REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Sientifique

UNIVERSITÉ MOHAMMED SEDDIK BEN YAHIA-JIJEL

THÈSE

Présentée à la Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

Pour l'obtention du diplôme de

Doctorat L.M.D

Spécialité Mathématiques Appliquées

Par

Sarra Boudada

Thème

Contribution à l'étude de problèmes d'évolution régis par un opérateur sous différentiel

---

Soutenue publiquement le 29/06/2019

Devant le jury composé de

Président :	**T. Zerzaihi**	**Prof.**	Université de Jijel
Directeur de Thèse :	**M. F. Yarou**	**Prof.**	Université de Jijel
Examinateurs :	**M. Benchohra**	**Prof.**	Université de Sidi Bel Abbas
	T. Hamaizia	**M.C.A.**	Université de Oum El Bouaghi
	S. Lounis	**M.C.A.**	Université de Jijel

REMERCIEMENTS

Avant tout, je remercie le bon Dieu tout puissant de m'avoir accordé la puissance et la volonté pour achever ce travail.

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse **M. F. YAROU** Professeur de l'université de Jijel, pour m'avoir confié ce travail de recherche, ainsi que pour son suivi, ses conseils judicieux et ses discussions qui m'ont beaucoup aidé au cours de mes recherches.

Je souhaite remercier Monsieur **T. ZERZAIHI** Professeur à l'université de Jijel, qui m'a fait l'honneur par la présidence du jury.

Mes vifs remerciements s'adressent aussi à Messieurs **M. BENCHOHRA** Professeur à l'université de Sidi Bel Abbas, **T. HAMAIZIA** Maitre de Conférence à l'université de Oum El Bouaghi, Madame **S. LOUNIS** Maitre de Conférence à l'université de Jijel, pour avoir accepter la participation au jury.

J'aimerais aussi remercier le Professeur **L. THIBAULT** pour son accueil chaleureux à l'université de Montpellier 2, ainsi que pour ses nombreuses remarques qui ont contribué au bon déroulement de cette recherche.

J'aimerais bien exprimer toute ma gratitude, mes remerciements à ma famille : mes parents, mon

mari, mes soeurs. J'en profite pour remercier mes collègues du laboratoire de recherche et tous mes enseignants du département de mathématiques de l'université de Jijel.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'objectif entrepris dans cette thèse est l'étude de l'existence de solutions pour certaines classes d'inclusion différentielles du premier ordre.
Elle est consacrée, d'une part, à l'étude d'existence de solutions pour des problèmes régis par un opérateurs sous différentiel dépendant du temps, et d'autre part, l'étude d'existence de solutions pour certains processus de la rafle non convexes.
Soit le problème suivant

$$-\dot{x}(t) \in A\,x(t) + g(t) \quad \text{p.p } t \in [0, T],$$

où $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ est un opérateur maximal monotone défini sur un espace de Hilbert H et $g \in \mathcal{L}^1([0, T], H)$ est une perturbation du problème.
Lorsque A ne dépend pas du temps, H.Brezis [14] utilise la méthode de régularisation Yosida pour démontrer l'existence et l'unicité d'une solution Lipschitzienne, les auteurs dans [37] ont montré l'existence de solution "intégrale" dans un espace de Banach. Ces travaux ont été généralisés dans [3], [4] en prenant une perturbation multivoque $G(t, x(t))$.
Si A dépend du temps, différentes contributions ont été données, citons entre autre [22], [26], [45], [55],...
Dans [44], les auteurs ont montré l'existence de solution à variation bornée (et absolument continue), pour le problème sans perturbation.
Dans le cas particulier où A est le sous différentiel d'une fonction convexe propre semi-continue inférieurement, i.e. pour le problème suivant :

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial\varphi(t, x(t)) \quad \text{p.p } t \in [0, T], \\ x(0) = x_0 \in dom\ \varphi(0, \cdot) \end{cases}$$

les résultats d'existence et d'unicité ont été réalisés sous des hypothèses sur φ par beaucoup d'auteurs (par exemple [40], [42], [50], [62]). D'autre résultats ont été obtenue sous des hypothèses de compacité sur le sous différentiel de φ (voir [8], [48], [54], [55]), ou sur la perturbation (voir [53]), pour les problèmes perturbé sous la forme

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial\varphi(t, x(t)) + G(t, x(t)) \quad \text{p.p } t \in [0, T], \\ x(0) = x_0 \in dom\ \varphi(0, \cdot). \end{cases}$$

Dans le cas où φ est la fonction indicatrice d'un ensemble convexe (ou r-prox-régulier) fermé $C(t)$, ce problème est connu sous le nom de "processus de rafle". Le processus de la rafle est un problème d'évolution régis par le cône normale de la forme

$$(I) \begin{cases} -\dot{x}(t) \in N(C(t), x(t)) \quad \text{p.p } t \in [0, T], \\ x(T_0) = x_0 \in C(T_0) \end{cases} \tag{1}$$

et a été introduit et étudie dans les années 70 par Moreau dans plusieurs travaux, par exemple [46], [47] où $C(t)$ est un sous ensemble convexe.
Dans [61], Valadier a démontré pour la première fois l'existence de solution de (I) sans l'hypothèse de convexité sur les valeurs de C pour quelques cas particuliers en dimension finie.
Castaing [18] a étudié la version stochastique dans le même cadre. Aussi, Castaing [15] a introduit quelques nouvelles technique, des quelles on peut déduire plusieurs résultats ; En particulier l'existence d'une solution de (I) où $C(t)$ sous la forme $C(t) = S + v(t)$, S est un sous ensemble fixé (avec H est un espace de dimension finie) et v a variation finie (bornée).
De puis, plusieurs auteurs ont mené des études d'existence de solutions de (I) pour le cas des ensembles $C(t)$ non convexe fermée (avec H de dimension infinie).
Henry [39] avait introduit l'inclusion différentielle

$$\dot{x}(t) \in P_{T_K(x(t))} G(x(t)), \quad x(0) = x_0 \in K,$$

où K est un convexe fermé non vide et $T_K(x)$ est le cône tangent en $x \in K$. Quelques années plus tard, pour l'étude de quelques problèmes d'économie, dans [31], [32], les auteurs montrent l'existence d'une solution de l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in \ N(K, x(t)) + G(x(t)) \quad \text{p.p} \ \ t \in [0,T], \\ x(0) = x_0 \in K. \end{cases} \tag{2}$$

Maintenant, concernant le processus de la rafle perturbé de la forme

$$(II) \ \begin{cases} -\dot{x}(t) \in \ N(C(t), x(t)) + G(t, x(t)) \quad \text{p.p} \ \ t \in [0,T], \\ x(0) = x_0 \in C(t), \end{cases} \tag{3}$$

qui a été introduit dans Castaing-Duc Ha-Valadier [19], Castaing- Monteiro Marques [20] et autre auteurs où $C(t)$ est un ensemble convexe ou le complémentaire des ensembles convexes. Ensuite, les problèmes (I) et (II) ont été étudiés en remplaçant l'hypothèse de convexité par la "ρ-prox-régularité" (voir [12], [35], [36]), par exemple, dans [36] Edmond-Thibault ont montré l'existence et l'unicité de solution du processus de la rafle perturbé

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in \ N(C(t), x(t)) + g(t, x(t)) \quad \text{p.p} \ \ t \in [0,T], \\ x(0) = x_0 \in C(t), \end{cases} \tag{4}$$

pour une multi-application C prenant des valeurs ρ-prox-régulières et une variation absolument continue et g est une application univoque Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur chaque ensemble borné d'un espace de Hilbert H et satisfaisant la condition de croissance linéaire. Ont montré dans [35] que le problème (II) est bien posé, avec la multi-application $C(t)$ prenant des valeurs ρ-prox-régulières et variant d'une manière absolument continue.

Dernièrement dans [1], [2], [48] et [60] les auteurs montrent l'existence d'une solution absolument continue lorsque les valeurs de $G(\cdot,\cdot)$ ne sont pas nécessairement bornées.

Cette thèse est composée de cinq chapitres. Dans le premier chapitre, nous rappelons des résultats de base qui nous seront utiles pour la démonstration de nos résultats d'existence de solutions, nous présentons des définitions et concepts fondamentaux sur les multi-applications, l'analyse convexe, l'analyse non lisse et quelques résultats de compacité, et nous terminons par les opérateurs maximaux monotones. Le deuxième chapitre est consacré à l'étude dans un espace de Hilbert de dimension infinie l'existence de solution du problème d'évolution gouvernés par un opérateur sous différentiel dépendant du temps avec perturbation multivoque de la forme

$$(\mathcal{P}) \ \begin{cases} -\dot{x}(t) \in \ \partial\varphi(t, x(t)) \ + \ G(t, x(t)) \quad \text{p.p} \ \ t \in [0,T], \\ x(0) = x_0 \in dom\ \varphi(0,\cdot) \end{cases}$$

où φ est une fonction propre convexe semi-continue inférieurement, l'opérateur $\partial\varphi(t, x(t))$ est le sous différentiel de φ, $G : [0,T] \times H \rightrightarrows H$ est une multi-application à valeurs non vide convexes fermées et non nécessairement bornées (non compactes). Ensuite, on va montrer l'existence de solutions de problème $(\mathcal{P})$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$. Finalement, on va affaiblir le résultat, en supposant que la multi-application G est séparément hémi-continue supérieurement sur H, et mesurable par rapport à la première variable. Dans le troisième chapitre, on va étudier le problème d'évolution $(\mathcal{P})$ gouverné par l'opérateur sous différentiel dépendant du temps avec perturbation multivoque contenant un retard sous la forme

$$(\mathcal{P}_r)\begin{cases}-\dot{x}(t) \in \partial\varphi(t, x(t)) + G(t, \tau(t)x) \text{ p.p } t \in [0, T], \\ x(s) = \psi(s) \quad \text{pour tout } s \in [-r, 0].\end{cases}$$

Le chapitre quatre est consacré à l'étude du processus de la rafle du premier ordre non-perturbé de la forme

$$(\mathcal{SP})\begin{cases}-\dot{x}(t) \in N^P(C(t), x(t)) \quad \text{p.p } t \in I = [T_0, T], \\ x(T_0) = x_0 \in C(T_0)\end{cases}$$

où $C : I \rightrightarrows H$ est une multi-application à valeurs non vides fermées vérifiant les hypothèses suivantes :

(H_1) Pour tout $t \geq T_0$ et $\rho > 0$, $C(t)$ est ρ-prox-réguliers dans H.

(H_2) Pour tout $t \geq T_0$ et pour tout $r \geq 0$, $C(t)$ est r-uniformément semi-continue inférieurement à droite i.e. si il existe une famille $\mathcal{A} = \{a_r; \quad r \geq 0\} \subset \mathcal{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$, tel que pour tout $r \geq 0$ et pour tous s, $t \in I$, $s \leq t$, $\| x \| \leq r$, on a l'inégalité suivante est vraie

$$d(x, C(t)) \leq d(x, C(s)) + \mid a_r(t) - a_r(s) \mid . \tag{5}$$

et on va étudier le processus de la rafle perturbé

$$(\mathcal{SPP}_f)\begin{cases}-\dot{x}(t) \in N^P(C(t), x(t)) + f(t) \quad \text{p.p } t \in I, \\ x(T_0) = x_0 \in C(T_0)\end{cases}$$

où $f : I \longrightarrow H$ est une fonction mesurable bornée. Ensuite, on va montrer l'existence de la solution du processus de la rafle perturbé $(\mathcal{SPP}_f)$ avec perturbation multivoque $F : [0, T] \times H \rightrightarrows H$ à valeurs non vides fermées convexes et non nécessairement bornées. Le chapitre cinq, concerne l'étude d'existence de solutions pour le processus de la rafle $(\mathcal{SPP}_F)$ avec perturbation multivoque contenant un retard sous la forme

$$(\mathcal{SPP}_{F_R})\begin{cases}\dot{x}(t) \in -N^P(C(t), x(t)) + F(t, \tau(t)x) \quad \text{p.p } t \in [0, T] \\ x(s) = \varphi(s) \;\; \forall s \in [-R, 0] \\ x(t) \in C(t) \;\; \forall t \in [0, T].\end{cases}$$

Notons que les résultats du deuxième chapitre sont l'objet d'un papier accepte dans le journal " Nonlinear Dynamics and Systems Theory ", et les résultats du quatrième chapitre ont fait l'objet d'une publication dans le journal " positivity " voir [10].

CHAPITRE

1

NOTATIONS ET RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

Sommaire

Dans ce chapitre, nous rappelons des notions et résultats de base qui nous seront utiles pour la démonstration de nos résultats d'existence de solutions, nous présentons des définitions et concepts fondamentaux sur les multi-applications, l'analyse convexe, l'analyse non lisse et quelques résultats de compacité, et nous terminons par les opérateurs maximaux monotones.
Nous commençons par donner quelques notations utilisées dans cette thèse.

1.1 Notations

Dans tout ce qui suit H est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et la norme $\| \cdot \|$. Pour $[T_0, T]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $q \in [1, +\infty[$, on note par

- $\mathcal{L}^q([T_0, T], H) = \{x(\cdot) : [T_0, T] \longrightarrow H : \ x(\cdot)$ est mesurable et $\int_{[T_0,T]} \| x(t) \|^q \, dt < +\infty\}$, muni de la norme
$$\| x(\cdot) \|_q = \left(\int_{[T_0,T]} \| x(t) \|^q \, dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$
- $\mathcal{C}([T_0, T], H)$ est l'espace des applications continues, muni de la norme
$$\| x(\cdot) \|_{\mathcal{C}} = \max_{t \in [T_0,T]} \| x(t) \| .$$
- $\mathcal{C}^1([T_0, T], H)$ est l'espace des applications continues différentiables, muni de la norme
$$\| x(\cdot) \|_{\mathcal{C}^1} = \max\{\| x(\cdot) \|_{\mathcal{C}}, \| \dot{x}(\cdot) \|_{\mathcal{C}}\}.$$
- $\mathcal{W}^{1,q}([T_0, T], H)$ désigne l'espace de sobolev usuel, i.e.
$\mathcal{W}^{1,q}([T_0, T], H) = \{x(\cdot) : [T_0, T] \longrightarrow H : x(\cdot)$ est absolument continue et $\dot{x}(\cdot) \in \mathcal{L}^q([T_0, T], H)\}$, muni de la norme
$$\| x(\cdot) \|_{1,q} = (\| x(\cdot) \|_q^q + \| \dot{x}(\cdot) \|_q^q)^{\frac{1}{q}}.$$
- $cl(H)$ les sous ensembles non vides fermées de H.
- $B(x_0, r)$ (resp. $\overline{B}(x_0, r)$) est la boule ouverte (resp. fermée) de centre x_0 et de rayon r, pour $x_0 = 0$ et $r = 1$, elle est notée par B_H (resp. $\overline{B}_H$).
- $P_{ck}(H)$ les sous ensembles non vides fermées compactes de H.

Pour C un sous ensemble de H, on note par

- $\delta(\cdot, C)$ la fonction indicatrice de C, définie par
$$\begin{aligned} \delta(\cdot, C) : & X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ & x \longmapsto \delta(x, C) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C \\ +\infty & \text{si } x \notin C. \end{cases} \end{aligned}$$

- La fonction polaire associée à $\delta(x, C)$, appelée aussi fonction support de C, est la fonction $\delta^*(x, C)$, définie par

$$\delta^*(x, C) = \sigma(x, C) := \sup_{c \in C} \langle c, x \rangle, \quad \forall\, x \in H.$$

- La fonction caractéristique de C, définie par

$$\chi(x, C) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in C, \\ 0 & \text{si } x \notin C. \end{cases}$$

- $d(x, C)$ la fonction distance entre le point $x \in H$ et l'ensemble C définie par

$$d(x, C) = \inf_{c \in C} \| x - c \| .$$

Si C est fermé on note par

- $Proj(x, C)$ la projection du point $x \in H$ dans l'ensemble C, définie par

$$Proj(x, C) = \{c \in C : \ d(x, C) = \| c - x \| \}.$$

Si de plus C est convexe la projection est unique et vérifie

$$c \in Proj(x, C) \Longleftrightarrow c \in C \ \text{ et } \ \langle x - c, c - y \rangle \geq 0, \ \ \forall\, y \in C.$$

- la distance de Hausdorff entre deux ensemble fermés A et B de H, est définie par

$$\mathrm{H}(A, B) = \max\{e(A, B), e(B, A)\},$$

où $e(\cdot, \cdot)$ est l'écart entre deux ensembles A et B, donné par

$$e(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B).$$

1.2 Résultats préliminaires

1.2.1 Concepts d'analyse multivoque

Nous donnons dans cette sous section quelques définitions et résultats concernant les multi-applications. Pour plus de détails sur cette sous section, se référer à [25].

Définition 1.2.1. Soient X, Y deux ensembles non vides. Une multi-application (ou fonction multivoque) F définie sur X à valeurs dans Y, est une fonction qui à chaque élément $x \in X$ associe un sous ensemble $F(x)$ de Y. On note

$$\begin{aligned} F : & X \rightrightarrows Y \\ & x \mapsto F(x). \end{aligned}$$

- On appelle domaine de F qu'on note $D(F)$ l'ensemble

$$D(F) = Dom(F) = \{x \in X/ \quad F(x) \neq \emptyset\}.$$

- On appelle image de F qu'on note $R(F)$ l'ensemble

$$R(F) = \{y \in Y, \exists\, x \in X, \; y \in F(x)\}.$$

- On appelle graphe de F qu'on note $gph(F)$, le sous ensemble de $X \times Y$ défini par

$$gph(F) = \{(x, y) \in X \times Y/ \; x \in D(F), \quad y \in F(x)\}.$$

Définition 1.2.2. (Sélection)
Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On appelle sélection de F toute application $f : X \longrightarrow Y$ vérifiant

$$f(x) \in F(x), \quad \forall\, x \in X.$$

Mesurabilité des multi-applications

Définition 1.2.3. Soit (T, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique et $F : T \rightrightarrows X$. On dit que F est Σ-mesurable ou tout simplement mesurable si pour tout ouvert V de X

$$F^{-1}(V) = \{t \in T/ \; F(t) \cap V \neq \emptyset\} \in \Sigma.$$

Théorème 1.2.1. (Théorème d'existence de sélections mesurables)
Soient (T, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique complet séparable et $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application Σ-mesurable à valeurs fermées. Alors F admet au moins une sélection mesurable.

Théorème 1.2.2. Soient (T, Σ) un espace mesurable, X un espace de Banach séparable, soient $F : T \times X \rightrightarrows X$ une multi-application Σ-mesurable, $u : T \longrightarrow X$ une application mesurable. Alors la multi-application $F(\cdot, u(\cdot))$ est mesurable.

Lemme 1.2.3. Soient (T, Σ) un espace mesurable, X un espace de Banach séparable et $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application à valeurs convexes compactes. Alors, la mesurabilité de F est équivalente à la mesurabilité de la fonction support $\delta^*(x', F(\cdot))$, pour tout $x' \in X'$.

Continuité des multi-applications

Définition 1.2.4. Soient X, Y deux espaces topologiques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application, alors F est dite semi-continue supérieurement au point $x_0 \in X$, si pour tout ouvert V de Y vérifie $F(x_0) \subset V$, il existe un ouvert U de X tels que $x_0 \in U$ et $F(x) \subset V$, $\forall x \in U$.

Définition 1.2.5. Soient X, Y deux espaces topologiques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application, alors F est dite semi-continue inférieurement au point $x_0 \in X$, si pour tout ouvert V de Y vérifiant $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$, il existe un ouvert U de X tels que $x_0 \in U$ et $F(x) \cap V \neq \emptyset$, $\forall x \in U$.

Théorème 1.2.4. Soient X, Y deux espaces topologiques. Soit F est une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs fermées, alors $gph(F)$ est fermé.

Le réciproque est donnée par

Corollaire 1.2.5. Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs non vides, avec Y un espace compact. Si $gph(F)$ est fermé alors F est semi-continue supérieurement.

Définition 1.2.6. Soit X un espace métrique et Y un espace vectoriel normé, on dit que F est scalairement semi-continue supérieurement, si pour tout $y' \in Y'$, la fonction $x \mapsto \delta^*(y', F(x))$ est semi-continue supérieurement.

Définition 1.2.7. Soient X, Y deux espaces métriques et $F : X \rightrightarrows Y$. On dit que F est continue (resp. Lipschitzienne de rapport $\lambda > 0$), si pour tout $x \in X$ nous avons

$$\lim_{x' \longrightarrow x} H(F(x), F(x')) = 0$$

(resp. pour tous $x, x' \in X$ nous avons

$$H(F(x), F(x')) \leq \lambda d_X(x, x')).$$

Définition 1.2.8. Soient Y un espace métrique, $T > 0$ et $C : [0, T] \rightrightarrows Y$. On dit que C est absolument continue si pour tout $y \in Y$ et tous $t, t' \in [0, T]$, nous avons

$$\mid d(y, C(t)) - d(y, C(t')) \mid \leq \mid a(t) - a(t') \mid, \tag{1.1}$$

où $a : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction absolument continue satisfaisant $\dot{a} \neq 0$, p.p sur $[0, T]$. Observons que la relation (1.1) nous donne pour $t \geq t'$,

$$\mid d(y, C(t)) - d(y, C(t')) \mid \leq \int_{t'}^{t} \mid \dot{a}(s) \mid ds.$$

On rappelle d'abord, des concepts sur les multi-application introduit par Tolstonogov [60].

Définition 1.2.9. Soient $0 \leq T_0 < T$, $C : [T_0, T] \rightrightarrows cl(H)$ une multi-application.

(a) On dit que C est r-uniformément semi-continue inférieurement à droite, s'il existe une famille $\mathcal{A} = \{a_r; \quad r \geq 0\} \subset \mathcal{W}^{1,p}([T_0, T], \mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$, tel que pour tout $r \geq 0$ et pour tous s, $t \in [T_0, T]$, $s \leq t$, $\| x \| \leq r$, on a l'inégalité suivante est vraie

$$d(x, C(t)) \leq d(x, C(s)) + \mid a_r(t) - a_r(s) \mid .$$

(b) On dit que C est r-faiblement uniformément semi-continue inférieurement à droite, s'il existe une famille $\mathcal{A} = \{a_r; \quad r \geq 0\} \subset \mathcal{W}^{1,p}([T_0, T], \mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$, tel que pour tout $r \geq 0$ et pour tous s, $t \in [T_0, T]$, $s \leq t$, avec $x \in C(s)$, $\parallel x \parallel \leq r$, il existe un point $y \in C(t)$ satisfait l'inégalité suivante

$$\parallel x - y \parallel \leq | \, a_r(t) - a_r(s) \, | \, .$$

Proposition 1.2.6.
Soit $C : [T_0, T] \rightrightarrows cl(H)$ une multi-application.

• Si $C(t)$ est convexe (où ρ-prox-régulier) on a l'équivalence entre r-uniformément semi-continue inférieurement à droite et r- faiblement uniformément semi-continue inférieurement à droite.

• Si $C(t)$ est r-uniformément semi-continue inférieurement à droite ou r- faiblement uniformément semi-continue inférieurement à droite alors $C(t)$ est semi-continue inférieurement à droite.

1.2.2 Concepts d'analyse convexe

Pour plus de détails dans cette sous section, on peut se référer à [57].

Définition 1.2.10. Soient X un espace vectoriel, A un sous ensemble de X. On dit que A est convexe si

$$\forall\, x, y \in A, \ \forall\, \lambda \in [0, 1], \ \lambda x + (1 - \lambda) y \in A.$$

Définition 1.2.11. (Enveloppe convexe)
Soient X un espace vectoriel, A un sous ensemble de X. On appelle enveloppe convexe de A qu'on note $co(A)$, l'intersection de tous les sous ensembles convexes de X contenants A, c'est donc le plus petit sous ensemble convexe de X contenant A.

Définition 1.2.12. (Enveloppe convexe fermé)
Soient X un espace vectoriel, A un sous ensemble de X. On appelle enveloppe convexe fermé de A qu'on note $\overline{co}(A)$, l'intersection de tous les sous ensembles convexes fermés de X contenants A, c'est donc le plus petit sous ensemble convexe fermé de X contenant A.

Définition 1.2.13. (Cône normal)
Soient X un espace normé réel, C un sous ensemble convexe non vide de X. On appelle cône normal à C au point x_0, qu'on note $N(C, x_0)$, l'ensemble défini par

$$N(C, x_0) = \{x' \in X' : \ \langle x', x - x_0 \rangle \leq 0, \ \text{ pour tout } x \in C\}.$$

Définition 1.2.14. (Fonctions convexes dans $\overline{\mathbb{R}}$)
Soient X un espace vectoriel, $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est convexe si

$\forall x, y \in dom(f)$, $\forall \lambda \in [0,1], \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) < \alpha$, $f(y) < \beta$, on a

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta.$$

- On appelle domaine de définition de f qu'on note par $D(f)$, l'ensemble défini par

$$D(f) := dom(f) = \{x \in X/\ \ f(x) < +\infty\}.$$

- On dit que f est propre si $f : X \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ et $\exists\, x_0 \in X,\ f(x_0) \neq +\infty$.

Définition 1.2.15. (Dérivée directionnelle)
Soient X un espace vectoriel, $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction et soient $x_0 \in dom(f)$ et $v \in X$. On appelle dérivée directionnelle de f au point x_0 dans la direction v qu'on note par $f'(x_0, v)$, la limite définie par

$$f'(x_0, v) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

dans $\overline{\mathbb{R}}$ quand elle existe.

Définition 1.2.16. (Sous différentiabilité)
Soient X un espace vectoriel normé, X' son dual topologique, $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et $x_0 \in dom(f)$. On appelle sous différentiel de f au point x_0 qu'on note $\partial f(x_0)$, l'ensemble défini par

$$\partial f(x_0) = \{x' \in X'/\ \ \langle x', x - x_0 \rangle \leq f(x) - f(x_0),\ \ \forall\, x \in X\}.$$

• Un point $x' \in \partial f(x_0)$ est dit sous gradient de f au point x_0.
• On dit que f est sous différentiable au point x_0 si $\partial f(x_0) \neq \emptyset$.
• Le domaine de définition de ∂f, est l'ensemble défini par

$$D(\partial f) = dom\, \partial f = \{x \in X/\ \ \partial f(x) \neq \emptyset\}.$$

Remarque 1.2.1. Soient X un espace vectoriel normé, $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et $x_0 \in X$.

(a) Si $f(x_0) = +\infty$, alors $\partial f(x_0) = \emptyset$.

(b) ∂f est une multifonction de X dans X'.

