\ k\geq n\},\ \text{p.p. } t\in I.$$

Posons

$$A_n=\{h_k(t),\ k\geq n\}.$$

Alors, par la proposition (2.38), on obtient pour tout $x'\in E'$,

$$\begin{aligned}
\langle x', h(t)\rangle &\leq \delta^*(x', A_n),\ \forall n\in\mathbb{N} \\
&= \sup_{k\geq n}\langle x', h_k(t)\rangle,\quad \forall n\in\mathbb{N},
\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned}
\langle x', h(t)\rangle &\leq \inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{k\geq n}\langle x', h_k(t)\rangle \\
&= \limsup_{n\to\infty}\langle x', h_n(t)\rangle \leq \limsup_{n\to\infty}\delta^*\big(x', F(t, x_n(\theta_n(t)), u_n(\theta_n(t)))\big),
\end{aligned}$$

et par la semicontinuité supérieure de $F(t,.,.)$ (voir (H_2)) on conclut que

$$\langle x', h(t)\rangle \leq \limsup_{n\to\infty} \delta^*(x', F(t, x_n(\theta_n(t)), u_n(\theta_n(t))) \leq \delta^*(x', F(t, x(t), u(t))) \; \forall x' \in \mathbb{R}^d,$$

et alors

$$\langle x', h(t)\rangle \leq \delta^*\big(x', F(t, x(t), u(t))\big) \; \forall x' \in \mathbb{R}^d.$$

Puisque par (H_1), $t \mapsto F(t, x(t), u(t))$ est scalairement mesurable et comme F est à valeurs convexes faiblement compactes et $\mathbb{R}^d$ est séparable, par la proposition (2.77) on obtient

$$h(t) \in F(t, x(t), u(t)), \text{ p.p. } t \in I. \tag{4.3.12}$$

D'autre part, on voit par la relation (4.3.6), que $\left(\frac{\dot{u}_n(\cdot)}{\beta_1(\cdot)}\right)_n$ est bornée dans $\mathbf{L}^\infty(I, \mathbb{R}^d)$, pour tout $t \in I$, on pose $z_n(\cdot) = \dfrac{\dot{u}_n(\cdot)}{\beta_1(\cdot)}$. Alors $\|z_n(t)\| \leq 1$, donc $z_n(\cdot) \in \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{L}^\infty}$, qui est faiblement*compacte dans $\mathbf{L}^\infty(I, \mathbb{R}^d)$ (d'après le Théorème de Banach-Aloaglu-Bourbaki, Théorème 2.113), donc par extraction d'une sous-suite on peut supposer que $(z_n(\cdot))_n$ converge faiblement* vers une application $z(\cdot) \in \mathbf{L}^\infty(I, \mathbb{R}^d)$, c'est à dire pour tout $\zeta(\cdot) \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \langle z_n(\cdot), \zeta(\cdot)\rangle = \langle z(\cdot), \zeta(\cdot)\rangle.$$

Soit $y(\cdot) \in \mathbf{L}^\infty(I, \mathbb{R}^d)$, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|\beta_1(t) y(t)\| dt &\leq \int_0^T \|y\|_\infty \beta_1(t)\, dt \\
&\leq \|y\|_\infty \int_0^T \beta_1(t)\, dt \\
&= \|y\|_\infty \|\beta_1\|_1 < +\infty,
\end{aligned}$$

c'est à dire, $\beta_1(\cdot) y(\cdot) \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$.

Donc

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\langle \dot{u}_n(\cdot), y(\cdot)\rangle &= \lim_{n\to+\infty}\int_0^T \Big\langle \dot{u}_n(t), y(t)\Big\rangle dt \\
&= \lim_{n\to+\infty}\int_0^T \Big\langle \beta_1(t) z_n(t), y(t)\Big\rangle dt \\
&= \lim_{n\to+\infty}\int_0^T \Big\langle z_n(t), \beta_1(t) y(t)\Big\rangle dt \\
&= \lim_{n\to+\infty}\langle z_n(\cdot), \beta_1(\cdot) y(\cdot)\rangle \\
&= \langle z(\cdot), \beta(\cdot)_1 y(\cdot)\rangle \\
&= \int_0^T \Big\langle z(t), \beta_1(t) y(t)\Big\rangle dt \\
&= \int_0^T \Big\langle \beta_1(t) z(t), y(t)\Big\rangle dt \\
&= \langle \beta_1(\cdot) z(\cdot), y(\cdot)\rangle,
\end{aligned}$$

alors, $(\dot{u}_n(\cdot))$ converge vers une application $w(\cdot) = \beta_1(\cdot)z(\cdot)$ pour la topologie $\sigma(\mathbf{L}^1, \mathbf{L}^\infty)$, et que $w(\cdot) = \dot{u}(\cdot)$. En effet, pour tout $y \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$,

$$\lim_{n\to\infty}\langle \dot{u}_n(\cdot), y(\cdot)\rangle = \langle w(\cdot), y(\cdot)\rangle,$$

i.e.,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t \langle \dot{u}_n(s), y(s)\rangle ds = \int_0^t \langle w(s), y(s)\rangle ds,$$

en particulier pour $y(\cdot) = \mathbb{1}_{[0,t]}(\cdot)e_j$, avec $t \in I$, $\mathbb{1}_{[0,t]}$ la fonction caractéristique de l'intervalle $[0,t]$, et (e_j) une base de l'espace $\mathbb{R}^d$, alors par le théorème (2.79) on obtient

$$\Big\langle \lim_{n\to\infty}\int_0^t \dot{u}_n(s)ds, e_j\Big\rangle = \Big\langle \int_0^t w(s)ds, e_j\Big\rangle,\ \forall j,$$

ceci assure que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t \dot{u}_n(s)ds = \int_0^t w(s)ds.$$

