Table des matières

Intodution Générale **6**

1 Initiation à la théorie des cordes **12**

1.1 Théorie des cordes bosoniques 12

1.1.1 Approche de Nambu 12

1.1.2 Corde ouverte 13

1.1.3 Quantification 17

1.2 Théorie des cordes fermioniques 21

1.2.1 Cordes fermioniques classiques 22

1.2.2 Quantification 25

1.2.3 Dimension critique 27

1.3 Formalisme paraquantique 27

1.3.1 Introduction 27

1.3.2 Paraquantification 28

1.3.3 Généralisation au cas de plusieurs oscillateurs 31

2 Cordes parafermioniques ouvertes entre deux Dp-branes parallèles dans le modèle de Ramond **33**

2.1 Conditions aux bords 34

2.2 Le Modèle 35

2.3 Opérateur de masse 39

2.4 Spectre et dégénérescence 40

2.5 Fonction de partition 43

2.6 Superalgèbre de Virasoro 44

3 Cordes parafermioniques ouvertes entre deux Dp-branes parallèles dans le modèle de Neveu-Schwarz 45

3.1 Opérateur de masse 47

3.2 Spectre et dégénérescence 48

3.3 Fonction de partition 50

3.4 Superalgèbre de Virasoro 50

4 Projection GSO et supersymétrie d'espace-temps 52

4.1 Introduction 52

4.2 Projection GSO et supersymétrie d'espace-temps 55

5 Cordes parafermioniques ouvertes entre deux Dp-, Dq-branes parallèles 58

5.1 Introduction 58

5.2 Conditions aux bords et expansions en modes 59

5.3 Le Modèle 60

5.4 Spectre, dégénérescence et fonction de partition 61

5.4.1 Modèle de Ramond 61

5.4.2 Modèle de Neveu-Schwarz 63

5.5 Superalgèbre de Virasoro 66

5.6 Resultats 67

Conclusion Générale 69

Annexe A 72

Annexe B 75

Annexe C 77

Bibliographie 78

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE JIJEL
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
ET INFORMATIQUE
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

THESE

Présentée pour obtenir le diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : Physique

Option : Physique Théorique

par

Douria HAMAM

THEME

Cordes Fermioniques Ouvertes en Présence de D-branes dans le Formalisme de la Paraquantification

Soutenue le : 13/12/2018

Devant le Jury :

Président :	A. Bounames	Prof.	Univ. Jijel
Rapporteur :	N. Belaloui	Prof.	Univ. Frères Mentouri
Examinateurs :	A. Benslama	Prof.	Univ. Frères Mentouri
	A. Bouda	Prof.	Univ. Béjaia
	T. Boudjedaa	Prof.	Univ. Jijel
	S. Haouat	Prof.	Univ. Jijel

A mon petit "Ahmed"

Remerciements

Tous mes remerciements vont tout premièrement à Dieu tout puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il m'a données pour terminer cette thèse.

Je tiens à remercier mon directeur de thèse Mr. N. Belaloui, Professeur à l'université Frères Mentouri Constantine, pour ses discussions, sa disponibilité infaillible à mon égard, son aide, son soutien moral et scientifique. Qu'il en soit grandement remercié.

Mes remerciements vont ensuite au Jury de ma thèse, Mr. A. Bounames, Professeur à l'université de Jijel pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury, et les examinateurs : Mrs. A. Benslama, Professeur à l'université Frères Mentouri Constantine, A. Bouda, Professeur à l'université de Béjaia, T. Boudjedaa et S. Haouat professeurs à l'université de Jijel, qui ont bien accepté de juger ce travail.

Je remercie vivement Mrs. O. Boutaghou, Maîtres de conférences à l'université Yahya Fares de Média et H. Azri pour l'aide scientifique qu'il m'ont accordé.