(c) $\partial(\lambda f)(x_0) = \lambda \partial f(x_0)$.

1.2.3 Concepts d'analyse non lisse

Les résultats de cette sous section sont pris des références [27], [28], [29] et [51].

Définition 1.2.17. (Dérivée directionnelle de Clarke)
Soient X un espace vectoriel normé, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitzienne au voisinage de $x_0 \in X$. Alors, la dérivée directionnelle au sens de Clarke de f au point x_0 dans la direction $v \in X$, notée $f^\circ(x_0, v)$, est définie par

$$f^\circ(x_0, v) = \limsup_{x \longrightarrow x_0, t \longrightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}$$

où x est un vecteur de X et t un scalaire positif.

Définition 1.2.18. (Sous différentiel de Clarke)
Soient X un espace vectoriel normé, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitzienne au voisinage de $x_0 \in X$. Alors, le sous différentiel de Clarke de f au point x_0, notée $\partial^C f(x_0)$ est définie par

$$\partial^C f(x_0) = \{\zeta \in X' / f^\circ(x_0, v) \geq \langle \zeta, v \rangle, \ \forall v \in X\}.$$

Proposition 1.2.7. Soient X un espace vectoriel normé, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitzienne au voisinage de $x_0 \in X$. Alors, $\partial^C f(x_0)$ est un ensemble non vide, convexe, faiblement* compact et on a

$$f^\circ(x_0, v) = \sigma(v, \partial^C f(x_0)), \ \ \forall v \in X.$$

Proposition 1.2.8. Soient X un espace vectoriel normé, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitzienne au voisinage de $x_0 \in X$ de rapport $k > 0$. Alors,

(a) $\partial^C f(x_0)$ est localement bornée i.e. il existe $\delta > 0$ tel que $\partial^C f(x_0) \subset \overline{B}_{X'}(0, k)$, $\forall \, x \in B(x_0, \delta)$.

(b) Soient $(x_n)_{n \in N}$ et $(x'_n)_{n \in N}$ deux suites dans X et X' respectivement telles que $x'_n \in \partial^C f(x_n)$, $\forall n \in N$. Supposons que $(x_n)_{n \in N}$ converge vers x_0 et $(x'_n)_{n \in N}$ converge faiblement* vers x', alors $x' \in \partial^C f(x_0)$.

Définition 1.2.19. (Cône tangent de Clarke)
Soit X un espace vectoriel normé. On appelle cône tangent de Clarke à A au point x_0 qu'on note $T^C(A, x_0)$, l'ensemble défini par

$$T^C(A, x_0) = \{v \in X, d_A^\circ(x_0, v) = 0\}.$$

Définition 1.2.20. (Cône normal de Clarke)
Soit X un espace vectoriel normé. On appelle cône normal de Clarke à A au point x_0 qu'on note $N^C(A, x_0)$, l'ensemble défini par

$$N^C(A, x_0) = (T^C(A, x_0))^\circ = \{\zeta \in X', \ \text{t.q} \ \langle \zeta, y \rangle \leq 0, \forall \, y \in T^C(A, x_0)\}.$$

Proposition 1.2.9. Soit X un espace vectoriel normé. Si A est convexe, alors

(a) $T^C(A, x_0) = \{\lambda(x - x_0),\ \lambda \geq 0,\ \forall\ x \in A\}$

(b) $N^C(A, x_0) = \{\zeta \in X',\ \text{t.q}\ \langle \zeta, x - x_0 \rangle \leq 0,\ \forall x \in A\} = N(A, x_0)$

(c) $T^C(A, x_0)$ est convexe et fermé.

Définition 1.2.21. (Sous différentiel proximal)
Soient X un espace vectoriel normé, $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre et semi-continue inférieurement sur X et $x_0 \in D(f)$. On appelle sous différentiel proximal de f au point x_0 qu'on note $\partial^P f(x_0)$, l'ensemble défini par

$$\partial^P f(x_0) = \{\zeta \in X',\ \exists \sigma > 0\ \text{t.q}\ \langle \zeta, x - x_0 \rangle \leq f(x) - f(x_0) + \sigma \parallel x - x_0 \parallel^2, \forall x \in \overline{B}(x_0, \delta)\}.$$

Proposition 1.2.10. Soit X un espace vectoriel normé,

(a) On a toujours $\partial^P f(x_0) \subset \partial^C f(x_0)$ et si f est convexe continue, alors

$$\partial^P f(x_0) = \partial^C f(x_0) = \partial f(x_0).$$

(b) Si f admet un minimum local au point x_0, alors $0 \in \partial^P f(x_0)$.

Définition 1.2.22. (Cône normal proximal)
Soit X un espace vectoriel normé. On appelle cône normal proximal à A au point x_0 qu'on note $N^P(A, x_0)$ l'ensemble défini par

$$N^P(A, x_0) = \{\zeta \in X', \exists \sigma > 0, \exists \delta > 0\ \text{t.q}\ \langle \zeta, x - x_0 \rangle \leq \sigma \parallel x - x_0 \parallel^2, \forall x \in \overline{B}(x_0, \delta) \cap A\}.$$

Proposition 1.2.11. Soit X un espace vectoriel normé,

(a) $N^P(A, x_0) = \{\zeta \in X', \exists \sigma > 0\ \text{t.q}\ \langle \zeta, x - x_0 \rangle \leq \sigma \parallel x - x_0 \parallel^2, \forall x \in A\}$.

(b) $N^P(A, x_0)$ est convexe.

(c) Si A est convexe, alors $N^P(A, x_0) = N^C(A, x_0) = N(A, x_0)$.

Définition 1.2.23. Soient $\rho \in]0, +\infty]$, C un sous ensemble de H. On dit que C est ρ-prox-régulier si et seulement si, pour tout $y \in C$ et pour tout $0 \neq \zeta \in N^P(C, x)$ nous avons

$$\langle \frac{\zeta}{\parallel \zeta \parallel}, x - y \rangle \leq \frac{1}{2\rho} \parallel x - y \parallel^2, \quad \forall x \in C.$$

Nous faisons la convention $\frac{1}{\rho} = 0$ pour $\rho = +\infty$.

Remarquons que pour $\rho = +\infty$, l'uniforme ρ-prox-régularité de C est équivalente à la convexité de C.
On donne maintenant des résultats, qui sont conséquences importantes de la prox-régularité, dont nous aurons besoin pour les démonstrations de nos théorèmes principaux.

Proposition 1.2.12.
Soient C un sous ensemble non vide fermé de H et $\rho \in]0, +\infty]$. Si C est uniformément ρ-prox-régulier, alors

(a) pour tout $x \in H$, vérifiant $d(x, C) < \rho$, nous avons $Proj(x, C) \neq \emptyset$,

(b) pour tout $x \in C$, on a
$$\partial^P d(x, C) = N^P(C, x) \cap \overline{B},$$

(c) $\partial^P d(x, C) = \partial^C d(x, C)$, en tout point $x \in H$ satisfaisant $d(x, C) < \rho$.

Dans ce cas, $\partial d(x, C) = \partial^P d(x, C) = \partial^C d(x, C)$ est un sous ensemble convexe fermé de H.

Proposition 1.2.13. Soient C un sous ensemble non vide fermé de H et $\rho \in]0, +\infty]$. Si C est ρ-prox-régulier, pour tout $x, y \in H$, avec $d(x, C) < \rho$ et $d(y, C) < \rho$, alors

$$\| x - Proj(y, C) \|^2 - \| x - y \|^2 \leq 2d(x, C)d(y, C),$$

Proposition 1.2.14.
Soient C un sous ensemble non vide fermé de H et $\rho \in]0, +\infty]$. Supposons que C est ρ-prox-régulier. Alors
$$\begin{cases} \text{pour tout } \ x \in C \text{ avec } d(x, C) < \rho, \ \text{ et pour tout } \ \zeta \in \partial d(x, C), \quad \text{nous avons} \\ \langle \zeta, x' - x \rangle \leq \frac{2}{\rho} \| x' - x \|^2 + d(x, C), \\ \text{pour tout } \ x' \in H \ \text{ vérifiant } \ d(x', C) \leq \rho. \end{cases}$$

1.2.4 Quelques résultats de compacité

Définition 1.2.24. La fonction $f : H \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est dite inf-boule-compacte, si pour tout $r > 0$, l'ensemble $\{x \in H, \ f(x) \leq r\}$ est boule-compact, i.e. son intersection avec toute boule fermée dans H est relativement compacte.

Théorème 1.2.15. (Théorème de Mazur) ([41])
Soient X un espace de Banach et C un sous ensemble compact de X. Alors $\overline{co}(C)$ est compact.

Lemme 1.2.16. (Lemme de Mazur)([41])
Soit X un espace de Banach, et soit (x_n) une suite des éléments de X convergeant faiblement vers x. Alors il existe une suite (z_n) (où z_n est une combinaison convexe des éléments $x_n, x_{n+1}, \cdots$) convergeant fortement vers x.

Définition 1.2.25. Soient (J, Σ) un espace mesurable, X, Y deux espaces topologiques et $f : J \times X \longrightarrow Y$. On dit que f est une fonction de Carathéodory si $f(\cdot, x)$ est Σ-mesurable pour tout $x \in X$ fixé, et $f(t, \cdot)$ est continue pour tout $t \in J$ fixé.

Théorème 1.2.17. (Théorème de Scorza-Dragoni)([17]).
Soient J un espace métrique compact, (J, Σ, ν) un espace mesuré positif de Radon. Soient X un espace métrique séparable complet, E un espace de dimension finie et $h : J \times X \longrightarrow E$ une fonction de Carathéodory. Alors, pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un compact $J_\epsilon \subset J$ tel que $\nu(J \setminus J_\epsilon) < \epsilon$ et la restriction de h à $J_\epsilon \times X$ est continue.

Le résultat suivant est une version multivoque du Théorème de Scorza-Dragoni, due à Castaing-Marques [20].

Corollaire 1.2.18. Soient $I = [T_0, T]$, $(0 < T_0 < T)$ et λ est la mesure de lebesgue sur I, avec σ-algebra $L(I)$, X un espace métrique séparable complet et Y un espace métrique convexe compact. Soit $F : I \times X \longrightarrow P_{ck}(Y)$ une multi-application de carathéodory, i. e.

(1) Pour tout $t \in I$, la multi-application $F(t, \cdot)$ est de graphe fermé dans $X \times Y$ ($F(t, \cdot)$ est semi-continue supérieurement),

(2) Pour tout $x \in X$, la multi-application $F(\cdot, x)$ est mesurable (admet une sélection mesurable). Alors, il existe une multi-application mesurable $F_0 : I \times X \rightrightarrows P_{ck}(Y) \cup \{\emptyset\}$ qui possède les propriétés suivantes :

  (a) Il existe un ensemble négligeable $N \subset I$ indépendant de (t, x) tel que $F_0(t, x) \subset F(t, x)$, pour tout $t \notin N$ et tout $x \in X$.

  (b) Si $u : I \longrightarrow X$ et $v : I \longrightarrow Y$ sont deux applications $L(I)$ mesurables telles que $v(t) \in F(t, u(t))$ $p.\ p$, alors $v(t) \in F_0(t, u(t))$ p.p.

  (c) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble compact $I_\varepsilon \subset I$, tel que $\lambda(I/I_\varepsilon) < \varepsilon$ et la restriction de $F_0/(I_\varepsilon \times X)$ soit de graphe fermé et vérifie

$$\emptyset \neq F_0(t, x) \subset F(t, x)$$

  pour tout $(t, x) \in I_\varepsilon \times X$.

où

- $L(I)$ est la tribu sur I des ensembles mesurables au sens de Lebesgue.

Théorème 1.2.19. (Théorème du prolongement de Dugundji) ([33])
Soient X un espace métrique, A un sous ensemble fermé de X, et Y un espace vectoriel localement convexe. Soit $f : A \longrightarrow Y$ une application continue. Alors, il existe une application continue $\overline{f} : X \longrightarrow Y$ qui prolonge f à X, c'est à dire $f(x) = \overline{f}(x)$, $\forall\, x \in A$. De plus

$$\overline{f}(X) \subset co(f(A)).$$

Théorème 1.2.20. (Théorème d'Ascoli-Arzéla)
Soit X un espace métrique compact, Y un espace métrique complet, et C un sous ensemble de $\mathcal{C}(X,Y)$, l'espace des applications continues définies sur X à valeurs dans Y, muni de la topologie de la convergence uniforme. Alors, C est relativement compact si et seulement si C est équicontinu et $C(x)$ est relativement compact, avec $C(x) = \{f(x), \quad f \in C\}$.

Le théorème suivant est une conséquence du Théorème d'Ascoli-Arzéla.

Théorème 1.2.21. Soient X un sous ensemble compact de $\mathbb{R}$, Y un espace de Banach et soit (f_n) une suite de fonctions absolument continues définies sur X à valeurs dans Y satisfaisant les conditions suivantes

(1) $\forall\, t \in X$, $(f_n(t))$ est un sous ensemble relativement compact de Y,

(2) il existe une fonction à valeurs réelles positives $h \in \mathcal{L}^1(X,Y)$ telle que

$$\| \dot{f}_n(t) \| \leq h(t), \text{ p.p sur } X.$$

Alors, il existe une sous suite de (f_n) (qu'on note aussi (f_n)) qui converge vers une fonction absolument continue $f : X \longrightarrow Y$ au sens suivant

(a) (f_n) converge uniformément vers f,

(b) $(\dot{f}_n)$ converge faiblement vers $\dot{f}$ dans $\mathcal{L}^1(X,Y)$, c'est à dire, $(\dot{f}_n)$ converge vers $\dot{f} \in \sigma(\mathcal{L}^1(X,Y), \mathcal{L}^\infty(X,Y))$.

1.2.5 Opérateurs maximaux monotones

Pour plus de détails dans cette section, on peut se référer à [14].
Soit $A : H \rightrightarrows H$ une multi-application (opérateur), le domaine de A est donné par

$$D(A) = \{x \in H : \quad A(x) \neq \emptyset\},$$

et l'image de A est donné par

$$R(A) = \bigcup_{x \in H} A(x) = \{y \in H : \exists\, x \in D(A) \text{ tel que } y \in A(x)\}.$$

Définition 1.2.26. Un opérateur A est dit monotone si, pour chaque u et v dans $D(A)$ et chaque $x \in A(u)$ et $y \in A(v)$, on a

$$< x - y, u - v > \geq 0.$$

Définition 1.2.27. Un opérateur $A : H \rightrightarrows H$ est dit maximal monotone s'il est monotone et si toute extension monotone de A coïncide avec A.

Proposition 1.2.22. Soient A un opérateur maximal monotone, et u, x sont dans H. Si pour chaque v dans $D(A)$ et chaque $y \in A(v)$: $< x - y, u - v >\geq 0$ alors $u \in D(A)$ et $x \in A(u)$.

Proposition 1.2.23. Si A est un opérateur maximal monotone, alors A est convexe et fermé pour chaque $x \in H$.

Définition 1.2.28. Un opérateur A est dit demi-fermé si la condition suivante est satisfaite : $u \in D(A)$ et $x \in A(u)$, chaque fois que $u = \lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n$ dans H forte et $x = \lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n$ dans H faible où $u_n \in D(A)$ et $x_n \in A(u_n)$.

Proposition 1.2.24. Tout opérateur maximal monotone est demi-fermé.

Théorème 1.2.25. Si f est une fonction propre convexe semi-continue inférieurement défini sur H à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors ∂f est un opérateur maximal monotone.

CHAPITRE

2

PROBLÈME RÉGIS PAR UN OPÉRATEUR SOUS DIFFÉRENTIEL DÉPENDANT DU TEMPS AVEC PERTURBATION MULTIVOQUE NON BORNÉE

Sommaire

2.1 Introduction du chapitre

Les problèmes d'évolution non linéaires gouvernés par un opérateur sous différentiel (maximal monotone) jouent un rôle très important dans la théorie d'inclusions différentielle qui ont été étudiés par de nombreux auteurs (voir [5], [6], [8], [23], [49], [55], [59], [58]). Les problèmes gouvernés par les opérateurs maximaux monotones trouvent leurs motivations dans différentes applications, en contrôle optimale, mécanique, mathématique économétrie (voir [27], [32], [47]). Dans ce travail, on s'intéresse à l'existence de résultats pour les problèmes d'évolutions gouvernés par un opérateur sous différentiel dépendant du temps avec perturbation multivoque de la forme

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial\varphi(t, x(t)) + G(t, x(t)) \quad \text{p.p } t \in [0, T], \\ x(0) = x_0 \in dom\ \varphi(0, \cdot) \end{cases}$$

dans un espace de Hilbert séparable H, et un intervalle $I = [0, T]$, $(T > 0)$, où φ est une fonction propre convexe semi-continue inférieurement, l'opérateur $\partial\varphi(\cdot, \cdot)$ est le sous différentiel de φ, $G : [0, T] \times H \rightrightarrows H$ est une multi-application (la perturbation du problème $(\mathcal{P})$) à valeurs non vide convexe fermées vérifiant pour un nombre réel $\alpha > 0$:

$$d(0, G(t, x)) \leq \alpha.$$

Pour le problème non perturbé ($G \equiv 0$), les résultats d'existence et d'unicité de solution on été réalisés sous des hypothèses sur φ par beaucoup auteurs (par exemple [40], [42], [50], [62]). Dans [50], Peralba utilise une condition exprimée en terme de la fonction conjuguée $\varphi^*(t, \cdot)$ de la fonction $\varphi(t, \cdot)$, c'est-à-dire ; il existe une fonction non-négative Lipschitzienne $k : \ H \longrightarrow \mathbb{R}_+$, et une fonction absolument continue $a : \ [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $\dot{a} \in \mathcal{L}^2([0, T], \mathbb{R})$ telle que pour tout $x \in H$ et $s, t \in [0, T]$,

$$\varphi^*(t, x) \leq \varphi^*(s, x) + k(x) \mid a(t) - a(s) \mid .$$

D'autres résultats ont été obtenus sous des hypothéses de compacité sur le sous différentiel de $\varphi(t, \cdot)$ (voir [8], [48], [54], [55]) ou sur la perturbation (voir [53]).
Dans [53], les auteurs montrent l'existence d'une solution absolument continue avec G est une perturbation vérifiant une condition de croissance linéaire

$$G(t, x) \subset \beta(t)(1 + \parallel x \parallel)K \ \text{ pour tout } t \in [T_0, T] \text{ et } x \in H,$$

pour un sous ensemble compact K de la boule unité fermée $\overline{B}$ de H et une fonction non-négative $\beta(\cdot)$ dans $\mathcal{L}^2([T_0, T], \mathbb{R})$, $\quad (T_0 \geq 0)$.
Dans le cas particulier du processus de rafle i.e. pour $\varphi(t, x)$ étant la fonction indicatrice d'un ensemble mobile fermé $C(t, x)$. Edmond-Thibault dans [48] ont étudié l'existence de solution, pour une multi-application $C(t, x)$ prenant des valeurs prox-régulières et $G(\cdot, \cdot)$ est une multi-application (perturbation) à valeurs fermées convexe et non nécessairement borné. Le but principal dans ce travail est

l'étude dans un espace de Hilbert de dimension infinie l'existence de solution de $(\mathcal{P})$ tel que G est non nécessairement bornée (non compact). Ensuite, on va montrer l'existence du solution du problème $(\mathcal{P})$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$. Finalement, on va affaiblir le résultat, en supposant que la multi-application G est séparément hémi-continue supérieurement sur H, et mesurable par rapport à la première variable.

2.2 Résultat d'existence de solution pour une perturbation non bornée à valeurs convexes

Dans cette section, On étudie le problème perturbé $(\mathcal{P})$ sous une propriété d'hémi-continuité supérieure pour la perturbation multivoque non bornée G.
On rappelle d'abord, un résultat du problème perturbé, où la perturbation est univoque dépendant du temps (voir [53], [54]).

Proposition 2.2.1.
Soient H un espace de Hilbert réel et $\varphi : [T_0, T] \times H \longrightarrow [0, +\infty]$ une fonction telle que

(H_1) pour tout $t \in [T_0, T]$, la fonction $x \mapsto \varphi(t, x)$ est propre, convexe et semi-continue inférieurement.

(H_2) il existe une fonction ρ-Lipschitzienne $k : H \longrightarrow \mathbb{R}_+$ et une fonction absolument continue $a : [T_0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$, avec une dérivée non-négative $\dot{a} \in \mathcal{L}^2([T_0, T], \mathbb{R})$, telle que

$$\varphi^*(t, x) \leq \varphi^*(s, x) + k(x) \mid a(t) - a(s) \mid$$

pour tout $(t, s, x) \in [T_0, T] \times [T_0, T] \times H$.

Si $h \in \mathcal{L}^2([T_0, T], H)$ et $x_0 \in dom\ \varphi(T_0, \cdot)$, alors le problème

$$(\mathcal{P}_h) \begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial\varphi(t, x(t)) + h(t) \text{ p.p } t \in [T_0, T], \\ x(T_0) = x_0 \in dom\ \varphi(T_0, \cdot) \end{cases}$$

admet une solution unique absolument continue $x(\cdot)$ satisfait

$$\int_{T_0}^{T} \| \dot{x}(t) \|^2 dt \leq 2c_0 \int_{T_0}^{T} \dot{a}^2(t) dt + \sigma \int_{T_0}^{T} \|h(t)\|^2 dt + c_1$$

où

$c_0 = \frac{1}{2}(k^2(0) + 3(\rho + 1)^2)$,

$\sigma = k^2(0) + 3(\rho + 1)^2 + 4$,

$c_1 = 2[T - T_0 + \varphi(T_0, x(T_0)) - \varphi(T, x(T))]$, et pour $T_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$

$$\begin{aligned}&|\varphi(t_2, x(t_2)) - \varphi(t_1, x(t_1))|\\&\leq \int_{t_1}^{t_2} [k(0) + (\rho+1) \parallel \dot{x}(t) + h(t) \parallel][\dot{a}(t) + |h|(t)]dt + \int_{t_1}^{t_2} \parallel \dot{x}(t) + h(t) \parallel^2 dt.\end{aligned}$$

Présentons maintenant le théorème essentiel de la section. Dans le développement, on utilise quelques idées des travaux [48], [53] et [54].

Théorème 2.2.2.
Soit H un espace de Hilbert réel séparable. On suppose que $\varphi : [0,T] \times H \longrightarrow [0, +\infty]$ est une fonction satisfaisant (H_1) et (H_2) de la Proposition 2.2.1 et la condition suivante :
(H_3) φ est inf-boule compact pour tout $t \in [0,T]$.
Soit $G : [0,T] \times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs non vides convexes, fermés telle que
(H_4) $G(\cdot,\cdot)$ est globalement hémi-continue supérieurement par rapport à les deux variables.
(H_5) il existe un certain $\alpha > 0$ tel que :

$$d(0, G(t,x)) \leq \alpha \quad \text{pour tout } \ t \in [0,T] \ \text{ et } \ x \in H.$$

Alors, pour tout $x_0 \in dom\, \varphi(0,\cdot)$, le problème $(\mathcal{P})$ admet au moins une solution absolument continue, avec

$$\int_0^T \|\dot{x}(t)\|^2 dt \leq c,$$

où

$$\begin{aligned}c &= 2c_0 \int_0^T \dot{a}^2(t)dt + \sigma\alpha^2 T + 2[T + \varphi(0, x_0)],\\c_0 &= \frac{1}{2}(k^2(0) + 3(\rho+1)^2).\end{aligned}$$

Démonstration.
Pour tout $(t,x) \in [0,T] \times H$, on note par $g(t,x)$ l'élément de norme minimal de l'ensemble fermé convexe $G(t,x)$ de H, tel que

$$g(t,x) = Proj(0, G(t,x)).$$

Étape (1) : Construction de la suite $(x_n(\cdot))_n$.
On définit, pour tout $n \geq 1$, une partition de l'intervalle $I = [0,T]$ par : $t_k^n = k\frac{T}{n}$, $0 \leq k \leq n$.
On pose $x(t_0^n) = x_0$ et on choisit y_0^n l'élément de norme minimal de l'ensemble convexe fermé $G(t_0^n, x_0)$, alors par l'hypothèse (H_5) on a :

$$\parallel y_0^n \parallel \leq \alpha, \tag{2.0}$$

et on considère d'abord, l'inclusion différentielle suivante sur l'intervalle $[t_0^n, t_1^n]$:

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial\varphi(t, x(t)) + y_0^n \text{ p.p } t \in [t_0^n, t_1^n], \\ x(t_0^n) = x_0 \in dom\ \varphi(t_0^n, \cdot), \end{cases}$$

par la relation (2.0) on observe que l'application $t \longmapsto y_0^n$ est dans $\mathcal{L}^2([t_0^n, t_1^n], H)$, alors, par la Proposition 2.2.1, cette dernière inclusion différentielle admet une solution unique absolument continue que l'on note par $x_0^n : [t_0^n, t_1^n] \longrightarrow H$.