Puisque $(u_n(\cdot))$ est une suite d'applications absolument continues, on a l'égalité suivante

$$\lim_{n\to\infty}(u_n(t) - u_n(0)) = \lim_{n\to\infty}\int_0^t \dot{u}_n(s)ds = \int_0^t w(s)ds,$$

alors

$$u(t) = u(0) + \int_0^t w(s)ds,$$

donc $u(\cdot)$ est absolument continue, et $w(\cdot) = \dot{u}(\cdot).p.p.$

Puisque $(\dot{u}_n(\cdot))$ converge $\sigma(\mathbf{L}^\infty(I,\mathbb{R}^d),\mathbf{L}^1(I,\mathbb{R}^d))$ vers $\dot{u}(\cdot)$ dans $\mathbf{L}^\infty(I,\mathbb{R}^d) = (\mathbf{L}^1(I,\mathbb{R}^d))'$, donc pour tout $\zeta(\cdot) \in \mathbf{L}^1(I,\mathbb{R}^d)$

$$\lim_{n\to\infty} \langle \dot{u}_n(\cdot), \zeta(\cdot)\rangle = \langle \dot{u}(\cdot), \zeta(\cdot)\rangle. \tag{4.3.13}$$

Puisque $\mathbf{L}^\infty(I,\mathbb{R}^d) \subset \mathbf{L}^1(I,\mathbb{R}^d)$, par (4.3.13) on déduit pour tout $\zeta(\cdot) \in \mathbf{L}^\infty(I,\mathbb{R}^d)$,

$$\lim_{n\to\infty} \langle \dot{u}_n(\cdot), \zeta(\cdot)\rangle = \langle \dot{u}(\cdot), \zeta(\cdot)\rangle,$$

alors, $(\dot{u}_n(\cdot))$ converge $\sigma(\mathbf{L}^1(I,\mathbb{R}^d),\mathbf{L}^\infty(I,\mathbb{R}^d))$ vers $\dot{u}(\cdot)$ dans $\mathbf{L}^1(I,\mathbb{R}^d)$.

Maintenant, nous procédons à prouver que

$$\dot{u}(t) - h(t) \in -\partial g(x(t)) \quad p.p. \; t \in I.$$

Par la relation(4.3.5), on sait que $\dot{u}_n(t) - h_n(t) \in \partial g\big(x_n(\theta_n(t))\big)$ *p.p.*
On peut appliquer les techniques de Castaing ([30]). Par la convergence faible des deux suites $(u_n(\cdot))$ et $(h_n(\cdot))$ dans $\mathbf{L}^1(I,\mathbb{R}^d)$, en utilisant le lemme de Mazur, il existe une suite $(w_n(\cdot))$ qui converge fortement dans $\mathbf{L}^1(I,\mathbb{R}^d)$ vers $\dot{u}(\cdot) - h(\cdot)$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n(\cdot) \in co\{\dot{u}_k(\cdot) - h_k(\cdot) : k \geq n\},$$

par extraction d'une sous-suite, on sait que $(w_n(\cdot))$ converge presque partout vers $\dot{u}(\cdot) - h(\cdot)$. Alors

$$w_n(t) \longrightarrow \dot{u}(t) - h(t) \quad p.p,$$

et par (4.3.12), $h(t) \in F(t, x(t), u(t))$ *p.p.* $t \in I$,

par conséquent, pour presque tout $t \in I$

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) - h(t) &\in \bigcap_n \overline{\{w_n(t)\}} \\ &\subset \bigcap_n \overline{co}\big\{\dot{u}_k(\cdot) - h_k(\cdot) : k \geq n\big\} \end{aligned}$$

le résultat est que, pour presque tout $t \in I$, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$,

$$\langle y, \dot{u}(t) - h(t)\rangle \leq \inf_n \sup_{k\geq n} \big\langle y, \dot{u}_k(t) - h_k(t)\big\rangle$$

comme, par la relation (4.3.5)

$$\dot{u}_k(t) - h_k(t) \in \partial g\big(x_k(\theta_k(t))\big),$$

par la Proposition 2.38

$$\big\langle y, \dot{u}(t) - h(t) \big\rangle \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} \sup_{k \geq n} \delta^*\big(y, \partial g(x_k(\theta_k(t))\big)$$

par la relation (4.3.9), et la Proposition 2.38

$$\big\langle y, \dot{u}(t) - h(t)\big) \big\rangle \leq \delta^*\big(y, \partial g(x(t))\big)$$

alors

$$\big\langle y, \dot{u}(t) - h(t)\big) \big\rangle - \delta^*\big(y, \partial g(x(t))\big) \leq 0$$

comme y est arbitraire, nous obtenons

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^d} \big\langle y, \dot{u}(t) - h(t)\big) \big\rangle - \delta^*\big(y, \partial g(x(t))\big) \leq 0$$