Quant à mes très chers parents, je ne trouverai jamais les mots pour les remercier suffisamment, pour leur soutien moral et financier, leur assistance et engagement permanent. Je les remercie infiniment et j'implore Allah le tout puissant de les protéger et leur prêter longue vie.

J'adresse mes plus sincères remerciements à mes frères : Redouane,Walid, Ishak et mes sœurs : Souhila, Aziza, Faiza, Hanan qui m'ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de cette thèse.

Enfin, et surtout, je remercie mon mari pour une quantité de choses qu'il serait trop long d'énumérer...

Douria

Introduction Générale

Newton et ses successeurs ont d'une part mis en place la description classique des phénomènes physiques, détrônée ensuite par la mécanique quantique. Einstein a d'autre part défini le cadre dans lequel ces phénomènes physiques prennent place, en unifiant les notions intuitives d'espace et de temps pour construire l'espace-temps de Minkowski et pour montrer que ce dernier est courbe. L'origine de cette courbure se trouve dans l'interaction des champs de matière classique avec le champ de la métrique de l'espace-temps. Ces différentes notions ont finalement conduit à décrire le monde en terme d'interaction de champs relativistes auxquels sont associées au niveau quantique des particules ponctuelles relativistes qui se transforment continuellement les unes en les autres. A l'heure actuelle, l'une des plus grandes quêtes de la physique est l'unification des deux théories fondamentales en une seule théorie, la théorie quantique des champs, qui décrit les interactions électrofaibles (électromagnétiques et faibles) et les interactions fortes, et de la relativité générale qui décrit la gravitation. C'est donc l'unification de l'infiniment petit et de l'infiniment grand en un tout cohérent, domaines respectifs dans lesquels les deux théories en question décrivent le monde réel avec une précision incroyable. A présent, une des théories les plus prometteuses pour une description unifiée et finie de ces deux théories fondamentales est la théorie des cordes [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9].

Initialement développée sous le nom de modèle dual à la fin des années soixante, celui ci est basé sur l'étude des interactions fortes entre les hadrons et conduit à l'existence d'une particule sans masse de spin 2 (qui n'apparait pas dans le spectre des hadrons) et à une condition de cohérence un peu inhabituelle qui impose un espace-temps à $D = 26$ dimensions. Ces deux inconvénients ("apparents") s'avèrent être les deux points précurseurs de la nouvelle théorie des cordes. En effet, en associant la particule en question au graviton, et en s'inspirant de l'idée de Kaluza Klein ($D > 4$ impliquerait une possibilité d'unification) [10] fait que la théorie des cordes est une candidate naturelle potentielle à la description de la gravitation quantique [11].

L'idée de base de cette théorie considère qu'à l'échelle de Plank ($< 10^{-34} cm$), les objets fondamentaux de la physique ne sont plus vus comme des particules ponctuelles de dimension nulle mais plutôt comme des objets étendus de dimension un et de tension T. Il s'agit de cordes bosoniques (ouverte ou fermée) ou fermioniques (ouverte, fermée). A l'échelle de Planck, les cordes bosoniques fermées sont assimilées à des cercles, ses excitations quantiques contiennent entre autres le graviton et un tenseur antisymétrique de rang deux jouant un rôle crucial en théorie des cordes. Quant aux cordes bosoniques ouvertes, elles sont assimilées à de petits segments avec des conditions aux bords de Dirichlet ou de Neumann, leurs excitations quantiques contiennent naturellement les champs de jauge [3, 6, 12]. Les contraintes d'invariance conforme de la théorie quantique des cordes exigent que la dimension critique de l'espace-temps soit $D = 26$ pour la corde bosonique et $D = 10$ pour la supercorde.

