REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Superieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Seddik Benyahia de Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Physique

N° d'ordre :

Série :

Thèse

présentée pour obtenir le diplôme de

Doctorat en Sciences

Filière : Physique Spécialité : Physique théorique

par

Boubekeur Khantoul

Thème

Systèmes quantiques non-Hermitiens dépendants du temps

Soutenue le : 16 / 07 / 2018

Devant le Jury :

Président :	M. T. Meftah	Prof.	Univ. Ouargla
Rapporteur :	A. Bounames	Prof.	Univ. Jijel
Examinateurs :	M. Maamache	Prof.	Univ. Sétif 1
	A. Bouda	Prof.	Univ. Béjaia
	Y. Kasri	Prof.	Univ. Béjaia
	S. Houat	Prof.	Univ. Jijel
Invité	N. Ferkous	MC A.	Univ. Jijel

Table des matières

Remerciements

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à M. Abdelhafid Bounames, professeur à l'université de Jijel, qui fut pour moi un directeur de thèse attentif et disponible malgré ses nombreuses charges. Ses conseils et encouragements resteront un moteur pour mon travail de chercheur.

Je remercie aussi professeur Mustapha Maamache pour sa collaboration durant la préparation de cette thèse.

Je remercie également professeur Andrias Fring pour sa collaboration durant les trois séjours de courte durée que j'ai effectué à "City university London", et qui ont été couronnés par la publication de deux articles.

Je tiens aussi à remercier vivement les membres du jury Messieurs : Mohamed Tayeb Meftah, Professeur à l'université de Ouargla, Mustapha Maamache, Professeur à l'université de Setif 1, Ahmed Bouda, professeur à l'université de Béjaia, Salah Houat, Professeur à l'université de Jijel , Yazid Kasri, Maitre de conférences A à l'université de Béjaia et Noureddine Ferkous, Maitre de conférences A à l'université de Jijel, d'avoir accepté de juger ce travail

Mes remerciements vont aussi à ma famille et mes amis qui, avec cette question récurrente « quand est-ce que tu soutiens cette thèse ? » bien qu'angoissante en période de doute, m'ont permis de ne jamais dévier de mon objectif.

Boubekeur

Introduction générale

En mécanique quantique ordinaire, tout système physique doit satisfaire les conditions fondamentales suivantes : le Hamiltonien doit être hermitien pour que son spectre soit réel, les produits scalaires des vecteurs d'états dans l'espace de Hilbert doivent avoir une norme positive et l'opérateur d'évolution temporelle doit être unitaire. Cependant, le travail précurseur de Carl Bender et son étudiant Stefan Boettcher a révélé l'existence d'une classe d'Hamiltoniens non-hermitiens dont les valeurs propres sont réelles [1]. Ces Hamiltoniens sont invariants sous la transformation de la symétrie $\mathcal{PT}$, où $\mathcal{P}$ est l'opérateur parité et $\mathcal{T}$ est l'opérateur de renversement du temps. Cette découverte a permis d'étudier de nombreux phénomènes physiques jamais traités jusque-là.

En effet, dans l'article original de 1998, Carl Bender et Stefan Boettcher ont étudié l'Hamiltonien suivant [1]

$$H = p^2 - (ix)^N, \quad N \text{ réel.}$$

Dans le cas général, cet Hamiltonien est non-hermitien. Ils ont montré que pour $N \geq 2$, le spectre de H est réel et positif, et pour $1 < N < 2$, H possède un nombre fini de valeurs propres réelles positives et un nombre infini de paires de valeurs propres complexes conjuguées. Pour $N \leq 1$, H ne possède que des valeurs propres complexes. Ils ont aussi montré que la réalité du spectre de H est une conséquence de la non brisure de la symétrie $\mathcal{PT}$.

Durant les deux dernières décennies, plusieurs centaines d'articles ont été publiés et des conférences internationales ont été organisées annuellement sur le sujet, ce qui a permis de construire une théorie pour les Hamiltoniens non-hermitiens tout en respectant les axiomes de la mécanique quantique [2, 3, 4, 5].

En 2002, Ali Mostafazadeh a introduit la notion de la pseudo-hermicité qui est un concept plus générale que la $\mathcal{PT}$-symétrie. Il a montré que tout Hamiltonien de spectre réel est pseudo-hermitien, et en particulier tout Hamiltonien $\mathcal{PT}$-symétrique est pseudo-hermitien [6, 7, 8]. Alors, tout Hamiltonien pseudo-hermitien H vérifie la relation de la pseudo-hermicité

$$H = \eta^{-1} H^{\dagger} \eta, \tag{1}$$

où η est l'opérateur métrique. Le produit scalaire associé est indépendant du temps et défini en fonction de η par

$$\langle . \,|.\rangle_{\eta} = \langle .|\, \eta \,|.\rangle \,. \tag{2}$$

Il a aussi montré que tout Hamiltonien pseudo-hermitien H est relié à un Hamiltonien hermitien h par une transformation de similarité

$$H = \rho^{-1} h \rho,$$

et les états propres $|\psi_n\rangle$ de H, et $|\varphi_n\rangle$ de h sont liés par la relation

$$|\varphi_n\rangle = \rho \,|\psi_n\rangle \,, \tag{3}$$

où l'opérateur ρ est inversible et l'opérateur métrique $\eta = \rho^{+} \rho$ est un opérateur lineaire, inversible et hermitien.

Notons ici que dans le cadre de l'élaboration des théories quantiques à métriques indéfinies, plusieurs tentatives de généralisation de la mécanique quantique ont été proposées et parmi celles-ci, celle proposée par Dirac en 1942 et développée par Pauli [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17]. La métrique indéfinie peut introduire une norme négative qui est en contradiction avec la mécanique quantique.

D'un point de vue historique, les opérateurs non-hermitiens ont été utilisés pour décrire les phénomènes de désintégration radioactive ou de dissipation [18, 19, 20]. En 1956, Dyson a montré que les ondes de spin peuvent être décrites par un Hamiltonien non-hermitien [21] et en 1958, Herman Feshbach a introduit un potentiel effectif complexe pour décrire les processus de diffusion et les réactions dans les noyaux atomiques [2]. En 1992, Scholtz et ses collaborateurs ont montré comment construire une transformation de similarité liant les opérateurs hermitiens aux opérateurs non-hermitiens, ils les ont appelés opérateurs quasi-hermitiens [22]. Notons aussi que Bessis et Zinn-Justin ont montré numériquement que le spectre de l'Hamiltonien

$H = p^2 + x^2 + ix^3$ est réel [23]. D'autre part, les systèmes qui peuvent être décrits par des Hamiltoniens non-hermitiens $\mathcal{PT}$-symétriques sont les systèmes ouverts, l'optique quantique, les guides d'ondes, la matière condensée, la physique statistique hors équilibre et la théorie quantique des champs [2, 3, 4].

Cette thèse a pour objet l'étude des systèmes quantiques non-hermitiens dépendants explicitement du temps en utilisant la méthode des invariants. En effet, beaucoup de travaux ont été consacrés à l'étude des systèmes non hermitiens indépendants du temps. En revanche, les systèmes non hermitiens dépendants explicitement du temps sont beaucoup moins bien étudiés et jusqu'à présent aucun consensus n'a été atteint sur un certain nombre de questions centrales. Des difficultés conceptuelles ont été rencontrées concernant l'interprétation probabiliste et l'unitarité de l'opérateur d'évolution. Le traitement des Hamiltoniens non-hermitiens dépendants explicitement du temps avec des opérateurs métriques dépendants du temps est encore controversé et a été le centre d'un débat intéressant entre Ali Mostafazadeh et Miloslav Znojil [24, 25, 26, 27, 28, 29] .

Cette thèse est composée d'une introduction, de quatre chapitres et une conclusion. Dans le premier chapitre, les systèmes quantiques dépendants explicitement du temps sont présentés ainsi que les différentes méthodes de résolution de l'équation de Schrödinger associée. Dans le chapitre 2, j'ai présenté en détail la méthode des invariants de Lewis-Riesenfeld. Comme exemple illustratif, j'ai exposé le problème de l'oscillateur harmonique avec masse et fréquence dépendantes explicitement du temps [30].

Dans le chapitre 3, j'ai présenté la théorie des systèmes quantiques non-hermitiens et en particulier, j'ai introduit la $\mathcal{PT}$-symétrie, la $\mathcal{CPT}$-symétrie, la pseudo-hermicité et un exemple illustratif. Dans le chapitre 4, j'ai abordé les systèmes quantiques non-hermitiens dépendants explicitement du temps en adaptant la méthode des invariants pour ces systèmes. En effet, on sait que tout Hamiltonien dépendant du temps $H(t)$ admettant une solution $\Phi(x,t)$ qui est liée à la solution $\Psi(x,t)$ d'un Hamiltonien Hermitien $h(t)$ par la relation $\Phi(x,t) = \rho(t)\Psi(x,t)$ où $\rho(t)$ est un opérateur linéaire et inversible, alors l'Hamiltonien $H(t)$ vérifie la relation suivante

$$H^{\dagger}(t) = \eta(t) H(t) \eta^{-1}(t) + \dot{\eta}(t) \eta^{-1}(t),$$

où $\eta(t) = \rho^{\dagger}(t)\ \rho(t)$ est un opérateur Hermitien appelé opérateur métrique.

Par un calcul original, nous avons montré que tout Hamiltonien satisfaisant la relation précédente possède un invariant pseudo-Hermitien

$$I_{PH}(t) = \eta(t) I(t) \eta^{-1}(t) .$$

où $I(t)$ est l'invariant associé à l'Hamiltonien hermitien $h(t)$.

L'invariant $I_{PH}(t)$ admet des valeurs propres réelles et vérifie la relation de Von Neumann

$$\frac{\partial I_{PH}(t)}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}\left[H(t), I_{PH}(t)\right],$$

et la phase totale du système est réelle et donnée par

$$\hbar\dot{\epsilon} = \left\langle \phi^{PH}(x,t) \right| \eta(t) i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H(t) \left| \phi^{PH}(x,t) \right\rangle .$$

Comme applications des résultats obtenus, j'ai réussi à obtenir la solution du problème de l'oscillateur harmonique avec fréquence variable en présence d'un potentiel linéaire complexe [31]. Dans la deuxième application, j'ai résolu le problème d'une particule de masse variable dans un potentiel linéaire complexe dépendant du temps. Enfin, je termine cette thèse par une conclusion.

Chapitre 1

Systèmes quantiques dépendants du temps

1.1 Introduction

Les systèmes dépendants explicitement du temps est un sujet d'une grande importance en physique classique [32, 33] et quantique. Cette importance est dû au fait que ces systèmes sont souvent utilisés comme modèles exactement solubles dans différents domaines comme en physique moléculaire, chimie quantique et l'optique [34, 35, 36]. Il existe plusieurs méthodes pour obtenir les solutions exactes de l'équation de Schrödinger pour les systèmes dépendants explicitement du temps telles que la méthode des transformations unitaires [37, 38], la méthode des invariants de Lewis et Riesenfeld [30, 39, 40, 41], la méthode des intégrales de chemins de Feynman [42, 43, 44, 45] et le principe d'action de Schwinger [46].

1.2 Equation de Schrödinger stationnaire

L'équation d'évolution de la fonction d'onde $\psi(r,t)$ associée à l'état d'une particule non relativiste a été proposée par le physicien autrichien Erwin Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi(r,t)\right\rangle = H\left|\psi(r,t)\right\rangle, \tag{1.1}$$

où l'Hamiltonien H est un opérateur linéaire et hermitien.

Lorsque le système étudié est dans un état stationnaire, c'est-à-dire l'Hamiltonien de ce système ne dépend pas explicitement du temps, l'équation de Schrödinger peut s'écrire sous la forme d'une équation aux valeurs propres

$$H\left|\psi(r)\right\rangle = E\left|\psi(r)\right\rangle, \tag{1.2}$$

où E est l'énergie de la particule, et les vecteurs d'état $\{|\psi(r)\rangle\}$ décrivent les états physiques du système et appartiennent à l'espace de Hilbert.

D'autre part, l'Eq (1.1) est une équation différentielle du premier ordre par rapport au temps, donc il suffit de connaître l'état initial de la particule $\psi(r, t_0)$ pour déterminer $\psi(r, t)$ à l'instant $t > t_0$ à l'aide de l'opérateur d'évolution $U(t, t_0)$

$$\left|\psi(r,t)\right\rangle = U(t,t_0)\left|\psi(r,t_0)\right\rangle. \tag{1.3}$$

Dans le cas où l'Hamiltonien H du système est indépendant du temps, l'opérateur d'évolution s'écrit alors sous la forme suivante

$$U(t,t_0) = \exp\left[-\frac{iH}{\hbar}(t-t_0)\right], \tag{1.4}$$

cet opérateur est unitaire, c'est-à-dire il vérifie la relation

$$U(t,t_0)U^{\dagger}(t,t_0) = U^{\dagger}(t,t_0)U(t,t_0) = I, \tag{1.5}$$

où I est l'opérateur identité.

La substitution de l'Eq. (1.3) dans l'Eq. (1.1) permet de montrer que $U(t, t_0)$ satisfait l'équation

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0) = H\ U(t,t_0). \tag{1.6}$$

1.3 Equation de Schrödinger dépendante du temps

Si l'Hamiltonien H dépend explicitement du temps, alors l'équation de Schrödinger correspondante s'écrit

$$H(t)\left|\psi(r,t)\right\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi(r,t)\right\rangle, \tag{1.7}$$

Il existe deux classes de méthodes de résolution de cette équation : les méthodes exactes et les méthodes approximatives . Dans ce qui suit nous donnons un aperçu sur quelques méthodes.

1.4 Méthodes exactes

1.4.1 Opérateur d'évolution

L'opérateur d'évolution est un outil puissant pour résoudre l'équation de Schrödinger dépendante explicitement du temps et pour obtenir son expression, on intègre formellement l'équation (1.6) on trouve

$$U(t_0,t) = 1 - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt_1 H(t_1)\, U(t_0,t_1), \tag{1.8}$$

et par itération répétée un nombre infini de fois, l'opérateur d'évolution peut s'écrire sous la forme formelle suivante

$$U(t,t_0) = T\exp\left[\frac{-i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt' H(t')\right], \tag{1.9}$$

où T est l'opérateur du produit chronologique.

1.4.2 Méthode des invariants

La méthode des invariants a été introduite par Lewis et Riesenfeld en 1969 pour résoudre l'équation de Schrödinger des Hamiltoniens dépendants explicitement du temps [40]. Cette méthode sera exposée en détail dans le chapitre suivant.

1.4.3 Transformations unitaires

Les transformations unitaires sont utilisées pour résoudre l'équation de Schrödinger dépendante explicitement du temps. Ces transformations permettent de transformer le problème initial dépendant du temps en un problème indépendant du temps dont la recherche de sa solution est plus facile.

1.5 Méthodes approximatives

Les solutions analytiques de l'équation de Schrödinger dépendante explicitement du temps sont difficiles à trouver et le nombre de problèmes exactement soluble est très limité. Par conséquent, on utilise souvent les méthodes approximatives pour obtenir des solutions approchées. Parmi ces méthodes, on cite la théorie des perturbations dépendantes du temps, l'approximation adiabatique et la méthode variationnelle.

1.5.1 Théorie des perturbations dépendantes du temps

Dans la théorie des perturbations dépendantes du temps, l'Hamiltonien du système est divisé en deux parties [47]

$$H(t) = H_0 + \lambda V(t). \tag{1.10}$$

- La partie fondamentale H_0 est généralement indépendante du temps dont les valeurs propres et les états propres $\{E_n, |\phi_n\rangle, n = 0, 1, 2...\}$ sont connus.

- La partie $\lambda V(t)$ représente la perturbation dépendante du temps où λ est un paramètre sans dimension.

Les solutions $|\psi(t)\rangle$ de l'équation de Schrödinger pour l'Hamiltonien $H(t)$ peuvent s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire des états propres $|\phi_n\rangle$ de l'Hamiltonien H_0

$$|\phi_n(t)\rangle = \sum_n C_n(t)\, e^{\frac{-i}{\hbar}E_n t}\, |\phi_n\rangle. \tag{1.11}$$

En substituant cette dernière dans l'équation de Schrödinger, on obtient un système d'équations pour les coefficients $C_m(t)$:

$$i\hbar\dot{C}_m(t) = \sum_n e^{\frac{i}{\hbar}(E_m - E_n)t} \lambda V_{mn}(t)\, C_n(t)\,, \tag{1.12}$$

où

$$V_{mn} = \langle \phi_m | \, V(t) \, | \phi_n \rangle\,.$$

En intégrant ces équations on obtient

$$C_m(t) = C_m(0) - \frac{i}{\hbar}\int_0^t dt' \sum_m e^{\frac{i}{\hbar}(E_m - E_n)t'} \lambda V_{mn}(t')\, C_n(t')\,, \tag{1.13}$$

avec

$$C_m(0) = \delta_{mk},$$

où k est l'indice qui représente l'état fondamental $|\phi_k\rangle$.

Effectuons un développement perturbatif en écrivant les coefficients $C_n(t)$ en fonction de λ

$$C_n(t) = C_n^{(0)}(t) + \lambda C_n^{(1)}(t) + \lambda^2 C_n^{(2)}(t) + ... \tag{1.14}$$

et après substitution dans l'Eq. (1.14), on obtient les expressions des coefficients $C_m(t)$.

$$\begin{aligned}
C_n^{(0)}(t) &= \delta_{mk}, \\
\lambda C_n^{(1)}(t) &= \frac{1}{i\hbar}\int_0^t dt' e^{\frac{i}{\hbar}(E_m - E_k)t'} \lambda V_{mk}(t')\,, \\
\lambda^2 C_n^{(2)}(t) &= \frac{1}{(i\hbar)^2}\sum_n \int_0^t dt' e^{\frac{i}{\hbar}(E_m - E_n)t'} \lambda V_{mn}(t') \int_0^{t'} dt'' e^{\frac{i}{\hbar}(E_m - E_k)t''} \lambda V_{mk}(t'')\,,
\end{aligned}$$

et ainsi de suite.