et puisque le sous-différentiel est un ensemble fermé et convexe, par le Lemme 2.39, pour tout $t \in I$, nous avons

$$\begin{aligned} d(\dot{u}(t) - h(t), \partial g\big(x(t)\big)\big) &= \sup_{y \in \overline{\mathbf{B}}_{\mathbb{R}^d}} \big\langle y, \dot{u}(t) - h(t) \big\rangle - \delta^*\big(y, \partial g(x(t))\big) \\ &\leq \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \big\langle y, \dot{u}(t) - h(t)\big) \big\rangle - \delta^*\big(y, \partial g(x(t))\big), \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

i.e

$$d\big(\dot{u}(t) - h(t), \partial g\big(x(t)\big)\big) = 0.$$

Cette égalité donne, pour presque tout $t \in I$,

$$\dot{u}(t) - h(t) \in \partial g\big(x(t)\big).$$

comme $h(t) \in F(t, x(t), u(t))$, alors

$$-\dot{u}(t) \in \partial g\big(x(t)\big) + F(t, x(t), u(t)) \ \ p.p.\, t \in I,$$

et comme $\dot{x}(\cdot) = u(\cdot)$, on aura

$$-\ddot{x}(t) \in \partial g\big(x(t)\big) + F(t, x(t), \dot{x}(t)) \ \ p.p.\, t \in I,$$

avec $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = u_0$. Ceci montre que x est une solution dans $\mathbf{C}^1(I, \mathbb{R}^d)$ du problème considéré. $\square$

4.3.2 Existence de solutions pour une inclusion différentielle du second ordre avec une perturbation univoque de type Carathéodory

Théorème 4.5. *Soit $f : I \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une application de Carathéodory bornée par une fonction positif $\beta \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^+)$. Soit $g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et semi-continue inférieurement. Alors pour tout $(u_0, x_0) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, il existe deux applications Lipschitziennes $u, x : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ satisfaisant*

$$\begin{cases} u(0) = u_0, \\ x(t) = x_0 + \displaystyle\int_0^t u(s)ds, \qquad \forall t \in I, \\ -\dot{u}(t) \in \partial g(x(t)) + f(t, x(t), u(t)), \quad \text{p.p. } t \in I. \end{cases}$$

En d'autres termes, l'inclusion différentielle

$$(\mathcal{P}_f) \begin{cases} -\ddot{x}(t) \in \partial g(x(t)) + f(t, x(t), \dot{x}(t)), \quad \text{p.p. } t \in I, \\ x(0) = x_0; \;\; \dot{x}(0) = u_0, \end{cases}$$

admet au moins une solution Lipschitzienne $x \in \mathbf{C}^1(I, \mathbb{R}^d)$.

Preuve. Ce théorème est un cas particulier du Théorème 4.4 avec $F(t, x, u) = \{f(t, x, u)\}$ pour tout $(t, x, u) \in I \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ où f est une application univoque. $\square$

Dans la suite nous présentons un autre résultat d'existence de solutions du problème $(\mathcal{P}_f)$ en remplaçant l'hypothèse de bornétude de f par une fonction intégrable, par une hypothèse de croissance linéaire. Pour établir ce résultat nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 4.6. *Supposons que les hypothèses du Théorème 4.5 sont satisfaites et qu'il existe une fonction positive intégrable $\beta \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R})$ satisfaisant*

$$\|\beta\|_1 < \frac{1}{2T}$$

telle que

$$\|f(t, x, y)\| \leq \beta(t)\big(1 + \|x\| + \|y\|\big), \quad \forall (t, x, y) \in I \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d.$$

Si v est une solution du problème $(\mathcal{P}_f)$, alors pour tout $t \in I$, nous avons

$$\|v(t)\| \leq \alpha, \quad \|\dot{v}(t)\| \leq \alpha$$

où

$$\alpha = \frac{\|x_0\| + T\big(\|u_0\| + TM + \|\beta(\cdot)\|_1\big)}{1 - 2T\|\beta(\cdot)\|_1}.$$

Preuve. Supposons que v est une solution de l'inclusion différentiel $(\mathcal{P}_f)$. Alors

$$\begin{cases} -\ddot{v}(t) \in \partial g(v(t)) + f(t, v(t), \dot{v}(t)), & p.p.\ t \in I, \\ v(0) = x_0; \dot{v}(0) = u_0, \end{cases}$$

i.e, il existe une application mesurable $y : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $y(t) \in \partial g(v(t))$ pour tout $t \in I$ et $-\ddot{v}(t) = y(t) + f(t, v(t), \dot{v}(t))$, p.p. $t \in I$.
Nous avons alors pour presque tout $t \in I$

$$\begin{aligned} \|\ddot{v}(t)\| &\leq \|y(t)\| + \|f(t, v(t), \dot{v}(t))\| \\ &\leq M + \|f(t, v(t), \dot{v}(t))\| \\ &\leq M + \beta(t)\big(1 + \|v(t)\| + \|\dot{v}(t)\|\big). \end{aligned}$$

