République Algérienne Démocratique et populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahia

N° d'ordre :
Série :

T H È S E

Présentée à la

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

Pour obtenir le diplôme de

Doctorat en Sciences

Spécialité Mathématiques
Option Equations différentielles
par

Imen Boutana

Thème

Etude de quelques problèmes d'évolution

Soutenue le 31/01/2019

Devant le jury composé de

Président	M. Tahar ZERZAIHI	Prof.	U. Mohamed Seddik Ben Yahia, Jijel
Directeur	Mme. Dalila AZZAM-LAOUIR	Prof.	U. Mohamed Seddik Ben Yahia, Jijel
Examinateur	M. Maamar BENBACHIR	Prof.	U. Khmiss Miliana
Examinateur	M. Mouffak BENCHOHRA	Prof.	U. Sidi BelAbbes
Examinateur	M. Toufik MOUSSAOUI	Prof.	ENS. Kouba
Examinateur	Mme. Yasmina DAIKH	M.C.A.	U. Mohamed Seddik Ben Yahia, Jijel

Remerciements

Tous mes remerciements vont avant tout à ALLAH, le tout puissant qui m'a prodigué la santé et la patience qui m'ont propulsés vers l'acheminement de ce modeste travail.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à ma directrice de thèse, Madame Dalila Azzam-Louir, Professeur à l'université de Jijel, pour m'avoir accompagnée, conseillée et assistée tout au long de ce difficile parcours. Elle a été mon enseignante et mon exemple dès ma première année à l'université. Je suis ravie par le travail sous sa direction, je voudrais qu'elle trouve ici ma profonde considération pour les précieux conseils qu'elle m'a donnés tout au long de la préparation de cette thèse. Elle n'a epargné aucun effort pour me guider et me renseigner sur le moindre détail. Je tiens aussi à lui rendre hommage pour sa constante et durable bienveillance, pour son esprit scientifique et rigoureux duquel j'ai tiré beaucoup de profit dans mon travail. Enfin, je la remercie aussi pour son soutien moral et de m'avoir acceptée travailler sous sa direction. Je voudrais qu'elle trouve ici tous mes sentiments de respect.

Je tiens à exprimer ma reconnaisance envers le président du jury, Monsieur Zerzaihi Tahar, Professeur à l'université de Jijel pour avoir accepté de présider ma soutenance.

Je tiens aussi à remercier tous les membres du jury, à savoir : Madame Daikh Yasmina, maître de conferences à l'université de Jijel ; Monsieur Benbachir Maamar, Professeur à l'université de Khmiss Miliana ; Monsieur Benchohra Mouffak, Professeur à l'université de Sidi-Belabbes ; Monsieur Moussaoui Toufik, Professeur à l'ENS de Kouba.

Je ne pourrais oublier d'exprimer ma profonde gratitude et avec grand amour envers mes chers parents qui m'ont soutenus toute ma vie, pour leurs conseils et encouragements durant toutes les années de mes études, et surtout pour la patience de m'encourager durant ce long travail de thèse.

Mes profonds remerciements vont également à mon mari qui a été patient et qui m'a encouragé à entamer et à accomplir ce travail.

Je ne pouvrais oublier de remercier tous mes frères et sœurs qui m'ont toujours encouragés et soutenus.

Il ne faut pas oublier de remercier les professeurs Charles Castaing et M.D.M. Monteiro-Marques pour les discussions, les idées et les remarques qui ont contribué au développement de la $4^{\text{éme}}$ *section de cette thèse.*

Je n'oublierai pas tous ceux qui m'ont encouragé de loin ou de près pour terminer ce travail.

A tous ceux-ci, Merci...... Merci.

Table des matières

Introduction

Les équations et inclusions différentielles trouvent leur importance dans beaucoup de problèmes de mathématiques, de physique et d'économétrie et même de biologie. Diverses axes de recherche concernant leur résolution ont été élaborés, vu leurs multiples applications dans les domaines su-cités.

L'ensemble des travaux composant cette thèse est une contribution à l'étude de certaines classes d'inclusions différentielles du premier et du second ordre.

On présentera dans cette introduction, d'une manière brève, les grandes lignes de cette contribution. La thèse est composée de quatre chapitres. Dans le premier, on rappelle quelques notions et résultats de base nécessaires dans la démonstration de nos divers théorèmes.

Le deuxième chapitre est constitué de deux parties, dans la première, nous présentons un résultat d'existence pour une inclusion différentielle du second ordre avec des conditions aux limites en m-points ($m > 3$) dans un espace de Banach séparable E, de la forme

$$(\mathcal{P}_F)\begin{cases}\ddot{u}(t)+\gamma\dot{u}(t)\in \mathrm{F}(t,u(t),\dot{u}(t)) \ \text{ p.p. } t\in[0,1]\\ u(0)=0; \quad u(1)=\displaystyle\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i u(\eta_i),\end{cases}$$

avec $0<\eta_1<\eta_2<...<\eta_{m-2}<1$, $\alpha_i\in\mathbb{R}$ $(i=1,2,...,m-2)$, $\gamma>0$
et $F:[0,1]\times E\times E \rightrightarrows E$ une multi-application mesurable à valeurs fermées non vides, vérifiant une hypothèse de pseudo-lipschitzité.

Filippov [56] et Wazewski [83] ont fait des études pour des inclusions différentielles du premier ordre en dimension finie avec une perturbation Lipschitzienne.
Cette condition, tout à fait raisonnable lorsque F est à valeurs bornées, devient inadmissiblement forte si les valeurs de F sont non bornées.

Ioffe [67] a donné un théorème d'existence de solutions pour une inclusion différentielle du premier ordre avec une version plus faible que la condition de Lipschitz, qui est plus acceptable lorsque les valeurs de F ne sont pas bornées. Cette condition qui pourrait être caractérisée comme une version globale de la condition de pseudo-Lipschitziété d'Aubin est très proche de celle présentée par Loewen et Rockafellar [72].
La version globale de la condition de pseudo-Lipschitziété d'Aubin est donnée par

$$y \in F(t,x) \Rightarrow d(v, F(t,x')) \leq (k(t) + \beta \parallel y \parallel) \parallel x - x' \parallel$$

(k est une fonction positive intégrable et β une constante positive).

Les inclusions différentielles du second ordre, avec des conditions aux limites, ont été étudiées par plusieurs auteurs, voir [11, 15, 21, 30, 66, 73].

Marano [73] a donné des résultats d'existence pour des inclusions différentielles du second ordre avec des conditions aux limites en trois points en dimension finie. Le même problème a été étudié par Ibrahim et Gomaa [66] avec F une multi-application semicontinue supérieurement à valeurs convexes fermées bornées et à croissance linéaire dans un espace de dimension finie. Ce problème a été généralisé par Azzam, Castaing et Thibault [15] avec F une multi- application semicontinue supérieurement à valeurs convexes compactes, aux espaces de Banach séparables.

Dans le cas de perturbations Lipschitziennes pour des problèmes du second ordre avec des conditions aux limites en trois points, dans un espace de Banach séparable, un résultat d'existence a été établi par Azzam et Bounama [11]. Une généralisation de ce problème au cas où F est à valeurs fermées vérifiant la condition de pseudo-Lipschitziété a été étudiée par Azzam, Makhlouf et Thibault dans [21]. Nous soulignons, que le problème $(\mathcal{P}_F)$ a été étudié par Castaing et Truong [30] quand F est à valeurs fermées vérifiant la condition de Lipschitz.

Dans la deuxième section, on s'intéresse à l'étude, en dimension finie, de l'existence de solutions pour l'inclusion différentielle relaxée

$$(\mathcal{P}_{ext(F)}) \begin{cases} \ddot{u}(t) + \gamma\dot{u}(t) \in ext\big(F(t, u(t), \dot{u}(t))\big), & \text{p.p. } t \in [0,1] \\ u(0) = 0; \quad u(1) = \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i u(\eta_i), \end{cases}$$

et nous démontrons que l'ensemble des solutions du problème relaxé $(\mathcal{P}_{ext(F)})$, est dense dans l'ensemble des solutions du problème $(\mathcal{P}_F)$, quand F vérifie la condition de Lipschitz.

Le problème d'existence et de densité des solutions extrémales pour le problème de Cauchy pour une inclusion différentielle du premier ordre

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in ext\big(F(t,x(t))\big), & \text{p.p. sur } [0,T] \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

a été introduit par Cellina [38], et dans [43] DeBlasi et Pianigiani ont donné un résultat d'existence et de densité dans un espace de Banach réel réflexif avec F une mutlti-application à valeurs non vides convexes compactes, le cas où F satisfait des hypothèses qui excluent la compacité a été traité dans [44].

En ce qui concerne les inclusions différentielles du second ordre avec les conditions aux limites en trois points, une propriété de densité entre l'ensemble des solutions de l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) \in \Gamma(t), & \text{p.p. sur } [0,1] \\ x(0) = x_0,\ x(\theta) = x(1), \end{cases}$$

et l'ensemble de solutions de l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) \in ext(\Gamma(t)), & \text{p.p. sur } [0,1] \\ x(0) = x_0,\ x(\theta) = x(1), \end{cases}$$

a été étudié par Azzam et al dans [15], dans un espace de Banach séparable, avec Γ une multi-application à valeurs non vides convexes compactes, mesurable et intégrablement bornée. Aussi, dans [6], Avgerinos et Papageorgiou ont prouvé l'existence de solutions extrémales et ont donné une propriété de densité pour le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\ddot{x}(t) \in ext(F(t,x(t),\dot{x}(t))), & \text{p.p. sur } [0,b] \\ x(0) = x(b) = 0, \end{cases}$$

où $F : [0,b]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ $(b>0)$ est une multi-application à valeurs non vides convexes compactes, mesurable sur $[0,b]$ et continue sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

Un autre résultat dans cette direction, se trouve dans le travail récent de Azzam et Melit [22], il concerne l'existence et la densité de solutions du problème

$$\begin{cases} -\ddot{x}(t) \in \partial\varphi(\dot{x}(t)) + ext(F(t,x(t),\dot{x}(t))), & \text{p.p. sur } [0,1] \\ x(1) = \dot{x}(0) = 0, \end{cases}$$

$\partial\varphi$ est le sous différentiel au sens de l'analyse convexe de la fonction réelle convexe φ, et $F : [0,1]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ une multi-application à valeurs non vides convexes compactes, mesurable sur $[0,1]$ et Hausdorff-continue sur $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$.

Le troisième chapitre de cette thèse est une application de la Pettis-intégration aux inclusions différentielles du second ordre.

L'intégrale de Pettis est un concept plus général que celui de Bochner dans la théorie de l'intégration dans les espaces de dimension infinie, *en effet*, il est connu qu'un espace de Banach E est de dimension infinie si et seulement si, il existe une application Pettis intégrable qui n'est pas Bochner intégrable.
Une attention spéciale a été donnée aux multi-applications Pettis intégrables, citons par exemple les contributions de Amrani [3], Amrani et al [4], et Castaing [29], qui traitent l'intégrale de Pettis pour des multi-applications à valeurs convexes faiblement compactes dans un espace de Banach séparable E, voir aussi [51], [58], [64],[79] et leurs références.

Le but de ce chapitre est de présenter quelques résultats nouveaux dans ce domaine, se rapportant à la Pettis intégration. La première section consiste à traiter l'existence de solutions pour une inclusion différentielle du second ordre avec des conditions aux limites en $m-$points $(m > 3)$ dans un espace de Banach séparable de la forme

$$(\mathcal{P})\begin{cases} \ddot{u}(t)+\gamma\dot{u}(t)\in \mathrm{F}(t,u(t),\dot{u}(t)) \;\; t\in[0,1] \\ u(0)=0; \quad u(1)=\displaystyle\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i u(\eta_i), \end{cases}$$

avec F une multi-application à valeurs convexes compactes définie sur $[0,1]\times E\times E$, telle que $F(t,x,y)\subset\Gamma(t)$, et la multi-application Γ est Pettis uniformément intégrable.

Notre théorème d'existence généralise le résultat obtenu dans [15], dans le cas où $m=3$ et $\gamma=0$.

Concernant les résultats traitant la Pettis-intégration et ses applications, on peut citer par exemple [1, 2, 3, 4, 29, 31, 47, 51, 58, 63, 64, 75, 80, 84].

Dans la deuxième section de ce chapitre, nous nous sommes intéressées à l'étude de l'existence de solutions pour une inclusion différentielle avec retard dans un espace de Banach séparable de la forme

$$(\mathcal{P}_r)\begin{cases} \ddot{u}(t)\in F(t,u(t),u(h(t)),\dot{u}(t))+H(t,u(t),u(h(t)),\dot{u}(t)), \quad p.p.\ t\in[0,1] \\ u(t)=\varphi(t), \quad \forall t\in[-r,0] \\ u(0)=0; \;\; u(\theta)=u(1), \end{cases}$$

où F est une multi-application semicontinue supérieurement à valeurs convexes sur $E\times E\times E$, et H semicontinue inférieurement, tandis que h est une application bornée et continue sur $[0,1]$. L'existence de solutions est obtenue sous les hypothèses : $\mathrm{F}(t,x,y,z)\subset\Gamma_1(t)$, $\mathrm{H}(t,x,y,z)\subset\Gamma_2(t)$, où $\Gamma_1:[0,1]\rightrightarrows E$ est une multi-application Pettis uniformément intégrable et $\Gamma_2:[0,1]\rightrightarrows E$ est une multi-application intégrablement bornée.

Les inclusions différentielles du second ordre avec des conditions aux limites en trois points avec somme de deux perturbations ont été étudiées dans la littérature, par exemple dans [19] a été étudiée l'inclusion différentielle de la forme

$$\ddot{u}(t)\in F(t,u(t),\dot{u}(t))+H(t,u(t),\dot{u}(t)),$$

où $F : [0,1] \times E \times E \rightrightarrows E$ est une multi-application à valeurs convexes compactes Lebesgue-measurable sur $[0,1]$ et semi continue supérieurement sur $E \times E$ et H est une multi-application à valeurs non vides fermées, telle que H est $\mathcal{L}([0,1]) \otimes \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(E)$-mesurable et semi continue inférieurement sur $E \times E$, et $F(t,x,y) \subset \Gamma_1(t), H(t,x,y) \subset \Gamma_2(t)$ dans le cas Γ_1, Γ_2 sont intégrablement bornées. La même inclusion a été étudiée par Azzam et Boutana [12] avec les mêmes conditions sur F et H mais Γ_1, Γ_2 sont scalairement Pettis uniformément intégrables.

L'existence de solutions pour les problèmes du second ordre avec retard ont fait l'objet de nombreux travaux [17, 33, 35, 36, 52, 65]. Par exemple, dans [17], les auteurs ont étudié dans un espace de Banach séparable, l'existence de solutions pour l'inclusion différentielle avec retard de la forme

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) \in F(t, u(t), u(h(t)), \dot{u}(t)), \quad p.p.\ t \in [0,1] \\ u(t) = \varphi(t), \quad \forall t \in [-r, 0] \\ u(0) = 0; \quad u(\theta) = u(1). \end{cases}$$

Le résultat de cette section a fait l'objet d'une publication dans Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations [14].

Le quatrième chapitre, traite l'existence de solutions pour une inclusion différentielle du second ordre gouvernée par un opérateur maximal monotone, avec la somme d'une perturbation univoque et d'une perturbation multivoque de la forme

$$(\mathcal{P}_{f,F}) \begin{cases} -\dfrac{du}{dt}(t) \in A(t)u(t) + f(t, u(t)) + F(t, u(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0,T]; \\ u(0) = u_0 \in D(A(0)), \end{cases}$$

dans un espace de Hilbert séparable H, où pour chaque $t \in [0,T]$, $A(t) : D(A(t)) \subset H \rightrightarrows H$ et un opérateur maximal monotone et l'application $t \mapsto A(t)$ est à variation absolument continue, au sens de la pseudo-distance de Vladimirov [82].

Nous étudions le problème où $f : [0,T] \times H \to H$ est une aplication univoque, de Carathéodory, et vérifie une certaine condition de Lipschitz, tandis que $F : [0,T] \times H \rightrightarrows H$ est une perturbation multivoque mesurable à valeurs non vides compactes et est semi-continue mixte au sens de Tolstonogov [81].

Dans la littérature se trouvent plusieurs résultats concernant les inclusions différentielles du premier ordre régies par des opérateurs maximaux monotones dépendant ou non du temps avec diverses classes de perturbations voir par exemple [19, 34, 39, 40, 69].

Aussi bien, des résultats d'existence pour des problèmes avec perturbations semicontinues mixtes dans le cadre de dimension finie ont été établis, voir par exemple [18, 19, 54, 62, 81].

Dans la première section de ce chapitre, nous présentons un résultat d'existence et d'unicité d'une solution absolument continue du problème

$$(\mathcal{P}_{f,h}) \begin{cases} -\dfrac{du}{dt}(t) \in A(t)u(t) + f(t,u(t)) + h(t) \quad \text{p.p. } t \in [0,T]; \\ u(0) = u_0 \in D(A(0)). \end{cases}$$

où $h : [0,T] \to H$ est une application bornée dans $L^2([0,T],H)$.

En utilisant ce résultat, nous présentons, dans la deuxième partie de ce chapitre, l'existence de solution absolument continue pour l'inclusion d'évolution $(\mathcal{P}_{f,F})$.

Comme application de ce résultat, on termine par un Théorème d'existence de solutions pour le problème de la rafle convexe de la forme

$$\begin{cases} -\dfrac{du}{dt}(t) \in N_{C(t)}(u(t)) + f(t,u(t)) + F(t,u(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0,T]; \\ u(t) \in C(t), \quad \forall t \in [0,T]; \\ u(0) = u_0 \in C(0). \end{cases}$$

Ici, $C : [0,T] \to H$ est une application absolument continue à valeurs fermées convexes, $N_{C(t)}(.)$ est le cône normal à $C(t)$. Les résultats du quatrième chapitre ont été acceptés pour publication dans Journal of Nonlinear and Convex Analysis [13].

Notations

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long de cette thèse.

Soient E un espace de Banach, E' son dual topologique, $\langle ., . \rangle$ leur produit de dualité, et $\|.\|$ la norme de E.

On note par :

$\sigma(E, E')$ la topologie faible sur E.

E_σ l'espace de Banach E muni de la topologie faible.

$\tau(E', E)$ la topologie de Mackey.

$\overline{B}_E$ la boule unité fermée de E.

Pour tout sous ensemble A de E on note par $\overline{A}$ la fermeture de A.

$co(A)$ l'enveloppe convexe de A et $\overline{co}(A)$ son enveloppe convexe fermée.

$\delta(., A)$ la fonction indicatrice de A, définie par

$$\delta(x, A) = \begin{cases} 0 & si \quad x \in A; \\ +\infty & si \quad x \notin A. \end{cases}$$

$\delta^*(., A)$ la fonction polaire de $\delta(., A)$, appelée aussi fonction d'appui de A, définie sur E' par

$$\delta^*(x', A) = \sup_{x \in A} \langle x', x \rangle, \quad \forall x' \in E'.$$

Notons que, si A est un convexe fermé de E, nous avons la relation suivante

$$d(x, A) = \sup_{x' \in \bar{B}'_E} \big[\langle x', x \rangle - \delta^*(x', A) \big], \quad \forall x \in E \tag{1}$$

avec
$$d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|,$$
est la distance du point x à l'ensemble A.
$\mathbf{1}_A$ la fonction caractéristique de A, définie par
$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A; \\ 0 & si \quad x \notin A. \end{cases}$$
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, on note par $\mathcal{L}(I)$, la tribu de Lebesgue sur I.
λ ou dt la mesure de Lebesgue.
$\mathbf{L}^p_E(I)$ ou $\mathbf{L}^p(I, E)$ $(p \in [1, +\infty[)$ l'espace de Banach des applications définies sur I à valeurs dans l'espace de Banach E mesurables et telles que $\displaystyle\int_I \|u(t)\|^p dt < +\infty$, muni de la norme
$$\|u(.)\|_p = \left(\int_I \|u(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$
$\mathbf{L}^\infty_E(I)$ ou $\mathbf{L}^\infty(I, E)$ l'espace des applications $u : I \to E$ essentiellement bornées sur E
$\mathbf{C}_E(I)$ ou $\mathbf{C}(I, E)$ l'espace de Banach de toutes les applications continues $u : I \to E$, muni de la norme sup qu'on note $\|.\|_\mathbf{C}$.
Soit $u \in \mathbf{C}_E(I)$ une fonction absolument continue, on note par $\dot{u}(t)$ la dérivée de u au point t, i.e., $\dot{u}(t) = \dfrac{du}{dt}(t)$.
$\mathbf{C}^1_E(I)$ ou $\mathbf{C}^1(I, E)$ l'espace de Banach des applications continument différentiables $u : I \to E$, muni de la norme $\|u(\cdot)\|_{\mathbf{C}^1} = \max\{\|u(\cdot)\|_\mathbf{C}, \|\dot{u}(\cdot)\|_\mathbf{C}\}$.
$\mathbf{P}^1_E(I)$ l'espace de toutes les applications Pettis intégrables définies sur I à valeurs dans E.
$W^{2,1}_{B,E}(I)$ l'espace de toutes les applications $u \in \mathbf{C}_E(I)$ ayant une dérivée première absolument continue et une dérivée seconde faible dans $\mathbf{L}^1_E(I)$.
$W^{2,1}_{P,E}(I)$ l'espace de toutes les applications $u \in \mathbf{C}_E(I)$ ayant une dérivée première absolument continue et une dérivée seconde faible dans $\mathbf{P}^1_E(I)$.
Soit $f : E \to \mathbb{R}$, on note par $epi(f)$, l'épigraphe de f défini par
$$epi(f) = \{(x, r) \in E \times \mathbb{R}; \;\; f(x) \leq r\}.$$
$\mathcal{P}_f(X)$ l'ensemble des parties fermées d'un ensemble X.
$\mathcal{P}_c(X)$ l'ensemble des parties compactes de X.
$\limsup\limits_{n \to \infty} A_n$ l'ensemble des points d'accumulation des suites (x_n) telles que $x_n \in A_n$.
S_Γ l'ensemble des sélections mesurables de la multi-application Γ.
S^1_Γ l'ensemble des sélections Bochner intégrables de la multi-application Γ.
S^{Pe}_Γ l'ensemble des sélections Pettis intégrables de la multi-application Γ.
$W^{1,2}(I, H)$ l'espace de toutes les applications u définies sur I à valeurs dans l'espace de Hilbert H, absolument continue ayant une dérivée première $\dot{u} \in \mathbf{L}^2_H(I)$.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons des notions et résultats de base qui nous seront utiles pour la démonstration de nos théorèmes principaux.

1.1 Multi-applications et sélections

Pour une étude détaillée des multi-applications et leurs sélections on peut se référer à [5, 7, 8, 37].

1.1.1 Définitions

Définition 1.1.1 *[8] Soient X, Y deux ensembles non vides. Une multi-application (ou application multivoque) F définie sur X à valeurs dans Y est une application qui associe à chaque élément $x \in X$ un sous ensemble $F(x)$ de Y.*

Il y a dans la littérature plusieurs notations mais nous allons adopter la suivante

$$F : X \rightrightarrows Y.$$

Le domaine, le graphe et l'image (dite aussi le rang) de la multi-application $F : X \rightrightarrows Y$ *sont donnés respectivement par*

$$dom(F) = \Big\{ x \in X : \ F(x) \neq \emptyset \Big\}.$$

$$gph(F) = \Big\{ (x, y) \in X \times Y : \ x \in dom(F), y \in F(x) \Big\}.$$

$$\mathcal{R}(F) = Im(F) = \bigcup_{x \in dom(F)} F(x).$$

Définition 1.1.2 *[8] Soient* A, B *deux sous ensembles d'un espace métrique* (X, d), *l'écart entre* A *et* B *est défini par*

$$e(A, B) = \sup_{a \in A} d(a,\ B),$$

avec

$$d(a,\ B) = \inf_{b \in B} d(a,\ b),$$

et la distance de Hausdorff entre A *et* B *est définie par*

$$\mathcal{H}(A, B) = \max(e(A, B), e(B, A)).$$

Notons que $\mathcal{P}_f(X)$ *muni de la distance de Hausdorff* $\mathcal{H}$ *est un espace métrique.*

Définition 1.1.3 ***(Topologie de Mackey)****[37]*
On note par $\tau^w_{co}(E)$ *la topologie de la convergence uniforme sur les sous ensemble convexes faiblement compacts de* E.
Restreinte à E', *cette topologie est appelée topologie de Mackey et notée* $\tau(E', E)$

1.1.2 Mesurabilité des multi-applications

Définition 1.1.4 *Soit* (Ω, Σ) *un espace mesurable,* X *un espace métrique et* $F : \Omega \rightrightarrows X$. *On dit que* F *est* Σ*-mesurable où simplement mesurable si pour tout ouvert* V *de* X

$$F^{-1}(V) = \{t \in \Omega : \ F(t) \cap V \neq \emptyset\} \in \Sigma.$$

Théorème 1.1.1 *[37]*
Soient (Ω, Σ) *un espace mesurable,* E *un espace de Banach séparable. Soient* $F : \Omega \times E \rightrightarrows E$ *une multi-application mesurable et* $u : \Omega \to E$ *une application* Σ*-mesurable. Alors la multi-application* $t \mapsto F(t, u(t))$ *est* Σ*-mesurable.*

Proposition 1.1.1 *[37]*
Soient (Ω, Σ) *un espace mesurable,* X *un espace métrique séparable et soit* $F : \Omega \rightrightarrows X$ *une multi-application. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*
(i) F *est* Σ*-mesurable ;*
(ii) *pour chaque* $x \in X$*, la fonction*

$$\begin{array}{rcl} g_x : \Omega & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & g_x(t) = d(x,\, F(t)), \end{array}$$

est Σ*-mesurable.*

Théorème 1.1.2 *[37]*
Soient (Ω, Σ) *un espace mesurable,* X *et* Y *deux espace métriques séparables. Soient* $\Gamma_1 : \Omega \rightrightarrows X$ *et* $\Gamma_2 : \Omega \rightrightarrows Y$ *deux multi-applications* Σ*-mesurables, alors la multi-application* $\Gamma : \Omega \rightrightarrows X \times Y$ *définie par* $\Gamma(t) = \big(\Gamma_1(t) \times \Gamma_2(t)\big)$ *est* Σ*-mesurable.*

Théorème 1.1.3 *Soient* (Ω, Σ) *un espace mesurable,* E *un espace de Banach séparable et* $\Gamma_i : \Omega \rightrightarrows E$ *une famille de multi-applications* Σ*-mesurables. Si* I *est fini, alors la multi-application* Γ *définie par* $\Gamma(t) = \sum_{i \in I} \Gamma_i(t)$ *est* Σ*-mesurable.*

Démonstration. On va démontrer ce théorème pour $I = \{1, 2\}$. Soit V un ouvert de E, alors

$$\begin{array}{rcl} \Gamma^{-1}(V) & = & \{t \in \Omega :\ \Gamma(t) \cap V \neq \emptyset\} \\ & = & \{t \in \Omega :\ \big(\Gamma_1(t) + \Gamma_2(t)\big) \cap V \neq \emptyset\}. \end{array}$$

Posons

$$W = \{(y_1, y_2) \in E \times E : y_1 + y_2 \in V\}.$$

Remarquons que $W = h^{-1}(V)$ où

$$\begin{array}{rcl} h : E \times E & \to & E \\ (y_1, y_2) & \mapsto & h(y_1, y_2) = y_1 + y_2 \end{array}$$

est une application continue.
Comme V est un ouvert de E alors W est un ouvert de $E \times E$. Par suite et grâce au Théorème 1.1.2

$$\begin{array}{rcl} \Gamma^{-1}(V) & = & \{t \in \Omega :\ \Gamma(t) \cap V \neq \emptyset\} \\ & = & \{t \in \Omega :\ \big(\Gamma_1(t) \times \Gamma_2(t)\big) \cap W \neq \emptyset\} = (\Gamma_1 \times \Gamma_2)^{-1}(W) \in \Sigma, \end{array}$$

on conclut donc que Γ est Σ-mesurable. ∎

Définition 1.1.5 *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On appelle sélection de F toute application $f : X \to Y$ vérifiant*

$$f(x) \in F(x), \quad \forall\, x \in X.$$

Théorème 1.1.4 ***(Théorème de sélection mesurable)****[37]*
Soient (Ω, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique complet séparable et $F : \Omega \rightrightarrows X$ une multi-application Σ-mesurable à valeurs fermées. Alors F admet au moins une sélection mesurable.

Définition 1.1.6 *Soient (Ω, Σ) un espace mesurable, X et Y deux espaces métriques. Soit $\varphi : \Omega \times X \to Y$. On dit que φ est une application de Carathéodory si*

$$\begin{aligned} \varphi_x : \Omega &\to Y \\ t &\mapsto \varphi_x(t) = \varphi(t, x) \end{aligned}$$

est Σ-mesurable pour chaque $x \in X$, fixé et l'application

$$\begin{aligned} \varphi_t : X &\to Y \\ x &\mapsto \varphi_t(x) = \varphi(t, x) \end{aligned}$$

est continue sur X pour chaque $t \in \Omega$, fixé.

Lemme 1.1.1 *[37]*
Soient (Ω, Σ) un espace mesurable, X, Y deux espaces métriques séparables complets et soit $\varphi : \Omega \times X \to Y$ une application de Carathéodory. Alors φ est $\Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$-mesurable.

Théorème 1.1.5 *[37]*
Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré avec Σ μ-complète et μ une mesure σ-finie. Soient E un espace de Banach séparable muni de la norme $\|.\|$, $f : \Omega \to E$ et $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$ deux applications mesurables. Alors
(1) $t \mapsto \overline{B}_E(f(t), \rho(t))$ est une multi-application Σ-mesurable.
(2) Si la multi-application $\Gamma : \Omega \rightrightarrows E$ à valeurs non vides fermées est mesurable à valeurs compactes, alors les multi-applications

$$t \mapsto G_\varepsilon(t) = \big\{x \in \Gamma(t) : \|f(t) - x\| < \varepsilon + d(f(t), \Gamma(t))\big\}$$

et

$$t \mapsto \Xi(t) = \big\{x \in \Gamma(t) : \|f(t) - x\| = d(f(t), \Gamma(t))\big\}$$

sont Σ-mesurables à valeurs non vides (ε étant un réel positif).

Lemme 1.1.2 *[37] Soient E un espace de Banach séparable, E' son dual topologique muni de la topologie de Mackey. Soit f une fonction convexe sur E', finie et continue au point $x'_0 \in E'$. Soit D un sous ensemble dense dans E'. Alors*

$$\inf\{f(y') : y' \in E'\} = \inf\{f(x') : x' \in D\}.$$

Lemme 1.1.3 *[37] Soient E un espace de Banach séparable, E' son dual topologique, $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans E' pour la topologie de Mackey, et K un sous ensemble convexe fermé faiblement localement compact de E. Alors*

$$K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in E : \langle e'_n, x\rangle \le \delta^*(e'_n, K)\}.$$

Proposition 1.1.2 *[37] Soit E un espace localement convexe, (T, Σ, ν) un espace mesuré, $\Gamma : T \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs fermées convexes faiblement localement compactes. Soit $\sigma : T \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs fermées convexes .*
Si $\forall x' \in E', \delta^*(x', \sigma(t)) \le \delta^*(x', \Gamma(t))$, ν.p.p, alors $\sigma(t) \subset \Gamma(t)$, p.p.

Corollaire 1.1.1 *[37] Soient E un espace localement convexe muni de la topologie faible $\sigma(E, E')$, E' son dual topologique muni de la topologie de Mackey $\tau(E', E)$, et C un sous ensemble non vide fermé convexe. Alors les propriétés suivantes sons équivalentes :*
a) Il existe $y'_0 \in E'$ tel que $\delta^*(., C)$ est finie et continue en y'_0.
b) C est localement compact.
c) Il existe $y'_0 \in E'$ tel que pour tout $b \in \mathbb{R}$; $\{y \in C : \langle y'_0, y\rangle \ge b\}$ est compact.

Définition 1.1.7 *Soit (Ω, Σ) un espace mesurable et E un espace de Banach séparable. Soit $F : \Omega \rightrightarrows E$ une multi-application. On dit que F est scalairement mesurable si pour tout $x' \in E'$, l'application $t \mapsto \delta^*(x', F(t))$ est mesurable.*

Proposition 1.1.3 *Soit (Ω, Σ) un espace mesurable et E un espace de Banach séparable. Si $F : \Omega \rightrightarrows E$ est une multi-application à valeurs non vides convexes faiblement compactes, alors $F(.)$ est mesurable si et seulement si elle est scalairement mesurable.*

Proposition 1.1.4 *Soit (Ω, Σ) un espace mesurable et E un espace de Banach séparable. Si $F_1, F_2 : \Omega \rightrightarrows E$ sont deux multi-applications à valeurs non vides convexes faiblement compactes et scalairement mesurables, alors $t \mapsto (F_1 \cap F_2)(t)$ est scalairement mesurable.*

1.1.3 Continuité des multi-applications

Les résultats suivants sont pris des références [5, 7, 8, 25, 37, 49, 53, 68].

Définition 1.1.8 *Soient X, Y deux espaces topologiques, et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application.*
1. *On dit que F est semicontinue supérieurement (s.c.s) au point $x_0 \in X$, si pour tout ouvert U de Y tel que $F(x_0) \subset U$, il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 dans X tel que $F(V_{x_0}) \subset U$.*
On dit que F est s.c.s sur X si elle est s.c.s en tout point $x_0 \in X$.
2. *On dit que F est semicontinue inférieurement (s.c.i) au point $x_0 \in X$ si pour tout ouvert U de Y tel que $F(x_0) \cap U \neq \emptyset$, il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 dans X tel que $F(x) \cap U \neq \emptyset$, pour tout $x \in V_{x_0}$.*
On dit que F est s.c.i sur X, si elle est s.c.i en tout point $x_0 \in X$.

Définition 1.1.9 *On dit que F est continue au point x_0 si et seulement si elle est s.c.s et s.c.i au point x_0, et F est continue sur X si et seulement si elle est s.c.s et s.c.i sur X.*

Proposition 1.1.5 *Soient X, Y deux espaces topologiques. Une multi-application $F : X \rightrightarrows Y$ à valeurs non vides est semicontinue supérieurement si et seulement si l'image inverse $F^{-1}(C) := \{x \in X : F(x) \cap C \neq \emptyset\}$ est fermée pour tout sous ensemble fermé C de Y, et elle est semicontinue inférieurement si et seulement si pour tout sous ensemble ouvert G de Y, $F^{-1}(G)$ est aussi ouvert dans X.*

Théorème 1.1.6 *[68]*
Soient X, Y deux espaces métriques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. Alors F est semicontinue inférieurement si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ de points de X convergeant vers x_0 et pour tout $y_0 \in F(x_0)$ il existe une suite $(y_n)_n$ telle que $y_n \in F(x_n)$ et $(y_n)_n$ converge vers y_0.

Définition 1.1.10 *[68]*
Soient X, Y deux espaces métriques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On dit que F est $\mathcal{H}$-semicontinue inférieurement au point $x_0 \in X$, si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \ F(x_0) \subset V\big(F(x), \varepsilon\big), \quad \forall x \in \mathbf{B}(x_0, \delta),$$

où

$$V\big(F(x), \varepsilon\big) = \{y \in Y : d(y, F(x)) \leq \varepsilon\}.$$

Théorème 1.1.7 *[68]*
Soient X, Y deux espaces métriques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs compactes. Alors F est $\mathcal{H}$-semicontinue inférieurement si et seulement si F est semicontinue inférieurement.