De même façon, pour tout $k \in \{0, ..., n-1\}$, l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial\varphi(t, x(t)) + y_k^n \quad \text{p.p } t \in [t_k^n, t_{k+1}^n], \\ x(t_k^n) = x_{k-1}^n(t_k^n), \end{cases}$$

admet une solution unique absolument continue que l'on note par $x_k^n : [t_k^n, t_{k+1}^n] \longrightarrow H$,

où $y_k^n = Proj(0, G(t_k^n, x_{k-1}^n(t_k^n)))$. Alors, pour tout $n \geq 1$, il existe une suite finie d'applications absolument continues $x_k^n(\cdot) : [t_k^n, t_{k+1}^n] \longrightarrow H$ $(0 \leq k \leq n-1)$ telle que, pour tout $k \in \{0, ..., n-1\}$

$$\begin{cases} -\dot{x}_k^n(t) \in \partial\varphi(t, x_k^n(t)) + y_k^n \text{ p.p } t \in [t_k^n, t_{k+1}^n], \\ x_k^n(t_k^n) = x_{k-1}^n(t_k^n) \in dom\varphi(t_k^n, \cdot). \end{cases}$$

De la Proposition 2.2.1, cette solution satisfait sur tout sous intervalle $[t_k^n, t_{k+1}^n]$, $k \in \{0, ..., n-1\}$

$$\begin{aligned} \int_{t_k{}^n}^{t_{k+1}^n} \| \dot{x}_k^n(t) \|^2 dt &\leq 2c_0 \int_{t_k{}^n}^{t_{k+1}^n} \dot{a}^2(t)dt + \sigma \int_{t_k{}^n}^{t_{k+1}^n} \| y_k^n \|^2 dt + c_k \\ &\leq 2c_0 \int_{t_k{}^n}^{t_{k+1}^n} \dot{a}^2(t)dt + \sigma \int_{t_k{}^n}^{t_{k+1}^n} \alpha^2 dt + c_k, \end{aligned} \tag{2.1}$$

où

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2}(k^2(0) + 3(\rho+1)^2), \\ \sigma &= k^2(0) + 3(\rho+1)^2 + 4, \\ c_k &= 2[(t_{k+1}^n - t_k^n) + \varphi(t_k^n, x_k^n(t_k^n)) - \varphi(t_{k+1}^n, x_{k+1}^n(t_{k+1}^n))]. \end{aligned}$$

Maintenant, on définit $x_n(\cdot) : [0, T] \longrightarrow H$ par

$$\begin{cases} x_n(t) = x_k^n(t) \quad \text{si } t \in [t_k^n, t_{k+1}^n[\text{ pour tout } k \in \{0, ..., n-1\}, \\ x_n(T) = x_{n-1}^n(T). \end{cases}$$

Évidemment, $x_n(\cdot)$ est absolument continue sur $[0, T]$, et on définit $g_n(\cdot) : [0, T] \longrightarrow H$ par

$$\begin{cases} g_n(t) = y_k^n \quad \text{si } t \in [t_k^n, t_{k+1}^n[\text{ pour tout } k \in \{0, ..., n-1\}, \\ g_n(T) = y_{n-1}^n. \end{cases}$$

On considère les fonctions $\delta_n, \theta_n : [0,T] \longrightarrow [0,T]$ telles que, pour tout $k \in \{0, ..., n-1\}$

$$\delta_n(t) = \begin{cases} t_k^n & \text{si } t \in [t_k^n, t_{k+1}^n[, \\ T & \text{si } t = T \end{cases}$$

et

$$\theta_n(t) = \begin{cases} t_0^n & \text{si } t = 0, \\ t_k^n & \text{si } t \in]t_k^n, t_{k+1}^n]. \end{cases}$$

Pour tout $t \in [0,T]$, en observant que

$$|\delta_n(t) - t| \leq |t_{k+1}^n - t_k^n| = \frac{T}{n}, \quad \text{alors on a } \delta_n(t) \longrightarrow t \text{ quand } n \longrightarrow +\infty.$$

Alors, pour tout $n \geq 1$, on obtient

(1) $g_n(t) \in G(\delta_n(t), x_n(\theta_n(t)))$, $\forall t \in [0,T]$, $\forall x \in H$,

(2) $\forall t \in [0,T]$: $\|g_n(t)\| \leq \alpha$,

(3) $-\dot{x}_n(t) \in \partial\varphi(t, x_n(t)) + g_n(\delta_n(t))$ p.p $t \in [0,T]$, $x_n(0) = x_0$.

Aussi, d'après (2.1), on obtient

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k{}^n}^{t_{k+1}^n} \|\dot{x}_n(t)\|^2 dt \leq 2c_0 \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k{}^n}^{t_{k+1}^n} \dot{a}^2(t)dt + \sigma\alpha^2 \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k{}^n}^{t_{k+1}^n} dt + \sum_{k=0}^{n-1} c_k$$

qui est équivalent à

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\dot{x}_n(t)\|^2 dt &\leq 2c_0 \int_0^T \dot{a}^2(t)dt + \sigma\alpha^2 \int_0^T dt + c_n \\ &\leq 2c_0 \int_0^T \dot{a}^2(t)dt + \sigma\alpha^2 T + c_n, \end{aligned}$$

avec

$$c_n = 2[T + \varphi(0, x_0) - \varphi(T, x_n(T))],$$

comme φ est non-négative, en posant $c' = 2[T + \varphi(0, x_0)]$, donc on peut écrire

$$\int_0^T \|\dot{x}_n(t)\|^2 dt \leq 2c_0 \int_0^T \dot{a}^2(t)dt + \sigma\alpha^2 T + c',$$

alors

$$\int_0^T \|\dot{x}_n(t)\|^2 dt \leq c,$$

où $c = 2c_0 \int_0^T \dot{a}^2(t)dt + \sigma\alpha^2 T + c'$, et on trouve que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_0^T \|\dot{x}_n(t)\|^2 dt \leq c \tag{2.2}$$

et alors

$$L = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\dot{x}_n(t)\|_{\mathcal{L}^2([0,T],H)} < +\infty.$$

Étape (2) : Convergence uniforme d'une sous suite de $(x_n(\cdot))_n$ vers une application absolument continue $x(\cdot)$.

En utilisant l'inégalité de Cauchy-schwartz et la relation (2.2), on aura pour tout $s \in [0,T]$

$$\begin{aligned} \| x_n(s) - x_n(0) \|^2 = \| x_n(s) - x_0 \|^2 &\leq s \int_0^s \| \dot{x}_n(t) \|^2 \, dt \\ &\leq Tc \end{aligned}$$

et on trouve que

$$\begin{aligned} \| x_n(s) \|^2 &\leq 2 \| x_0 \|^2 + 2 \| x_n(s) - x_0 \|^2 \\ &\leq 2 \| x_0 \|^2 + 2Tc. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout n, on obtient

$$\| x_n(\cdot) \|_\infty^2 \leq 2 \| x_0 \|^2 + 2Tc,$$

alors

$$\| x_n(\cdot) \|_\infty \leq M, \tag{2.3}$$

où

$$M = [2 \| x_0 \|^2 + 2Tc]^{\frac{1}{2}}.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \| x_n(t) - x_n(s) \| &= \| \int_s^t \dot{x}_n(\tau) d\tau \| \\ &\leq (t-s)^{\frac{1}{2}} (\int_s^t \| \dot{x}_n(\tau) \|^2 \, d\tau)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (t-s)^{\frac{1}{2}} (\int_0^T \| \dot{x}_n(\tau) \|^2 \, d\tau)^{\frac{1}{2}} \leq (t-s)^{\frac{1}{2}} L, \end{aligned}$$

en suite par la relation (2.3), l'ensemble $\{(x_n(\cdot))_n\}$ est borné et équicontinue dans $\mathcal{C}([0,T],H)$, d'autre part, par la Proposition 2.2.1, pour tout $t \in [0,T]$ fixé et tout n, on a

$$\begin{aligned} |\varphi(t, x_n(t)) - \varphi(0, x(0))| &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_0^t [k(0) + (\rho+1) \| \dot{x}_n(t) + \alpha \|][\dot{a}(t) + \alpha] dt \\ &+ \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_0^t \| \dot{x}_n(t) + \alpha \|^2 \, dt < +\infty, \end{aligned}$$

comme φ est inf-boule compact par l'hypothèse (H_3), l'ensemble $\{x_n(t);\ n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact dans H, donc par le Théorème d'Ascoli, on peut extraire une sous suite de $(x_n(\cdot))_n$ qui converge uniformément sur $[0,T]$ vers une application $x(\cdot) \in \mathcal{C}([0,T],H)$. D'après (2.2), la suite $(\dot{x}_n(\cdot))_n$ est bornée dans $\mathcal{L}^2([0,T],H)$, alors on peut extraire une sous suite de $(\dot{x}_n(\cdot))_n$ qui converge faiblement dans $\mathcal{L}^2([0,T],H)$ vers une application $v(\cdot) \in \mathcal{L}^2([0,T],H)$. Alors, l'égalité

$$x_n(t) = x_n(0) + \int_0^t \dot{x}_n(s)ds \quad \text{pour tout } t \in [0,T],$$

implique

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(s)ds \quad \text{pour tout } t \in [0,T]$$

d'où l'application $x(\cdot)$ est absolument continue sur $[0,T]$ avec $\dot{x}(\cdot) = v(\cdot)$ sur $[0,T]$.

Étape (3) : On va montrer que $x(\cdot)$ est une solution de $(\mathcal{P})$ sur $[0,T]$.

On définit la fonction étagée par :

$$z_n(t) = g_n(\delta_n(t)) \qquad \text{pour tout } t \in [0,T].$$

Comme $\| g_n(\delta_n(t)) \| \leq \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,T]$, on peut supposer que la suite $(z_n(\cdot))_n$ converge faiblement dans $\mathcal{L}^1([0,T],H)$ vers l'application $z(\cdot) \in \mathcal{L}^1([0,T],H)$ avec $\| z(t) \| \leq \alpha$. p.p $t \in [0,T]$. De plus, pour presque tout $t \in [0,T]$

$$-\dot{x}_n(t) \in \partial\varphi(t, x_n(t)) + g_n(\delta_n(t))$$

qui est équivalent à

$$-\dot{x}_n(t) \in \partial\varphi(t, x_n(t)) + z_n(t),$$

alors

$$-\dot{x}_n(t) - z_n(t) \in \partial\varphi(t, x_n(t)), \tag{2.4}$$

$$z_n(t) \in G(\delta_n(t), x_n(\theta_n(t))). \tag{2.5}$$

Comme la suite $(z_n(\cdot))_n$ converge faiblement dans $\mathcal{L}^1([0,T],H)$ vers $z(\cdot)$, alors par le Théorème de Mazur, il existe une suite

$$\xi_n \in \overline{co}\{z_q,\ \ q \geq n\} \tag{2.6}$$

telles que $(\xi_n(\cdot))_n$ converges fortement dans $\mathcal{L}^1([0,T],H)$ vers $z(\cdot)$. Alors on peut extraire une sous suite de $(\xi_n(\cdot))_n$ (on peut suppose que cette sous suite est $(\xi_n(\cdot))_n$) converge presque partout vers $z(\cdot)$, alors il existe un sous ensemble Lebesgue négligeable $S \subset [0,T]$ tel que pour tout $t \in [0,T] \backslash S$, on a $\xi_n(t) \longrightarrow z(t)$ fortement dans H, et d'autre part on a l'inclusion (2.6) est vraie pour tout $n \geq 1$ et donc

$$z(t) \in \bigcap_n \overline{co}\{z_q(t),\ \ q \geq n\}.$$

D'après l'inclusion (2.5), pour tous $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0,T]\backslash S$ et tout $y \in H$ on a

$$\langle y, z_n(t)\rangle \leq \sigma(y, G(\delta_n(t), x_n(\theta_n(t)))), \tag{2.7}$$

de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,T]\backslash S$, d'après (2.6) on trouve

$$\langle y, \xi_k(t)\rangle \leq \sup_{q\geq n}\langle y, z_q(t)\rangle \quad \forall\, k \geq n, \tag{2.8}$$

par passage à la limite dans (2.8) quand $k \longrightarrow +\infty$ et d'après la relation (2.7), on obtient

$$\begin{aligned}\langle y, z(t)\rangle &\leq \sup_{q\geq n}\langle y, z_q(t)\rangle \\ &\leq \sup_{q\geq n}\sigma(y, G(\delta_q(t), x_q(\theta_q(t)))),\end{aligned}$$

d'où

$$\langle y, z(t)\rangle \leq \limsup_{n\longrightarrow+\infty}\sigma(y, G(\delta_n(t), x_n(\theta_n(t)))).$$

Ensuite, comme $\sigma(y, G(\cdot,\cdot))$ est semi-continue supérieurement sur $[0,T] \times H$, alors pour tout $t \in [0,T]\backslash S$ et tout $y \in H$

$$\langle y, z(t)\rangle \leq \sigma(y, G(t, x(t))),$$

alors

$$z(t) \in G(t, x(t)) \quad \text{p.p.}$$

De plus, comme la suite $(\dot{x}_n(\cdot) + z_n(\cdot))_n$ converge faiblement dans $\mathcal{L}^1([0,T], H)$ vers $(\dot{x}(\cdot) + z(\cdot))$ et la suite $(x_n(\cdot))_n$ converge fortement dans $\mathcal{L}^1([0,T], H)$ vers $x(\cdot)$, et puisque $\partial\varphi(t,\cdot)$ satisfait la propriété de fermeture du sous différentielle d'une fonction propre convexe semi-continue inférieurement, on obtient :

$$\dot{x}(t) + z(t) \in -\partial\varphi(t, x(t)).$$

Par conséquent,

$$-\dot{x}(t) \in \partial\varphi(t, x(t)) + z(t) \quad \text{p.p},$$

et

$$z(t) \in G(t, x(t)) \quad \text{p.p.}$$

Par passage à la limite dans (2.2) quand $n \longrightarrow +\infty$, le résultat de convergence précédent entaîne

$$\int_0^T \|\dot{x}(t)\|^2 dt \leq c. \tag{2.9}$$

D'où, la démonstration est terminée. $\square$

Remarque 2.2.1. Le Théorème 2.2.2 est vrai pour tout intervalle fini sous la forme $[T_k, T_{k+1}]$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$. Alors, dans le corollaire suivant on va monter l'existence du solution du problème $(\mathcal{P})$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$.

Corollaire 2.2.3.
Soient $\varphi : \mathbb{R}_+ \times H \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ et $G : \mathbb{R}_+ \times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs non vides fermées convexes. On suppose que les hypothèses suivantes sont satisfaites :

(H_1') la fonction $x \longmapsto \varphi(t,x)$ est propre convexe semi continue inférieurement,

(H_2') il existe une fonction ρ-Lipschitzienne $k : H \longrightarrow \mathbb{R}_+$, et une fonction absolument continue $a : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, de dérivée non-négative $\dot{a} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, telle que

$$\varphi^*(t,x) \leq \varphi^*(s,x) + k(x) \mid a(t) - a(s) \mid$$

pour tout $(t,s,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times H$,

(H_3') φ est inf-boule-compacte pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

(H_4') $G(\cdot,\cdot)$ est globalement hémi-continue supérieurement sur $\mathbb{R}_+ \times H$,

(H_5') il existe une fonction $\alpha(\cdot) \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+)$ tel que

$$d(0, G(t,x)) \leq \alpha(t)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tout $x \in H$.

Alors, pour tout $x_0 \in dom\varphi(0,\cdot)$, il existe une application absolument continue $x(\cdot) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow H$ satisfait

$$(\mathcal{P}_1) \begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial\varphi(t, x(t)) + G(t, x(t)) & \text{p.p } t \in \mathbb{R}_+, \\ x(0) = x_0 \in dom\ \varphi(0,\cdot). \end{cases}$$

Démonstration.
Dans le développement, on utilise quelques idées de travail [48] (Théorème (4)). On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, une partition de $\mathbb{R}_+$ par les points $t_n = n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. On utilise la preuve du Théorème 2.2.2 sur tout sous intervalle $[t_n, t_{n+1}]$, alors il existe une application absolument continue $x_0 : [t_0, t_1] \longrightarrow H$ de l'inclusion différentielle suivante

$$\begin{cases} -\dot{x}_0(t) \in \partial\varphi(t, x_0(t)) + G(t, x_0(t)) & \text{p.p } t \in [t_0, t_1], \\ x(0) = x_0 \in dom\ \varphi(0,\cdot). \end{cases}$$

De cette façon, on définit $x_i(\cdot) : [t_i, t_{i+1}] \longrightarrow H$ telle que, pour tout $i \in \{0, \cdots, n-1\}$, $x_i(\cdot)$ est absolument continue sur $[t_i, t_{i+1}]$ et on a

$$\begin{cases} -\dot{x}_i(t) \in \partial\varphi(t, x_i(t)) + G(t, x_i(t)) & \text{p.p } t \in [t_i, t_{i+1}], \\ x_i(t_i) = x_{i-1}(t_i) \in dom\ \varphi(t_i,\cdot). \end{cases}$$

On obtient par induction, l'existe d'une application absolument continue $x_n(\cdot) : [t_n, t_{n+1}] \longrightarrow H$ telle que

$$\begin{cases} -\dot{x}_n(t) \in \partial\varphi(t, x_n(t)) + G(t, x_n(t)) \quad \text{p.p } t \in [t_n, t_{n+1}], \\ x_n(t_n) = x_{n-1}(t_n) \in dom\varphi(t_n, \cdot). \end{cases} \tag{2.10}$$

Soit $x(\cdot) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow H$ une fonction définie par

$$x(t) := x_n(t) \quad \text{pour tout } t \in [t_n, t_{n+1}[\quad \text{avec } n \in \mathbb{N},$$

$x(\cdot)$ est une fonction absolument continue sur $\mathbb{R}_+$, et d'après (2.10) on a

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial\varphi(t, x(t)) + G(t, x(t)) \quad \text{p.p } t \in \mathbb{R}_+, \\ x(0) = x_0 \in dom\varphi(0, \cdot). \end{cases}$$

$\square$

2.3 Perturbation séparément hémi-continue supérieurement

Dans cette section, on va affaiblir l'hypothèse (H_1) du Théorème 2.2.2. On va supposer que la multi-application G est séparément hémi-continue supérieurement sur H, et mesurable par rapport à la première variable.

Théorème 2.3.1.
Sous les hypothèses du Théorème 2.2.2 sur φ, soit $G : [0, T] \times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs non vides convexes fermées telle que

(a) pour tout $t \in [0, T]$, $G(t, \cdot)$ est hémi-continue supérieurement sur H,

(b) pour tout $x \in H$, $G(\cdot, x)$ possède une sélection mesurable,

(c) pour un sous ensemble convexe compact $K \subset \overline{B}$ et un nombre réel $\gamma > 0$, pour tout $(t, x) \in [0, T] \times H$ on a
$$G(t, x) \subset \gamma(1+ \| x \|)K.$$

Alors, pour tout $x_0 \in dom\varphi(0, \cdot)$ le problème suivant

$$(\mathcal{P}_2) \begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial\varphi(t, x(t)) + G(t, x(t)) \quad \text{p.p } t \in [0, T], \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

admet au moins une solution absolument continue $x(\cdot)$. Plus précisément,

(1) il existe une application absolument continue $x(\cdot) : [0,T] \longrightarrow H$, et une application intégrable $g(\cdot) : [0,T] \longrightarrow H$ telle que $x(0) = x_0$ et $x(t) \in dom\varphi(t, x(t))$ pour tout $t \in [0,T]$,

(2) pour presque tout $t \in [0,T]$, $g(t) \in G(t, x(t))$ et $-\dot{x}(t) + g(t) \in \partial\, \varphi(t, x(t))$.

Démonstration.
On peut supposer les nombres réels

$$\beta = \gamma(1+R)K \tag{2.11}$$

et

$$R = (2[\|x_0\|^2 + Tc)^{\frac{1}{2}},$$

où c est définit dans le Théorème 2.2.2, on fixe une fonction continue $\psi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow [0,1]$ telle que

$$\psi(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau \leq R, \\ 0 & \text{si } \tau \geq R+1. \end{cases} \tag{2.12}$$

On considère l'espace métrique convexe compact $Y := \gamma(1+R)K$, qui est un ensemble borélien de H, et on définit la multi-application $\widehat{G} : [0,T] \times H \longrightarrow P_{ck}(Y)$ par

$$\widehat{G}(t,x) := \psi(\|x\|)G(t,x),$$

observons que, $\widehat{G}(\cdot, x)$ admet une sélection mesurable pour tout $x \in H$ et pour tout $t \in [0,T]$, le graphe de $\widehat{G}(t,\cdot)$ est fermé dans $H \times Y$. Donc, d'après le Corollaire 1.2.18 , il existe une multi-application $G_0 : [0,T] \times H \longrightarrow P_{ck}(Y) \cup \{\emptyset\}$ telle que :

(i) pour un sous ensemble négligeable $N \subset [0,T]$ on a

$$G_0(t,x) \subset \widehat{G}(t,x) \quad \text{pour tout } t \notin N \ \text{ et } \ \text{pour tout } x \in H, \tag{2.13}$$

(ii) pour tout $n \geq 1$, il existe un sous ensemble compact $J_n \subset [0,T]$ telle que, $\lambda([0,T]/J_n) < \frac{1}{n}$ et la restriction sur $J_n \times H$ est de graphe fermé, et $\emptyset \neq G_0(t,x) \subset \widehat{G}(t,x)\ \forall (t,x) \in J_n \times H$.

De plus (ii) implique, qu'il existe une suite croissante $(J_n)_{n\geq 1}$, de sous ensembles compacts de $[0,T]$ telle que, pour tout $n \geq 1$, $G_0/J_n \times H$ est semi-continue supérieurement à valeurs convexes compactes. Alors, le Théorème de prolongement de Dugundji, pour tout $n \geq 1$, il existe une extension semi continue supérieurement $\overline{G}_n$ de $G_0/J_n \times H$ à $[0,T] \times H$ satisfait

$$\overline{G}_n(t,x) \subset \gamma(1+ \parallel x \parallel)K \text{ pour tout } (t,x) \in [0,T] \times H$$

et $\overline{G}_n(t,x) = G_0(t,x)$ sur $J_n \times H$. De plus on a

$$d(0, \overline{G}_n(t,x)) \leq \alpha \ \text{ pour tout } \ (t,x) \in J_n \times H.$$

Comme dans la preuve du Théorème précédent 2.2.2 , pour tout $n \geq 1$, il existe une application absolument continue $x_n(\cdot) : [0,T] \longrightarrow H$ et une application intégrable $g_n(\cdot) : [0,T] \longrightarrow H$ telle que $x_n(0) = x_0$, et pour presque tout $t \in [0,T]$ on a $-\dot{x}_n(t) \in \partial\varphi(t, x_n(t)) + g_n(t)$ et

$$g_n(t) \in \overline{G}_n(t, x_n(t)), \tag{2.14}$$

avec

$$\| g_n(t) \| \leq \alpha, \tag{2.15}$$

et

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_0^T \| \dot{x}_n(t) \|^2 \, dt \leq c, \tag{2.16}$$

et

$$L = \sup_{n\in\mathbb{N}} \| \dot{x}_n(t) \|_{\mathcal{L}^2([0,T],H)} < +\infty, \tag{2.17}$$

comme dans la preuve du Théorème 2.2.2, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et (2.16) on obtient pour tout n,

$$\| x_n(\cdot) \|_\infty \leq [2 \| x_0 \|^2 + 2Tc]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.18}$$

et pour tout $s, t \in [0,T]$ on a

$$\| x_n(t) - x_n(s) \| \leq (t-s)^{\frac{1}{2}} (\int_0^T \| \dot{x}_n(\tau) d\tau)^{\frac{1}{2}} \leq (t-s)^{\frac{1}{2}} L, \tag{2.19}$$

avec (2.18), l'ensemble $\{x_n(\cdot), n \in \mathbb{N}\}$ est borné et équi-continue dans $\mathcal{C}([0,T],H)$. D'après la Proposition 2.2.1, pour tout $t \in [0,T]$ fixé et tout n, on a

$$|\varphi(t, x_n(t)) - \varphi(0, x(0))| < +\infty.$$

Donc, comme φ est inf-boule-compacte par hypothèse, l'ensemble $\{x_n(t), n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact dans H. Par le Théorème d' Ascoli's, on peut extraire une sous suite de $(x_n(\cdot))_n$ qui converges uniformément sur $[0,T]$ vers l'application $x(\cdot) \in \mathcal{C}([0,T],H)$, i. e.

$$x_n(\cdot) \longrightarrow x(\cdot) \quad \text{fortoment dans} \quad \mathcal{L}^2([0,T],H). \tag{2.20}$$

D'après (2.16), la suite $(\dot{x}_n(\cdot))_n$ est borné dans $\mathcal{L}^2([0,T],H)$, alors on peut extraire une sous suite qui converge faiblement dans $\mathcal{L}^2([0,T],H)$ vers l'application $v(\cdot)$. Alors, d'après

$$x_n(t) = x_n(0) + \int_0^t \dot{x}_n(s)ds \quad \text{pour tout } t \in [0,T],$$

on a

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(s)ds \quad \text{pour tout } t \in [0,T]$$

et donc l'application $x(\cdot)$ est absolument continue sur $[0,T]$ avec $\dot{x}(\cdot) = v(\cdot)$ pour presque tout $t \in [0,T]$ et

$$\dot{x}_n(\cdot) \longrightarrow \dot{x}(\cdot) \quad \text{faiblement dans} \quad \mathcal{L}^2([0,T],H), \tag{2.21}$$

et d'après (2.15), on a

$$g_n(\cdot) \longrightarrow g(\cdot) \quad \text{faiblement dans} \quad \mathcal{L}^2([0,T],H). \tag{2.22}$$

Comme dans la preuve du Théorème précédent 2.2.2, d'après (4.17), (4.20) et (4.21) et les propriétés de fermeture du sous différentiel, pour presque tout $t \in [0,T]$ on a

$$\dot{x}(t) + g(t) \in -\partial\varphi(t,x(t)) \quad \text{pour} \quad \text{p.p } t \in [0,T]. \tag{2.23}$$

On va montrer que $g(t) \in G(t,x(t))$ pour presque tout $t \in [0,T]$.
par (4.21) et par le Lemme de Mazur's, il existe une suite $(\xi_n(\cdot))_n$ dans $\mathcal{L}^1([0,T],H)$ tel que

$$\xi_n(\cdot) \in \overline{co}\{g_q(\cdot), q \geq n\} \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1, \tag{2.24}$$

qui converge fortement dans $\mathcal{L}^1([0,T],H)$ vers $g(\cdot)$. Donc par l'extraction d'une sous suite, on peut supposer que $\xi_n(t) \longrightarrow g(t)$ pour presque tout $t \in [0,T]$, cela avec (2.24), implique que, pour un certain ensemble négligeable $N_1 \subset [0,T]$,

$$g(t) \in \bigcap_n \overline{co}\{g_q(t), q \geq n\} \quad \text{pour tout} \;\; t \in [0,T] \setminus N_1. \tag{2.25}$$

En prenant (2.14) en considération, on peut supposer que, pour tout $n \geq 1$ et pour tout $t \in [0,T] \setminus N_1$,

$$g_n(t) \in \overline{G}_n(t, x_n(t)). \tag{2.26}$$

Considérons le sous ensemble négligeable $N_2 = ([0,T] \setminus \underset{n}{\cup} J_n) \cup N \cup N_1$, et on va montrer que $g(t) \in G(t,x(t))$ pour tout $t \in [0,T] \setminus N_2$. Fixons $\tau \in [0,T] \setminus N_2$, de (2.25) et (2.26), on a pour tout $y \in H$,

$$\langle y, g(\tau)\rangle \leq \limsup_n \sigma(y, \overline{G}_n(\tau, x_n(\tau))). \tag{2.27}$$

D'autre part, par la définition de N_2, il existe un entier $p(\tau)$ tel que $\tau \in J_{p(\tau)} \setminus N$ et $(J_n)_n$ étant décroissant on a $\tau \in J_n$ pour tout $n \geq p(\tau)$. Par conséquent, pour tout $n \geq p(\tau)$,

$$\overline{G}_n(\tau, x_n(\tau)) = G_0(\tau, x_n(\tau)) \subset \widehat{G}(\tau, x_n(\tau)), \tag{2.28}$$

l'inclusion suit de (2.13). Par (2.18) on a pour tout $n \geq 1$ et pour presque tout $t \in [0,T]$,

$$\| x_n(t) \| \leq R, \tag{2.29}$$

et donc par (2.12), pour tout $n \geq 1$,

$$\widehat{G}(\tau, x_n(\tau)) = G(\tau, x_n(\tau)). \tag{2.30}$$

D'où par (2.27), (2.28) et (2.30) et le fait que $G(\tau, \cdot)$ est scalairement semicontinue supérieurement, on a

$$\langle y, g(\tau)\rangle \leq \sigma(y, G(\tau, x(\tau))),$$

ceci étant vrai pour tout $y \in H$, et $G(\tau, x(\tau))$ étant fermé et convexe, on conclut que $g(t) \in G(t, x(t))$. Puisque la dernière inclusion est vrai pour tout $\tau \in [0, T] \setminus N_2$, on a $g(t) \in G(t, x(t))$ p.p $t \in [0, T]$. Cela avec (2.23), et le fait que $x(0) = x_0$, montre que $x(\cdot)$ est une solution de $(\mathcal{P}_2)$.