Les fermions jouent un rôle crucial dans la nature. Ils incluent les quarks et les leptons dans le modèle standard. Pour décrire la nature, Ramond a construit la corde fermionique qui est l'analogue de l'équation de Dirac. En conséquence, les fermions doivent être incorporés. De même, Neveu et Schwarz ont construit une nouvelle théorie des cordes bosoniques. Ce résultat nécessite une symétrie entre bosons et fermions. Les théories des cordes résultantes sont appelées les théories des supercordes [7, 8]. Pour incorporer la supersymétrie dans la théorie des cordes, deux approches équivalentes ont été développées [8, 13] : le formalisme Ramond-Neveu-Schwarz (RNS) qui est supersymétrique sur la feuille d'univers des cordes et le formalisme de Green-Schwarz (GS) qui est supesymétrique dans l'espace-temps de Minkowski en dix dimensions [39].

L'étude du spectre de la théorie des cordes fermioniques dans les secteurs de Ramond et de Neveu-Schwarz a prouvé que la théorie est incohérente. Deux résultats sont obtenus. la présence du tachyon et la discorde entre le nombre de bosons et de fermions à chaque niveau de masse donc la théorie n'est pas supersymétrique dans l'espace-temps . Pour cela, Gliozzi, Scherk et Olive ont proposé la nécessité de la troncature dans le spectre appelé mécanisme de projection GSO. Après cette projection, la première assertion vient de la disparition de l'état tachyonique et la seconde est l'équivalence entre le nombre de bosons et de fermions dans le spectre qui correspond à une supersymétrie d'espace-temps [8, 12, 14].

En 1995, Polchinski a démontré que, pour être cohérente, la théorie des cordes devait contenir non seulement des cordes, mais aussi des surfaces de dimension supérieures qui se déplacent sur un fond spatial. Ces surfaces sont aussi des objets dynamiques appelés « p-branes ». Ces branes jouent un rôle particulier dans la description des cordes : elles constituent les endroits où les cordes ouvertes peuvent se terminer. Normalement, les extrémités des cordes ouvertes se déplacent librement dans l'espace, mais parfois elles peuvent être contraintes de vivre à la surface d'une brane parce que les branes portent des charges électriques et magnétiques [15, 16, 17, 18].

La paraquantification, en tant que généralisation de la quantification, a été introduite par Green [19]. En effet, en 1950, Wigner [20] a démontré que, pour satisfaire la dualité onde-particule, ce qui est une conséquence directe des équations du mouvement de Heisenberg, l'ensemble des relations de commutation canoniques bilinéaires habituelles est une solution particulière. Basée sur des relations de commutations trilinéaires, la paraquantification consiste en une généralisation de l'algèbre des opérateurs de création-annihilation pour les bosons et les fermions. On notera aussi que la paraquantification est caractérisée par un paramètre Q, l'ordre de la paraquantification, tel que $Q = 1$ correspond à la quantification ordinaire [21]. Le but de ce travail est d'étudier l'extension paraquantique d'une corde fermionique dans les modèles de Ramond et Neuveu -Schwarz en présence de D branes.