En conclusion, cette méthode permet d'obtenir des solutions approximatives de l'équation de Schrödinger à partir des états stationnaires de l'Hamiltonien H_0.

1.5.2 Approximation adiabatique

Le théorème adiabatique a été énoncé pour la première fois en 1928 par Max Born et Vladimir Fock [48] pour décrire les systèmes quantiques dont l'Hamiltonien $H(X(t))$ dépend explicitement du temps à travers un ensemble de paramètres $\{X_i(t)\}$ qui varie assez lentement en fonction du temps. Dans ce cas, le théorème adiabatique stipule que l'état instantané $|n, X(t)\rangle$ reste, à tout instant t, état propre de l'Hamiltonien $H(X(t))$ avec la valeur propre $E_n(X(t))$:

$$H(X(t))\,|n, X(t)\rangle = E_n(X(t))\,|n, X(t)\rangle\,, \tag{1.15}$$

c'est à dire, au cours de l'évolution du système cette équation aux valeurs propres reste valable à chaque instant t.

Si le système a été préparé à $t = 0$ dans l'état $|\psi_n(0)\rangle = |n, X(0)\rangle$, d'après le théorème adiabatique ce dernier évolue vers un état $|\psi_n(t)\rangle$ qui, à tout instant t, reste état propre de $H(X(t))$, c'est à dire

$$|\psi_n(t)\rangle = \exp[i\phi_n(t)]\,|n, X(t)\rangle\,, \tag{1.16}$$

où $\phi_n(t)$ est une phase.

Si on impose à $|\psi_n(t)\rangle$ de satisfaire l'équation de Schrödinger, la phase $\phi_n(t)$ est donnée par [49]

$$\phi_n(t) = \phi_n^d(t) + \phi_n^g(t)\,,$$

où $\phi_n^d(t)$ est la phase dynamique

$$\phi_n^d(t) = \frac{1}{\hbar}\int_0^t E_n(t')\,dt, \tag{1.17}$$

et $\phi_n^g(t)$ est la phase géométrique

$$\phi_n^g(t) = i\int_{X(0)}^{X(t)} \langle n, X(t)\,|\nabla_X|\, n, X(t)\rangle\,dX, \tag{1.18}$$

qui dépend du chemin parcouru dans l'espace des paramètres. Si le chemin est fermé, la phase géométrique est appelée phase de Berry qui a un grand intérêt en physique théorique et en physique expérimentale [49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58]

$$\phi_n^g(t) = i \oint \langle n, X(t) | \nabla_X | n, X(t) \rangle \, dX. \tag{1.19}$$

Chapitre 2

Méthode des invariants

2.1 Introduction

La méthode des invariants de Lewis-Riesenfeld est un outil puissant pour chercher les solutions exactes de l'équation de Schrödinger pour les Hamiltoniens dépendants explicitement du temps [40]. Elle permet d'établir une relation entre les états propres de l'invariant et la solution de l'équation de Schrödinger, et transforme le problème de la résolution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps en un problème d'une équation aux valeurs propres de l'invariant.

La simplicité de la construction de l'invariant et la souplesse de l'utilisation de cette méthode ont permis d'obtenir les solutions de l'équation de Schrödinger dépendante du temps pour un nombre important de problèmes physiques [30, 39, 41, 59].

2.2 Exposé de la méthode

Soit un système quantique dont l'Hamiltonien $H(t)$ dépend explicitement du temps, il est utile de chercher les constantes du mouvement du système. Dans la théorie de Lewis-Riesenfeld, l'invariant $I(t)$ associé à $H(t)$ doit être hermitien

$$I(t) = I^{\dagger}(t), \tag{2.1}$$

et satisfait la relation de Von Neumann

$$\frac{d}{dt}I\left(t\right)=\frac{\partial I\left(t\right)}{\partial t}+\frac{1}{i\hbar}\left[I\left(t\right),H\left(t\right)\right]=0. \tag{2.2}$$

Dans le cas non relativiste, l'évolution au cours du temps du système est décrite par l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi(t)\right\rangle=H\left(t\right)\left|\psi(t)\right\rangle, \tag{2.3}$$

en appliquant la relation (2.2) sur l'etat $|\psi(t)\rangle$, nous obtenons

$$\left[i\hbar\frac{\partial I\left(t\right)}{\partial t}+I\left(t\right)H\left(t\right)\right]\left|\psi(t)\right\rangle=H\left(t\right)I\left(t\right)\left|\psi(t)\right\rangle, \tag{2.4}$$

et l'équation de Schrödinger permet d'écrire la dernière équation sous la forme

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(I\left(t\right)\left|\psi(t)\right\rangle\right)=H\left(t\right)\left(I\left(t\right)\left|\psi(t)\right\rangle\right), \tag{2.5}$$

ce qui signifie que si $|\psi(t)\rangle$ est une solution de l'équation de Schrödinger, alors $I\left(t\right)|\psi(t)\rangle$ est aussi une autre solution de cette équation.

Supposons que l'invariant $I\left(t\right)$ admet un ensemble complet d'états propres $\{|\phi_n\rangle\}$ dont les valeurs propres correspondantes sont données par l'équation aux valeurs propres suivante

$$I(t)\left|\phi_n\right\rangle=\lambda_n\left|\phi_n\right\rangle, \tag{2.6}$$

où $|\phi_n\rangle$ satisfait la relation d'orthogonalité

$$\left\langle\phi_m\right|\left.\phi_n\right\rangle=\delta_{mn}. \tag{2.7}$$

L'herméticité de l'invariant signifie que ses valeurs propres sont réelles, et on peut montrer qu'ils sont indépendants du temps.

En effet, la dérivée par rapport au temps de l'Eq. (2.6) donne

$$\frac{\partial I\left(t\right)}{\partial t}\left|\phi_n\right\rangle+I\left(t\right)\frac{\partial}{\partial t}\left|\phi_n\right\rangle=\frac{\partial\lambda_n}{\partial t}\left|\phi_n\right\rangle+\lambda_n\frac{\partial}{\partial t}\left|\phi_n\right\rangle, \tag{2.8}$$

ensuite appliquons la relation (2.2) sur l'état propre $|\phi_n\rangle$, et en utilisant l'équation (2.6) , on obtient

$$i\hbar\frac{\partial I\left(t\right)}{\partial t}\left|\phi_n\right\rangle + I\left(t\right)H\left(t\right)\left|\phi_n\right\rangle - \lambda_n H\left(t\right)\left|\phi_n\right\rangle = 0, \tag{2.9}$$

la projection de cette équation sur l'état $|\phi_m\rangle$ donne

$$i\hbar\left\langle\phi_m\right|\frac{\partial I\left(t\right)}{\partial t}\left|\phi_n\right\rangle + \left\langle\phi_m\right|I\left(t\right)H\left(t\right) - \lambda_n H\left(t\right)\left|\phi_n\right\rangle = 0,$$

ce qui implique

$$i\hbar\left\langle\phi_m\right|\frac{\partial I\left(t\right)}{\partial t}\left|\phi_n\right\rangle + \left(\lambda_m - \lambda_n\right)\left\langle\phi_m\right|H\left(t\right)\left|\phi_n\right\rangle = 0, \tag{2.10}$$

donc pour $m = n$ on a

$$\left\langle\phi_n\right|\frac{\partial I\left(t\right)}{\partial t}\left|\phi_n\right\rangle = 0. \tag{2.11}$$

D'autre part, la projection de l'équation (2.8) sur l'état $|\phi_m\rangle$ donne

$$i\hbar\left\langle\phi_m\right|\frac{\partial I\left(t\right)}{\partial t}\left|\phi_n\right\rangle + i\hbar\left(\lambda_m - \lambda_n\right)\left\langle\phi_m\right|\frac{\partial}{\partial t}\left|\phi_n\right\rangle = \frac{\partial\lambda_n}{\partial t}, \tag{2.12}$$

ce qui donne pour $m = n$

$$i\hbar\left\langle\phi_n\right|\frac{\partial I\left(t\right)}{\partial t}\left|\phi_n\right\rangle = \frac{\partial\lambda_n}{\partial t} = 0, \tag{2.13}$$

ce qui implique que les valeurs propres de l'invariant $I\left(t\right)$ sont indépendantes du temps.

Pour exprimer la relation entre les états propres de $I\left(t\right)$ et les solutions de l'équation Schrödinger, écrivons l'équation du mouvement pour l'état $|\phi_n\rangle$ en commençant par l'équation (2.8) et en utilisant l'équation (2.13), on aboutit à

$$\left(\lambda_n - I\left(t\right)\right)\frac{\partial}{\partial t}\left|\phi_n\right\rangle = \frac{\partial I\left(t\right)}{\partial t}\left|\phi_n\right\rangle. \tag{2.14}$$

En prenant la projection sur l'état $\langle\phi_m|$ et en utilisant l'équation (2.10), et le fait que λ_n est indépendant du temps, on obtient

$$i\hbar\left(\lambda_m - \lambda_n\right)\left\langle\phi_m\right|\frac{\partial}{\partial t}\left|\phi_n\right\rangle = \left(\lambda_m - \lambda_n\right)\left\langle\phi_m\right|H\left(t\right)\left|\phi_n\right\rangle, \tag{2.15}$$

pour $\lambda_m \neq \lambda_n$ on déduit

$$i\hbar\left\langle\phi_m\right|\frac{\partial}{\partial t}\left|\phi_n\right\rangle = \left\langle\phi_m\right|H\left(t\right)\left|\phi_n\right\rangle. \tag{2.16}$$

Comme $\langle\phi_m|$ est arbitraire, alors on déduit que $|\phi_n\rangle$ est solution de l'équation de Schrödinger.

On peut choisir des vecteurs propres $|\phi_n\rangle$ qui satisfont l'équation de Schrödinger en les multipliant par une phase temporelle appropriée

$$|\phi_n\rangle_\epsilon = \exp\left[i\epsilon_n\left(t\right)\right]|\phi_n\rangle\,, \tag{2.17}$$

où $\epsilon_n(t)$ est une fonction arbitraire réelle dépendante du temps. Il est claire que les $|\phi_n\rangle_\epsilon$ sont des états propres orthonormés de $I(t)$ avec la même valeur propre λ_n.

Les états $|\phi_n\rangle_\epsilon$ sont aussi solutions de l'équation de Schrödinger, alors l'équation (2.16) est vérifiée pour $n = m$ et nous avons donc

$$\hbar\frac{d\epsilon_n\left(t\right)}{dt} = \langle\phi_n|\, i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H\left(t\right)|\phi_n\rangle\,. \tag{2.18}$$

La solution générale $|\psi(t)\rangle$ de l'équation de Schrödinger est une combinaison linéaire des états $|\phi_n\rangle$

$$|\psi\left(t\right)\rangle = \sum_n C_n \exp\left[i\epsilon_n\left(t\right)\right]|\phi_n\rangle\,, \tag{2.19}$$

où C_n sont des coefficients de normalisation indépendants du temps, et à l'instant $t = 0$ correspondent à $|\psi(0)\rangle$ via

$$|\psi\left(0\right)\rangle = \sum_n C_n \exp\left[i\epsilon_n\left(t\right)\right]|\phi_n\left(0\right)\rangle\,. \tag{2.20}$$

2.3 Recherche de l'invariant

L'une des méthodes les plus simple pour déterminer l'invariant dynamique est l'utilisation de l'algèbre de Lie. Supposons que l'Hamiltonien $H(t)$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des générateurs $(T_1, T_2, .., T_n)$ d'une algèbre de Lie fermée sous la forme

$$H\left(t\right) = \sum_{l=1}^{m}\theta_l\left(t\right)T_l. \tag{2.21}$$

En cherchant l'invariant $I(t)$ qui se décompose complètement sur cette algèbre. Choisissons alors $I(t)$ sous la forme

$$I(t) = \sum_{l=1}^{n} \beta_l(t) T_l. \tag{2.22}$$

Substituons cette dernière relation dans l'Eq. (2.2), alors les $\beta_l(t)$ vérifient un système d'équations différentielles du premier ordre par rapport au temps

$$i\dot{\beta}_l(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k(t) \beta_l(t), \qquad l, k \in \{1, 2....n\}, \tag{2.23}$$

où les $C_k(t)$ sont obtenus à partir de la relation de commutation suivante

$$[H(t), T_l] = \sum_{k=1}^{n} C_k(t) T_k. \tag{2.24}$$

Si on arrive à déterminer les coefficients $\beta_l(t)$, on peut alors déterminer la forme de l'invariant $I(t)$.

2.4 Oscillateur harmonique avec masse et fréquence variables

L'étude des oscillateurs harmoniques à masses dépendantes du temps [60, 61], de fréquences dépendantes du temps [40, 62, 63, 64, 65, 66, 67], ou les deux simultanément [30, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75] ont suscité un grand intérêt en physique quantique. Ces systèmes ne sont pas fermés, c'est à dire, une perturbation externe peut modifier la fréquence ou l'amplitude de l'oscillateur harmonique. Le problème de l'oscillateur harmonique avec une masse dépendante du temps est lié à l'oscillateur amorti, et parmi les applications récentes des oscillateurs harmoniques dépendants du temps est leur utilisation dans la détection des ondes gravitationnelles [76, 77, 78].

La méthode des invariants de Lewis-Reisenfeld est bien adaptée pour l'étude des oscillateurs harmoniques dépendants du temps, et on peut trouver les états quantiques exacts de ces oscillateurs pour différents cas particuliers [40, 64, 65].

Considérons maintenant le cas de l'oscillateur harmonique avec masse et fréquence dépendantes du temps [30], son Hamiltonien est donné par

$$H(t) = \frac{p^2}{2M(t)} + \frac{1}{2}M(t)\,\omega^2(t)\,q^2, \tag{2.25}$$

où la coordonnée canonique $q(t)$ et son moment conjugué $p(t)$ vérifient la relation de commutation

$$[q, p] = i\hbar,$$

et $M(t)$ et $\omega(t)$ sont respectivement la masse et la fréquence de l'oscillateur qui sont des fonctions réelles arbitraires du temps.

Les équations canoniques du mouvement sont

$$\dot{q} = \frac{1}{i\hbar}[q, H(t)] = \frac{1}{M(t)}p, \tag{2.26}$$

et

$$\dot{p} = \frac{1}{i\hbar}[p, H(t)] = -M(t)\,\omega^2(t)\,q. \tag{2.27}$$

En utilisant l'expression (2.25), nous obtenons l'équation du mouvement

$$\ddot{q} + \gamma(t)\,\dot{q} + \omega^2(t)\,q = 0, \tag{2.28}$$

avec

$$\gamma(t) = \frac{d}{dt}[\ln M(t)]. \tag{2.29}$$

Pour construire un invariant associé à l'Hamiltonien (2.25), on utilise la base hermitienne de l'algèbre de Lie suivante [75, 79]

$$T_1 = \frac{1}{2}p^2, \quad T_2 = \frac{1}{2}\{p, q\}, \quad T_3 = \frac{1}{2}x^2, \tag{2.30}$$

avec les relations de commutation

$$[T_1, T_2] = -2i\hbar T_1, \tag{2.31}$$

$$[T_1, T_3] = -i\hbar T_2, \tag{2.32}$$

et

$$[T_2, T_3] = -2i\hbar T_3, \tag{2.33}$$

l'Hamiltonien (2.25) s'écrit dans cette base sous la forme

$$H(t) = \frac{1}{M(t)} T_1 + M(t)\,\omega^2(t)\,T_3. \tag{2.34}$$

Maintenant, cherchons un invariant sous la forme

$$I(t) = \sum_{l=1}^{3} \beta_l(t)\,T_l. \tag{2.35}$$

Par substitution des Eqs. (2.34) et (2.35) dans l'Eq (2.2), et comparons les deux membres de cette équation, on obtient alors un système d'équations linéaires de premier ordre pour les inconnues $\beta_l(t)$

$$\dot{\beta}_1(t) = -\frac{2}{M(t)}\beta_2(t), \tag{2.36}$$

$$\dot{\beta}_2(t) = M(t)\,\omega^2(t)\,\beta_1(t) - \frac{1}{M(t)}\beta_3(t), \tag{2.37}$$

$$\dot{\beta}_3(t) = 2M(t)\,\omega^2(t)\,\beta_1(t). \tag{2.38}$$

Pour simplifier ce système d'équations, posons $\beta_1(t) = \rho^2(t)$ où $\rho(t)$ vérifie l'équation auxiliaire suivante

$$\ddot{\rho}(t) + \gamma(t)\,\dot{\rho}(t) + \rho(t)\,\omega^2(t) = \frac{1}{M(t)\,\rho^3(t)}. \tag{2.39}$$

Le choix de $\beta_1(t)$ nous permet de déterminer $\beta_2(t)$ et $\beta_3(t)$ comme suit

$$\beta_2(t) = -M(t)\,\dot{\rho}(t)\,\rho(t),$$

$$\beta_3(t) = \frac{1}{\rho^2(t)}\left(1 + M^2(t)\,\rho^2(t)\,\dot{\rho}^2(t)\right). \tag{2.40}$$