Mais

$$\dot{v}(t) = \dot{v}(0) + \int_0^t \ddot{v}(s)ds,$$

alors

$$\begin{aligned} \|\dot{v}(t)\| &\leq \|\dot{v}(0)\| + \int_0^t \|\ddot{v}(s)\|ds \\ &\leq \|u_0\| + \int_0^t \big(M + \beta(t)(1 + \|v(s)\| + \|\dot{v}(s)\|)\big)ds \\ &\leq \|u_0\| + TM + \|\beta(\cdot)\|_1 + \int_0^t \beta(t)\big(\|v(\cdot)\|_{\mathbf{C}^1} + \|v(\cdot)\|_{\mathbf{C}^1}\big)ds \\ &\leq \|u_0\| + TM + \|\beta(\cdot)\|_1(1 + 2\|v\|_{\mathbf{C}^1}), \end{aligned} \tag{4.3.14}$$

et

$$v(t) = v(0) + \int_0^t \dot{v}(s)ds,$$

alors

$$\begin{aligned} \|v(t)\| &\leq \|v(0)\| + \int_0^t \|\dot{v}(s)\|ds \\ &\leq \|x_0\| + \int_0^t \big(\|u_0\| + TM + \|\beta(\cdot)\|_1(1 + 2\|v\|_{\mathbf{C}^1})\big)ds \\ &\leq \|x_0\| + T\|u_0\| + T^2M + T\|\beta(\cdot)\|_1(1 + 2\|v\|_{\mathbf{C}^1}). \end{aligned} \tag{4.3.15}$$

Par (4.3.14) et (4.3.15), si $T \geq 1$ alors

$$\|x_0\| + T\|u_0\| + T^2 M + T\|\beta\|_1(1 + 2\|v\|_{\mathbf{C}^1}) \geq \|u_0\| + TM + \|\beta\|_1(1 + 2\|v\|_{\mathbf{C}^1})$$

et donc

$$\|v\|_{\mathbf{C}^1} \leq \|x_0\| + T\|u_0\| + T^2 M + T\|\beta(\cdot)\|_1(1 + 2\|v\|_{\mathbf{C}^1})$$

c'est-à-dire,

$$\|v\|_{\mathbf{C}^1} \leq \frac{\|x_0\| + T\big(\|u_0\| + TM + \|\beta(\cdot)\|_1\big)}{1 - 2T\|\beta(\cdot)\|_1} = \alpha,$$

ceci est équivalent à

$$\|v(t)\| \leq \alpha \quad et \quad \|\dot{v}(t)\| \leq \alpha \quad \forall t \in I.$$

Remarquons que si $T < 1$ alors pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned} \|\dot{v}(t)\| &\leq \|u_0\| + TM + \|\beta(\cdot)\|_1(1 + 2\|v\|_{\mathbf{C}^1}) \\ &\leq \|u_0\| + \|x_0\| + M + \|\beta(\cdot)\|_1(1 + 2\|v\|_{\mathbf{C}^1}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|v(t)\| &\leq \|x_0\| + T\|u_0\| + T^2 M + T\|\beta(\cdot)\|_1(1 + 2\|v\|_{\mathbf{C}^1}) \\ &\leq \|x_0\| + \|u_0\| + M + \|\beta(\cdot)\|_1(1 + 2\|v\|_{\mathbf{C}^1}) \end{aligned}$$

et donc

$$\|v\|_{\mathbf{C}^1} \leq \|x_0\| + \|u_0\| + M + \|\beta(\cdot)\|_1(1 + 2\|v\|_{\mathbf{C}^1}).$$

Il suffit alors de voir que

$$\|v\|_{\mathbf{C}^1} \leq \frac{\|x_0\| + \|u_0\| + M + \|\beta(\cdot)\|_1}{1 - 2\|\beta(\cdot)\|_1}$$

c'est à dire il suffit de prendre

$$\alpha = \frac{\|x_0\| + \|u_0\| + M + \|\beta(\cdot)\|_1}{1 - 2\|\beta(\cdot)\|_1}$$

et supposer

$$\|\beta\|_1 < \frac{1}{2}.$$

Ceci achève la preuve. $\square$

Nous sommes maintenant en mesure de donner notre théorème principal.

Théorème 4.7. *Soit $f : I \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une application de type Carathéodory et il existe une fonction positive $\beta(\cdot) \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^+)$ satisfaisant*

$$\|\beta\|_1 < \frac{1}{2T}$$

telle que

$$\|f(t,x,y)\| \leq \beta(t)\big(1 + \|x\| + \|y\|\big), \quad \forall (t,x,y) \in I \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d.$$

Soit $g : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre convexe et semi-continue inférieurement.
Alors, pour tout $(x_0, u_0) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, le problème $(\mathcal{P}_f)$ admet au moins une solution Lipschitzienne $x \in \mathbf{C}^1(I, \mathbb{R}^d)$.

Preuve. Pour tout $k \geq 0$, considérons l'application $\pi_k : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ donnée par

$$\pi_k(t,x) = \begin{cases} x & si\ \|x\| \leq k \\ \frac{kx}{\|x\|} & si\ \|x\| > k \end{cases}$$

et considérons l'application $f_0 : I \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ définie par

$$f_0(t,x,y) = f\big(t, \pi_\alpha(t,x), \pi_\alpha(t,y)\big).$$

Alors, nous avons pour tous $t \in I, x, y \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}\|f_0(t,x,y)\| &= \big\|f\big(t, \pi_\alpha(t,x), \pi_\alpha(t,y)\big)\big\| \\ &\leq \beta(t)\bigg(1 + \|\pi_\alpha(t,x)\| + \|\pi_\alpha(t,y)\|\bigg) \\ &\leq \beta(t)\big(1 + \alpha + \alpha\big) = \beta(t)\big(1 + 2\alpha\big) = K(t),\end{aligned}$$

c'est-à-dire, f_0 est bornée par une fonction intégrable $K(\cdot)$.