$\square$

CHAPITRE

3

PROBLÈME RÉGIS PAR UN OPÉRATEUR SOUS DIFFÉRENTIEL DÉPENDANT DU TEMPS AVEC PERTURBATION MULTIVOQUE NON BORNÉE CONTENANT UN RETARD

Sommaire

3.1 Introduction du chapitre

Dans ce chapitre, on va étudier le problème d'évolution gouverné par l'opérateur sous différentiel dépendant du temps avec perturbation multivoque contenant un retard, en utilisant les résultats du Théorème 2.2.2.
On suppose que I est l'intervalle $[0,T]$.
Soit $r>0$ un retard fini. On considère l'espace $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}([-r,0],H)$ muni de la norme de la convergence uniforme notée $\|\cdot\|_{\mathcal{C}_0}$. A chaque $t\in I$, on associe une application $\tau(t) : \mathcal{C}([-r,T],H) \longrightarrow \mathcal{C}_0$ définie, pour tout $x(\cdot)\in\mathcal{C}([-r,T];H)$ par $(\tau(t)x(\cdot))(s) := x(t+s)$, pour tout $s\in[-r,0]$. Soit $G : I\times\mathcal{C}_0 \rightrightarrows H$ une multi-application et $\partial\varphi(t,\cdot)$ est le sous différentiel d'une fonction $\varphi(t,\cdot)$ convexe, propre semi continue inférieurement d'un espace de Hilbert de dimension infinie H dans $[0,+\infty]$.
Soit ψ un membre fixé de $\mathcal{C}_0$ tel que $\psi(0)\in dom\,\varphi(0,\cdot)$, où pour tout $t\in[0,T]$, $dom\,\varphi(t,\cdot)$ désigne le domaine effectif de la fonction $\varphi(t,\cdot)$.
On va étudier l'existence de solution pour le problème suivant

$$(\mathcal{P}_r)\begin{cases}-\dot{x}(t)\in\partial\varphi(t,x(t)) + G(t,\tau(t)x) \;\text{ p.p }\; t\in[0,T],\\ x(s)=\psi(s) \quad \text{pour tout } s\in[-r,0].\end{cases}$$

On appelle solution de $(\mathcal{P}_r)$ toute application $x(\cdot) : [-r,T]\longrightarrow H$ telle que la restriction $x/_I(\cdot)$ de $x(\cdot)$ est absolument continue et $x(\cdot)$ vérifie $(\mathcal{P}_r)$.

3.2 Résultat principal

On démontre, le théorème d'existence pour le problème considéré $(\mathcal{P}_r)$.

Théorème 3.2.1.
Sous les hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3) du Théorème 2.2.2 sur H et φ. Soit $G : [0,T]\times\mathcal{C}_0\rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs non-vides convexes et fermées satisfaisant :

(H_4) $G(\cdot,\cdot)$ est scalairement semi-continue supérieurement (hémi-continue supérieurement) sur $[0,T]\times\mathcal{C}_0$.

(H_5) Pour un réel $\alpha>0$:

$$d(0,G(t,\tau(t)x))\le\alpha \quad \text{pour tous } \; t\in[0,T] \;\text{ et }\; x\in\mathcal{C}_0.$$

Alors, pour tout $\psi\in\mathcal{C}_0$ avec $\psi(0)\in dom\,\varphi(0,\cdot)$, le problème (P_r) admet au moins une solution absolument continue satisfait l'estimation

$$\int_0^T \|\dot{x}(t)\|^2 dt \le c,$$

où

$$\begin{aligned}
c &= 2c_0 \int_0^T \dot{a}^2(t)dt + \sigma\alpha^2 T + 2[T + \varphi(0, x_0)], \\
c_0 &= \frac{1}{2}(k^2(0) + 3(\rho+1)^2), \\
\sigma &= k^2(0) + 3(\rho+1)^2 + 4.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Démonstration.

On construit une suite d'applications $(x_n(\cdot))_n$ dans $\mathcal{C}([-r,T],H)$, qui a une sous suite convergeant uniformément sur $[0,T]$ vers une solution de

$$(\mathcal{P}_r) \begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial\varphi(t,x(t)) + G(t,\tau(t)x) \text{ p.p } t \in [0,T], \\ x(s) = \psi(s) \quad \text{pour tout } s \in [-r,0]. \end{cases}$$

Étape(1) : Construction de la suite $(x_n(\cdot))$ sur $[0,T]$.

On définit pour tout $n \geq 1$, une partition de $[0,T]$ par :
$t_k^n = k\dfrac{T}{n}$ pour tout $0 \leq k \leq n$, et $I_k^n =]t_k^n, t_{k+1}^n]$, si $0 \leq k \leq n-1$. On considère l' application $g_0^n : [-r, t_1^n] \times H \longrightarrow H$ définie par

$$g_0^n(t,x) = \begin{cases} \psi(t) & \text{si } t \in [-r,0], \\ \psi(0) + \frac{n}{T}t(x - \psi(0)) & \text{si } t \in [0,t_1^n]. \end{cases}$$

De plus, on considère la multi-application $G_0^n : [0,t_1^n] \times H \rightrightarrows H$ définie par :
$G_0^n(t,x) = G(t, \tau(t_1^n)g_0^n(\cdot,x))$. Maintenant, on va montrer que l'application $x \longmapsto \tau(t_1^n)g_0^n(\cdot,x)$ est continue de H dans $\mathcal{C}_0$.

Pour tous $x, y \in H$, on a

$$\begin{aligned}
\| \tau(t_1^n)g_0^n(\cdot,x) - \tau(t_1^n)g_0^n(\cdot,y) \|_{\mathcal{C}_0} &= \sup_{s\in[-r,0]} \| g_0^n(t_1^n+s,x) - g_0^n(t_1^n+s,y) \| \\
&= \sup_{s\in[-r+t_1^n,t_1^n]} \| g_0^n(s,x) - g_0^n(s,y) \| \\
&\leq \sup_{s\in[0,t_1^n]} \| g_0^n(s,x) - g_0^n(s,y) \| \\
&\leq \sup_{s\in[0,t_1^n]} \frac{n}{T}s \| x - y \| \\
&\leq \| x - y \| .
\end{aligned}$$

Alors, l'application $x \longmapsto \tau(t_1^n)g_0^n(\cdot,x)$ est continue. Il résulte de (H_4), que $G_0^n(\cdot,\cdot)$ est hémi-continue supérieurement sur $[0,t_1^n] \times H$ et de (H_5), on a

$$d(0, G_0^n(t,x)) = d(0, G(t,\tau(t_1^n)g_0^n(\cdot,x))) < \alpha, \qquad \forall\, (t,x) \in [0,t_1^n] \times H.$$

D'après le Théorème 2.2.2, il existe une solution absolument continue $x_0^n : [0, t_1^n] \longrightarrow H$ et une application $z_0^n : [0, t_1^n] \longrightarrow H$ telles que

$$\begin{cases} -\dot{x}_0^n(t) \in \partial\varphi(t, x_0^n(t)) + z_0^n(t) \quad \text{p.p } t \in [0, t_1^n], \\ z_0^n(t) \in G(t, \tau(t_1^n) g_0^n(\cdot, x)), \end{cases}$$

avec

$$\| z_0^n(t) \| \leq \alpha,$$

et

$$\int_0^{t_1^n} \| \dot{x}_0^n(t) \|^2 \, dt \leq 2c_0 \int_0^{t_1^n} \dot{a}^2(t) dt + \sigma \int_0^{t_1^n} \alpha^2 dt + d_0,$$

où

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2}(k^2(0) + 3(\rho+1)^2), \\ \sigma &= k^2(0) + 3(\rho+1)^2 + 4, \\ d_0 &= 2[(t_1^n - 0) + \varphi(0, x_0^n(0)) - \varphi(t_1^n, x_0^n(t_1^n))]. \end{aligned}$$

On définit maintenant $g_1^n : [-r, t_2^n] \times H \longrightarrow H$ par

$$g_1^n(t, x) = \begin{cases} \psi(t) & \text{si } t \in [-r, 0], \\ x_0^n(t) & \text{si } t \in [0, t_1^n], \\ x_0^n(t_1^n) + \frac{n}{T}(t - t_1^n)(x - x_0^n(t_1^n)) & \text{si } t \in [t_1^n, t_2^n]. \end{cases}$$

Alors, pour tous $x, y \in H$, on a

$$\begin{aligned} \| \tau(t_2^n) g_1^n(\cdot, x) - \tau(t_2^n) g_1^n(\cdot, y) \|_{\mathcal{C}_0} &= \sup_{s \in [-r, 0]} \| g_1^n(t_2^n + s, x) - g_1^n(t_2^n + s, y) \| \\ &= \sup_{s \in [-r + t_2^n, t_2^n]} \| g_1^n(s, x) - g_1^n(s, y) \| \\ &\leq \sup_{s \in [t_1^n, t_2^n]} \| g_1^n(s, x) - g_1^n(s, y) \| \\ &\leq \sup_{s \in [t_1^n, t_2^n]} \frac{n}{T}(s - t_1^n) \| x - y \| \\ &\leq \| x - y \| . \end{aligned}$$

Ceci signifie que l'application $x \longmapsto \tau(t_2^n) g_1^n(\cdot, x)$ est continue de H dans $\mathcal{C}_0$. Alors, la multi-application $G_1^n(t, x) = G(t, \tau(t_2^n) g_1^n(\cdot, x))$ satisfait les hypothèses du Théorème 2.2.2.

D'où, il existe deux applications $x_1^n(\cdot), z_1^n(\cdot) : [t_1^n, t_2^n] \longrightarrow H$ telles que $x_1^n(\cdot)$ est absolument continue, $x_1^n(t_1^n) = x_0^n(t_1^n)$ et pour presque tout $t \in [t_1^n, t_2^n]$,

$$\begin{cases} -\dot{x}_1^n(t) \in \partial\varphi(t, x_1^n(t)) + z_1^n(t) \quad \text{p.p } t \in [t_1^n, t_2^n], \\ z_1^n(t) \in G(t, \tau(t_2^n) g_1^n(\cdot, x)), \end{cases}$$

avec

$$\| z_1^n(t) \| \leq \alpha,$$

et

$$\int_{t_1^n}^{t_2^n} \| \dot{x}_1^n(t) \|^2 \, dt \leq 2c_0 \int_{t_1^n}^{t_2^n} \dot{a}^2(t)dt + \sigma \int_{t_1^n}^{t_2^n} \alpha^2 dt + d_1,$$

où

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2}(k^2(0) + 3(\rho+1)^2), \\ \sigma &= k^2(0) + 3(\rho+1)^2 + 4, \\ d_1 &= 2[(t_2^n - t_1^n) + \varphi(t_1^n, x_1^n(t_1^n) - \varphi(t_2^n, x_1^n(t_2^n))]. \end{aligned}$$

On suppose maintenant que $(x_{k-1}^n(\cdot), z_{k-1}^n(\cdot))_n$, $(1 \leq k \leq n)$ sont définies de façon similaire avec

$$\begin{cases} -\dot{x}_{k-1}^n(t) \in \partial\varphi(t, x_{k-1}^n(t)) + z_{k-1}^n(t) \quad \text{p.p } t \in [t_{k-1}^n, t_k^n], \\ z_{k-1}^n(t) \in G(t, \tau(t_k^n) g_{k-1}^n(\cdot, x)), \end{cases}$$

et

$$\| z_{k-1}^n(t) \| \leq \alpha,$$

$$\int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \| \dot{x}_{k-1}^n(t) \|^2 \, dt \leq 2c_0 \int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \dot{a}^2(t)dt + \sigma \int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \alpha^2 dt + d_{k-1},$$

où

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2}(k^2(0) + 3(\rho+1)^2), \\ \sigma &= k^2(0) + 3(\rho+1)^2 + 4, \\ d_{k-1} &= 2[(t_k^n - t_{k-1}^n) + \varphi(t_{k-1}^n, x_{k-1}^n(t_{k-1}^n) - \varphi(t_k^n, x_{k-1}^n(t_k^n))], \end{aligned}$$

et l'application g_{k-1}^n définie sur $[-r, t_k^n] \times H \longrightarrow H$ par

$$g_{k-1}^n(t,x) = \begin{cases} \psi(t) \quad \text{si } t \in [-r, 0], \\ x_{i-1}^n(t) \quad \text{si } t \in [t_{i-1}^n, t_i^n] \quad (0 \leq i \leq k-1), \\ x_{k-2}^n(t_{k-1}^n) + \frac{n}{T}(t - t_{k-1}^n)(x - x_{k-2}^n(t_{k-1}^n)) \text{ si } t \in [t_{k-1}^n, t_k^n]. \end{cases}$$

Donc, on définit similairement l'application $g_k^n : [-r, t_{k+1}^n] \times H \longrightarrow H$ par

$$g_k^n(t,x) = \begin{cases} \psi(t) \quad \text{si } t \in [-r, 0], \\ x_i^n(t) \quad \text{si } t \in [t_i^n, t_{i+1}^n] \quad (0 \leq i \leq k-1), \\ x_{k-1}^n(t_k^n) + \frac{n}{T}(t - t_k^n)(x - x_{k-1}^n(t_k^n)) \text{ si } t \in [t_k^n, t_{k+1}^n]. \end{cases}$$

Donc, pour tous $x, y \in H$, on a

$$\begin{aligned}
\| \tau(t^n_{k+1})g^n_k(\cdot,x) - \tau(t^n_{k+1})g^n_k(\cdot,y) \|_{\mathcal{C}_0} &= \sup_{s\in[-r,0]} \| g^n_k(t^n_{k+1}+s,x) - g^n_k(t^n_{k+1}+s,y) \| \\
&= \sup_{s\in[-r+t^n_{k+1},t^n_{k+1}]} \| g^n_k(s,x) - g^n_k(s,y) \| \\
&\leq \sup_{s\in[t^n_k,t^n_{k+1}]} \| g^n_k(s,x) - g^n_k(s,y) \| \\
&\leq \sup_{s\in[t^n_k,t^n_{k+1}]} \frac{n}{T}(s-t^n_k) \| x-y \| \\
&\leq \| x-y \| .
\end{aligned}$$

Alors, l'application $x \longmapsto \tau(t^n_{k+1})g^n_k(\cdot,x)$ est continue de H dans $\mathcal{C}_0$, alors la multi-application $G^n_k(t,x) = G(t,\tau(t^n_{k+1})g^n_k(\cdot,x))$ satisfait les hypothèses du Théorème 2.2.2, et donc, il existe deux applications $x^n_k(\cdot), z^n_k(\cdot) : [t^n_k, t^n_{k+1}] \longrightarrow H$ telles que $x^n_k(\cdot)$ est absolument continue, $x^n_k(t^n_k) = x^n_{k-1}(t^n_k)$ et pour presque tout $t \in [t^n_k, t^n_{k+1}]$ on a

$$\begin{cases} -\dot{x}^n_k(t) \in \partial\varphi(t,x^n_k(t)) + z^n_k(t) \quad \text{p.p} \quad t \in [t^n_k, t^n_{k+1}], \\ z^n_k(t) \in G(t,\tau(t^n_{k+1})g^n_k(\cdot,x)), \end{cases}$$

avec

$$\| z^n_k(t) \| \leq \alpha, \tag{3.2}$$

et

$$\int_{t^n_k}^{t^n_{k+1}} \| \dot{x}^n_k(t) \|^2 \, dt \leq 2c_0 \int_{t^n_k}^{t^n_{k+1}} \dot{a}^2(t)dt + \sigma \int_{t^n_k}^{t^n_{k+1}} \alpha^2 dt + d_k, \tag{3.3}$$

où

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2}(k^2(0) + 3(\rho+1)^2), \\
\sigma &= k^2(0) + 3(\rho+1)^2 + 4, \\
d_k &= 2[(t^n_{k+1} - t^n_k) + \varphi(t^n_k, x^n_k(t^n_k) - \varphi(t^n_{k+1}, x^n_k(t^n_{k+1}))].
\end{aligned}$$

Maintenant, on définit $x_n(\cdot) : [-r,T] \longrightarrow H$ par

$$x_n(t) = \begin{cases} \psi(t) & \text{si } t \in [-r,0], \\ x^n_k(t) & \text{si } t \in [t^n_k, t^n_{k+1}] \quad (0 \leq k \leq n-1), \end{cases}$$

et l'application $z_n(\cdot) : [0,T] \longrightarrow H$ par $z_n(t) = z^n_k(t)$ pour tout $t \in]t^n_k, t^n_{k+1}]$.
Alors, pour tout $k \in \{0,\cdots,n-1\}$ on a

$$g^n_k(t,x) = \begin{cases} x_n(t) & \text{si } t \in [-r,t^n_k], \\ x_n(t^n_k) + \frac{n}{T}(t-t^n_k)(x - x_n(t^n_k)) & \text{si } t \in [t^n_k, t^n_{k+1}]. \end{cases}$$

Maintenant, on considère les applications $\delta_n, \theta_n : [0,T] \longrightarrow [0,T]$ telles que $\delta_n(t) = t_k^n$, $\theta_n(t) = t_{k+1}^n$, pour tout $k \in \{0, \cdots, n-1\}$. Alors, pour presque tout $t \in I$ on a

$$-\dot{x}_n(t) \in \partial \varphi(t, x_n(t)) + z_n(t),$$

$$z_n(t) \in G(t, \tau(\theta_n(t)) g^n_{\delta_n(t)\frac{n}{T}}(\cdot, x_n(t))), \tag{3.4}$$

et

$$x_n(s) = \psi(s), \quad \text{pour tout } \ s \in [-r, 0],$$

avec

$$\| z_n(t) \| \leq \alpha.$$

D'autre part, d'après (3.3), pour tout $k \in \{0, \cdots, n-1\}$ on obtient

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k{}^n}^{t_{k+1}^n} \|\dot{x}_n(t)\|^2 dt \leq 2c_0 \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k{}^n}^{t_{k+1}^n} \dot{a}^2(t) dt + \sigma\alpha^2 \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k{}^n}^{t_{k+1}^n} dt + \sum_{k=0}^{n-1} d_k,$$

alors

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\dot{x}_n(t)\|^2 dt &\leq 2c_0 \int_0^T \dot{a}^2(t) dt + \sigma\alpha^2 \int_0^T dt + d_n \\ &\leq 2c_0 \int_0^T \dot{a}^2(t) dt + \sigma\alpha^2 T + d_n, \end{aligned} \tag{3.5}$$

avec

$$d_n = 2[T + \varphi(0, x_0) - \varphi(T, x_n(T))],$$

comme $-\varphi(T, x_n(T)) \leq 0$, en posant $d = 2[T + \varphi(0, x_0)]$, alors on peut écrire (3.5) par

$$\int_0^T \|\dot{x}_n(t)\|^2 dt \leq 2c_0 \int_0^T \dot{a}^2(t) dt + \sigma\alpha^2 T + d,$$

et d'où

$$\int_0^T \|\dot{x}_n(t)\|^2 dt \leq D,$$

où $D = 2c_0 \int_0^T \dot{a}^2(t) dt + \sigma\alpha^2 T + d$, donc

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_0^T \|\dot{x}_n(t)\|^2 dt \leq D, \tag{3.6}$$

et on a

$$L = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\dot{x}_n(t)\|_{L^2_H([0,T])} < +\infty.$$

Étape (2) : On va montrer que $(x_n(\cdot))_n$ converges uniformément vers $x(\cdot)$ dans $\mathcal{C}([-r,T],H)$. En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz et d'après (3.6), pour tout $s \in [0,T]$, on obtient

$$\begin{aligned} \| x_n(s) - x_n(0) \|^2 = \| x_n(s) - x_0 \|^2 &\leq s \int_0^s \| \dot{x}_n(t) \|^2 \, dt, \\ &\leq TD, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \| x_n(s) \|^2 &\leq 2 \| x_0 \|^2 + 2 \| x_n(s) - x_0 \|^2 \\ &\leq 2 \| x_0 \|^2 + 2TD. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout n, on trouve

$$\| x_n(\cdot) \|_\infty^2 \leq 2 \| x_0 \|^2 + 2TD.$$

Alors

$$\| x_n(\cdot) \|_\infty \leq M, \tag{3.7}$$

où

$$M = [2 \| x_0 \|^2 + 2TD]^{\frac{1}{2}}.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \| x_n(t) - x_n(s) \| &= \| \int_s^t \dot{x}_n(\tau) d\tau \| \\ &\leq (t-s)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_s^t \| \dot{x}_n(\tau) \|^2 \, d\tau \Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (t-s)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_0^T \| \dot{x}_n(\tau) \|^2 \, d\tau \Big)^{\frac{1}{2}} \leq (t-s)^{\frac{1}{2}} L, \end{aligned}$$

et d'après (3.7), l'ensemble $\{(x_n(\cdot))_n\}$ est bornée et équicontinue dans $\mathcal{C}([0,T],H)$, comme φ est inf-boule-compact, on a $\{x_n(t);\ n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact dans H, alors par le Théorème d'Ascoli's, on peut extraire une sous suite de $(x_n(\cdot))_n$ qui converge fortement sur $[0,T]$ vers $w(\cdot) \in \mathcal{C}([0,T],H)$. On déduit de (3.6) que la suite $(\dot{x}_n(\cdot))_n$ est bornée dans $\mathcal{L}^2([0,T],H)$, alors on peut extraire une sous suite converge faiblement dans $\mathcal{L}^2([0,T],H)$ vers $v(\cdot)$. De l'égalité

$$x_n(t) = x_n(0) + \int_0^t \dot{x}_n(s) ds \quad \text{pour tout } t \in [0,T],$$

on a

$$w(t) = \psi(0) + \int_0^t v(s) ds \quad \text{pour tout } t \in [0,T],$$

alors, on définit l'application $x(\cdot)$ par

$$x(t) = \begin{cases} \psi(t) & \text{si } t \in [-r,0], \\ w(t) & \text{si } t \in [0,T]. \end{cases}$$

D'où, la suite $(x_n(\cdot))_n$ converge uniformément vers $x(\cdot) \in \mathcal{C}([-r,T];H)$.

Étape (3) : On montre que $x(\cdot)$ est une solution de $\mathcal{P}_r$ sur I.