Depuis 1974, un certain nombre de nouveaux modèles duaux sont étudiés par l'utilisation des opérateurs qui satisfont les relations de commutation parastatistiques. Les opérateurs L, G pour l'algèbre de Virasoro hors des parachamps généraux sont construits et la fermeture de l'algèbre L, G est vérifiée [22]. Une autre étude d'une théorie des cordes paraquantique a été faite par F. Ardalan et F. Mansouri [23]. Cette étude est basée sur la manière particulière avec laquelle les variables du centre de masse de la corde sont traitées. En effet, ces auteurs imposent aux coordonnées du centre de masse et aux opérateurs de quantité d'énergie totale de la corde x^μ, p^μ de satisfaire les relations de commutation ordinaires. Ceci est accompli par le choix d'une direction spécifique dans le paraespace des composantes de Green, caractérisée par l'anzatz $x^{\mu(\beta)} = x^\mu \delta_{\beta 1}$ et $p^{\mu(\beta)} = p^\mu \delta_{\beta 1}$, où $x^{\mu(\beta)}$ (respectivement $p^{\mu(\beta)}$) sont les composantes de Green de x^μ (respectivement p^μ) (voir ci-dessous). Cela nécessite des relations de paracommutation relatives entre les coordonnées du centre de masse et les modes d'excitation de la corde qui sont exclusivement des relations de commutation bilinéaires anormales en termes de composantes de Green. Du fait de la séparation de $\beta = 1$ et $\beta \neq 1$ dans l'anzatz précédent, ces relations de commutation bilinéaires ne peuvent pas être réécrites sous forme de relations de commutation trilinéaires qui sont à la base de la paraquantification. La parquantification de l'action classique de la corde relativiste sans masse est étudiée et la théorie résultante est invariante de Poincaré dans un espace-temps à quatre dimensions s'ils utilisent des relations de commutation de para-Bose d'ordre 12. Plus généralement, ils trouvent que si la dimension D de l'espace-temps et l'ordre Q des parabosons sont liés par l'expression $D = 2 + \frac{24}{Q}$, alors la théorie quantifiée est invariante de Poincaré. Ils construisent aussi un modèle de paracorde fermionique qui est l'analogue du modèle de Ramond-Neveu-Schwarz et trouvent qu'il est invariant de Poincaré pour les dimensions D si $D = 2 + \frac{8}{Q}$. Une autre méthode alternative pour obtenir les dimensions critiques de ces théories est la régularisation des fluctuations du point zéro dans les théories des paracordes [24]. On peut à nouveau construire de nouvelles théories des cordes possibles (supercordes fractionnaires) basées sur des symétries locales du world-sheet correspondant à des extensions de l'algèbre de Virasoro par des courants de spin fractionnaires [25], elles ont quatre et six dimensions critiques de l'espace-temps. Les paracordes hétérotiques libres sont aussi étudiés [26] ,il est montré que pour $D = 4$, $Q = 4$, la cohérence de la théorie des paracordes hétérotiques peut être obtenue pour un réseau des racines de $SO(8)$ qui est entier, impair, et semi-dual.

A la différence des travaux de Ardalan et de Mansouri [23], une deuxième approche de la théorie des cordes paraquantiques est proposée [27, 28], où la paraquantification est faite en exigeant que les variables du centre de masse et les modes d'excitation de la corde vérifient les relations de commutation paraquantiques. En effet, dans cette étude, paraquantifier cette théorie consiste à réinterpréter les variables classiques des cordes bosoniques et fermioniques $X^{\mu}(\tau,\sigma)$, $\mathcal{P}^{\nu}(\tau,\sigma')$, et $\psi^{\rho}(\tau,\sigma'')$ en tant qu'opérateurs satisfaisant les relations de commutation trilinéaires (τ est un paramètre d'évolution, alors que le paramètre σ dénombre les points de la corde). Rappelons que l'origine des dimensions critiques $D = 26$ pour les cordes bosoniques et $D = 10$ pour les cordes fermioniques peut être attribuée à l'exigence de la compatibilité entre la mécanique quantique et l'invariance de Lorentz. Dans ces deux approches, les théories parabosoniques (resp. parafermioniques) résultantes sont respectivement invariantes de Poincaré si la dimension D de l'espace-temps et l'ordre Q de la paraquantification sont liés par les expressions $D = 2 + \frac{24}{Q}$ (resp. $D = 2 + \frac{8}{Q}$). On peut alors obtenir un certain nombre d'autres dimensions critiques pour les quelles les théories des cordes sont consistantes. Plusieurs travaux sont étudiés dans le cadre de la seconde approche [29, 30]. Une autre version de parabose-parafermi des cordes hétérotiques est étudiée [29], en imposant l'invariance modulaire de l'amplitude d'une boucle, les auteurs trouvent une autre possibilité des cordes hétérotiques basées sur le groupe $E8$. Dans ce cas, une analyse cohérente du spectre par rapport à la fonction de partition est effectuée, et l'algèbre des générateurs SUSY qui correspond à l'algèbre de la mécanique quantique SUSY est construite. De nouvelles dimensions critiques et de noncommutativités déformées sont obtenues pour une théorie parabosonique de la membrane à basse énergie [31], et une étude détaillée de la théorie d'une corde paraquantique dans un espace-temps noncommutatif est accomplie [32].