Ainsi, l'invariant s'écrit en fonction de $\rho(t)$ sous la forme

$$I(t) = \rho^2(t)\,T_1 - M(t)\,\dot{\rho}(t)\,\rho(t)\,T_2 + \frac{1}{\rho^2(t)}\left(1 + M^2(t)\,\rho^2(t)\,\dot{\rho}^2(t)\right)T_3. \tag{2.41}$$

D'autre part, on sait que les fonctions propres $|\varphi_n(q,t)\rangle$ de $I(t)$ forment un ensemble orthonormé complet

$$I(t)\,|\varphi_n(q,t)\rangle = \lambda_n\,|\varphi_n(q,t)\rangle\,, \tag{2.42}$$

et

$$\langle\varphi_n(q,t)|\,\varphi_{n'}(q,t)\rangle = \delta_{nn'}. \tag{2.43}$$

Pour obtenir les solutions exactes de l'équation de Schrödinger pour l'oscillateur harmonique dépendant du temps (2.25), nous procédons comme suit : considérons la transformation unitaire

$$\varphi_n'(q,t) = U\varphi_n(q,t)\,, \tag{2.44}$$

avec

$$U = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\frac{M(t)\,\dot\rho(t)}{2\rho(t)}q^2\right]. \tag{2.45}$$

L'operateur U commute avec l'opérateur q et transforme l'opérateur p de la manière suivante

$$UpU^\dagger = p + \frac{M(t)\,\dot\rho(t)}{\rho(t)}q, \qquad UqU^\dagger = q. \tag{2.46}$$

La substitution de l'Eq (2.46) dans la relation (2.41) donne

$$I'(t) = UI(t)\,U^+ = \frac{-\hbar^2}{2}\frac{\rho^2(t)\,\partial^2}{\partial^2 q} + \frac{1}{2}\frac{q^2}{\rho^2(t)}. \tag{2.47}$$

Sous cette transformation unitaire l'équation aux valeurs propres (2.42) devient

$$I'(t)\varphi_n'(q,t) = \lambda_n\varphi_n'(q,t)\,. \tag{2.48}$$

En définissant la nouvelle variable $\sigma = \frac{q}{\rho}$ qui ne dépend pas explicitement du temps, la dernière équation s'écrit en fonction de σ sous la forme suivante

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial^2\sigma} + \frac{\sigma^2}{2}\right]\phi_n(\sigma) = \lambda_n\phi_n(\sigma)\,, \tag{2.49}$$

avec

$$\varphi_n'(q,t) = \rho^{-\frac{1}{2}}(t)\,\phi_n(\sigma) = \rho^{-\frac{1}{2}}(t)\,\phi_n\left(\frac{q}{\rho}\right). \tag{2.50}$$

Le facteur $\rho^{-\frac{1}{2}}(t)$ est introduit dans l'équation (2.50) pour assurer la normalisation de $\varphi_n'(q,t)$

$$\int \varphi_n^{*\prime}(q,t)\,\varphi_n'(q,t)\,dq = \int \phi_n(\sigma)\,\phi_n(\sigma)\,d\sigma = 1. \tag{2.51}$$

L'Eq. (2.49) est une équation de Schrödinger de l'oscillateur harmonique indépendant du temps, où sa solution est donnée par

$$\phi_n(\sigma) = \left[\frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi\hbar}}\right]^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{\sigma^2}{2\hbar}\right] \mathcal{H}_n\left[\left(\frac{1}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\sigma\right], \tag{2.52}$$

avec $\mathcal{H}_n$ est le polynôme d'Hermite d'ordre n.

Les valeurs propres de l'invariant $I(t)$ sont données par

$$\lambda_n = \hbar\left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{2.53}$$

Ainsi, en utilisant les Eqs. (2.44), (2.45) et (2.50) nous trouvons les fonctions propres de l'invariant $I(t)$

$$\varphi_n(q,t) = \left[\frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi\hbar}\rho}\right]^{\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{iM(t)}{2\hbar}\left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{i}{M(t)\rho^2}\right)q^2\right] \mathcal{H}_n\left[\left(\frac{1}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{q}{\rho}\right]. \tag{2.54}$$

Pour trouver la phase $\epsilon_n(t)$, appliquons l'opérateur identité $I = U^\dagger U$ sur la partie droite de l'Eq. (2.18), on trouve

$$\hbar\dot{\epsilon}_n(t) = \langle\varphi_n'|\,U\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H(t)\right]U^\dagger\,|\varphi_n'\rangle. \tag{2.55}$$

La substitution de la relation (2.46) dans la dernière équation donne

$$\hbar\dot{\epsilon}_n(t) = \langle\varphi_n'|\,i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{M}\dot{\rho} + M\ddot{\rho}}{\rho}\right)q^2 - \frac{p^2}{2M} - \frac{\dot{\rho}}{\rho}qp + i\hbar\frac{\dot{\rho}}{\rho} - \frac{M\omega^2}{2}q^2\,|\varphi_n'\rangle. \tag{2.56}$$

A partir de l'équation auxiliaire nous avons

$$\omega^2(t) = \frac{1}{M^2\rho^4} - \frac{\dot{M}}{M}\frac{\dot{\rho}}{\rho} - \frac{\ddot{\rho}}{\rho}. \tag{2.57}$$

En substituant cette dernière relation dans (2.56) on trouve

$$\hbar\dot{\epsilon}_n(t) = \langle\varphi_n'|\, i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + i\hbar\frac{\dot{\rho}}{\rho}q\frac{\partial}{\partial q} + i\hbar\frac{\dot{\rho}}{2\rho} - \frac{I'(t)}{M(t)\rho^2}\,|\varphi_n'\rangle\,, \tag{2.58}$$

en substituant l'équation (2.50) dans équation (2.58), on obtient

$$\hbar\dot{\epsilon}_n(t) = \langle\phi_n(\sigma)|\, i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + i\hbar\frac{\dot{\rho}}{\rho}q\frac{\partial}{\partial q} + - \frac{I'(t)}{M(t)\rho^2}\,|\phi_n(\sigma)\rangle\,. \tag{2.59}$$

Ensuite, pour éliminer le terme $i\hbar\frac{\dot{\rho}}{\rho}q\frac{\partial}{\partial q}$ utilisons le changement de variable $\sigma = \frac{q}{\rho}$ qui donne

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial\sigma}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\sigma} = -q\frac{\dot{\rho}}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\sigma}, \tag{2.60}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial q} = \frac{\partial\sigma}{\partial q}\frac{\partial}{\partial\sigma} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\sigma}, \tag{2.61}$$

en substituant les Eqs. (2.60) et (2.61) dans l'équation (2.59), on obtient

$$\hbar\dot{\epsilon}_n(t) = \langle\phi_n| - \frac{I'(t)}{M(t)\rho^2}\,|\phi_n\rangle\,. \tag{2.62}$$

En utilisant les équations (2.48) et (2.53) et la condition de normalisation de ϕ_n on trouve l'expression de la phase

$$\epsilon_n(t) = -\left(n + \frac{1}{2}\right)\int_0^t \frac{1}{M(t')\rho^2}dt'. \tag{2.63}$$

En utilisant Eqs. (2.19) et (2.54) on trouve l'expression finale de la solution de l'équation de Schrödinger de l'Hamiltonien (2.25)

$$\psi_n(q,t) = \left[\frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi\hbar}\rho}\right]^{\frac{1}{2}} \exp\left[i\epsilon_n(t)\right]\exp\left[\frac{iM(t)}{2\hbar}\left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{i}{M(t)\rho^2}\right)q^2\right]\mathcal{H}_n\left[\left(\frac{1}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{q}{\rho}\right]. \tag{2.64}$$

Chapitre 3

Systèmes quantiques non-Hermitiens

Dans ce chapitre, nous exposons en premier lieu un rappel sur les symétries discrètes en mécanique quantique, puis la mécanique quantique $\mathcal{PT}$-symétrique et nous terminons par la théorie quantique pseudo-hermitienne. Signalons que nous avons utilisé les références suivantes dans la rédaction de ce chapitre [3, 6, 7, 80].

3.1 Symétries discrètes en mécanique quantique

Lorsque un système est invariant sous l'effet d'une transformation (translation, rotation...), cela implique que le système possède une symétrie. Ces transformations forment une structure de groupe $\mathcal{G}$ associé à cette symétrie [81].

Soit $\mathcal{U}$ un opérateur de l'espace de Hilbert correspondant à une transformation de symétrie, ψ et ψ' sont les fonctions d'onde décrivant le système avant et après la transformation tel que

$$\psi' = \mathcal{U}\psi.$$

Si la valeur moyenne d'un operateur A est invariante par rapport à cette transformation

$$\langle \psi' | A | \varphi' \rangle = \left\langle \psi \left| \mathcal{U}^{\dagger} A \mathcal{U} \right| \varphi \right\rangle = \langle \psi | A | \varphi \rangle ,$$

alors A commute avec $\mathcal{U}$

$$[A, \mathcal{U}] = 0,$$

et l'opérateur $\mathcal{U}$ est linéaire et unitaire

$$\mathcal{U}^\dagger = \mathcal{U}^{-1} \text{ et } \mathcal{U}(\lambda\psi) = \lambda\mathcal{U}(\psi),$$

ou antiunitaire (anti-linéaire et unitaire)

$$\mathcal{U}^\dagger = \mathcal{U}^{-1} \text{ et } \mathcal{U}(\lambda\psi) = \lambda^*\mathcal{U}(\psi).$$

Si la dynamique du système décrite par l'Hamiltonien H, est invariante sous l'action de cette transformation alors H commute avec $\mathcal{U}$

$$[H, \mathcal{U}] = 0,$$

et comme $\mathcal{U}^\dagger = \mathcal{U}^{-1}$ alors

$$H = \mathcal{U}H\mathcal{U}^\dagger.$$

Dans ce qui suit, nous introduisons les symétries discrètes : la parité $\mathcal{P}$, le renversement du temps $\mathcal{T}$ et la conjugaison de charge $\mathcal{C}$

3.1.1 Opérateur de parité

La parité $\mathcal{P}$ est une transformation qui correspond à une réflexion dans l'espace, c'est à dire, une symétrie par rapport à l'origine des coordonnées [81]

$$x \rightarrow x' = -x,$$

ceci implique que l'impulsion se transforme de la manière suivante

$$p \rightarrow p' = m\frac{dx'}{dt'} = -m\frac{dx}{dt} = -p,$$

et les fonctions d'onde se transforment comme suit

$$\psi\left(x,t\right)\rightarrow\psi'\left(x,t\right)=\mathcal{P}\psi\left(x,t\right)=\psi\left(-x,t\right).$$

Les opérateurs position et impulsion se transforment sous l'action de l'opérateur parité comme suit

$$\mathcal{P}\hat{x}\mathcal{P}=-\hat{x},\quad \mathcal{P}\hat{p}\mathcal{P}=-\hat{p}.$$

Si $\psi\left(x,t\right)$ est une fonction propre de $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P}\psi\left(x,t\right)=\lambda\psi\left(x,t\right),$$

après une deuxième réflexion de l'espace, la fonction d'onde reste inchangée ($\mathcal{P}^2=\mathcal{I}$)

$$\mathcal{P}^2\psi\left(x,t\right)=\lambda^2\psi\left(x,t\right)=\psi\left(x,t\right),$$

alors les valeurs propres de $\mathcal{P}$ peuvent prendre les valeurs suivantes

$$\begin{cases}\lambda=1, & \text{si } \psi\left(x,t\right) \text{ est paire,}\\ \lambda=-1, & \text{si } \psi\left(x,t\right) \text{ est impaire,}\end{cases}$$

comme $\mathcal{P}^2=\mathcal{I}$, alors

$$\mathcal{P}^{\dagger}=\mathcal{P}^{-1}.$$

Les relations de commutation canoniques sont préservées par cette transformation si et seulement si l'opérateur $\mathcal{P}$ est linéaire.

Notons que si un système quantique est invariant par la parité $\mathcal{P}$ alors l'Hamiltonien associé H commute avec $\mathcal{P}$

$$\left[H,\mathcal{P}\right]=0.$$

3.1.2 Opérateur de renversement du temps

Comme en mécanique classique, l'opération renversement du temps $\mathcal{T}$ change le signe du temps et laisse la position x inchangée

$$t \to t' = -t, \quad x \to x' = x,$$

ceci implique que l'impulsion se transforme de la manière

$$p \to p' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{-dx}{dt} = -p.$$

Les opérateurs position et impulsion se transforment sous l'action de l'opérateur $\mathcal{T}$ comme suit

$$\mathcal{T}\hat{x}\mathcal{T} = \hat{x}, \quad \mathcal{T}\hat{p}\mathcal{T} = -\hat{p}, \tag{3.1}$$

et conduit à

$$\mathcal{T}\left[\hat{x}, \hat{p}\right]\mathcal{T} = \left[\hat{x}, -\hat{p}\right] = -i\hbar,$$

cette relation est compatible avec la relation de commutation canonique si et seulement si $\mathcal{T}$ est antilinéaire :

$$\mathcal{T}i\mathcal{T} = -i. \tag{3.2}$$

Enfin, on signale que Wigner a été le premier à démontrer les propriétés et les conséquences de la symétrie de renversement du temps en mécanique quantique. Il a supposé que l'opérateur de renversement du temps est antilinéaire pour obtenir l'invariance de l'équation de Schrödinger [82].

3.1.3 Opérateur de conjugaison de charge

En physique des particules et en théorie quantique des champs, l'opérateur de conjugaison de charge $\mathcal{C}$ transforme la particule en son antiparticule de masse et de spin identiques, ayant la même quantité de mouvement et en changeant le signe de tous les autres nombres quantiques additifs (charge électrique, nombre baryonique, étrangeté, nombres lépontiques ...) [83].

L'opérateur conjugaison de charge vérifie les propriétés suivantes

$$\mathcal{C}^2 = 1, \quad \mathcal{C}^\dagger \mathcal{C} =1,$$

ce qui implique que l'opérateur $\mathcal{C}$ est unitaire et hermitien

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^{-1}= \mathcal{C}^\dagger.$$

Si l'Hamiltonien du système H est invariant sous la transformation de conjugaison de charge $\mathcal{C}$, alors

$$[H, \mathcal{C}] = 0,$$

et si une particule est identique à sa propre antiparticule, c'est à dire, tous les nombres quantiques qui se transforment sus l'action de $\mathcal{C}$ sont nuls, alors le vecteur d'état de H est un état propre de $\mathcal{C}$ avec les valeurs propres ± 1 [83].

En mécanique quantique conventionnelle, l'opérateur $\mathcal{C}$ n'existe pas en tant qu'entité distincte, par contre il existe en mécanique quantique $\mathcal{PT}$-symétrique, où on utilise la notation $\mathcal{C}$ car il a presque les mêmes propriétés que l'opérateur de conjugaison de charge. L'opérateur $\mathcal{C}$ représente l'observable qui décrit la mesure de la signature de la norme $\mathcal{PT}$ [84].

3.2 Mécanique quantique $\mathcal{PT}$-symétrique

En mécanique quantique ordinaire, l'Hamiltonien doit être hermitien pour que ses valeurs propres soient réelles. La théorie quantique $\mathcal{PT}$-symétrique introduite par Carl Bender et Stefan Boettcher en 1998 nous a offert une large classe d'Hamiltoniens non-hermitiens qui possèdent des spectres réels [1, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92]. Ces Hamiltoniens sont invariants sous la transformation de la symétrie $\mathcal{PT}$. La mécanique quantique $\mathcal{PT}$-symétrique a permis aux physiciens d'étudier de nombreux phénomènes dans différents domaines de la physique.

3.2.1 Propriétés des Hamiltoniens $\mathcal{PT}$-symétriques

Un Hamiltonien H est dit $\mathcal{PT}$-symétrique s'il satisfait la relation suivante [1, 85, 86, 87, 93]

$$H = (\mathcal{PT})\, H\, (\mathcal{PT})\,, \tag{3.3}$$

ce qui signifie que H est invariant sous la transformation $\mathcal{PT}$, c'est à dire il commute avec l'opérateur $\mathcal{PT}$

$$[H, \mathcal{PT}] = 0. \tag{3.4}$$

Dans le cas général, H peut s'écrire sous la forme

$$H = p^2 + V\,(x)\,, \tag{3.5}$$

où le potentiel $V\,(x)$ peut être complexe.

L'action de l'opérateur $\mathcal{PT}$ sur les opérateurs position $\hat{x}$ et impulsion $\hat{p}$ est donnée par

$$\mathcal{PT}\hat{p}\mathcal{PT} = \hat{p}, \qquad \mathcal{PT}\hat{x}\mathcal{PT} = -\hat{x}, \tag{3.6}$$

et comme $\mathcal{PT}$ est un opérateur antilinéaire alors

$$\mathcal{PT}i\mathcal{PT} = -i. \tag{3.7}$$

Par conséquent, l'action de l'opérateur $\mathcal{PT}$ sur $V(x)$ est

$$\mathcal{PT}V\,(x)\,\mathcal{PT} = V^*\,(-x)\,, \tag{3.8}$$

c'est à dire

$$V\,(-x) = V^*\,(x)\,, \tag{3.9}$$

où x est réelle.

Dans le cas où $V(x)$ est un potentiel réel, c'est à dire que l'Hamiltonien H est hermitien, alors la condition de la $\mathcal{PT}$-symétrie est équivalente à

$$V\,(-x) = V\,(x)\,, \tag{3.10}$$

ce qui veut dire que $V(x)$ est une fonction paire de x.

La relation de commutation (3.4) entre l'Hamiltonien et l'operateur $\mathcal{PT}$ n'assure pas l'existence d'un ensemble d'états propres $\{\psi_n, n = 0, 1, 2...\}$ communs à H et $\mathcal{PT}$ à cause de la non-linéarité de l'operateur $\mathcal{PT}$.