Théorème 1.1.8 *Soient X, Y deux espaces topologiques, soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application s.c.s à valeurs non vides fermées. Alors le graphe de F est fermé dans $X \times Y$.*

Proposition 1.1.6 *Soient X un espace de Banach, Y un espace de Banach compact. Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs non vides fermées. Si le graphe de F est fermé alors F est s.c.s.*

Théorème 1.1.9 *(**Théorème de fermeture**)*
Soient Y un espace de Banach séparable, X un espace topologique et Φ une multi-application définie sur $[0,T] \times X$ à valeurs non vides convexes compactes dans Y et telle que pour tout $t \in [0,T]$ fixé, $\Phi(t,.)$ est s.c.s.
Soient $(x_n(.)), x(.)$ des applications définies sur $[0,T]$ à valeurs dans X et $(y_n(.)), y(.)$ des applications intégrables définies sur $[0,T]$ à valeurs dans Y.
Supposons que
(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n(t) = x(t)$, p.p. sur $[0,T]$,
(b) (y_n) converge vers y $\sigma(\mathbf{L}^1([0,T],Y), \mathbf{L}^\infty([0,T],Y'))$,
(c) $y_n(t) \in \Phi(t, x_n(t))$, p.p. sur $[0,T]$.
Alors $y(t) \in \Phi(t, x(t))$, p.p. sur $[0,T]$.

Définition 1.1.11 *(**Ensemble décomposable**)[68]*
Soit E un espace de Banach. L'ensemble $K \subset \mathbf{L}^1_E([0,T])$ est dit décomposable, si pour tous $u, v \in K$ et pour chaque ensemble mesurable $J \subset [0,T]$ on a

$$\mathbf{1}_J \,.u + \mathbf{1}_{[0,T]\setminus J} \,.v \in K.$$

Théorème 1.1.10 *(**Théorème de sélection continue**)[25, 53]*
Soient X un espace métrique séparable, E un espace de Banach et $F : X \rightrightarrows \mathbf{L}^1_E([0,T])$ une multi-application semi-continue inférieurement à valeurs fermées décomposables. Alors F admet au moins une sélection continue.

Proposition 1.1.7 *(**Bressan-Colombo**)[25]*
Soient X un espace métrique, E un espace de Banach, (Ω, Σ, μ) un espace mesuré et $G : X \rightrightarrows \mathbf{L}^1_E(\Omega)$ une multi-application à valeurs fermées décomposables, semi-continue inférieurement. Supposons que $g : X \to \mathbf{L}^1_E(\Omega)$ et $\varphi : X \to \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}^+}(\Omega)$ sont deux applications continues telles que, pour chaque $x \in X$, l'ensemble

$$H(x) = \{u \in G(x); \|u(t) - g(x)(t)\|_E < \varphi(x)(t) \ \mu.p.p\}$$

est non vide. Alors la multi-application $H : X \rightrightarrows \mathbf{L}^1_E(\Omega)$ est semi-continue inférieurement à valeurs décomposables.

Théorème 1.1.11 ***(Théorème du point fixe de Schauder-Tikhonov)****[49]*
Soient X un espace vectoriel topologique localement convexe, S un sous ensemble non vide convexe compact de X et $f : S \to S$ une application continue. Alors f admet un point fixe dans S.

Théorème 1.1.12 ***(Théorème de Kakutani-Ky Fan)****[68]*
Soient X un espace topologique séparé localement convexe, K un sous ensemble non vide convexe compact de X et $F : K \rightrightarrows K$ une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs non vides convexes fermées, alors F admet un point fixe dans K, c'est à dire il existe $x \in K$ tel que $x \in F(x)$.

Comme corollaire du théorème précédent, on obtient une version faible du théorème du point fixe.

Théorème 1.1.13 ***(Corollaire du théorème de Kakutani-Ky Fan)***
Soit E un espace de Banach, K un sous ensemble non vide convexe faiblement compact de E et $F : K \rightrightarrows K$ une multi-application faiblement-faiblement semi-continue supérieurement à valeurs non vides convexes faiblement compactes, alors F admet un point fixe dans K.

Ceci est due au fait que $(E, \sigma(E, E'))$ est un espace topologique séparé localement convexe.

1.2 Points extrémaux

Dans ce qui suit, nous présentons la notion de points extrémaux (voir [71]).

Définition 1.2.1 *Soit X un espace vectoriel et $K \subset X$. On dit que $x \in K$ est un point extrémal à K si $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$, avec $x_1, x_2 \in K$ et $\alpha \in]0,1[$, implique $x_1 = x_2$.*
Si K est convexe, un point $x \in K$ est extrémal à K si x ne puisse être intérieur à un segment de droite inclus dans K.
On note par $ext(K)$, l'ensemble des points extrémaux à K.

Théorème 1.2.1 ***(Théorème de Krein-Milman)***
Soit X un espace topologique localement convexe. Alors tout ensemble convexe compact K de X admet au moins un point extrémal, i.e., $ext(K) \neq \emptyset$.
De plus K est l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux.

1.3 Quelques résultats de convergence

Théorème 1.3.1 ***(Théorème de la convergence dominée de Lebesgue)[45]***
Soient (Ω, Σ, μ) un espace mesuré, E un espace de Banach, soit $1 \leq p < +\infty$ et (f_n) une suite de fonctions mesurables définies sur Ω à valeurs dans E, si la suite (f_n) vérifie

(i) $f_n \to f$ *μ.p.p sur Ω,*

(ii) il existe une fonction positive $g \in \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$\|f_n(t)\| \leq g(t)$ *μ.p.p.*

Alors $f_n \to f$ dans $\mathbf{L}^p(\Omega, E)$. En particulier, dans le cas $p = 1$,

$$\int_\Omega f_n d\mu \to \int_\Omega f d\mu.$$

Lemme 1.3.1 ***(Lemme de Fatou)***
Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré. Pour toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions mesurables sur Ω à valeurs dans $[0, \infty]$, la limite inférieure (resp.supérieure) de la suite (f_n) est mesurable et l'on a :

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

(resp.

$$\int \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int f_n d\mu).$$

L'égalité n'est en général pas vérifiée.

Théorème 1.3.2 *Soit φ une fonction à valeurs réelles, définie sur $V_s \times (E \backslash A)$, où V_s est un voisinage d'un point $s \in \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^n$ et $A \subset E$ est un sous ensemble μ-négligeable. Si pour chaque $t \in V_s$, la fonction $x \mapsto \varphi(t, s)$ est μ-intégrable sur E et si de plus, sur $V_s \times (E \backslash A)$, la fonction φ admet une dérivée partielle par rapport à t vérifiant l'inégalité*

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, s)\right| \leq g(s),$$

où g est μ-intégrable est indépendante de t, alors la fonction

$$t \mapsto \int \varphi(t, x) d\mu(x),$$

est dérivable au point s et on a

$$\frac{d}{dt} \int \varphi(s, x) d\mu = \int \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, x) d\mu(x).$$

1.4 Quelques résultats de compacité

Théorème 1.4.1 ***(Théorème de Dunford)***[46]
Soient (Ω, Σ, μ) un espace mesuré avec μ finie et E un espace de dimension finie. Alors un sous ensemble A de $\mathbf{L}^1_E(\Omega)$ est ***faiblement relativement compact*** *si et seulement si A est borné et uniformément-intégrable, c'est à dire*

$$\lim_{\mu(\Omega)\to 0} \int_{\Omega} \mid f \mid d\mu = 0, \quad \forall f \in A.$$

Théorème 1.4.2 ***(Théorème d'Ascoli-Arzelà)***[5]
Soient J un espace métrique compact, Y un espace métrique complet, et H un sous ensemble de $\mathbf{C}(J, Y)$, muni de la topologie de la convergence uniforme. Alors H est relativement compact si et seulement si H est équicontinu et $H(x)$ est relativement compact, avec

$$H(x) = \{f(x); f \in H\}.$$

Théorème 1.4.3 ***(Corollaire du théorème d'Ascoli-Arzelà)***
Soient J un ensemble compact de $\mathbb{R}$, E un espace de dimension finie et soit (f_n) une suite de fonctions absolument continues définies sur J à valeurs dans E satisfaisant les conditions suivantes.
i) $\forall t \in J$, $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est un sous ensemble relativement compact dans E.
ii) il existe une fonction à valeurs réelles positives $h \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}(J)$ tel que $\|\dot{f}_n(t)\| \leq h(t)$, p.p sur J.
Alors il existe une sous suite de $(f_n)_n$ (qu'on note aussi (f_n)) qui converge vers une fonction absolument continue $f : J \to E$ au sens suivant :
(1) $(f_n)_n$ converge uniformément vers f.
(2) $(\dot{f}_n)_n$ converge faiblement vers $\dot{f}$ dans $\mathbf{L}^1_E(J)$, c'est à dire $(\dot{f}_n)$ converge vers $\dot{f}$ $\sigma(\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_E)$.

Théorème 1.4.4 ***(Théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki)***[68]
Soit E un espace de Banach. Alors la boule unité fermée de E' est compacte pour la topologie $\sigma(E', E)$.

Théorème 1.4.5 ***(Théorème d'Eberlein-Smûlian)***[68]
Soit S un sous ensemble d'un espace de Banach E. Alors les deux proprietés suivantes sont équivalentes :
i) S est faiblement (relativement) séquentiellement compact.
ii) S est faiblement (relativement) compact.

Théorème 1.4.6 ***(Théorème de Smûlian)***
Soit S un sous ensemble d'un espace de Banach E, si S est relativement faiblement compact, alors pour chaque $x \in \overline{S}^w$ (fermeture faible de S) il existe une suite (x_n) d'éléments de S convergeant faiblement vers X.

Théorème 1.4.7 ***(Théorème de Banach-Mazur)***
Soit (x_n) une suite d'élémentes de E convergeant faiblement vers x. Alors, il existe une suite (z_n) (où z_n est une combinaison convexe des éléments x_n,x_{n+1},...) convergeant fortement vers x.

Chapitre 2

Résultats d'existence et relaxation associés à une inclusion différentielle du second ordre avec des conditions aux limites en m-points

2.1 Introduction

Ce chapitre est consitué de cette introduction et de deux sections, dans la deuxième, nous présentons un résultat d'existence pour une inclusions différentielle du second ordre avec des conditions aux limites en m-points ($m > 3$) dans un espace de Banach séparable

E, de la forme

$$(\mathcal{P}_F)\begin{cases}\ddot{u}(t)+\gamma\dot{u}(t)\in F(t,u(t),\dot{u}(t)) \;\; p.p.t\in[0,1]\\ u(0)=0; \quad u(1)=\displaystyle\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i u(\eta_i),\end{cases}$$

avec $0<\eta_1<\eta_2<...<\eta_{m-2}<1$, $\alpha_i\in\mathbb{R}$ $(i=1,2,...,m-2)$, $\gamma>0$,
et $F:[0,1]\times E\times E\rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs fermées non vides, $\mathcal{L}([0,1])\otimes\mathcal{B}(E)\otimes\mathcal{B}(E)$-mesurable et vérifie une condition de pseudo-Lipschitziété.
Le problème d'existence avec des conditions aux limites en trois points dans un espace de Banach séparable, a été étudié par Azzam et Bounama [11] quand F est à valeurs fermées vérifiant la condition de Lipschitz. Une généralisation de ce problème au cas où F est à valeurs fermées vérifiant la condition de pseudo-Lipschitziété a été étudiée par Azzam, Makhlouf et Thibault [21].
Le problème $(\mathcal{P}_F)$ a été étudié par Castaing et Truong [30] quand F est à valeurs fermées vérifiant la condition de Lipschitz. Donc notre résultat généralise ce dernier au cas d'une perturbation pseudo-Lipschitzienne.

Dans la troisième section, nous nous intéressons à l'étude, en dimension finie, de l'existence de solutions pour l'inclusion différentielle relaxée

$$(\mathcal{P}_e)\begin{cases}\ddot{u}(t)+\gamma\dot{u}(t)\in ext\big(F(t,u(t),\dot{u}(t))\big), \quad \text{p.p. } t\in[0,1]\\ u(0)=0; \quad u(1)=\displaystyle\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i u(\eta_i),\end{cases}$$

et nous démontrons que l'ensemble des solutions du problème relaxé $(\mathcal{P}_e)$, est dense dans l'ensemble des solutions du problème $(\mathcal{P}_F)$, quand F est Lipschitzienne.

2.2 Résultat d'existence de solutions pour une inclusion différentielle du second ordre avec des conditions aux limites en m-points et une perturbation pseudo-Lipschitzienne

Dans cette section nous présentons un résultat d'existence pour une inclusions différentielle du second ordre avec des conditions aux limites en m-points $(m>3)$ dans un espace de Banach séparable E, de la forme

$$(\mathcal{P}_F)\begin{cases}\ddot{u}(t)+\gamma\dot{u}(t)\in \mathrm{F}(t,u(t),\dot{u}(t)) \;\; p.p.t\in[0,1]\\ u(0)=0; \quad u(1)=\sum\limits_{i=1}^{m-2}\alpha_i u(\eta_i),\end{cases}$$

avec $0<\eta_1<\eta_2<...<\eta_{m-2}<1$, $\alpha_i\in\mathbb{R}$ $(i=1,2,...,m-2)$, $\gamma>0$
et $F:[0,1]\times E\times E\rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs fermées non vides, $\mathcal{L}([0,1])\otimes\mathcal{B}(E)\otimes\mathcal{B}(E)$-mesurable satisfaisant la condition de pseudo-Lipschitziété suivante :

$$v\in F(t,x,y)\Rightarrow d(v,F(t,x',y'))\leq(k_1(t)+\beta_1\parallel v\parallel)\parallel x-x'\parallel+(k_2(t)+\beta_2\parallel v\parallel)\parallel y-y'\parallel,$$

avec $\beta_1,\beta_2\geq 0$ et $k_1(.),k_2(.)\in\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}_+}([0,1])$.

Nous rappelons au début quelques résultats préliminaires. On commence par une proposition où nous dounons quelques propriétés d'une fonction de type Green associée aux données m et γ (voir [30] pour plus de détails). Cette dernière nous permet d'établir l'existence et l'unicité de solution dans $\mathbf{W}^{2,1}_E([0,1])$ de l'équation différentielle suivante

$$(\mathcal{P}_f)\begin{cases}\ddot{u}(t)+\gamma\dot{u}(t)=f(t) \;\; t\in[0,1]\\ u(0)=0; \quad u(1)=\sum\limits_{i=1}^{m-2}\alpha_i u(\eta_i).\end{cases}$$

avec $f\in\mathbf{L}^1_E([0,1])$ qui nous sera utile dans la preuve de notre résultat principal.

Considérons l'hypothèse suivante

(A) Soit $\gamma>0$, $m>3$ un nombre entier, $0<\eta_1<\eta_2<...<\eta_{m-2}<1$ et $\alpha_i\in\mathbb{R}$ $(i=1,2,...,m-2)$ satisfaisant la condition

$$\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i-1+\exp(-\gamma)-\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\exp(-\gamma\eta_i)\neq 0.$$

Proposition 2.2.1 *[30]*
Supposons (A) satisfaite. Soit E un espace de Banach séparable et soit $G:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{1}{\gamma}\Big(1-exp\big(-\gamma(t-s)\big)\Big)+\dfrac{\mu^*}{\gamma}\big(1-exp(-\gamma t)\big)\Psi(s), & 0\leq s\leq t\leq 1\\ \dfrac{\mu^*}{\gamma}\big(1-exp(-\gamma t)\big)\Psi(s), & 0\leq t\leq s\leq 1\end{cases}$$

où

$$\Psi(s)=\begin{cases}1-exp(-\gamma(1-s))-\sum\limits_{i=1}^{m-2}\alpha_i\Big(1-\exp\big(-\gamma(\eta_i-s)\big)\Big), & 0\le s\le\eta_1\\ 1-exp(-\gamma(1-s))-\sum\limits_{i=2}^{m-2}\alpha_i\Big(1-\exp\big(-\gamma(\eta_i-s)\big)\Big), & \eta_1\le s\le\eta_2\\ \dots & \\ 1-exp(-\gamma(1-s)), & \eta_{m-2}\le s\le 1\end{cases}$$

et

$$\mu^*=\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{m-2}\alpha_i-1+\exp(-\gamma)-\sum\limits_{i=1}^{m-2}\alpha_i\exp(-\gamma\eta_i)}.$$

Alors on a les résultats suivants

(1) Pour chaque $s\in[0,1]$ fixé, la fonction $G(.,s)$ est dérivable sur $[0,1]$ sauf sur la diagonale. Sa dérivée est donnée par

$$(\frac{\partial G}{\partial t})(t,s)=\begin{cases}exp\big(-\gamma(t-s)\big)+\mu^*exp(-\gamma t)\Psi(s), & 0\le s<t<1\\ \mu^*exp(-\gamma t)\Psi(s), & 0\le t<s\le 1.\end{cases}$$

(2) $G(.,.)$ et $\frac{\partial G}{\partial t}(.,.)$ vérifient

$$|G(t,s)|\le M_G \quad et \quad |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)|\le M_G \quad \forall(t,s)\in[0,1]\times[0,1],$$

où

$$M_G=max(\frac{1}{\gamma},1)\Big(1+|\mu^*|\big(1+\sum_{i=1}^{m-2}|\alpha_i|\big)\Big)\ge 1.$$

Proposition 2.2.2 *[30]*
Supposons (A) satisfaite. Soit E un espace de Banach séparable et soit $G:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$ la fonction définie dans la Proposition 2.2.1.

(1) Si $u\in\mathbf{W}_E^{2,1}([0,1])$ avec $u(0)=0$ et $u(1)=\sum\limits_{i=1}^{m-2}\alpha_i u(\eta_i)$, alors

$$u(t)=\int_0^1 G(t,s)\Big(\ddot{u}(s)+\gamma\dot{u}(s)\Big)ds, \quad \forall t\in[0,1];$$

(2) pour $f\in\mathbf{L}_E^1([0,1])$ et pour $u_f:[0,1]\to E$ définie par

$$u_f(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s)ds, \quad \forall t\in[0,1],$$

on a

(2i) $u_f(0) = 0$ *et* $u_f(1) = \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i u(\eta_i)$.

(2ii) La fonction $t \mapsto u_f(t)$ *est continue de* $[0,1]$ *dans* E*, i.e.,* $u_f \in \mathbf{C}_E([0,1])$.

(2iii) La fonction u_f *est dérivable sur* $[0,1]$ *et sa dérivée* $\dot{u}_f$ *est définie par*

$$\dot{u}_f(t) = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) f(s) ds.$$

(2vi) La fonction $\dot{u}_f$ *est scalairement dérivable, c'est-à-dire il existe une application* $\ddot{u}_f : [0,1] \to E$ *tel que, pour chaque* $x' \in E'$*, la fonction scalaire* $\langle x', \dot{u}_f(\cdot) \rangle$ *est p.p dérivable avec*

$$\frac{d}{dt}\langle x', \dot{u}_f(t) \rangle = \langle x', \ddot{u}_f(t) \rangle,$$

de plus

$$\ddot{u}_f(t) + \gamma \dot{u}_f(t) = f(t) \quad p.p.t \in [0,1].$$

Le résultat suivant est une application directe des propriétés de la fonction de Green donnée dans la Proposition 2.2.1.

Proposition 2.2.3 *[30]*
Supposons (A) satisfaite et soit $f \in \mathbf{L}^1_E([0,1])$. *Alors le problème* $(\mathcal{P}_f)$ *admet une solution unique dans* $\mathbf{W}^{2,1}_E([0,1]))$ *définie par*

$$u_f(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s) ds, \quad \forall t \in [0,1].$$

Le Lemme suivant est également nécessaire pour la démonstration de notre résultat de cette section.

Lemme 2.2.1 *(Lemme 2.1 dans [67]).*
On considère le système récursif des inégalités suivantes

$$q_{n+1} - q_n \leq r_{n+1}, \quad r_{n+1} \leq \xi_n r_n, \quad \xi_n = k + \beta q_n, \quad q_n \geq 0, \quad r_n \geq 0,$$

où k *et* β *sont des paramètres positifs.*
On suppose que les valeurs initiales q_1, r_1 *et* ξ_1 *sont données et vérifient*

$$\xi_1 \leq \lambda - \beta r_1 \frac{\lambda}{1-\lambda}$$

pour un certain $\lambda \in]0,1[$.
Soit (q_n, r_n, ξ_n) *les solutions du système récursif. Alors*

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n \leq \frac{r_1}{1-\lambda}.$$

Maintenant, nous sommes en mesure de donner notre résultat principal de cette section, qui est, l'existence de solutions dans $\mathbf{W}_E^{2,1}([0,1])$ pour l'inclusion différentielle de second ordre $(\mathcal{P}_F)$.

Théorème 2.2.1 *Supposons (A) satisfaite. Soit E un espace de Banach séparable et soit $F : [0,1] \times E \times E \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs fermées. Soit $g \in \mathbf{L}_E^1([0,1])$ et soit $u_g : [0,1] \to E$ l'application définie par*

$$u_g(t) = \int_0^1 G(t,s)g(s)ds, \quad \forall t \in [0,1].$$

On suppose pour $\rho \in]0, +\infty]$ fixé et pour

$$X_\rho = \{(t,x,y) \in [0,1] \times E \times E : \|x - u_g(t)\| < \rho; \|y - \dot{u}_g(t)\| < \rho\},$$

les hypothèses suivantes sont satisfaites sur X_ρ.
(H1) F est $\mathcal{L}([0,1]) \otimes \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(E)$-mesurable ;
(H2) Pour tout $t \in [0,1]$ fixé, $F(t,.,.)$ est pseudo-Lipschitzienne, c'est à dire, il existe $\beta_1, \beta_2 \geq 0$ et des fonctions positives $k_1(.), k_2(.) \in \mathbf{L}_\mathbb{R}^1([0,1])$, telle que pour chaque $v \in F(t,x,y)$ on a

$$d(v, F(t,x',y')) \leq (k_1(t) + \beta_1 \parallel v \parallel) \parallel x - x' \parallel + (k_2(t) + \beta_2 \parallel v \parallel) \parallel y - y' \parallel .$$

De plus, on suppose que
(H3) La fonction $t \mapsto d\big(0, F(t,0,0)\big)$ est intégrable.
On pose

$$r = M_G(1+\alpha)\int_0^1 d\big(g(s), F(s, u_g(s), \dot{u}_g(s)\big)ds, \quad q_1 = \|g\|_{\mathbf{L}_E^1},$$
$$k = M_G(1+\alpha)\|k_1 + k_2\|_{\mathbf{L}_\mathbb{R}^1}, \quad \beta = M_G(1+\alpha)(\beta_1+\beta_2), \quad \xi_1 = k + \beta q_1$$

où α est un paramètre positif.
On suppose que, pour un certain $\lambda \in]0,1[$,

$$\xi_1 \leq \lambda - \beta r \frac{\lambda}{1-\lambda}, \tag{2.1}$$

et

$$r < (1-\lambda)\rho. \tag{2.2}$$

Alors l'inclusion différentielle $(\mathcal{P}_F)$ admet au moins une solution $u \in W_E^{2,1}([0,1])$, avec

$$\|\ddot{u} + \gamma\dot{u} - g\|_{\mathbf{L}_E^1} < \rho$$

et

$$\|u\|_{\mathbf{C}^1} \leq M_G(\|g\|_{\mathbf{L}_E^1} + \rho).$$

Démonstration.

La preuve de notre théorème suit les idées de la preuve du théoreme 3.1 dans [18].

Etape 1. Dans cette étape, on va construire par récurrence, deux suites $(f_n(.))$ et $(u_{f_n}(.))$ vérifiant, pour tout $n \geq 1$, les relations suivantes

$$f_n \in \mathbf{L}^1_E([0,1]) \quad et \quad f_n(t) \in F(t, u_{f_{n-1}}(t), \dot{u}_{f_{n-1}}(t)) \quad p.p.t \in [0,1]; \tag{2.3}$$

$$\|f_n(t) - f_{n-1}(t)\| \leq (1+\alpha) d\big(f_{n-1}(t), F(t, u_{f_{n-1}}(t), \dot{u}_{f_{n-1}}(t)\big), \forall t \in [0,1]; \tag{2.4}$$

$$gph(u_{f_n}(.), \dot{u}_{f_n}(.)) = \Big\{(t, u_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t)) : t \in [0,1]\Big\} \subset X_\rho. \tag{2.5}$$

On pose $f_0 = g$ et $u_{f_0}(t) = \displaystyle\int_0^1 G(t,s) f_0(s) ds = u_g(t)$, pour tout $t \in [0,1]$, et on considère la multi-application $H_0 : [0,1] \rightrightarrows E$ définie par

$$H_0(t) = \Big\{v \in F(t, u_{f_0}(t), \dot{u}_{f_0}(t)) : \|v - f_0(t)\| \leq (1+\alpha) d\big(f_0(t), F(t, u_{f_0}(t), \dot{u}_{f_0}(t))\big)\Big\}.$$

Comme $F(., u_{f_0}(.), \dot{u}_{f_0}(.))$ est $\mathcal{L}([0,1])$-mesurable (voir Théorème 1.1.1), la multi-application H_0 est aussi mesurable à valeurs fermées non vides (voir Théorème 1.1.5). D'après le théorème d'existence de selection mesurable (Théorème 1.1.4), il existe une application mesurable $f_1 : [0,1] \to E$ telle que $f_1(t) \in H_0(t)$, pour tout $t \in [0,1]$. C'est à dire pour tout $t \in [0,1]$, $f_1(t) \in F(t, u_{f_0}(t), \dot{u}_{f_0}(t))$ et

$$\|f_1(t) - f_0(t)\| \leq (1+\alpha) d\big(f_0(t), F(t, u_{f_0}(t), \dot{u}_{f_0}(t))\big). \tag{2.6}$$

De plus, Nous avons pour tout $t \in [0,1]$

$$\|f_1(t)\| \leq \|f_1(t) - f_0(t)\| + \|f_0(t)\| \leq (1+\alpha) d\big(f_0(t), F(t, u_{f_0}(t), \dot{u}_{f_0}(t))\big) + \|f_0(t)\|,$$

avec $f_0 \in \mathbf{L}^1_E([0,1])$ et $t \mapsto d\big(f_0(t), F(t, u_{f_0}(t), \dot{u}_{f_0}(t))\big) \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1])$.

En effet, pour tout $t \in [0,1]$, $d(0, F(t,0,0)) = \inf\limits_{\xi \in F(t,0,0)} \|\xi\|$. Donc, $\forall \varepsilon > 0, \exists \xi_\varepsilon \in F(t,0,0)$ tel que $d(0, F(t,0,0)) \leq \|\xi_\varepsilon\| \leq d(0, F(t,0,0)) + \varepsilon$. Nous avons

$$\begin{aligned} d(g(t), F\big(t, u_g(t), \dot{u}_g(t)\big) &\leq d(g(t), \xi_\varepsilon) + d\Big(\xi_\varepsilon, F\big(t, u_g(t), \dot{u}_g(t)\big)\Big), \\ &\leq \|g(t)\| + \|\xi_\varepsilon\| + d\Big(\xi_\varepsilon, F\big(t, u_g(t), \dot{u}_g(t)\big)\Big), \end{aligned}$$

et d'après (H2)

$$d\Big(\xi_\varepsilon, F\big(t, u_g(t), \dot{u}_g(t)\big)\Big) \leq (k_1(t) + \beta_1 \parallel \xi_\varepsilon \parallel) \parallel u_g(t) \parallel + (k_2(t) + \beta_2 \parallel \xi_\varepsilon \parallel) \parallel \dot{u}_g(t) \parallel .$$

De plus, nous avons, pour tout $t \in [0,1]$

$$\|u_g(t)\| = \|\int_0^1 G(t,s)g(s)ds\| \leq \int_0^1 |G(t,s)|\|g(s)\|ds \leq M_G\|g\|_{\mathbf{L}^1_E}$$

et

$$\begin{aligned}\|\dot{u}_g(t)\| &= \|\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)g(s)ds\| \\ &\leq \int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)|\|g(s)\|ds \leq M_G\|g\|_{\mathbf{L}^1_E}\end{aligned}$$

ce qui donne

$$d\Big(g(t), F\big(t, u_g(t), \dot{u}_g(t)\big)\Big) \leq \|g(t)\| + \|\xi_\varepsilon\| + \Big(k_1(t) + k_2(t) + (\beta_1+\beta_2)\|\xi_\varepsilon\|\Big)M_G\|g\|_{\mathbf{L}^1_E}$$

$$\leq \|g(t)\| + d(0, F(t,0,0)) + \varepsilon + \Big(k_1(t) + k_2(t) + (\beta_1+\beta_2)\big(d(0,F(t,0,0)) + \varepsilon\big)\Big)M_G\|g\|_{\mathbf{L}^1_E}.$$

Comme $k_1(.), k_2(.) \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1])$, $t \mapsto d(0, F(t,0,0)) \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1])$ et $g \in \mathbf{L}^1_E([0,1])$, on obtient

$$t \mapsto d\Big(g(t), F\big(t, u_g(t), \dot{u}_g(t)\big)\Big) \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1]).$$

Ceci montre que $f_1 \in \mathbf{L}^1_E([0,1])$.
Alors on définit l'application $u_{f_1} : [0,1] \to E$ par

$$u_{f_1}(t) = \int_0^1 G(t,s)f_1(s)ds, \quad \forall t \in [0,1].$$

D'après $(2iii)$ de la Propositon 2.2.2

$$\dot{u}_{f_1}(t) = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f_1(s)ds, \quad \forall t \in [0,1].$$

D'où, en utilisant la propriété (2) de la Proposition 2.2.1 et les arguments ci-dessus ainsi que la définition de r et (2.2) nous avons

$$\begin{aligned}\|u_{f_1}(t) - u_{f_0}(t)\| &= \Big\|\int_0^1 G(t,s)\big(f_1(s) - f_0(s)\big)ds\Big\| \\ &\leq M_G\int_0^1 \|f_1(s) - f_0(s)\|ds \\ &\leq M_G(1+\alpha)\int_0^1 d\big(f_0(s), F(s, u_{f_0}(s), \dot{u}_{f_0}(s))\big)ds \\ &= r < (1-\lambda)\rho < \rho;\end{aligned}$$

De la même manière, nous avons

$$\begin{aligned}\|\dot{u}_{f_1}(t) - \dot{u}_{f_0}(t)\| &= \Big\|\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\big(f_1(s) - f_0(s)\big)ds\Big\| \\ &\leq M_G\int_0^1 \|f_1(s) - f_0(s)\|ds \\ &< \rho.\end{aligned}$$

Ceci montre que $gph(u_{f_1}(.), \dot{u}_{f_1}(.)) \subset X_\rho$.
Poson $r_1 = M_G \|f_1 - f_0\|_{\mathbf{L}^1_E}$. Par la définition de r, (2.6) et le fait que $M_G \geq 1$, on a $r_1 \leq r$, alors $\lambda - \beta r_1 \dfrac{\lambda}{1-\lambda} \geq \lambda - \beta r \dfrac{\lambda}{1-\lambda}$. Par (2.2), on obtient

$$\xi_1 \leq \lambda - \beta r_1 \frac{\lambda}{1-\lambda}.$$

On suppose que $f_i(.) \in \mathbf{L}^1_E([0,1])$ et $u_{f_i}(.) \in W^{2,1}_E([0,1])$ sont définies sur $[0,1]$ et vérifient (2.3), (2.4) et (2.5) pour $i = 0, 1, ..., n$. Considérons la multi-application $H_n : [0,1] \rightrightarrows E$ définie par

$$H_n(t) = \Big\{ v \in F(t, u_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t)) : \|v - f_n(t)\| \leq (1+\alpha) d(f_n(t), F(t, u_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t))) \Big\}.$$

Par les mêmes arguments ci-dessus, il existe une application mesurable $f_{n+1} : [0,1] \to E$ telle que $f_{n+1}(t) \in H_n(t)$, pour tout $t \in [0,1]$. Ceci donne, pour tout $t \in [0,1]$, $f_{n+1}(t) \in F(t, u_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t))$ et $\|f_{n+1}(t) - f_n(t)\| \leq (1+\alpha) d\big(f_n(t), F(t, u_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t))\big)$.
Par l'hypothèse (H2) nous avons, pour tout $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
\|f_{n+1}(t) - f_n(t)\| &\leq (1+\alpha) d\big(f_n(t), F(t, u_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t))\big) \\
&\leq (1+\alpha)\Bigg(\Big(k_1(t) + \beta_1 \parallel f_n(t) \parallel\Big) \parallel u_{f_n}(t) - u_{f_{n-1}}(t) \parallel + \\
&\qquad \Big(k_2(t) + \beta_2 \parallel f_n(t) \parallel\Big) \parallel \dot{u}_{f_n}(t) - \dot{u}_{f_{n-1}}(t) \parallel \Bigg).
\end{aligned}$$

D'après les hypothèses, f_{n-1} et f_n sont intégrables, alors nous avons, pour tout $t \in [0,1]$

$$\|u_{f_n}(t) - u_{f_{n-1}}(t)\| = \left\| \int_0^1 G(t,s)\big(f_n(s) - f_{n-1}(s)\big) ds \right\| \leq M_G \|f_n - f_{n-1}\|_{\mathbf{L}^1_E}, \tag{2.7}$$

et

$$\|\dot{u}_{f_n}(t) - \dot{u}_{f_{n-1}}(t)\| = \left\| \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\big(f_n(s) - f_{n-1}(s)\big) ds \right\| \leq M_G \|f_n - f_{n-1}\|_{\mathbf{L}^1_E}. \tag{2.8}$$

On obtient

$$M_G \|f_{n+1} - f_n\|_{\mathbf{L}^1_E} \leq M_G \Big(k + \beta \|f_n\|_{\mathbf{L}^1_E}\Big) \|f_n - f_{n-1}\|_{\mathbf{L}^1_E}.$$

Par conséquent, si nous définissons :
$r_{n+1} = M_G \|f_{n+1} - f_n\|_{\mathbf{L}^1_E}$, $q_n = \|f_n\|_{\mathbf{L}^1_E}$ et $\xi_n = k + \beta q_n$, nous obtenous

$$r_{n+1} \leq \xi_n r_n.$$

De plus, (puisque $M_G \geq 1$) on remarque que

$$q_{n+1} - q_n = \Big(\|f_{n+1}\|_{\mathbf{L}^1_E} - \|f_n\|_{\mathbf{L}^1_E} \Big) \leq \|f_{n+1} - f_n\|_{\mathbf{L}^1_E} \leq r_{n+1}. \tag{2.9}$$

Appliquant le Lemme 2.2.1, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n \leq \frac{r_1}{1-\lambda} \leq \frac{r}{1-\lambda} < \rho. \tag{2.10}$$

On définit l'application $u_{f_{n+1}} : [0,1] \to E$ par

$$u_{f_{n+1}}(t) = \int_0^1 G(t,s) f_{n+1}(s) ds, \quad \forall t \in [0,1],$$

et d'après la Proposition 2.2.2 nous avons

$$\dot{u}_{f_{n+1}}(t) = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) f_{n+1}(s) ds, \quad \forall t \in [0,1].$$

Alors, pour tout $t \in [0,1]$

$$\|u_{f_{n+1}}(t) - u_{f_n}(t)\| = \|\int_0^1 G(t,s)\big(f_{n+1}(s) - f_n(s)\big) ds\| \leq M_G \|f_{n+1} - f_n\|_{\mathbf{L}^1_E} = r_{n+1}, \tag{2.11}$$

et

$$\|\dot{u}_{f_{n+1}}(t) - \dot{u}_{f_n}(t)\| = \|\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\big(f_{n+1}(s) - f_n(s)\big) ds\| \leq M_G \|f_{n+1} - f_n\|_{\mathbf{L}^1_E} = r_{n+1}. \tag{2.12}$$

Par conséquent, pour tout $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} \|u_{f_{n+1}}(t) - u_{f_0}(t)\| &\leq \|u_{f_{n+1}}(t) - u_{f_n}(t)\| + \|u_{f_n}(t) - u_{f_0}(t)\| \\ &\leq r_{n+1} + \|u_{f_n}(t) - u_{f_0}(t)\|; \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|\dot{u}_{f_{n+1}}(t) - \dot{u}_{f_0}(t)\| &\leq \|\dot{u}_{f_{n+1}}(t) - \dot{u}_{f_n}(t)\| + \|\dot{u}_{f_n}(t) - \dot{u}_{f_0}(t)\| \\ &\leq r_{n+1} + \|\dot{u}_{f_n}(t) - \dot{u}_{f_0}(t)\|; \end{aligned}$$

et en utilisant les relations (2.11), (2.12) successivement, on aura

$$\|u_{f_{n+1}}(t) - u_g(t)\| \leq \sum_{p=1}^{n+1} r_p \leq \frac{r_1}{1-\lambda} < \frac{r}{1-\lambda} < \rho. \tag{2.13}$$

et

$$\|\dot{u}_{f_{n+1}}(t) - \dot{u}_g(t)\| \leq \sum_{p=1}^{n+1} r_p \leq \frac{r_1}{1-\lambda} < \frac{r}{1-\lambda} < \rho. \tag{2.14}$$

De même, pour $p.p.t \in [0,1]$

$$\|f_{n+1}(t) - g(t)\| \leq \|f_{n+1}(t) - f_n(t)\| + \|f_n(t) - g(t)\| \leq r_{n+1} + \|f_n(t) - g(t)\| \leq \sum_{p=1}^{n+1} r_p < \rho. \tag{2.15}$$

Par conséquent, les suites $\big(f_n(.)\big)$ et $\big(u_{f_n}(.)\big)$ sont bien définies et vérifient (2.3), (2.4) et (2.5).