Comme $\| z_n(t) \| \leq \alpha$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,T]$, on peut supposer que $(z_n(\cdot))_n$ converge faiblement dans $\mathcal{L}^1([0,T],H)$ vers une application $z(\cdot) \in \mathcal{L}^1([0,T],H)$ avec $\| z(t) \| \leq \alpha$. p.p $t \in [0,T]$, i. e. on peut écrire

$$z_n(\cdot) \longrightarrow z(\cdot) \qquad \text{faiblement dans} \qquad \mathcal{L}^1([0,T],H). \tag{3.8}$$

D'autre part, comme $(\dot{x}_n(\cdot)+z_n(\cdot))_n$ converge faiblement dans $\mathcal{L}^1([0,T],H)$ vers $(\dot{x}(\cdot)+z(\cdot))$ et $(x_n(\cdot))_n$ converges fortement dans $\mathcal{L}^1([0,T],H)$ vers $x(\cdot)$, et comme $\partial\varphi(t,\cdot)$ satisfait la propriété de fermeture du sous différentiel d'une fonction propre semicontinue inférieurement, on obtient

$$\dot{x}(t) + z(t) \in -\partial\varphi(t,x(t)).$$

Par conséquent

$$-\dot{x}(t) \in \partial\varphi(t,x(t)) + z(t), \quad \text{p.p} \quad t \in [0,T].$$

Reste à montrer que $z(t) \in G(t,\tau(t)x)$ pour presque tout $t \in [0,T]$. Il est claire que $\tau(\theta_n(t))g_{\delta_n(t)\frac{n}{T}}(\cdot,x_n(t))$ converge sur $[0,T]$ vers $\tau(t)x$ dans $\mathcal{C}([-r,0],H)$ muni de la topologie de la convergence uniforme. En effet, on fixe $t \in [0,T]$, pour tout $n \geq 1$, il existe $0 \leq k \leq n-1$ tel que $t \in [t_k^n, t_{k+1}^n]$, on a

$$\begin{aligned}
\| \tau(\theta_n(t))g^n_{\delta_n(t)\frac{n}{T}}(\cdot,x_n(t)) - \tau(t)x(\cdot) \|_{\mathcal{C}_0} &= \sup_{s\in[-r,0]} \| g_k^n(t_{k+1}^n + s, x_n(t)) - x(t+s) \| \\
&= \sup_{s\in[-r+t_{k+1}^n, t_{k+1}^n]} \| g_k^n(s,x_n(t)) - x(t+s-t_{k+1}^n) \| \\
&\leq \sup_{s\in[-r+t_k^n, t_{k+1}^n]} \| g_k^n(s,x_n(t)) - x(s) \| \\
&+ \sup_{s\in[-r+t_k^n, t_{k+1}^n]} \| x(s) - x(t+s-t_{k+1}^n) \| \\
&\leq \sup_{s\in[-r,t_k^n]} \| x_n(s) - x(s) \| \\
&+ \sup_{s\in[t_k^n, t_{k+1}^n]} \| g_k^n(s,x_n(t)) - x(s) \| \\
&+ \sup_{s\in[-r+t_k^n, t_{k+1}^n]} \| x(s) - x(t+s-t_{k+1}^n) \| .
\end{aligned}$$

on a $\sup_n \parallel x_n(s) - x(s) \parallel \leq \parallel x_n(\cdot) - x(\cdot) \parallel_{\mathcal{C}_T}$, et comme $(x_n(\cdot))_n$ converge uniformément vers $x(\cdot)$, on a

$$\lim_n \sup_{s\in[-r,t_k^n]} \parallel x_n(s) - x(s) \parallel = 0.$$

Comme $x(\cdot)$ est continue uniformément, on trouve que

$$\lim_n \sup_{s\in[-r+t_{k+1}^n, t_{k+1}^n]} \parallel x(s) - x(t+s-t_{k+1}^n) \parallel = 0.$$

En effet, soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\mid s - (t+s-t_{k+1}^n) \mid \leq \eta$ pour tout $s \in [-r, 0]$ implique $\parallel x(s) - x(t+s-t_{k+1}^n) \parallel \leq \varepsilon$, donc $\sup \parallel x(s) - x(t+s-t_{k+1}^n) \parallel \leq \varepsilon$. On a aussi

$$\begin{aligned}\sup_{s\in[t_k^n, t_{k+1}^n]} \parallel g_k^n(s, x_n(t)) - x(s) \parallel &\leq \sup_{s\in[t_k^n, t_{k+1}^n]} \parallel x_n(t_k^n) - x(s) \parallel + \parallel x_n(t) - x_n(t_k^n) \parallel \\ &\leq \sup_{s\in[t_k^n, t_{k+1}^n]} \parallel x_n(t_k^n) - x(s) \parallel + \parallel x_n(t) - x(t) \parallel \\ &+ \parallel x(t) - x(\delta_n(t)) \parallel + \parallel x(\delta_n(t)) - x_n(\delta_n(t)) \parallel,\end{aligned}$$

comme $\delta_n(t) \longrightarrow t$ et $x(\cdot)$ est continue, on trouve $\parallel x(t) - x(\delta_n(t)) \parallel \longrightarrow 0$, et comme $(x_n(\cdot))_n$ converge uniformément vers $x(\cdot)$, on obtient

$$\parallel x_n(t) - x(t) \parallel \longrightarrow 0,$$

$$\lim_n \sup_{s\in[t_k^n, t_{k+1}^n]} \parallel x_n(t_k^n) - x(s) \parallel \longrightarrow 0,$$

et

$$\parallel x(\delta_n(t)) - x_n(\delta_n(t)) \parallel \longrightarrow 0.$$

Alors,

$$\lim_n \parallel \tau(\theta_n(t)) g^n_{\delta_n(t)\frac{n}{T}}(\cdot, x_n(t)) - \tau(t)x(\cdot) \parallel_{\mathcal{C}_0} = 0.$$

Via le lemme de Mazur, comme z_n converge faiblement vers z dans $\mathcal{L}^1([0,T], H)$, on peut écrire pour presque tout $t \in I$:

$$z(t) \in \bigcap_n \overline{co}\{z_q(t), \quad q \geq n\}.$$

Donc, de (3.4), pour presque tout $t \in I$, pour tout $\xi \in H$ on a

$$\langle \xi, z(t) \rangle \leq \limsup_{n\longrightarrow+\infty} \sigma(\xi, G(t, \tau(\theta_n(t)) g^n_{\delta_n(t)\frac{n}{T}}(\cdot, x_n(t)))).$$

Comme $\lim_n \parallel \tau(\theta_n(t)) g^n_{\delta_n(t)\frac{n}{T}}(\cdot, x_n(t)) - \tau(t)x(\cdot) \parallel_{\mathcal{C}_0} = 0$ pour tout $t \in [0,T]$ et comme $\sigma(\xi, G(\cdot,\cdot))$ est semi-continue supérieurement sur $[0,T] \times \mathcal{C}_0$, on a pour presque tout $t \in I$, pour tout $\zeta \in H$

$$\langle \zeta, z(t) \rangle \leq \sigma(\zeta, G(t, \tau(t)x)),$$

et comme $G(t, \tau(t)x)$ est fermé et convexe, on obtient

$$z(t) \in G(t, \tau(t)x) \quad \text{p.p} \quad t \in [0, T].$$

D'où, $x(\cdot)$ est une solution de (P_r) sur I. $\square$

CHAPITRE

4

RÉSULTAT D'EXISTENCE DE SOLUTION POUR LE PROCESSUS DE LA RAFLE PAR UNE MULTI-APPLICATION À VALEURS R-UNIFORMÉMENT SEMI CONTINUE INFÉRIEUREMENT À DROITE

Sommaire

4.1 Introduction du chapitre

Soient l'intervalle $I = [T_0, T]$, $0 \leq T_0 \leq T$ et l'espace de Hilbert H. Le processus de la rafle est un problème d'évolution régis par des cônes normaux de la forme

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in N(C(t), x(t)) \quad \text{p.p } t \in I, \\ x(T_0) = x_0 \in C(T_0) \end{cases} \tag{4.1}$$

Ce problème a été introduit et étudier par Moreau dans plusieurs travaux en mécanique (elastoplasticité, optimisation convexe, ...) (voir [47]). De puis, plusieurs auteurs ont mené des études d'existence de solutions pour les processus de la rafle non convexe (par exemple [9], [12], [13], [21], [23], [24], [30], [36], [43], [48], [55], [56]). L'existence de solution pour le processus de la rafle convexe où non convexe est garanti par l'hypothèse classique : $C(t)$ variant d'une manière absolument continue (où Lipschitzienne). Dernièrement, Tolstonogov [60] introduit une classe plus général sur les multi-application, appelé " r-uniformément semi-continue inférieurement à droite", il a montré que cette classe contient des multi-application $C(t)$ à valeurs hyperplans et demi-espace, qui ne satisfait pas l'hypothèse suivant

$$| \, d(x, C(t)) - d(x, C(s)) \, | \leq | \, v(t) - v(s) \, | \tag{4.2}$$

pour tous $x \in H$, $s, t \in I$, où v est une fonction absolument continue.

Pour étudier des procédures de planning en mathématique économétrie, divers autres travaux ont été développés sur le processus de la rafle afin d'obtenir des résultats d'existence plus généraux. Les auteurs ont introduit une force extérieure au système appelée perturbation multivoque où univoque. Le problème du processus de la rafle perturbé s'écrit sous la forme

$$(\mathcal{SPP}_F) \begin{cases} -\dot{x}(t) \in N^P(C(t), x(t)) + F(t, x(t)) \quad \text{p.p } t \in I, \\ x(0) = x_0 \in C(T_0) \end{cases}$$

où $F : I \times H \rightrightarrows H$ est une multi-application à valeurs non vides fermées convexes où non convexe. D'autre résultats on été obtenus sous des hypothèses de compacité sur C où sur la perturbation F i.e. F est bornée où vérifiant la condition de croissance linéaire. Dernièrement dans [2], [48] et [60] les auteurs montrent l'existence d'une solution absolument continue avec les valeurs de $F(\cdot, \cdot)$ ne sont pas nécessairement bornées. Le chapitre est consacré à l'étude du processus de la rafle du premier ordre non-perturbé, et perturbé avec des ensembles r-uniformément semi-continue inférieurement à droit et ρ-prox-régulier. On s'intéresse à l'existence et l'unicité de solution du processus de la rafle

$$(\mathcal{SP}) \begin{cases} -\dot{x}(t) \in N^P(C(t), x(t)) \quad \text{p.p } t \in I = [T_0, T], \\ x(T_0) = x_0 \in C(T_0) \end{cases}$$

où $C : I \rightrightarrows H$ est une multi-application à valeurs non vide fermées vérifiant les hypothèses suivantes :

(H_1) pour tout $t \geq T_0$ et $\rho > 0$, $C(t)$ est ρ-prox-réguliers dans H.

(H_2) pour tout $t \geq T_0$ et pour tout $r \geq 0$, $C(t)$ est r-uniformément semi-continue inférieurement à droite i.e. si il existe une famille $\mathcal{A} = \{a_r; \quad r \geq 0\} \subset \mathcal{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$, tel que pour tout $r \geq 0$ et pour tous s, $t \in I$, $s \leq t$, $\| x \| \leq r$, l'inégalité suivante est vraie

$$d(x, C(t)) \leq d(x, C(s)) + \mid a_r(t) - a_r(s) \mid . \tag{4.3}$$

où $N^P(C(t), x(t))$ désigne le cône normal proximal de $C(t)$ au point $x(t)$.
Notre but, est l'étude du processus de la rafle perturbé

$$(\mathcal{SPP}_f) \begin{cases} -\dot{x}(t) \in \; N^P(C(t), x(t)) + f(t) \quad \text{p.p } t \in I, \\ x(T_0) = x_0 \in C(T_0) \end{cases}$$

où $f : I \longrightarrow H$ est une fonction mesurable bornée. Finalement, on va montre l'existence de solution du processus de la rafle perturbé $(\mathcal{SPP}_f)$ avec perturbation multivoque $F : [0, T] \times H \rightrightarrows H$ à valeurs non vides fermées convexes, non nécessairement bornées.

4.2 Résultat d'existence de solution pour le processus de la rafle non-perturbé

Cette section concerne l'étude du problème non-perturbé

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in \; N(C(t), x(t)) \quad \text{p.p } t \in I, \\ x(T_0) = x_0 \in C(T_0) \end{cases} \tag{4.4}$$

où C est une multi-application à valeurs fermées ρ-prox-régulières et r-uniformément semi continue inférieurement à droite pour tout $t \in I$. On donne maintenant une propriété importante de fermeture du sous différentiel de la fonction distance associée à une multi-application r-uniformément semi continue inférieurement à droite. Nous utilisons dans la démonstration la caractérisation des ensembles prox-réguliers.

Proposition 4.2.1.
Soient $\rho \in]0, +\infty]$ et $C : I \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs non vides fermées ρ-prox-régulières. On suppose C est r-uniformément semi continue inférieurement à droite pour tout $t \in I$. Alors, pour tout $0 < \delta < \rho$, on a :
Si $x_n \longrightarrow x_0$, $t_n \longrightarrow t_0$ et ξ_n converge faiblement vers ξ_0, avec $x_0 \in C(t_0) + (\rho - \delta)B$
et $\xi_n \in \partial^P d_{C(t_n)}(x_n)$, alors on a $\xi_0 \in \partial^P d_{C(t_0)}(x_0)$.

Démonstration.

Soit $x_0 \in C(t_0) + (\rho - \delta)B$. Comme x_n converge vers x_0 et t_n converge vers t_0, on peut choisir n assez grand tel que $x_n \in x_0 + \frac{\delta}{4}B$ et $\mid a_r(t_n) - a_r(t_0) \mid \leq \frac{\delta}{4}$, donc on a

$$\| x_n \| \leq \| x_0 \| + \frac{\delta}{4} = r. \tag{4.5}$$

Ainsi, comme $C(t_0)$ est ρ-prox-régulièr alors, par la Proposition 1.2.12, on choisit $y_0 = Proj(x_n, C(t_0))$. Maintenant, par (4.5) et la définition de semi continue inférieurement à droite, on peut écrire

$$\begin{aligned} d(x_n, C(t_n)) &\leq d(x_n, C(t_0)) + \mid a_r(t_n) - a_r(t_0) \mid \\ &= \| x_n - y_0 \| + \mid a_r(t_n) - a_r(t_0) \mid \\ &\leq \| x_n - x_0 \| + \| x_0 - y_0 \| + \mid a_r(t_n) - a_r(t_0) \mid \\ &\leq \frac{\delta}{4} + (\rho - \delta) + \frac{\delta}{4} < \rho \end{aligned}$$

donc, pour $\xi_n \in \partial^P d_{C(t_n)}(x_n)$, par la Proposition 1.2.14 on a

$$\langle \xi_n, z - x_n \rangle \leq \frac{8}{\rho - d(x_n, C(t_n))} \| z - x_n \|^2 + d(z, C(t_n)) - d(x_n, C(t_n)) \tag{4.6}$$

pour tout $z \in H$ avec $d(z, C(t_n)) \leq \rho$. En particulier, pour tout $z \in x_0 + \frac{\delta}{4}B$. En effet,

$$\begin{aligned} d(z, C(t_n)) &\leq \| z - x_0 \| + \| x_0 - x_n \| + d(x_n, C(t_n)) \\ &\leq \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} + \delta - \frac{\delta}{2} \leq \delta, \end{aligned}$$

par la continuité de la fonction distance par rapport à (t, x), prenons la limite pour $n \longrightarrow +\infty$ dans (4.6) on obtient, pour tout $z \in x_0 + \lambda B$: $\xi_0 \in \partial^P d_{C(t_0)}(x_0)$. □

Théorème 4.2.2.

Soit $C : [T_0, +\infty[\rightrightarrows H$ est une multi-application à valeurs non vides fermées vérifiant (H_1) et (H_2), alors pour tout $x_0 \in C(T_0)$, il existe $T > T_0$ et $r_0 > 0$ tel que le problème $(\mathcal{SP})$ admet une solution unique $x(\cdot)$ sur l'intervalle $[T_0, T] = I$. Aussi, la solution $x(\cdot)$ satisfait l'inégalité suivante :

$$\| \dot{x}(t) \| \leq \mid \dot{a}_r(t) \mid \quad \text{p.p} \quad t \in I \ \text{ et } \ r \geq r_0.$$

Démonstration.

On choisit $T > T_0$ et $r_0 > 0$ tel que pour tout $r \geq r_0$

$$\int_{T_0}^{T} \mid \dot{a}_r(s) \mid ds + \| x_0 \| < r_0. \tag{4.7}$$

Premièrement, si $\mid \dot{a}_r(t) \mid = 0$ p.p $t \in]T_0, T]$, donc pour tout $x_0 \in C(T_0) \cap rB$,
on obtient par l'inégalité (4.3)

$$d(x_0, C(t)) \leq d(x_0, C(T_0)) + \mid a_r(t) - a_r(T_0) \mid = 0$$

donc $x_0 \in C(t)$, alors $C(T_0) \cap rB \subset C(t)$ pour tout $t \in I$. Alors $x(t) = x_0$ pour tout $t \in I$ est une solution de $(\mathcal{SP})$.

Maintenant, on suppose $|\ \dot{a}_r(t)\ | > 0$ p.p $t \in I$ et $r \geq r_0$. Pour chaque $n \geq 1$, on considère la partition de I donnée par :

$$t_k^n = T_0 + k\frac{T - T_0}{2^n} \quad (0 \leq k \leq 2^n) \text{ et } I_{n,k} = [t_k^n, t_{k+1}^n[\quad (0 \leq k \leq 2^n).$$

Posons

$$\epsilon_n = \max\{\epsilon_k^n\},\ 0 \leq k \leq 2^n, \text{ avec } \epsilon_k^n = \int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} |\ \dot{a}_r(s)\ |\ ds,\ 0 \leq k < 2^n. \tag{4.8}$$

Comme ϵ_n converge vers 0, on fixe $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $n \geq n_0$:

$$\epsilon_n < \frac{\rho}{4}. \tag{4.9}$$

Soit $x_0^n = x_0$, on utilise les propriétés des ensembles ρ-prox réguliers, nous allons construire une suite des applications $(x_n(\cdot))$ dans $\mathcal{C}(I, H)$ tels que

$$x_{k+1}^n = Proj(x_k^n, C(t_{k+1}^n)), \tag{4.10}$$

qui est bien définie. En effet, par l'hypothèse (4.7) on a $\|\ x_0\ \| \leq r$, alors par (4.3), pour tout $t \in I$, on obtient

$$d(x_0, C(t)) \leq d(x_0, C(t_0^n)) +|\ a_r(t) - a_r(t_0^n)\ |, \tag{4.11}$$

donc pour $t = t_1^n$ et par l'hypothèse (4.8) on a

$$\begin{aligned} d(x_0, C(t_1^n)) &\leq \int_{t_0^n}^{t_1^n} |\ \dot{a}_r(s)\ |\ ds \\ &= \epsilon_0^n \leq \epsilon_n \end{aligned} \tag{4.12}$$

et d'après la condition (4.9), on obtient

$$d(x_0, C(t_1^n)) < \rho,$$

par la Proposition 1.2.12, on choisit le point $x_1^n = Proj(x_0^n, C(t_1^n))$ tel que

$$\|\ x_1^n - x_0^n\ \| \leq \epsilon_0^n,$$

aussi par (4.12) on a

$$\|\ x_1^n\ \| \leq \epsilon_0^n + \|\ x_0^n\ \| \leq \int_{T_0}^{T} |\ \dot{a}_r(s)\ |\ ds + \|\ x_0^n\ \| < r.$$

Alors, pour $t = t_2^n$, d'après (4.8) et (4.9) on obtient

$$\begin{aligned} d(x_1^n, C(t_2^n)) &\leq d(x_1^n, C(t_1^n)) + \int_{t_1^n}^{t_2^n} |\ \dot{a}_r(s)\ |\ ds \\ &= \epsilon_1^n \leq \epsilon_n < \rho. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Comme C est ρ-prox-régulier, par la Proposition 1.2.12, on choisit le point $x_2^n = Proj(x_1^n, C(t_2^n))$ tel que par (4.13) on trouve

$$\| x_2^n - x_1^n \| \leq \epsilon_1^n$$

et

$$\| x_2^n \| \leq \| x_2^n - x_1^n \| + \| x_1^n \| \leq \epsilon_1^n + \epsilon_0^n + \| x_0^n \| \leq \int_{T_0}^{T} | \dot{a}_r(s) | \, ds + \| x_0^n \| < r.$$

Similairement, on peut définir par induction les points $(x_k^n)_{0 \leq k \leq 2^n}$, alors pour tout $0 \leq k \leq 2^n$ on obtient

$$\| x_k^n \| \leq r \tag{4.14}$$

et

$$\| x_{k+1}^n - x_k^n \| \leq \epsilon_k^n, \tag{4.15}$$

tel que

$$x_{k+1}^n = Proj(x_k^n, C(t_{k+1}^n)), \quad 0 \leq k \leq 2^n - 1.$$

Nous allons construire une solution approximative qui satisfait la propriété de Cauchy. Donc, pour tout $n \geq n_0$ on définit la fonction étagée $X_n : I \longrightarrow H$ par

$$\begin{cases} X_n(T) = x_{2^n}^n \\ X_n(t) = x_k^n \ \text{ si } t \in [t_k^n, t_{k+1}^n[\text{ avec } (0 \leq k \leq 2^n - 1). \end{cases}$$

Maintenant, on utilise une discrétisation définie par L.Thibault dans [56], comme suit ; on choisit un entier $N \geq n_0$, et pour tout $n \geq N$, on fixé $k \in \{0, \cdots, 2^n - 1\}$, tel que

$$t_{k'}^n < \cdots < t_{k'+k'_n}^n < t_{k'+k'_n+1}^n \leq t_{k+2}^n,$$

avec $t_{k'}^n = t_k^N$ et $t_{k'+k'_n}^n = t_{k+1}^N$.
Notons par $u_k^N = X_N(t_k^N)$ la valeur constant du $X_N(\cdot)$ sur $[t_k^N, t_{k+1}^N[$ et notons par $y_i^n = X_n(t_i^n)$, pour tout $i = k', \cdots, k' + k'_n$ la valeur constant du $X_n(\cdot)$ sur $[t_i^n, t_{i+1}^n[$. Alors, pour tout $i = k'+1, \cdots, k'+k'_n - 1$ on obtient $y_i^n = Proj(y_{i-1}^n, C(t_i^n))$ et satisfait

$$\| y_i^n \| \leq r, \tag{4.16}$$

puisque C à valeurs ρ-prox régulier, alors par la Proposition 1.2.13 on a

$$\| u_k^N - y_i^n \|^2 - \| u_k^N - y_{i-1}^n \|^2 \leq 2d(u_k^N, C(t_i^n))d(y_{i-1}^n, C(t_i^n)),$$

donc, pour tout $p = 1, \cdots, k'_n - 1$, on a

$$\| u_k^N - y_{k'+p}^n \|^2 - \| u_k^N - y_{k'}^n \|^2 \leq 2 \sum_{i=k'+1}^{k'+p} d(u_k^N, C(t_i^n))d(y_{i-1}^n, C(t_i^n)). \tag{4.17}$$

Pour $t_k^N = t_{k'}^n$, on a $u_k^N \in C(t_k^N) = C(t_{k'}^n)$, alors par (4.14) et (4.3), pour tout $i \in \{k', \cdots, k' + k'_n - 1\}$

$$\begin{aligned} d(u_k^N, C(t_i^n)) &\leq d(u_k^N, C(t_{k'}^n)) + \mid a_r(t_i^n) - a_r(t_{k'}^n) \mid \\ &= \int_{t_{k'}^n}^{t_i^n} \mid \dot{a}_r(\tau) \mid d\tau \\ &\leq \int_{t_k^N}^{t_{k+1}^N} \mid \dot{a}_r(\tau) \mid d\tau = \epsilon_k^N. \end{aligned} \tag{4.18}$$

D'après (4.18) et l'inégalité (4.16), pour tout $p = 1, \cdots, k'_n - 1$, on déduit

$$\begin{aligned} \sum_{i=k'+1}^{k'+p} d(u_k^N, C(t_i^n)) d(y_{i-1}^n, C(t_i^n)) &\leq \epsilon_k^N \sum_{i=k'+1}^{k'+p} (d(y_{i-1}^n, C(t_{i-1}^n)) + \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} \mid \dot{a}_r(\tau) \mid d\tau) \\ &= \epsilon_k^N \sum_{i=k'+1}^{k'+p} (\int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} \mid \dot{a}_r(\tau) \mid d\tau) \\ &\leq \epsilon_k^N (\int_{t_k^N}^{t_{k+1}^N} \mid \dot{a}_r(\tau) \mid d\tau) \\ &= (\epsilon_k^N)^2. \end{aligned}$$

Par (4.17) on trouve que, pour $p = 1, \cdots, k'_n - 1$

$$\| u_k^N - y_{k'+p}^n \|^2 - \| u_k^N - y_{k'}^n \|^2 \leq 2(\epsilon_k^N)^2, \tag{4.19}$$

l'inégalité (4.19) est vraie pour $p = 0$, donc pour tout $p = 0, \cdots, k'_n - 1$ on a

$$\| u_k^N - y_{k'+p}^n \|^2 - \| u_k^N - y_{k'}^n \|^2 \leq 2(\epsilon_k^N)^2.$$

On prend $t \in [t_{k'}^N, t_{k'+1}^N[$, donc on trouve

$$\| X_N(t) - X_n(t) \|^2 - \| X_N(t_k^N) - X_n(t_k^N) \|^2 \leq 2(\epsilon_k^N)^2. \tag{4.20}$$

alors, pour $t_{k+1}^N = t_{k'+k'_n}^n$, on a $C(t_{k+1}^N) = C(t_{k'+k'_n}^n)$ et

$$\begin{aligned} \| X_N(t_{k+1}^N) - X_n(t_{k+1}^N) \| &= \| Proj(X_N(t_k^N), C(t_{k+1}^N)) - Proj(X_n(t_{k'+k'_n-1}^n), C(t_{k'+k'_n}^n)) \| \\ &= \| Proj(X_N(t_k^N), C(t_{k+1}^N)) - Proj(X_n(t_{k'+k'_n-1}^n), C(t_{k+1}^N)) \| \\ &\leq \| X_N(t_k^N) - X_n(t_{k'+k'_n-1}^n) \| \\ &= \| X_N(t_{k'+k'_n-1}^n) - X_n(t_{k'+k'_n-1}^n) \| . \end{aligned}$$

Comme $X_N(\cdot)$ est un constant sur $[t_k^N, t_{k+1}^N[$, et $t_{k'+k'_n-1}^n \in [t_k^N, t_{k+1}^N[$, par (4.20) on obtient

$$\begin{aligned} &\| X_N(t_{k+1}^N) - X_n(t_{k+1}^N) \|^2 - \| X_N(t_k^N) - X_n(t_k^N) \|^2 \\ &\leq \| X_N(t_{k'+k'_n-1}^n) - X_n(t_{k'+k'_n-1}^n) \|^2 - \| X_N(t_k^N) - X_n(t_k^N) \|^2 \\ &\leq 2(\epsilon_k^N)^2. \end{aligned}$$

Alors pour $l = 1, \cdots, k+1$

$$\| X_N(t_l^N) - X_n(t_l^N) \|^2 - \| X_N(t_{l-1}^N) - X_n(t_{l-1}^N) \|^2 \leq 2(\epsilon_{l-1}^N)^2. \tag{4.21}$$

Par (4.21) et (4.20), pour tout $t \in [t_k^N, t_{k+1}^N]$ on obtient

$$\begin{aligned} \| X_N(t) - X_n(t) \|^2 &= \| X_N(t) - X_n(t) \|^2 - \| X_N(t_0^N) - X_n(t_0^N) \|^2 \\ &\leq 2\sum_{l=0}^{k+1} (\epsilon_l^N)^2 \\ &\leq 2(k+2)\epsilon_N. \end{aligned}$$

Alors, pour $n \geq N$ et pour $m \geq N$ on a

$$\| X_n(t) - X_m(t) \| \longrightarrow 0, \quad \text{pour } n \longrightarrow +\infty, \ \forall t \in I.$$

Par conséquent, la suite $(X_n(\cdot))_n$ converge uniformément vers $x(\cdot)$ sur I par à apport la norme de la convergence uniforme , donc par (4.14) on a

$$\| x(t) \| \leq r, \quad \text{pour tout } \ t \in I. \tag{4.22}$$

Maintenant, on va montrer la convergence uniforme de la suite $(x_n(\cdot))_n$. On définit la fonction $x_n(\cdot) : I \longrightarrow H$ par

$$x_n(t) = x_k^n + \frac{\int_{t_k^n}^t \mid \dot{a}_r(s) \mid ds}{\epsilon_k^n}(x_{k+1}^n - x_k^n) \ \text{ pour tout } t \in [t_k^n, t_{k+1}^n[. \tag{4.23}$$

Donc, d'après les définitions de $x_n(\cdot)$ et $X_n(\cdot)$ et par l'inégalité (4.15), pour tout $t \in [t_k^n, t_{k+1}^n]$ on a

$$\begin{aligned} \| x_n(t) - X_n(t) \| &\leq \int_{t_k^n}^t \mid \dot{a}_r(\tau) \mid d\tau \\ &\leq \int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} \mid \dot{a}_r(\tau) \mid d\tau, \end{aligned}$$

alors

$$\| x_n(t) - X_n(t) \| \longrightarrow 0, \text{ quand } n \longrightarrow +\infty \ \ \forall \, t \in I.$$

Donc, la suite $(x_n(\cdot))_n$ converges uniformément sur I vers $x(\cdot)$. On retour à la définition de $x_n(\cdot)$ dans (4.23), pour tout $0 \leq k < 2^n$ on a :

$$\dot{x}_n(t) = \frac{\mid \dot{a}_r(t) \mid}{\epsilon_k^n}(x_{k+1}^n - x_k^n) \ \text{ pour p.p } \ t \in I_{n,k} \tag{4.24}$$

et par (4.15), on déduit que

$$\| \dot{x}_n(t) \| \leq \mid \dot{a}_r(t) \mid, \quad \text{pour p.p } \ t \in I. \tag{4.25}$$

De (4.25), la suite $(\dot{x}_n(\cdot))_n$ est bornée dans $\mathcal{L}^2(I,H)$, alors on peut extraire une sous suite qui converge faiblement dans $\mathcal{L}^2(I,H)$ vers $v(\cdot)$, i.e.

$$\dot{x}_n(\cdot) \longrightarrow \dot{x}(\cdot) \quad \text{faiblement dans} \quad \mathcal{L}^2(I,H). \tag{4.26}$$

Alors, pour tout $t \in I$ on a

$$\begin{aligned} x(t) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} x_n(t) &= x_0 + \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_{T_0}^{t} \dot{x}_n(s)ds \\ &= x_0 + \int_{T_0}^{t} v(s)ds, \end{aligned} \tag{4.27}$$

d'où l'application $x(\cdot)$ est absolument continue et $\dot{x}(t) = v(t)$ pour p.p $\quad t \in I$.