Si on suppose que cet ensemble d'états propres communs à H et $\mathcal{PT}$ existe, on dit alors que la symétrie $\mathcal{PT}$ n'est pas brisée. Dans ce cas, on peut facilement montrer que le spectre de H est réel.

En effet, soit ψ_n une fonction propre de l'opérateur $\mathcal{PT}$

$$\mathcal{PT}\psi_n = \lambda_n \psi_n, \tag{3.11}$$

où la valeur propre λ_n est à priori complexe.

La propriété $(\mathcal{PT})^2 = 1$, nous permet de montrer que $|\lambda_n|^2 = 1$, alors λ_n est un facteur de phase qui peut s'écrire $\lambda_n = e^{i\alpha_n}$ où α_n est réel, et l'état ψ_n peut être remplacé par l'état $e^{i\alpha_n}\psi_n$ de sorte que

$$\mathcal{PT}\psi_n = e^{i\alpha_n}\psi_n. \tag{3.12}$$

Comme l'état ψ_n est aussi une fonction propre de H

$$H\psi_n = E_n \psi_n, \tag{3.13}$$

où E_n est à priori complexe.

Alors en utilisant les Eqs. (3.4) et (3.13) , on a

$$H\mathcal{PT}\psi_n = E_n \mathcal{PT}\psi_n, \tag{3.14}$$

et en multipliant par $\mathcal{PT}$ les deux membres de cette équation on trouve

$$\mathcal{PT}H\mathcal{PT}\psi_n = \mathcal{PT}E_n\mathcal{PT}\psi_n = E_n^*\psi_n. \tag{3.15}$$

Et en utilisant la propriété (3.3) et l'Eq (3.13) on déduit que

$$E_n^* = E_n, \tag{3.16}$$

alors les valeurs propres de H sont réelles.

3.2.2 Produit scalaire $\mathcal{PT}$-symétrique

On sait qu'en mécanique quantique, le produit scalaire est défini positif et indépendant de la phase globale du système. Dans le but de définir le produit scalaire associé aux Hamiltoniens $\mathcal{PT}$-symétriques, Carl Bender a proposé la définition suivante du produit scalaire $\mathcal{PT}$-symétrique pour deux fonctions arbitraires [1, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91]

$$(\phi(x), \psi(x))_{\mathcal{PT}} = \int_c dx \, [\mathcal{PT}\phi(x)] \, \psi(x), \tag{3.17}$$

où l'action de l'opérateur $\mathcal{PT}$ sur une fonction complexe arbitraire est donnée par

$$\mathcal{PT}\phi(x) = \phi^*(-x), \tag{3.18}$$

et c est un conteur dans le plan complexe.

Alors, le produit scalaire des fonctions propres $\psi_n(x)$ de l'Hamiltonien H est donné par

$$\begin{aligned} \langle \psi_m(x), \psi_n(x) \rangle_{PT} &= \int_c dx[\mathcal{PT}\psi_m(x)]\psi_n(x) \\ &= \int_c dx \psi_m^*(-x)\psi_n(x) = (-1)^n \delta_{mn}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

ce qui signifie que les états propres de l'Hamiltonien $\mathcal{PT}$-symétrique H sont orthogonaux par rapport à ce produit scalaire.

De cette définition, pour $n = m$ la norme $\mathcal{PT}$ des états propres de H défini par

$$\langle \psi_n(x), \psi_n(x) \rangle_{PT} = (-1)^n = \begin{cases} +1 & \text{si } n \text{ est paire} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impaire} \end{cases}, \tag{3.20}$$

est indépendante de la phase globale de $\psi_n(x)$ et conservée au cours du temps, en plus, la moitie des états de H ont une norme positive et l'autre moitié des états ont une norme négative, ce qui est en contradiction avec l'interprétation probabiliste de la norme en mécanique quantique.

Les états $\psi_n(x)$ vérifient aussi la relation de fermeture suivante

$$\sum_n (-1)^n \psi_n(x)\psi_n(y) = \delta(x-y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.21}$$

Pour contourner le problème des normes négatives de certains états de H, Carl Bender a défini une nouvelle symétrie dénotée $\mathcal{C}$ qui a prèsque les mêmes propriétés que l'opérateur conjugaison de charge. L'opérateur $\mathcal{C}$ est hermitien et commute avec l'Hamiltonien H et l'opérateur $\mathcal{PT}$

$$[\mathcal{C}, H] = 0, \quad [\mathcal{C}, \mathcal{PT}] = 0, \tag{3.22}$$

et dans l'espace des coordonnées, l'opérateur $\mathcal{C}$ est défini par la somme des fonctions propres $\psi_n(x)$ de H [85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 94, 95, 96, 97]

$$\mathcal{C} = \sum_n \psi_n(x)\psi_n(y), \tag{3.23}$$

et l'Eq. (3.23) permet de montrer que le carré de l'opérateur $\mathcal{C}$ est égal à l'unité

$$\int dy \mathcal{C}(x,y)\mathcal{C}(y,z) = \delta(x-z). \tag{3.24}$$

et les fonctions propres de l'Hamiltonien H sont aussi des fonctions propres de l'opérateur $\mathcal{C}$ avec les valeurs propres $(-1)^n$

$$\int dy \mathcal{C}(x,y)\psi_n(y) = (-1)^n \psi_n(x). \tag{3.25}$$

D'autre part, malgré que l'opérateur $\mathcal{C}$ et l'opérateur parité sont des racines carré de l'opérateur unité $\delta(x-y)$, ces deux opérateurs sont différents.

Dans l'espace des coordonnées, l'opérateur parité $\mathcal{P}$ est défini en fonction des états propres $\psi_n(x)$ de H par

$$\mathcal{P} = \sum_n (-1)^n \psi_n(x)\psi_n(-y) = \delta(x+y).$$

En utilisant cette équation et l'Eq. (3.23), nous trouvons

$$\mathcal{CP} = \sum_n \psi_n(x)\psi_n(-y), \tag{3.26}$$

et

$$\mathcal{PC} = \sum_n \psi_n(-x)\psi_n(y). \tag{3.27}$$

Ces deux relations montrent que les deux opérateurs $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}$ ne commutent pas et vérifient

$$\mathcal{CP} = (\mathcal{PC})^* . \tag{3.28}$$

Après avoir introduit les propriétés de l'opérateur $\mathcal{C}$, on peut alors définir un nouveau produit scalaire appelé "produit scalaire $\mathcal{CPT}$ " par

$$\langle \psi_m(x) | \, \psi_n(x) \rangle_{\mathcal{CPT}} = \int_c dx \, [\mathcal{CPT}\psi_m(x)] \, \psi_n(x) = \delta_{mn}, \tag{3.29}$$

qui est aussi indépendant de la phase du système et conservé au cours du temps. Ce produit scalaire dépend implicitement du choix de l'Hamiltonien contrairement au cas de la mécanique quantique ordinaire. On note aussi que le produit scalaire $\mathcal{CPT}$ est indépendant du choix du contour c.

La norme associée à ce produit scalaire est positive et la relation de fermeture, dans ce cas, est donnée par

$$\sum_n (-1)^n \, \psi_n(x)\psi_n(y) = \delta\,(x - y) \, . \tag{3.30}$$

Dans le cas où H est hermitien, l'Eq. (3.30) se réduit à la relation de fermeture de la mécanique quantique ordinaire, et dans certaines conditions l'opérateur $\mathcal{C}$ devient identique à $\mathcal{P}$ et l'opérateur $\mathcal{CPT}$ devient $\mathcal{T}$. Dans ce cas, la symétrie $\mathcal{CPT}$ coïncide avec l'hermiticité conventionnelle. Par conséquent, l'invariance $\mathcal{CPT}$ de l'Hamiltonien peut être considéré comme une extension naturelle de l'hermiticité si l'Hamiltonien est $\mathcal{CPT}$-symétrique.

Enfin, lorsque l'Hamiltonien H est non-hermitien, la symétrie $\mathcal{CPT}$ assure que le spectre de H est réel et l'opérateur d'évolution du système est unitaire, c'est à dire, la norme est conservée au cours du temps.

3.2.3 Exemple illustratif

Considérons l'Hamiltonien non-hermitien 2×2 défini par [3]

$$H = \begin{pmatrix} re^{i\theta} & s \\ s & re^{-i\theta} \end{pmatrix}, \tag{3.31}$$

où r, s et t sont des paramètres réels.

Cet Hamiltonien n'est pas hermitien mais il est $\mathcal{PT}$-symétrique, où l'opérateur parité est défini par

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.32}$$

et $\mathcal{T}$ effectue une conjugaison complexe.

Les valeurs propres de cet Hamiltonien sont données par

$$E_{\pm} = r\cos\theta \pm \sqrt{s^2 - r^2\sin^2\theta}, \tag{3.33}$$

et ne sont pas toujours réelles. En effet, lorsque $s^2 < r^2\sin^2\theta$, les valeurs propres $E_{\pm}$ forment une paire conjuguée complexe et cette condition représente la région de brisure de la symétrie $\mathcal{PT}$. D'autre part, lorsque $s^2 \geq r^2\sin^2\theta$, les valeurs propres $E_{\pm}$ sont réelles et cette condition représente la région où la symétrie $\mathcal{PT}$ n'est pas brisée. Dans cette région, les états propres simultanés $|+\rangle$ et $|-\rangle$ des opérateurs H et $\mathcal{PT}$ sont donnés respectivement par

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\cos\alpha}} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} \\ e^{-i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix}, \tag{3.34}$$

et

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\cos\alpha}} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} \\ e^{-i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix}, \tag{3.35}$$

où

$$\sin\alpha = \frac{r}{s}\sin\theta.$$

La condition $s^2 \geq r^2\sin^2\theta$ assure que la symétrie $\mathcal{PT}$ n'est pas brisée. Si cette condition est violée, les états propres $|\pm\rangle$ ne sont plus des états propres de l'opérateur $\mathcal{PT}$ parce que α devient imaginaire et la norme $\mathcal{PT}$ des états propres de H disparaît.

Dans le cas où la symétrie $\mathcal{PT}$ n'est pas brisée, le produit scalaire $\mathcal{PT}$-symétrique donné par l'Eq. (3.17) montre que ces vecteurs propres sont orthogonaux

$$\langle \pm \,|\mp\rangle_{PT} = 0, \tag{3.36}$$

et que la norme n'est pas toujours positive

$$\langle \pm \,|\pm\rangle_{PT} = \pm 1. \tag{3.37}$$

Ensuite, construisons l'opérateur $\mathcal{C}$ en utilisant l'Eq. (3.27)

$$\mathcal{C} = \frac{1}{\cos\alpha}\begin{pmatrix} i\sin\alpha & 1 \\ 1 & -i\sin\alpha \end{pmatrix}, \tag{3.38}$$

et $\mathcal{C}$ vérifie les relations suivantes

$$\mathcal{C}\,|\pm\rangle = \pm\,|\pm\rangle\,, \tag{3.39}$$

et

$$[\mathcal{C}, H] = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{C}^2 = 1. \tag{3.40}$$

En utilisant l'opérateur $\mathcal{C}$, le produit scalaire $\mathcal{CPT}$ est défini par

$$\langle \phi \,|\psi\rangle_{CPT} = (\mathcal{CPT}\phi)\,.\psi,$$

et la norme est définie positive

$$\langle \pm \,|\pm\rangle_{CPT} = 1.$$

3.3 Systèmes quantiques pseudo-Hermitiens

En 2002, Ali Mostafazadeh a construit une théorie alternative, à la mécanique quantique conventionnelle et la théorie quantique $\mathcal{PT}$-symétrique, pour les Hamiltoniens non-hermitiens dont le spectre est réel. Cette théorie s'appelle la théorie quantique pseudo-hermitienne. Il a montré que tout Hamiltonien de spectre réel est pseudo-hermitien, et en particulier les Hamiltoniens

$\mathcal{PT}$-symétriques appartiennent à la classe des Hamiltoniens pseudo-hermitiens [6, 7, 8].

3.3.1 Définitions et propriétés

Dans ce qui suit nous allons introduire les définitions et les propriétés principales des Hamiltoniens pseudo-hermitiens en utilisant les références suivantes [6, 7, 8, 98].

Considérons un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ muni d'un produit scalaire $\langle ., . \rangle$.

Définition 1

Un opérateur linéaire $\mathcal{A} : \mathcal{H} \longmapsto \mathcal{H}$ est dit pseudo-Hermitien (ou $\eta-$pseudo Hermitien) si et seulement si, il existe un opérateur linéaire, inversible et hermitien η tel que

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^{\#} = \eta^{-1}\mathcal{A}^{\dagger}\eta, \tag{3.41}$$

où $A^{\#}$ dénote l'opérateur pseudo-hermitien adjoint de $\mathcal{A}$.

Définition 2

Un opérateur linéaire $\mathcal{A} : \mathcal{H} \longmapsto \mathcal{H}$ est dit quasi-Hermitien si et seulement si, il existe un opérateur linéaire, hermitian et positif η tel que.

$$\eta\mathcal{A} =^{\dagger} \eta$$

Définition 3

Soit η un opérateur linéaire $\eta : \mathcal{H} \longmapsto \mathcal{H}$ on dit que *η est un opérateur positif et on note* $\eta \geq 0$, si pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$,*on a* $\langle \varphi, \varphi \rangle_{\eta} \geq 0$.

Remarque

Notons que l'opérateur η satisfaisant l'équation (3.41) *n'est pas unique. L'ensemble de ces opérateurs est notée $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, c'est-à-dire*

$$\eta \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \Longleftrightarrow \mathcal{A}^{\dagger} = \eta\mathcal{A}\eta^{-1}, \tag{3.42}$$

on note que η s'appelle parfois l'opérateur de Dyson [21].

Pour commencer l'étude des Hamiltoniens pseudo-hermitiens, supposons qu'on a l'équation de Schrödinger

$$H\left|\psi_n\right\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi_n\right\rangle, \tag{3.43}$$

où l'Hamiltonien H est non-hermitien dans le cas général.

Proposition

Soient $\left|\psi_1\right\rangle$ et $\left|\psi_2\right\rangle$ deux états propres quelconques d'un Hamiltonien H, et qui satisfont le produit scalaire hermitien indéfini $\langle\langle, | \,, \rangle\rangle_\eta$, défini par l'opérateur η supposé indépendant du temps

$$\langle\langle\psi_1 \mid \psi_2\rangle\rangle_\eta := \left\langle\psi_1\left|\eta\right|\psi_2\right\rangle, \tag{3.44}$$

ce produit scalaire est conservé au cours du temps si et seulement si l'Hamiltonien H est pseudo-hermitien.

Pour démontrer ce résultat, utilisons l'équation (3.43) et son adjoint ainsi que l'équation (3.44)

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left\langle\psi_1\left|\eta\right|\psi_2\right\rangle = \left\langle\psi_1\left|\eta H - H^\dagger\eta\right|\psi_2\right\rangle, \tag{3.45}$$

alors ce $\eta-$produit scalaire est indépendant du temps si et seulement si l'Hamiltonien H est pseudo-hermitien.

Supposons maintenant que l'Hamiltonien H est pseudo-hermitien et indépendant du temps, alors l'équation de Schrödinger (3.43) est équivalente à l'équation aux valeurs propres suivante

$$H\left|\psi_n\right\rangle = E_n\left|\psi_n\right\rangle, \tag{3.46}$$

alors l'équation (3.45) donne

$$\left(E_m^* - E_n\right)\left\langle\psi_m\left|\eta\right|\psi_n\right\rangle = 0. \tag{3.47}$$

Cette relation implique :

- Si les valeurs propres E_n sont complexes alors pour $n = m$

$$E_n^* - E_n \neq 0 \Longrightarrow \left\langle\psi_n\left|\eta\right|\psi_n\right\rangle = 0, \tag{3.48}$$

c'est a dire les normes d'états $\left|\psi_n\right\rangle$ s'annulent.

- Tous les états propres ψ_m et ψ_n sont $\eta-$orthogonaux sauf pour $E_m^* = E_n$

$$E_m^* \neq E_n \Longrightarrow \langle \psi_m \left| \eta \right| \psi_n \rangle = 0. \tag{3.49}$$

En particulier, les états propres associés aux valeurs propres réelles sont orthogonaux.

3.3.2 Réalité du spectre

Supposons que l'Hamiltonien H admet un ensemble bi-orthonormé de vecteurs propres $\{\left|\psi_n\right\rangle, \left|\phi_n\right\rangle\}$, c'est à dire

$$H\left|\psi_n\right\rangle = E_n \left|\psi_n\right\rangle \quad \text{et} \quad H^\dagger \left|\phi_n\right\rangle = E_n^* \left|\phi_n\right\rangle, \tag{3.50}$$

avec

$$\langle \phi_m \left| \psi_n \right\rangle = \delta_{mn}, \tag{3.51}$$

et

$$\sum_n \left|\psi_n\right\rangle \left\langle \phi_n\right| = 1. \tag{3.52}$$

Alors

$$\left\langle \phi_m\right| H \left|\psi_n\right\rangle = E_n \delta_{mn} \quad \text{et} \quad \left\langle \psi_n\right| H^\dagger \left|\phi_m\right\rangle = E_n^* \delta_{mn}, \tag{3.53}$$

de telle sorte que si les valeurs propres sont réelles, $E_n^* = E_n$ nous avons une condition nécessaire mais pas suffisante pour que le spectre de H soit réel

$$\left\langle \phi_m\right| H \left|\psi_n\right\rangle = \left\langle \psi_n\right| H^\dagger \left|\phi_m\right\rangle, \tag{3.54}$$

on a aussi

$$\left|\phi_m\right\rangle = \eta \left|\psi_m\right\rangle,$$

cette relation conduit à

$$\left\langle \psi_m\right| \eta H \left|\psi_n\right\rangle = \left\langle \psi_n\right| H^\dagger \eta \left|\psi_m\right\rangle, \tag{3.55}$$

c'est à dire

$$\eta H = H^\dagger \eta, \tag{3.56}$$

alors tout opérateur H qui vérifie l'Eq. (3.56) est appelé opérateur quasi-hermitien. De plus, Dieudonné a montré que le spectre de H n'est pas nécessairement réel, et que $H^\dagger$ n'est pas nécessairement quasi-hermitien [99]. En effet, la relation de quasi-hermiticité (3.56) n'assure pas que le spectre de H est réel, c'est à dire, c'est une condition nécessaire mais non suffisante [80].