Etape 2. Dans cette étape, on va démontrer l'existence d'une application $f \in \mathbf{L}^1_E([0,1])$ telle que $u_f = \displaystyle\int_0^1 G(t,s)f(s)ds$ est la solution unique du problème $(\mathcal{P}_f)$.
Par la relation (2.10) et comme $\|f_{n+1} - f_n\|_{\mathbf{L}^1_E} \leq r_{n+1}$, on voit bien que $\big(f_n(.)\big)$ est une suite de Cauchy dans $\mathbf{L}^1_E([0,1])$, donc $\big(f_n(.)\big)$ converge vers une certaine application $f(.) \in \mathbf{L}^1_E([0,1])$. D'autre part, les relations (2.7) et (2.8) montrent que $(u_{f_n}(.))$ est une suite de Cauchy dans $\mathbf{C}^1_E([0,1])$, par conséquent, elle converge vers une application $w(.) \in \mathbf{C}^1_E([0,1])$. Nous avons, pour tout $t \in [0,1]$

$$\|u_{f_n}(t) - u_f(t)\| = \|\int_0^1 G(t,s)\big(f_n(s) - f(s)\big)ds\| \leq M_G\|f_n - f\|_{\mathbf{L}^1_E},$$

$$\|\dot{u}_{f_n}(t) - \dot{u}_f(t)\| = \|\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\big(f_n(s) - f(s)\big)ds\| < M_G\|f_n - f\|_{\mathbf{L}^1_E},$$

c'est-à-dire

$$\|u_{f_n} - u_f\|_{C^1} \leq M_G\|f_n - f\|_{\mathbf{L}^1_E} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Alors, on aura $u_f(.) = w(.)$, c'est à dire $u_f(t) = \displaystyle\int_0^1 G(t,s)f(s)ds, \quad \forall t \in [0,1]$ et par la Proposition 2.2.2 on obtient

$$\ddot{u}_f(t) + \gamma\dot{u}_f(t) = f(t) \;\text{ p.p. }\; t \in [0,1], \tag{2.16}$$

avec

$$u_f(0) = 0; \;\; u_f(1) = \sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i u_f(\eta_i).$$

Etape 3. Montrons maintenant que u_f est la solution du problème $(\mathcal{P}_F)$. Pour cela, montrons que, pour tout $t \in [0,1]$, le graphe de la multi-application $(x,y) \mapsto F(t,x,y)$ est relativement fermé dans $X_\rho(t) \times E$, où

$$X_\rho(t) = \Big\{(x,y) \in E \times E : (t,x,y) \in X_\rho\Big\}.$$

Soit $t \in [0,1]$ et soit la suite $(x_n, y_n, v_n)_n$ des éléments de $gph(F(t,.,.))$ convergeant vers $(x,y,v) \in X_\rho(t) \times E$. Nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in F(t,x_n,y_n)$, et donc par (H2)

$$d\big(v_n, F(t,x,y)\big) \leq (k_1(t) + \beta_1\|v_n\|)\|x_n - x\| + (k_2(t) + \beta_2\|v_n\|)\|y_n - y\|,$$

et donc

$$d\big(v, F(t,x,y)\big) \leq \|v - v_n\| + (k_1(t) + \beta_1\|v_n\|)\|x_n - x\| + (k_2(t) + \beta_2\|v_n\|)\|y_n - y\|.$$

Le dernier membre tend vers 0 quand $n \to \infty$, et comme les valeurs de F sont fermées, on obtient $v \in F(t,x,y)$. Par conséquent $gph\big(F(t,.,.)\big)$ est relativement fermé dans $X_\rho(t) \times E$.
Maintenant, on observe par (2.13) et (2.14) et selon la convergence de (u_{f_n}) vers u_f dans $\mathbf{C}^1_E([0,1])$ que pour tout $t \in [0,1]$, nous avons $\|u_f(t) - u_g(t)\| < \rho$ et $\|\dot{u}_f(t) - \dot{u}_g(t)\| < \rho$, c'est à dire

$$(u_f(t), \dot{u}_f(t)) \in X_\rho(t). \tag{2.17}$$

Comme $(f_n)_n$ converge fortement vers f dans $\mathbf{L}^1_E([0,1])$, par extraction d'une sous suite notée (f_{n_k}), on peut supposer que (f_{n_k}) converge vers $f(.)$ presque partout dans $[0,1]$ et par (2.3) $f_{n_{k+1}}(t) \in F(t, u_{f_{n_k}}(t), \dot{u}_{f_{n_k}}(t)), \quad p.p.\ t \in [0,1]$, on conclut que

$$f(t) \in F(t, u_f(t), \dot{u}_f(t)), \quad p.p.\ t \in [0,1],$$

car $\big(u_{f_{n_k}}(t), \dot{u}_{f_{n_k}}(t)\big) \in X_\rho(t)$, $\big(u_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t)\big) \to \big(u_f(t), \dot{u}_f(t)\big)$, $f_{n_k}(t) \to f(t)$ et $gph\big(F(t,.)\big)$ est relativement fermé dans $X_\rho(t) \times E$.
D'où, par (2.16), $\ddot{u}_f(t) + \gamma\dot{u}_f(t) \in F(t, u_f(t), \dot{u}_f(t)) \quad p.p$ dans $[0,1]$, avec $u_f(0) = 0; \quad u_f(1) = \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i u_f(\eta_i)$. Ceci implique que u_f est une solution de notre problème $(\mathcal{P}_F)$.
De plus, la relation (2.15) donne

$$\|f(.) - g(.)\|_{\mathbf{L}^1_E} \leq \sum_{n=1}^{\infty} r_n \leq \frac{r_1}{1-\lambda} \leq \frac{r}{1-\lambda} < \rho$$

et donc

$$\|\ddot{u}_f(.) + \gamma\dot{u}_f(.)\|_{\mathbf{L}^1_E} \leq \|g(.)\|_{\mathbf{L}^1_E} + \rho.$$

D'autre part, puisque pour tout $t \in [0,1]$,

$$\|u_f(t)\| = \left\| \int_0^1 G(t,s) f(s) ds \right\| = \left\| \int_0^1 G(t,s)\big(\ddot{u}_f(s) + \gamma\dot{u}_f(s)\big) ds \right\| \leq M_G \|\ddot{u}_f(.) + \gamma\dot{u}_f(.)\|_{\mathbf{L}^1_E},$$

et

$$\|\dot{u}_f(t)\| = \left\| \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) f(s) ds \right\| = \left\| \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\big(\ddot{u}_f(s) + \gamma\dot{u}_f(s)\big) ds \right\| \leq M_G \|\ddot{u}_f(.) + \gamma\dot{u}_f(.)\|_{\mathbf{L}^1_E},$$

nous concluons que

$$\|u_f(.)\|_{\mathbf{C}^1} \leq M_G\big(\|g(.)\|_{\mathbf{L}^1_E} + \rho\big).$$

Ceci complète la démonstration de notre théorème. ∎

On donne maintenant un corollaire du Théorème 2.2.1

Corollaire 2.2.1 *Supposons (A) satisfaite. Soit E un espace de Banach séparable et soit $F : [0,1] \times E \times E \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs non vides fermées telle que*
(H1) F est $\mathcal{L}([0,1]) \otimes \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(E)$-mesurable ;
(H2) pour tout $t \in [0,1]$ fixé, $F(t,.,.)$ est pseudo-Lipschitzienne, c'est à dire, il existe $\beta_1, \beta_2 \geq 0$ et des fonctions positives $k_1(.), k_2(.) \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1])$, telle que pour chaque $v \in F(t,x,y)$ on a

$$d(v, F(t,x',y')) \leq (k_1(t) + \beta_1 \parallel v \parallel) \parallel x - x' \parallel + (k_2(t) + \beta_2 \parallel v \parallel) \parallel y - y' \parallel .$$

De plus, on suppose que
(H3) La fonction $t \mapsto d\big(0, F(t,0,0)\big)$ est intégrable.
On pose

$$r = M_G(1+\alpha) \int_0^1 d\big(0, F(s,0,0\big)ds, \quad k = M_G(1+\alpha)\|k_1 + k_2\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}}, \quad \beta = M_G(1+\alpha)(\beta_1 + \beta_2)$$

où α est un paramètre positif.
On suppose que, pour un certain $\lambda \in]0,1[$,

$$k \leq \lambda - \beta r \frac{\lambda}{1-\lambda}. \tag{2.18}$$

Alors, l'inclusion différentielle $(\mathcal{P}_F)$ admet au moins une solution $u \in \mathbf{W}^{2,1}_E([0,1])$.

Démonstration. En prenant dans le Théorème 2.2.1, $g \equiv 0$ et $\rho = +\infty$, on voit que $X_\rho = [0,1] \times E \times E$. De plus, on pose $\xi_1 = k$, alors on remarque que les hypothèses du Théorème 2.2.1 sont satisfaites. Alors, $(\mathcal{P}_F)$ admet au moins une solution $u \in \mathbf{W}^{2,1}_E([0,1])$. ■

2.3 Théorème de relaxation associé à une inclusion différentielle du second ordre avec des conditions aux limites en m-points

Dans cette section, on s'intéresse à l'étude de l'existence de solutions pour l'inclusion différentielle relaxée

$$(\mathcal{P}_{ext(F)}) \begin{cases} \ddot{u}(t) + \gamma \dot{u}(t) \in ext\big(F(t, u(t), \dot{u}(t))\big), & \text{p.p. } t \in [0,1] \\ u(0) = 0; \quad u(1) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i u(\eta_i), \end{cases}$$

et nous démontrons dans le cas où l'espace E est de dimention finie, que l'ensemble des solutions du problème relaxé $(\mathcal{P}_{ext(F)})$, est dense dans l'ensemble des solutions du problème $(\mathcal{P}_F)$

Nous rappelons au début quelques résultats préliminaires. On commence par définir la propriété de Scorza-Dragoniun et en suit par un théorème qui est crucial pour la suite, il exprime la densité pour la norme $\|.\|_w$ de l'espace des sélections continues de l'ensemble des points extrémaux d'une multi-application R dans l'espace des sélections continues de R. Pour plus de détails on peut consulter la référence [59].

Définition 2.3.1 *(**Propriété de Scorza-Dragoni**)[59]*
Soient E un espace de Banach, Y un espace métrique. Soit $G : [0,1] \times Y \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs compactes convexes.
*On dit que G vérifie **la propriété de Scorza-Dragoni** si pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un sous ensemble A fermé de $[0,1]$ tel que la mesure de Lebesgue $\lambda([0,1] \setminus A) < \varepsilon$ et la restriction de G à $A \times Y$ est continue.*
On dit que G est intégrablement bornée dans Y, si pour L un sous ensemble compact de Y on peut définir une fonction intégrable $\mu_L : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$\sup\{\|y\|; y \in G(t,z)\} \leq \mu_L(t), \quad p.p.\ z \in L.$$

Théorème 2.3.1 *(**Tolstonogov**)*
Soient Y un espace métrique complet, E un espace de Banach séparable, E_σ l'espace de Banach muni de la topologie faible, $M : [0,1] \times Y \rightrightarrows E_\sigma$ une multi-application à valeurs compactes convexes et K un sous ensemble compact de $\mathbf{C}_Y([0,1])$.
Soit $R : K \rightrightarrows \mathbf{L}^1_E([0,1])$ la multi-application définie par

$$R(y) = \{g \in \mathbf{L}^1_E([0,1]); g(t) \in M(t, y(t)) \quad p.p.\ t \in [0,1]\}.$$

Si M vérifie la propriété de Scorza-Dragoni et est intégrablement bornée dans Y, alors l'ensemble

$$A_K = \{f \in \mathbf{C}\big(K, \mathbf{L}^1_E([0,1])_w\big); f(y) \in R(y), \forall y \in K\}$$

est non vide et est un sous ensemble complet de $\mathbf{C}\big(K, \mathbf{L}^1_E([0,1])_w\big)$. De plus $A_K = \overline{A_{ext(K)}}^w$.

► $\mathbf{L}^1_E([0,1])_w$ est l'ensemble des classes d'équivalence des fonctions Bochner-intégrables $v : [0,1] \to E$ muni de la norme faible $\|v\|_w = \sup_{t\in[0,1]} \Big\| \int_0^t v(s)ds \Big\|$ et

$$A_{ext(K)} = \{f \in \mathbf{C}\big(K, \mathbf{L}^1_E([0,1])_w\big); f(y) \in ext\big(R(y)\big), \quad \forall y \in K\}.$$

Théorème 2.3.2 *[77]*
Soient (Ω, Σ, μ) un espace mesuré, E un espace de Banach et $1 \leq p < \infty$. Soit $(f_n(.))_{n\geq 1}$ une suite convergeant faiblement vers $f(.)$ dans $\mathbf{L}^P_E(\Omega)$ et $f_n(w) \in G(w)$ $\mu - p.p.$ avec $G(w)$ un sous ensemble non vide faiblement compact de E $\mu - p.p.$ Alors

$$f(w) \in \overline{co}\big(\limsup_{n\to\infty}\{f_n(w)\}\big) \ \ \mu - p.p.$$

Théorème 2.3.3 *[24]*
Soit (Ω, Σ) un espace mesurable et E un espace localement convexe séparé, tel qu'il existe une suite (e'_n) dans E' séparant les points de E.
Si la multi-application $\Gamma : \Omega \rightrightarrows E$ à valeurs convexes compactes est scalairement mesurable, alors

1. *la multi-application $ext(\Gamma)$ est de graphe mesurable*
2. *$ext(S_\Gamma) = S_{ext(\Gamma)}$,*

avec $S(\Gamma)$ est l'ensemble des sélections scalairement mesurables de la multi-application Γ, i.e.,

$$S_\Gamma = \Big\{\alpha : T \to E; \quad \text{scalairement mesurable et} \quad \alpha(t) \in \Gamma(t),\ \forall t \in T\Big\}.$$

Lemme 2.3.1 ***(Kravvaritis, Papageorgiou)****[70]*
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{L}^p_{\mathbb{R}^n}([0,1])$ et $u \in \mathbf{L}^p_{\mathbb{R}^n}([0,1])$ tels que $\sup\limits_{n\in\mathbf{N}} \|u_n\|_{\mathbf{L}^p_{\mathbb{R}^n}} < \infty$ et $\|u_n - u\|_w \longrightarrow 0$.
Alors, $u_n \longrightarrow u$ faiblement dans $\mathbf{L}^p_{\mathbb{R}^n}([0,1])$.

Nous allons maintenant démontrer que le Théorème 2.2.1 englobe le cas où F vérifie la condition de Lipschitziété, cette dernière est nécessaire pour la preuve du Théorème de relaxation. Voir [30] pour le problème de relaxation avec des conditions aux limites en m-points et [11] avec des conditions aux limites en trois points.

Théorème 2.3.4 *Supposons (A) satisfaite. Soit E un espace de Banach séparable et soit $F : [0,1] \times E \times E \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs fermées. Soit $g \in \mathbf{L}^1_E([0,1])$ et soit $u_g : [0,1] \to E$ l'application définie par*

$$u_g(t) = \int_0^1 G(t,s)g(s)ds, \quad \forall t \in [0,1].$$

On suppose que pour $\rho \in]0, +\infty]$ fixé et pour

$$X_\rho = \{(t,x,y) \in [0,1] \times E \times E : \|x - u_g(t)\| < \rho; \|y - \dot{u}_g(t)\| < \rho\},$$

les hypothèses suivantes sont satisfaites sur X_ρ.
(H1) F est $\mathcal{L}([0,1]) \otimes \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(E)$-measurable ;

(H2) pour tout t fixé, $F(t,.,.)$ est Lipschitzienne, c'est à dire, il existe deux fonctions positives $k_1(.), k_2(.) \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1])$, satisfaisant $2M_G\|k_1+k_2\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbf{R}}} < 1$, telle que pour chaque $v \in F(t,x,y)$ on a

$$d(v, F(t,x',y')) \leq k_1(t) \parallel x - x' \parallel + k_2(t) \parallel y - y' \parallel .$$

De plus, on suppose que
(H3) il existe $\eta \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1])$ satisfaisant $\|\eta\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}} < \big(1 - 2M_G\|k_1+k_2\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}}\big)\rho$ tel que

$$d\big(g(t), F(t, u_{g(t)}, \dot{u}_{g(t)})\big) \leq \|\eta\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}}, \quad \forall t \in [0,1].$$

Alors, l'inclusion différentielle $(\mathcal{P}_F)$ admet au moins une solution $u \in W^{2,1}_E([0,1])$, avec

$$\|u\|_{\mathbf{C}^1} \leq M_G\big(\|g\|_{\mathbf{L}^1_E} + \rho\big).$$

Démonstration. Comme $2M_G\|k_1+k_2\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}} < 1$ et $\|\eta\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbf{R}}} < \Big(1 - 2M_G\|k_1+k_2\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbf{R}}}\Big)\rho$, on peut choisir un nombre réel $\alpha > 0$ vérifiant $2M_G(1+\alpha)\|k_1+k_2\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}} < 1$
et $2M_G(1+\alpha)\|\eta\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}} < \Big(1 - 2M_G(1+\alpha)\|k_1+k_2\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}}\Big)\rho$.
Dans le Théorème 2.2.1, en prenant $\beta_1 = \beta_2 = 0$,

$$r = 2M_G(1+\alpha)\int_0^1 d\Big(g(s), F(s, u_{g(s)}, \dot{u}_{g(s)})\Big)ds;$$

$q_1 = \|g\|_{\mathbf{L}^1_E}$, et $k = \xi_1 = \lambda = 2M_G(1+\alpha)\|k_1+k_2\|_{\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}} < 1$.
On voit que

$$\xi_1 \leq \lambda - \beta r \frac{\lambda}{1-\lambda,}$$

et

$$r < (1-\lambda)\rho.$$

Donc on peut conclure que le Théorème 2.3.4 est une conséquence du Théorème 2.2.1, c'est à dire il existe une solution $u \in W^{2,1}_E([0,1])$ de $(\mathcal{P}_F)$ avec

$$\|u\|_{\mathbf{C}^1} \leq M_G(\|g\|_{\mathbf{L}^1_E} + \rho)$$

et

$$\|\ddot{u} + \gamma\dot{u} - g\|_{\mathbf{L}^1_E} < \rho.$$

■

Nous sommes maintenant en mesure de donner notre Théorème principal de cette section. Ici considérons l'espace E de dimension finie, c'est à dire, $E = \mathbb{R}^n$.

Théorème 2.3.5 *Supposons (A) satisfaite. Soit* $F : [0,1] \times E \times E \rightrightarrows E$ *une multi-application à valeurs non vides convexes compactes, vérifiant (H1) et (H2) du Théorème 2.3.4 et remplaçons l'hypothèse (H3) par la suivante*
(H3)' il existe une fonction positive $\beta \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1])$ *telle que, pour chaque* $(t,x,y) \in [0,1] \times E \times E$

$$\sup\left\{\|a\|, \quad a \in F(t,x,y)\right\} \leq \beta(t).$$

Alors,
(a) les deux problèmes $(\mathcal{P}_F)$ *et* $(\mathcal{P}_{ext(F)})$ *admettent au moins une solution dans* $W^{2,1}_E([0,1])$ *;*
(b) l'ensemble des solutions $X_{(\mathcal{P}_{ext(F)})}$ *dans* $\mathbf{W}^{2,1}_E([0,1])$*, de l'inclusion différentielle relaxée* $(\mathcal{P}_{ext(F)})$*, est un sous ensemble non vide dense dans* $X_{(\mathcal{P}_F)}$ *l'ensemble des solutions de l'inclusion differentielle* $(\mathcal{P}_F)$ *par rapport à la topologie de la convergence uniforme sur* $C^1_E([0,1])$*.*

Démonstration. **Etape 1.** On commence par démontrer que $X_{(\mathcal{P}_{ext(F)})}$ est non vide, (la non vacuité de $X_{(\mathcal{P}_F)}$ est assurée par le Théorème 2.3.4 (En prenant $g \equiv 0$ et $\rho = +\infty$)). Soit $h \in \mathbf{L}^1_E([0,1])$. D'après la Proposition 2.2.3, le problème

$$(\mathcal{P}_h)\begin{cases} \ddot{u}(t) + \gamma\dot{u}(t) = h(t), \quad t \in [0,1] \\ u(0) = 0; \quad u(1) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i u(\eta_i), \end{cases}$$

admet une solution unique $u_h \in W^{2,1}_E([0,1])$, définie par

$$u_h(t) = \int_0^1 G(t,s)h(s)ds, \quad \forall t \in [0,1],$$

et par la Proposition 2.2.2

$$\dot{u}_h(t) = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)h(s)ds, \quad \forall t \in [0,1].$$

Donc on peut définir l'application $\Phi : \mathbf{L}^1_E([0,1]) \to \mathbf{C}^1_E([0,1]) \times \mathbf{C}_E([0,1])$ par $\Phi(h) = (u_h, \dot{u}_h)$.
Soit

$$A = \left\{h \in \mathbf{L}^1_E([0,1]), \ \|h(t)\| \leq \beta(t), \quad \text{p.p. } t \in [0,1]\right\}.$$

A est un sous ensemble convexe de $\mathbf{L}^1_E([0,1])$ uniformément intégrable, donc d'aprés le Théorème de Dunford (Théorème 1.4.1), A est faiblement compact dans $\mathbf{L}^1_E([0,1])$.
Alors, l'ensemble $K = \Phi(A) = \left\{(u_h, \dot{u}_h), \quad h \in A\right\}$ est un sous ensemble compact convexe de $\mathbf{C}^1_E([0,1]) \times \mathbf{C}_E([0,1])$.

En effet, soient $t, \tau \in [0,1]$. Nous avons pour tout $h \in A$,

$$\begin{aligned}
\|u_h(t) - u_h(\tau)\| &= \left\| \int_0^1 G(t,s)h(s)ds - \int_0^1 G(\tau,s)h(s)ds \right\| \\
&\leq \int_0^1 |G(t,s) - G(\tau,s)| \; \|h(s)\|ds \\
&\leq \int_0^1 |G(t,s) - G(\tau,s)| \; \beta(s)ds,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|\dot{u}_h(t) - \dot{u}_h(\tau)\| &= \left\| \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)h(s)ds - \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(\tau,s)h(s)ds \right\| \\
&\leq \int_0^1 \left| \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) - \frac{\partial G}{\partial t}(\tau,s) \right| \; \|h(s)\|ds \\
&\leq \int_0^1 \left| \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) - \frac{\partial G}{\partial t}(\tau,s) \right| \beta(s)ds,
\end{aligned}$$

Comme G et $\dfrac{\partial G}{\partial t}$ sont uniformément continues et $\beta \in \mathbf{L}^1_E([0,1])$, on conclut que l'ensembles K est equicontinu.
D'autre part,

$$\begin{aligned}
\|u_h(t)\| &= \| \int_0^1 G(t,s)h(s)ds \| \\
&\leq \int_0^1 |G(t,s)| \; \|h(s)\|ds \\
&\leq M_G \int_0^1 \beta(s)ds \\
&\leq M_G \|\beta\|_1,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|\dot{u}_h(t)\| &= \left\| \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)h(s)ds \right\| \\
&\leq \int_0^1 \left| \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) \right| \; \|h(s)\|ds \\
&\leq M_G \int_0^1 \beta(s)ds \\
&\leq M_G \|\beta\|_1.
\end{aligned}$$

Ces deux inégalités nous donnent la compacité de l'ensemble $K(t) = \big\{(u_h(t), \dot{u}_h(t)),\ u_h \in K\big\}$ dans E pour tout $t \in [0,1]$. D'après le théorème d'Ascoli-Arzelà (Théorème 1.4.2), l'ensemble K est relativement compact dans $\mathbf{C}^1_E([0,1]) \times \mathbf{C}_E([0,1])$.

Pour conclure montrons que K est fermé. Soit $(u_{h_n}, \dot{u}_{h_n})_n$ une suite d'éléments de l'ensemble K convergeant uniformément vers (ξ, ζ) dans $\mathbf{C}^1_E([0,1]) \times \mathbf{C}_E([0,1])$.
Comme A est faiblement compact dans $\mathbf{L}^1_E([0,1])$ et $(h_n)_n \subset A$, on peut extraire de $(h_n)_n$ une sous-suite qu'on note aussi $(h_n)_n$, qui converge $\sigma(\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_E)$ vers une application $h \in A$.
En particulier, pour tout $t \in [0,1]$, et tout $x' \in E' = E$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \langle x', u_{h_n}(t)\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle x', \int_0^1 G(t,s)h_n(s)ds\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \langle G(t,s)x', h_n(s)\rangle ds \\
&= \int_0^1 \langle G(t,s)x', h(s)\rangle ds \\
&= \langle x', \int_0^1 G(t,s)h(s)\rangle ds \\
&= \langle x', u_h(t)\rangle.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \langle x', \dot{u}_{h_n}(t)\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle x', \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)h_n(s)ds\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \langle \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)x', h_n(s)\rangle ds \\
&= \int_0^1 \langle \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)x', h(s)\rangle ds \\
&= \langle x', \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)h(s)\rangle ds \\
&= \langle x', \dot{u}_h(t)\rangle.
\end{aligned}$$

Alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_{h_n}(t) = u_h(t)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \dot{u}_{h_n}(t) = \dot{u}_h(t)$.
Comme $(u_{h_n})_n$ converge uniformément vers (ξ, ς) dans $\mathbf{C}^1_E([0,1]) \times \mathbf{C}_E([0,1])$, on conclut que $u_h = \xi$ et $\dot{u}_h = \zeta$, d'où la compacité de K dans $\mathbf{C}^1_E([0,1]) \times \mathbf{C}_E([0,1])$.

Soit $R : K \rightrightarrows \mathbf{L}^1_E([0,1])$ la multi-application définie par

$$R(u, \dot{u}) = \Big\{ g \in \mathbf{L}^1_E([0,1]) : \ g(t) \in F(t, u(t), \dot{u}(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0,1] \Big\}.$$

La multi-application F vérifie la propriété de Scorza-Dragoni (Définition 2.3.1), et est intégrablement bornée d'après la condition $(H3)'$.
Puisque F est $\mathcal{L}([0,1]) \otimes \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(E)$-mesurable à valeurs fermées, d'après le Théorème 1.1.4 et le Théorème 1.1.1, $R(u, \dot{u})$ est non vide, de plus $R(u, \dot{u})$ est convexe car F est à valeurs convexes.
D'autre part, les valeurs de R sont faiblement compactes.

En effet, Soient $(u, \dot{u}) \in K,\ v \in R(u, \dot{u})$ alors $g \in \mathbf{L}^1_E([0,1])$ et $v(t) \in F(t, u(t), \dot{u}(t))$ p.p. $t \in [0,1]$ donc d'après l'hypothèse $(H3)'$,

$$\| v(t) \| \leq \beta(t), \quad p.p.t \in [0,1].$$

Donc $R(u, \dot{u})$ est borné dans $\mathbf{L}^1_E([0,1])$ et uniformément intégrable, d'après le Théorème de Dunford (Théorème 1.4.1), les valeurs de R sont relativement faiblement compactes et comme F est à valeurs fermées, les valeurs de R le sont aussi, par conséquent les valeurs de R sont faiblement compactes.
D'après le Théorème de Tolstonogov (Théorème 2.3.1),

$$A_K = \{\varrho \in \mathbf{C}\big(K, \mathbf{L}^1_E([0,1])_w\big), \varrho(u, \dot{u}) \in R(u, \dot{u});\ \ \forall (u, \dot{u}) \in K\}$$

est non vide et est un ensemble complet de $\mathbf{C}\big(K, \mathbf{L}^1_E([0,1])_w\big)$. De plus, $A_K = \overline{A_{ext(K)}}^w$. On peut alors définir une fonction continue $r : K \to \mathbf{L}^1_E([0,1])_w$ avec $r(u, \dot{u}) \in ext\big(R(u, \dot{u})\big),\ \forall (u, \dot{u}) \in K$.
On a d'après le Théorème 2.3.3

$$ext(R(u, \dot{u})) = \Big\{v \in \mathbf{L}^1_E([0,1]) :\ v(t) \in ext\big(F(t, u(t), \dot{u}(t))\big) \quad \text{p.p. } t \in [0,1]\Big\}.$$

Donc $r(u, \dot{u})(t) \in ext\big(F(t, u(t), \dot{u}(t))\big)$ p.p. $t \in [0,1]$.
Il est clair que pour tout $(u, \dot{u}) \in K$, $\|r(u, \dot{u})(t)\| \leq \beta(t)$ p.p. $t \in [0,1]$. Donc $r(u, \dot{u}) \in A$.
On définit la fonction $\theta : K \to \mathbf{C}^1_E([0,1]) \times \mathbf{C}_E([0,1])$ par $\theta(u, \dot{u}) = \Phi(r(u, \dot{u}))$.
Pour $(u, \dot{u}) \in K$ on a $r(u, \dot{u}) \in A$, donc $\Phi(r(u, \dot{u})) \in \Phi(A) = K$. De plus, θ est une application continue. En effet, Soit $(u_n, \dot{u}_n) \subset K$, telle que $(u_n, \dot{u}_n) \longrightarrow (u, \dot{u})$.
On sait que $r : K \to \mathbf{L}^1_E([0,1])_w$ est continue, alors $r(u_n, \dot{u}_n) \longrightarrow r(u, \dot{u})$ dans $\mathbf{L}^1_E([0,1])_w$, i.e., $\|r(u_n, \dot{u}_n) - r(u, \dot{u})\|_w \longrightarrow 0$, et comme $\|r(u_n, \dot{u}_n)(t)\| \leq \beta(t)$ $p.p$, on obtient $\|r(u_n, \dot{u}_n)\|_{\mathbf{L}^1} \leq \|\beta(t)\|_{\mathbf{L}^1}$, c'est à dire $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \|r(u_n, \dot{u}_n)\|_{\mathbf{L}^1} < +\infty$. Par le Lemme 2.3.1, on conclut que $(r(u, \dot{u}))_n$ converge faiblement vers $r(u, \dot{u})$, et par les arguments dans la preuve de la fermeture de K, on conclut que $\Phi\big(r(u_n, \dot{u}_n)\big) \longrightarrow \Phi\big(r(u, \dot{u})\big)$, c'est à dire $\theta(u_n, \dot{u}_n) \longrightarrow \theta(u, \dot{u})$ dans $\mathbf{C}^1_E([0,1]) \times \mathbf{C}_E([0,1])$. D'où la continuité de θ de K dans K.
On applique le théorème du point fixe de Schauder (Théorème 1.1.11), on obtient l'existence de $(u, \dot{u}) \in K$ tel que $(u, \dot{u}) = \theta(u, \dot{u}) = \Phi\big(r(u, \dot{u})\big)$, c'est à dire

$$\ddot{u}(t) + \gamma \dot{u}(t) = r(u, \dot{u})(t), \quad \text{p.p. } t \in [0,1], \text{ avec } u(0) = 0; \quad u(1) = \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i u(\eta_i),$$

et par suite, puisque $r(u, \dot{u})(t) \in ext\big(F(t, u(t), \dot{u}(t))\big)$, p.p $t \in [0,1]$, on aura l'existence d'une application $u \in W^{2,1}_E([0,1])$ telle que

$$\ddot{u}(t) + \gamma \dot{u}(t) \in ext\big(F(t, u(t), \dot{u}(t))\big), \quad \text{p.p } t \in [0,1],$$

avec $u(0) = 0; \quad u(1) = \sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i u(\eta_i)$, c'est à dire u est une solution de notre problème $\mathcal{P}_{ext(F)}$. D'où la non vacuité de $X_{\mathcal{P}_{ext(F)}}$.

Etape 2.

Dans la suite on va montrer que $\overline{X_{(\mathcal{P}_{ext(F)})}} = X_{(\mathcal{P}_F)}$.
Soit $u \in X_{(\mathcal{P}_F)}$. Alors, il existe une application mesurable $h : [0,1] \to E$ avec

$$h(t) \in F(t, u(t), \dot{u}(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0,1]$$

et

$$(\mathcal{P}_h)\begin{cases} \ddot{u}(t) + \gamma\dot{u}(t) = h(t), & \text{p.p. } t \in [0,1] \\ u(0) = 0; \quad u(1) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i u(\eta_i), \end{cases}$$

c'est à dire $u = u_h$ est l'unique solution de $(\mathcal{P}_h)$.
Considérons A, Φ et K comme dans l'étape 1.
Soit $(v, \dot{v}) \in \Phi(A) = K$, $\varepsilon > 0$ et $\Omega_\varepsilon : [0,1] \rightrightarrows E$ la multi-application définie par

$$\Omega_\varepsilon(t) = \Big\{y \in F(t, v(t), \dot{v}(t)) : \|h(t) - y\| < \varepsilon + d\big(h(t), F(t, v(t), \dot{v}(t))\big) \quad \text{p.p. } t \in [0,1]\Big\}.$$

Comme $F(., v(.), \dot{v}(.))$ est $\mathcal{L}([0,1])$-measurable, d'après le Théorème 1.1.1, la multi-application Ω_ε est aussi mesurable à valeurs fermées non vides d'après le Théorème 1.1.5.
En appliquant le théorème d'existence de sélection mesurable (Théorème 1.1.4), il existe une application mesurable s_ε de Ω_ε, i.e., $s_\varepsilon(t) \in \Omega_\varepsilon(t), \ \forall t \in [0,1]$.
On définit alors la multi-application $\varpi_\varepsilon : K \rightrightarrows \mathbf{L}^1_E([0,1])$ par

$$\varpi_\varepsilon(v, \dot{v}) = \Big\{x \in S^1_{F(.,v(.),\dot{v}(.))} : \|h(t) - x(t)\| \leq \varepsilon + d\big(h(t), F(t, v(t), \dot{v}(t))\big) \quad \text{p.p } t \in [0,1]\Big\}$$

avec $S^1_{F(.,v(.),\dot{v}(.))}$ l'ensemble de toutes les sélections Lebesgue-intégrables de $F(., v(.), \dot{v}(.))$ c'est à dire

$$S^1_{F(.,v(.),\dot{v}(.))} = \big\{x \in \mathbf{L}^1_E([0,1]) : x(t) \in F(t, v(t), \dot{v}(t)) \quad \forall t \in [0,1]\big\}.$$

On a $\varpi_\varepsilon(v, \dot{v})(t) \neq \emptyset, \forall (v, \dot{v}) \in K$. De plus, ϖ_ε est semicontinue inférieurement à valeurs décomposables d'après la Proposition 1.1.7 car la multi-application définie par $G(v, \dot{v}) = S^1_{F(.,v(.),\dot{v}(.))}$ est semi continue inférieurement à valeurs décomposables fermées. En effet, pour montrer que $G(v, \dot{v})$ est non vide pour tout $(v, \dot{v}) \in K$, considérons l'application $l : [0,1] \to [0,1] \times E \times E$ définie par $l(t) = (t, v(t), \dot{v}(t))$.
Comme $v(.), \dot{v}(.)$ sont continues on conclut que l'application l est mesurable.