D'autre part, pour tous t et s dans $I_{n,k}$ $(0 \leq k \leq 2^n)$ avec $t \leq s$ on a

$$x_n(s) - x_n(t) = \frac{\int_t^s \mid \dot{a}_r(\tau) \mid d\tau}{\epsilon_k^n}(x_{k+1}^n - x_k^n),$$

ainsi, par (4.15), on obtient

$$\| x_n(s) - x_n(t) \| \leq \int_t^s \mid \dot{a}_r(\tau) \mid d\tau \tag{4.28}$$

Ceci étant vrai pour tous $t,\ s \in I$ avec $t \leq s$. En effet, Soient $t \in I_{n,i} = [t_i^n, t_{i+1}^n[$ et $s \in I_{n,j} = [t_j^n, t_{j+1}^n[$ alors on a

$$\begin{aligned} x_n(t_{i+1}^n) - x_n(t) &= \frac{\int_t^{t_{i+1}^n} \mid \dot{a}_r(\tau) \mid d\tau}{\epsilon_i^n}(x_{i+1}^n - x_i^n) \\ x_n(t_{i+2}^n) - x_n(t_{i+1}^n) &= \frac{\int_{t_{i+1}^n}^{t_{i+2}^n} \mid \dot{a}_r(\tau) \mid d\tau}{\epsilon_{i+1}^n}(x_{i+2}^n - x_{i+1}^n) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ x_n(t_j^n) - x_n(t_{j-1}^n) &= \frac{\int_{t_{j-1}^n}^{t_j^n} \mid \dot{a}_r(\tau) \mid d\tau}{\epsilon_{j-1}^n}(x_j^n - x_{j-1}^n) \\ x_n(s) - x_n(t_j^n) &= \frac{\int_{t_j^n}^{s} \mid \dot{a}_r(\tau) \mid d\tau}{\epsilon_j^n}(x_{j+1}^n - x_j^n), \end{aligned}$$

par addition on obtient

$$\begin{aligned} x_n(s) - x_n(t) = &\frac{\int_s^{t_{i+1}^n} \mid \dot{a}_r(\tau) \mid d\tau}{\epsilon_i^n}(x_{i+1}^n - x_i^n) + \cdots \\ &+ \frac{\int_{t_j^n}^{s} \mid \dot{a}_r(\tau) \mid d\tau}{\epsilon_j^n}(x_{j+1}^n - x_j^n). \end{aligned}$$

Alors,

$$\| x_n(s) - x_n(t) \| \leq \int_t^s \mid \dot{a}_r(\tau) \mid d\tau \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

on déduit que

$$\| x(s) - x(t) \| \leq \int_t^s \mid \dot{a}_r(\tau) \mid d\tau \quad \text{pour tout } s, t \in I \ \text{ with } t \leq s.$$

On va montrer que $x(\cdot)$ est une solution de $(\mathcal{SP})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'application $\delta_n : I \longrightarrow I$ définie par

$$\begin{cases} \delta_n(t) = t_{k+1}^n \quad \text{si} \ \ t \in [t_k^n, t_{k+1}^n[, \ (0 \leq k \leq 2^n - 1) \\ \delta_n(T) = T. \end{cases}$$

Alors, par (4.25) et les propriétés du cône normal proximal des sous ensembles -ρ-prox-régulier, on peut écrire pour presque tout $t \in I$

$$\dot{x}_n(t) \in -N^P(C(\delta_n(t)), x_n(\delta_n(t))) \cap \dot{a}_r(t)B.$$

Ceci avec (4.25), on obtient pour presque tout $t \in I$

$$\dot{x}_n(t) \in -\dot{a}_r(t)\partial^P d_{C(\delta_n(t))}(x_n(\delta_n(t))). \tag{4.29}$$

D'autre part, par la définition du $\delta_n(t)$ on a $\mid \delta_n(t) - t \mid \leq \frac{T-T_0}{2^n}$ et par (4.8) et (4.25) on trouve pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned} \| x_n(\delta_n(t)) - x(t) \| &\leq \| x_n(t) - x(t) \| + \| x_n(\delta_n(t)) - x_n(t) \| \\ &\leq \| x_n(t) - x(t) \| + \mid a_r(\delta_n(t)) - a_r(t) \mid \\ &\leq \| x_n(t) - x(t) \| + \epsilon_n. \end{aligned}$$

Alors

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \delta_n(t) = t \ \text{ et } \lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n(\delta_n(t)) = x(t). \tag{4.30}$$

Comme $x_n(\delta_n(t)) \in C(\delta_n(t))$, alors d'après (4.3) on a

$$d(x_n(\delta_n(t)), C(t)) \leq \mid a_r(t) - a_r(\delta_n(t)) \mid .$$

Alors, on obtient $x(t) \in C(t)$ pour tout $t \in I$, puisque l'ensemble $C(t)$ est fermé.
Maintenant, on va montrer que

$$\dot{x}(t) \in -N^P(C(t), x(t)) \quad \text{p.p} \quad t \in I. \tag{4.31}$$

D'après (4.26), par le lemma de Mazur, il existe une suite $(\xi_n(\cdot))_n$ dans $\mathcal{L}^2(I, H)$ qui converge fortement dans $\mathcal{L}^2(I, H)$ vers $\dot{x}(\cdot)$ telle que

$$\xi_n(\cdot) \in co\{\dot{x}_q(\cdot), \ q \geq n\} \ \text{ pour tout } n \geq 1. \tag{4.32}$$

Par extraction d'une sous suite, on suppose que $(\xi_n(\cdot))_n$ converge presque partout vers $\dot{x}(\cdot)$, alors il existe un ensemble négligeable $N \subset I$ tel que pour tout $t \in I \setminus N$

$$\dot{x}(t) \in \bigcap_n \overline{co}\{\dot{x}_q(t), \quad q \geq n\}. \tag{4.33}$$

Pour presque tout $t \in I$ et pour tout $\zeta \in H$, d'aprés (4.33) on a

$$\langle \zeta, \dot{x}(t) \rangle \leq \inf_n \sup_{q \geq n} \langle \zeta, \dot{x}_q(t) \rangle$$

Ainsi, par (4.29) et la Proposition 4.2.1 on trouve

$$\begin{aligned} \langle \zeta, \dot{x}(t) \rangle &\leq \lim_n \sup \sigma(\zeta, -\dot{a}_r(t) \partial^P d_{C(\delta_n(t))}(x_n(\delta_n(t)))) \\ &\leq \sigma(\zeta, -\dot{a}_r(t) \partial^P d_{C(t)}(x(t)))), \end{aligned}$$

puisque $\partial^P d_{C(t)}(x(t))$ est un ensemble fermé convexe et comme $x(t) \in C(t)$, on obtient pour presque tout $t \in I$

$$\dot{x}(t) \in -\dot{a}_r(t) \partial^P d_{C(t)}(x(t)) \subset -N^P(C(t), x(t)).$$

Par conséquent, d'après (4.25) on a

$$\| \dot{x}(t) \| \leq \dot{a}_r(t) \quad \text{p.p} \quad t \in I.$$

Finalement, d'après les propriétés d'hypomonotonie du cône normal proximal on trouve l'unicité de la solution. $\square$

4.3 Résultat d'existence solution pour une Perturbation non bornée

Cette section est consacrée à l'étude du problème perturbé $(\mathcal{SPP}_f)$ où la perturbation f est une fonction univoque dépendant du temps et mesurable bornée. En suit, on étudie le problème perturbé $(\mathcal{SPP}_F)$ sous une propriété d'hémi-continuité supérieur pour la perturbation multivoque non bornée F.

Corollaire 4.3.1.
Soient $I = [0, T], \quad T > 0$ et $f : I \longrightarrow H$ est une fonction mesurable bornée. Sous les hypothèses du Théorème 4.2.2 sur $C(\cdot)$, pour tout $x_0 \in C(0)$, le problème suivant

$$(\mathcal{SPP}_f) \begin{cases} -\dot{x}(t) \in N^P(C(t), x(t)) + f(t), \quad \text{p.p} \quad t \in I, \\ x(0) = x_0 \in C(0) \end{cases}$$

admet au moins une solution absolument continue avec

$$\| \dot{x}(t) \| \leq | \dot{a}_r(t) | + 2 \| f(t) \| \quad \text{p.p} \quad t \in I.$$

Démonstration.
$(\mathcal{SPP}_f)$ équivalent à

$$(\mathcal{SP}_1) \begin{cases} -\dot{y}(t) \in N^P(D(t), y(t)), & \text{p.p } t \in I, \\ y(0) = x_0 \in C(0) \end{cases}$$

tells que $y(t) = x(t) + \varphi(t)$, $\varphi(t) = \int_0^t f(s)ds$ et $D(t) = C(t) + \varphi(t)$ $\forall t \in I$. Alors, il suffit de montrer que $D(t)$ satisfait la condition (H_2), i.e. on va montrer qu' il existe une famille
$\mathcal{B} = \{b_r;\ r \geq 0\} \subset \mathcal{W}^{1,1}(I, \mathbb{R})$ tel que pour tout $r \geq 0$ et pour tous $s, t \in I$, $s \leq t$, $\| y \| \leq r$, l'inégalité (4.3) est vrai. Donc, pour tout $r \geq 0$ et $s, t \in I$avec $s \leq t$ et $\| y \| \leq r$ on a

$$\begin{aligned} d(y, D(t)) - d(y, D(s)) &= d(y, \varphi(t) + C(t)) - d(y, \varphi(s) + C(s)) \\ &\leq \| \varphi(t) - \varphi(s) \| + d(y - \varphi(s), C(t)) \\ &\quad - d(y - \varphi(s), C(s)), \end{aligned} \tag{4.34}$$

On considère pour un certain $\beta > 0$, $\| \varphi(t) \| \leq \beta$ pour tout $t \in I$, alors $\| y - \varphi(s) \| \leq r + \beta$, donc par (4.34) et (4.3), on obtient

$$\begin{aligned} d(y, D(t)) - d(y, D(s)) &\leq \| \varphi(t) - \varphi(s) \| + | a_{r+\beta}(t) - a_{r+\beta}(s) | \\ &\leq \int_s^t \| f(\tau) \| d\tau + | a_{r+\beta}(t) - a_{r+\beta}(s) | \\ &\leq | (a_{r+\beta}(t) + \int_0^t \| f(\tau) \| d\tau) - (a_{r+\beta}(s) \\ &+ \int_0^s \| f(\tau) \| d\tau) | \\ &= | b_r(t) - b_r(s) | \end{aligned}$$

tels que $b_r(t) = a_{r+\beta}(t) + \int_0^t \| f(\tau) \| d\tau$. Alors $D(\cdot)$ vérifiant (H_2) et b_r est absolument continue. Comme $C(0) = D(0)$, par le Théorème 4.2.2 on trouve que $(\mathcal{SP}_1)$ admet une solution absolument continue $y(\cdot)$. Aussi

$$\begin{aligned} \| \dot{y}(t) \| \leq | \dot{b}_r(t) | &= | \dot{a}_r(t) + f(t) | \\ &\leq | \dot{a}_r(t) | + \| f(t) \| \quad \text{p.p} \quad t \in I. \end{aligned} \tag{4.35}$$

D'autre part, l'application $x(t) = y(t) - \varphi(t)$ est une solution absolument continue du $(\mathcal{SPP}_f)$ et par (4.35), on obtient l'estimation suivante

$$\| \dot{x}(t) \| \leq | \dot{a}_r(t) | + 2 \| f(t) \| \text{ p.p } t \in I.$$

□

Théorème 4.3.2.

Soit C vérifiant (H_1), (H_2) pour $I = [0, T]$ et l'hypothèse suivante :

(H_3) C transformé toute suite bornée $(t_n)_n$ de I en un sous ensemble boule-compact de H, i.e. l'intersection de $\underset{n}{\cup} C(t_n)$ avec une boule fermée de H est relativement compacte.

Soit $F : [0, T] \times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs non vides convexes fermées telle que

- (a) F est scalairement semi-continue supérieurement.
- (b) pour un certain réel $\alpha > 0$

$$d(0, F(t, x)) \leq \alpha,$$

pour tous $t \in [0, T]$ et $x \in H$.

Alors, pour tout $x_0 \in C(0)$, le processus de la rafle perturbé suivant

$$(\mathcal{SPP}_F) \begin{cases} -\dot{x}(t) \in N^P(C(t), x(t)) + F(t, x(t)) & \text{p.p } t \in [0, T], \\ x(0) = x_0 \in C(0) \end{cases}$$

admet au moins une solution absolument continue $x(\cdot)$.

Démonstration.

Nous allons construire une suite des applications $(x_n(\cdot))_n$.

Pour tout $n \geq 1$, on considère la partition de $[0, T]$ donnée par $t_k^n = k\frac{T}{2^n}$, $0 \leq k \leq 2^n$. On note par $f(t, x)$ l'élément de norme minimal de l'ensemble convexe fermée $F(t, x(t))$. On choisit $y_0^n = f(t_0^n, x_0) \in F(t_0^n, x_0)$ et soit $r > 0$, tels que pour tout $n \geq 1$:

$$\| x_0 + \frac{T}{2^n} y_0^n \| + \int_0^T | \dot{a}_r(t) | \, dt + 2\alpha T < r. \tag{4.36}$$

Posons

$$\begin{cases} x_0^n = x_0, \\ \mu_n = \frac{T}{2^n}, \\ \epsilon_k^n = \int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} | \dot{a}_r(s) | \, ds, \\ \epsilon_n = \max\limits_{0 \leq k < 2^n} \{\mu_n + \epsilon_k^n\}. \end{cases}$$

Notons que la suite ϵ_n converge vers 0. Fixons $n_0 \geq 1$ tel que, pour tout $n \geq n_0$:

$$\epsilon_n < \frac{\rho}{2(\alpha + 1)}. \tag{4.37}$$

Pour les propriétés des ensembles ρ-prox-réguliers, on construit la suite d'application

$$x_{k+1}^n = Proj(x_k^n + \mu_n y_k^n, C(t_{k+1}^n)), \tag{4.38}$$

d'après l'hypothèse (b) on a $\| y_0^n \| \leq \alpha$. Alors, par (4.3) et (4.36) on trouve

$$\begin{aligned} d(x_0 + \mu_n y_0^n, C(t_1^n)) &\leq d(x_0 + \mu_n y_0^n, C(t_0^n)) + \mid a_r(t_1^n) - a_r(t_0^n) \mid \qquad (4.39) \\ &\leq \mu_n \| y_0^n \| + \epsilon_0^n \leq \alpha \mu_n + \epsilon_0^n \qquad (4.40) \\ &\leq (\alpha + 1)\epsilon_n < \frac{\rho}{2}, \end{aligned}$$

comme C est ρ-prox-régulière, par la Proposition 1.2.12 on choisit le point

$$x_1^n = Proj(x_0 + \mu_n y_0^n, C(t_1^n)), \tag{4.41}$$

alors, par (4.39) on obtient

$$\begin{aligned} \| x_1^n - x_0 \| &\leq \| x_1^n - (x_0 + \mu_n y_0^n) \| + \mu_n \| y_0^n \| \\ &= d(x_0 + \mu_n y_0^n, C(t_1^n)) + \mu_n \| y_0^n \| \\ &\leq d(x_0 + \mu_n y_0^n, C(t_0^n)) + \mid a_r(t_1^n) - a_r(t_0^n) \mid + \mu_n \| y_0^n \| \\ &\leq \mu_n \| y_0^n \| + \mid a_r(t_1^n) - a_r(t_0^n) \mid + \mu_n \| y_0^n \| \\ &\leq 2\alpha\mu_n + \epsilon_0^n. \qquad (4.42) \end{aligned}$$

Aussi, par (4.40) on trouve que

$$\| x_1^n - (x_0 + \mu_n y_0^n) \| \leq \alpha\mu_n + \epsilon_0^n, \tag{4.43}$$

et

$$\begin{aligned} \| x_1^n \| &\leq \| x_1^n - (x_0 + \mu_n y_0^n) \| + \| x_0 + \mu_n y_0^n \| \\ &\leq \alpha\mu_n + \epsilon_0^n + \| x_0 + \mu_n y_0^n \| . \qquad (4.44) \end{aligned}$$

De la même manière, par l'hypothèse (b) on a $\| y_1^n \| \leq \alpha$ et par (4.44) on obtient

$$\begin{aligned} \| x_1^n + \mu_n y_1^n \| &\leq \| x_1^n \| + \mu_n \| y_1^n \| \\ &\leq \alpha\mu_n + \epsilon_0^n + \| x_0 + \mu_n y_0^n \| + \alpha\mu_n \\ &= 2\alpha\mu_n + \epsilon_0^n + \| x_0 + \mu_n y_0^n \| < r. \end{aligned}$$

Ensuite, on trouve

$$\begin{aligned} d(x_1^n + \mu_n y_1^n, C(t_2^n)) &\leq d(x_1^n + \mu_n y_1^n, C(t_1^n)) + \mid a_r(t_2^n) - a_r(t_1^n) \mid \qquad (4.45) \\ &\leq \mu_n \| y_1^n \| + \epsilon_1^n \\ &\leq \alpha\mu_n + \epsilon_1^n \qquad (4.46) \\ &\leq (\alpha + 1)\epsilon_n < \frac{\rho}{2} \end{aligned}$$

et comme C est ρ-prox-régulière, alors par la Proposition 1.2.12 on peut choisir le point

$$x_2^n = Proj(x_1^n + \mu_n y_1^n, C(t_2^n)) \tag{4.47}$$

alors, par (4.45) on a

$$\begin{aligned}
\| x_2^n - x_1^n \| &\leq \| x_2^n - (x_1^n + \mu_n y_1^n) \| + \mu_n \| y_1^n \| \\
&= d(x_1^n + \mu_n y_1^n, C(t_2^n)) + \mu_n \| y_1^n \| \\
&\leq d(x_1^n + \mu_n y_1^n, C(t_1^n)) + | a_r(t_2^n) - a_r(t_1^n) | + \mu_n \| y_1^n \| \\
&\leq \mu_n \| y_1^n \| + | a_r(t_2^n) - a_r(t_1^n) | + \mu_n \| y_1^n \| \\
&\leq 2\alpha\mu_n + \epsilon_1^n. \qquad (4.48)
\end{aligned}$$

Ainsi, par (4.46) on trouve

$$\| x_2^n - (x_1^n + \mu_n y_1^n) \| \leq \alpha\mu_n + \epsilon_1^n, \tag{4.49}$$

et

$$\begin{aligned}
\| x_2^n \| &\leq \| x_2^n - (x_1^n + \mu_n y_1^n) \| + \| x_1^n + \mu_n y_1^n \| \\
&\leq \alpha\mu_n + \epsilon_1^n + \| x_1^n + \mu_n y_1^n \| \\
&\leq 3\alpha\mu_n + \epsilon_0^n + \epsilon_1^n + \| x_0 + \mu_n y_0^n \| . \qquad (4.50)
\end{aligned}$$

Alors, par récurrence, on suppose l'estimation suivant

$$\| x_k^n - x_{k-1}^n \| \leq 2\alpha\mu_n + \epsilon_{k-1}^n, \tag{4.51}$$

et on choisit y_k^n l'élément de norme minimal du $F(t_k^n, x_k^n)$ satisfait $\| y_k^n \| \leq \alpha$, donc on a

$$\begin{aligned}
\| x_k^n + \mu_n y_k^n \| &\leq \| x_k^n \| + \mu_n \| y_k^n \| \\
&\leq 2\alpha T + \epsilon_0^n + \cdots + \epsilon_{k-1}^n + \| x_0 + \mu_n y_0^n \| < r,
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
d(x_k^n + \mu_n y_k^n, C(t_{k+1}^n)) &\leq d(x_k^n + \mu_n y_k^n, C(t_k^n)) + | a_r(t_{k+1}^n) - a_r(t_k^n) | \\
&\leq \mu_n \| y_k^n \| + \epsilon_k^n \\
&\leq \alpha\mu_n + \epsilon_k^n \qquad (4.52) \\
&\leq (\alpha + 1)\epsilon_n < \frac{\rho}{2}
\end{aligned}$$

comme C est ρ-prox-régulier, alors par la Proposition 1.2.12, on choisit le point

$$x_{k+1}^n = Proj(x_k^n + \mu_n y_k^n, C(t_{k+1}^n)), \tag{4.53}$$

alors, on obtient

$$\begin{aligned}
\| x_{k+1}^n - x_k^n \| &\leq \| x_{k+1}^n - (x_k^n + \mu_n y_k^n) \| + \mu_n \| y_k^n \| \\
&= d(x_k^n + \mu_n y_k^n, C(t_{k+1}^n)) + \mu_n \| y_k^n \| \\
&\leq d(x_k^n + \mu_n y_k^n, C(t_k^n)) + | a_r(t_{k+1}^n) - a_r(t_k^n) | + \mu_n \| y_k^n \| \\
&\leq \mu_n \| y_k^n \| + | a_r(t_{k+1}^n) - a_r(t_k^n) | + \mu_n \| y_k^n \| \\
&\leq 2\alpha\mu_n + \epsilon_k^n. \qquad (4.54)
\end{aligned}$$

D'autre part, par (4.52) on a

$$\| x_{k+1}^n - (x_k^n + \mu_n y_k^n) \| \leq \alpha\mu_n + \epsilon_k^n, \qquad (4.55)$$

alors

$$\begin{aligned}
\| x_{k+1}^n \| &\leq \| x_{k+1}^n - (x_k^n + \mu_n y_k^n) \| + \| x_k^n + \mu_n y_k^n \| \\
&\leq \alpha\mu_n + \epsilon_k^n + \| x_k^n + \mu_n y_k^n \| \\
&\leq \alpha\mu_n + 2\alpha T + \epsilon_0^n + \cdots + \epsilon_{k-1}^n + \epsilon_k^n + \| x_0 + \mu_n y_0^n \| . \qquad (4.56)
\end{aligned}$$

Alors, pour tout $k \geq 0$, on trouve

$$\| x_{k+1}^n - x_k^n \| \leq 2\alpha\mu_n + \epsilon_k^n \leq 2\alpha\mu_n + \epsilon_n, \qquad (4.57)$$

$$\| x_k^n + \mu_n y_k^n \| \leq r, \qquad (4.58)$$

et

$$\| x_{k+1}^n - (x_k^n + \mu_n y_k^n) \| \leq \alpha\mu_n + \epsilon_k^n \leq (\alpha+1)(\mu_n + \epsilon_k^n). \qquad (4.59)$$

Maintenant, on définit $x_n(\cdot) : [0,T] \longrightarrow H$ par

$$\begin{aligned}
x_n(t) &= \frac{\int_{t_k^n}^t | \dot{a}_r(\tau) | \, d\tau + (t - t_k^n)}{\epsilon_k^n + \mu_n} (x_{k+1}^n - \mu_n y_k^n) \\
&+ \frac{\int_t^{t_{k+1}^n} | \dot{a}_r(\tau) | \, d\tau + (t_{k+1}^n - t)}{\epsilon_k^n + \mu_n} x_k^n + (t - t_k^n) y_k^n \qquad (4.60)
\end{aligned}$$

pour $t \in [t_k^n, t_{k+1}^n[$. Alors $x_n(t_{k+1}^n) = x_{k+1}^n$ et

$$\begin{aligned}
\dot{x}_n(t) &= \frac{(| \dot{a}_r(t) | + 1)}{\epsilon_k^n + \mu_n} (x_{k+1}^n - \mu_n y_k^n) - \frac{(| \dot{a}_r(t) | + 1)}{\epsilon_k^n + \mu_n} x_k^n + y_k^n \\
&= \frac{(| \dot{a}_r(t) | + 1)}{\epsilon_k^n + \mu_n} (x_{k+1}^n - \mu_n y_k^n - x_k^n) + y_k^n \\
&= \frac{(| \dot{a}_r(t) | + 1)(x_{k+1}^n - (x_k^n + \mu_n y_k^n))}{\epsilon_k^n + \mu_n} + y_k^n. \qquad (4.61)
\end{aligned}$$

par l'hypothèse (b) et (4.59), on obtient

$$\begin{aligned}\| \dot{x}_n(t) \| &\leq \frac{(| \dot{a}_r(t) | +1)}{\epsilon_k^n + \mu_n} \| x_{k+1}^n - (x_k^n + \mu_n y_k^n) \| + \| y_k^n \| \\ &\leq (| \dot{a}_r(t) | +1)(\alpha + 1) + \alpha = \eta(t). \end{aligned} \tag{4.62}$$

Donc, pour tout $n \geq n_0$, on définit la fonction $\delta_n : [0,T] \longrightarrow [0,T]$ par

$$\begin{cases} \delta_n(T) = T \\ \delta_n(t) = t_{k+1}^n \text{ si } t \in [t_k^n, t_{k+1}^n[\ \ (0 \leq k \leq 2^n - 1). \end{cases}$$

D'autre part, pour tout $t \in [0,T]$, par les définitions du $\delta_n(\cdot)$ et les propriétés de cône normal proximal des ensembles -ρ-prox-régulier, on trouve

$$\begin{cases} -\dot{x}_n(t) \in N^P(C(\delta_n(t)), x_n(\delta_n(t))) + F(\delta_n(t), x(\delta_n(t))) \quad \text{p.p } t \in [0,T] \\ x_n(\delta_n(t)) \in C(\delta_n(t)). \end{cases} \tag{4.63}$$

On va montrer la convergence uniform d'une sous suite de $(x_n(\cdot))_n$ vers l'application absolument continue $x(\cdot)$. Par (4.36) et (4.45) on obtient

$$\| x_1^n \| \leq \alpha\mu_n + \epsilon_0^n + \| x_0 + \mu_n y_0^n \| < r \tag{4.64}$$

Alors, par récurrence, si

$$\| x_k^n \| \leq r, \tag{4.65}$$

par (4.36) et (4.56) on aura

$$\| x_{k+1}^n \| \leq \alpha\mu_n + 2\alpha T + \epsilon_0^n + \cdots + \epsilon_{k-1}^n + \epsilon_k^n + \| x_0 + \mu_n y_0^n \| < r, \tag{4.66}$$

Donc pour tout k, $0 \leq k \leq n$ on a

$$\| x_k^n \| < r. \tag{4.67}$$

D'autre part, par (4.62) on a

$$\| x_n(\delta_n(t)) - x_n(t) \| \leq \eta(t) \mid \delta_n(t) - t \mid,$$

alors

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \| x_n(\delta_n(t)) - x_n(t) \| = 0. \tag{4.68}$$

par conséquent

$$(x_n(\delta_n(t)) \in C(\delta_n(t)) \cap rB.$$

Alors $(x_n(\delta_n(t)))$ est relativement compact pour tout $t \in [0,T]$ dans H (puisque $\underset{n}{\cup} C(\delta_n(t))_n$ est boule-compact), donc par (4.68) on a $(x_n(t))_n$ est relativement compact dans H et par (4.62), la suite $(x_n(t))_n$ est équicontinue dans $\mathcal{C}([0,T],H)$, alors $(x_n(\cdot))_n$ est relativement compact dans $\mathcal{C}([0,T],H)$. D'après le Théorème d'Ascoli, on peut extraire une sous suite de $(x_n(\cdot))_n$ qui converge uniformément sur $[0,T]$ vers l'application $x(\cdot) \in \mathcal{C}([0,T],H)$. Par (4.62), $(\dot{x}_n(\cdot))_n$ est bornée dans $\mathcal{L}^1([0,T],H)$, alors on peut extraire une sous suite qui converge faiblement dans $\mathcal{L}^1([0,T],H)$ vers $v(\cdot)$.
Alors, d'après l'égalité

$$x_n(t) = x_n(0) + \int_0^t \dot{x}_n(s)ds \quad \text{pour tout } t \in \ [0,T],$$

on a

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(s)ds \quad \text{pour tout } t \in \ [0,T]$$

donc, l'application $x(\cdot)$ est absolument continue sur $[0,T]$ avec $\dot{x}(\cdot) = v(\cdot)$ sur $[0,T]$.