Théorème

L'Hamiltonien H a un spectre réel si et seulement si, il existe un opérateur linéaire, hermitien et inversible $\eta : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ tel que H est pseudo-hermitien et $\eta = \rho^+\rho$.

On peut démontrer ce théorème comme suit : soit $\{|n\rangle\}$ une base orthonormée de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, c'est à dire

$$\langle m \, |n\rangle = \delta_{mn}, \tag{3.57}$$

et

$$\sum_n |n\rangle \langle n| = 1, \tag{3.58}$$

on définit les deux opérateurs $\rho : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ et $h : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ par

$$\rho := \sum_n |n\rangle \langle \phi_n| \, , \tag{3.59}$$

et

$$h := \sum_n E_n \, |n\rangle \langle n| \, , \tag{3.60}$$

à partir des Eqs. (3.52) , (3.58) et (3.59) , nous remarquons que l'opérateur ρ est inversible et ρ^{-1} est donné par

$$\rho^{-1} := \sum_n |\psi_n\rangle \langle n| \, , \tag{3.61}$$

et à partir des Eqs. (3.59) , (3.60) et (3.61) , on trouve

$$\rho H \rho^{-1} = h. \tag{3.62}$$

Si on suppose que les valeurs propres E_n de l'Hamiltonien H sont réelles, l'Hamiltonien h sera hermitien

$$h = h^\dagger \Longleftrightarrow \rho H \rho^{-1} = \rho^{-1+} H^\dagger \rho^+, \tag{3.63}$$

alors on déduit que

$$H = \eta^{-1} H^{\dagger} \eta, \tag{3.64}$$

où

$$\eta = \rho^{+} \rho, \tag{3.65}$$

ce qui implique que H est $\eta-$pseudo-hermitien.

Si on suppose maintenant que l'Hamiltonien H est $\eta-$pseudo-hermitien, par conséquent les deux Eqs. (3.64) et (3.63) sont satisfaites, d'autre part les Eqs. (3.51) , (3.59) et (3.60) donnent

$$h = \rho H \rho^{-1}, \tag{3.66}$$

alors

$$h^{\dagger} = \rho^{-1+} H^{\dagger} \rho^{+}. \tag{3.67}$$

Ces deux relations et l'équation (3.63) montrent que l'Hamiltonien h est hermitien, alors ces valeurs propres E_n sont réelles et par conséquent les valeurs propres de H sont aussi réelles (E_n sont des valeurs propres communes à H et h).

Comme les valeurs propres E_n de H sont réelles, alors les états propres ψ_n associés à E_n sont $\eta-$orthogonaux

$$\left\langle \psi_m \left| \eta \right| \psi_n \right\rangle = 0. \tag{3.68}$$

D'autre part, on peut trouver une relation entre les vecteurs propres de l'Hamiltonien pseudo-hermitien H et l'Hamiltonien hermitien h, l'équation (3.66) est équivalente à

$$H = \rho^{-1} h \rho. \tag{3.69}$$

En substituant cette relation dans l'équation aux valeurs propres de H, on trouve

$$\rho^{-1} h \rho \left| \psi_n \right\rangle = E_n \left| \psi_n \right\rangle , \tag{3.70}$$

multiplions les deux membres de cette équation à gauche par ρ, on obtient

$$h \rho \left| \psi_n \right\rangle = E_n \rho \left| \psi_n \right\rangle = E_n \left| \varphi_n \right\rangle , \tag{3.71}$$

ce qui veut dire que les Hamiltoniens H et h sont alors iso-spectraux, et les états propres $|\psi_n\rangle$ de H et les états propres $|\varphi_n\rangle$ de h sont liés par la relation

$$|\varphi_n\rangle = \rho\,|\psi_n\rangle\,, \tag{3.72}$$

et

$$\langle\varphi_n|\,h\,|\varphi_n\rangle = \langle\phi_n|\,H\,|\psi_n\rangle = \langle\psi_n|\,\eta H\,|\psi_n\rangle\,, \tag{3.73}$$

où

$$|\phi_n\rangle = \eta\,|\psi_n\rangle = \rho^+\,|\varphi_n\rangle\,. \tag{3.74}$$

L'équation (3.73) implique que l'Hamiltonien H est hermitien par rapport au $\eta-$produit scalaire de ses vecteurs propres $|\psi_n\rangle$.

D'autre part, l'Eq. (3.64) implique que l'Hamiltonien H est pseudo-hermitien et son spectre est réel, mais elle n'est pas suffisante pour avoir un produit scalaire positif. Donc, il est plus judicieux de choisir l'opérateur métrique η positif.

Le nouveau opérateur métrique ρ relie l'espace de Hilbert usuel $\mathcal{H}$ des vecteurs propres $|\varphi_n\rangle$ de h,à un autre espace de Hilbert $\mathcal{H}_\eta$ des vecteurs propres $|\psi_n\rangle$ de H. En plus, ρ transforme l'Hamiltonien non hermitien H en un Hamiltonien hermitien h via la relation (3.66) , et transforme aussi les opérateurs position et impulsion de la manière suivante

$$X = \rho x \rho^{-1}, \qquad P = \rho p \rho^{-1}, \tag{3.75}$$

de sorte que la relation de commutation canonique reste invariante

$$[x, p] = [X, P] = i\hbar, \tag{3.76}$$

et l'Hamiltonien non hermitien $H\,(x, p)$ peut s'écrire comme un Hamiltonien hermitien en fonction des nouvelles coordonnées canoniques X et P

$$H\,(x, p) = \rho h\,(x, p)\,\rho^{-1} = h\left(\rho x \rho^{-1}, \rho p \rho^{-1}\right) = h\,(X, P)\,. \tag{3.77}$$

Alors les opérateurs H, X et P ne sont pas hermitiens dans l'espace de Hilbert usuel $\mathcal{H}$, mais ils le sont dans le nouveau espace de Hilbert $\mathcal{H}_\eta$, ce qui implique que H, X et P sont des observables dans $\mathcal{H}_\eta$. Par contre, les opérateurs h, x et p sont hermitiens dans l'espace de Hilbert usuel $\mathcal{H}$ et ils ne le sont pas dans $\mathcal{H}_\eta$.

Notons que le produit scalaire hermitien $\langle\varphi_n|\varphi_n\rangle$ est équivalent au $\eta-$pseudo produit scalaire

$$\langle\varphi_n|\varphi_n\rangle = \langle\phi_n|\psi_n\rangle = \langle\psi_n|\eta|\psi_n\rangle, \tag{3.78}$$

3.3.3 Quasi-hermiticité et pseudo-hermiticité

Les propriétés de l'opérateur métrique permettent d'aborder d'une manière simple la différence entre la quasi-hermiticité et la pseudo-hermiticité. Dans le tableau suivant nous exposons les différents cas possibles [80] :

	$H^\dagger = \rho^+\rho H\left(\rho^+\rho\right)^{-1}$	$H^\dagger\eta = \eta H$	$H^\dagger = \eta H\eta^{-1}$
hermiticité de η	✓	✓	✓
inversibilité de η	✓	$\times$	✓
positivité de η	✓	✓	$\times$
$\eta-$produit scalaire	positif	positif	positif ou négatif
spectre de H	réel	réel ou complexe	réel
terminologie de H	quasi-pseudo hermitien	quasi-hermitien	pseudo-hermitien

Si l'opérateur métrique est linéaire et positif mais non inversible, l'Hamiltonien vérifiant la condition $H^\dagger\eta = \eta H$ est appelée Hamiltonien quasi-hermitien [8, 22, 100, 101]. Tandis que, si l'opérateur métrique est linéaire, inversible et hermitien, alors la condition $H^\dagger\eta = \eta H$ peut s'écrire sous la forme $H^\dagger = \eta H\eta^{-1}$ et dans ce cas l'Hamiltonien est pseudo-hermitien [6, 7, 14, 102]. Concernant la construction d'un opérateur métrique, la pseudo-hermiticité peut conduire à une métrique indéfinie et un produit scalaire positif ou négatif, qui est en contradiction avec la mécanique quantique, tandis que la quasi-herméticité garantit l'existence d'une métrique définie positive avec un produit scalaire positif. En ce qui concerne les propriétés spectrales de H, la pseudo-hermiticité assure la réalité du spectre, cependant dans le cas de la quasi-hérmiticité le spectre peut être réel ou complexe.

Chapitre 4

Systèmes quantiques non-Hermitiens dépendants du temps

4.1 Introduction

Les systèmes non-Hermitiens dépendants explicitement du temps n'ont pas reçu beaucoup d'attention sauf quelques tentatives [103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110]. Un certain nombre de difficultés ont été rencontrées dans l'étude de ces systèmes comme l'interprétation probabiliste et l'unitarité de l'opérateur d'évolution. La dépendance du temps de l'opérateur métrique pour les Hamiltoniens non-Hermitiens dépendants du temps a été le centre d'un débat intéressant entre A. Mostafazadeh et M. Znojil. En effet, A. Mostafazadeh stipule que l'indépendance du temps de l'opérateur métrique est une condition nécessaire pour avoir un spectre réel pour les Hamiltoniens pseudo-hermitiens, par contre M. Znojil suppose que l'opérateur métrique est dépendant du temps, et l'existence de deux Hamiltoniens H et H_{gen}, où H est pseudo-hermitien décrivant l'énergie du système et H_{gen} décrit l'évolution du système, c'est à dire, H_{gen} vérifie l'équation de Schrödinger mais il n'est pas une observable [24, 25, 26, 27, 28, 29].

Dans ce chapitre, nous proposons une autre approche pour résoudre l'équation de Schrödinger associée à certains Hamiltoniens non-hermitiens dépendants explicitement du temps. Dans cette étude nous supposons que l'opérateur métrique est dépendant du temps et nous utilisons la théorie des invariants de Lewis-Riesenfeld pour déterminer un invariant pseudo-hermitien $I_{PH}(t)$ associé à l'Hamiltonien non hermitien $H(t)$.

4.2 Méthode des invariants pour les systèmes non Hermitiens

En mécanique quantique conventionnelle, l'équation d'évolution pour un Hamiltonien Hermitien $h(t)$ dépendant explicitement du temps est régie par l'équation de Schrödinger dépendante du temps

$$h(t)\left|\Psi^{h}(t)\right\rangle = i\partial_t\left|\Psi^{h}(t)\right\rangle. \tag{4.1}$$

Si la solution $\Psi^{h}(t)$ peut s'écrire en fonction d'un autre vecteur d'état $\Phi^{H}(t)$

$$\left|\Psi^{h}(t)\right\rangle = \rho(t)\left|\Phi^{H}(t)\right\rangle, \tag{4.2}$$

où $\rho(t)$ est un opérateur inversible et dépendant du temps.

En substituant la relation (4.2) dans l'Eq. (4.1), on obtient une autre équation de Schrödinger pour l'Hamiltonien $H(t)$

$$H(t)\left|\Phi^{H}(t)\right\rangle = i\partial_t\left|\Phi^{H}(t)\right\rangle, \tag{4.3}$$

où les deux Hamiltoniens $h(t)$ et $H(t)$ sont liés l'un à l'autre par la relation suivante

$$H(t) = \rho^{-1}(t)h(t)\rho(t) + i\hbar\rho^{-1}(t)\dot{\rho}(t), \tag{4.4}$$

on note que le nouveau Hamiltonien $H(t)$ contient le terme $i\hbar\rho^{-1}(t)\dot{\rho}(t)$, ce qui implique que $H(t)$ est non-hermitien alors que $h(t)$ est supposé hermitien par hypothèse [24, 25, 26]. Cette dernière équation est équivalente à

$$h(t) = \rho(t)H(t)\rho^{-1}(t) + i\hbar\dot{\rho}(t)\rho^{-1}(t). \tag{4.5}$$

En utilisant le fait que $h(t)$ est hermitien et la relation (4.5), on déduit une relation entre $H(t)$ et son conjugué $H^{\dagger}(t)$ [24, 25, 26, 31, 109, 110]

$$H^{\dagger}(t) = \eta(t)H(t)\eta^{-1}(t) + i\hbar\dot{\eta}(t)\eta^{-1}(t), \tag{4.6}$$

où $\eta(t)$ est appelé l'opérateur métrique

$$\eta(t) = \rho^{\dagger}(t)\rho(t). \tag{4.7}$$

L'Eq. (4.6) généralise la relation de la pseudo-hermiticicité, et dans le cas où $\eta(t)$ est indépendant du temps on obtient la relation de la pseudo-hermiticicité ordinaire (3.64) .

Pour résoudre l'équation de Schrödinger (4.3) associé à l'Hamiltonien non-hermitien $H(t)$ dépendant explicitement du temps, utilisons le fait que si $\left|\Psi^h(t)\right\rangle$ est une solution de l'équation de Schrödinger (4.1) associée à l'Hamiltonien hermitien $h(t)$, alors $I(t)\left|\Psi^h(t)\right\rangle$ est une autre solution de cette équation, où $I(t)$ est un invariant hermitien associé à $h(t)$

$$h(t)\left(I(t)\left|\Psi^h(t)\right\rangle\right) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(I(t)\left|\Psi^h(t)\right\rangle\right), \tag{4.8}$$

en substituant la relation (4.2) dans l'Eq. (4.8) , on trouve

$$\begin{aligned} h(t)\, I(t)\, \rho(t)\left|\Phi^H(t)\right\rangle &= i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left[I(t)\,\rho(t)\left|\Phi^H(t)\right\rangle\right] \\ &= i\hbar\left[\frac{\partial I(t)}{\partial t}\rho(t) + I(t)\,\dot{\rho}(t) + I(t)\,\rho(t)\frac{\partial}{\partial t}\right]\left|\Phi^H(t)\right\rangle. \end{aligned} \tag{4.9}$$

En appliquant $\rho^{-1}(t)$ à gauche aux deux membre de l'équation précédente, on obtient

$$\begin{aligned} \rho^{-1}(t)h(t)\,\rho(t)\rho^{-1}(t)I(t)\,\rho(t)\left|\Phi^H(t)\right\rangle = i\hbar\Bigg[&\rho^{-1}(t)\frac{\partial I(t)}{\partial t}\rho(t) + \rho^{-1}(t)I(t)\,\rho(t)\rho^{-1}(t)\dot{\rho}(t) \\ &+\rho^{-1}(t)I(t)\,\rho(t)\frac{\partial}{\partial t}\Bigg]\left|\Phi^H(t)\right\rangle, \end{aligned} \tag{4.10}$$

cette équation est équivalente à

$$\rho^{-1}(t)h(t)\,\rho(t)I_{PH}(t)\left|\Phi^H(t)\right\rangle = i\hbar\left[\rho^{-1}(t)\frac{\partial I(t)}{\partial t}\rho(t) + I_{PH}(t)\,\rho^{-1}(t)\dot{\rho}(t) + I_{PH}(t)\frac{\partial}{\partial t}\right]\left|\Phi^H(t)\right\rangle, \tag{4.11}$$

où $I_{PH}(t)$ est défini par

$$I_{PH}(t) = \rho^{-1}(t)I(t)\,\rho(t), \tag{4.12}$$

et sa dérivée par rapport au temps est donnée par

$$\frac{\partial I_{PH}(t)}{\partial t} = -\rho^{-1}(t)\dot{\rho}(t)I_{PH}(t) + \rho^{-1}(t)\frac{\partial I(t)}{\partial t}\rho(t) + I_{PH}(t)\rho^{-1}(t)\dot{\rho}(t), \quad (4.13)$$

et on déduit que

$$\rho^{-1}(t)\frac{\partial I(t)}{\partial t}\rho(t) = \frac{\partial I_{PH}(t)}{\partial t} + \rho^{-1}(t)\dot{\rho}(t)I_{PH}(t) - I_{PH}(t)\rho^{-1}(t)\dot{\rho}(t), \quad (4.14)$$

par substitution de l'Eq (4.14) dans l'Eq. (4.11) , on trouve

$$\left[\rho^{-1}(t)h(t)\rho(t) - i\hbar\rho^{-1}(t)\dot{\rho}(t)\right] I_{PH}(t)\left|\Phi^{H}(t)\right\rangle = i\hbar\left[\frac{\partial I_{PH}(t)}{\partial t} + I_{PH}(t)\frac{\partial}{\partial t}\right]\left|\Phi^{H}(t)\right\rangle. \quad (4.15)$$

En utilisant l'équation (4.3) et en remplaçant l'Eq. (4.5) dans (4.15) , on obtient

$$\left[i\hbar\frac{\partial I_{PH}(t)}{\partial t} + \left[I_{PH}(t), H(t)\right]\right]\left|\Phi^{H}(t)\right\rangle = 0, \quad (4.16)$$

qui peut s'écrire sous la forme [31]

$$\frac{\partial I_{PH}(t)}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}\left[H(t), I_{PH}(t)\right], \quad (4.17)$$

cette équation montre que $I_{PH}(t)$ est un invariant quasi-hermitien associé à l'Hamiltonien non-Hermitien $H(t)$.