Le manuscrit de cette thèse est organisé en cinq parties :

• Le premier chapitre est une initiation à la théorie des cordes, en mettant l'accent sur ce qui sera nécessaire dans la suite pour présenter nos travaux. Donc, on commence par la théorie des cordes bosoniques qui décrit seulement des bosons, ensuite on passe à la théorie des cordes fermioniques où on définit deux secteurs correspondant à cette théorie : le secteur fermionique de Ramond et le secteur bosonique de Neveu-Schwarz. On termine le chapitre par une introduction au formalisme paraquantique.

• Dans le deuxième et le troisième chapitre, on s'intéressera à l'étude d'une corde parafermionique ouverte entre deux Dp-branes parallèles dans les deux modèles : Ramond et Neveu-Schwarz. Pour fixer les notations, nous rappellerons quelques caractéristiques de base sur les différentes conditions aux limites pour la configuration étudiée dans les deux modèles. Deux types de coordonnées sont présents que nous dénotons NN et DD. Ensuite, nous construirons une extension de ce modèle dans le formalisme paraquantique. En appliquant la représentation de Green pour les différentes variables dynamiques (opérateurs), nous determinerons les relations de commutation trilinéaires entre les variables de la corde dans la jauge transverse et dériverons celles en termes de modes. Puis, on calculera l'opérateur de masse et on étudiera le spectre et sa dégénérescence qui sera confrontée au développement de la fonction de partition. Enfin, on développera en plus le calcul de l'algèbre de Virasoro qui va s'avérer triviale.

• Dans le quatrième chapitre, on montrera que seul le cas quantique ordinaire permettra la construction d'une théorie des cordes ouvertes (de Ramond et Neveu-Schwarz) entre deux Dp-branes parallèles, supersymétriques dans l'espace-temps après l'application de la projection GSO.

• Enfin, le cinquième chapitre (objet principal de la thèse) est consacré à l'étude d'une corde parafermionique ouverte entre deux Dp-, Dq-branes parallèles. En plus de coordonnées de type NN et DD, un autre type de coordonnées est présent dites mixtes qu'on note ND ou DN. La particularité des coordonnées ND et DN par rapport aux coordonnées NN et DD est le fait que les modes demi-entiers dans le secteur de Neveu-Schwarz (NS) sont devenus entiers dans le modèle de Ramond et inversement pour le secteur de Ramond (R). Pour plus de détails, on peut voir cette liste de références [33, 34, 35]. Ensuite, nous dériverons les relations de commutation trilinéaires en termes de modes dans la jauge transverse. Puis, et pour chaque secteur Ramond et Neveu Schwarz, nous calculerons les opérateurs de masse modifiés, et comme résultat, l'énergie du point zéro est toujours nulle pour le cas Ramond et dépend des dimensions p, q des branes et de l'ordre de la paraquantification Q dans le cas de NS. Le spectre des états physiques est construit et les dégénérescences de masse sont calculées pour chaque niveau de masse. La vérification de la cohérence de ces modèles nécessite le calcul des fonctions de partition et leur confrontation avec les résultats des dégénérescences. L'accord parfait entre les deux résultats confirme la cohérence des modèles paraquantiques développés. Enfin, nous nous assurerons de cette consistance par la fermeture de la superalgèbre de Virasoro. On terminera par une conclusion et trois annexes.