Reste à montrer que $x(\cdot)$ est une solution de $(\mathcal{SPP}_F)$. On va montrer que $x(t) \in C(t) \ \ \forall t \in [0,T]$. Par l'hypothèse (H_2) on a

$$d(x_n(\delta_n(t)), C(t)) \leq d(x_n(\delta_n(t)), C(\delta_n(t))) + \mid a_r(t) - a_r(\delta_n(t)) \mid,$$

pour presque tout $t \in [0,T]$. Par la définition de $\delta_n(t)$ on a $\mid \delta_n(t) - t \mid \leq \frac{T}{2^n}$, alors $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \delta_n(t) = t$ et par (4.62) on trouve

$$\begin{aligned}\| x_n(\delta_n(t)) - x(t) \| &\leq \| x_n(\delta_n(t)) - x_n(t) \| + \| x_n(t) - x(t) \| \\ &\leq \eta(t) \mid \delta_n(t) - t \mid + \| x_n(t) - x(t) \|,\end{aligned}$$

donc

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \| x_n(\delta_n(t)) - x(t) \| = 0,$$

i.e. $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} x_n(\delta_n(t)) = x(t)$, alors $d(x_n(\delta_n(t)), C(t)) \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, comme $C(t)$ est fermé, on trouve $x(t) \in C(t)$.
D'autre part, par la construction de l'élément de norme minimal, pour tout $t \in I$

$$z_n(t) = f(\delta_n(t), x_n(\delta_n(t))) \in F(\delta_n(t), x_n(\delta_n(t))). \tag{4.69}$$

Comme $\| \ z_n(t) \ \| \leq \alpha$. pour tous $n \geq n_0$ et $t \in [0,T]$, alors $(z_n(\cdot))_n$ converge faiblement dans $\mathcal{L}^1([0,T],H)$ vers l'application $z(\cdot) \in \mathcal{L}^1([0,T],H)$ avec $\| z(t) \| \leq \alpha$, p.p $t \in [0,T]$. On a

$$\dot{x}_n(t) + z_n(t) \in -N^P(C(\delta_n(t)), x_n(\delta_n(t)))$$

avec

$$z_n(t) \in F(\delta_n(t), x_n(\delta_n(t)))$$

et

$$\| \dot{x}_n(t) + z_n(t) \| \leq (\alpha+1) \mid \dot{a}_r(t) \mid +2\alpha = \phi(t).$$

Alors, par la Proposition 1.2.12 on a pour p.p $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} \dot{x}_n(t) + z_n(t) &\in -N^P(C(\delta_n(t)), x_n(\delta_n(t))) \cap \phi(t)B \\ &= -\phi(t)\partial^P d_{C(\delta_n(t))}(x_n(\delta_n(t))). \end{aligned} \tag{4.70}$$

Comme $(\dot{x}_n + z_n)_n$ converge faiblement dans $\mathcal{L}^1([0,T],H)$ vers $(\dot{x}+z)$, par le Lemme de Mazur, on obtient

$$\dot{x}(t) + z(t) \in \bigcap_n \overline{co}\{\dot{x}_k(t) + z_k(t), \quad k \geq n\} \quad \text{p.p} \quad t \in [0,T]. \tag{4.71}$$

On fixe $t \in [0,T]$, pour tout $\xi \in H$ d'après (4.71) on a

$$\langle \dot{x}(t) + z(t), \xi \rangle \leq \inf_n \sup_{k \geq n} \langle \dot{x}_k(t) + z_k(t), \xi \rangle$$

donc, par (4.70) et la proposition (4.2.1), on obtient

$$\begin{aligned} \langle \dot{x}(t) + z(t), \xi \rangle &\leq \phi(t) \limsup_n \sigma(-\partial^P d_{C(\delta_n(t))}(x_n(\delta_n(t))), \xi) \\ &\leq \phi(t)\sigma(-\partial^P d_{C(t)}(x(t)), \xi). \end{aligned}$$

Comme l'ensemble $\partial^P d_{C(t)}(x(t))$ est fermée convexe, on trouve que

$$\dot{x}(t) + z(t) \in -\phi(t)\partial^P d_{C(t)}(x(t)) \quad \text{p.p} \quad t \in [0,T].$$

Par conséquent

$$\dot{x}(t) + z(t) \in -N^P(C(t), x(t)) \quad \text{p.p.}$$

D'autre part, Comme $(z_n(\cdot))_n$ converge faiblement dans $\mathcal{L}^1([0,T],H)$ vers $z(\cdot)$, par le Lemme de Mazur, il existe

$$\xi_n(\cdot) \in co\{z_q, \quad q \geq n\} \tag{4.72}$$

tels que $(\xi_n(\cdot))_n$ converge fortement dans $\mathcal{L}^1([0,T],H)$ vers $z(\cdot)$.

Donc, on pose $(\xi_n(\cdot))_n$ converge p.p. vers $z(\cdot)$, alors il existe un ensemble négligeable $S \subset [0,T]$ tel que pour tout $t \in [0,T] \backslash S$ on a $\xi_n(t) \longrightarrow z(t)$ fortement dans H et

$$z(t) \in \bigcap_n \overline{co}\{z_q, \quad q \geq n\}.$$

et d'après l'inclusion (4.69), pour tout $t \in [0,T] \backslash S$ et tout $y \in H$ on trouve que

$$\langle y, z_n(t) \rangle \leq \sigma(y, F(\delta_n(t), x_n(\delta_n(t)))). \tag{4.73}$$

En suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,T]\backslash S$ on obtient

$$\langle y, z(t)\rangle \leq \sup_{q\geq n}\langle y, z_q(t)\rangle,$$

donc

$$\begin{aligned}\langle y, z(t)\rangle &\leq \inf_n \sup_{q\geq n}\langle y, z_q(t)\rangle\\ &\leq \inf_n \sup_{q\geq n}\sigma(y, F(\delta_q(t), x_q(\delta_q(t)))),\end{aligned}$$

alors on a

$$\langle y, z(t)\rangle \leq \limsup_{n\longrightarrow+\infty}\sigma(y, F(\delta_n(t), x_n(\delta_n(t))).$$

Comme $\sigma(y, F(\cdot,\cdot))$ est globalement semi-continue supérieurement sur $[0,T]\times H$, alors pour tout $t\in [0,T]\backslash S$ et tout $y\in H$

$$\langle y, z(t)\rangle \leq \sigma(y, F(t, x(t))),$$

alors

$$z(t) \in F(t, x(t)) \quad \text{p.p } \ t\in[0,T],$$

par conséquent

$$\begin{aligned}-\dot{x}(t) &\in N^P(C(t), x(t)) + z(t) \ \text{ p.p } \ t\in[0,T].\\ z(t) &\in F(t, x(t)) \ \text{ p.p } \ t\in[0,T].\end{aligned}$$

□

Le Théorème 4.3.2 est vrai pour tout intervalle fini sous la forme $[T_n, T_{n+1}]$, $\ \forall\, k\in\mathbb{N}$. Alors dans le corollaire suivant on va montre l'existence de solution du problème $(\mathcal{SPP}_F)$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$.

Corollaire 4.3.3.

Soit $F:\mathbb{R}_+\times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs non vides fermées convexes. On suppose que

(H_1') F est scalairement semi-continue supérieurement (hémi-continue supérieurement) sur $\mathbb{R}_+\times H$.

(H_2') il existe une fonction $\alpha(\cdot)\in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+)$ tel que

$$d(0, F(t,x)) \leq \alpha(t),$$

pour tous $t\in\mathbb{R}_+$ et $x\in H$.

(H_3') pour tout $t\in\mathbb{R}_+$ et $\rho>0$, les ensembles $C(t)$ sont non vides fermés dans H et ρ-prox-réguliers.

(H_4') pour tout $t\in\mathbb{R}_+$ et pour tout $r\geq 0$, $C(t)$ est r-uniformément semi continue inférieurement à droite.

(H_5') pour tout $T > 0$, C transforme tout suite bornée $(t_n)_n$ de $[0, T]$ dans un sous ensemble boule-compact de H, i.e. l'intersection de $\underset{n}{\cup} C(t_n)$ avec une boule fermée de H est relativement compacte.

Alors, pour tout $x_0 \in C(0)$, il existe une application $x(\cdot) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow H$ localement absolument continue sur $\mathbb{R}_+$ satisfait

$$(\mathcal{SPP}_F) \begin{cases} -\dot{x}(t) \in \ N^P(C(t), x(t)) + F(t, x(t)) \quad \text{p.p } t \in \mathbb{R}_+, \\ x(t) \in C(t) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}_+, \\ x(0) = x_0 \in C(0). \end{cases}$$

Démonstration.

Dans le développement, on utilise quelques idées de Théorème 4 dans [48]. On définit une partition de $\mathbb{R}_+$, par les points $T_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. on utilise la preuve de Théorème 4.3.2 sur tout sous intervalle $[T_n, T_{n+1}]$. Alors, d'après les hypothèses (H_1'), (H_2'), (H_3'), (H_4'), (H_5') on a (H_1), (H_2), (H_3), (a), (b) sont vérifiées sur l'intervalle $[T_0, T_1]$, alors d'après le Théorème 4.3.2 il existe une solution absolument continue $x_0 : [T_0, T_1] \longrightarrow H$ pour l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} -\dot{x}_0(t) \in \ N^P(\mathcal{C}(t), x_0(t)) + F(t, x_0(t)) \quad \text{p.p.}\, t \in [T_0, T_1], \\ x_0(t) \in \mathcal{C}(t) \quad \text{pour tout } t \in [T_0, T_1], \\ x_0(T_0) = x_0. \end{cases}$$

De cette façons, pour tout $i \in \{0, \cdots, n-1\}$ on peut construire $x_i : [T_i, T_{i+1}] \longrightarrow H$ absolument continue tel que

$$\begin{cases} -\dot{x}_i(t) \in \ N^P(\mathcal{C}(t), x_i(t)) + F(t, x_i(t)) \quad \text{p.p.}\, t \in [T_i, T_{i+1}], \\ x_i(t) \in \mathcal{C}(t) \quad \text{pour tout } t \in [T_i, T_{i+1}], \\ x_i(T_i) = x_{i-1}(T_i). \end{cases}$$

Par induction, il existe une application absolument continue $x_n : [T_n, T_{n+1}] \longrightarrow H$ tel que

$$\begin{cases} -\dot{x}_n(t) \in \ N^P(\mathcal{C}(t), x_n(t)) + F(t, x_n(t)), \\ x_n(T_n) = x_{n-1}(T_n). \end{cases} \tag{4.74}$$

Soit $x : \mathbb{R}_+ \longrightarrow H$ une fonction définit par $x(t) := x_n(t)$ pour tout $t \in [T_n, T_{n+1}[$ avec $n \in \mathbb{N}$, x est une fonction absolument continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, d'après (4.74) on a

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in \ N^P(\mathcal{C}(t), x(t)) + F(t, x(t)) \quad \text{p.p.}\, t \in \mathbb{R}_+, \\ x(t) \in \mathcal{C}(t), \\ x(0) = x_0(T_0) = x_0. \end{cases}$$

□

CHAPITRE

5

RÉSULTAT D'EXISTENCE DE SOLUTION POUR LE PROCESSUS DE LA RAFLE PAR UNE MULTI-APPLICATION À VALEURS R-UNIFORMÉMENT SEMI CONTINUE INFÉRIEUREMENT À DROITE AVEC PERTURBATION MULTIVOQUE CONTENANT UN RETARD

Sommaire

5.1 Introduction du chapitre

Le problème de ce chapitre , concerne l'étude d'existence de solutions pour le processus de la rafle perturbé avec retard, en utilisant les résultats du Théorème 4.3.2. Soit l'intervalle $I = [0, T]$, ($T > 0$). Soit $R > 0$ un retard fini, on considère l'espace $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}([-R, 0], H)$ muni de la norme de la convergence uniforme notée $\|\cdot\|_{\mathcal{C}_0}$, a chaque $t \in I$, on associe une application $\tau(t) : \mathcal{C}([-R, T], H) \longrightarrow \mathcal{C}([-R, 0], H)$ définie, pour tout $x(\cdot) \in \mathcal{C}([-R, T], H)$ par $(\tau(t)x(\cdot))(s) := x(t + s)$ pour tout $s \in [-R, 0]$. Soient $C : [0, T] \rightrightarrows H$ et $F : I \times \mathcal{C}([-R, 0], H) \rightrightarrows H$ deux multi-applications, et soit φ un élément fixé de $\mathcal{C}([-R, 0], H)$ vérifiant $\varphi(0) \in C(0)$.

On va étudier l'existence de solutions pour le problème suivant

$$(\mathcal{SPP}_{F_R}) \begin{cases} -\dot{x}(t) \in N^P(C(t), x(t)) + F(t, \tau(t)x), & \text{p.p } t \in [0, T] \\ x(s) = \varphi(s) \ \ \forall s \in [-R, 0], \\ x(t) \in C(t) \ \ \forall t \in [0, T]. \end{cases}$$

On appelle solution de $(\mathcal{SPP}_{F_R})$ toute application $x(\cdot) : [-R, T] \longrightarrow H$ telle que la restriction $x/_I(\cdot)$ est absolument continue et $x(\cdot)$ vérifie $(\mathcal{SPP}_{F_R})$.

5.2 Résultat principal

Théorème 5.2.1.

Soit C une multi-application à valeurs non vides fermées vérifiant les hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3) du Théorème 4.3.2. Soit $F : [0, T] \times \mathcal{C}_0 \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs non vides convexes fermées satisfaisant :

(a) F est scalairement semi-continue supérieurement sur $[0, T] \times \mathcal{C}_0$.

(b) pour un réel $\alpha > 0$,

$$d(0, F(t, \tau(t)x)) \leq \alpha$$

pour tous $t \in [0, T]$ et $x \in \mathcal{C}_0$.

Alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0$ avec $\varphi(0) \in C(0)$, le problème

$$(\mathcal{SPP}_{F_R}) \begin{cases} -\dot{x}(t) \in N^P(C(t), x(t)) + F(t, \tau(t)x) & \text{p.p } t \in [0, T] \\ x(s) = \varphi(s) \ \ \forall s \in [-R, 0] \\ x(t) \in C(t) \ \ \forall t \in [0, T], \end{cases}$$

admet au moins une solution absolument continue $x(\cdot)$ dans $\mathcal{C}([-R, T], H)$.

Démonstration.

On construit une suite des applications $(x_n(\cdot))_n$ dans $\mathcal{C}([-R,T],H)$ qui a une sous suite qui converge uniformément sur $[0,T]$ vers une solution de $(\mathcal{SPP}_{F_R})$.

Étape (1) : Construction de la suite $(x_n(\cdot))_n$ sur $[0,T]$.

On définit pour tout $n \geq 1$, une partition de $[0,T]$ $(T>0)$ avec $t_k^n = k\frac{T}{2^n},\ 0 \leq k \leq 2^n$.

On note par $f(t,x)$ l'élément de norme minimal de l'ensemble convexe fermé $F(t,x(t))$, et on choisit $f(t_0^n, \tau(t_0^n)x_n)$ l'élément de norme minimal de $F(t_0^n, \tau(t_0^n)x_n)$, donc pour tous $n \geq 1$ et $r > 0$ on a

$$\| x_0 + \mu_n f(t_0^n, \tau(t_0^n)x_n) \| + \int_0^T \mid \dot{a}_r(t) \mid dt + 2\alpha T < r. \tag{5.1}$$

On pose

$$\begin{cases} \mu_n = \frac{T}{2^n}, \\ \epsilon_k^n = \int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} \mid \dot{a}_r(s) \mid ds, \\ \epsilon_n = \max\limits_{0 \leq k < 2^n} \{\mu_n + \epsilon_k^n\}. \end{cases}$$

Comme ϵ_n converge vers 0, on fixe $n_0 \geq 1$ satisfait, pour tout $n \geq n_0$:

$$\epsilon_n < \frac{\rho}{2(\alpha+1)}. \tag{5.2}$$

Comme C est un ensemble ρ-prox-régulier, alors pour tout $k \geq 0$ on construit une suite d'applications

$$x_{k+1}^n = Proj(x_k^n + \mu_n f(t_k^n, \tau(t_k^n)x_n), C(t_{k+1}^n)), \tag{5.3}$$

où $f(t_k^n, \tau(t_k^n)x_n)$ l'élément de norme minimal de $F(t_k^n, \tau(t_k^n)x_n)$ et

$$\tau(t_k^n)x_n = (x_n)_{t_k^n}.$$

Par (b) on a $\| f(t_0^n, \tau(t_0^n)) \| \leq \alpha$. Alors, par (4.3) et (5.1) on trouve

$$\begin{aligned} d(x_0 + \mu_n f(t_0^n, \tau(t_0^n)x_n), C(t_1^n)) &\leq d(x_0 + \mu_n f(t_0^n, \tau(t_0^n)x_n), C(t_0^n)) + \mid a_r(t_1^n) - a_r(t_0^n) \mid \quad (5.4) \\ &\leq \mu_n \| f(t_0^n, \tau(t_0^n)x_n) \| + \epsilon_0^n \leq \alpha\mu_n + \epsilon_0^n \quad (5.5) \\ &\leq (\alpha+1)\epsilon_n < \frac{\rho}{2}, \end{aligned}$$

et comme C est à valeurs ρ-prox-régulier, d'après la Proposition 1.2.12 on peut choisir le point

$$x_1^n = Proj(x_0 + \mu_n f(t_0^n, \tau(t_0^n)x_n), C(t_1^n)), \tag{5.6}$$

alors, par la relation (5.4) on trouve

$$
\begin{aligned}
\| x_1^n - x_0 \| &\leq \| x_1^n - (x_0 + \mu_n f(t_0^n, \tau(t_0^n)x_n)) \| + \mu_n \| f(t_0^n, \tau(t_0^n)x_n) \| \\
&= d(x_0 + \mu_n f(t_0^n, \tau(t_0^n)x_n), C(t_1^n)) + \mu_n \| f(t_0^n, \tau(t_0^n)x_n) \| \\
&\leq d(x_0 + \mu_n f(t_0^n, \tau(t_0^n)x_n), C(t_0^n)) + | a_r(t_1^n) - a_r(t_0^n) | + \mu_n \| f(t_0^n, \tau(t_0^n)x_n) \| \\
&\leq \mu_n \| f(t_0^n, \tau(t_0^n)x_n) \| + | a_r(t_1^n) - a_r(t_0^n) | + \mu_n \| f(t_0^n, \tau(t_0^n)x_n) \| \\
&\leq 2\alpha\mu_n + \epsilon_0^n. \qquad (5.7)
\end{aligned}
$$

De plus, par (5.5) on a

$$
\| x_1^n - (x_0 + \mu_n f(t_0^n, \tau(t_0^n)x_n)) \| \leq \alpha\mu_n + \epsilon_0^n, \qquad (5.8)
$$

et

$$
\begin{aligned}
\| x_1^n \| &\leq \| x_1^n - (x_0 + \mu_n f(t_0^n, \tau(t_0^n)x_n)) \| + \| x_0 + \mu_n f(t_0^n, \tau(t_0^n)x_n) \| \\
&\leq \alpha\mu_n + \epsilon_0^n + \| x_0 + \mu_n f(t_0^n, \tau(t_0^n)x_n) \| . \qquad (5.9)
\end{aligned}
$$

De cette façon, d'après l'hypothèse (b) on a $\| f(t_1^n, \tau(t_1^n)x_n) \| \leq \alpha$ et par la relation (5.9) on trouve

$$
\begin{aligned}
\| x_1^n + \mu_n f(t_1^n, \tau(t_1^n)x_n) \| &\leq \| x_1^n \| + \mu_n \| f(t_1^n, \tau(t_1^n)x_n) \| \\
&\leq \alpha\mu_n + \epsilon_0^n + \| x_0 + \mu_n f(t_0^n, \tau(t_0^n)x_n) \| + \alpha\mu_n \\
&= 2\alpha\mu_n + \epsilon_0^n + \| x_0 + \mu_n f(t_0^n, \tau(t_0^n)x_n) \| < r,
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
d(x_1^n + \mu_n f(t_1^n, \tau(t_1^n)x_n), C(t_2^n)) &\leq d(x_1^n + \mu_n f(t_1^n, \tau(t_1^n)x_n), C(t_1^n)) + | a_r(t_2^n) - a_r(t_1^n) | \qquad (5.10) \\
&\leq \mu_n \| f(t_1^n, \tau(t_1^n)x_n) \| + \epsilon_1^n \\
&\leq \alpha\mu_n + \epsilon_1^n \qquad (5.11) \\
&\leq (\alpha + 1)\epsilon_n < \frac{\rho}{2},
\end{aligned}
$$

et comme C est à valeurs ρ-prox-régulière, par la Proposition 1.2.12, on choisit le point

$$
x_2^n = Proj(x_1^n + \mu_n f(t_1^n, \tau(t_1^n)x_n), C(t_2^n)) \qquad (5.12)
$$

alors, par (5.10) on a

$$
\begin{aligned}
\| x_2^n - x_1^n \| &\leq \| x_2^n - (x_1^n + \mu_n f(t_1^n, \tau(t_1^n)x_n)) \| + \mu_n \| f(t_1^n, \tau(t_1^n)x_n) \| \\
&= d(x_1^n + \mu_n f(t_1^n, \tau(t_1^n)x_n), C(t_2^n)) + \mu_n f(t_1^n, \tau(t_1^n)x_n) \| \\
&\leq d(x_1^n + \mu_n f(t_1^n, \tau(t_1^n)x_n), C(t_1^n)) + | a_r(t_2^n) - a_r(t_1^n) | + \mu_n \| f(t_1^n, \tau(t_1^n)x_n) \| \\
&\leq \mu_n \| f(t_1^n, \tau(t_1^n)x_n) \| + | a_r(t_2^n) - a_r(t_1^n) | + \mu_n \| f(t_1^n, \tau(t_1^n)x_n) \| \\
&\leq 2\alpha\mu_n + \epsilon_1^n. \qquad (5.13)
\end{aligned}
$$

Ensuite, par (5.11) on obtient

$$\| x_2^n - (x_1^n + \mu_n f(t_1^n, \tau(t_1^n)x_n)) \| \leq \alpha\mu_n + \epsilon_1^n \tag{5.14}$$

et

$$\begin{aligned}
\| x_2^n \| &\leq \| x_2^n - (x_1^n + \mu_n f(t_1^n, \tau(t_1^n)x_n)) \| + \| x_1^n + \mu_n f(t_1^n, \tau(t_1^n)x_n) \| \\
&\leq \alpha\mu_n + \epsilon_1^n + \| x_1^n + \mu_n f(t_1^n, \tau(t_1^n)x_n) \| \\
&\leq 3\alpha\mu_n + \epsilon_0^n + \epsilon_1^n + \| x_0 + \mu_n f(t_0^n, \tau(t_0^n)x_n) \|,
\end{aligned} \tag{5.15}$$

par induction, on pose l'estimation suivante

$$\| x_k^n - x_{k-1}^n \| \leq 2\alpha\mu_n + \epsilon_{k-1}^n. \tag{5.16}$$

On choisit $f(t_k^n, \tau(t_k^n)x_n)$ l'élément de norme minimal de $F(t_k^n, \tau(t_k^n)x_n)$ satisfait $\| f(t_k^n, \tau(t_k^n)x_n) \| \leq \alpha$, alors on trouve

$$\begin{aligned}
\| x_k^n + \mu_n f(t_k^n, \tau(t_k^n)x_n) \| &\leq \| x_k^n \| + \mu_n \| f(t_k^n, \tau(t_k^n)x_n) \| \\
&\leq 2\alpha T + \epsilon_0^n + \cdots + \epsilon_{k-1}^n + \| x_0 + \mu_n f(t_0^n, \tau(t_0^n)x_n) \| < r,
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
d(x_k^n + \mu_n f(t_k^n, \tau(t_k^n)x_n), C(t_{k+1}^n)) &\leq d(x_k^n + \mu_n f(t_k^n, \tau(t_k^n)x_n), C(t_k^n)) + | a_r(t_{k+1}^n) - a_r(t_k^n) | \\
&\leq \mu_n \| f(t_k^n, \tau(t_k^n)x_n) \| + \epsilon_k^n \\
&\leq \alpha\mu_n + \epsilon_k^n \\
&\leq (\alpha + 1)\epsilon_n < \frac{\rho}{2}
\end{aligned} \tag{5.17}$$

et comme C est à valeurs ρ-prox-régulier, d'après la Proposition 1.2.12 on choisir le point

$$x_{k+1}^n = Proj(x_k^n + \mu_n f(t_k^n, \tau(t_k^n)x_n), C(t_{k+1}^n)) \tag{5.18}$$

alors, on trouve l'estimation

$$\begin{aligned}
\| x_{k+1}^n - x_k^n \| &\leq \| x_{k+1}^n - (x_k^n + \mu_n f(t_k^n, \tau(t_k^n)x_n)) \| + \mu_n \| f(t_k^n, \tau(t_k^n)x_n) \| \\
&= d(x_k^n + \mu_n f(t_k^n, \tau(t_k^n)x_n), C(t_{k+1}^n)) + \mu_n \| f(t_k^n, \tau(t_k^n)x_n) \| \\
&\leq d(x_k^n + \mu_n f(t_k^n, \tau(t_k^n)x_n), C(t_k^n)) + | a_r(t_{k+1}^n) - a_r(t_k^n) | + \mu_n \| f(t_k^n, \tau(t_k^n)x_n) \| \\
&\leq \mu_n \| f(t_k^n, \tau(t_k^n)x_n) \| + | a_r(t_{k+1}^n) - a_r(t_k^n) | + \mu_n \| f(t_k^n, \tau(t_k^n)x_n) \| \\
&\leq 2\alpha\mu_n + \epsilon_k^n.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