D'autre part, on peut obtenir cette relation d'une autre manière. En effet, supposons que l'invariant pseudo-hermitien $I_{PH}(t)$ est une constante du mouvement, alors on a

$$\frac{dI_{PH}}{dt} = 0 \Longrightarrow \left\langle \frac{\partial I_{PH}}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t}\left\langle \Phi(t)\right|\eta(t)\, I_{PH}\left|\Phi(t)\right\rangle,$$

la dérivation du deuxième membre s'écrit explicitement sous la forme

$$
\begin{aligned}
\frac{dI_{PH}}{dt} =& \frac{\partial}{\partial t} \langle \Phi(t) | \eta(t) I_{PH} | \Phi(t) \rangle = \left(\frac{\partial}{\partial t} \langle \Phi(t) | \right) \eta(t) I_{PH} | \Phi(t) \rangle + \langle \Phi(t) | \frac{\partial}{\partial t} \eta(t) I_{PH} | \Phi(t) \rangle \\
&+ \langle \Phi(t) | \eta(t) \frac{\partial I_{PH}}{\partial t} | \Phi(t) \rangle + \langle \Phi(t) | \eta(t) I_{PH} \frac{\partial}{\partial t} | \Phi(t) \rangle \\
&= \langle \Phi(t) | - \frac{1}{i\hbar} H^{+} \eta(t) I_{PH} + \dot{\eta}(t) I_{PH} + \eta(t) \frac{\partial I_{PH}}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} \eta(t) I_{PH} H | \Phi(t) \rangle \\
=& \langle \Phi(t) | \eta(t) \left[- \frac{1}{i\hbar} \left(\eta^{-1}(t) H^{+} \eta(t) - i\hbar \eta^{-1}(t) \dot{\eta}(t) \right) I_{PH} + \frac{\partial I_{PH}}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} I_{PH} H \right] | \Phi(t) \rangle \\
=& \langle \Phi(t) | \eta(t) \left[- \frac{1}{i\hbar} H I_{PH} + \frac{\partial I_{PH}}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} I_{PH} H \right] | \Phi(t) \rangle \\
&= \langle \Phi(t) | \eta(t) \left[\frac{\partial I_{PH}}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [I_{PH,} H] \right] | \Phi(t) \rangle \\
&\Longrightarrow \frac{\partial I_{PH}(t)}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [H(t), I_{PH}(t)].
\end{aligned}
$$

Donc on retrouve la même équation (4.17) pour l'invariant $I_{PH}(t)$ [31].

4.3 Valeurs et fonctions propres de l'invariant $I_{PH}(t)$

Maintenant, nous cherchons les propriétés spectrales de l'invariant pseudo-Hermitien $I_{PH}(t)$. La relation (4.12) entre l'invariant hermitien $I_h(t)$ et l'invariant pseudo-hermitien $I_{PH}(t)$ signifie que

$$
I_h(t) = \rho(t) I_{PH}(t) \rho^{-1}(t) \Longleftrightarrow I_{PH}^{\dagger}(t) = \eta(t) I_{PH}(t) \eta^{-1}(t). \tag{4.18}
$$

La vertu d'un tel couple conjugué $I_h(t)$ et $I_{PH}(t)$ est qu'ils possèdent un spectre de valeur propre identique parce que ces deux invariants se situent dans la même classe de similarité. La réalité du spectre est garantie puisque l'un des invariants $I_h(t)$ est Hermitien. Cela signifie que tout opérateur invariant auto-adjoint $I_h(t)$, c'est-à-dire observable, possède un invariant pseudo-hermitien $I_{PH}(t) = \rho^{-1}(t) I_h(t) \rho(t)$.

Les équations aux valeurs propres correspondantes sont alors

$$
I_h(t) \left| \psi_n^h(t) \right\rangle = \lambda \left| \psi_n^h(t) \right\rangle, \tag{4.19}
$$

et

$$I_{PH}(t)\left|\phi_n^{PH}(t)\right\rangle = \lambda\left|\phi_n^{PH}(t)\right\rangle, \tag{4.20}$$

où les fonctions propres $\left|\psi_n^h(t)\right\rangle$ et $\left|\phi_n^{PH}(t)\right\rangle$ sont liés par

$$\left|\psi_n^h(t)\right\rangle = \rho(t)\left|\phi_n^{PH}(t)\right\rangle. \tag{4.21}$$

Le produit scalaire des fonctions propres $\left|\phi_n^{PH}(t)\right\rangle$ associé à l'invariant pseudo-hermitien $I_{PH}(t)$ satisfont

$$\left\langle\phi_m^{PH}(t)\right.\left|\phi_n^{PH}(t)\right\rangle_\eta = \left\langle\phi_m^{PH}(t)\right|\eta(t)\left|\phi_n^{PH}(t)\right\rangle = \delta_{mn}. \tag{4.22}$$

En conclusion, les valeurs propres et les vecteurs propres de l'opérateur invariant $I_{PH}(t)$ peuvent être obtenues par la même technique présentée au chapitre 2 pour le cas des hamiltoniens hermitiens dépendants explicitement du temps.

4.4 La phase

La solution générale $\left|\Phi_n^H(t)\right\rangle$ de l'équation de Schrödinger pour un Hamiltonien non-hermitien dépendant explicitement du temps ne diffère des fonctions propres $\left|\phi_n^{PH}(t)\right\rangle$ de l'invariant pseudo Hermitien $I_{PH}(t)$ que par un facteur de phase $e^{i\varepsilon_n^{PH}(t)}$, où $\varepsilon_n^{PH}(t)$ est donnée par [31]

$$\hbar\frac{d}{dt}\varepsilon_n^{PH}(t) = \left\langle\phi_n^{PH}(t)\right|\eta(t)\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H(t)\right]\left|\phi_n^{PH}(t)\right\rangle. \tag{4.23}$$

En substituant les expression de $H(t)$, $\eta(t)$ et $\left|\phi_n^{PH}(t)\right\rangle$ dans la dernière equation, on obtient

$$\hbar\frac{d}{dt}\varepsilon_n^{PH}(t) = \left\langle\psi_n^h(t)\right|\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - h(t)\right]\left|\psi_n^h(t)\right\rangle = \hbar\frac{d}{dt}\varepsilon_n^h(t),$$

cette relation montre que l'Hamiltonien Hermitien $h(t)$ et l'Hamiltonien non-Hermitien $H(t)$ ont la même phase.

Enfin, il est important de noter que l'équation de Schrödinger pour un Hamiltonien explicitement dépendant du temps ne peut pas s'écrire sous la forme d'une équation aux valeurs propres, et dans ce cas on ne peut rien dire sur le spectre de l'Hamiltonien. Par conséquent, nous nous intéressons qu'à sa valeur moyenne. Cependant, l'invariant satisfait une équation aux valeurs propres avec un spectre réel et indépendant du temps.

4.5 Applications

4.5.1 Oscillateur harmonique dépendant du temps en présence d'un potentiel complexe et linéaire

Comme première application, nous avons traité le problème de l'oscillateur harmonique à fréquence dépendant du temps sous l'action d'un potentiel linéaire imaginaire dépendant du temps, et nous avons comparé les résultats obtenus [31] avec ceux obtenus dans la réf [103],

$$H(t) = \frac{p^2}{2m} + m\omega^2(t)\,x^2 + i\lambda(t)\,x, \tag{4.24}$$

où $\lambda(t)$ est une fonction dépendante du temps réel quelconque.

Prenons l'opérateur métrique sous la forme

$$\eta(t) = \exp\left[-\frac{\alpha(t)}{\hbar}p - \frac{\beta(t)}{\hbar}x\right], \tag{4.25}$$

avec $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ sont des fonctions réels dépendant du temps.

Pour déterminer les fonctions $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ en utilisant la relation (4.6), on obtient le système d'équations suivant

$$\dot{\alpha}(t) + \frac{\beta(t)}{m} = 0, \tag{4.26}$$

$$m\omega^2(t)\,\alpha(t) + 2\lambda(t) - \dot{\beta}(t) = 0. \tag{4.27}$$

A partir de l'équation (4.26) $\beta(t) = -m\dot{\alpha}(t)$, la deuxième équation peut être réduite à

$$m\ddot{\alpha}(t) + m\omega^2(t)\,\alpha(t) + 2\lambda(t) = 0. \tag{4.28}$$

Alors, l'opérateur métrique dépendant du temps $\eta(t)$ est donné par

$$\eta(t) = \exp\left[-\frac{\alpha(t)}{\hbar}p + \frac{m\dot{\alpha}(t)}{\hbar}x\right], \tag{4.29}$$

et en utilisant la relation $\eta(t) = \rho^{\dagger}(t)\rho(t)$ où l'opérateur $\rho(t)$ n'est pas unique et peut être considéré comme un opérateur réel, dans ce cas

$$\rho(t) = \eta^{\frac{1}{2}}(t) = \exp\left[-\frac{\alpha(t)}{2\hbar}p + \frac{m\dot{\alpha}(t)}{2\hbar}x\right]. \tag{4.30}$$

On peut facilement montrer que sous la transformation $\rho(t)$ définie dans l'équation (4.30), les opérateurs x et p changent selon

$$\rho^{-1}(t)x\rho(t) = x - i\frac{\alpha(t)}{2}, \tag{4.31}$$

$$\rho^{-1}(t)p\rho(t) = p - i\frac{m\dot{\alpha}(t)}{2}. \tag{4.32}$$

En utilisant Eqs. (4.31) et (4.32), nous exprimons $\rho(t)H(t)\rho^{-1}(t)$ comme

$$\begin{aligned}\rho(t)H(t)\rho^{-1}(t) = {} & \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(t)x^2 + i\left(\lambda(t) + \frac{1}{2}m\alpha(t)\omega^2(t)\right)x + i\frac{\dot{\alpha}(t)}{2}p \\ & -\left(\frac{m\dot{\alpha}^2(t)}{8} + \frac{m\alpha^2(t)\omega^2(t)}{8} + \frac{\alpha(t)\lambda(t)}{2}\right),\end{aligned} \tag{4.33}$$

et en prenant la dérivée partielle du temps de $\rho^{-1}(t)$, nous obtenons le produit approprié

$$i\hbar\rho(t)\dot{\rho}^{-1}(t) = i\frac{\dot{\alpha}(t)}{2}p - im\frac{\ddot{\alpha}(t)}{2}x - \frac{m}{8}\left(\dot{\alpha}^2(t) - \alpha(t)\ddot{\alpha}(t)\right). \tag{4.34}$$

Alors l'Hamiltonien hermitien accocié est donné par

$$h(t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(t)x^2 - \frac{\alpha(t)\lambda(t)}{4}. \tag{4.35}$$

Par conséquent, le terme dépendant du temps $\frac{\alpha(t)\lambda(t)}{4}$ peut être éliminé par une transformation unitaire dépendante du temps, à savoir $\exp\left[i\int_0^t \frac{\alpha(t')\lambda(t')}{4}dt'\right]$, dans ce cas l'équation de Schrödinger pour l'Hamiltonien $h(t)$ est équivalant à l'équation de Schrödinger pour l'Hamiltonien $h_{osc}(t)$ donné par [30] pour une masse m indépendante du temps

$$h_{osc}(t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(t)x^2, \tag{4.36}$$

avec

$$\psi_n(x,t) = \exp\left[i\int_0^t \frac{\alpha(t')\lambda(t')}{4}dt'\right]\psi_n^{osc}(x,t), \tag{4.37}$$

où $\psi_n(x,t)$ et $\psi_n^{osc}(x,t)$ sont les solutions de l'équation de Schrödinger pour les Hamiltoniens $h(t)$ et $h_{osc}(t)$ respectivement, et $\psi_n^{osc}(x,t)$ est donnée par la relation (2.64).

Une propriété importante de la transformation $\rho^{-1}(t)$, dont l'action sur une fonction d'onde dans la représentation x.

$$\rho^{-1}(t)G(x,t) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar 8}m\alpha(t)\dot{\alpha}(t)\right]\exp\left[-\frac{m\dot{\alpha}(t)}{2}x\right]G\left(x-\frac{i\alpha(t)}{2}\right). \tag{4.38}$$

En utilisant cette propriété pour déterminer la solution générale de l'équation de Schrödinger pour l'Hamiltonien non Hermitien $H(t)$

$$\begin{aligned}\left|\Phi^H(x,t)\right\rangle &= \rho^{-1}(t)\psi_n(x,t)\\ &= \exp\left[-\frac{i}{\hbar 8}m\alpha(t)\dot{\alpha}(t) - i\int_0^t \frac{\alpha(t')\lambda(t')}{4}dt'\right]\exp\left[-\frac{m\dot{\alpha}(t)}{2}x\right]\psi_n\left(x-\frac{i\alpha(t)}{2},t\right).\end{aligned}$$

On peut trouver les mêmes résultats, en appliquant le théorème des invariants directement sur l'Hamiltonien $H(t)$, l'invariant $I_{PH}(t)$ lie à l'Hamiltonien $H(t)$ est donné par

$$\begin{aligned}I_{PH}(t) &= \sigma^2\left(p-i\frac{m\dot{\alpha}}{2}\right)^2 - m\dot{\sigma}\sigma\left[\left(p-i\frac{m\dot{\alpha}}{2}\right)\left(x-i\frac{\alpha}{2}\right)+\left(x-i\frac{\alpha}{2}\right)\left(p-i\frac{m\dot{\alpha}}{2}\right)\right]\\ &\quad+\frac{1}{\sigma^2}\left(1+m^2\dot{\sigma}^2\sigma^2\right)\left(x-i\frac{\alpha}{2}\right)^2.\end{aligned} \tag{4.39}$$

Il est facile de montrer que cette invariant est pseudo-Hermitien avec le même opérateur métrique $\eta(t)$ donné par la relation (4.29) et l'invariant hermitien correspondant est donné par (2.41), où l'operateur $\rho(t) = \eta^{\frac{1}{2}}(t)$.

Alors les solutions de l'équations aux valeurs propres pour les invariants sont liées comme suit

$$\left|\phi_n^{PH}\right\rangle = \rho^{-1}(t)\left|\varphi_n\right\rangle, \tag{4.40}$$

où $|\varphi_n(t)\rangle$ est donnée par l'Eq. (2.54).

Pour trouver l'évolution de la phase, nous utilisons la relation (4.23) et on trouve

$$\begin{aligned}\left\langle\phi_n^{PH}\right|\eta(t)\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-H(t)\right]\left|\phi_n^{PH}\right\rangle &= \left\langle\phi_n^{PH}\right|\rho^\dagger(t)\rho(t)\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-H(t)\right]\rho^{-1}(t)\rho(t)\left|\phi_n^{PH}\right\rangle \\ &= \left\langle\phi_n^{PH}\right|\rho^\dagger(t)\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-\rho(t)H(t)\rho^{-1}\right. \\ &\left.+i\hbar\rho(t)\frac{\partial}{\partial t}\rho^{-1}(t)\right]\rho(t)\left|\phi_n^{PH}\right\rangle. \qquad (4.41)\end{aligned}$$

Les éléments diagonaux de l'opérateur $\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-H(t)\right)$ peuvent être simplifiés en utilisant eq. (4.28)

$$\begin{aligned}\left\langle\phi_n^{PH}\right|\eta(t)\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-H(t)\right]\left|\phi_n^{PH}\right\rangle &= \left\langle\phi_n^{PH}\right|\rho^\dagger(t)\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right. \\ &\left.-\left(\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2(t)x^2-\frac{\alpha(t)\lambda(t)}{4}\right)\rho(t)\left|\phi_n^{PH}\right\rangle\right]. \qquad (4.42)\end{aligned}$$

Les états propres de $I_{PH}(t)$ sont liés à ceux de l'invariant Hermitien car $I_{PH}(t)$ est quasi-hermitien, c'est-à-dire lié à $I_h(t)$ par la transformation de similarité. Par conséquent, le terme dépendant du temps $\frac{\alpha(t)\lambda(t)}{4}$ peut être éliminé par une transformation unitaire dépendante du temps, à savoir $\exp\left[i\int_0^t\frac{\alpha(t')\lambda(t')}{4}dt'\right]$, pour donner la dérivée temporelle de la phase

$$\begin{aligned}\left\langle\phi_n^{PH}\right|\eta(t)\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-H(t)\right]\left|\phi_n^{PH}\right\rangle &= \hbar\frac{d\epsilon_n(t)}{dt} \\ &= \left\langle\psi_n^h\right|\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-\left(\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2(t)x^2\right)\right]\left|\psi_n^h\right\rangle. \qquad (4.43)\end{aligned}$$

Nous reconnaissons la phase associée à l'oscillateur harmonique unidimensionnel dépendant du temps dont l'opérateur Hamiltonien est donné par l'équation (2.25) (dans notre cas la masse est indépendante du temps) et donc l'invariant hermitien associé à I_h^{osc}, ses états propres $\psi_n^{I_h^{osc}}(x,t)$ et la phase $\epsilon_n(t)$ sont donnés par Eqs. (2.41), (2.54) et (2.63) respectivement.