D'autre part, $F(t,v(t),\dot{v}(t)) = (F\circ l)(t)$.
Soit $P : [0,1] \rightrightarrows E$ définie par $P(t) = (F\circ l)(t)$.
P est mesurable. En effet, Soit U un ouvert de E, nous avons

$$\begin{aligned}P^{-1}(U) &= \{t\in[0,1] : P(t)\cap U \neq \emptyset\}\\ &= \{t\in[0,1] : F(l(t))\cap U \neq \emptyset\}\\ &= \{t\in[0,1] : l(t)\in F^{-1}(U)\}\\ &= \{t\in[0,1] : t\in l^{-1}\big(F^{-1}(U)\big)\}\\ &= l^{-1}\big(F^{-1}(U)\big).\end{aligned}$$

F étant $\mathcal{L}([0,1])\otimes\mathcal{B}(E)\otimes\mathcal{B}(E)$-mesurable et U ouvert de E, alors $F^{-1}(U)\in\mathcal{L}([0,1])\otimes\mathcal{B}(E)\otimes\mathcal{B}(E)$ et comme l est mesurable on aura $l^{-1}\big(F^{-1}(U)\big)\in\mathcal{L}([0,1])$, c'est à dire, $P^{-1}(U)\in\mathcal{L}([0,1])$ et par conséquent P est mesurable, à valeurs fermées, par le théorème d'existence de sélection mesurable (Théorème 1.1.4), P admet une sélection mesurable, i.e., il existe une application mesurable $x : [0,1]\to E$ telle que $x(t)\in P(t) = F(t,v(t),\dot{v}(t))$ et par $(H3)'$ on conclut que $x\in\mathbf{L}^1_E([0,1])$ et donc $x\in G(v,\dot{v})$, d'où la non vacuité de $G(v,\dot{v})$.
En suite, montrons que $G(v,\dot{v})$ est fermé. Fixons $(v,\dot{v})\in K$ et soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $G(v,\dot{v})$ convergeant vers $x\in\mathbf{L}^1_E([0,1])$, alors par extraction d'une sous suite on peut supposer que $(x_{\varphi(n)})_n$ converge presque partout vers x. D'autre part, nous avons $x\in G(v,\dot{v})$, alors $x(t)\in F(t,v(t),\dot{v}(t))$ et comme F est à valeurs fermées, on conclut donc que $x(t)\in F(t,v(t),\dot{v}(t))$, $\quad p.p.\ t\in[0,1]$, et par suite $x\in G(v,\dot{v})$, c'est à dire, $G(v,\dot{v})$ est fermé.
Montrons maintenant que $G(v,\dot{v})$ est décomposable. Soient $x,y\in G(v,\dot{v})$ et soit $J\in\mathcal{L}([0,1])$, alors

$$\begin{aligned}(x\,.\mathbf{1}_J + y\,.\mathbf{1}_{[0,1]\setminus J})(t) &= x(t)\,.\mathbf{1}_J(t) + y(t)\,.\mathbf{1}_{[0,1]\setminus J}(t)\\ &= \begin{cases} x(t)\in F(t,v(t),\dot{v}(t)) & \text{si } t\in J;\\ y(t)\in F(t,v(t),\dot{v}(t)) & \text{si } t\notin J;\end{cases}\end{aligned}$$

ce qui montre que $x\,.\mathbf{1}_J + y\,.\mathbf{1}_{[0,1]\setminus J}\in G(v,\dot{v})$ car F est à valeurs convexes, et par suite $G(v,\dot{v})$ est décomposable. De plus $G(.,.)$ est semicontinue inférieurement. En effet, soit $(v_0,\dot{v}_0)\in K$, $\ u_0\in G(v_0,\dot{v}_0)$ et soit $(v_n,\dot{v}_n)_n$ une suite d'éléments de K convergeant vers $(v_0,\dot{v}_0)$ dans $\mathbf{C}^1_E([0,1])\times\mathbf{C}_E([0,1])$. Pour tout $n\in\mathbb{N}, t\mapsto F(t,v_n(t),\dot{v}_n(t))$ est mesurable, alors d'après le Théorème 1.1.5, la multi-application $\Xi_n : [0,1]\rightrightarrows E$ définie par

$$\Xi_n(t) = \Big\{w\in F(t,v_n(t),\dot{v}_n(t)) : \|w-u_0\| = d\big(u_0(t),F(t,v_n(t),\dot{v}_n(t))\big)\Big\}$$

est mesurable à valeurs non vides (car les valeurs de F sont compactes).
Montrons que les valeurs de Ξ_n sont fermées. Fixons $t\in[0,1]$ et soit $(w_m)_m$ une suite d'éléments de $\Xi_n(t)$ convergeant vers w dans E. Alors $w_m\in F(t,v_n(t),\dot{v}_n(t))$ et $\|w_m-u_0\| =$

$d(u_0(t), F(t, v_n(t), \dot{v}_n(t))$. F est à valeurs compactes, donc $\lim\limits_{m\to\infty} w_m \in F(t, v_n(t), \dot{v}_n(t))$ et par suite $w \in F(t, v_n(t), \dot{v}_n(t))$, de plus

$$\lim_{m\to\infty} \|w_m - u_0\| = \lim_{m\to\infty} d\big(u_0(t), F(t, v_n(t), \dot{v}_n(t))\big)$$

et par suite

$$\|w - u_0\| = d\big(u_0(t), F(t, v_n(t), \dot{v}_n(t))\big),$$

on conclut donc que $w \in \Xi_n(t)$. D'après le Théorème d'existence de sélection mesurable (Théorème 1.1.4), il existe une application mesurable $u_n : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ telle que $u_n(t) \in \Xi_n(t)$ pour tout $t \in [0,1]$, c'est à dire $u_n(t) \in F(t, v_n(t), \dot{v}_n(t))$ et comme $u_0(t) \in F(t, v_0(t), \dot{v}_0(t))$, on aura

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|u_n(t) - u_0(t)\| &= \lim_{n\to\infty} d\big(u_0(t), F(t, v_n(t), \dot{v}_n(t))\big) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \mathcal{H}\big(F(t, v_n(t), \dot{v}_n(t)), F(t, v_0(t), \dot{v}_0(t))\big) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \big(k_1(t)\|v_n(t) - v_0(t)\| + k_2(t)\|\dot{v}_n(t) - \dot{v}_0(t)\|\big) = 0.
\end{aligned}$$

La suite $(u_n)_n$ converge ponctuellement ver u_0 et comme $u_n(t) \in F(t, v_n(t), \dot{v}_n(t))$ alors $\|u_n(t)\| \leq \beta(t)$ et $\beta \in \mathbf{L}^1_E([0,1])$, en utilisant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on conclut que (u_n) converge fortement vers u_0 dans $\mathbf{L}^1_E([0,1])$. Par le Théorème (1.1.6), on conclut que $G(.,.)$ est semicontinue inférieurement.
D'après la Proposition 1.1.7 ϖ_ε est semi continue inférieurement à valeurs décomposables. Donc on applique le Théorème d'existence de sélection continue (Théorème 1.1.10), on obtient une application continue $y_\varepsilon : K \rightrightarrows \mathbf{L}^1_E([0,1])$ telle que $y_\varepsilon(v, \dot{v}) \in \overline{\varpi_\varepsilon}(v, \dot{v}), \quad \forall (v, \dot{v}) \in K$ et puisque $h(t) \in F(t, u(t), \dot{u}(t)) \quad p.p.t \in [0,1]$, on obtient pour $p.p.t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
\|h(t) - y_\varepsilon(v, \dot{v})(t)\| &\leq \varepsilon + d\big(h(t), F(t, v(t), \dot{v}(t))\big) \\
&\leq \varepsilon + k_1(t)\|u(t) - v(t)\| + k_2(t)\|\dot{u}(t) - \dot{v}(t)\|. \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

Etape 3.
On applique le Théorème de Tolstonogov (Théorème 2.3.1), pour définir la fonction continue $\xi_\varepsilon : K \to \mathbf{L}^1_w([0,1], E)$ telle que $\xi_\varepsilon(v, \dot{v}) \in extS^1_{F(.,v(.),\dot{v}(.))} = S^1_{extF(.,v(.),\dot{v}(.))}$ et $\|y_\varepsilon(v, \dot{v}) - \xi_\varepsilon(v, \dot{v})\|_w < \varepsilon, \;\; \forall (v, \dot{v}) \in K$.
En effet, Comme dans l'étape 1, Soit $R : K \rightrightarrows \mathbf{L}^1_E([0,1])$ la multi-application définie par

$$R(v, \dot{v}) = \Big\{ g \in \mathbf{L}^1_E([0,1]) : \; g(t) \in F(t, v(t), \dot{v}(t)) \quad \text{p.p } t \in [0,1] \Big\}.$$

On a F vérifie la propriété de Scorza-Dragoni et R est à valeurs non vides convexes faiblement compactes. On applique le Théorème de Tolstonogov (Théorème 2.3.1) et on définit une application continue $\xi_\varepsilon : K \to \mathbf{L}^1_w([0,1],E)$ telle que $\xi_\varepsilon(v,\dot{v}) \in ext(R(v,\dot{v})),\ \forall (v,\dot{v}) \in K$ et $\|y_\varepsilon(v,\dot{v}) - \xi_\varepsilon(v,\dot{v})\|_w < \varepsilon,\ \ \forall (v,\dot{v}) \in K$. Ce qui donne d'après le Théorème 2.3.3

$$\xi_\varepsilon(v,\dot{v})(t) \in ext\big(F(t,v(t),\dot{v}(t))\big) \quad \text{p.p. } t \in [0,1].$$

On a pour chaque $(v,\dot{v}) \in K$: $\ \|\xi_\varepsilon(v,\dot{v})(t)\| \leq \beta(t)$ donc $\xi_\varepsilon(v,\dot{v}) \in A$.
Considérons l'application $\theta_\varepsilon : K \to \mathbf{C}^1_E([0,1]) \times \mathbf{C}_E([0,1])$ telle que, pour tout $(v,\dot{v}) \in K$; $\ \theta_\varepsilon(u,\dot{u}) = \Phi(\xi_\varepsilon(u,\dot{u}))$.
Soit $\varepsilon_n \to 0,\ \ y_{\varepsilon_n} = y_n$ et $\xi_n = \xi_{\varepsilon_n}$. Alors, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'application $\theta_n = \Phi \circ \xi_n$ est continue de K vers K.
On applique le Théorème du point fixe de Schauder (Théorème 1.1.11) on obtient un point fixe $(u_n,\dot{u}_n) \in K$ telle que $(\Phi \circ \xi_n)(u_n,\dot{u}_n) = (u_n,\dot{u}_n)$. Ce qui implique que

$$\ddot{u}_n(t) + \gamma \dot{u}_n(t) \in ext\big(F(t,u_n(t),\dot{u}_n(t))\big), \quad \text{p.p. } t \in [0,1],$$

$$u_n(0) = 0; \quad u_n(1) = \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i u_n(\eta_i).$$

c'est à dire, u_n est une solution de $(\mathcal{P}_{ext(F)})$.
Etape4.
Comme $(u_n,\dot{u}_n)_n \subset K$ et K est compact, donc on peut supposer que $(u_n,\dot{u}_n) \longrightarrow (u^*,\dot{u}^*)$ dans $\mathbf{C}^1_E([0,1]) \times \mathbf{C}_E([0,1])$. Nous avons

$$\|u_n(t) - u(t)\| = \| \int_0^1 G(t,\tau)\Big(\xi_n(u_n,\dot{u}_n)(\tau) - h(\tau)\Big)d\tau \|$$

$$= \left\| \int_0^1 G(t,\tau)\Big(\xi_n(u_n,\dot{u}_n)(\tau) - y_n(u_n,\dot{u}_n)(\tau)\Big)d\tau + \int_0^1 G(t,\tau)\Big(y_n(u_n,\dot{u}_n)(\tau) - h(\tau)\Big)d\tau \right\|.$$

$$\leq \left\| \int_0^1 G(t,\tau)\Big(\xi_n(u_n,\dot{u}_n)(\tau) - y_n(u_n,\dot{u}_n)(\tau)\Big)d\tau \right\| + \int_0^1 |G(t,\tau)| \Big\| y_n(u_n,\dot{u}_n)(\tau) - h(\tau) \Big\| d\tau.$$

On sait que $\|\xi_n(u_n,\dot{u}_n)(.) - y_n(u_n,\dot{u}_n)(.)\|_w \longrightarrow 0$, et d'après le Lemme 2.3.1, $\big(\xi_n(u_n,\dot{u}_n) - y_n(u_n,\dot{u}_n)\big) \longrightarrow 0$ faiblement dans $\mathbf{L}^1_E([0,1])$. Alors

$$\forall \eta \in \mathbf{L}^\infty_E([0,1]), \ \ \lim_{n\to\infty} \Big\langle \xi_n(u_n,\dot{u}_n)(.) - y_n(u_n,\dot{u}_n)(.), \eta \Big\rangle = 0$$

$$\forall \eta \in \mathbf{L}^\infty_E([0,1]), \ \ \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \Big\langle \xi_n(u_n,\dot{u}_n)(\tau) - y_n(u_n,\dot{u}_n)(\tau), \eta(\tau) \Big\rangle d\tau = 0$$

$$\forall x' \in E' = E, \ \ \lim_{n\to\infty} \Big\langle \int_0^1 G(t,\tau)\Big(\xi_n(u_n,\dot{u}_n)(\tau) - y_n(u_n,\dot{u}_n)(\tau)\Big)d\tau, x' \Big\rangle =$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \Big\langle \xi_n(u_n,\dot{u}_n)(\tau) - y_n(u_n,\dot{u}_n)(\tau), G(t,\tau)x' \Big\rangle d\tau.$$

Comme $\eta(\tau) = x'G(.,\tau) \in \mathbf{L}^\infty_E([0,1])$ alors

$$\forall x' \in E, \ \lim_{n\to\infty} \Big\langle \int_0^1 G(t,\tau)\Big(\xi_n(u_n,\dot{u}_n)(\tau) - y_n(u_n,\dot{u}_n)(\tau)\Big)d\tau, x'\Big\rangle = 0.$$

D'où

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 G(t,\tau)\Big(\xi_n(u_n,\dot{u}_n)(\tau) - y_n(u_n,\dot{u}_n)(\tau)\Big)d\tau = 0.$$

D'autre part, d'après l'inégalité (2.19)

$$\|y_n(u_n,\dot{u}_n)(\tau) - h(\tau)\| \leq \varepsilon_n + k_1(\tau)\|u(\tau) - u_n(\tau)\| + k_2(\tau)\|\dot{u}(\tau) - \dot{u}_n(\tau)\|.$$

Donc, pour $n \longrightarrow \infty$ on obtient

$$\|u^*(t) - u(t)\| \leq M_G \int_0^1 \Big(k_1(\tau)\|u(\tau) - u^*(\tau)\| + k_2(\tau)\|\dot{u}(\tau) - \dot{u}^*(\tau)\|\Big)d\tau.$$

Ceci donne

$$\|u^* - u\|_{\mathbf{C}_E} \leq M_G\|k_1 + k_2\|\|u - u^*\|_{\mathbf{C}^1_E}.$$

De la même manière, et comme

$$\|\dot{u}_n(t) - \dot{u}(t)\| = \|\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,\tau)\Big(\xi_n(u_n,\dot{u}_n)(\tau) - h(\tau)\Big)d\tau\|$$

on obtient

$$\|\dot{u}^* - \dot{u}\|_{\mathbf{C}_E} \leq M_G\|k_1 + k_2\|\|u - u^*\|_{\mathbf{C}^1_E}.$$

D'où

$$\|u^* - u\|_{\mathbf{C}^1_E} \leq M_G\|k_1 + k_2\|\|u - u^*\|_{\mathbf{C}^1_E}.$$

On a d'après (2), $\|k_1 + k_2\| < \dfrac{1}{2M_G}$. On obtient alors $u^* = u$ c'est à dire $u_n \longrightarrow u$ dans $\mathbf{C}^1_E([0,1])$ et d'après l'étape 3, $u \in \overline{X_{\mathcal{P}_{extF}}}$ (la fermeture de $X_{\mathcal{P}_{extF}}$ dans $\mathbf{C}^1_E([0,1])$.
Ce qui donne $X_{\mathcal{P}_F} \subset \overline{X_{\mathcal{P}_{extF}}}$.
Soit $(v_n) \subset X_{\mathcal{P}_F}$ et $v_n \longrightarrow v$ dans $\mathbf{C}^1_E([0,1])$ alors $v_n = \Phi(y_n)$, $y_n \in S^1_{F(.,v_n(.),\dot{v}_n(.))}$ et $\big(y_n(.)\big)$ converge faiblement vers $y(.)$ dans $\mathbf{L}^1_E([0,1])$.
D'après $(H3)$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est faiblement séquentiellement compacte dans $\mathbf{L}^1_E([0,1])$.
D'après le Théorème 2.3.2, on obtient,

$$\begin{aligned} y(t) &\in \overline{co}\,\limsup_{n\to\infty}(y_n(t)) \\ &\subset \overline{co}\,\limsup_{n\to\infty} F(t,v_n(t),\dot{v}_n(t)) \\ &= F(t,v(t),\dot{v}(t)), \quad \text{p.p. } t \in [0,1]. \end{aligned}$$

De plus, $\Phi(y_n) \longrightarrow \Phi(y)$ dans $\mathbf{C}^1_E([0,1])$ pour $y \in \mathbf{L}^1_E([0,1])$ et $y(t) \in F(t,v(t),\dot{v}(t))$, p.p. $t \in [0,1]$. Donc $v \in X_{\mathcal{P}_F}$, c'est à dire $X_{\mathcal{P}}$ est fermé dans $\mathbf{C}^1_E([0,1])$. En fin, $\overline{X_{\mathcal{P}_{extF}}} = X_{\mathcal{P}_F}$ pour la topologie de $\mathbf{C}^1_E([0,1])$. Ceci achève la démonstration. ■

Chapitre 3

Application de la Pettis-intégration à la résolution des inclusions différentielles dans un espace de Banach

3.1 Introduction

Ce chapitre concerne une application de la Pettis-intégration aux inclusions différentielles du second ordre. La première section consiste à traiter l'existence de solutions pour une inclusion différentielle du second ordre avec des conditions aux limites en $m-$points

$(m > 3)$ dans un espace de Banach séparable de la forme

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) + \gamma\dot{u}(t) \in \mathrm{F}(t, u(t), \dot{u}(t)) \ \text{ p.p. } t \in [0,1] \\ u(0) = 0; \quad u(1) = \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i u(\eta_i), \end{cases}$$

avec F une multi-application à valeurs convexes compactes définie sur $[0,1] \times E \times E$, telle que $F(t,x,y) \subset \Gamma(t)$, et la multi-application Γ est Pettis uniformément intégrable.

Notre théorème d'existence généralise le résultat obtenu dans [15], dans le cas où $m = 3$ et $\gamma = 0$.

Dans la deuxième section, nous nous sommes intéressées à l'étude de l'existence de solutions pour une inclusion différentielle avec retard dans un espace de Banach séparable de la forme

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) \in F(t, u(t), u(h(t)), \dot{u}(t)) + H(t, u(t), u(h(t)), \dot{u}(t)), \quad p.p.\ t \in [0,1] \\ u(t) = \varphi(t), \ \ \forall t \in [-r, 0] \\ u(0) = 0; \ \ u(\theta) = u(1), \end{cases}$$

où F est une multi-application à valeurs convexes et est semicontinue supérieurement sur $E \times E \times E$, tandis que H est semicontinue inférieurement et h est une application bornée et continue sur $[0,1]$. L'existence de solutions est obtenue sous les hypothèses : $\mathrm{F}(t,x,y,z) \subset \Gamma_1(t)$, $\mathrm{H}(t,x,y,z) \subset \Gamma_2(t)$, où $\Gamma_1 : [0,1] \rightrightarrows E$ est une multi-application Pettis uniformément intégrable et $\Gamma_2 : [0,1] \rightrightarrows E$ est une multi-application intégrablement bornée.

L'existence de solutions pour les problèmes du second ordre avec retard ont fait l'objet de nombreux travaux [17, 33, 35, 36, 52, 65]. Dans [17], les auteurs ont étudié dans un espace de Banach séparable, l'existence de solutions pour l'inclusion différentielle avec retard de la forme

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) \in F(t, u(t), u(h(t)), \dot{u}(t)), \ \ p.p.\ t \in [0,1] \\ u(t) = \varphi(t), \ \ \forall t \in [-r, 0] \\ u(0) = 0; \ \ u(\theta) = u(1). \end{cases}$$

avec F semicontinue supérieurement et intégrablement bornée.

3.2 Résultat d'existence pour une inclusion différentielle du second ordre avec des conditions aux limites en m-points

Avant de donner le résultat principal de cette section, nous rappelons quelques résultats préliminaires. On commence par une Proposition où nous démontrons quelques propriétés d'une fonction de type Green associée aux données m et γ (Voir [30] pour plus de détails), afin d'établir l'existence de solutions dans $\mathbf{W}^{2,1}_{P,E}([0,1])$ de l'inclusion différentielle suivante

$$(\mathcal{P}_\Gamma) \begin{cases} \ddot{u}(t) + \gamma\dot{u}(t) \in \Gamma(t) \quad \text{p.p. } t \in [0,1] \\ u(0) = 0; \quad u(1) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i u(\eta_i), \end{cases}$$

avec $\Gamma \in \mathbf{P}^1_E([0,1])$.

Rappelons que dans le cas où $m = 3$ et $\gamma = 0$, l'existence de solutions pour cette inclusion différentielle est bien connue. Voir par exemple [15].

Considérons l'hypothèse suivante

(A) Soit $\gamma > 0$, $m > 3$ un nombre entier, $0 < \eta_1 < \eta_2 < ... < \eta_{m-2} < 1$ et $\alpha_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, ..., m-2)$ satisfaisant la condition

$$\sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i - 1 + \exp(-\gamma) - \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i \exp(-\gamma\eta_i) \neq 0.$$

Proposition 3.2.1 *Supposons (A) satisfaite. Soit E un espace de Banach séparable et soit $G : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie dans la Proposition 2.2.1 (Chapitre 2).*

(1) Si $u \in \mathbf{W}^{2,1}_{P,E}([0,1])$ avec $u(0) = 0$ et $u(1) = \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i u(\eta_i)$, alors

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)\Big(\ddot{u}(s) + \gamma\dot{u}(s)\Big)ds, \quad \forall t \in [0,1].$$

(2) Pour $f \in \mathbf{P}^1_E([0,1])$ et pour $u_f : [0,1] \to E$ la fonction définie par

$$u_f(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds, \quad \forall t \in [0,1],$$

on a

(2i) $u_f(0) = 0$ et $u_f(1) = \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i u(\eta_i)$.

(2ii) La fonction $t \mapsto u_f(t)$ *est continue de* $[0,1]$ *dans* E, *i.e.,* $u_f \in \mathbf{C}_E([0,1])$.
(2iii) La fonction u_f *est dérivable sur* $[0,1]$ *et sa dérivée* $\dot{u}_f$ *est définie par*

$$\dot{u}_f(t) = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) f(s) ds.$$

(2vi) La fonction $\dot{u}_f$ *est scalairement dérivable, c'est-à-dire, il existe une application* $\ddot{u}_f : [0,1] \to E$ *telle que, pour chaque* $x' \in E'$, *la fonction scalaire* $\langle x', \dot{u}_f(\cdot)\rangle$ *est p.p dérivable avec*

$$\frac{d}{dt}\langle x', \dot{u}_f(t)\rangle = \langle x', \ddot{u}_f(t)\rangle,$$

de plus

$$\ddot{u}_f(t) + \gamma \dot{u}_f(t) = f(t) \qquad p.p.\ t \in [0,1].$$

Pour la preuve de notre Théorème d'existence, nous avons besoin du lemme suivant de Grothendieck [61]. Voir aussi [37] pour plus de détails concernant la topologie de Mackey pour les suites bornées dans $\mathbf{L}^\infty_{E'}$.

Lemme 3.2.1 *Soit* (g_n) *une suite de fonctions bornées dans* $\mathbf{L}^\infty_{\mathbb{R}}([0,T])$, *telle que* $g_n(t) \to 0$ *ponctuellement. Alors pour toute partie* H *uniformément intégrable dans* $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,T])$ *la suite*

$$\big(\langle g_n, h\rangle\big)_n = \Big(\int_0^T g_n(t) h(t) dt\Big)_n$$

converge uniformément vers 0, *pour tout* $h \in H$.

On donne maintenant notre résultat principal dans cette section, i.e, l'existence de solutions dans $\mathbf{W}^{2,1}_{P,E}([0,1])$ pour l'inclusion différentielle

$$(\mathcal{P}_F) \begin{cases} \ddot{u}(t) + \gamma \dot{u}(t) \in \mathrm{F}(t, u(t), \dot{u}(t)) & \text{p.p. } t \in [0,1] \\ u(0) = 0; \quad u(1) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i u(\eta_i). \end{cases}$$

Théorème 3.2.1 *Supposons* (A) *satisfaite. Soit* $F : [0,1] \times E \times E \rightrightarrows E$ *une multi-application à valeurs convexes compactes, Lebesgue-measurable sur* $[0,1]$ *et semicontinue supérieurement sur* $E \times E$.
Soit $\Gamma : [0,1] \rightrightarrows E$ *une multi-application mesurable scalairement Pettis uniformément intégrable, à valeurs convexes compactes telle que* $F(t,x,y) \subset \Gamma(t)$, *pour tout* $(t,x,y) \in [0,1] \times E \times E$. *Alors le problème* $(\mathcal{P}_F)$ *admet au moins une solution* $u \in \mathbf{W}^{2,1}_{P,E}([0,1])$.

Démonstration. Etape 1. On reprend les idées des preuves dans [7] et [15]

Considérons l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) + \gamma \dot{u}(t) \in \Gamma(t), & \text{p.p. } t \in [0,1], \\ u(0) = 0; \quad u(1) = \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i u(\eta_i), . \end{cases} \tag{3.1}$$

On doit démontrer que l'ensemble $\mathbf{X}_\Gamma$ des solutions dans $\mathbf{W}^{2,1}_{P,E}([0,1])$ de (3.1) est non vide et convexe compact dans l'espace de Banach $\mathbf{C}^1_E([0,1])$ muni de la norme $\|.\|_{C^1}$.
En effet, soit

$$\mathbf{S}^{Pe}_\Gamma = \{ f \in \mathbf{P}^1_E([0,1]) : f(t) \in \Gamma(t) \}$$

l'ensemble des sélections Pettis-intégrables de Γ.
On a $\mathbf{S}^{Pe}_\Gamma$ est non vide et séquentiellement compact pour la topologie de la convergence ponctuelle sur $\mathbf{L}^\infty_\mathbb{R} \otimes E'$. De plus, l'intégrale multivoque :

$$\int_0^1 \Gamma(t)dt = \left\{ \int_0^1 f(t)dt : \quad f \in \mathbf{S}^{Pe}_\Gamma \right\}$$

est convexe compacte pour la norme de E. (Voir [3, 4, 37]).
D'après la Proposition 3.2.1, l'ensemble $\mathbf{X}_\Gamma$ des solutions dans $\mathbf{W}^{2,1}_{P,E}([0,1])$ de (3.1) est non vide et est donné par

$$\mathbf{X}_\Gamma = \left\{ u_f : [0,1] \to E, u_f(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds, \ \ \forall t \in [0,1]; \ f \in \mathbf{S}^{Pe}_\Gamma \right\}.$$

Il est clair que $\mathbf{X}_\Gamma$ est compact.
En effet, si (t_n) est une suite de points de $[0,1]$, convergeant vers $t \in [0,1]$ on aura

$$\begin{aligned} \|u_f(t_n) - u_f(t)\| &= \sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} |\langle x', u_f(t_n) - u_f(t) \rangle| \\ &= \sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} |\langle x', \int_0^1 G(t_n,s)f(s) - G(t,s)f(s))ds \rangle| \\ &= \sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} |\int_0^1 G(t_n,s) - G(t,s)\langle x', f(s)\rangle ds| \\ &\leq \sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} \int_0^1 |G(t_n,s) - G(t,s)||\delta^*(x', \Gamma(s))|ds, \end{aligned}$$

et

$$\|\dot{u}_f(t_n) - \dot{u}_f(t)\| \leq \sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} \int_0^1 \left| \frac{\partial G}{\partial t}(t_n,s) - \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) \right| |\delta^*(x', \Gamma(s))|ds,$$

pour tout $f \in \mathbf{S}^{Pe}_\Gamma$.
Comme Γ est scalairement Pettis-intégrable, l'ensemble

$$\{ |\delta^*(x', \Gamma(.)|; \|x'\| \leq 1 \}$$

est uniformément intégrable dans $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1])$, et les suites $(v_n(.)) := \Big(\big|G(t_n,.) - G(t,.)\big|\Big)$ et $(w_n(.)) := \Big(\big|\dfrac{\partial G}{\partial t}(t_n,.) - \dfrac{\partial G}{\partial t}(t,.)\big|\Big)$ sont uniformément bornées et convergent ponctuellements vers 0, en appliquant le Lemme 3.2.1, on obtient

$$\sup_{x'\in\overline{B}_{E'}} \int_0^1 \big|G(t_n,s) - G(t,s)\big|\big|\delta^*(x',\Gamma(s))\big|ds$$

et

$$\sup_{x'\in\overline{B}_{E'}} \int_0^1 \Big|\frac{\partial G}{\partial t}(t_n,s) - \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\Big|\big|\delta^*(x',\Gamma(s))\big|ds$$

convergent vers 0.

Par conséquent $\mathbf{X}_\Gamma$ et $\{\dot{u}_f :\ u_f \in \mathbf{X}_\Gamma\}$ sont équicontinus dans $\mathbf{C}_E([0,1])$.

D'autre part, pour chaque $t \in [0,1]$,

$$\mathbf{X}_\Gamma(t) = \{u_f(t) : u_f \in \mathbf{X}_\Gamma\}$$

et

$$\{\dot{u}_f(t) : u_f \in \mathbf{X}_\Gamma\}$$

sont relativement compacts dans E puisque

$$\mathbf{X}_\Gamma(t) \subset \Big\{\int_0^1 G(t,s)\Gamma(s)ds\Big\}$$

et

$$\{\dot{u}_f(t) : u_f \in \mathbf{X}_\Gamma\} \subset \Big\{\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\Gamma(s)ds\Big\}$$

et $\Big\{\int_0^1 G(t,s)\Gamma(s)ds\Big\}$, $\Big\{\int_0^1 \dfrac{\partial G}{\partial t}(t,s)\Gamma(s)ds\Big\}$ sont compacts dans E.

En effet, d'après les propriétés des fonctions G et $\dfrac{\partial G}{\partial t}$, on voit bien que les multi-applications $G(t,.)\Gamma(.)$ et $\dfrac{\partial G}{\partial t}(t,.)\Gamma(.)$ vérifient les mêmes hypothèses qu'on a supposé sur la multi-application $\Gamma(.)$.

On déduit que $\Big\{\int_0^1 G(t,s)\Gamma(s)ds\Big\}$ et $\Big\{\int_0^1 \dfrac{\partial G}{\partial t}(t,s)\Gamma(s)ds\Big\}$ sont compacts dans E.

Alors $\mathbf{X}_\Gamma(t)$ et $\{\dot{u}_f(t) : u_f \in \mathbf{X}_\Gamma\}$ sont relativement compacts dans E.

D'après le théorème *d'Ascoli-Arzelà* (Théorème 1.4.3), $\mathbf{X}_\Gamma$ est relativement $\|.\|_{\mathbf{C}^1}$-compact dans $\mathbf{C}^1_E([0,1])$.

Démontrons maintenant que $\mathbf{X}_\Gamma$ est fermé dans $\mathbf{C}^1_E([0,1])$.

Soit (f_n) une suite d'éléments de $\mathbf{S}^{Pe}_\Gamma$. Comme $\mathbf{S}^{Pe}_\Gamma$ est séquentiellement compact pour la topologie de la convergence ponctuelle sur $\mathbf{L}^\infty_{\mathbb{R}} \otimes E'$, et la suite (u_{f_n}) est relativement compacte dans $\mathbf{C}^1_E([0,1])$, on peut alors extraire de (f_n) une suite qu'on note aussi (f_n)

qui converge $\sigma(\mathbf{P}^1_E, \mathbf{L}^\infty_{\mathbb{R}} \otimes E')$ vers une fonction $f \in \mathbf{S}^{Pe}_\Gamma$, et telle que (u_{f_n}) converge uniformément vers une fonction continue $\xi \in \mathbf{C}^1_E([0,1])$.
La convergence faible de (f_n) vers f nous permet d'écrire pour chaque $y' \in \mathbf{L}^\infty_{\mathbb{R}} \otimes E'$

$$\lim_{n\to\infty} \langle y', f_n\rangle = \langle y', f\rangle,$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \langle y', f_n(s)\rangle ds &= \lim_{n\to\infty} \langle y', \int_0^1 f_n(s)ds\rangle \\ &= \langle y', \int_0^1 f(s)ds\rangle. \end{aligned}$$

En particulier, pour $y' = G(t,.)x' \in \mathbf{L}^\infty_{\mathbb{R}} \otimes E'$, avec $x' \in E'$ et pour tout $t \in [0,1]$, nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \big\langle x', \int_0^1 G(t,s)f_n(s)ds\big\rangle &= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \big\langle G(t,s)x', f_n(s)\big\rangle ds \\ &= \int_0^1 \langle G(t,s)x', f(s)\rangle ds \\ &= \Big\langle x', \int_0^1 G(t,s)f(s)ds\Big\rangle, \end{aligned}$$

et pour $y' = \dfrac{\partial G}{\partial t}(t,.)x'$, nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \Big\langle x', \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f_n(s)ds\Big\rangle &= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \Big\langle \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)x', f_n(s)\Big\rangle ds \\ &= \int_0^1 \Big\langle \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)x', f(s)\Big\rangle ds \\ &= \Big\langle x', \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)ds\Big\rangle. \end{aligned}$$

Comme $\{\int_0^1 G(t,s)\Gamma(s)ds\}$ et$\{\int_0^1 \dfrac{\partial G}{\partial t}(t,s)\Gamma(s)ds\}$ sont compacts, alors $\big(u_{f_n}(.)\big) = \Big(\int_0^1 G(.,s)f_n(s)ds\Big)$ converge vers $u_f(.) = \int_0^1 G(.,s)f(s)ds$ et $\big(\dot{u}_{f_n}(.)\big) = \Big(\int_0^1 \dfrac{\partial G}{\partial t}(.,s)f_n(s)ds\Big)$ converge vers $\dot{u}_f(.) = \int_0^1 \dfrac{\partial G}{\partial t}(.,s)f(s)ds$.
D'autre part, (u_{f_n}) converge uniformément vers $\xi \in \mathbf{C}^1_E([0,1])$, on conclut alors que $\xi = u_f$, et donc $\mathbf{X}_\Gamma$ est compact dans $\mathbf{C}^1_E([0,1])$.
D'après ce qui procede, une application $u : [0,1] \to E$ est une solution dans $\mathbf{W}^{2,1}_{P,E}([0,1])$ de notre inclusion différentielle, si et seulement si, il existe une fonction $f \in \mathbf{S}^{Pe}_\Gamma$ telle que $u(t) = u_f(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds, \ \ \forall t \in [0,1]$ et $f(t) \in \mathrm{F}(t, u_f(t), \dot{u}_f(t))$ $p.p.t \in [0,1]$.