De plus, par (5.17) on trouve

$$\| x_{k+1}^n - (x_k^n + \mu_n f(t_k^n, \tau(t_k^n)x_n)) \| \leq \alpha\mu_n + \epsilon_k^n, \tag{5.20}$$

alors

$$\begin{aligned}\| x_{k+1}^n \| &\leq \| x_{k+1}^n - (x_k^n + \mu_n f(t_k^n, \tau(t_k^n)x_n)) \| + \| x_k^n + \mu_n f(t_k^n, \tau(t_k^n)x_n) \| \\ &\leq \alpha\mu_n + \epsilon_k^n + \| x_k^n + \mu_n f(t_k^n, \tau(t_k^n)x_n) \| \\ &\leq \alpha\mu_n + 2\alpha T + \epsilon_0^n + \cdots + \epsilon_{k-1}^n + \epsilon_k^n + \| x_0 + \mu_n f(t_0^n, \tau(t_0^n)x_n) \| . \end{aligned} \tag{5.21}$$

donc, pour tout $k \geq 0$, on obtient

$$\| x_{k+1}^n - x_k^n \| \leq 2\alpha\mu_n + \epsilon_k^n \leq 2\alpha\mu_n + \epsilon_n, \tag{5.22}$$

$$\| x_k^n + \mu_n f(t_k^n, \tau(t_k^n)x_n) \| \leq r, \tag{5.23}$$

et

$$\| x_{k+1}^n - (x_k^n + \mu_n f(t_k^n, \tau(t_k^n)x_n)) \| \leq \alpha\mu_n + \epsilon_k^n \leq (\alpha+1)(\mu_n + \epsilon_k^n). \tag{5.24}$$

Maintenant, on définit l'application $f_n(\cdot) : [0,T] \longrightarrow H$ par $t = 0$, $f_n(t) = f_0^n$ et pour tout $t \in]t_k^n, t_{k+1}^n]$, , on a $f_n(t) = f_k^n$ où $f_k^n = f(t_k^n, \tau(t_k^n)x_n)$ et on définit $x_n(\cdot) : [0,T] \longrightarrow H$ par

$$\begin{aligned} x_n(t) &= \frac{\int_{t_k^n}^t \mid \dot{a}_r(\tau) \mid d\tau + (t - t_k^n)}{\epsilon_k^n + \mu_n}(x_{k+1}^n - \mu_n f_k^n) \\ &+ \frac{\int_t^{t_{k+1}^n} \mid \dot{a}_r(\tau) \mid d\tau + (t_{k+1}^n - t)}{\epsilon_k^n + \mu_n} x_k^n + (t - t_k^n) f_k^n, \end{aligned} \tag{5.25}$$

d'où, pour tout $t \in [t_k^n, t_{k+1}^n[$, on a

$$\begin{aligned} \dot{x}_n(t) &= \frac{(\mid \dot{a}_r(t) \mid +1)}{\epsilon_k^n + \mu_n}(x_{k+1}^n - \mu_n f_k^n) - \frac{(\mid \dot{a}_r(t) \mid +1)}{\epsilon_k^n + \mu_n} x_k^n + f_k^n \\ &= \frac{(\mid \dot{a}_r(t) \mid +1)}{\epsilon_k^n + \mu_n}(x_{k+1}^n - \mu_n f_k^n - x_k^n) + f_k^n \\ &= \frac{(\mid \dot{a}_r(t) \mid +1)}{\epsilon_k^n + \mu_n}(x_{k+1}^n - (x_k^n + \mu_n f_k^n)) + f_k^n. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Par l'hypothèse (b) et (5.24) on obtient

$$\begin{aligned} \| \dot{x}_n(t) \| &\leq \frac{(\mid \dot{a}_r(t) \mid +1)}{\epsilon_k^n + \mu_n} \| x_{k+1}^n - (x_k^n + \mu_n f_k^n) \| + \| f_k^n \| \\ &\leq \mid \dot{a}_r(t) + 1 \mid (\alpha + 1) + \alpha = \psi(t). \end{aligned} \tag{5.27}$$

Maintenant, pour tout $n \geq n_0$, on définit $\delta_n : [0,T] \longrightarrow [0,T]$ par

$$\begin{cases} \delta_n(T) = T \\ \delta_n(t) = t_{k+1}^n \ \text{ si } \ t \in [t_k^n, t_{k+1}^n[\ \ (0 \leq k \leq 2^n - 1). \end{cases}$$

De plus, pour tout $t \in [0,T]$, par la définition de $\delta_n(\cdot)$ et par les propriétés du cone normale proximal, on trouve que

$$\begin{cases} -\dot{x}_n(t) \in N^P(\mathcal{C}(\delta_n(t)), x_n(\delta_n(t))) + F(\delta_n(t)), x_n(\delta_n(t))) \quad p.p.\ t \in [0,T] \\ f_n(t) = f(\delta_n(t), \tau(\delta_n(t))x_n) \in F(\delta_n(t), \tau(\delta_n(t))x_n). \end{cases} \tag{5.28}$$

Étape (2) : On va montrer que $(x_n(\cdot))_n$ converge uniformément vers la solution $x(\cdot) \in \mathcal{C}([-R,T],H)$. D'après (5.1), (5.2) et (5.9), on obtient

$$\| x_1^n \| \leq \alpha\mu_n + \epsilon_0^n + \| x_0 + \mu_n f(t_0^n, \tau(t_0^n)x_n) \| < r,$$

donc, par (5.1), (5.2) et (5.15) on trouve

$$\begin{aligned} \| x_2^n \| &\leq 3\alpha\mu_n + \epsilon_0^n + \epsilon_1^n + \| x_0 + \mu_n f(t_0^n, \tau(t_0^n)x_n) \| \\ &\leq \alpha\mu_n + 2\alpha\mu_n + \epsilon_0^n + \epsilon_1^n + \| x_0 + \mu_n f(t_0^n, \tau(t_0^n)x_n) \| < r. \end{aligned}$$

Alors, par induction, si

$$\| x_k^n \| \leq r, \tag{5.29}$$

par (5.1), (5.2) et (5.21) on aura

$$\| x_{k+1}^n \| \leq \alpha\mu_n + 2\alpha T + \epsilon_0^n + \cdots + \epsilon_{k-1}^n + \epsilon_k^n + \| x_0 + \mu_n f_0(t_0^n, \tau(t_0^n)x_n) \| < r.$$

Donc pour tout k, $0 \leq k \leq n$

$$\| x_k^n \| \leq r. \tag{5.30}$$

De plus, par (5.27) on obtient

$$\| x_n(\delta_n(t)) - x_n(t) \| \leq \psi(t) \mid \delta_n(t) - t \mid,$$

alors

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \| x_n(\delta_n(t)) - x_n(t) \| = 0. \tag{5.31}$$

Donc, on trouve que

$$(x_n(\delta_n(t)) \in C(\delta_n(t)) \cap rB.$$

D'où, $(x_n(\delta_n(t)))$ est relativement compact pour tout $t \in [0,T]$ dans H (puisque $\underset{n}{\cup} C(\delta_n(t))_n$ est boule-compact), donc par (5.31) $(x_n(t))_n$ est relativement compact dans H et par (5.27) la suite $(x_n(\cdot))_n$ est équicontinue dans $\mathcal{C}(I,H)$, alors $(x_n(\cdot))_n$ est relativement compact dans $\mathcal{C}(I,H)$. D'après le Théorème d'Ascoli, on peut extraire une sous suite de $(x_n(\cdot))_n$ qui converge uniformément sur $[-R,T]$ vers une

application continue $x(\cdot)$ avec $x_0 = \varphi$.
De plus, grâce à (5.27), la suite $(\dot{x}_n(\cdot))_n$ est bornée dans $\mathcal{L}^1([0,T],H)$, alors on peut extraire une sous suite qui converge faiblement dans $\mathcal{L}^1([0,T],H)$ vers l'application $v(\cdot)$. Alors, pour tout $t \in [0,T]$ on a

$$x(t) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n(t) = \varphi(0) + \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^t \dot{x}_n(s)ds = x_0 + \int_0^t v(s)ds,$$

donc $x(\cdot)$ est une fonction absolument continue avec $\dot{x}(t) = v(t)$ pour p.p $t \in [0,T]$.
Étape (3) : On montre que $x(\cdot)$ est une solution de $(\mathcal{SPP}_{F_R})$.
Maintenant, on montre que $x(t) \in C(t)$ $\forall t \in [0,T]$. D'après l'hypothèse (H_2) on a

$$d(x_n(\delta_n(t)), C(t)) \leq d(x_n(\delta_n(t)), C(\delta_n(t))) + \mid a_r(t) - a_r(\delta_n(t)) \mid,$$

par la définition de $\delta_n(t)$ on a $\mid \delta_n(t) - t \mid \leq \mu_n$ donc $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \delta_n(t) = t$ et par (5.27) on trouve

$$\begin{aligned}\| x_n(\delta_n(t)) - x(t) \| &\leq \| x_n(\delta_n(t)) - x_n(t) \| + \| x_n(t) - x(t) \| \\ &\leq \psi(t) \mid \delta_n(t) - t \mid + \| x_n(t) - x(t) \|,\end{aligned}$$

alors

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \| x_n(\delta_n(t)) - x(t) \| = 0,$$

i.e. $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} x_n(\delta_n(t)) = x(t)$, alors $d(x_n(\delta_n(t)), C(t)) \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, comme $C(t)$ est à valeurs fermées, on trouve $x(t) \in C(t)$.
on va montrer que $f(t) \in F(t, \tau(t)x)$ pour presque tout $t \in [0,T]$. En utilisant la technique dans [21], on obtient

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \| \tau(t_k^n)x_n - \tau(t)x_n \| = 0 \quad \text{dans } \mathcal{C}_0. \tag{5.32}$$

D'autre part, d'après la convergence uniforme de x_n vers x dans $[-R,T]$ on a $\tau(t)x_n$ converges uniformément vers $\tau(t)x$ sur $[-R,0]$, on conclut que

$$\tau(\delta_n(t))x_n \longrightarrow \tau(t)x \quad \text{dans } \mathcal{C}_0. \tag{5.33}$$

Comme $\| f_n(t) \| \leq \alpha$ pour tous $n \geq n_0$ et $t \in [0,T]$, alors $(f_n(\cdot))_n$ converge faiblement dans $\mathcal{L}^1([0,T],H)$ vers $f(\cdot)$, par le lemme de Mazur, il existe

$$\xi_n(\cdot) \in co\{f_q, \ q \geq n\} \tag{5.34}$$

tel que $(\xi_n(\cdot))_n$ converge fortement dans $\mathcal{L}^1([0,T],H)$ vers $f(\cdot)$. on suppose que $(\xi_n(\cdot))_n$ converge p.p vers $f(\cdot)$, alors il existe un ensemble de Lebesgue negligeable $S \subset [0,T]$ tel que pour tout $t \in [0,T] \backslash S$ on a $\xi_n(t) \longrightarrow f(t)$ fortement dans H et

$$f(t) \in \bigcap_n \overline{co}\{f_q, \ q \geq n\}.$$

par l'inclusion (5.28), pour tous $t \in [0,T] \backslash S$ et $y \in H$ on a

$$\langle y, f_n(t)\rangle \leq \sigma(y, F(\delta_n(t), \tau(\delta_n(t))x_n)). \tag{5.35}$$

D'autre part, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,T] \backslash S$ on trouve que

$$\langle y, f(t)\rangle \leq \sup_{q \geq n} \langle y, f_q(t)\rangle,$$

donc

$$\begin{aligned}\langle y, f(t)\rangle &\leq \inf_n \sup_{q \geq n} \langle y, f_q(t)\rangle \\ &\leq \inf_n \sup_{q \geq n} \sigma(y, F(\delta_q(t), \tau(\delta_q(t))x_q)),\end{aligned}$$

d'où

$$\langle y, f(t)\rangle \leq \limsup_{n \longrightarrow +\infty} \sigma(y, F(\delta_n(t), \tau(\delta_n(t))x_n)).$$

Comme $\sigma(y, F(\cdot,\cdot))$ est semi-continue supérieurement sur $[0,T] \times H$, par (5.33) on trouve, pour tout $t \in [0,T] \backslash S$ et pour tout $y \in H$

$$\langle y, f(t)\rangle \leq \sigma(y, F(t, \tau(t)x)),$$

alors

$$f(t) \in F(t, \tau(t)x) \quad \text{p.p } t \in [0,T].$$

Reste à montrer que $\dot{x}(t) + f(t) \in -N^P(C(t), x(t))$ p.p $t \in [0,T]$. On a

$$\dot{x}_n(t) + f_n(t) \in -N^P(C(\delta_n(t)), x_n(\delta_n(t)))$$

avec

$$\| \dot{x}_n(t) + f_n(t) \| \leq | \dot{a}_r(t) + 1 | (\alpha + 1) + 2\alpha = \phi(t). \tag{5.36}$$

Alors, par la Proposition 1.2.12 on a pour presque tout $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}\dot{x}_n(t) + f_n(t) &\in -N^P(C(\delta_n(t)), x_n(\delta_n(t))) \cap \phi(t)B \\ &= -\phi(t)\partial^P d_{C(\delta_n(t))}(x_n(\delta_n(t))).\end{aligned} \tag{5.37}$$

Comme $(\dot{x}_n + f_n)_n$ converges faiblement vers $(\dot{x} + f)$ dans $\mathcal{L}^1([0,T], H)$, par le lemme de Mazur, on obtient

$$\dot{x}(t) + f(t) \in \bigcap_n \overline{co}\{\dot{x}_k(t) + f_k(t), \quad k \geq n\} \quad p.p.t \in [0,T]. \tag{5.38}$$

On fixe $t \in [0,T]$ et pour tout $\xi \in H$, par (5.38) on a

$$\langle \dot{x}(t) + f(t), \xi \rangle \leq \inf_n \sup_{k \geq n} \langle \dot{x}_k(t) + f_k(t), \xi \rangle$$

par (5.37) et la Proposition 4.2.1, on obtient

$$\begin{aligned}\langle \dot{x}(t) + f(t), \xi \rangle &\leq \phi(t) \limsup_n \sigma(-\partial^P d_{C(\delta_n(t))}(x_n(\delta_n(t))), \xi) \\ &\leq \phi(t)\sigma(-\partial^P d_{C(t)}(x(t)), \xi).\end{aligned}$$

Comme l'ensemble $\partial^P d_{C(t)}(x(t))$ est à valeurs convexes fermées, on trouve

$$\dot{x}(t) + f(t) \in -\phi(t)\partial^P d_{C(t)}(x(t)) \text{ p.p } t \in [0,T].$$

On conclut que

$$\dot{x}(t) + f(t) \in -N^P(C(t), x(t)).$$

par conséquent

$$\begin{aligned}-\dot{x}(t) &\in N^P(\mathcal{C}(t), x(t)) + f(t) \text{ p.p } t \in [0,T]. \\ f(t) &\in F(t, \tau(t)x) \quad \text{p.p } t \in [0,T].\end{aligned}$$

$\square$

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. Affane, M. Aissous, M. F. Yarou, Existence results for sweeping process with almost convex perturbation, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie 61, No. 2, (2018), 119-134 .

[2] D. Affane and M. F. Yarou, Unbounded perturbation for a class of variational inequalities, Discussiones Mathematicae, Differential inclusions, control and optimization, 37, (2017), 83-99.

[3] L. Aicha Faik : Contribution à l'Analyse des Multifonctions et à l'étude de Quelques Problèmes d'évolution, Thèse de Doctorat (30/05/ 1995), univ. Monpellier-II.

[4] A. Bressan and V. Staicu : On Nonconvex Perturbations of Maximal Monotone Differential Inclusions, Set-Valued Analysis (1994), 415-437.

[5] H. Attouch, A. Damlamian, Strong solutions for parabolic variational inequalities, Nonlinear Anal 2 (1978), 329-353.

[6] J. P. Aubin, A. Cellina, Differential Inclusions, Set-Valued maps and viability theory, Springer-verlag, Berlin, Heidelberg, 1984.

[7] V. Barbu, Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces, Noordhoff, Leyden 1976.

[8] H. Benabdellah, A. Faik, Perturbations convexes et non convexes des équations d'évolution, Portugal, Math 53 :2 (1996), 187-208.

[9] H. Benabdellah, Existence of solutions to the nonconvex sweeping process, J. Differential Equations, 164, (2000), 286-295.

[10] S. Boudada and M. F. Yarou, Sweeping process with right uniformly lower semicontinuous mappings, Positivity, (2019).

[11] S. Boudada and M. F. Yarou, Unbounded perturbation for time dependent subdifferential operators, Nonlinear Dynamics and Systems Theory.

[12] M. Bounkhel, L. Thibault, Nonconvex sweeping process and prox-regularity in Hilbert space, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 6, (2005), 359-374.

[13] M. Bounkhel and M. Yarou, Existence results for first and second order nonconvex sweeping process with delay, Portugaliae Matematica, 61(2), (2004), 2007-2030.

[14] B. Brezis, Opérateurs Maximaux Monotones et Semigroupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert, North-Holland, Amsterdam, 1973.

[15] C. Castaing, Equation différentielle multivoque avec contrainte sur l'état dans les espaces de Banach, Sém. Anal. Convexe Montpellier, Exposé 13 (1978).

[16] C. Castaing, Quelques applications du Théorème de Banach -Dieudonné à l'intégration, Service de Mathématiques, Preprint No 67, Université de Montpelier (1969).

[17] C. Castaing, Une nouvelle extension du théorème de Dragoni-Scorza, C.R.Acad.Sc. Série A, Paris, t. 271, (1970), 396-398.

[18] C. Castaing, Version aléatoire du problème de rafle par un convexe, Sém. Anal. Convexe Montpellier, Exposé 1 (1974).

[19] C. Castaing, T.X. Duc Ha, M. Valadier, Evolution equations governed by the sweeping process, Set-ValuedAnal. 1 (1993), 109-139.

[20] C. Castaing, M. D. P. Monteiro Marques, Evolution problems associated with non convex closed moving sets with bounded variation, Portugal, Math 53-2 (1996), 73-78.

[21] C. Castaing and M. D. P. Monteiro Marques, Topological properties of solutions sets for sweeping processes with delay, Portugaliae Mathematica, Vol 54(4), (1997), 485-507.

[22] C. Castaing, M. D. P.M. Marques : BV Periodic Solutions of an Evolution Problem Associated with ContinuousMoving Convex Sets, Set-Valued Analysis, 3 (1995), 381-399.

[23] C. Castaing, A. G. Ibrahim, M. F. Yarou, Existence problems in second order evolution inclusions, Discretization and variational approch, Taiwanese J. Math 12-6 (2008), 1435-1447.

[24] C. Castaing, A. G. Ibrahim and M. Yarou, Some contributions to nonconvex sweeping process, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, Vol. 10, (2009), 1-20.

[25] C. Castaing and M. Valadier, Convex Analysis and Measurable Multifunctions, Lecture Note in Math., 580, Springer, Berlin, (1997).

[26] A. Cellina and M. V. Marchi : Non-Convex Perturbations of Maximal Monotone Differential Inclusions. Isr. journ. Math. 46, (1983), 1-11.

[27] F. Clarke, Optimization and Nonsmooth Analysis, Wiley, New York, (1983).

[28] F.H. Clarke, Y.S. Ledyaev, R.J. Stern, P.R. Wolenski, Nonsmooth Analysis and Control theory, Springer-Verlag, New York, (1998).

[29] F.H. Clarke, R.L. Stern et P.R. Wolenski, Proximal smoothness and the lower C2 property, J. Convex Anal. 2 (1/2) (1995), 117-144.

[30] G. Colombo and V. V. Goncharov, The sweeping processes without convexity, Set-Vaued Analysis, Vol 7 (4), (1999), 357-374.

[31] B. Cornet, Contributions a‘ la théorie mathe´matique des mécanismes dynamiques d'allocation de ressources, Thèse de doctorat d'état, Université Paris-Dauphine, (1981).

[32] B. Cornet, Existence of slow solutions for a class of differential inclusions, J. Math, Anal, Appl 96 (1983), 130-147.

[33] J. Dugundji, An extention of Tietze's Theorem, Pacific J. Math. 1 (1951), 353-367.

[34] J. F. Edmond, Problèmes d'évolution associés à des ensembles prox-réguliers. Inclusions et intégration de sous-différentiels, Thèse de doctorat, Université Montpellier II, France (2004).

[35] J. F. Edmond et L. Thibault, BV solutions of nonconvex sweeping process differential inclusion with perturbation, J. Differ. Equ 226 (2006), 135-179.

[36] Edmond,J.F., L. Thibault, Relaxation of an optimal control problem involving a perturbed sweeping process, Math. Program, Ser. B, 104, (2005), 347-373.

[37] Enzo Mitidieri, Ioan I. Vrabie : Differential Inclusions Governed by Nonconvex Perturbations of m-Accretive Operators, Differential and Integral Equations, V2, N^o4, October (1989), 525-531.

[38] L.C. Evans, Partial differential equations, volume 19 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, Second edition (2010).

[39] C. Henry, An existence theorem for a class of differential equations with multivalued right-hand side, J. Math. Anal. Appl. 41 (1973), 179-186.

[40] N. Kenmochi, Solvability of nonlinear evolution equations with time-dependent constraints and applications, Bull, Fac, Educ, Chiba Univ 30 (1981), 1-87.

[41] M. Kisielewicz Differential Inclusions and Optimal Control, PWN-Polish Scientific Publishers, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London.

[42] M. Kubo, Caracterisation of a class of evolution operators generated by time dependent subdifferential, Funkcial, Ekvac 32 (1989), 301-321.

[43] M. Kunze and M. D. P. Monteiro Marques, An introduction to Moreau's sweeping process, Lectures Notes in Physics, Springer-Verlag, Berlin, 551, (2000), 1-60.

[44] M. Kunze and M. D. P. M. Marques : B. V. Solutions to Evolution Problems with Time-Dependent Domains. Set valued Analysis, vol. 5, N^o1, p. 57-72.

[45] M. Moussaoui : Convex and Nonconvex Multivalued Perturbation of Moreau's Process : a Relaxation Result, prèspublication, Université d'Avignon, Novembre 1996

[46] J.-J. Moreau, Rafle par un convexe variable I, Sém. Anal. Convexe Montpellier, Exposé 15 (1971).

[47] J. J. Moreau, Evolution problems associated with a moving convex set in a Hilbert space, J. Differential Equations 26 (1977), 347-374.

[48] J. Noel, L. Thibault, Nonconvex Sweeping Process With a Moving Set Depending on the State, Vietnam Journal of Mathematics 42 (2014), 595-612.

[49] N. S. Papageorgiou, F. Papalini, On the structure of the solution set of evolution inclusions with time-dependent subdifferentials, Rend, Sem, Univ, Padova 65 (1997), 163-187.

[50] J. C. Peralba, Un problème d'évolution relatif à un opérateur sous différentiel dépendant du temps, Séminaire d'analyse convexe, Montpellier, exposé No. 6 (1972).

[51] R. A. Poliquin, R. T. Rockafellar and L. Thibault, Local differentiability of distance functions, Trans. Amer. Math. Soc. 352, (2000), 5231-5249.

[52] V. S. Pugachev et I. N. Sinitsyn, Lectures on Fonctional Analysis and Applications, World scientific, Singapore, (1999).

[53] S. Saïdi, M. F. Yarou, Set-valued perturbation for time dependent subdifferential operator, Topol, Methods Nonlinear Anal 46 (2015), 447-470.

[54] S. Saïdi, M. F. Yarou, On a time-dependent subdifferential evolution inclusion with Carathéodory perturbation, Annales Polonici Mathematici 114-2 (2015), 133-146.

[55] S. Saidi, L. Thibault, and M. Yarou, Relaxation of optimal control problems involving time dependent subdifferential operators, Numerical Functional Analysis and Optimization, 34(10), (2013), 1156-1186.

[56] L. Thibault, Moreau sweeping process with bounded truncated retraction, Journal of Convex Analysis 23, No. 4, (2016), 1051-1098.

[57] J. V. Tiel, Convex analysis. An introductory text, Wiley, New York 1984.

[58] S. A. Timoshin, Existence and relaxation for subdifferential inclusions with unbounded perturbation, Math. Program. Ser. A. 166 (2017), 65-85.

[59] A. A. Tolstonogov, Existence and relaxation of solutions for a subdifferntial inclusion with unbounded perturbation, J. Math, Anal, Appl 447 (2017), 269-288.

[60] A.A. Tolstonogov, Sweeping process with unbounded nonconvex perturbation, Nonlinear Analysis 108, (2014), 291-301.

[61] M. Valadier, Quelques problèmes d'entraînement unilatéral en dimension finie, Sém. Anal. Convexe Montpellier, Exposé 8 (1988).

[62] N. Yamazaki, Attractors of asymptotically periodic multivalued dynamical systems governed by time-dependent subdifferentials, EJDE 107 (2004), 1-22.