Il est clair que f_0 est de type Carathéodory, en effet, comme f est de type Carathéodory et π_α est continue, donc f_0 est de type Carathéodory.

Par conséquent f_0 satisfait toutes les hypothèses du Théorème 4.5. Nous concluons l'existence d'une solution x du problème $(\mathcal{P}_{f_0})$.

Observons maintenant que x est une solution de $(\mathcal{P}_f)$ si et seulement si x est une solution de $(\mathcal{P}_{f_0})$.

En effet, soit v une solution de $(\mathcal{P}_f)$. Par le Lemme 4.6 nous avons

$$\|v(t)\| \leq \alpha, \quad \|\dot{v}(t)\| \leq \alpha, \quad \forall t \in I.$$

Par conséquent $\pi_\alpha(t, v(t)) = v(t)$ et $\pi_\alpha(t, \dot{v}(t)) = \dot{v}(t)$, $f(t, v(t), \dot{v}(t)) = f_0(t, v(t), \dot{v}(t))$ et donc

$$\begin{cases} -\ddot{v}(t) \in \partial g(v(t)) + f_0(t, v(t), \dot{v}(t)), \quad p.p.\ t \in I, \\ v(0) = x_0\,;\ \dot{v}(0) = u_0, \end{cases}$$

c'est-à-dire, v est une solution de $(\mathcal{P}_{f_0})$.

Supposons maintenant que v est une solution de $(\mathcal{P}_{f_0})$. Alors

$$\begin{aligned} \|\ddot{v}(t)\| &\leq M + \big\|f_0(t, v(t), \dot{v}(t))\big\| \\ &\leq M + \beta(t)(1 + 2\alpha), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \|\dot{v}(t)\| &\leq \|\dot{v}(0)\| + \int_0^t \|\ddot{v}(s)ds\| \\ &\leq \|u_0\| + \int_0^t \Big(M + \beta(t)(1 + 2\alpha)\Big)ds \\ &\leq \|u_0\| + TM + \|\beta\|_1(1 + 2\alpha) \end{aligned} \tag{4.3.16}$$

et

$$\begin{aligned} \|v(t)\| &\leq \|x_0\| + \int_0^t \|\dot{v}(s)\|ds \\ &\leq \|x_0\| + \int_0^t \Big(\|u_0\| + TM + \|\beta\|_{\mathbf{L}^1}(1 + 2\alpha)\Big)ds \\ &\leq \|x_0\| + T\Big(\|u_0\| + TM + \|\beta\|_{\mathbf{L}^1}(1 + 2\alpha)\Big). \end{aligned} \tag{4.3.17}$$

Mais, si nous remplaçons $\alpha = \frac{\|x_0\| + T\big(\|u_0\| + TM + \|\beta\|_1\big)}{1 - 2T\|\beta\|_1}$ dans (4.3.17) et (4.3.16) on obtient

$$\begin{aligned} \|v(t)\| &\leq \|x_0\| + T\|u_0\| + T^2M + T\|\beta\|1 + 2T\alpha\|\beta\|_1 \\ &= \|x_0\| + T\|u_0\| + T^2M + T\|\beta\|_1 + 2T\|\beta\|_1 \frac{\|x_0\| + T\|u_0\| + T^2M + T\|\beta\|_1}{1 - 2T\|\beta\|_1} \\ &= \frac{1}{1 - 2T\|\beta\|_1}\Big(\|x_0\| + T\|u_0\| + T^2M + T\|\beta\|_1 + 2T\|\beta\|_1\|x_0\| + 2T^2\|\beta\|_1\|u_0\| \\ &\quad + 2T^3M\|\beta\|_1 + 2T^2\|\beta\|_1^2 - 2T\|\beta\|_1\|x_0\| - 2T^2\|\beta\|_1\|u_0\| - 2T^3M\|\beta\|_1 - 2T^2\|\beta\|_1^2\Big) \\ &= \frac{\|x_0\| + T\|u_0\| + T^2M + T\|\beta\|_1}{1 - 2T\|\beta\|_1} \\ &= \frac{\|x_0\| + T\big(\|u_0\| + TM + \|\beta\|_1\big)}{1 - 2T\|\beta\|_1} = \alpha \end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
\|\dot{v}(t)\| &\leq \|u_0\| + TM + \|\beta\|_1 + 2\alpha\|\beta\|_1 \\
&= \frac{1}{1-2T\|\beta\|_1}\Big(\|u_0\| + TM + 2\|x_0\|\|\beta\|_1 + \|\beta\|_1 + 2T^2M\|\beta\|_1 + 2T\|\beta\|_1^2 \\
&\quad + 2T\|\beta\|_1\|u_0\| - 2T\|\beta\|_1\|u_0\| - 2T^2M\|\beta\|_1 - 2T\|\beta\|_1^2\Big) \\
&= \frac{1}{1-2T\|\beta\|_1}\Big(\|u_0\| + TM + 2\|x_0\|\|\beta\|_1 + \|\beta\|_1\Big) \\
&\leq \frac{1}{1-2T\|\beta\|_1}\Big(\|u_0\| + TM + 2\|x_0\|\frac{1}{2T} + \|\beta\|_1\Big) \\
&= \frac{1}{1-2T\|\beta\|_1}\Big(\|u_0\| + TM + \frac{\|x_0\|}{T} + \|\beta\|_1\Big) \\
&\leq \frac{1}{1-2T\|\beta\|_1}\Big(T\|u_0\| + T^2M + \|x_0\| + T\|\beta\|_1\Big) \\
&= \frac{\|x_0\| + T\big(\|u_0\| + TM + \|\beta\|_1\big)}{1-2T\|\beta\|_1} = \alpha
\end{aligned}
$$