Etape 2.
Montrons dans cette étape, que pour toutes applications Lebesgue-mesurables

$$v, \quad w : [0,1] \longrightarrow E,$$

il existe une sélection Pettis-intégrable $s \in \mathbf{S}_\Gamma^{Pe}$ telle que

$$s(t) \in F(t, v(t), w(t)) \quad p.p.t \in [0,1].$$

En effet, v et w étant Lebesgue-mesurables, il existe deux suites de fonctions étagées dans E, (v_n), (w_n) qui convergent ponctuellement vers v et w respectivement, pour E muni de la topologie de la convergence forte.
Comme les multi-applications $F(., v_n(.), w_n(.))$ sont Lebesgue-mesurables à valeurs fermées, alors il existe une suite de sélections Lebesgue-mesurables de $F(., v_n(.), w_n(.))$ qu'on note (s_n).

$$s_n(t) \in F(t, v_n(t), w_n(t)) \subset \Gamma(t), \quad \forall t \in [0,1]$$

et donc $s_n \in \mathbf{S}_\Gamma^{Pe}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Or, $\mathbf{S}_\Gamma^{Pe}$ est séquentiellement $\sigma(\mathbf{P}_E^1, L_\mathbb{R}^\infty \otimes E')$-compact, d'après le théorème *d'Eberlein-Ŝmulian* (Théorème 1.4.6), on peut extraire de (s_n) une suite $(s_{\varphi(n)})$ qui converge $\sigma(\mathbf{P}_E^1, L_\mathbb{R}^\infty \otimes E')$ vers une fonction $s \in \mathbf{S}_\Gamma^{Pe}$.
On doit montrer que

$$s(t) \in F(t, v(t), w(t)), \text{ p.p. } t \in [0,1].$$

Soit $(e_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dense pour la topologie de *Mackey* $\tau(E', E)$ (Définition 1.1.3).
On applique le Théorème de *Banach-Mazur*(Théorème 1.4.7) à la suite $(\langle e_k^*, s_{\varphi(n)}(.)\rangle)_n$, $k \in \mathbb{N}$.
On conclut l'existence de la suite (z_n), $z_n \in co\{\langle e_k^*, s_{\varphi(m)}(.)\rangle : m \geqslant n\}$ telle que (z_n) converge fortement vers $\langle e_k^*, s(.)\rangle$.
Soit $A \subset [0,1]$ un ensemble Lebesgue-mesurable, comme $F(., v(.), w(.))$ est mesurable, on utilisant le Lemme de *Fatou* (Lemme 1.3.1) et la semi continuité supérieure de $F(t, ., .)$ on obtient

$$\begin{aligned}
\int_A \langle e_k^*, s(t)\rangle dt &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_A \langle e_k^*, z_n(t)\rangle dt \\
&\leqslant \limsup_{n\longrightarrow\infty} \int_A \delta^*(e_k^*, F(t, v_n(t), w_n(t)))dt \\
&\leqslant \int_A \limsup_{n\longrightarrow\infty} \delta^*(e_k^*, F(t, v_n(t), w_n(t)))dt \\
&= \int_A \delta^*(e_k^*, F(t, v(t), w(t)))dt.
\end{aligned}$$

Alors,

$$\langle e_k^*, s(t)\rangle \leqslant \delta^*(e_k^*, F(t, v(t), w(t)), p.p.\ t \in [0,1], \forall k \in \mathbb{N}.$$

D'autre part, grâce au Lemme 1.1.2 et au Corolaire 1.1.1, nous avons

$$\sup_{x'\in E'}\Big(\langle x', s(t)\rangle - \delta^*(x', F(t,v(t),w(t)))\Big) = \sup_{k\in\mathbb{N}}\Big(\langle e_k^*, s(t)\rangle - \delta^*(e_k^*, F(t,v(t),w(t)))\Big),$$

et puisque F est à valeurs convexes fermées, on utilise la relation 1(Chapitre 1), pour obtenir

$$\begin{aligned} d(s(t),F(t,v(t),w(t))) &= \sup_{x'\in\overline{B}_{E'}}\Big(\langle x', s(t)\rangle - \delta^*(x', F(t,v(t),w(t)))\Big) \\ &\leqslant \sup_{x'\in E'}\Big(\langle x', s(t)\rangle - \delta^*(x', F(t,v(t),w(t)))\Big) \\ &= \sup_{k\in\mathbb{N}}\Big(\langle e_k^*, s(t)\rangle - \delta^*(e_k^*, F(t,v(t),w(t)))\Big) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent $s(t)\in F(t,v(t),w(t))$ *p.p.* $t\in[0,1]$.

Etape 3.

Considérons la multi-application :

$$\Psi : \mathbf{X}_\Gamma \rightrightarrows \mathbf{X}_\Gamma$$

définie par

$$\Psi(u) = \Big\{v\in\mathbf{X}_\Gamma : \ddot{v}(t)+\gamma\dot{v}(t)\in F(t,u(t),\dot{u}(t)),\ p.p.t\in[0,1]\Big\}.$$

Et on doit lui appliquant le Théorème du point fixe de *Kakutani-Ky Fan* pour obtenir l'existence de solution de notre inclusion différentielle. C'est à dire montrons que Ψ est à valeurs non vide, convexes, compacts et semi-continue supérieurement.

Pour tout $u\in\mathbf{X}_\Gamma$, $\Psi(u)$ est non vide, *en effet*, d'après l'étape 2 et la Proposition 3.2.1, pour chaque application $u\in\mathbf{C}_E([0,1])$, il existe une selection Pettis intégrable $g\in\mathbf{S}_\Gamma^{Pe}$ telle que $g(t)\in F(t,u(t),\dot{u}(t)), p.p.\ t\in[0,1]$, alors, l'application v telle que $v(t)=\displaystyle\int_0^1 G(t,s)g(s)ds$ est dans $\Psi(u)$.

D'autre part $\Psi(u)$ est convexe, *en effet*

Soient v_1, $v_2\in\Psi(u)$, $\alpha\in[0,1]$, alors

$$\ddot{v}_1(t)+\gamma\dot{v}_1(t)\in F(t,u(t),\dot{u}(t))\ \ p.p\ sur[0,1]$$

$$\ddot{v}_2(t)+\gamma\dot{v}_2(t)\in F(t,u(t),\dot{u}(t))\ \ p.p\ sur[0,1]$$

Comme $F(t,u(t),\dot{u}(t))$ est convexe, on aura

$$\begin{aligned} (\alpha v_1(t)+(1-\alpha)v_2(t))''+\gamma(\alpha v_1(t)+(1-\alpha)v_2(t))' &= \alpha(\ddot{v}_1(t)+\gamma\dot{v}_1(t))+(1-\alpha)(\ddot{v}_2(t)+\gamma\dot{v}_2(t)) \\ &\in F(t,u(t),\dot{u}(t)) \end{aligned}$$

alors

$$\alpha v_1(.) + (1-\alpha)v_2(.) \in \Psi(u)$$

d'où la convexité de $\Psi(u)$.

Nous avons aussi, pour tout $u \in \mathbf{X}_\Gamma$, $\Psi(u)$ est compact, puisque si on considère une suite (v_n) de $\Psi(u)$, on aura

$$v_n(t) = \int_0^1 G(t,s)\big(\ddot{v}_n(s) + \gamma \dot{v}_n(s)\big)ds, \quad \forall t \in [0,1]$$

avec $w_n(s) = \ddot{v}_n(s) + \gamma \dot{v}_n(s) \in \Gamma(s)$, i.e. $w_n(s) \in \mathbf{S}_\Gamma^{Pe}$.

Puisque $\mathbf{S}_\Gamma^{Pe}$ est séquentiellement $\sigma(\mathbf{P}_E^1, L_\mathbb{R}^\infty \otimes E')$-compact, d'après le Théorème *d'Eberlein-$\hat{S}$mulian* (Théorème 1.4.6), on peut extraire de (w_n) une sous suite qu'on note aussi (w_n) et qui converge $\sigma(\mathbf{P}_E^1, L_\mathbb{R}^\infty \otimes E')$ vers $f \in \mathbf{S}_\Gamma^{Pe}$.

La suite (v_n) est relativement compacte, donc on peut lui extraire une sous suite notée aussi (v_n) convergeant uniformement vers v, d'après la Proposition 3.2.1, $\ddot{v} + \gamma \dot{v} = f$, p.p sur $[0,1]$.

Nous avons

$$w_n(t) = \ddot{v}_n(t) + \gamma \dot{v}_n(t) \in F(t, u(t), \dot{u}(t)) \;\; p.p.\ t \in [0,1]$$

et (w_n) converge $\sigma(\mathbf{P}_E^1, L_\mathbb{R}^\infty \otimes E')$ vers f.

La semi-continuité supérieure de $F(t,.,.)$, nous permet d'avoir

$$f(t) = \ddot{v}(t) + \gamma \dot{v}(t) \in F(t, u(t), \dot{u}(t)), \quad p.p.t \in [0,1],$$

c'est à dire $v \in \Psi(u)$ et par conséquent, $\Psi(u)$ est compact pour tout $u \in \mathbf{X}_\Gamma$.

Montrons maintenant la semi-continuité supérieure de Ψ, ceci revient à montrer que son graphe

$$gr(\Psi) = \{(u,v) \in \mathbf{X}_\Gamma \times \mathbf{X}_\Gamma : v \in \Psi(u)\}$$

est fermé dans $\mathbf{X}_\Gamma \times \mathbf{X}_\Gamma$.

Soit (u_n, v_n) une suite d'éléments du graphe de Ψ convergeant vers $(u,v) \in \mathbf{X}_\Gamma \times \mathbf{X}_\Gamma$.

D'après la Proposition 3.2.1, (u_n, v_n) converge uniformément vers (u,v), et $(\dot{u}_n, \dot{v}_n)$ converge ponctuellement vers $(\dot{u}, \dot{v})$ pour E muni de la norme de la convergence forte et $(\ddot{u}_n, \ddot{v}_n)$ converge $\sigma(\mathbf{P}_E^1, L_\mathbb{R}^\infty \otimes E')$ vers $(\ddot{u}, \ddot{v})$.

Sachant que

$$\ddot{v}_n(t) + \gamma \dot{v}_n(t) \in F(t, u_n(t), \dot{u}_n(t)), p.p.\ t \in [0,1],$$

en utilisant le Théorème de fermeture (Théorème 1.1.9), on obtient

$$\ddot{v}(t) + \gamma \dot{v}(t) \in F(t, u(t), \dot{u}(t)), \quad p.p.\ t \in [0,1],$$

et donc $v \in \Psi(u)$, i.e. $(u, v) \in gr(\Psi)$.
Donc $gr(\Psi)$ est fermé dans $\mathbf{X}_\Gamma \times \mathbf{X}_\Gamma$, par conséquent Ψ est semi-continue supérieurement. En lui appliquant le Théorème du point fixe de *Kakutani-Ky Fan* (Théorème 1.1.13), on obtient l'existence d'un élément $u \in \mathbf{X}_\Gamma$, tel que $\Psi(u) = u$
i.e

$$\ddot{u}(t) + \gamma \dot{u}(t) \in F(t, u(t), \dot{u}(t)), \quad p.p.\ t \in [0, 1],$$

avec $u(0) = 0; \quad u(1) = \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i u(\eta_i)$.
Ceci achève la démonstration de notre théorème. ■

3.3 Résultat d'existence pour une inclusion différentielle du second ordre avec retard avec des conditions aux limites en 3-points

L'existence de solutions pour un problème différentiel du second ordre avec retard a été étudié par plusieurs auteurs, par exemple, l'équation différentielle du second ordre avec retard de la forme

$$\ddot{u}(t) = f(t, u(t), u(h(t)), \dot{u}(t)), \quad \forall t \in [0, 1],$$

avec les conditions

$$u(t) = \varphi(t), \quad \forall t \in [-r, 0],$$
$$u(T) = B$$

où $h : [0, 1] \to [-r, 1]$ tel que $t - r \leq h(t) \leq t$ et $\varphi : [-r, 0] \to E$ avec $r > 0$, a été étudié par Eloe et all dans [52]. Dans un autre travail de Azzam et all [17], ce type de problème avec retard a été généralisé à une inclusion différentielle avec des conditions aux limites en trois points de la forme

$$\ddot{u}(t) \in F(t, u(t), u(h(t)), \dot{u}(t)), \quad p.p.\ t \in [0, 1],$$

avec les conditions

$$u(t) = \varphi(t), \quad \forall t \in [-r, 0],$$
$$u(0) = 0; \ u(\theta) = u(1),$$

où $F : [0, 1] \times E \times E \times E \rightrightarrows E$ est une multi-application semicontinue supérieurement sur $E \times E \times E$ à valeurs non vides convexes compactes et E un espace de Banach séparable.

Dans cette section, on établit le résultat d'existence de solutions pour l'inclusion différentielle du second ordre avec retard de la forme

$$(\mathcal{P}_r)\begin{cases} \ddot{u}(t) \in F(t,u(t),u(h(t)),\dot{u}(t)) + H(t,u(t),u(h(t)),\dot{u}(t)), & p.p.\ t\in[0,1] \\ u(t)=\varphi(t), \quad \forall t\in[-r,0] \\ u(0)=0; \quad u(\theta)=u(1), \end{cases}$$

où F est une multi-application semicontinue supérieurement sur $E\times E\times E$ et H une autre multi-application semicontinue inférieurement.

Au début, nous donnons un Lemme préliminaire rassemblant quelques propriétés d'une fonction de Green nous permettant de résoudre notre problème d'existence. Voir [7, 12, 15, 27].

Lemme 3.3.1 *Soient E un espace de Banach séparable, $\theta\in]0,1[$ et soit $G:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$ définie par*

$$G(t,s)=\begin{cases} -s & si \quad 0\le s\le t, \\ -t & si \quad t<s\le\theta, \\ t\dfrac{s-1}{1-\theta} & si \quad \theta<s\le 1; \end{cases} \tag{3.2}$$

si $0\le t<\theta$

$$G(t,s)=\begin{cases} -s & si \quad 0\le s<\theta, \\ \dfrac{\theta(s-t)+s(t-1)}{1-\theta} & si \quad \theta\le s\le t, \\ t\dfrac{s-1}{1-\theta} & si \quad t<s\le 1; \end{cases} \tag{3.3}$$

si $\theta\le t\le 1$, alors

(i) $G(.,s)$ est dérivable sur $[0,1]$ sauf sur la diagonale, pour tout $s\in[0,1]$, et sa dérivée est donnée par

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)=\begin{cases} 0 & si \quad 0\le s\le t, \\ -1 & si \quad t<s\le\theta, \\ \dfrac{s-1}{1-\theta} & si \quad \theta<s\le 1; \end{cases} \tag{3.4}$$

si $0\le t<\theta$

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)=\begin{cases} 0 & si \quad 0\le s\le\theta, \\ \dfrac{s-\theta}{1-\theta} & si \quad \theta\le s\le t, \\ \dfrac{s-1}{1-\theta} & si \quad t<s\le 1; \end{cases} \tag{3.5}$$

si $\theta \le t \le 1$

(ii) $G(.,.)$ *et* $\dfrac{\partial G}{\partial t}(.,.)$ *vérifient*

$$\sup_{t,s\in[0,1]} |G(t,s)| \le 1, \quad \sup_{t,s\in[0,1]} |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)| \le 1. \tag{3.6}$$

(iii) Soient $f \in P_E^1([0,1])$, $h \in L_E^1([0,1])$ *et* $u_f, u_h : [0,1] \to E$ *les fonctions définies par*

$$u_f(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds \ \ ,\forall t \in [0,1] \tag{3.7}$$

$$u_h(t) = \int_0^1 G(t,s)h(s)ds \ \ ,\forall t \in [0,1]. \tag{3.8}$$

Alors on a les résultats suivants

1) $t \longmapsto u_f(t)$ *et* $t \longmapsto u_h(t)$ *sont des fonctions continues de* $[0,1]$ *vers* E, *i.e* $u_f, u_h \in \mathbf{C}_E([0,1])$.

2) $u_f(0) = 0; \quad u_f(\theta) = u_f(1)$ *et* $u_h(0) = 0; \quad u_h(\theta) = u_h(1)$.

3) *La fonction* $u_h(.)$ *est dérivable et sa dérivée* $\dot{u}_h(.)$ *vérifie*

$$\dot{u}_h(t) = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)h(s)ds, \tag{3.9}$$

pour tout $t \in [0,1]$. *Par conséquent* $\dot{u}_h$ *est une fonction continue de* $[0,1]$ *dans* E.

4) *La fonction* $\dot{u}_h(.)$ *est scalairement dérivable, i.e., pour tout* $x' \in E'$, *la fonction scalaire* $\langle x', \dot{u}_h(.)\rangle$ *est dérivable et sa dérivée faible* $\ddot{u}_h(.)$ *est égale à* $h(.)$ *presque partout,*

$$\ddot{u}_h(.) \quad = \quad h(.) \ \ p.p. \ t \in [0,1]. \tag{3.10}$$

5) *La fonction* $u_f(.)$ *est scalairement dérivables, i.e, pour tout* $x' \in E'$, *la fonction scalaire* $\langle x', u_f(.)\rangle$ *est dérivable, et sa dérivée* $\dot{u}_h$ *satisfait*

$$\begin{aligned} \langle x', \dot{u}_f(t)\rangle &= \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\langle x', f(s)\rangle ds \\ &= \langle x', \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s), f(s)ds\rangle \end{aligned}$$

pour tout $t \in [0,1]$ *et pour tout* $x' \in E'$.

Par conséquent

$$\dot{u}_f(t) = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)ds, \quad \forall t \in [0,1] \tag{3.11}$$

et $\dot{u}_f$ *est une fonction continue de* $[0,1]$ *vers* E.

6) *La fonction* $\dot{u}_f$ *est scalairement dérivable, i.e pour tout* $x' \in E'$, *la fonction scalaire* $\langle x', \dot{u}_f(.)\rangle$ *est dérivable, et la dérivée faible de* $\dot{u}_f$ *notée* $\ddot{u}_f$ *et égale à* f *p.p.*

On donne maintenant une conséquence du Lemme 3.3.1 qui nous sera aussi utile par la suite.

Proposition 3.3.1 *Soit E un espace de Banach séparable et soit $f : [0,1] \to E$ une application dans $\mathbf{P}^1_E([0,1])$). Alors l'application*

$$u_f(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds, \; \forall\, t \in [0,1]$$

est la solution unique dans $\mathbf{W}^{2,1}_{P,E}([0,1])$) du problème

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) = f(t), & \forall t \in [0,1], \\ u(0) = 0; \; u(\theta) = u(1). \end{cases}$$

Pour la preuve de notre résultat principal, nous avons aussi besoin du Théorème de point fixe qui est l'analogue multivoque du principe de continuation de Shaefer. Pour plus de détails sur la théorie du point fixe nous référons le lecteur à [55].

Théorème 3.3.1 *Soit Y un espace vectoriel normé et $A : Y \rightrightarrows Y$ une multi-application compacte semicontinue supérieurement à valeurs compactes convexes. Supposons qu'il existe $R > 0$ tel que*

$$x \in \lambda A x \;\; (0 < \lambda \leq 1) \Rightarrow \|x\| \leq R. \tag{3.12}$$

Alors, A admet un point fixe dans la boule $\overline{\mathbf{B}}(0,R)$.

Théorème 3.3.2 *[75] Soient (Ω, Σ, μ) un espace mesuré, E un espace de Banach.*
a) Si $f : \Omega \to E$ est μ-Bochner intégrable, alors f est μ-Pettis intégrable.
et

$$\int_\Omega^{Bochner} f d\mu = \int_\Omega^{Pettis} f d\mu; \tag{3.13}$$

b) la réciproque est fausse.

Théorème 3.3.3 *[75]*

Une multi-application $\Gamma : [0,1] \rightrightarrows E$ scalairement intégrable est scalairement Pettis uniformément intégrabe si et seulement si

$$\{\langle x', \Gamma(t)\rangle : \|x'\| \leq 1\} = \{\langle x', f(t)\rangle : \; f(t) \in \Gamma(t), \|x'\| \leq 1\}, \quad \forall t \in [0,1]$$

est uniformement intégrable dans $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1])$, où ce qui est équivalent à l'uniforme intégrabilité dans $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1])$ de l'ensemble

$$\{|\delta^*(x', \Gamma(t))| : \|x'\| \leq 1\}$$

pour tout $t \in [0,1]$.

On donne maintenant notre deuxième résultat principal de ce chapitre.

Théorème 3.3.4 *Soit E un espace de Banach séparable, soit $F : [0,1] \times E \times E \times E \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs convexes compactes, semicontinue supérieurement sur $E \times E \times E$, Lebesgue-mesurable sur $[0,1]$. Soit $H : [0,1] \times E \times E \times E \rightrightarrows E$ une autre multi-application à valeurs non vides compactes fermées, $\mathcal{L}([0,1]) \otimes \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(E)$-mesurable et semicontinue inférieurement sur $E \times E \times E$.*
Supposons que, pour $i = 1,2$, il existe une multi-application $\Gamma_i : [0,1] \rightrightarrows E$ mesurable à valeurs convexes compactes, telles que $F(t,x,y,z) \subset \Gamma_1(t)$, $H(t,x,y,z) \subset \Gamma_2(t)$ pour tout $(t,x,y,z) \in [0,1] \times E \times E \times E$, Γ_1 Pettis uniformément intégrable et Γ_2 intégrablement bornée, c'est à dire, il existe une application $k \in \mathbf{L}^1_E([0,1])$ telle que $\|v\| \leq |k(t)|$ p.p.t $\in [0,1]$ pour tout $v \in \Gamma_2(t)$.
Soit r un nombre réel positif et soient $h : [0,1] \to [-r,1]$, une fonction continue telle que $t - r < h(t) < t$, et $\varphi \in \mathbf{C}_E([-r,0])$ avec $\varphi(0) = 0$.
Alors l'inclusion différentielle

$$(\mathcal{P}_r) \begin{cases} \ddot{u}(t) \in F(t,u(t),u(h(t)),\dot{u}(t)) + H(t,u(t),u(h(t)),\dot{u}(t)), & p.p.\ t \in [0,1] \\ u(t) = \varphi(t), \quad \forall t \in [-r,0] \\ u(0) = 0; \quad u(\theta) = u(1) \end{cases}$$

admet au moins une solution dans $\mathbf{X} := \mathbf{C}_E([-r,1]) \cap \mathbf{W}^{2,1}_{P,E}([0,1])$ muni de la norme

$$\|u\|_{\mathbf{X}} = \max\{\max_{t\in[-r,1]} \|u(t)\|, \max_{t\in[0,1]} \|\dot{u}(t)\|\}.$$

Démonstration.

Etape 1. Considérons pour tout $t \in [0,1]$, $\Gamma(t) = \Gamma_1(t) + \Gamma_2(t)$, l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) \in \Gamma(t), & \text{p.p. } t \in [0,1], \\ u(t) = \varphi(t), & \forall t \in [-r,0], \\ u(0) = 0; \quad u(\theta) = u(1). \end{cases}$$

et on doit montrer que l'ensemble $\mathbf{X}_\Gamma$ des solutions dans $\mathbf{W}^{2,1}_{P,E}([0,1])$ est non vide et convexe compact dans l'espace de Banach $\mathbf{X}$ muni de la norme $\|.\|_{\mathbf{X}}$.
On suppose que $0 \in \Gamma_i(t)$, pour tout $t \in [0,1]$ et $i = 1,2$, quitte à prendre $\overline{co}(\{0\} \cup \Gamma_i(t))$.
Soit pour tout $t \in [0,1]$, $\Gamma(t) = \Gamma_1(t) + \Gamma_2(t)$ et remarquons que la multi-application Γ est mesurable, scalairement Pettis uniformément intégrable, à valeurs convexes compactes.
En effet, Γ est mesurable, car Γ est somme de deux multi-applications mesurables définies sur E qui est un espace de Banach séparable (Théorème 1.1.3).
D'autre part, Γ est scalairement Pettis uniformément intégrable, puisque Γ_1 est scalairement Pettis uniformément intégrable et Γ_2 est intégrablement bornée, par les Théorèmes

3.3.2 et 3.3.3, les ensembles $\{\langle x', \Gamma_1(.)\rangle, \|x'\| \leq 1\}$ et $\{\langle x', \Gamma_2(.)\rangle, \|x'\| \leq 1\}$ sont uniformément integrables dans $\mathbf{L}^1_E([0,1])$, on conclut que l'ensemble

$$\begin{aligned}\{\langle x', \Gamma(.)\rangle, \|x'\| \leq 1\} &= \{\langle x', \Gamma_1(.) + \Gamma_2(.)\rangle, \|x'\| \leq 1\}\\ &= \{\langle x', \Gamma_1(.)\rangle + \langle x', \Gamma_2(.)\rangle, \|x'\| \leq 1\}\\ &= \{\langle x', \Gamma_1(.)\rangle, \|x'\| \leq 1\} + \{\langle x', \Gamma_2(.)\rangle, \|x'\| \leq 1\}\end{aligned}$$

et uniformément intégrable dans $\mathbf{L}^1_E([0,1])$. D'où par le Théorème 3.3.3, Γ est scalairement Pettis uniformément intégrable.
Montrons que $\Gamma(t)$ est convexe, pour tout $t \in [0,1]$.
Soient $x, y \in \Gamma(t)$ et $\alpha \in [0,1]$, alors ils existent $x_1 \in \Gamma_1(t)$, $x_2 \in \Gamma_2(t)$ tels que

$$x = x_1 + x_2$$

et il existent $y_1 \in \Gamma_1(t)$, $\exists y_2 \in \Gamma_2(t)$ tels que

$$y = y_1 + y_2$$

$$\alpha x + (1-\alpha)y = \Big(\alpha x_1 + (1-\alpha)y_1\Big) + \Big(\alpha x_2 + (1-\alpha)y_2\Big).$$

Comme Γ_1 et Γ_2 sont à valeurs convexes nous avons

$$\alpha x_1 + (1-\alpha)y_1 \in \Gamma_1(t)$$

et

$$\alpha x_2 + (1-\alpha)y_2 \in \Gamma_2(t),$$

alors $\alpha x + (1-\alpha)y \in \Gamma(t)$, d'où la convexité de $\Gamma(t)$.
D'autre part, $\Gamma(t)$ est compact pour tout $t \in [0,1]$. *En effet*,
soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $\Gamma(t)$. Alors, il existe deux suite (y_n) de points de $\Gamma_1(t)$ et (z_n) de points de $\Gamma_2(t)$, telles que $x_n = y_n + z_n$.
Comme Γ_1, Γ_2 sont à valeurs compactes, alors on peut extraire de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous suite $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, qui converge vers $y \in \Gamma_1(t)$, et de $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ une sous suite $(z_{n_{k'}})_{k'\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $z \in \Gamma_2(t)$. Alors, la suite $(x_{n_{k'}})$ telle que $x_{n_{k'}} = y_{n_{k'}} + z_{n_{k'}}$ converge vers $x = y + z \in \Gamma(t)$, d'où la compacité de $\Gamma(t)$.
Considérons l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) \in \Gamma(t), & \text{p.p. } t \in [0,1], \\ u(t) = \varphi(t), & \forall t \in [-r, 0], \\ u(0) = 0; \quad u(\theta) = u(1). \end{cases} \tag{3.14}$$

On doit montrer que l'ensemble $\mathbf{X}_\Gamma$ des solutions dans $\mathbf{W}^{2,1}_{P,E}([0,1])$ de (3.14) est non vide et convexe compact dans l'espace de Banach $\mathbf{X}$ muni de la norme $\|.\|_{\mathbf{X}}$.
En effet, soit

$$\mathbf{S}^{Pe}_\Gamma = \{f \in \mathbf{P}^1_E : f(t) \in \Gamma(t)\}$$

l'ensemble des sélections Pettis-intégrables de Γ.
On a $\mathbf{S}^{Pe}_\Gamma$ est non vide et séquentiellement compact pour la topologie de la convergence ponctuelle sur $\mathbf{L}^\infty_\mathbb{R} \otimes E'$. De plus, l'intégrale multivoque

$$\int_0^1 \Gamma(t)dt = \{\int_0^1 f(t)dt : \quad f \in \mathbf{S}^{Pe}_\Gamma\}$$

est convexe compacte pour la norme de E. (Voir [3, 4, 32]).
D'après le Lemme 3.3.1 et la Proposition 3.3.1, l'ensemble $\mathbf{X}_\Gamma$ des solutions dans $\mathbf{W}^{2,1}_{P,E}([0,1])$ de (3.14) est non vide et

$$\mathbf{X}_\Gamma = \Big\{u_f : [-r,1] \to E : \ u_f(t) = \varphi(t) \ \forall t \in [-r,0] \text{ et } u_f(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds, \quad \forall t \in [0,1]; f \in \mathbf{S}^{Pe}_\Gamma\Big\}.$$

L'ensemble $\mathbf{X}_\Gamma$ est convexe. En effet, soient $u_{f_1},\ u_{f_2} \in \mathbf{X}_\Gamma$ et $\lambda \in]0,1[$. Alors

$$u_{f_1}(t) = \varphi(t),\ \forall t \in [-r,0] \text{ et } u_{f_1}(t) = \int_0^1 G(t,s)f_1(s)ds,\ \forall t \in [0,1]$$

et

$$u_{f_2}(t) = \varphi(t)\ \forall t \in [-r,0] \text{ et } u_{f_2}(t) = \int_0^1 G(t,s)f_2(s)ds, \forall t \in [0,1]$$

avec $f_1,\ f_2 \in \mathbf{S}^{Pe}_\Gamma$. Par conséquent, pour $t \in [-r,0]$

$$\begin{aligned}\big(\lambda u_{f_1} + (1-\lambda)u_{f_2}\big)(t) &= \lambda u_{f_1}(t) + (1-\lambda)u_{f_2}(t)\\ &= \lambda\varphi(t) + (1-\lambda)\varphi(t)\\ &= \varphi(t)\end{aligned}$$

et pour $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}\big(\lambda u_{f_1} + (1-\lambda)u_{f_2}\big)(t) &= \lambda u_{f_1}(t) + (1-\lambda)u_{f_2}(t)\\ &= \lambda\int_0^1 G(t,s)f_1(s)ds + (1-\lambda)\int_0^1 G(t,s)f_2(s)ds\\ &= \int_0^1 G(t,s)\big(\lambda f_1(s) + (1-\lambda)f_2(s)\big)ds\\ &= \int_0^1 G(t,s)\big(\lambda f_1 + (1-\lambda)f_2\big)(s)ds,\end{aligned}$$

comme $f_1, f_2 \in \mathbf{S}_\Gamma^{Pe}$ et $\mathbf{S}_\Gamma^{Pe}$ est convexe on obtient, $\lambda f_1 + (1-\lambda) f_2 \in \mathbf{S}_\Gamma^{Pe}$. On conclut alors que, $\lambda u_{f_1} + (1-\lambda) u_{f_2} \in \mathbf{X}_\Gamma$, d'où la convexité de $\mathbf{X}_\Gamma$.
Montrons maintenant que $\mathbf{X}_\Gamma$ est compact dans $(\mathbf{X}, \|.\|_\mathbf{X})$. Soit $t, \tau \in [0,1]$, nous avons pour tout $u_f \in \mathbf{X}_\Gamma$

$$\begin{aligned} \|u_f(t) - u_f(\tau)\| &= \sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} |\langle x', u_f(t) - u_f(\tau)\rangle| \\ &= \sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} |\langle x', \int_0^1 G(t,s) f(s) - G(\tau,s) f(s)) ds\rangle| \\ &= \sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} | \int_0^1 \big(G(t,s) - G(\tau,s)\big) \langle x', f(s)\rangle ds| \\ &\leq \sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} \int_0^1 |G(t,s) - G(\tau,s)| |\delta^*(x', \Gamma(s))| ds, \end{aligned}$$

et

$$\|\dot{u}_f(t) - \dot{u}_f(\tau)\| \leq \sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} \int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) - \frac{\partial G}{\partial t}(\tau,s)| |\delta^*(x', \Gamma(s))| ds.$$

Les applications G et $\dfrac{\partial G}{\partial t}$ sont continues dans l'ensemble compact $[0,1] \times [0,1]$, donc elles sont uniformément continues, de plus, l'ensemble $\{|\delta^*(x', \Gamma(.))| \; : \; x' \in \overline{\mathbf{B}}_{E'}\}$ est uniformément intégrable dans $\mathbf{L}^1_\mathbb{R}([0,1])$ (Théorème 3.3.3), en appliquant le Lemme 3.2.1, on obtient

$$\sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} \int_0^1 |G(t,s) - G(\tau,s)| |\delta^*(x', \Gamma(s))| ds$$

et

$$\sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} \int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) - \frac{\partial G}{\partial t}(\tau,s)| |\delta^*(x', \Gamma(s))| ds$$

convergent vers 0 quand $|t - \tau| \to 0$.
Par conséquent $\mathbf{X}_\Gamma$ et $\{\dot{u}_f : \; u_f \in \mathbf{X}_\Gamma\}$ sont équicontinus dans $\mathbf{C}_E([0,1])$.
Comme $\varphi \in \mathbf{C}_E([-r,0])$, alors $\mathbf{X}_\Gamma$ est équicontinu dans $\mathbf{X}$.
De plus, pour chaque $t \in [-r,1]$ et chaque $\tau \in [0,1]$, les ensembles $\mathbf{X}_\Gamma(t) = \{u_f(t) : \; u_f \in \mathbf{X}_\Gamma\}$ et $\{\dot{u}_f(\tau) : \; u_f \in \mathbf{X}_\Gamma\}$ sont relativement compacts dans E puisque

$$\mathbf{X}_\Gamma(t) \subset \Big\{ \int_0^1 G(t,s) \Gamma(s) ds \Big\} \quad \forall t \in [0,1];$$

$$\mathbf{X}_\Gamma(t) = \{\varphi(t)\} \quad \forall t \in [-r,0];$$

$$\{\dot{u}_f(\tau) : u_f \in \mathbf{X}_\Gamma\} \subset \Big\{ \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(\tau,s) \Gamma(s) ds \Big\} \quad \forall \tau \in [0,1]$$

et $\Big\{\int_0^1 G(t,s)\Gamma(s)ds\Big\}$, $\Big\{\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(\tau,s)\Gamma(s)ds\Big\}$ sont compacts dans E.
En effet, d'après les propriétés de la fonction G, on voit bien que les multi-applications $G(t,.)\Gamma(.)$ et $\frac{\partial G}{\partial t}(t,.)\Gamma(.)$ vérifient les mêmes hypothèses qu'on a supposées sur la multi-application $\Gamma(.)$.
On déduit que $\{\int_0^1 G(t,s)\Gamma(s)ds\}$ et $\{\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\Gamma(s)ds\}$ sont compacts dans E.
Alors $\mathbf{X}_\Gamma(t),\ t\in[-r,1]$, et $\{\dot{u}_f(\tau) : u_f \in \mathbf{X}_\Gamma\},\ \tau\in[0,1]$ sont relativement compacts dans E.
D'après le théorème *d'Ascoli-Arzelà* (Théorème 1.4.2), $\mathbf{X}_\Gamma$ est relativement compact dans $\mathbf{C}_E([-r,1])$ et par conséquent $\mathbf{X}_\Gamma$ est relativement compact dans $(\mathbf{X},\|.\|_{\mathbf{X}})$.
Montrons maintenant que $\mathbf{X}_\Gamma$ est fermé dans $(\mathbf{X},\|.\|_{\mathbf{X}})$.
Soit (u_{f_n}) une suite d'éléments de $\mathbf{X}_\Gamma$ convergeant uniformément vers u dans $(\mathbf{X},\|.\|_{\mathbf{X}})$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, nous avons

$$u_{f_n}(t) = \int_0^1 G(t,s)f_n(s)ds,\quad \forall t\in[0,1]$$

et $u_{f_n}(t) = \varphi(t)$ pour tout $t\in[-r,0]$, et $f_n \in \mathbf{S}_\Gamma^{Pe}$. Comme $\mathbf{S}_\Gamma^{Pe}$ est séquentiellement compact pour la topologie de la convergence ponctuelle sur $\mathbf{L}^\infty_{\mathbb{R}}\otimes E'$, on peut alors lui extraire une sous suite qu'on note aussi (f_n) et qui converge $\sigma(\mathbf{P}^1_E, \mathbf{L}^\infty_{\mathbb{R}}\otimes E')$ vers une fonction $f\in\mathbf{S}_\Gamma^{Pe}$.
La convergence faible dans $\mathbf{P}^1_E([0,1])$ de (f_n) vers f nous permet d'écrire pour chaque $y'\in\mathbf{L}^\infty_{\mathbb{R}}\otimes E'$

$$\lim_{n\to\infty}\langle y', f_n\rangle = \langle y', f\rangle$$

c'est à dire

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \langle y', f_n(s)\rangle ds &= \lim_{n\to\infty}\langle y', \int_0^1 f_n(s)ds\rangle\\ &= \langle y', \int_0^1 f(s)ds\rangle.\end{aligned}$$

En particulier, pour $y' = G(t,.)x' \in \mathbf{L}^\infty_{\mathbb{R}}\otimes E'$, avec $x'\in E'$ et pour tout $t\in[0,1]$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\langle x', \int_0^1 G(t,s)f_n(s)ds\rangle &= \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \langle G(t,s)x', f_n(s)\rangle ds\\ &= \int_0^1 \langle G(t,s)x', f(s)\rangle ds\\ &= \langle x', \int_0^1 G(t,s)f(s)ds\rangle,\end{aligned}$$

et en prenant $y' = \dfrac{\partial G}{\partial t}(t,.)x'$ nous obtenons

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \langle x', \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) f_n(s) ds\rangle &= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \langle \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)x', f_n(s)\rangle ds \\
&= \int_0^1 \langle \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)x', f(s)\rangle ds \\
&= \langle x', \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) f(s) ds\rangle.
\end{aligned}$$

Comme les intégrales multivoques $\int_0^1 G(t,s)\Gamma(s)ds$ et $\int_0^1 \dfrac{\partial G}{\partial t}(t,s)\Gamma(s)ds$, $(t \in [0,1])$ sont fortement compactes, alors

$$(u_{f_n}(.)) = \Big(\int_0^1 G(.,s) f_n(s) ds\Big)$$

et

$$(\dot{u}_{f_n}(.)) = \Big(\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(.,s) f_n(s) ds\Big)$$

convergent simplement vers $u_f(.) = \int_0^1 G(.,s)f(s)ds$ et $\dot{u}_f(.) = \int_0^1 \dfrac{\partial G}{\partial t}(.,s)f(s)ds$ respectivement pour E muni de la topologie forte.
D'autre part, (u_{f_n}) converge uniformément vers u dans $(\mathbf{X}, \|.\|_{\mathbf{X}})$, on conclut que

$$u(t) = u_f(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s) ds, \ \ \forall t \in [0,1],$$

et $u_f(t) = \varphi(t)$ pour tout $t \in [-r, 0]$, et par suite $u \in \mathbf{X}_\Gamma$, donc $\mathbf{X}_\Gamma$ est compact dans $(\mathbf{X}, \|.\|_{\mathbf{X}})$.