En utilisant la relation de la quasi-hermiticité (3.41), l'invariant pseudo-hermitien associé à l'Hamiltonien non hermitien $H(t)$ peut être obtenu facilement. Ainsi, la phase des états évolués

$\left|\Phi_n^{PH}(t)\right\rangle$ est réelle et peut être obtenu à l'aide des Eqs. (2.63) et (4.43)

$$\epsilon_n^{PH}(t) = -\int\limits_0^t \left[\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)}{M(t')\sigma^2} - \frac{\alpha(t')\lambda(t')}{4}\right] dt'. \tag{4.44}$$

Cependant, la solution générale de l'équation de Schrödinger dépendante du temps de l'Hamiltonien non-hermitien (4.24) est donnée par [31]

$$\begin{aligned}\left|\Phi_n^{H}\right\rangle &= \exp\left[i\epsilon_n^{PH}(t)\right]\left|\phi_n^{PH}\right\rangle \\ &= \exp\left[-\int\limits_0^t \left(\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)}{M(t')\sigma^2} - \frac{\alpha(t')\lambda(t')}{4}\right) dt'\right]\left|\phi_n^{PH}\right\rangle,\end{aligned} \tag{4.45}$$

où

$$\begin{aligned}\left|\phi_n^{PH}(x,t)\right\rangle &= \rho^{-1}(t)\left|\psi_n^{I_h^{osc}}(x,t)\right\rangle \\ &= \exp\left[\frac{-i}{8\hbar}m\alpha(t)\dot{\alpha}(t)\right]\exp\left[\frac{-m\dot{\alpha}(t)}{2}x\right]\psi_n^{I_h^{osc}}\left(x-\frac{i\alpha(t)}{2},t\right),\end{aligned} \tag{4.46}$$

sont les fonctions propres de $I^{PH}(t)$ obtenues par l'action de l'opérateur $\rho^{-1}(t)$ sur les fonctions propres de $I_h^{osc}(t)$.

Avant de conclure, étudions quelques cas particuliers : le cas d'un oscillateur harmonique en présence d'un potentiel linéaire où $\lambda(t) = at$ et la fréquence constante $\omega = \omega_0$ [103]. Ici, les Eqs. (2.39) et (4.28) de $\sigma(t)$ et $\alpha(t)$ peuvent être explicitement résolues et donnent

$$\frac{1}{m\sigma^2} = \omega_0, \tag{4.47}$$

$$\alpha(t) = -\frac{2at}{m\omega_0^2}. \tag{4.48}$$

Ensuite, l'expression de la phase (4.44) est

$$\epsilon_n(t) = -\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega_0 t - \frac{a^2t^3}{6\hbar m\omega_0^2}, \tag{4.49}$$

et la fonction d'onde (4.45) se réduit à celles obtenues dans la réf [103]

$$\Phi_n^H(x,t) = \left[\frac{1}{2^n n!}\sqrt{\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}}\right]^{\frac{1}{2}} \exp\left[i\epsilon_n^{PH}(t)\right] \exp\left[\frac{a}{\omega_0^2}x\right]$$
$$\exp\left[-\frac{m\omega_0}{2\hbar}\left(x+i\frac{at}{m\omega_0^2}\right)^2\right]\mathcal{H}_n\left[\left(\frac{m\omega_0}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\left(x+i\frac{at}{m\omega_0^2}\right)\right]. \tag{4.50}$$

4.5.2 Particule de masse variable dans un potentiel complexe dépendant du temps

Dans la deuxième application, nous avons traité le problème d'une particule de masse dépendante du temps en présence d'un potentiel linéaire dépendant du temps et complexe

$$H(t) = \frac{p^2}{2M(t)} + if(t)x, \quad \text{avec } x > 0, \tag{4.51}$$

où $M(t)$ et $f(t)$ sont des fonctions arbitraires réelles dépendantes du temps.

Prenons l'opérateur métrique sous la forme

$$\eta(t) = \exp\left[-\frac{\alpha(t)}{\hbar}p - \frac{\beta(t)}{\hbar}x\right], \tag{4.52}$$

avec $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ sont des fonctions réelles dépendantes du temps. On peut facilement montrer que sous la transformation $\eta(t)$ définie dans l'équation (4.52), les opérateurs x et p se transforment de la manière suivante

$$\eta(t)x\eta^{-1}(t) = x + i\alpha(t), \tag{4.53}$$

$$\eta(t)p\eta^{-1}(t) = p - i\beta(t), \tag{4.54}$$

et

$$i\hbar\dot{\eta}(t)\eta^{-1}(t) = -i\dot{\alpha}(t)p - i\dot{\beta}(t)x - \frac{1}{2}\left[\dot{\alpha}(t)\beta(t) - \alpha(t)\dot{\beta}(t)\right]. \tag{4.55}$$

Pour déterminer les fonctions $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ nous utilisons la relation (4.6) et les Eqs. (4.53), (4.54) et(4.55) , on obtient le système d'équations

$$\dot{\alpha}(t) + \frac{\beta(t)}{M(t)} = 0, \tag{4.56}$$

$$2f(t) - \dot{\beta}(t) = 0. \tag{4.57}$$

En substituant l'équation (4.56) dans l'équation (4.57) , on obtient alors

$$f(t) = -\frac{1}{2}\left[\dot{M}(t)\dot{\alpha}(t) + M(t)\ddot{\alpha}(t)\right], \tag{4.58}$$

et l'opérateur métrique dépendant du temps $\eta(t)$ est donné par

$$\eta(t) = \exp\left[-\frac{\alpha(t)}{\hbar}p + \frac{M(t)\dot{\alpha}(t)}{\hbar}x\right], \tag{4.59}$$

en utilisant la relation $\eta(t) = \rho^{\dagger}(t)\rho(t)$ où l'opérateur $\rho(t)$ n'est pas unique et peut être considéré comme un opérateur réel, dans ce cas

$$\rho(t) = \eta^{\frac{1}{2}}(t) = \exp\left[-\frac{\alpha(t)}{2\hbar}p + \frac{M(t)\dot{\alpha}(t)}{2\hbar}x\right]. \tag{4.60}$$

On peut facilement montrer que sous la transformation $\rho(t)$ définie dans l'équation (4.60), les opérateurs x et p se transforment comme suit

$$\rho(t)x\rho^{-1}(t) = x + i\frac{\alpha(t)}{2}, \tag{4.61}$$

$$\rho(t)p\rho^{-1}(t) = p + i\frac{M(t)\dot{\alpha}(t)}{2}, \tag{4.62}$$

et en prenant la dérivée partielle par rapport au temps de $\rho(t)$, nous obtenons le produit approprié

$$\begin{aligned} i\hbar\rho^{-1}(t)\dot{\rho}(t) = &-i\frac{\dot{\alpha}(t)}{2}p + i\frac{1}{2}\left(\dot{M}(t)\dot{\alpha}(t) + M(t)\ddot{\alpha}(t)\right)x \\ &-\frac{1}{8}\left(\dot{M}(t)\dot{\alpha}(t)\alpha(t) + M(t)\alpha(t)\ddot{\alpha}(t) - M(t)\dot{\alpha}^2(t)\right). \end{aligned} \tag{4.63}$$

En substituant les Eqs. (4.61) , (4.62) et (4.63) dans la relation (4.4) on trouve

$$h(t) = \frac{p^2}{2M(t)} - \frac{f(t)\alpha(t)}{4}. \tag{4.64}$$

Par conséquent, le terme dépendant du temps $\frac{\alpha(t)f(t)}{4}$ dans (4.64) peut être éliminé par une transformation unitaire dépendante du temps, à savoir $\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_0^t \frac{\alpha(t')f(t')}{4}dt'\right]$, la solution $\psi^h(x,t)$

de l'équation de Schrödinger pour l'Hamiltonien hermitien (4.64) se réduit à

$$\psi^{h}(x,t)=\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int\frac{\alpha(t)\,f(t)}{4}dt'\right]\phi(x,t)\,, \tag{4.65}$$

où $\phi(x,t)$ est la solution de l'équation de Schrödinger pour l'Hamiltonien $h^{L}(t)$ d'une particule libre avec une masse dépendante du temps à une dimension

$$h^{L}(t)=\frac{1}{2M(t)}p^{2}. \tag{4.66}$$

Pour résoudre l'équation de Schrödinger associée à l'Hamiltonien (4.66), nous utilisons la méthodes des invariants. On cherche un opérateur invariant Hermitien sous la forme

$$I(t)=\beta_{1}(t)\,p^{2}+\beta_{2}(t)\,x+\beta_{3}(t)\,p, \tag{4.67}$$

où les coefficients $\beta_{k}(t)$, et $k\in\{1,2,3\}$, sont des fonctions réelles du temps qui seront choisies de telle sorte à satisfaire l'équation

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t}=-\frac{1}{i\hbar}\left[I(t)\,,h^{L}(t)\right]. \tag{4.68}$$

En substituant les Eqs. (4.66) et (4.67) dans l'Eq. (4.68), on trouve un système d'équations du premier ordre

$$\dot{\beta}_{1}(t)=0,\quad\dot{\beta}_{2}(t)=0,\quad\dot{\beta}_{3}(t)=\frac{-\beta_{2}(t)}{M(t)}, \tag{4.69}$$

donc

$$\beta_{1}(t)=A,\quad\beta_{2}(t)=B,\quad\dot{\beta}_{3}(t)=\frac{-B}{M(t)}, \tag{4.70}$$

où A et B sont des constantes. Pour simplifier les calculs on prend $A=B=1$.

Ainsi, l'invariant est donné par

$$I(t)=p^{2}+x+\gamma(t)\,p, \tag{4.71}$$

où

$$\gamma(t)=-\int\frac{1}{M(t)}dt. \tag{4.72}$$

Comme nous l'avons déjà mentionné ci-dessus, les fonctions propres $|\varphi(q,t)\rangle$ de $I(t)$ sont supposées former un ensemble orthonormé complet correspondant à des valeurs propres indépendantes du temps λ_n. Ainsi

$$I(t)\varphi_n(x,t) = \lambda_n \varphi_n(x,t), \tag{4.73}$$

avec

$$\langle \varphi_n(x,t) | \, \varphi_m(x,t) \rangle = \delta_{nm}. \tag{4.74}$$

Pour obtenir les solutions exactes de l'équation Schrödinger de l'Hamiltonien (4.51), considérons la transformation unitaire suivante

$$\varphi_n(x,t) = U\varphi_n'(x,t), \tag{4.75}$$

avec

$$U = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\left(\frac{\gamma^2(t)}{4}p + \frac{\gamma(t)}{2}x\right)\right]. \tag{4.76}$$

Sous l'action de cette transformation, l'équation aux valeurs propres (2.42) devient

$$I'(t)\varphi_n'(x,t) = \lambda\varphi_n'(x,t), \tag{4.77}$$

avec

$$I'(t) = U^{\dagger}I(t)\,U = p^2 + x. \tag{4.78}$$

Choisissons $\hbar = 1$, alors l'équation (4.77) s'écrit comme sous la forme

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - x + \lambda_n\right]\varphi_n'(x) = 0. \tag{4.79}$$

puis effectuons le changement de variable suivant

$$\xi = \lambda_n - x. \tag{4.80}$$

Ensuite, l'Eq. (4.79) se réduit à l'équation d'Airy à une dimension [111]

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\varphi_n'(\xi) + \xi\varphi_n'(\xi) = 0, \tag{4.81}$$

et la solution de cette équation est

$$\varphi_n'(\xi) = N_1 Ai(-\xi) + N_2 Bi(-\xi), \tag{4.82}$$

où Ai et Bi sont les fonctions d'Airy homogènes. Mais $Bi(x)$ tend vers l'infini pour $x > 0$. Cette solution n'est pas pertinente, donc on choisit $N_2 = 0$, alors la solution de l'équation (4.81) se réduit à

$$\varphi_n' (\xi) = N_1 Ai (-\xi) . \tag{4.83}$$

Les valeurs propres λ_n sont déterminés par la condition $\varphi_n' (\xi) = 0$, donc

$$Ai (-\lambda_n) = 0, \tag{4.84}$$

ensuite, les valeurs propres λ_n sont déterminées par les zéros a_{n+1} de la fonction d'Airy [112]

$$\lambda_n = -a_{n+1}, \tag{4.85}$$

où les valeurs numériques des zéros a_{n+1} sont données par

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= -a_1 \simeq 2,33811 \\
\lambda_1 &= -a_2 \simeq 4,08795 \\
\lambda_2 &= -a_3 \simeq 5,52056 \\
\lambda_3 &= -a_4 \simeq 6,78671 \\
&. \\
&. \\
&.
\end{aligned}$$

La constante de normalisation N_1 est déterminée par la condition de orthonormalisation des fonctions propres [113]

$$\int_0^{+\infty} \varphi_n' (x) \varphi_m'^* (x) \, dx = \delta (\lambda_n - \lambda_m) , \tag{4.86}$$

et nous obtenons

$$N_1 = \frac{1}{Ai' (a_n)}, \tag{4.87}$$

alors la solution de l'Eq. (4.81) est

$$\varphi_n'(x) = \frac{1}{Ai'(a_n)} Ai(x + a_n). \tag{4.88}$$

En substutiant les relations (4.88) et (4.76) dans (4.75) , on trouve la solution de l'équation aux valeurs propres de l'invariant $I(t)$

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{Ai'(a_n)} \exp\left[\frac{i\gamma^2(t)}{4} p\right] \exp\left[-\frac{i\gamma(t)}{2} x\right] \exp\left[i\frac{\gamma^3(t)}{8}\right] Ai(x + a_n), \tag{4.89}$$

pour calculer la phase associée à l'Hamiltonien $h^L(t)$ on utilise l'Eq (2.18)

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_n &= \langle \varphi(x,t)| \, i\frac{\partial}{\partial t} - h^L(t) \, |\varphi(x,t)\rangle \\ &= \langle \varphi_n'(x)| \, U^\dagger \left[i\frac{\partial}{\partial t} - \frac{p^2}{2M(t)} \right] U \, |\varphi_n'(x)\rangle . \end{aligned} \tag{4.90}$$

D'autre part, l'action de la transformation U sur l'opérateur p^2 donne

$$U^\dagger \frac{p^2}{2M(t)} U = \frac{p^2}{2M(t)} - \frac{\gamma(t)\, p}{2M(t)} + \frac{\gamma^2(t)}{8M(t)}, \tag{4.91}$$

et comme la fonction $Ai(x + a_n)$ est indépendante du temps, alors

$$iU^\dagger \frac{\partial}{\partial t} U = \frac{\gamma(t)\,\dot{\gamma}(t)}{2} p + \frac{\dot{\gamma}(t)}{2} x + \frac{\dot{\gamma}(t)\,\gamma^2(t)}{8}, \tag{4.92}$$

en substituant les Eqs. (4.91) et (4.92) dans l'Eq. (4.90) , et le fait que $\dot{\gamma}(t) = \frac{-1}{M(t)}$,on obtient

$$\dot{\varepsilon}_n = -\frac{1}{2M(t)} \langle \varphi_n'(x)| \, x \, |\varphi_n'(x)\rangle - \frac{1}{2M(t)} \langle \varphi_n'(x)| \, p^2 \, |\varphi_n'(x)\rangle , \tag{4.93}$$

d'autre part l'équation (4.79) donne

$$p^2 \varphi_n'(x) = (\lambda_n - x)\, \varphi_n'(x), \tag{4.94}$$

substituons l'Eq. (4.94) dans l'Eq. (4.93) on trouve

$$\dot{\varepsilon}_n = -\frac{1}{2M(t)} \lambda_n, \tag{4.95}$$

donc la phase associée à l'Hamiltonien $h^L(t)$ est donnée par

$$\epsilon_n(t) = -\int \frac{\lambda_n}{2M(t)} dt. \tag{4.96}$$

D'autre part l'action de l'operateur U sur la fonction $\varphi'(x,t)$ est donnée par

$$\begin{aligned} U\varphi'(x,t) &= N_1 \exp\left[\frac{i\gamma^2(t)}{2\hbar}p - \frac{i\gamma(t)}{2\hbar}x\right] Ai(x+a_n) \\ &= N_1 \exp\left[\frac{-i\gamma^3(t)}{8\hbar}\right] \exp\left[-\frac{i\gamma(t)}{2\hbar}x\right] Ai\left(x + \frac{\gamma^2(t)}{2} + a_n\right), \end{aligned} \tag{4.97}$$

alors la solution $\psi^h(x,t)$ de l'équation de Schrödinger de l'hamiltonien (4.66) s'écrit comme suit

$$\psi^h(x,t) = N_1 \exp\left[\frac{-i\gamma^3(t)}{8} + i\int\left(\frac{\alpha(t) f(t)}{4} - \frac{\lambda_n}{2M(t)}\right) dt\right] \exp\left[-\frac{i\gamma(t)}{2}x\right] Ai(x+\tau(t)), \tag{4.98}$$

où

$$\tau(t) = \frac{\gamma^2(t)}{2} + a_n. \tag{4.99}$$

La solution de l'équation de Schrödinger pour l'Hamiltonien non-Hermitien (4.51) est

$$\Psi^H(x,t) = \rho^{-1}\psi^h(x,t) = N_1 \exp\left[\frac{i}{8}\left(M\alpha\dot{\alpha} - \gamma^3(t)\right) + i\int\left(\frac{\alpha(t) f(t)}{4} - \frac{\lambda_n}{2M(t)}\right) dt\right] \tag{4.100}$$

$$\exp\left[-\frac{M(t)\dot{\alpha}(t)}{2}x\right] \exp\left[\frac{\alpha(t)}{2}p\right] \exp\left[-\frac{i\gamma(t)}{2}x\right] Ai(x+\tau(t)),$$

et en utilisant la propriété suivante des opérateurs

$$e^A e^B = e^B e^A e^{[A,B]}, \tag{4.101}$$

alors

$$\exp\left[\frac{\alpha(t)}{2}p\right] \exp\left[-\frac{i\gamma(t)}{2}x\right] = \exp\left[-\frac{\gamma(t)\alpha(t)}{4}\right] \exp\left[-\frac{i\gamma(t)}{2}x\right] \exp\left[\frac{\alpha(t)}{2}p\right]. \tag{4.102}$$

Finalement, en substituant l'Eq. (4.102) dans l'Eq. (4.100) , alors la solution générale de l'équation de Schrödinger associée à l'hamiltonien (4.51) est donnée par

$$\Psi^H(x,t) = \rho^{-1}\psi^h(x,t) = \exp\left[-\frac{\gamma(t)\,\alpha(t)}{4} + i\theta(t)\right]\exp\left[-\frac{M(t)\,\dot{\alpha}(t) + i\gamma(t)}{2}x\right] Ai\,(x - \chi(t)), \tag{4.103}$$

avec

$$\theta(t) = \frac{1}{8}\left[M\alpha\dot{\alpha} - \gamma^3(t)\right] + \int\left(\frac{\alpha(t)\,f(t)}{4} - \frac{\lambda_n}{2M(t)}\right)dt, \tag{4.104}$$

et

$$\chi(t) = -i\frac{\alpha(t)}{2\hbar} + \tau(t)\,. \tag{4.105}$$

Conclusion

Cette thèse est consacrée à l'étude des solutions de l'équation de Schrödinger pour les systèmes non-Hermitien dépendants explicitements du temps. Après avoir introduit la théorie des systèmes quantiques dépendants explicitement du temps et les différentes méthodes de résolution de l'équation de Schrodinger associée, nous avons fait un rappel sur la méthode des invariants et comme application, nous avons exposé l'exemple de l'oscillateur harmonique avec masse et fréquence dépendantes explicitements du temps.