d'où

$$\|v(t)\| \leq \alpha \quad \text{et} \quad \|\dot{v}(t)\| \leq \alpha \quad \text{pour tout} \quad t \in I,$$

c'est-à-dire, $\pi_\alpha(t, v(t)) = v(t)$ et $\pi_\alpha(t, \dot{v}(t)) = \dot{v}(t)$. Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
&-\ddot{v}(t) \in \partial g(v(t)) + f_0(t, v(t), \dot{v}(t)), \quad p.p.\ t \in I \\
&\qquad\qquad \Longleftrightarrow -\ddot{v}(t) \in \partial g(v(t)) + f(t, \pi_\alpha(t, v(t)), \pi_\alpha(t, \dot{v}(t))), \quad p.p.\ t \in I \\
&\qquad\qquad \Longleftrightarrow -\ddot{v}(t) \in \partial g(v(t)) + f(t, v(t), \dot{v}(t)), \quad p.p.\ t \in I.
\end{aligned}
$$

avec $v(0) = x_0$ et $\dot{v}(0) = u_0$. Nous concluons que v est une solution de $(\mathcal{P}_f)$.

Ceci achève notre preuve. $\square$

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse nous avons établi quelques problèmes d'évolution pour une certaine classe d'inclusions différentielles.

Dans la première partie nous avons présenté l'étude, dans un espace de Banach E, du processus de la rafle du premier ordre dépendant du temps et de l'état. Nous avons prouvé l'existence de solutions du problème perturbé par une application multivoque et nous avons déduit le résultat pour une perturbation univoque.

Nos perspectives pour cette partie, est de généraliser ces résultats au second ordre.

Dans la deuxième partie, nous avons établi, dans l'espace $\mathbb{R}^d$, l'existence de solutions pour un problème d'évolution du second ordre gouverné par l'opérateur sous-différentiel d'une fonction convexe, semi-continue inférieurement avec perturbation multivoque, et aussi nous avons repris le même problème avec une perturbation univoque de type Carathéodory.

Dans les perspectives proches, nous allons essayer de généraliser ces résultats à un espace hilbertien.

Bibliographie

[1] S. Adly and B. K. Le, Unbounded state-dependent sweeping process with perturbations in uniformly convex and q-uniformly smooth Banach spaces. ArXiv : Submit/1976304.

[2] F. Ancona, G. Colombo, Existence of solutions for a class of non convex differential inclusions, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 83 (1990), 71-76.

[3] J. P. Aubin and A. Cellina, Differential inclusions Set-Valued maps and Viability theory. Springer-Verlag, Berlin 1984.

[4] J. P. Aubin and H. Frankowska, Set-Valued Analysis. Birkhäser, Boston Basel, Berlin 1990.

[5] D. Aussel, A. Daniilidis and L. Thibault, Subsmooth sets : functional characterization and related concepts. Trans. Amer. Math. Soc 375 (2005), 1275-1301.

[6] D. Azzam-Laouir, Contribution à l'étude de problèmes d'évolution du second ordre, thèse de doctorat d'état, Constantine. 2003.

[7] D. Azzam-Laouir, S. Izza and L. Thibault, Mixed semicontinuous perturbation of nonconvex state-dependent sweeping process. Set-Valued Var. Anal. 22 (2014) 271-283.

[8] D. Azzam-Laouir, S. Lounis, Nonconvex perturbations of second order maximal monotone differential inclusions, Topological Methods in Nonlinear Analysis, Volume 35, (2010), 305-317.

[9] D. Azzam-Laouir, A. Makhlouf and L. Thibault, On perturbed sweeping process. Applicable. Anal. Vol. 95, No. 2 (2016), 303-322.

[10] V. Barbu, A class of boundary problems for second order abstract differential equations, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect 1, 19 (1972), 295-319.

[11] V. Barbu, Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces, Noordhoff, Leyden, 1976.

[12] G. Beer, Topologies on closed and closed convex sets. Kluwer Academic Publishers 1993.

[13] H. Benabdallah, Sur une classe d'équations différentielles multivoques semi-continues supérieurement à valeurs non convexes, Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier (1991), Expose N°6.

[14] H. Benabdallah, C. Castaing and A. Salvadori, Compactness and discretization methods for differential inclusions and evolution problems, Atti. Sem. Math. Fis. Univ. Modena, XLV, (1997), 9-51.

[15] H. Benabdellah et A. Faik, Perturbations convexes et non convexes des équations d'évolution, Port. Math. 53 (1996), 187–208.