Etape 2.

D'ans cette étape on doit montrer l'existence d'une sélections continues ϕ de la multi-application H, c'est à dire pour $\mathbf{X}_\Gamma$ muni de la topologie de la convergence uniforme, pour tout $u_f \in \mathbf{X}_\Gamma$

$$\phi(u_f)(t) \in H\big(t, u_f(t), u_f(h(t)), \dot{u}_f(t)\big) \quad \text{p.p. } t \in [0,1].$$

Considérons la multi-application

$$\Phi : \mathbf{X}_\Gamma \rightrightarrows \mathbf{L}^1_E([0,1])$$

définie par

$$\Phi(u_f) = \Big\{ v \in \mathbf{L}^1_E([0,1]) : v(t) \in \ H(t, u_f(t), u_f(h(t)), \dot{u}_f(t)), \ p.p. \ t \in [0,1] \Big\}.$$

En se basant sur le Théorème d'existence d'une sélection continue (Théorème 1.1.10) on va montrer que, pour $\mathbf{X}_\Gamma$ muni de la norme $\|.\|_{\mathbf{X}}$, la multi-application Φ admet une sélection continue.
Montrons tout d'abord que Φ est non vide. Pour tout $u_f \in \mathbf{X}_\Gamma$, considérons l'application

$$\begin{array}{rcl} g : [0,1] & \to & [0,1] \times E \times E \times E \\ t & \mapsto & (t, u_f(t), u_f(h(t)), \dot{u}_f(t)) \end{array}$$

comme $h(.)$, $u_f(.)$ et $\dot{u}_f(.)$ sont continues on conclut que la fonction g est mesurable.
D'autre part, on peut écrire $H(t, u_f(t), u_f(h(t)), \dot{u}_f(t)) = (H \circ h)(t), \ \ \forall t \in [0,1]$.
Soit

$$\begin{array}{rcl} P : [0,1] & \rightrightarrows & E \\ t & \mapsto & P(t) = (H \circ g)(t), \end{array}$$

P est mesurable. En effet, soit V un ouvert de E, nous avons

$$\begin{array}{rcl} P^{-1}(V) & = & \{t \in [0,1]; P(t) \cap V \neq \emptyset\} \\ & = & \{t \in [0,1]; H(g(t)) \cap V \neq \emptyset\} \\ & = & \{t \in [0,1]; g(t) \in H^{-1}(V)\} \\ & = & \{t \in [0,1]; t \in g^{-1}\big(H^{-1}(V)\big) \\ & = & g^{-1}\big(H^{-1}(V)\big). \end{array}$$

La multi-application H étant $\mathcal{L}([0,1]) \otimes \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(E)$-mesurable et V ouvert de E, alors $H^{-1}(V) \in \mathcal{L}([0,1]) \otimes \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(E)$ et comme g est mesurable on aura $g^{-1}\big(H^{-1}(V)\big) \in \mathcal{L}([0,1])$, c'est à dire, $P^{-1}(V) \in \mathcal{L}([0,1])$, et par conséquent P est mesurable, à valeurs fermées. Par le Théorème d'existence de sélection mesurable (Théorème 1.1.4), P admet une sélection mesurable, c'est à dire, il existe une application mesurable $v : [0,1] \to E$ telle que $v(t) \in P(t) = H(t, u_f(t), u_f(h(t)), \dot{u}_f(t))$ et comme $H(t, u_f(t), u_f(h(t)), \dot{u}_f(t)) \subset \Gamma_2(t)$ et Γ_2 intégrablement bornée on conclut que $v \in \mathbf{L}^1_E([0,1])$ et donc $v \in \Phi(u_f)$, d'où la non vacuité de $\Phi(u_f)$.
Montrons maintenant que $\Phi(u_f)$ est fermé. Fixons $u_f \in \mathbf{X}_\Gamma$ et soit $(v_n)_n$ une suite d'éléments de $\Phi(u_f)$ convergeant vers $v \in \mathbf{L}^1_E([0,1])$, alors par extraction d'une sous suite on peut supposer que $(v_n)_n$ converge presque partout vers v. D'autre part, nous avons $v_n \in \Phi(u_f)$, alors $v_n(t) \in H(t, u_f(t), u_f(h(t)), \dot{u}_f(t))$ *p.p.* $t \in [0,1]$ et comme H est à valeurs compactes, on conclut que $v(t) \in H(t, u_f(t), u_f(h(t)), \dot{u}_f(t))$ *p.p.* $t \in [0,1]$, et par suite $\Phi(u_f)$ est fermé.
Montrons maintenant que les valeurs de Φ sont décomposables. Soit $v, w \in \Phi(u_f)$ et soit

$A \in \mathcal{L}([0,1])$, alors

$$\begin{aligned}\big(v\chi_A + (1-\chi_A)w\big)(t) &= v(t)\chi_A(t) + \big(1-\chi_A(t)\big)w(t)\\ &= \begin{cases} v(t) \in H(t, u_f(t), u_f(h(t)), \dot{u}_f(t)), & t \in A\\ w(t) \in H(t, u_f(t), u_f(h(t)), \dot{u}_f(t)), & t \notin A.\end{cases}\end{aligned}$$

Ceci montre que $v\chi_A + (1-\chi_A)w \in \Phi(u_f)$, et par suite $\Phi(u_f)$ est décomposable.
Pour appliquer le théorème de sélections continues (Théorème 1.1.10), il reste à montrer que Φ est semi continue inférieurement.
Soient $u_{f_0} \in \mathbf{X}_\Gamma$, $v_0 \in \Phi(u_{f_0})$ et (u_{f_n}) une suite dans $\mathbf{X}_\Gamma$ convergeant vers u_{f_0} dans $(\mathbf{X}, \|.\|_{\mathbf{X}})$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t \mapsto H\big(t, u_{f_n}(t), u_{f_n}(h(t)), \dot{u}_{f_n}(t)\big)$ admet un graphe mesurable, et par suite elle est mesurable car la $\sigma-$algèbre $\mathcal{L}([0,1])$ est complète, alors, d'après le Théorème 1.1.5, la multi-application $\Omega_n : [0,1] \rightrightarrows E$ définie par
$\Omega_n(t) = \Big\{w \in H(t, u_{f_n}(t), u_{f_n}(h(t)), \dot{u}_{f_n}(t)) :$

$$\|w - v_0(t)\| = d(v_0(t), H(t, u_{f_n}(t), u_{f_n}(h(t)), \dot{u}_{f_n}(t)))\Big\}$$

est mesurable, et par la compacité des valeurs de H, $\Omega_n(.)$ est à valeurs non vides.
Montrons que les valeurs de Ω_n sont fermées. Fixons $t \in [0,1]$ et soit $(v_m)_m$ une suite d'éléments de $\Omega_n(t)$ convergeant vers v dans E, alors $w_m \in H\big(t, u_{f_n}(t), u_{f_n}(h(t)), \dot{u}_{f_n}(t)\big)$ et $\|w_m - v_0(t)\| = d(v_0(t), H\big(t, u_{f_n}(t), u_{f_n}(h(t)), \dot{u}_{f_n}(t)\big)$, H est à valeurs compactes, donc $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} w_m \in H\big(t, u_{f_n}(t), u_{f_n}(h(t)), \dot{u}_{f_n}(t)\big)$ et par suite $w \in H\big(t, u_{f_n}(t), u_{f_n}(h(t)), \dot{u}_{f_n}(t)\big)$, de plus

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} \| w_m - v_0(t) \| = d\Big(v_0(t), H\big(t, u_{f_n}(t), u_{f_n}(h(t)), \dot{u}_{f_n}(t)\big)\Big)$$

et par suite

$$\| w - v_0(t) \| = d\Big(v_0(t), H\big(t, u_{f_n}(t), u_{f_n}(h(t)), \dot{u}_{f_n}(t)\big)\Big).$$

On conclut donc que $w \in \Omega_n(t)$ et donc $\Omega_n(t)$ est fermé.
Alors d'après le théorème d'existence de sélection mesurable (Théorème 1.1.4), pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une application mesurable $v_n : [0,1] \to E$ telle que $v_n(t) \in \Omega_n(t)$, pour tout $t \in [0,1]$, c'est à dire $v_n(t) \in H\big(t, u_{f_n}(t), u_{f_n}(h(t)), \dot{u}_{f_n}(t)\big)$ et

$$\begin{aligned}\lim_{n\longrightarrow\infty} \quad & \| \quad v_n(t) - v_0(t) \|\\ = \quad & \lim_{n\longrightarrow\infty} d\Big(v_0(t), H\big(t, u_{f_n}(t), u_{f_n}(h(t)), \dot{u}_{f_n}(t)\big)\Big)\\ \leqslant \quad & \lim_{n\longrightarrow\infty} \mathcal{H}\Big(H\big(t, u_{f_n}(t), u_{f_n}(h(t)), \dot{u}_{f_n}(t)\big), H\big(t, u_{f_n}(t), u_{f_n}(h(t)), \dot{u}_{f_n}(t)\big)\Big)\\ = \quad & 0,\end{aligned}$$

car H est semicontinue inférieurement sur $E \times E \times E$ et par suite, par le Théorème 1.1.7, H est $\mathcal{H}-$semicontinue inférieurement. La suite (v_n) converge ponctuellement vers v_0.

Comme $v_n(t) \in H\big(t, u_{f_n}(t), u_{f_n}(h(t)), \dot{u}_{f_n}(t)\big) \subset \Gamma_2(t)$ alors $\|v_n(t)\| \leq |\Gamma_2(t)|$ et Γ_2 est intégrablement bornée, en utilisant le Théorème de la convergence dominée de Lebesgue (Théorème 1.3.1) on conclut que $(v_n)_n$ converge fortement vers v_0 dans $\mathbf{L}^1_E([1,0])$.
Par le Théorème 1.1.6, on obtient la semi continuité inférieure de Φ.
En appliquant le Théorème d'existence de sélections continues, (Théorème 1.1.10), on obtient, pour $\mathbf{X}_\Gamma$ muni de la topologie de la convergence uniforme, l'existence d'une application continue $\phi : \mathbf{X}_\Gamma \longrightarrow \mathbf{L}^1_E([0,1])$ telle que $\phi(u_f) \in \Phi(u_f)$, pour tout $u_f \in \mathbf{X}_\Gamma$ c'est à dire

$$\phi(u_f)(t) \in H\big(t, u_f(t), u_f(h(t)), \dot{u}_f(t)\big) \quad \text{p.p. } t \in [0,1].$$

Etape 3. Nous transformons le problème

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \ddot{u}(t) \in F(t, u(t), u(h(t)), \dot{u}(t)) + \phi(u)(t), & p.p. \ t \in [0,1] \\ u(t) = \varphi(t), \quad \forall t \in [-r, 0] \\ u(0) = 0; \quad u(\theta) = u(1). \end{cases}$$

en un problème d'existence d'un point fixe dans l'espace de Banach $\mathbf{X}_\Gamma$. Par le Lemme 3.3.1 et la Proposition 3.3.1, l'existence de solutions de $(\mathcal{P})$ est équivalente au problème de trouver $u \in \mathbf{X}_\Gamma$ telle que

$$\begin{cases} u(t) \in \displaystyle\int_0^1 G(t,s)\Big(F(s, u(s), u(h(s)), \dot{u}(s)) + \phi(u)(s)\Big) ds, \quad \forall t \in [0,1] \\ u(t) = \varphi(t), \quad \forall t \in [-r, 0]. \end{cases} \tag{3.15}$$

Considérons l'opérateur $\mathcal{A}$ sur $\mathbf{X}_\Gamma$ défini par

$$\mathcal{A}u = \Big\{ v \in \mathbf{X};\ v = \varphi \text{ sur } [-r,0] \text{ et } v(t) = \int_0^1 G(t,s) g(s) ds,$$

$$\forall t \in [0,1],\ g = f + \phi(u),\ f \in \mathbf{S}^{Pe}_F(u) \Big\} \tag{3.16}$$

où

$$\mathbf{S}^{Pe}_F(u) = \Big\{ \vartheta \in \mathbf{P}^1_E([0,1]);\ \vartheta(t) \in F(t, u(t), u(h(t)), \dot{u}(t)),\ \text{p.p. } t \in [0,1] \Big\}. \tag{3.17}$$

Alors, l'inclusion intégrale (3.15) est équivalente à l'inclusion

$$u(t) \in \mathcal{A}u(t), \quad \forall t \in [-r, 1]. \tag{3.18}$$

Montrons que $\mathbf{S}^{Pe}_F$ est à valeurs non vides. c'est à dire, pour toutes applications Lebesgue-mesurables $u, w : [0,1] \to E$, $v : [-r,1] \to E$, il existe une sélection Lebesgue-mesurable $s \in \mathbf{S}^{Pe}_{\Gamma_1}$ tel que $s(t) \in F(t, u(t), v(h(t)), w(t))$ p.p.

En effet, u, v, w étant Lebesgue-mesurables, il existe des suites (u_n), (v_n) et (w_n) de fonctions étagées dans E, convergent ponctuellement vers u, v et w respectivement, pour E muni de la topologie forte.
Comme les multi-applications $F(., u_n(.), v_n(h(.)), w_n(.))$ sont Lebesgues-measurables, par le Théorème d'existence de sélection mesurable (Théorème 1.1.4), pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe une selection Lebesgue-measurable s_n de $F(., u_n(.), v_n(h(.)), w_n(.))$.
Puisque $s_n(t) \in F(t, u_n(t), v_n(h(t)), w_n(t)) \subset \Gamma_1(t)$, pour tout $t \in [0,1]$, et $\mathbf{S}^{Pe}_{\Gamma_1}$ est sequentiellement faiblement compact dans $\mathbf{P}^1_E([0,1])$, par le Théorème d'Eberlein-Šmulian (Théorème 1.4.6), on peut extraire de (s_n) une sous suite (s'_n) convergent $\sigma(\mathbf{P}^1_E, \mathbf{L}^\infty_E \otimes E')$ vers $s \in \mathbf{S}^{Pe}_{\Gamma_1}$, c'est-à-dire, pour chaque $x' \in E'$ et chaque $\zeta \in \mathbf{L}^\infty_{\mathbb{R}}([0,1])$ nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \langle \zeta(.)x', s'_n(.)\rangle = \langle \zeta(.)x', s(.)\rangle$$

ou équivalent à écrire

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \langle \zeta(t)x', s'_n(t)\rangle dt = \int_0^1 \langle \zeta(t)x', s(t)\rangle dt,$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \zeta(t)\langle x', s'_n(t)\rangle dt = \int_0^1 \zeta(t)\langle x', s(t)\rangle dt.$$

Cette dernière égalité montre que pour chaque $x' \in E'$, la suite $(\langle x', s'_n(.)\rangle)_n$ est $\sigma(\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}, \mathbf{L}^\infty_{\mathbb{R}})-$convergente vers $\langle x', s(.)\rangle$.
Soit $(e^*_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dense pour la topologie de Mackey $\tau(E', E)$ (Définition 1.1.3).
Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. On applique le Théorème de Banach-Mazur (Théorème 1.4.7) à la suite $(\langle e^*_k, s'_n(.)\rangle)_n$, pour déduire l'existence de la suite (z_n), $z_n \in co\{\langle e^*_k, s'_m(.)\rangle : m \geqslant n\}$ telle que (z_n) converge fortement vers $\langle e^*_k, s(.)\rangle$.
Utilisant cette dernière affirmation, la convergence des suites (u_n), (v_n) et (w_n), la semi-continuité supérieure de $\mathrm{F}(t, ., ., .)$, et la conpacité des valeurs de F, on obtient

$$s(t) \in F(t, u(t), v(h(t)), w(t)), \ p.p. \ sur \ [0,1].$$

En effet, pour tout $t \in [0,1]$, en utilisant le lemme de *Fatou* (Lemme 1.3.1) et la semi continuité supérieure de $F(t, ., .)$, nous avons pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{L}([0,1])$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathrm{A}} \langle e^*_k, s(t)\rangle &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_{\mathrm{A}} \langle e^*_k, s_n(t)\rangle dt \\
&\leqslant \limsup_{n\longrightarrow\infty} \int_{\mathrm{A}} \delta^*\Big(e^*_k, F\big(t, u_n(t), v_n(h(t)), w_n(t)\big)\Big) dt \\
&\leqslant \int_{\mathrm{A}} \limsup_{n\longrightarrow\infty} \delta^*\Big(e^*_k, F\big(t, u_n(t), v_n(h(t)), w_n(t)\big)\Big) dt \\
&\leqslant \int_{\mathrm{A}} \delta^*\Big(e^*_k, F\big(t, u(t), v(h(t)), w(t)\big)\Big) dt
\end{aligned}$$

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\langle e_k^*, s(t)\rangle \leq \delta^*\Big(e_k^*, F\big(t, u(t), v(h(t)), w(t)\big)\Big), p.p.\ t \in [0,1]. \tag{3.19}$$

D'autre part, grâce au Lemme 1.1.2 et le Corollaire 1.1.1, nous avons

$$\sup_{x' \in E'}\Bigg(\langle x', s(t)\rangle - \delta^*\Big(x', F\big(t, u(t), v(h(t)), w(t)\big)\Big)\Bigg) =$$

$$\sup_{k \in \mathbb{N}}\Bigg(\langle e_k^*, s(t)\rangle - \delta^*\Big(e_k^*, F\big(t, u(t), v(h(t)), w(t)\big)\Big)\Bigg). \tag{3.20}$$

On utilise la relation 1(chapitre 1), on obtient par (3.19) et (3.20),

$$d\Big(s(t), F\big(t, u(t), v(h(t)), w(t)\big)\Big) \leq \sup_{k \in \mathbb{N}}\Bigg(\langle e_k^*, s(t)\rangle - \delta\Big(e_k^*, F\big(t, u(t), v(h(t)), w(t)\big)\Big)\Bigg) \leq 0.$$

Donc $s(t) \in F\big(t, u(t), v(h(t)), w(t)\big)$, $p.p.\ t \in [0,1]$. Par conséquent, $S_F^{Pe}(u) \neq \emptyset$ pour tout $u \in \mathbf{X}_\Gamma$. Ce qui montre que $\mathcal{A}$ est bien définie.

Maintenant, nous allons montrer que l'opérateur multivoque $\mathcal{A}$ satisfait toutes les conditions du théorème 3.3.1. Il est clair que $\mathcal{A}u$ est convexe pour chaque $u \in \mathbf{X}_\Gamma$.

D'abord, nous montrons que $\mathcal{A}$ est à valeurs compactes dans $\mathbf{X}_\Gamma$. Puisque $\mathbf{X}_\Gamma$ est compact, il suffit de montrer que $\mathcal{A}$ est à valeurs fermées dans $\mathbf{X}_\Gamma$.

Pour chaque $u \in \mathbf{X}_\Gamma$, soit (v_n) une suite d'éléments de $\mathcal{A}u$ qui converge ver $v \in \mathbf{X}_\Gamma$. Alors par (3.16), pour chaque n, il existe $f_n \in \mathbf{S}_F^{Pe}(u) \subset \mathbf{S}_{\Gamma_1}^{Pe}$ telle que

$$v_n(t) = \int_0^1 G(t,s) g_n(s) ds, \quad \forall t \in [0,1],$$

où $g_n = f_n + \phi(u) \in \mathbf{S}_\Gamma^{Pe}$ et $v_n(t) = \varphi(t)$ pour tout $t \in [-r, 0]$.

Comme $\mathbf{S}_{\Gamma_1}^{Pe}$ est sequentiellement $\sigma(\mathbf{P}_E^1, \mathbf{L}_E^\infty \otimes E')$-compact, on peut supposer par extraction d'une sous suite que (f_n) converge $\sigma(\mathbf{P}_E^1, \mathbf{L}_E^\infty \otimes E')$ vers une application $f \in \mathbf{S}_{\Gamma_1}^{Pe}$. Comme $F(t, \cdot, \cdot, \cdot)$ est semicontinue supérieurement et à valeurs convexes compactes, on obtient $f(t) \in F(t, u(t), u(h(t)), \dot{u}(t))$ p.p. $t \in [0,1]$. Par conséquent (g_n) converge $\sigma(\mathbf{P}_E^1, \mathbf{L}_E^\infty \otimes E')$ vers $g = f + \phi(u) \in \mathbf{S}_\Gamma^{Pe}$. En particulier, pour chaque $x' \in E'$ et pour tout $t \in [0,1]$, nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \langle x', \int_0^1 G(t,s) g_n(s) ds\rangle &= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \langle G(t,s)x', g_n(s)\rangle ds \\ &= \int_0^1 \langle G(t,s)x', g(s)\rangle ds \\ &= \langle x', \int_0^1 G(t,s) g(s) ds\rangle \end{aligned}$$

grâce à la compacité de la multi-application intégrale $\int_0^1 G(t,s)\Gamma(s)ds$ $(t \in [0,1])$, nous obtenons la convergence ponctuelle de $\big(v_n(.)\big) = \Big(\int_0^1 G(\cdot,s)g_n(s)ds\Big)$ vers $\int_0^1 G(.,s)g(s)ds$, pour E muni de la topologie forte.

D'une manière analogue on montre que la suite $\big(\dot{v}_n(.)\big) = \Big(\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(.,s)g_n(s)ds\Big)$ converge ponctuellement vers $\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(.,s)g(s)ds$, pour E muni de la topologie forte, en utilisant comme ci-dessus la convergence faible de (g_n) et la compacité de l'intégrale multivoque $\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\Gamma(s)ds$. Comme (v_n) converge uniformément dans $\mathbf{X}_\Gamma$ vers v, alors

$$v(t) = \int_0^1 G(t,s)g(s)ds, \quad \forall t \in [0,1]$$

et $v(t) = \varphi(t)$ pour tout $t \in [-r,0]$, et comme $g = f + \phi(u)$ et $f \in \mathbf{S}_F^{Pe}(u)$, on obtient $v \in \mathcal{A}$. Ce qui montre que $\mathcal{A}u$ est compact dans $\mathbf{X}_\Gamma$.

Montrons maintenant que $\mathcal{A}$ est un opérateur compact. Soit S un ensemble borné de $\mathbf{X}_\Gamma$. Nous avons $\mathcal{A}(S) \subset \mathbf{X}_\Gamma$. Mais $\mathbf{X}_\Gamma$ est compact dans $\mathbf{X}$, alors $\mathcal{A}(S)$ est relativement compact dans $\mathbf{X}$ est donc $\mathcal{A}$ est compact.

Ensuite, nous prouvons que le graphe de $\mathcal{A}$, $\mathrm{gph}(\mathcal{A}) = \{(u,v) \in \mathbf{X}_\Gamma \times \mathbf{X}_\Gamma;\ v \in \mathcal{A}u\}$ est fermé. Soit (u_n, v_n) une suite de $\mathrm{gph}(\mathcal{A})$ convergent uniformément vers $(u,v) \in \mathbf{X}_\Gamma \times \mathbf{X}_\Gamma$ par rapport à $\|\cdot\|_{\mathbf{X}}$.

Comme $v_n \in \mathcal{A}u_n$, alors pour tout n, il existe $f_n \in \mathbf{S}_F^{Pe}(u_n) \subset \mathbf{S}_{\Gamma_1}^{Pe}$ telle que

$$v_n(t) = \int_0^1 G(t,s)g_n(s)ds, \quad \forall t \in [0,1]$$

où $g_n = f_n + \phi(u_n)$ et $v_n(t) = \varphi(t)$ pour tout $t \in [-r,0]$. Comme $\mathbf{S}_\Gamma^{pe}$ est sequentiellement compact pour la topologie de la convergence ponctuelle sur $\mathbf{L}^\infty \otimes E'$, on peut extraire de (g_n) une sous suite qui converge $\sigma(\mathbf{P}_E^1, \mathbf{L}_E^\infty \otimes E')$ vers $g \in \mathbf{S}_\Gamma^{Pe}$.

Observons que $f_n(t) = g_n(t) - \phi(u_n)(t) \in F(t, u_n(t), u_n(h(t)), \dot{u}_n(t))$.

Comme $\|u_n - u\|_{\mathbf{X}} \to 0$ et $F(t,.,.,.)$ est semicontinue supérieurement dans $E \times E \times E$ à valeurs convexes compactes on conclut que $f(t) = g(t) - \phi(u)(t) \in F(t, u(t), u(h(t)), \dot{u}(t))$.

De manière équivalente, $f \in \mathbf{S}_F^{Pe}(u)$. De la même manière, la suite $\big(v_n(.)\big) = \Big(\int_0^1 G(.,s)g_n(s)ds\Big)$ converge ponctuellement vers $\int_0^1 G(.,s)g(s)ds$ et la suite $(\dot{v}_n(.)) = (\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(.,s)g_n(s)ds)$ converge ponctuellement vers $\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(.,s)g(s)ds$, pour E muni de la topologie forte. Comme (v_n) converge vers v dans $(\mathbf{X}_\Gamma, \|\cdot\|_{\mathbf{X}})$ on obtient

$$v(t) = \int_0^1 G(t,s)g(s)ds, \quad \forall t \in [0,1]$$

où $g = f + \phi(u)$ et $v(t) = \varphi(t)$ pour tout $t \in [-r, 0]$. Ce qui montre que le graphe de $\mathcal{A}$ est fermé. Par conséquent $\mathcal{A}$ est semicontinu supérieurement dans $\mathbf{X}_\Gamma$.
Finallement, montrons qu'il existe $R > 0$ tel qu'on ait

$$u \in \lambda \mathcal{A} u \ \ (0 < \lambda \leq 1) \Rightarrow \|u\| \leq R.$$

Nous avons

$$u \in \lambda \mathcal{A} u \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, f \in \mathbf{S}_F^{Pe}(u) \subset \mathbf{S}_{\Gamma_1}^{Pe}$$

telle que

$$\begin{cases} u(t) = \lambda \displaystyle\int_0^1 G(t,s) g(s) ds, \quad \forall t \in [0,1] \\ u(t) = \lambda \varphi(t), \quad \forall t \in [-r, 0], \end{cases}$$

où $g = f + \phi(u) \in \mathbf{S}_\Gamma^{Pe}$.
Pour tout $t \in [0,1]$, utilisant la relation (3.6) et les hypothèses sur Γ, on obtient

$$\begin{aligned}
\|u(t)\| &= \sup_{x' \in \overline{\mathbf{B}}_{E'}} |\langle x', u(t) \rangle| \\
&= \sup_{x' \in \overline{\mathbf{B}}_{E'}} |\langle x', \int_0^1 G(t,s) g(s) ds \rangle| \\
&= \sup_{x' \in \overline{\mathbf{B}}_{E'}} |\int_0^1 G(t,s) \langle x', g(s) \rangle ds| \\
&\leq \sup_{x' \in \overline{\mathbf{B}}_{E'}} \int_0^1 |G(t,s)| |\langle x', g(s) \rangle| ds \\
&\leq \sup_{x' \in \overline{\mathbf{B}}_{E'}} \int_0^1 |\delta^*(x', \Gamma(s))| ds
\end{aligned}$$

et

$$\|\dot{u}(t)\| \leq \sup_{x' \in \overline{\mathbf{B}}_{E'}} \int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)| |\langle x', g(s) \rangle| ds \leq \sup_{x' \in \overline{\mathbf{B}}_{E'}} \int_0^1 |\delta^*(x', \Gamma(s))| ds.$$

Comme l'ensemble $\{|\delta^*(x', \Gamma(s))| : x' \in \overline{\mathbf{B}}_{E'}\}$ est uniformément intégrable dans $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1])$, il existe une constante $\tilde{k}$ telle que, pour tout $x' \in \overline{\mathbf{B}}_{E'}(0,1)$ et pour tout $s \in [0,1]$, nous avons

$$\int_0^1 \big|\delta^*(x', \Gamma(s))\big| ds \leq \tilde{k}.$$

on obtient alors pour tout $t \in [0,1]$

$$\|u(t)\| \leq \tilde{k}$$

et

$$\|\dot{u}(t)\| \leq \tilde{k}.$$

D'autre part, pour tout $t \in [-r, 0]$ nous avons

$$\|u(t)\| = \|\lambda\varphi(t)\| \leq \|\varphi\|_{\mathbf{C}_E([-r,0])}.$$

D'après les inégalités précédentes

$$\|u\|_{\mathbf{X}} \leq \max(\tilde{k}, \|\varphi\|_{\mathbf{C}_E([-r,0])}) = R.$$

Par conséquent d'après le Théorème 3.3.1, $\mathcal{A}$ admet un point fixe u dans la boule $\overline{\mathbf{B}}(0, R)$, ceci implique que ce point est une solution dans $\mathbf{X}_\Gamma$ du problème $(\mathcal{P})$. C'est à dire $\ddot{u}(t) \in F(t, u(t), u(h(t)), \dot{u}(t)) + \phi(u)(t)$, p.p. $t \in [0, 1]$ et $u(t) = \varphi(t)$ pour tout $t \in [-r, 0]$. Comme $\phi(u)(t) \in H(t, u(t), u(h(t)), \dot{u}(t))$, on obtient que u est solution dans $\mathbf{X}$ de notre problème $(\mathcal{P}_r)$ et la preuve du Théorème est donc achevée. $\blacksquare$

Chapitre 4

Résultat d'existence pour une inclusion différentielle du premier ordre gouvernée par un opérateur maximal monotone et une perturbation semicontinue mixte

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude du problème d'évolution perturbé

$$-\frac{du}{dt}(t) \in A(t)u(t) + f(t, u(t)) + F(t, u(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0, T]$$

dans un espace de Hilbert séparable H, où pour chaque $t \in [0,T]$, $A(t) : D(A(t)) \subset H \rightrightarrows H$ est un opérateur maximal monotone et l'application $t \mapsto A(t)$ est à variation absolument continue, au sens de la pseudo-distance de Vladimirov (voir [82]).
Ici $f : [0,T] \times H \to H$ est une application univoque de type Carathéodory, et $f(t,.)$ est Lipschitzienne, tandis que $F : [0,T] \times H \rightrightarrows H$ est une perturbation multivoque mesurable à valeurs non vides compactes et est semicontinue mixte au sens de Tolstonogov [81].
Il y a plusieurs résultats concernant les inclusions différentielles du premier ordre régies par des opérateurs maximaux monotones avec diverses classes de perturbations, voir par exemple [13, 34, 39, 40, 69].
De nombreux résultats d'existence pour des problèmes avec perturbations semicontinues mixtes dans le cadre de la dimension finie ont été étudiés dans la littérature voir par exemple [18, 19, 20, 54, 62, 81].
Dans la première partie, nous présentons un résultat d'existence et d'unicité d'une solution absolument continue (Théorème 4.3.2) de l'inclusion

$$(\mathcal{P}_{f,h}) \begin{cases} -\dfrac{du}{dt}(t) \in A(t)u(t) + f(t,u(t)) + h(t) \quad \text{p.p.} t \in [0,T]; \\ u(0) = u_0 \in D(A(0)), \end{cases}$$

où $h : I \to H$ est une application dans $\mathbf{L}^2(I,H)$ et $t \mapsto A(t)$ est à variation absolument continue.
Dans la deuxième partie, le Théorème 4.4.2 exprime l'existence d'une solution absolument continue pour l'inclusion d'évolution régie par un opérateur maximal monotone avec une perturbation multivoque de la forme

$$(\mathcal{P}_{f,F}) \begin{cases} -\dfrac{du}{dt}(t) \in A(t)u(t) + f(t,u(t)) + F(t,u(t)) \quad \text{p.p.} t \in [0,T]; \\ u(0) = u_0 \in D(A(0)). \end{cases}$$

Enfin, Comme application de ce résultat, on termine par un Théorème d'existence de solutions pour le problème de la rafle convexe de la forme

$$\begin{cases} -\dfrac{du}{dt}(t) \in N_{C(t)}(u(t)) + f(t,u(t)) + F(t,u(t)) \quad p.p.\ t \in [0,T]; \\ u(t) \in C(t), \quad \forall t \in [0,T]; \\ u(0) = u_0 \in C(0), \end{cases}$$

où, $C : I \rightrightarrows H$ est une multi-application absolument continue à valeurs fermées convexes, $N_{C(t)}(.)$ est le cône normal à $C(t)$.