Ensuite, après un rappel sur les symétries discrètes en mécanique quantique, nous avons présenté la mécanique quantique $\mathcal{PT}$-symétrique introduite par Carl Bender et Stefan Boettcher en 1998 pour les Hamiltoniens non-hermitiens invariants sous l'action de la transformation de la symétrie $\mathcal{PT}$, si cette dernière n'est pas brisée alors ces Hamiltoniens possèdent des spectres réels. En plus, les Hamiltoniens $\mathcal{PT}$-symétriques sont invariants sous l'action de l'opérateur $\mathcal{C}$ et le $\mathcal{CPT}$-produit scalaire est défini positif. Puis nous avons aussi présenté la théorie quantique pseudo-hermitienne pour les Hamiltoniens non-hermitiens dont le spectre est réel et qui est une généralisation de la mécanique quantique $\mathcal{PT}$-symétrique. Cette théorie quantique, introduite par Ali Mostafazadeh en 2002, stipule que tout Hamiltonien de spectre réel est pseudo-hermitien, et en particulier les Hamiltoniens $\mathcal{PT}$-symétriques appartiennent à la classe des Hamiltoniens pseudo-hermitiens.

Dans la dernière partie de cette thèse nous avons présenté les systèmes non hermitiens dépendants explicitement du temps. Dans l'étude de ces systèmes des difficultés conceptuelles ont été rencontrées concernant l'interprétation probabiliste et l'unitarité de l'opérateur d'évolution. Le traitement des Hamiltoniens non-hermitiens dépendants explicitement du temps avec des opérateurs métriques dépendants du temps est encore controversé et a été le centre d'un débat intéressant entre Ali Mostafazadeh et Miloslav Znojil.

En effet, tout Hamiltonien dépendant du temps $H(t)$ admettant une solution $\Phi(x,t)$ qui est liée à la solution $\Psi(x,t)$ d'un Hamiltonien Hermitien $h(t)$ par la relation $\Phi(x,t) = \rho(t)\Psi(x,t)$ où $\rho(t)$ est un opérateur linéaire et inversible, alors l'Hamiltonien $H(t)$ vérifie la relation suivante

$$H^{\dagger}(t) = \eta(t) H(t) \eta^{-1}(t) + \dot{\eta}(t) \eta^{-1}(t).$$

Pour contourner ces difficultés, nous avons utilisé la méthode des invariants pour la recherche des solutions de l'équation de Schrodinger assosciée. Par un calcul original, nous avons montré que tout Hamiltonien satisfaisant la relation précédente possède un invariant pseudo-Hermitien

$$I_{PH}(t) = \eta(t) I(t) \eta^{-1}(t).$$

où $I(t)$ est l'invariant associé à l'Hamiltonien hermitien $h(t)$.

L'invariant $I_{PH}(t)$ admet des valeurs propres réelles et vérifie la relation de Von Neumann

$$\frac{\partial I_{PH}(t)}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}\left[H(t), I_{PH}(t)\right],$$

et la phase totale du système est réelle et donnée par

$$\hbar\dot{\epsilon} = \left\langle \phi^{PH}(x,t) \right| \eta(t) i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H(t) \left| \phi^{PH}(x,t) \right\rangle,$$

Comme application des résultat obtenus, nous avons traités deux problèmes originaux, le premièr concerne la résolution de l'équation de Schrödinger pour l'oscillateur harmonique avec fréquence dépendante du temps dans un potentiel linéaire complexe dépendant du temps, cet Hamiltonien possède une phase et une valeur moyenne réelle. Les résultats obtenus ont fait l'objet d'une publication dans un journal de renommée internationale. Dans la deuxième application, nous avons résolu l'équation de Schrödinger pour une particule avec masse variable dans un potentiel linéaire complexe dépendant du temps. Dans ces deux problèmes, nous avons montré que l'opérateur métrique $\eta(t)$ est explicitement dépendant du temps.

Bibliographie

[1] C. M. Bender, S. Boettcher, Phys. Rev. Lett. **80**, 5243 (1998).

[2] F. Bagarello, J. P. Gazeau, F. H. Szaraniec, M. Znojil (Eds.), *Non-Self adjoint operator in quantum mechanics*, 2015, John Wiley & Sons.

[3] C. M. Bender, Introduction to PT-Symmetric Quantum Theory, arXiv :quant-ph/0501052v1, (2005).

[4] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermitian Representation of Quantum Mechanics, arXiv :0810.5643v4 [quant-ph], (2011).

[5] S. Dey, A. Fring and B. Khantoul, J. Phys. A : Math. Theor. **46,** 335304 (2013).

[6] A. Mostafazadeh, J. Math. Phys. **43**, 205 (2002).

[7] A. Mostafazadeh, J. Math. Phys. **43**, 2814 (2002).

[8] A. Mostafazadeh, J. Math. Phys. **43**, 3944 (2002).

[9] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. London A. **180**, 1 (1942).

[10] W. Pauli, Rev. Mod. Phys. **15**, 175 (1943).

[11] S. N. Gupta, Phys. Rev. **77**, 294 (1950).

[12] S. N. Gupta, Proc. Phys. Soc. Lond **63**, 681 (1950).

[13] K. Bleuler, Helv. Phys. Acta **23**, 567 (1950).

[14] E. C. G. Sudarshan, Phys. Rev. **123**, 2183 (1961).

[15] K. L. Nagy, *State Vector Spaces with Indefinite Metric Quantum Field Theory*, Noordhoff, Groningen, Netherlands, 1966.

[16] T. D. Lee, G. C. Wick, Nucl. Phys. B. **9**, 209 (1969).

[17] N. Nakanishi, Suppl. Prog. Theor. Phys. **51**, 1 (1972).

[18] C. Reuter, K. Makris, R. El-Ganainy, D. Christodulides, M. Segev and D. Kip, Nature Phys., **6,** 192 (2010).

[19] T. Wu, Phys. Rev. **115**, 1390 (1959).

[20] R. Haydock and M. J. Kelly, Phys. C : Solid State Physics. **8**, 197 (1975).

[21] F. J. Dyson, Phys. Rev. **102**, 1217 (1956).

[22] F. G. Scholtz, H. B. Geyer, F. J. W. Hahne, Ann. Phys. **213**, 74 (1992).

[23] D. Bessis and Z. Justin, Private communication with C. M. Bender (1998).

[24] M. Znojil, Time-dependent quasi-Hermitian Hamiltonians and the unitary quantum evolution, arXiv :0710.5653.

[25] M. Znojil, Reply to Comment on "Time-dependent quasi-Hermitian Hamiltonians and the unitary quantum evolution", arXiv :0711.0514.

[26] M. Znojil, Which operator generates time evolution in Quantum Mechanics? arXiv :0711.0535.

[27] A. Mostafazadeh, Phys. Lett. B **650**, 208 (2007).

[28] A. Mostafazadeh, Comment on "Time-dependent quasi-Hermitian Hamiltonians and the unitary quantum evolution", arXiv :0711.0137.

[29] A. Mostafazadeh, Comment on "Reply to Comment on Time-dependent Quasi-Hermitian Hamiltonians and the Unitary Quantum Evolution", arXiv :0711.1078.

[30] I. A. Pedrosa, Phys. Rev. A. **55**, 3219 (1997).

[31] B. Khantoul, A. Bounames, and M. Maamache. Eur. Phys. J. Plus 132, 258 (2017).

[32] R. S. Kaushal, S. C. Mishra and K. C. Tripathy, Phys. Lett. A, **102**, 1, 2 (1984).

[33] M. Omote and S. Kamefuchi, Phys. Lett. A, **206**, 273 (1995).

[34] M. A. Markov (Ed.), *Invariants and the Evolution of Nonstationary Quantum Systems*, 1989, Nova Science Publishers, Commack.

[35] M. Kleber, Phys. Rep. **236,** 331 (1994).

[36] Chung-In Um, Kyu-Hwang Yeon, and Thomas F. George, Phys. Rep. **362,** 63 (2002).

[37] L. S. Brown, Phys. Rev. Lett. **66,** 527 (1991).

[38] C. Yüce, Ann. Phys. **308,** 599 (2003).

[39] B. Khantoul and A. Fring, Phys. Lett. A **379**, 2704 (2015).

[40] H. R. Lewis, Jr. and W. B. Riesenfeld, J. Math. Phys. **10,** 1458 (1969).

[41] I. A. Pedrosa, G. P. Serra and I. Guedes, Phys. Rev. **A 56,** 4300 (1997).

[42] L. Chetouani, L. Guechi and T.F. Hammann, Phys. Rev. **A 40,** 1157 (1989).

[43] Kh. Nouicer and L. Chetouani, Act. Phys. Slovaca, **49,** 905 (1999).

[44] F. Benamira and L. Guechi, Czech. J. Phys. **53,** 717, quant-ph/0112003 (2003).

[45] F. Benamira and L. Guechi, Europhys. Lett. **60,** 649, quant-ph/0304134 (2002).

[46] N. J. M. Horing and K. Sabeech, Mod. Phys. Lett. **B11,** 1193 (1997).

[47] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloe, *Mécanique quantique*, T2, Hermann, Paris, 1977.

[48] M. Born and V. Fock, Z. Phys. **51**, 165 (1928).

[49] A. Shapere, F. Wilczek, *Geometric Phases in Physics*, World Scientific, Singapore, (1989).

[50] M. V. Berry, Proc. R. Soc. Lond. A **392**, 45 (1984).

[51] M. Maamache, Phys. Rev. **A 52,** 936 (1995).

[52] Y. Aharonov, J. Anandan, Phys. Rev. Lett. **58**, 1593 (1987).

[53] J. Liu, B. Hu, B. Li, Phys. Rev. Lett. **81**, 1749 (1998).

[54] X. B. Wang, L. C. Kwek, C. H. Oh, Phys. Rev. A, **62**, 032105 (2000).

[55] B. P. Hou, S. J. Wang, Physics Letters A **311**, 106 (2003).

[56] G. De Chiara, G. M. Palma, Phys. Rev. Lett. **91**, 090404 (2003).

[57] D. M. Tong, K. Singh, L. C. Kwek, X. J. Fan, C. H. Oh, Phys. Lett. A, **339**, 288 (2005).

[58] R. Simon, N. Mukunda, Phys Rev Lett. **70**, 880 (1993).

[59] D. C. Khandekar, S.V. Lawande,K.V. Bhagwat, *Path-Integral Methods and their Applications*, World Scientific Pub., Singapore, 1993.

[60] C. M. Cheng and P. C. W. Fung, J. Phys. A Math.Gen. **21,** 4115 (1988)

[61] B. Baseia , A L De Brito and V S. Bagnato, Phys. Rev. A **45,** 5308 (1992).

[62] H. P. Yuen, Phys. Rev. A **13,** 2226 (1976).

[63] C. J. Eliezer and A. Gray A SIAM, J. Appl. Math. **30,** 463 (1976).

[64] Jr. H. R. Lewis, J. Math. Phys. **9,** 1976 (1968).

[65] Jr. H. R. Lewis, Phys. Rev. Lett. **18,** 510 (1967).

[66] J. Y. Ji, J. Kim and S. P. Kim, Phys. Rev. **A 51,** 4268 (1995).

[67] X. Ma and W. Rhodes, Phys. Rev. A **39,** 1941 (1989).

[68] C. F. Lo, Phys. Rev.A **47,** 115 (1993).

[69] C. F. Lo, Phys. Rev. A **43**, 404 (1991).

[70] C. F. Lo, Europhys. Lett. **24,** 319 (1993).

[71] M. S. Abdalla and R K. Colegrave, Phys.Rev. A **48,** 1526 (1993).

[72] C. M. A. Dantas, I. A. Pedrosa and B. Baseia, Phys. Rev. A **45,** 1320 (1992).

[73] J-Y Ji, J. K. Kim and S. P. Kim, Phys. Rev. A **51,** 4268 (1995).

[74] D. Sheng, R. D. Khan, Z. Jialun and S. Wenda, Int. J.Theor.Phys. **34,** 355 (1995).

[75] C. M. A. Dantas, I A Pedrosa and M Baseia, J.Phys. **22,** 33 (1992).

[76] M. Maggiore, *Gravitational Waves, Vol I : Theory and Experiments*, Oxford University Press, 2008.

[77] H. C. Ohanian and R. Ruffini, *Gravitation and space time*, Norton, 1994.

[78] Y. Ben-Aryeh, Harmonic oscillator with time-dependent effective-mass and frequency with a possible application to "chirped tidal" gravitational waves forces affecting interferometric detectors. arXiv :0807.4670 (2008).

[79] I. A. Pedrosa, Journal of Mathematical Physics 28, 2662 (1987).

[80] P. E. G. de Assis, Non-Hermitian Hamiltonians in Field Theory, PhD Thesis, City University London, 2009.

[81] J.S.W. Lamb and J. A.G. Roberts, Physica. D **112,** 1 (1998).

[82] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Cambridge University Press, 1996.

[83] J. Collot, *Cours de physique des particules*, Université de Grenoble, 2007/2008.

[84] C. M. Bender, D. C. Brody, and H. F. Jones, Phys. Rev. Lett. **89**, 270401 (2002). Erratum Phys. Rev. Lett. **92**, 119902 (2004).

[85] C. M. Bender, The complex pendulum, Physics Reports. **315**, 27 (1999).

[86] C. M. Bender , S. Boettcher and Peter N. Meisinger, J.Math.Phys. **40**, 2201(1999).

[87] C. M. Bender, S. Boettcher, and V. M. Savage, J. Math. Phys. (N.Y) **41**, 6381 (2000).

[88] C. M. Bender and Q Wang, J. Phys. A. **34**, 3325 (2001).

[89] C. M. Bender, S. Boettcher, P. N. Meisinger and Q. Wang, Phys. Lett. A. **302**, 286 (2002).

[90] C. M. Bender, D. C. Brody and H. F. Jones, Am. J. Phys. **71**, 1905 (2003).

[91] C. M. Bender and H. F. Jones, Phys. Lett. A **328**, 102 (2004).

[92] B. Khantoul, Mémoire de magister, Université des Frères Mentouri, Constantine (2010).

[93] M. Znojil, J. Phys. A **36**, 7639 (2003).

[94] A. Mostafazadeh and A Batal, J. Phys. A : Math. Gen. **37**, 11645 (2004).

[95] A. Mostafazadeh, J. Phys. A. **38** ,6557 (2005).

[96] Q. Wang, Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine Vol. **50**, Part 2, 986 (2004).

[97] A. Zafer, J. Phys. A : Math. Gen. **36,** 9711 (2003).

[98] F. Masillo, Dynamics of Hermitian and Quasi-Hermitian Open Systems, Ph.D. Thesis, University of Salento.

[99] J. Dieudonné, Quasi-Hermitian operators, Proc. Int. Symp. on Linear Spaces (Jerusalem, 1960), Pergamon, Oxford, 115 (1961).

[100] I. H. Sheth, American. Math. Soc. **17,** 998 (1966).

[101] J. P. Williams, *Operators similar to their adjoints*, Proceedings of the American Mathematical Society **20**, 121(1969).

[102] A. Mostafazadeh, Int. J. Geo. Meth. Mod. Phys. **7**, 1191 (2010).

[103] A. de Souza Dutra, M.B. Hott, V.G.C.S. dos Santos, Europhys. Lett. **71**, 166 (2005).

[104] C.F. de Morrison Faria, A. Fring, J. Phys. A **39**, 9269 (2006).

[105] C.F. de Morisson Faria, A. Fring, Laser Phys. **17**, 424 (2007).

[106] J. Gong, Q. Wang, Phys. Rev. A **82**, 012103 (2010).

[107] J. Gong, Q. Wang, J. Phys. A **46**, 485302 (2013).

[108] M. Maamache, Phys. Rev. A **92**, 032106 (2015).

[109] A. Fring, M.H.Y. Moussa, Phys. Rev. A **93**, 042114 (2016).

[110] A. Fring, M.H.Y. Moussa, Phys. Rev. A **94**, 042128 (2016).

[111] O. Vallee and M. Soares, *Airy functions and applictions to physics*, Imperial College Press.

[112] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York, 1965.

[113] L. D. Landau, E. Lifchiz, *Mécanique quantique*, Editions Mir, Moscou, 1973.

ANNEXE
Article publié