[16] F. Bernard, L. Thibault and N. Zlateva, Characterization of Prox-Regular Sets in Uniformly Convex Banach Space. J. Convex Anal. 13 (2006), 525–560.

[17] F. Bernard, L. Thibault and N. Zlateva, Prox-regular sets and epigraphs in uniformly convex Banach spaces : various regularities and other porperties. Trans. Amer. Math. Soc. 363 (2011), 2211-2247.

[18] F. Bernicot, J. Venel, Existence of sweeping process in Banach space under directional prox-regularity. J. Convex Anal. 17 (2010), 451–484.

[19] N. Bourbaki, Eléments de mathématique-Fonctions d'une variable réelle, N. Bourbaki et Springer-Verlag Heidelberg, 2007.

[20] M. Bounkhel and C. Castaing, State dependent sweeping process in p-uniformly smooth and q-uniformly convex Banach spaces, Set-Valued Var.Anal 20 (2012) 187-201.

[21] M. Bounkhel and L. Thibault, Nonconvex sweeping process and prox-regularity in Hilbert space, J. Nonlinear Convex Anal. 6 (2005), 359-374.

[22] M. Bounkhel and R. AL-Yusof, First and second order convex sweeping processes in reflexive smooth Banach spaces, Set-Valued Var. Anal. 18, no. 2 (2010) 151-182.

[23] A. Bressan, A. Cellina and G. Colombo, Upper semicontinuous differential inclusions without convexity, Proc. Amer. Math. Soc. (1989), 771-775.

[24] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications. Masson, 1983.

[25] H. Brezis, Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contraction dans les espaces de Hilbert. Lecture notes in Math. North-Amsterdam 1973.

[26] C. Castaing, Equation differentielle multivoque avec contrainte sur l'état dans les espaces de Banach, Sém. Anal. Convexe Montpellier,(1978), Exposé 13.

[27] C. Castaing, T. X. Dúc Ha, M. Valadier, Evolution equations governed by the sweeping process, Set-Valued Anal. 1 (1993), 109-139.

[28] C. Castaing and M.D.P Monteiro Marques, Perturbations convexes semi-continues supérieurement de problèmes d'évolution dans les espaces de Hilbert. Sém. Anal. Convexe Montp 1984.

[29] C. Castaing, A.G. Ibrahim and M. Yarou, Some contributions to nonconvex sweeping process. J. Nonlinear Convex Anal. 10 (2009) 1-20.

[30] C. Castaing, P. Raynaud de Fitte and A. Salvadori, Some variational convergence results with application to evolution inclusions, Adv. Math. Econ, 8 (2006), 33-73.

[31] C. Castaing and M. Valadier, Convex analysis and measurable multifunctions, LNM 580, Springer Verlag, Berlin 1977.

[32] A. Cellina, V. Staicu, On evolution equations having monotonicities of opposite sign, J. Differential Equations, 90 (1991), 71-80.

[33] N. Chemetov and M.D.P Monteiro Marques, Non-convex quasi-variational differential inclusions. Set-Valued Anal. 15 (2007) 209-221.

[34] C. Chidume, Geometric Properties of Banach Spaces and Nonlinear Iterations, Springer-Verlag, (1965).

[35] K. Chraibi, Etude Théorique et numérique de problm̀es d'évolution en présence de liaisons unilatérales et de frottements Ph.D. Thesis. Université de Montpellier 1987.

[36] F. H. Clarke, Optimization and nonsmooth analysis. John Wiley and Sons, New York 1983.

[37] F. H. Clarke, R. J. Stern and P. R. Wolenski, Proximal smoothness and the lower-C^2 property. J. Convex Anal. 2 (1995), 117-144.

[38] F. H. Clarke, Yu. S. Ledyaev, R. J. Stern and P. R. Wolenski, Nonsmooth Analysis and Control Theory, Springer-Verlag, New-York, inc 1998.

[39] J. A. Clarkson, Uniformly convex spaces, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 40 (1936), 396-414.

[40] G. Colombo and V. V. Goncharov, The sweeping processes without convexity, Set-Valued Anal. 7 (1999), 357-374.

[41] K. Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Springer-Verlag 1985.

[42] Z. Denkowski, S. Migórski, Nikolaos and S. Papageorgiou, An Introduction to Nonlinear Analysis : Applications, Volume 2, Walter de Gruyter, Berlin 1994.

[43] J. Diestel, Geometry of Banach spaces : selected topics, Springer-Verlag, New-York, (1975).

[44] N. Dinculeanu, Vector measures, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1967.

[45] M. M. DaY, Strict Convexity and Smoothness of Normed Spaces, Transactions of the American Mathematical Society Vol. 78, No. 2 (Mar., 1955), 516-528.

[46] J. F. Edmond, Problèmes d'évolution associés à des ensembles prox-réguliers. Inclusions et intégration de sous-différentiels, Thèse de doctorat, Université Montpellier II, France 2004.

[47] J. F. Edmond and L. Thibault, BV solutions of nonconvex sweeping process differential inclusion with perturbation, J. Diff. Equations, 226 no. 1 (2006), 135-179.

[48] J. F. Edmond and L. Thibault, Relaxation of an optimal control problem involving a perturbed sweeping process, Math. Program, Ser. B 104 (2005), 347-373.

[49] L.C. Evans, Partial differential equations, volume 19 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, Second edition 2010.