4.2 Préliminaires

Dans ce chapitre, $I := [0, T]$ $(T > 0)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, H est un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire noté $\langle ., . \rangle$ et la norme associée notée par $\|.\|$.

4.2.1 Notions d'opérateurs maximaux monotones

Dans cette partie nous donnons quelques définitions et propriétés des opérateurs maximaux monotones qui nous seront utiles par la suite. Nous renvoyons le lecteur aux références [5, 26, 23] pour plus de détails.

Soit $A : H \rightrightarrows H$ une multi-application. Alors, le domaine de A est donné par

$$\mathcal{D}(A) = \{x \in H : \; A(x) \neq \emptyset\},$$

et l'image de A (dit aussi le rang de A) par

$$\mathcal{R}(A) = \{y \in H : \text{ il existe } x \in \mathcal{D}(A) \text{ tel que } y \in A(x)\}.$$

On note par I_H l'identité de H.

Définition 4.2.1 *Soit $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ une multi-application (opérateur multivoque). On dit que A est monotone si, pour tous $x_1, x_2 \in D(A)$, $y_1 \in Ax_1$, $y_2 \in Ax_2$, nous avons*

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0.$$

Proposition 4.2.1 *Soit $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur multivoque. A est monotone si et seulement si,*

$$\forall x_1, x_2 \in D(A), \forall \lambda > 0, \|x_1 - x_2\| \leqslant \|(x_1 - x_2) + \lambda(Ax_1 - Ax_2)\|$$

ou plus précisément ,

$$\forall x_1, x_2 \in D(A), \forall y_1 \in Ax_1, \forall y_2 \in Ax_2, \forall \lambda > 0, \|x_1 - x_2\| \leqslant \|(x_1 - x_2) + \lambda(y_1 - y_2)\| \quad (4.1)$$

Démonstration.

Condition nécessaire.

Soit A un opérateur monotone, soit $\lambda > 0$, soient $x_1, x_2 \in D(A)$, $y_1 \in Ax_1, y_2 \in Ax_2$, alors,

$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow 2\lambda\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0, \\
&\Longrightarrow 2\lambda\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle + \lambda^2\|y_1 - y_2\|^2 \geq 0, \\
&\Longrightarrow \|x_1 - x_2\|^2 + 2\lambda\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle + \lambda^2\|y_1 - y_2\|^2 \geq \|x_1 - x_2\|^2, \\
&\Longrightarrow \|(x_1 - x_2) + \lambda(y_1 - y_2)\|^2 \geq \|x_1 - x_2\|^2, \\
&\Longrightarrow \|(x_1 - x_2) + \lambda(y_1 - y_2)\| \geq \|x_1 - x_2\|.
\end{aligned}$$

Condition suffisante.

Soit $\lambda > 0$, soient $x_1, x_2 \in D(A)$, $y_1 \in Ax_1, y_2 \in Ax_2$. Supposons que

$$\|(x_1 - x_2) + \lambda(y_1 - y_2)\| \geq \|x_1 - x_2\|.$$

Alors,

$\|(x_1 - x_2) + \lambda(y_1 - y_2)\|^2 \geq \|x_1 - x_2\|^2$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \|x_1 - x_2\|^2 + 2\lambda\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle + \lambda^2\|y_1 - y_2\|^2 \geq \|x_1 - x_2\|^2 \\
&\Longrightarrow 2\lambda\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle + \lambda^2\|y_1 - y_2\|^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

On divise par λ, donc lorsque $\lambda \longrightarrow 0$ on obtient $\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0$. Par suite A est monotone. ■

Définition 4.2.2 *Soit $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur monotone. On dit que A est maximal monotone s'il est maximal dans l'ensemble des opérateurs monotones, c'est à dire, s'il n'existe pas d'opérateur monotone $\tilde{A}$ de H, tel que $gph(A) \subset gph(\tilde{A})$.*

Proposition 4.2.2 *[26]*

Soit $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur multivoque. Alors A est maximal monotone si et seulement si, A est monotone et pour tous $x, y \in H$ telle que $\langle y - \eta, x - \xi \rangle \geq 0$ pour tout $\xi \in D(A)$ et pour tout $\eta \in A\xi$, alors, $x \in D(A)$ et $y \in Ax$.

Proposition 4.2.3 *Soit $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur multivoque. Alors on a équivalence entre les propriétés suivantes.*

1. *A est maximal monotone.*
2. *A est monotone et $\mathcal{R}(I_H + \lambda A) = H, \forall \lambda > 0$.*

Proposition 4.2.4 *Soit $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur monotone. Si A est maximal monotone, alors l'ensemble Ax est convexe fermé, pour tout $x \in D(A)$.*

On note par $A^0(x)$ la projetion de 0 sur Ax. Cet élément existe et est unique grâce au Théorème de la projection dans les espaces de Hilbert.

Notons que $A^0(x) \in Ax$ et $\|A^0(x)\| = \inf_{y \in Ax} \|y\|$.

Définitions 4.2.1 *Soit $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur monotone et $\lambda > 0$. Alors*

1. *l'opérateur J_λ^A défini par*
$$J_\lambda^A = (I + \lambda A)^{-1}$$
est appelé la résolvante de A.
2. *l'opérateur A_λ défini par*
$$A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda^A)$$
est appelé l'approximation Yosida de A.

Proposition 4.2.5 *[23]*
Soit $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur monotone et $\lambda > 0$. Alors

1. *la résolvante J_λ^A est univoque non-expansive, c'est à dire*
$$\|J_\lambda^A x - J_\lambda^A y\| \leq \|x - y\|, \forall x, y \in H.$$
De plus, $J_\lambda^A(x) \to x(\lambda \downarrow 0)$, pour chaque $x \in \overline{D(A)}$;
2. *$J_\lambda^A x \in D(A)$, et $A_\lambda(x) \in A(J_\lambda^A x)$, pour tout $x \in H$;*
3. *$\|A_\lambda(x)\| \leq \|A^0(x)\| = \inf_{y \in A(x)} \|y\|$, pour chaque $x \in D(A)$.*

Théorème 4.2.1 *[23] Soit H un espace de Hilbert. Alors, le graphe de tout opérateur maximal monotone $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ est fortement-faiblement séquentiellement fermé.*

4.2.2 La pseudo distance de Vladimirov

Dans cette partie nous donnons la définition et quelques résultats sur la pseudo-distance introduite par Vladimirov (pour une étude détaillée sur cette pseudo-distance on peut se référer à [82]).

Cette pseudo-distance a été utilisée par plusieurs auteurs pour l'étude des inclusions différentielles faisant intervenir un opérateur maximal monotone dépendant du temps, nous citons [9, 10, 16, 69].

Définition 4.2.3 *[82]*

Soient A et B deux opérateurs maximaux monotones définis sur un espace de Hilbert dans lui même. On définit la pseudo distance de Vladimirov entre A et B par :

$$dis(A, B) = \sup \left\{ \frac{\langle y_1 - y_2, x_2 - x_1 \rangle}{1 + \|y_1\| + \|y_2\|} : x_1 \in D(A), y_1 \in Ax_1, x_2 \in D(B), y_2 \in Bx_2 \right\}$$

Remarque 4.2.1 .
La distance $dis(.,.)$ peut prendre la valeur $+\infty$.
La distance $dis(.,.)$ n'est pas une métrique, car, en général l'inégalité triangulaire n'est pas satisfaite.

Lemme 4.2.1 *[82]*
Soient A, B deux opérateurs maximaux monotones définis sur un espace de Hilbert dans lui même. Alors

$$dis(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B.$$

Lemme 4.2.2 *[82]*
Soient A et B deux opérateurs maximaux monotones définis sur un espace de Hilbert dans lui même, alors

$$\mathcal{H}(D(A), D(B)) \leq dis(A,B).$$

4.2.3 Cône normal

Définition 4.2.4 *Soient H un espace de Hilbert, C un sous ensemble de H, et soit $x \in C$. On appelle cône normal à C au point x, qu'on note $N_C(x)$, l'ensemble défini par*

$$N_C(x) = \{x' \in H,\ t.q\ < x', y - x > \leq 0,\ \forall\, y \in C\}.$$

Proposition 4.2.6 *Soient H un espace de Hilbert, C un sous ensemble convexe fermé de H et $y \in H$, soit $proj_C(y)$ la projection de y sur C, alors*

$$x = proj_C(y) \Leftrightarrow y - x \in N_C(x).$$

Proposition 4.2.7 *Soient H un espace de Hilbert, $C \subset H$. Alors,*

$$x_0 \in int\ (C) \Rightarrow N_C(x_0) = \{0_H\}.$$

Proposition 4.2.8 *Soient H un espace de Hilbert, C un sous ensemble convexe de H tel que $int(C) \neq \emptyset$.*
Si $x_0 \in Fr(C)$ alors $N_C(x_0) \neq \{0_H\}$.

Définition 4.2.5 (Sous-différentiel d'une fonction convexe)
Soient H un espace de Hilbert, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ et $x_0 \in \mathcal{D}(f)$.
On appelle sous-différentiel de f au point x_0 qu'on note $\partial f(x_0)$, l'ensemble défini par

$$\partial f(x_0) = \{y \in H :\ \langle y, x - x_0\rangle \leq f(x) - f(x_0),\ pour\ tout\ x \in H\}.$$

Proposition 4.2.9 *Soit H un espace de Hilbert, C un sous ensemble non vide convexe fermé de H.*
Soit δ_C la fonction indicatrice de C, i.e.,

$$\delta_C(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in C \\ +\infty & sinon. \end{cases}$$

Alors δ_C est une fonction propre positive convexe et semicontinue inférieurement sur H et pour tout $x_0 \in C$

$$\partial\delta_C(x_0) = N_C(x_0),$$

et si $x_0 \notin C$, alors $\partial\delta_c(x_0) = \emptyset$.
Soit $\xi = \partial\delta_C$, alors ξ est un opérateur maximal monotone.

4.3 Résultat d'existence et d'unicité avec une perturbation univoque

On s'intéresse dans un premier lieu, à l'existence et l'unicité de solution du problème

$$(\mathcal{P}_{f,h}) \begin{cases} -\dfrac{du}{dt}(t) \in A(t)u(t) + f(t, u(t)) + h(t) \quad p.p.\ t \in I \\ u(0) = u_0 \in D(A(0)), \end{cases}$$

où $h \in \mathbf{L}^2(I, H)$

L'existence de cette solution est établie sous les hypothèses suivantes
(H_1^A) Il existe une fonction positive croissante $\beta \in \mathbf{W}^{1,2}(I, \mathbb{R})$ avec $\beta(0) = 0$ telle que

$$dis(A(t), A(s)) \leq |\beta(t) - \beta(s)|, \quad \forall t, s \in I.$$

(H_2^A) Il existe un nombre réel positif c tel que

$$\|A^0(t, x)\| \leq c(1 + \|x\|) \quad \text{pour } t \in I, \quad x \in D(A(t)).$$

(H_1^f) Il existe un nombre réel positif M tel que

$$\|f(t, x)\| \leq M(1 + \|x\|) \quad \text{pour } t \in I, \quad x \in H.$$

(H_2^f) Pour chaque $R > 0$, il existe une fonction réelle positive $\alpha_R(.) \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R})$ telle que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \alpha_R(t)||x - y||, \quad \forall t \in I, \quad \forall x, y \in \overline{B}(0, R).$$

Pour la démonstration de notre Théorème nous aurons besoin du résultat suivant (Théorème 3.2 dans [10]).

Théorème 4.3.1 *Soit H un espace de Hilbert séparable. Supposons que pour tout $t \in I$, $A(t) : D(A(t)) \subset H \rightrightarrows H$ est un opérateur maximal monotone satisfaisant (H_1^A) et (H_2^A). Soit $f : I \times H \to H$ une application telle que pour chaque $x \in H$, $f(.,x)$ est mesurable et f satisfait les conditions (H_1^f) et (H_2^f).*
Alors, pour tout $u_0 \in D(A(0))$, le problème

$$(\mathcal{P}_{A(t),f}) \begin{cases} -\dfrac{du}{dt}(t) \in A(t)u(t) + f(t,u(t)) \quad p.p.\ t \in I; \\ u(0) = u_0 \in D(A(0)) \end{cases}$$

admet une solution unique absolument continue u, pour laquelle nous avons,

$$\|\dot{u}(t)\| \leq K(1 + \dot{\beta}(t)), \quad p.p.\ t \in I,$$

où $K = K(\|u_0\|, M, c, T, \beta(.))$.

Maintenant, nous sommes en mesure de donner notre premier résultat.

Théorème 4.3.2 *Soit H un espace de Hilbert séparable. Soit pour chaque $t \in I$, $A(t) : D(A(t)) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone satisfaisant (H_1^A) et (H_2^A). Soit $f : I \times H \to H$ une application telle que pour chaque $x \in H$, l'application $f(.,x)$ est mesurable et f satisfait les conditions (H_1^f) et (H_2^f).*
Soit $h : I \to H$ une application dans $\mathbf{L}^2(I,H)$. Alors, pour tout $u_0 \in D(A(0))$, le problème $(\mathcal{P}_{f,h})$ admet une solution unique absolument continue $u(.)$.
De plus,

$$\|\dot{u}(t)\| \leq K(1 + \dot{\beta}(t)) + (1+K)\|h(t)\|, \quad p.p.\ t \in I,$$

où $K = K(\|u_0\|, M, c, T, \beta(.), \|h\|_{L^1})$.

Démonstration.

Soit $u : I \to H$ une application absolument continue, et considérons l'application $v : I \to H$ définie pour tout $t \in I$ par

$$v(t) = u(t) + \int_0^t h(\tau)d\tau.$$

Alors

$$u(t) = v(t) - \int_0^t h(\tau)d\tau, \quad \forall t \in I;$$
$$u(0) = v(0) = u_0$$

et

$$\frac{du}{dt}(t) = \frac{dv}{dt}(t) - h(t).$$

Si u est la solution de $(\mathcal{P}_{f,h})$, on obtient
$-\frac{dv}{dt}(t) = -\frac{du}{dt}(t) - h(t) \in A(t)u(t) + f(t, u(t)) =$

$$A(t)\Big(v(t) - \int_0^t h(\tau)d\tau\Big) + f\Big(t, v(t) - \int_0^t h(\tau)d\tau\Big).$$

Alors le problème $(\mathcal{P}_{f,h})$ est équivalent au problème

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -\frac{dv}{dt}(t) \in A(t)\Big(v(t) - \int_0^t h(\tau)d\tau\Big) + f\Big(t, v(t) - \int_0^t h(\tau)d\tau\Big) \quad \text{p.p. } t \in I; \\ v(0) = u_0 \in D(A(0)). \end{cases}$$

Soit pour tout $t \in I$, $B(t) : D(B(t)) \subset H \rightrightarrows H$ l'opérateur défini par

$$D(B(t)) = D(A(t)) + \int_0^t h(\tau)d\tau$$

et

$$B(t)x = A(t)\Big(x - \int_0^t h(\tau)d\tau\Big), \quad \forall x \in D(B(t)),$$

et soit $\tilde{f} : I \times H \to H$ l'application définie par

$$\tilde{f}(t, x) = f\Big(t, x - \int_0^t h(\tau)d\tau\Big), \quad \forall (t, x) \in I \times H.$$

Remarquons que le problème $(\mathcal{P})$ est de la forme $\big(\mathcal{P}_{B(t),\tilde{f}}\big)$. Donc, pour prouver que v est la solution absolument continue de $(\mathcal{P})$, il suffit de prouver que pour tout $t \in I$, le nouveau opérateur $B(t)$ et l'application $\tilde{f}$ satisfont toutes les conditions du Théorème 4.3.1.
Au début, montrons que pour tout $t \in I$, $B(t)$ est maximal monotone. D'après la proposition 4.2.3, $B(t)$ est maximal monotone si $B(t)$ est monotone et $R\big(I + B(t)\big) = H$.
Soient y_1, y_2 deux éléments de H tels que, pour $x_1, x_2 \in D(B(t))$

$$y_1 \in B(t)x_1 = A(t)(x_1 - \int_0^t h(\tau)d\tau),$$

$$y_2 \in B(t)x_2 = A(t)(x_2 - \int_0^t h(\tau)d\tau),$$

$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle = \langle y_1 - y_2, (x_1 - \int_0^t h(\tau)d\tau) - (x_2 - \int_0^t h(\tau)d\tau)\rangle \geq 0$ car A est monotone.
De plus, $R(B(t)) = R(A(t))$, et A est maximal monotone donc, $R\big(I + A(t)\big) = H$,

Alors $R(I+B(t))=H$, donc $B(t)$ est aussi maximal monotone.
Maintenant on doit démontrer que $t\mapsto B(t)$ est à variation absolument continue.
Pour cela, fixons $s,t\in I,(s<t),\ x_1\in D(B(t)),\ x_2\in D(B(s))$,
$y_1\in B(t)x_1=A(t)\Big(x_1-\displaystyle\int_0^t h(\tau)d\tau\Big)$, et $y_2\in B(s)x_2=A(s)\Big(x_2-\displaystyle\int_0^s h(\tau)d\tau\Big)$.
On a

$$\begin{aligned}
\langle y_1-y_2,x_2-x_1\rangle &= \Big\langle y_1-y_2,\Big(x_2-\int_0^s h(\tau)d\tau\Big)-\Big(x_1-\int_0^t h(\tau)d\tau\Big)-\int_s^t h(\tau)d\tau\Big\rangle\\
&= \Big\langle y_1-y_2,\Big(x_2-\int_0^s h(\tau)d\tau\Big)-\Big(x_1-\int_0^t h(\tau)d\tau\Big)\Big\rangle\\
&+ \Big\langle y_1-y_2,\int_t^s h(\tau)d\tau\Big\rangle,\\
&\le \Big\langle y_1-y_2,\Big(x_2-\int_0^s h(\tau)d\tau\Big)-\Big(x_1-\int_0^t h(\tau)d\tau\Big)\Big\rangle\\
&+ \|y_1-y_2\|\int_s^t\|h(\tau)\|d\tau,\\
&= \Big\langle y_1-y_2,\Big(x_2-\int_0^s h(\tau)d\tau\Big)-\Big(x_1-\int_0^t h(\tau)d\tau\Big)\Big\rangle\\
&+ \Big(\|y_1\|+\|y_2\|\Big)\int_s^t\|h(\tau)\|d\tau,\\
&\le \langle y_1-y_2,\Big(x_2-\int_0^s h(\tau)d\tau\Big)-\big(x_1-\int_0^t h(\tau)d\tau\big)\rangle\\
&+ \Big(\|y_1\|+\|y_2\|+1\Big)\int_s^t\|h(\tau)\|d\tau.
\end{aligned}$$

nous obtenons

$$\frac{\Big\langle y_1-y_2,x_2-x_1\Big\rangle}{\|y_1\|+\|y_2\|+1}\le\frac{\Big\langle y_1-y_2,\Big(x_2-\int_0^s h(\tau)d\tau\Big)-\Big(x_1-\int_0^t h(\tau)d\tau\Big)\Big\rangle}{\|y_1\|+\|y_2\|+1}+\int_s^t\|h(\tau)\|d\tau,$$

et par $(H1)$,

$$\begin{aligned}
dis\big(B(t),B(s)\big) &\le dis\big(A(t),A(s)\big)+\int_s^t\|h(\tau)\|d\tau\\
&\le |\beta(t)-\beta(s)|+\int_s^t\|h(\tau)\|d\tau\\
&\le \int_s^t\Big(\|h(\tau)\|+\dot\beta(\tau)\Big)d\tau=\int_s^t\dot\gamma(\tau)d\tau,
\end{aligned}$$

où pour tout $t \in I$, $\gamma(t) := \displaystyle\int_0^t \Big(\|h(\tau)\| + \dot{\beta}(\tau)\Big)d\tau$. Par les hypothèses sur h et β, il est clair que $\gamma \in \mathbf{W}^{1,2}(I, \mathbb{R})$ et

$$dis\big(B(t), B(s)\big) \leq |\gamma(t) - \gamma(s)|, \quad \forall t, s \in I.$$

Maintenant, nous allons prouver que pour chaque $t \in I$, $B(t)$ satisfait la condition de croissance linéaire (H_2^A).
Soit $t \in I$, $x \in D(B(t))$. Comme $A(t)$ satisfait (H_2^A), on obtient

$$\begin{aligned}
\|B^0(t)x\| &= \inf_{y \in B(t)x} \|y\|, \\
&= \inf_{y \in A(t)\left(x - \int_0^t h(\tau)d\tau\right)} \|y\|, \\
&= \|A^0(t)\big(x - \int_0^t h(\tau)d\tau\big)\|, \\
&\leq c\big(1 + \|x - \int_0^t h(\tau)d\tau\|\big), \\
&\leq c\big(1 + \|x\| + \|\int_0^t h(\tau)d\tau\|\big), \\
&\leq c\big(1 + \|x\| + \|h\|_{\mathbf{L}^1}\big), \\
&\leq c\big(1 + \|x\| + \|h\|_{\mathbf{L}^1}\big) + c\|x\|\|h\|_{\mathbf{L}^1}, \\
&\leq c(1 + \|h\|_{\mathbf{L}^1})\big(1 + \|x\|\big), \\
&= c_1\big(1 + \|x\|\big),
\end{aligned}$$

où $c_1 = c(1 + \|h\|_{\mathbf{L}^1})$.
Ensuite, on doit vérifier que $\tilde{f}$ satisfait les hypothèses du Théorème 4.3.1. Soit $t \in I$, $x \in H$, en utilisant (H_1^f) on obtient,

$$\begin{aligned}
\|\tilde{f}(t, x)\| &= \left\|f\left(t, x - \int_0^t h(\tau)d\tau\right)\right\|, \\
&\leq M\left(1 + \left\|x - \int_0^t h(\tau)d\tau\right\|\right), \\
&\leq M\left(1 + \|x\| + \left\|\int_0^t h(\tau)d\tau\right\|\right), \\
&\leq M\Big(1 + \|x\| + \|h\|_{L^1}\Big) + M\|x\|\|h\|_{\mathbf{L}^1}, \\
&\leq M\Big(1 + \|h\|_{L^1}\Big)\Big(1 + \|x\|\Big), \\
&= M_1\Big(1 + \|x\|\Big),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire qu'il existe une constante réelle positive $M_1 = M\Big(1 + \|h\|_{\mathbf{L}^1}\Big)$ telle que

$$\|\tilde{f}(t, x)\| \leq M_1\Big(1 + \|x\|\Big), \quad \forall (t, x) \in I \times H.$$

En fin, on doit prouver que $\tilde{f}$ satisfait (H_2^f).
Soient $R > 0$, $t \in I$, et $x, y \in \overline{B}(0, R)$, donc $\big(x - \int_0^t h(\tau)d\tau\big)$, $\big(y - \int_0^t h(\tau)d\tau\big) \in \overline{B}(0, R_1)$ où $R_1 = R + \|h\|_{\mathbf{L}^1}$.
D'où, l'existence d'une fonction réelle positive $\alpha_{R_1}(.) \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R})$ telle que

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}(t,x) - \tilde{f}(t,y)\| &= \|f\big(t, x - \int_0^t h(\tau)d\tau\big) - f\big(t, y - \int_0^t h(\tau)d\tau\big)\|, \\ &\leq \alpha_{R_1}(t)\|\big(x - \int_0^t h(\tau)d\tau\big) - \big(y - \int_0^t h(\tau)d\tau\big)\|, \\ &\leq \alpha_{R_1}(t)||x - y||. \end{aligned}$$

Posons $\tilde{\alpha}_R := \alpha_{R_1}$, on obtient pour chaque $R > 0$, l'existence d'une fonction $\tilde{\alpha}_R \in \mathbf{L}^1(I, H)$ telle que

$$\|\tilde{f}(t,x) - \tilde{f}(t,y) \leq \alpha_R(t)||x - y||, \quad \forall t \in I,\ \forall x, y \in \overline{B}(0, R).$$

Par conséquent, toutes les hypothèses du Théorème 4.3.1 sont vérifiées sur l'opérateur $B(t)$ et la perturbation $\tilde{f}$, alors nous concluons l'existence d'une unique solution absolument continue $v(.)$ du problème $(\mathcal{P})$.
De plus, comme $h \in \mathbf{L}^1(I, H)$ et $v(.)$ est absolument continu, donc $t \mapsto u(t) = v(t) - \int_0^t h(\tau)d\tau$ est aussi absolument continue, et

$$\begin{aligned} \|\dot{u}(t)\| &= \|\dot{v}(t) - h(t)\|, \\ &\leq \|\dot{v}(t)\| + \|h(t)\|, \\ &\leq K\big(1 + \dot{\gamma}(t)\big) + \|h(t)\|, \\ &= K\big(1 + \dot{\beta}(t) + \|h(t)\|\big) + \|h(t)\|, \\ &= K\big(1 + \dot{\beta}(t)\big) + (K+1)\|h(t)\| =: a(t), \quad \text{p.p. } t \in I, \end{aligned} \tag{4.2}$$

où $K = K(\|u_0\|, M, c, T, \beta(.), \|h\|_{\mathbf{L}^1})$, et évidemment $a \in \mathbf{L}^2(I, \mathbb{R})$. Ceci achève la démonstration. ■

4.4 Résultat d'existence avec une perturbation multivoque

On commence par exposer deux résultats essentiels pour la preuve du Théorème principal de cette section.

Lemme 4.4.1 *Soit H un espace de Hilbert séparable, et pour tout $t \in I$, soit $A(t) : D(A(t)) \subset H \rightrightarrows H$ un opératur maximal monotone satisfaisant (H_1^A), (H_2^A) et (H_3^A) pour tout $x \in H$, l'application $t \mapsto A_1(t)x$ est mesurable.*
Soient (u_n) et (v_n) deux suites dans $\mathbf{L}^2(I,H)$ satisfaisant

1. *(u_n) converge fortement vers $u \in \mathbf{L}^2(I,H)$ et (v_n) converge faiblement vers $v \in L^2(I,H)$;*
2. *$v_n(t) \in A(t)u_n(t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour presque tout $t \in I$.*

Alors, $u(t) \in D(A(t))$ et $v(t) \in A(t)u(t)$ pour presque partout $t \in I$

Démonstration. Considérons l'opérateur de composition $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathbf{L}^2(I,H) \rightrightarrows \mathbf{L}^2(I,H)$ defini par

$$\mathcal{A}(u) := \{v \in \mathbf{L}^2(I,H) : v(t) \in A(t)u(t) \quad \text{p.p. } t \in I\}, \ \ \forall u \in D(\mathcal{A}),$$

où

$$D(\mathcal{A}) = \big\{u \in \mathbf{L}^2(I,H) : u(t) \in D(A(t)) \; p.p., \; \exists v \in \mathbf{L}^2(I,H) \text{ tel que } v(t) \in \mathcal{A}(t)u(t) \; p.p.\big\}$$

Par le Théorème 4.3.1, en prenant $f = 0$, on sait qu'il existe une solution absolument continue de l'inclusion $-\dot{u}(t) \in A(t)u(t)$ $p.p.$ $t \in [0,1]$.

De plus, cette solution u et sa dérivée $\dot{u}$ sont dans $\mathbf{L}^2(I,H)$. On conclut que l'opérateur $\mathcal{A}$ est bien défini.

Montrons qu'il est monotone. Soit $u_1, u_2 \in D(\mathcal{A}), v_1 \in \mathcal{A}u_1, v_2 \in \mathcal{A}u_2$ et $\lambda > 0$.
On a $u_1(t), u_2(t) \in D(A(t))$, $v_1(t) \in A(t)u_1(t)$ et $v_2(t) \in A(t)u_2(t)$ pour presque tout $t \in I$ et puisque pour tout $t \in I$, $A(t)$ est un opérateur monotone, par la Proposition 4.2.1, on a

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq \|(u_1(t) - u_2(t)) + \lambda(v_1(t) - v_2(t))\|,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_2\|_{\mathbf{L}^2}^2 &= \int_0^1 \|u_1(t) - u_2(t)\|^2 dt \\ &\leq \int_0^1 \|u_1(t) - u_2(t) + \lambda(v_1(t) - v_2(t))\|^2 dt \\ &= \|u_1 - u_2 + \lambda(v_1 - v_2)\|_{\mathbf{L}^2}^2. \end{aligned}$$

Par suite $\mathcal{A}$ est monotone.

Montrons maintenant que $\mathcal{A}$ est maximal monotone, c'est à dire que

$$\mathcal{R}\Big(I_{\mathbf{L}^2} + \mathcal{A}\Big) = \mathbf{L}^2(I,H).$$

Soit $g \in \mathbf{L}^2(I, H)$. Comme pou tout $t \in I$, $A(t)$ est maximal monotone, alors l'application

$$t \mapsto v(t) = J_1^{A(t)} g(t) = \big(I_H + A(t)\big)^{-1} g(t)$$

est bien définie, et comme $J_1^{A(t)} = I_H - A_1(t)$ est nonexpansive par la Proposition 4.2.5(2), alors $A_1(t)$ est 2−Lipschitzienne dans H. En effet, pour tous $x, y \in H$ et pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned} \|A_1(t)x - A_1(t)y\| &= \|\big(I_H - J_1^{A(t)}\big)(x) - \big(I_H - J_1^{A(t)}\big)(y)\| \\ &= \|(x-y) - \big(J_1^{A(t)}(x) - J_1^{A(t)}(y)\big)\| \\ &\leq \|x-y\| + \|J_1^{A(t)}(x) - J_1^{A(t)}(y)\| \\ &\leq \|x-y\| + \|x-y\| = 2\|x-y\|. \end{aligned}$$

Considérons l'application $h : t \mapsto A_1(t)g(t) = \Bigg(A_1(t)g(t) - A_1(t)u(t)\Bigg) + A_1(t)u(t)$ où u est la solution de $\big(\mathcal{P}_{A(t),0}\big)$. Alors, pour tout $t \in I$

$$\|h(t)\| \leq 2\|g(t) - u(t)\| + \|A_1(t)u(t)\| \tag{4.3}$$

et par (H_3^A), h est mesurable.

Comme $u(t) \in D(A(t))$, par la Proposition 4.2.5(3), nous avons

$$\begin{aligned} \|A_1(t)u(t)\| &\leq \|A^0(t, u(t))\| \\ &\leq c(1 + \|u(t))\|. \end{aligned}$$

Alors, sachant que $g,\ u \in \mathbf{L}^2(I, H)$ on aura

$$\begin{aligned} \Bigg(\int_0^T \|h(t)\|^2 dt\Bigg)^{\frac{1}{2}} &\leq 2\Bigg(\int_0^T \|g(t) - u(t)\|^2 dt\Bigg)^{\frac{1}{2}} + \Bigg(\int_0^T c^2\big(1 + \|u(t)\|\big)^2 dt\Bigg)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2\Bigg(\Big(\int_0^T \|g(t)\|^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\int_0^T \|u(t)\|^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}}\Bigg) \\ &+ c\Bigg(\Big(\int_0^T dt\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\int_0^T \|u(t)\|^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}}\Bigg) \\ &= 2\Big(\|g\|_{\mathbf{L}^2} + \|u\|_{\mathbf{L}^2}\Big) + c\Big(\sqrt{T} + \|u\|_{\mathbf{L}^2}\Big) < +\infty. \end{aligned}$$

On conclut que $h \in \mathbf{L}^2(I, H)$, et par suite $v \in \mathbf{L}^2(I, H)$ et $g \in \big(I_{\mathbf{L}^2} + \mathcal{A}\big)v$.
D'où $\mathcal{R}(I_{\mathbf{L}^2} + \mathcal{A}) = \mathbf{L}^2(I, H)$.
Donc, $\mathcal{A}$ est maximal monotone sur l'espace $\mathbf{L}^2(I, H)$, par le Théorème 4.2.1, le graphe de $\mathcal{A}$ est fortement faiblement séquentiellement fermé. Comme (u_n) converge fortement vers u et (v_n) converge faiblement vers v dans $\mathbf{L}^2(I, H)$, on conclut que $u \in D(\mathcal{A})$ et $v \in \mathcal{A}u$ et donc, $u(t) \in D(A(t))$ et $v(t) \in A(t)u(t)$ pour presque tout $t \in I$. ■

Pour la démonstration de notre théorème, nous avons aussi besoin du résultat suivant (Théorème 6.6 dans [81]), et qui exprime l'existence d'une multi-sélection semicontinue supérieurement à valeurs convexes pour les multi-applications semicontinues mixtes. Cette notion de semicontinuité mixte a été introduite par Tolstonogov [81].

Théorème 4.4.1 *Soit X un espace de Banach séparable et $I \subset \mathbb{R}$. Soit $F : I \times X \rightrightarrows X$ une multi-application à valeurs compactes satisfaisant les propriétés (H_F^1) et (H_F^2) du Théorème 4.4.2 et l'hypothèse suivante*
(H_F^4) Il existe une fonction $\rho : I \times X \to \mathbb{R}^+$ de type Carathéodory, intégrablement bornée sur un sous ensemble de X et telle que

$$F(t,x) \cap \overline{B}(0, \rho(t,x)) \neq \emptyset$$

pour tout $x \in X$ et presque tout $t \in I$.
Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout ensemble compact $K \subset C(I,X)$, il existe une multi-application $\Phi : K \rightrightarrows \mathbf{L}^1(I,X)$ à valeurs non vides fermées convexes et de graphe faiblement séquentiellement fermé, telle que pour tout $u(.) \in K$ et $\varphi(.) \in \Phi\big(u(.)\big)$, on a pour presque tout $t \in I$

$$\varphi(t) \in F(t, u(t)), \tag{4.4}$$

$$\|\varphi(t)\| \leq \rho(t, u(t)) + \varepsilon. \tag{4.5}$$

Nous sommes maintenant en mesure de donner notre résultat d'existence pour le problème avec une perturbation multivoque.

Théorème 4.4.2 *Soit H un espace de Hilbert séparable, soit pour tout $t \in I$, $A(t) : D(A(t)) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone satisfaisant (H_1^A), (H_2^A) et (H_3^A). Supposons aussi que pour chaque $t \in I$, $D(A(t))$ est relativement boule compact, i.e., l'intersection de $D(A(t))$ avec toute boule fermée de H est relativement compact.*
Soit $f : I \times H \to H$ une application telle que pour tout $x \in H$, l'application $f(.,x)$ est mesurable et f satisfait (H_1^f) et (H_2^f).
Soit $F : I \times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs compactes, satisfaisant les hypothèses suivantes
(H_F^1) F est $\mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(H)$-mesurable ;
(H_F^2) F est semicontinue mixte dans H, c'est à dire, pour chaque $t \in I$, et tout $x \in H$ tel que $F(t,x)$ est convexe, la multi-application $F(t,.)$ est semicontinue supérieurement dans H, et lorsque $F(t,x)$ est non convexe, la multi-application $F(t,.)$ est semicontinue inférieurement sur un voisinage de x ;
(H_F^3) il existe une fonction positive $\rho \in \mathbf{L}^2(I,\mathbb{R})$ telle que $F(t,x) \cap \rho(t)\overline{B}_H \neq \emptyset$, pour tout $x \in H$ et presque tout $t \in I$.

Alors, pour tout $u_0 \in D(A(0))$, l'ensemble des solutions absolument continues de l'inclusion différentielle

$$(\mathcal{P}_{f,F}) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + f(t,u(t)) + F(t,u(t)), & p.p. \ t \in I; \\ u(0) = u_0 \in D(A(0)). \end{cases}$$

est non vide dans $\mathbf{W}^{1,2}(I,H)$.