[50] L. A. Faik : Contribution à l'Analyse des Multifonctions et à l'Étude de Quelques Problèmes d'Évolution, Thèse de Doctorat, Université. Montpellier II 1995.

[51] H. Federer, Curvature measures. Transactions of American Mathematical Society 93 (1959), 418–491.

[52] A, Gamal, Pertubation non convexe d'une equation d'evolution dans un espace de Banach, Siminaire d'analyse convexe, Montpellier (1982), exposé $n^o = 17$.

[53] T. Haddad, Nonconvex differential inequality and state dependent sweeping process. J. Optim. Theory Appl. 159 (2013) 386-398.

[54] T. Haddad, I. Kecis and L. Thibault, Reduction of state dependent sweeping process to unconstrained differential inclusion J. Global Optim 62(1) (2015) 167-182.

[55] T. Haddad, J. Noel and L. Thibault, Perturbed Sweeping process with a subsmooth set depending on the state. Linear and Nonlinear Analysis, Volume 2, Number 1 (2016), 155-274.

[56] C. Henry, An existence theorem for a class of differential inclusions with multivalued right-hand side, *J. Math. Anal. Appl.* 41 (1973), 179–186.

[57] S. Hu and N.S. Papagiorgiou, Handbook of multivalued analysis. Volume I : Theory. Kluwer, Dordrecht, The Netherlands 1997.

[58] S. Izza, Contibution à l'étude de certaines classes d'inclusions différentielles gouvernées par le processus de la rafle. Thèse de doctorat en Sciences, Université Mohammed Seddik Benyahia-Jijel (2016).

[59] A. Jourani and E. Vilches, Moreau-Yosida regularization of state-dependent sweeping processes with nonregular sets. J Optim Theory Appl. 173, 1 (2017) 91-116.

[60] M. Kunze and M.D.P Monteiro Marques, On parabolic quasi-variational inequalities and state-dependent sweeping processes. Topol. Methods Nonlinear Anal. 12 (1998) 179-191.

[61] M. Kisieliwicz, Differential inclusion and optimal control, PWN-Polish Scientific Publishers, Kluwer Academic Publishers, Dortrecht, Boston, London 1991.

[62] V. Klee, Convexity of Chebyshev sets, Math. Annalen 142 (1961), 292-304.

[63] D. Milman, On some criteria for the regularity of spaces of type (B), C. R. Acad. Sci. URSS 20 (1938), 243-246.

[64] M. D. P. Monteiro Marques, Differential inclusions in nonsmooth mechanical problems, Shocks and dry friction, Birkhäuser, Basel 1993.

[65] B. S. Mordukhovich, Analysis and generalized Differentiation I, Basic Theory. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2006.

[66] J. J. Moreau, Evolution problem associated with a moving convex set in Hilbert space, J. Differential Equations, 26, no. 3 (1977), 347-374.

[67] J.J. Moreau, Rafle par un convexe variable I. Sém. Anal. Convexe Montpellier (1971), Exposé 15.

[68] J.J. Moreau, Rafle par un convexe variable II. Sém. Anal. Convexe Montpellier (1972), Exposé 3.

[69] J. J. Moreau, Sur l'évolution d'un système élasto-viscoplastique, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 273 (1971), 118-121.

[70] J. Noel and L. Thibault, Nonconvex sweeping process with a moving set depending on the state. Vietnam J. Math. 42 (2014) 595-612.

[71] J. C. Peralba, Un Problème d'évolution relatif à un opérateur sous-différentiel dépendant du Temps, Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier 1972, Exposé N.6.

[72] B.J. Pettis, A proof that every uniformly convex space is reflexive, Duke Math. J. 5 (1939), 249-253.

[73] R. A. Poliquin, R. T. Rockafellar and L. Thibault, Local differentiability of distance functions. Trans. Amer. Math. Soc. 352 11 (2000), 5231–5249.

[74] V. S. Pugachev et I. N. Sinitsyn, Lectures on Fonctional Analysis and Applications, World scientific, Singapore 1999.

[75] R. Phelps, Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability, 2nd edition, Springer, London 1991.

[76] S. Saidi, L. Thibault and M.F. Yarou, Relaxation of optimal control problems involving time dependent subdifferential operators, Numer. Funct. Anal. Optim., 34 (2013), no. 10, 1156-1186.

[77] L. Schwartz, Analyse III. Hermann, Paris, 1998.

[78] W. Schirotzek, Noonsmooth Analysis, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.

[79] L. Thibault, Sweeping process with regular and nonregular sets, J. Diff. Equations, 193 no. 1 (2003), 1-26.

[80] J. V. Tiel, Convex analysis. An introductory text, Wiley, New York 1984.

[81] I.I. Vrabie, Compactness methods for nonlinear evolution. Pitman 1987.

[82] M. Valadier, Entrainement uniteral, lignes de descente, fonction lipschitziennes non pathologiques, C.R.A.S Paris, 308(I) (1989), 1241–1244.

[83] M. Valadier, Lignes de descente de fonctions lipschitziennes non pathologiques, Sém. d'Anal. Convexe, Montpellier, exposé N° 9 1988.

[84] Z. B. Xu and G. F. Roach, Characteristic inequalities of uniformly convex and uniformly smooth Banach spaces, J. Math. Anal. Appl. 157 (1991), 189-210.