Démonstration.

l'idée de la démonstration, est d'essayer de construire une multi-application qui vérifie les hypothèses qui vont nous permettre de lui appliquer le Théorème du point fixe de Kakutani (Théorème 1.1.13), ce point fixe ne serait que la solution de notre inclusion différentielle considérée.

Etape 1. Soit $m = \rho + \frac{1}{2}$, et considérons l'ensemble

$$S_H^2 = \{h \in \mathbf{L}^2(I,H) : \ \|h(t)\| \leq m(t), \quad \text{p.p. } t \in I\}.$$

Il est clair que S_H^2 est convexe et par le Théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki (Théorème 1.4.4) est un sous ensemble $\sigma\big(\mathbf{L}^2(I,H), \mathbf{L}^2(I,H)\big)$-compact de $\mathbf{L}^2(I,H)$.
Soit

$$\mathcal{X} := \{u_h; \ h \in S_H^2\}$$

où, pour tout $h \in S_H^2$, u_h est la solution unique absolument continue de l'inclusion

$$(\mathcal{P}_{f,h}) \begin{cases} -\dot{u}_h(t) \in A(t)u_h(t) + f(t,u_h(t)) + h(t) & \text{p.p. } t \in I; \\ u(0) = u_0 \in D(A(0)). \end{cases}$$

Selon le Théorème 4.3.2, l'ensemble de solutions $\mathcal{X}$ est non vide et est équicontinu dans $\mathbf{C}(I,H)$. En effet, pour chaque $h \in S_H^2$ et pour tous $s,t \in I$ $(0 \leq s \leq t \leq I)$, on a par la relation (4.2)

$$\|u_h(t) - u_h(s)\| = \left\| \int_s^t \dot{u}_h(\tau)d\tau \right\| \leq \int_s^t a(\tau)d\tau.$$

Comme $a \in \mathbf{L}^1(I,\mathbb{R})$ on conclut que $\mathcal{X}$ est équicontinu. D'autre part, il est clair que pour tout $t \in I$,

$$\mathcal{X}(t) := \{u_h(t); \ u_h \in \mathcal{X}\} \subset D(A(t))$$

et pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned} \|u_h(t)\| &= \left\| u_h(0) + \int_0^t \dot{u}_h(\tau)d\tau \right\| \\ &\leq \|u_0\| + \int_0^t a(\tau)d\tau \\ &= \|u_0\| + \|a\|_1 =: R, \end{aligned} \tag{4.6}$$

de sorte que $\mathcal{X}(t) \subset D(A(t)) \cap \overline{B}(0,R)$, et par conséquent, $\mathcal{X}(t)$ est relativement compact selon la relative boule compacité de $D(A(t))$.
D'après le Théorème d'Ascoli-Arzelà (Théorème 1.4.2), on conclut que l'ensemble $\mathcal{X}$ est relativement compact dans $\mathbf{C}(I,H)$.
Montrons maintenant que $\mathcal{X}$ est fermé dans $\mathbf{C}(I,H)$. Soit $(u_{h_n})_n$ une suite de $\mathcal{X}$ convergeant uniformémet vers un élément $v \in \mathbf{C}(I,H)$.
$(h_n)_n$est une suite de S^2_H, par extraction d'une sous suite (notée ausi $(h_n)_n$), on peut supposer que (h_n) est $\sigma\big(\mathbf{L}^2(I,H),\mathbf{L}^2(I,H)\big)$-convergente vers une application $h \in S^2_H$. Par définition, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, u_{h_n} est la solution unique absolument continue du problème

$$\begin{cases} -\dot{u}_{h_n}(t) \in A(t)u_{h_n}(t) + f(t,u_{h_n}(t)) + h_n(t) \quad \text{p.p. } t \in I; \\ u(0) = u_0 \in D(A(0)). \end{cases}$$

De plus, par (4.2), $\|\dot{u}_{h_n}(t)\| \leq a(t)$ pour presque tout $t \in I$, et comme $a \in \mathbf{L}^2(I,\mathbb{R})$ car $\dot{\beta} \in \mathbf{L}^2(I,H)$ et $h_n \in S^2_H$, on conclut que $(\dot{u}_{h_n})$ et bornée dans $\mathbf{L}^2(I,H)$. Alors, par extraction d'une sous suite nous pouvons supposer que $(\dot{u}_{h_n})$ est $\sigma\big(\mathbf{L}^2(I,H),\mathbf{L}^2(I,H)\big)$-convergent vers une fonction $w \in \mathbf{L}^2(I,H)$, c'est-à-dire pour chaque $\zeta \in \mathbf{L}^2(I,H)$

$$\lim_{n\to\infty} \langle \dot{u}_{h_n}, \zeta \rangle = \langle w, \zeta \rangle$$

ou bien

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \langle \dot{u}_{h_n}(\tau), \zeta(\tau) \rangle d\tau = \int_0^T \langle w(\tau), \zeta(\tau) \rangle d\tau,$$

en particulier, pour $\zeta = \mathbf{1}_{[0,t]} e_k$, où $(e_k)_k$ est une base de H, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \Big\langle \int_0^t \dot{u}_{h_n}(\tau) d\tau, e_k \Big\rangle = \Big\langle \int_0^t w(\tau) d\tau, e_k \Big\rangle, \quad \forall k,$$

donc,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \dot{u}_{h_n}(\tau) d\tau = \int_0^t w(\tau) d\tau.$$

Puisque (u_{h_n}) converge uniformement vers v, alors

$$\lim_{n\to\infty} \big(u_{h_n}(t) - u_{h_n}(0)\big) = \lim_{n\to\infty} \int_0^t \dot{u}_{h_n}(\tau) d\tau = \int_0^t w(\tau) d\tau.$$

C'est-à-dire, pour tout $t \in I$

$$v(t) = u_0 + \int_0^t w(\tau) d\tau,$$

donc v est absolument continue et $\dot{v} = w$, p.p. $t \in I$, c'est à dire $(\dot{u}_{h_n})$ est $\sigma\big(\mathbf{L}^2(I,H),\mathbf{L}^2(I,H)\big)$-convergente vers $\dot{v}$.

D'aute part, par (4.6), (H_2^f) et la convergence uniforme de (u_{h_n}) vers v, il est clair que pour chaque $t \in I$

$$\lim_{n\to\infty} f\big(t, u_{h_n}(t)\big) = f\big(t, v(t)\big),$$

et par (H_1^f) et (4.6)

$$\Big\| f\big(t, u_{h_n}(t)\big) \Big\| \leq M\Big(1 + \|u_{h_n}(t)\|\Big) \leq M(1+R),$$

donc $\Big(f\big(., u_{h_n}\big)\Big)$ est bornée dans $\mathbf{L}^2(I,H)$, par le Théorème de la convergence dominée de Lebesgue (Théorème 1.3.1), $\Big(f\big(., u_{h_n}\big)\Big)$ est convergente dans $\mathbf{L}^2(I,H)$ vers $f(., v(.))$ et donc elle converge faiblement dans $\mathbf{L}^2(I,H)$ vers la même limite $f(., v(.))$.
Puisque

$$-\dot{u}_{h_n}(t) - h_n(t) - f(t, u_{h_n}(t)) \in A(t)u_{h_n}(t), \quad p.p.\ t \in I$$

on obtient par le Lemme 4.4.1

$$-\dot{v}(t) \in A(t)v(t) + f(t, v(t)) + h(t), \quad p.p.\ t \in I,$$

avec $v(0) = \lim_{n\to\infty} u_{h_n}(0) = u_0$. Donc, v est la solution unique absolument continue du problème $(\mathcal{P}_{f,h})$, par conséquent $v = u_h \in \mathcal{X}$. Ainsi, on conclut que $\mathcal{X}$ est fermé et par conséquent est compact dans $\mathbf{C}(I,H)$.

Etape 2. D'après le Théorème 4.4.1, pour $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ et $K = \mathcal{X}$, il existe une multi-application $\Phi : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathbf{L}_H^1(I)$ à valeurs non vides convexes fermées et de graphe fortement faiblement séquentiellement fermé telle que pour tout $u(.) \in \mathcal{X}$ et $\varphi(.) \in \Phi\big(u(.)\big)$, nous avons pour presque tout $t \in I$

$$\varphi(t) \in F(t, u(t)), \tag{4.7}$$

et

$$\|\varphi(t)\| \leq m(t). \tag{4.8}$$

Il est clair que $\Phi : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathbf{L}^2(I,H)$.

Etape 3. Pour chaque $h \in S_H^2$, considérons la multi-application $\Psi : S_H^2 \rightrightarrows \mathbf{L}^2(I,H)$ définie par

$$\Psi(h) = \Phi(u_h)$$

où u_h est la solution unique de $(\mathcal{P}_{f,h})$, c'est à dire, $u_h \in \mathcal{X}$.
Puisque Φ est à valeurs non vides convexes fermées, Ψ est aussi à valeurs non vides convexes fermées, et par (4.8) il est clair que, pour chaque $h \in S_H^2$, $\Psi(h) \subset S_H^2$, c'est à dire, Ψ applique S_H^2 dans lui même.

Finallement, Montrons que $\Psi(.)$ est semicontinue supérieurement de S_H^2 dans S_H^2 muni de la topologie faible.
Puisque S_H^2 est $\sigma\big(\mathbf{L}^2(I,H),\mathbf{L}^2(I,H)\big)$-compact, il suffit de montrer que le graphe de Ψ,

$$gph(\Psi) = \{(h,g) \in S_H^2 \times S_H^2; g \in \Psi(h)\},$$

est séquentiallement $\sigma\big(\mathbf{L}^2(I,H)),\mathbf{L}^2(I,H)\big)$-fermé dans $S_H^2 \times S_H^2$.
En effet, Soit $(h_n,g_n)_n$ une suite dans $gph(\Psi)$, $\sigma\big(\mathbf{L}^2(I,H)),\mathbf{L}^2(I,H)\big)$- convergente vers $(h,g) \in S_H^2 \times S_H^2$. Alors, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $g_n \in \Psi(h_n)$, ce qui est équivalent à $g_n \in \Phi(u_{h_n})$ avec $(u_{h_n}) \subset \mathcal{X}$.
Nous avons $\mathcal{X} := \{u_h; h \in S_H^2\}$ est compact dans $\mathbf{C}(I,H)$, ainsi (u_{h_n}) converge uniformément vers $u_h \in \mathcal{X}$.
Comme le graphe de Φ est fortement-faiblement séquentiellement fermé, on conclut que $(u_h,g) \in gph(\Phi)$, c'est à dire $g \in \Phi(u_h)$ i.e., $g \in \Psi(h)$. Ceci montre que $gph(\Psi)$ est fermé dans $S_H^2 \times S_H^2$, d'où la semicontinuité supérieure de Ψ.

Etape 4. Enfin, pour trouver la solution de l'inclusion consédérer, on doit appliquer le Théorème du point fixe de Kakutani (Théorème 1.1.12) on obtient l'existence d'un point $h \in S_H^2$ tel que $h \in \Psi(h)$.
C'est à dire $h \in \Phi(u_h)$, ou bien $h(t) \in F(t,u_h(t))$ pour presque tout $t \in I$ et $u_h \in \mathcal{X}$ implique que

$$-\dot{u}_h(t) \in A(t)u_h(t) + f(t,u_h(t)) + h(t), \ p.p.\ t \in I,$$

on conclut alors que

$$\begin{cases} -\dot{u}_h(t) \in A(t)u_h(t) + f(t,u_h(t)) + F(t,u_h(t)) & p.p.\ t \in I, \\ u_h(0) = u_0 \in D(A(0)). \end{cases}$$

C'est à dire u_h est une solution dans $\mathbf{W}^{1,2}(I,H)$ de notre problème, et par les arguments donnés dans la preuve, l'ensemble des solutions est compact dans $\mathbf{C}(I,H)$. Ce qui achève la démonstration de notre thèorème. ■

4.5 Application à une inclusion différentielle régie par un processus de la rafle

Nous terminons ce chapitre par un résultat d'existence de solutions pour le processus de la rafle convexe où le processus de la rafle de Moreau (voir [74], pour plus de détails).

Soit $C : I \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs convexes fermées vérifiant l'hypothèse suivante :
(H_C) il existe une fonction positive $\beta \in \mathbf{W}^{1,2}(I, \mathbb{R})$ non décroissante telle que

$$|d(x, C(t)) - d(x, C(s))| \leq |\beta(t) - \beta(s)|, \quad \forall x \in H, \forall t, s \in I.$$

Théorème 4.5.1 *Soit H un espace de Hilbert séparable, soit $C : I \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs convexes fermées vérifiant l'hypothèse (H_C). Supposons aussi que pour chaque $t \in I$, $C(t)$ est relativemet boule compact.*
Soit $f : I \times H \to H$ une application telle que pour $x \in H$, l'application $f(., x)$ est mesurable et f satisfait (H_1^f) et (H_2^f).
Soit $F : I \times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs compactes, satisfaisant les hypothèses (H_F^1), (H_F^2) et (H_F^3).
Alors, pour tout $u_0 \in C(0)$, l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t)}\big(u(t)\big) + f(t, u(t)) + F(t, u(t)), & p.p.\ t \in I; \\ u(t) \in C(t), \quad \forall t \in I; \\ u(0) = u_0 \in C(0). \end{cases}$$

admet au moins une solution u absolument continue dans $\mathbf{W}^{1,2}(I, H)$.

Démonstration. Ce résultat est une conséquence du Théorème 4.4.2. En effet, Comme, $A(t) = N_{C(t)}$ est un opérateur maximal monotone, $D(A(t)) = C(t)$,

$$dis(A(t), A(s)) = \mathcal{H}(C(t), C(s)), \quad \forall s, t \in I,$$

et

$$A^0(t, x) = 0, \quad \forall (t, x) \in I \times H,$$

toutes les hypothèses du Théorème 4.4.2 sont vérifiées sur le cône normal extérieur à $C(t)$. On conclut alors l'existence d'une solution pour ce problème. ■

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse nous étions intéressées aux problèmes d'évolution pour une certaine classe d'inclusions différentielles. Nous avons établi plusieurs résultats d'existence pour des inclusions différentielles du second ordre avec des conditions aux limites en m-points ($m > 3$) dans un espace de Banach séparable E, en commençant par le problème perturbé par une multi-application F satisfaisant une condition de pseudo-Lipschitziété ainsi que l'existence de solutions pour un problème relaxé perturbé par $ext(F)$, et nous avons établi une propriété de densité entre les deux ensembles de solutions de ces problèmes. Cette étude était réalisée dans le cadre d'un espace de dimension finie. Ensuite, une application de la Pettis-intégration aux inclusions différentielles du second ordre avec des conditions aux limites en m-points et en 3-points avec retard est considérée dans la $2^{\grave{e}me}$partie.

Enfin, nous avons établi un résultat d'existence pour une inclusion différentielle du premier ordre gouvernée par un opérateur $A(t)$ maximal monotone dépendant du temps et une perturbation multivoque semicontinue mixte dans un espace de Hilbert. Comme perspectives concernant le dernier chapitre, on se propose d'étudier le problème quand l'opérateur maximal monotone dépend du temps et de l'état.

Bibliographie

[1] A. Amrani, *Lemme de Fatou pour l'intégrale de Pettis.* Publications Mathématiques, Vol. 42, (1998)67-79.

[2] A. Amrani, A. Bourass et K. Elamri, *Critère de Bocce et convergence en norme de Pettis dans* $\mathbf{P}_E^1(\nu)$. AMS (2000).

[3] A. Amrani. C. Castaing, *Weak compactness in Pettis integration.* Bulletin of the Polish Academy of sciences mathics, vol. 44, No 2, (1996).

[4] A. Amrani, C. Castaing, M. Valadier, *Convergence in Pettis norm under extreme point conditions*, Vietnam Journal of Mathematics 26 : 4, (1998)323 − 335.

- Cité© 1 fois : page (document) -

[5] J.P. Aubin and A. Cellina, *Differential inclusions set-valued maps and viability theory.* vol. 264, Springer, Berlin, Germany, (1984). *- Cité© 1 fois : page (document) -*

- Cité© 3 fois : pages (document), 3.2 et 3.3 -

[6] E.P. Avgerinos and N.S. Papageorgiou, *Existence and relaxation theorems for nonlinear multivalued boundary value problems*, APPL MATH O, 39, (1999)257-279.

- Cité© 3 fois : pages (document), 3.2 et 3.3 -

- Cité© 4 fois : pages 1.1, 1.1.3, 1.4.2 et 4.2.1 -

[7] D. Azzam-Laouir, *Contribution à l'étude de problèmes d'évolution du second ordre.* Thèse de doctorat d'état, Constantine, (2003). *- Cité© 1 fois : page (document) -*

[8] D. Azzam-Laouir, *Polycopié, cours d'analyse multivoque*, Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées, Université de Jijel (2009). *- Cité© 4 fois : pages 1.1, 1.1.3, 3.2 et 3.3 -*

[9] D. Azzam-Laouir, W. Belhoula, C. Castaing and M. D. P. Monteiro Marques, *Multi-valued perturbation to evolution problems involving time dependent maximal monotone operators*. Soumis. *- Cité© 4 fois : pages 1.1, 1.1.1, 1.1.2 et 1.1.3 -*

[10] D. Azzam-Laouir, W. Belhoula, C. Castaing and M. D. P. Monteiro Marques, *Perturbed evolution problems with absolutely continuous variation in time and applications.*A paraître . *- Cité© 1 fois : page 4.2.2 -*

[11] D. Azzam-Laouir and F. Bounama, *Second order differential inclusions with Lipschitz right-hand sides.* Electronic J.Diff. Eq, 85, (2010)1-9. *- Cité© 2 fois : pages 4.2.2 et 4.3 -*

[12] D. Azzam-Laouir, I. Boutana, *Application of Pettis integration to differential inclusions with three-point boundary conditions in Banach spaces*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2007 N°. 173, (2007)1-8. *- Cité© 3 fois : pages (document), 2.1 et 2.3 -*

[13] D. Azzam-Laouir, I. Boutana, *Mixed semicontinuous perturbation to an evolution problem with time-dependent maximal monotone operator*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis. accepté. *- Cité© 2 fois : pages (document) et 3.3 -*

[14] D. Azzam-Laouir, I. Boutana and A. Makhlouf, *Application of Pettis integration to delay second order differential inclusions*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, N° 88, (2012)1-15. *- Cité© 2 fois : pages (document) et 4.1 -*

[15] D. Azzam-Laouir, C. Castaing and L. Thibault, *Three boundary value problems for second order differential inclusions in Banach spaces*, Control Cybernet, 31, No. 3, (2002)659-693. *- Cité© 1 fois : page (document) -*

- Cité© 5 fois : pages (document), 3.1, 3.2, 3.2 et 3.3 -

[16] D. Azzam-Laouir, C. Castaing and M.D.P. Monteiro Marques, *Perturbed evolution problems with continuous bounded variation in time and applications.* Set Valued Var.Anal, (2017). *- Cité© 1 fois : page 4.2.2 -*

[17] D. Azzam-Laouir, T. Haddad, *Existence results for delay second order differential inclusions*, Discussiones Mathematicae, Differential inclusions, Control and optimisation, Vol. 28, (2008)133-146 . *- Cité© 3 fois : pages (document), 3.1 et 3.3 -*

[18] D. Azzam-Laouir, S. Izza and L. Thibault, *Mixed semicontinuous perturbation of non-convex state-dependent sweeping process.* Set Valued and Var.Anal. Journal of the Juliusz Schauder Center,Volume 22, (2014)271-283. *- Cité© 3 fois : pages (document), 2.2 et 4.1 -*

[19] D. Azzam-Laouir, S. Lounis, *Nonconvex perturbations of second order maximal monotone differential inclusions.* Topological Methode in nonlinear Analysis. Journal of the Juliusz Schauder Center,Volume 35, (2010)305-3017. *- Cité© 2 fois : pages (document) et 4.1 -*

[20] D. Azzam-Laouir, S. Lounis, and L. Thibault, *Existence solutions for second-order differential inclusions with nonconvex perturbations.* Applicable Analysis, 86(10), (2007)1199-1210. *- Cité© 1 fois : page 4.1 -*

[21] D. Azzam-Laouir, A. Makhlouf and L. Thibault, *Existence and relaxation theorem for a second order differential inclusion.* Numerical Functional Analysis and Optimization. 31 :10, (2015)1103-1119. *- Cité© 2 fois : pages (document) et 2.1 -*

[22] D. Azzam-Laouir, S. Melit, *Existence of solutions for a second order boundary value problem with the Clarke subdifferential*, Filomat, 31 :9 (2017) 2763-2771. *- Cité© 1 fois : page (document) -*

[23] V. Barbu, *Nonlinear semigroups and differntial equations in Banach spaces.* Noordhoff Int. Publ. leyden, (1976). *- Cité© 3 fois : pages 4.2.1, 4.2.5 et 4.2.1 -*

[24] M. Benamara, *Point extrémaux, multi-applications et fonctionnelles integrable.* M.S.thesis, Université de Grenoble, (1975). *- Cité© 1 fois : page 2.3.3 -*

[25] Bressan and G. Colombo, *Extensions and selections of maps with decomposable values.* Studia Mathematica, vol. 90, no. 1, (1988)69-86. *- Cité© 3 fois : pages 1.1.3, 1.1.10 et 1.1.7 -*

[26] H. Brezis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert.* North Holland. (1973). *- Cité© 2 fois : pages 4.2.1 et 4.2.2 -*

[27] I. Boutana, *Application de la Pettis intégration à la résolution de quelques problèmes d'évolution.* Thèse de Magister, Univ Jiljel, (2008). *- Cité© 1 fois : page 3.3 -*

[28] C. Castaing, *Weak compactness criteria in set-valued integration.* Universitè de Montpellier II, Laboratoire d'Analyse Convexe, Pré-publication, (1996)1995 – 03.

[29] C. Castaing, *Weak compactness and Convegence in Bochner and Pettis integration.* Vietnam Journal of Mathematics, Volume 24, Number 3, (1996). *- Introduction -*

- Cité© 1 fois : page (document) -

[30] C. Castaing and L.X. Truong, *Second order differential inclusions with m-points boundary conditions.*J.Nonlinear and Conv.Anal, Vol 12 N°.2. C.(2011). *- Cité© 8 fois : pages (document), 2.1, 2.2, 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3, 2.3 et 3.2 -*

[31] C. Castaing, P. Raynaud de Fitte, *σ-Uniform scalar integrability and strong laus of large numbers for Pettis integrable functions with values in a separable locally convex space.* Publication de l'upresa 6085, Analyse et Modèles Stochastiques, AMS : 60F15, 60B05, 60B12, (1991). *- Cité© 1 fois : page (document) -*

[32] C. Castaing, P. Raynaud de Fitte and A. Salvadori, *Some variational convergence results with application to evolution inclusions.* Adv.Math. Econ. 8, (2006)33-73. *- Cité© 1 fois : page 3.3 -*

[33] C. Castaing and A.G. Ibrahim, *Functional differential inclusions on closed sets in Banach spaces*, Adv. Math. Econ Vol. 2, (2000)21-39. *- Cité© 2 fois : pages (document) et 3.1 -*

[34] C. Castaing and A.G. Ibrahim, *Functional evolution equations governed by m-accretive operators.* Adv.Math. Econ. 5, (2003)23-54. *- Cité© 2 fois : pages (document) et 4.1 -*

[35] C. Castaing and M.D.P. Monteiro Marques, *Topological properties of solutions sets for sweeping process with delay*, Portugaliae Mathematica, Vol. 54 (1997)485-507. *- Cité© 2 fois : pages (document) et 3.1 -*

[36] C. Castaing, A. Salvadori and L. Thibault, *Functional evolution equations governed by nonconvex sweeping process*, Journal of Nonlinear and convex Analysis, Vol. 2, (2001)217-241. *- Cité© 2 fois : pages (document) et 3.1 -*

[37] C. Castaing and M. Valadier, *Convex analysis and measurable multifunctions.* Lectures Notes in Math. Springer-Verlag, Berlin.(1977), 580. *- Cité© 15 fois : pages 1.1, 1.1.3, 1.1.1, 1.1.1, 1.1.2, 1.1.4, 1.1.1, 1.1.5, 1.1.2, 1.1.3, 1.1.2, 1.1.1, 1.1.3, 3.2 et 3.2 -*

[38] A. Cellina, *On the differential inclusion $x' \in [-1, 1]$.* Atti Accad. Naz. Liancei Rend. Cl. Fis. Mat. Natur. (8), 69 (1-2), (1981)1-6. *- Cité© 1 fois : page (document) -*

[39] A. Cellina and M.v. Marchi, *Non-convex perturbations of maximal monotone diffrential inclusions.* Israel J.Math. 46, (1983)1-11. *- Cité© 2 fois : pages (document) et 4.1 -*

[40] G. Colombo, A. Fonda and A. Ornelas, *Lower semicontinuous perturbations of maximal monotone differntial inclusions.* Israel J.Math. 61, (1988)211-118. *- Cité© 2 fois : pages (document) et 4.1 -*

[41] M.G. Crandall and T. Liggett, *Generation of semigroups of nonlinear transformations on general Banach spaces.* Amer. J. Math. 93, (1971)265-298. *- Introduction -*

[42] M.G. Crandall and A. Pazy, *Nonlinear evolution equations in Banach spaces.* Israel J. Math. 11, (1972)57-94. *- Introduction -*

[43] F.S. DeBlasi and G. Pianigianni, *Nonconvex valued differential inclusions in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., 157, (1991)469-494. *- Cité© 1 fois : page (document) -*

[44] F.S. DeBlasi and G. Pianigianni, *On the density of the extremal solutions of the differential inclusions*, Ann.Polon. Math., LVI(2), (1992)133-142. *- Cité© 1 fois : page (document) -*

[45] R.D. Descombes, *Cours d'analyse*, Librairie Vuibert, Paris, (1962). *- Cité© 1 fois : page 1.3.1 -*

[46] J. Diestel and J. J. UHL. JR, *Vector measures* American mathématical society providence, N 15. American Mathematical Society providence, Rhode Island. (1977). *- Cité© 1 fois : page 1.4.1 -*

[47] S.J. Dilworth and M. Girardi, *Bochner Vs. Pettis norm : exemple and results.* contenp, Math, $(1998)144 - 6980$.

[48] N. Dunford and B.J. Pettis, *Linear operations on summable functions* Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. 25, (1939)544-550. *- Cité© 1 fois : page (document) -*

[49] N. Dunford and J.T. Schwartz, *Linear operators. PART I : General theory.* Wiley Classics Library Edition Published, (1988). *- Introduction -*

[50] L.C. Evans, *Nonlinear evolution equations in an arbitrary Banach space.* Israel J. Math. Vol. 26, No. 1, (1977). *- Cité© 2 fois : pages 1.1.3 et 1.1.11 -*

- Introduction -

[51] K. El Amri. C. Hess, *On the Pettis integral of closed valued multifunctions.* Kluwer Academic Publishers, Set-valued Analysis 8, (2000)329-360. *- Cité© 1 fois : page (document) -*

[52] Paul W. Eloe, Youssef N. Raffoul and Christopher C. Tisdell, *Existence, uniqueness and constructive results for delay differential equations*, Electronic Journal of Differential Equations, N°. 121, (2005)1-11. *- Cité© 3 fois : pages (document), 3.1 et 3.3 -*

[53] A. Fryszkowski, *Continuous selections for a class of nonconvex multivalued maps.* Studia Math,79, (1983)163-174. *- Cité© 2 fois : pages 1.1.3 et 1.1.10 -*

[54] A. Fryszkowski and L. Gorniewicz, *Mixed semicontinuous mappings and their applications to differential inclusions.* Set-Valued Anal,8,(1967)203-217,. *- Cité© 2 fois : pages (document) et 4.1 -*

[55] A. Fryszkowski, *Fixed point Theory for decomposable sets, topological fixed points theory and its applications.* Kluwer Academic publishers, Dordrecht (2004). *- Cité© 1 fois : page 3.3 -*

[56] A.F. Filippov, *Classical solutions of differential inclusions with multivalued right-hand sides.* SIAM J. Control,5, (1967)609-621. *- Cité© 1 fois : page (document) -*

[57] B. Gely, *Solutions d'équations différentielles multivoques.* Séminaire d'analyse convexe Montpellier,(1972), exposé no 4. *- Introduction -*

[58] R.F. Geitz, *Pettis integration.* Proceedings of the American Mathematical Society, Volume 82, Number 1, May (1981). *- Cité© 1 fois : page (document) -*

[59] A.M. Gomaa, *On four-point boundary value problems for differential inclusions and differential equations with and without multivalued moving constraints.* Czechoslovak Mathematical Journal, vol. 62, no. 137, (2012)139-154. *- Cité© 2 fois : pages 2.3 et 2.3.1 -*

[60] A.M. Gomaa, *Relaxation problems involving second-order differential inclusions.* Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis, ID. 792431, (2013)9. *- Introduction -*

[61] A. Grothendieck. *Espaces vectoriels topologiques.* Publ. Soc. Mat. São Paulo, São Paulo. 3rd ed (1964). *- Cité© 1 fois : page 3.2 -*

[62] T. Haddad and L. Thibault, *Mixed semicontinuous perturbation of nonconvex sweeping process.* Math. Program. Ser. B123, (2010)225-240. *- Cité© 2 fois : pages (document) et 4.1 -*

[63] C. Hess. H. Ziat, *Théorème de Komlòs pour des multifonctions Pettis-intégrables.* (1993).

[64] R. Huff, *Remarks on Pettis integrability.* Proceedings of the American mathématical society, Volume 96, Number 3, March (1986). *- Cité© 1 fois : page (document) -*

[65] A.G. Ibrahim, *On differential inclusions with memory in Banach spaces.* Proc. Math. Phys. Soc. Egypt Vol.67, (1992)1-26. *- Cité© 1 fois : page (document) -*

- Cité© 2 fois : pages (document) et 3.1 -

[66] A.G. Ibrahim and A.M.M. Gomaa, *Existence theorems for functional multivalued three point boundary value problem of second order.* J. Egypt. Math. Soc. 8(2), (2000)155-168. *- Cité© 1 fois : page (document) -*

[67] A. Ioffe, *Existence and relaxation theorems for unbounded differential inclusions.* J.Convex Anal, 13, (2006)353-362. *- Cité© 2 fois : pages (document) et 2.2.1 -*

[68] M. Kisielewicz, *Differential inclusions and optimal control.* PWN-Polish scientific publishers, (1991). *- Cité© 8 fois : pages 1.1.3, 1.1.6, 1.1.10, 1.1.7, 1.1.11, 1.1.12, 1.4.4 et 1.4.5 -*

[69] M. Kunze and M.D.P. Monteiro Marques, *BV solution problems with time-dependent domains.* Set-Valued Analysis. 5, (1997)57-72. *- Cité© 3 fois : pages (document), 4.1 et 4.2.2 -*

[70] D. Kravvaritis and N. S. Papageorgiou, *Boundary value problems for nonconvex differential inclusions.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 185, no. 1, (1994)146-160. *- Cité© 1 fois : page 2.3.1 -*

[71] J. Lehec, *Analyse convexe approfondie.* Université Paris-Dauphine M1MMD, (2013-2014). *- Cité© 1 fois : page 1.2 -*

[72] P.D. Loewen et R.T. Rockafellar, *Optimal control of unbounded differential inclusions*, SIAM J. Control Opt.Vol 32 No. 2, (1994)442-470. *- Cité© 1 fois : page (document) -*

[73] S.A. Marano, *A remark on a second-order three-point boundary value problem.* J. Math. Anal. Appl. 183, (1994)518-522.11. *- Cité© 1 fois : page (document) -*

[74] J.J. Moreau, *Evolution problem asssociated with a moving convex set in a Hilbert space.* J. Differiential. Equations, Vol 26, (1977) 347-374. *- Cité© 1 fois : page 4.5 -*

[75] K. Musial, *Topics in the theory of Pettis integration.* Rendiconti dell'istitutodi Matematica dell'Università di Trieste, School on Measure Theory and Real Analysis. Grado(Itaty), (1992)14-25. *- Cité© 3 fois : pages (document), 3.3.2 et 3.3.3 -*

[76] F. Nacry, *Berturbed BV sweeping process involving prox-regular sets.* Journal of Nonlinear and Convex Analysis, Vol. 18, No. 9 (2017)1619-1651. *- Introduction -*

[77] N.S. Papageorgiou, *Convergence theorems for Banach space valued integrable multifunctions.* International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, vol. 10, no. 3, (1987)433-442. *- Cité© 1 fois : page 2.3.2 -*

[78] N.S. Papageorgiou, *On measurable multifunctions with applications to random multivalued equations.* Mathematica Japonica, vol. 32, no. 3, (1987)437-464. *- Introduction -*

[79] B. Satco, *Contributions à l'étude des intégrales multivoques et applications aux inclusions différentielles et intégrales.* Thèse pour obtenir le grade de Docteur de l'université de Bretagne occidentale et de l'université "AL.I.Cuza" de Iasi, (2005). *- Cité© 1 fois : page (document) -*

[80] C. Stefansson, *Pettis integrability.* transacions of the American Mathematical Society, Volume 139, Number 4, March (1992). *- Cité© 1 fois : page (document) -*

[81] A. Tolstonogov, *Differential inclusions in a Banach space.* Springer Science Business Media Dordrecht. (2000). *- Cité© 3 fois : pages (document), 4.1 et 4.4 -*

[82] A.A. Vladimirov, *Nonstationary dissipative evolution equations in a Hilbert space.* Nonlinear Anal.17,(1991)499-518, . *- Cité© 6 fois : pages (document), 4.1, 4.2.2, 4.2.3, 4.2.1 et 4.2.2 -*

[83] T. Wazewski, *Sur une généralisation de la notion de solution d'une équation au contingent.* Bull. Pol. Ac. Sci, 10, (1962)11-15. *- Cité© 1 fois : page (document) -*

[84] H. Ziat, *On a characterization of Pettis intègrable multifunctions.* Bull. Polich Acad. Sci. Math. 45, No.3, (2000)227-230. *- Cité© 1 fois : page (document) -*

Résumé

Cette thèse est constituée de trois parties principales, dans la première nous étudions l'existence et la relaxation associées à une inclusion différentielle du second ordre avec des conditions aux limites en $m-$points avec une perturbation pseudo Lipschitzienne.
En suite, une application de la Pettis-intégration aux inclusions différentielles du second ordre avec des conditions aux limites en m-points avec retard est considérée dans la 2^{me}partie.
Finalement, dans la dernière partie, on démontre l'existence et l'unicité de solution pour une inclusion différentielle du premier ordre gouvernée par un opérateur maximal monotone dépendant du temps avec une perturbation semicontinue mixte.

Abstract

This thesis consists of three main parts, in the first one, we study the existence and relaxation results for a class of m-points boundary value problem where the right hand side is an unbounded-valued multi-mapping satisfying a pseudo-Lipschitz property.
Next, an application of Pettis-integration for second order differential inclusions with $m-$ points boundary conditions with delay is considered in the second part.
Finally, in the third part, we are interested in the existence and uniqueness of a solution for a first order differential inclusion governed by a time dependent maximal monotone operator and with mixed semicontinuous perturbation.

ملخص

هذه المذكرة ترتكز على ثلاثة أجزاء رئيسة. في الجزء الأول نثبت وجود وإسترخاء الحلول لإحتوائية تفاضلية من الدرجة الثانية بشروط ابتدائية عند م-نقطة وتابع متعدد القيم شبه ليبشيتزي.

بعد ذلك تطبيق لتكامل بيتيس على احتوئية تفاضلية من الدرجة الثانية بشروط ابتدائية عند م- نقطة وبتأخر اعتبرت في الجزء الثاني.

في الأخير وفي الجزء الثالث نثبت وجود ووحدانية الحل لإحتوائية تفاضلية من الدرجة الأولى بمؤثر أعظمي رتيب متعلق بالزمن وتابع متعدد القيم مختلط نصف مستمر.