Chapitre 1

Initiation à la théorie des cordes

1.1 Théorie des cordes bosoniques

La théorie des cordes considère les objets fondamentaux de la physique classique non plus comme des particules ponctuelles (de dimension 0) mais plutôt comme des objets de dimension 1, dotés d'une longueur très petite. Les différentes particules élémentaires que nous connaissons apparaitraient alors comme différents modes de vibration de la corde. Le but essentiel de la théorie des cordes est alors la construction d'une mécanique quantique relativiste des objets étendus ayant une structure interne de dimension 1. Pour mieux illustrer l'idée, il est intéressant de rappeler tout d'abord l'action classique d'une particule libre ponctuelle relativiste $X^{\mu}(\tau)$, de masse m dans l'espace-temps plat :

$$S\left(X^{\mu}\right)=-m\int_{\tau_i}^{\tau_f}d\tau\left[-\left(\frac{dX^{\mu}}{d\tau}\right)\left(\frac{dX^{v}}{d\tau}\right)\eta^{\mu\nu}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{1.1}$$

(τ est le paramètre qui nous donne la position de cette particule dans l'espace-temps). Cette action est prise proportionnelle à la longueur de la "ligne-d'univers" de la particule entre la position initiale et finale. Nous prenons comme convention $\eta^{00}=-\eta^{ii}=-1$ et $\eta^{ij}=0$ si $i\neq j$ (η est la métrique de l'espace-temps de Minkowski) [36].

1.1.1 Approche de Nambu

Comme pour la particule ponctuelle, les cordes sont des objets à une dimension, elles engendrent une "surface-d'univers" par analogie avec la "ligne-d'univers", cette surface d'univers peut être paramètrisée par deux paramètre (τ, σ). τ est le paramètre d'évolution et σ est un paramètre qui dénombre les points de la corde $(\sigma \in [0, \pi])$. Si nous voulons que la corde ne se propage pas plus vite que la lumière, nous devons considérer en chaque point de la surface-d'univers, l'existence de vecteur tangent du genre temps et espace :

$$\eta_{\mu\nu}\left(\frac{dX^{\mu}}{d\tau}+\lambda\frac{dX^{\mu}}{d\sigma}\right)\left(\frac{dX\nu}{d\tau}+\lambda\frac{dX^{\nu}}{d\sigma}\right)\lesseqgtr 0. \tag{1.2}$$

(c-à-d, cette expression prend des valeurs aussi bien négatives que positives quand λ change). La condition nécessaire et suffisante de ceci est :

$$\left[\left(\dot{X}X'\right)^{2}-\left(\dot{X}^{2}X'^{2}\right)\right]\geqslant 0, \tag{1.3}$$

où nous avons défini :

$$\dot{X}^{\mu}=\frac{dX^{\mu}}{d\tau}, \tag{1.4}$$

et

$$X'^{\mu}=\frac{dX^{\mu}}{d\sigma}. \tag{1.5}$$

$X^{\mu}(\tau, \sigma)$ étant la variable coordonnée qui décrit l'évolution de la corde dans l'espace-temps $(\mu = 0, ..., D-1)$. D est la dimension de l'espace-temps.

Comme pour les particules ponctuelles, Nambu suggère que l'action d'une corde relativiste libre est proportionnelle à la surface engendrée par la configuration initiale $X^{\mu}(\sigma, \tau_i)$ et finale $X^{\mu}(\sigma, \tau_f)$ de la corde :

$$S=\frac{-1}{2\pi\alpha'}\int_{\tau_i}^{\tau_f}d\tau\int_0^{\pi}d\sigma\left[\left(\dot{X}X'\right)^{2}-\left(\dot{X}^{2}X'^{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{1.6}$$

où α' a la dimension d'une $[\text{longueur}]^2$ et correspond à la pente de la trajectoire de Regge (pour la corde ouverte) [36]. Cette action est appelée l'action de Nambu-Goto, elle décrit seulement des degrés de liberté bosonique d'où l'appellation : théorie de la corde bosonique.

1.1.2 Corde ouverte

Equations du mouvement de la corde bosonique ouverte

On rappelle que l'action de la corde bosonique est donnée par :

$$S=\int_{\tau_i}^{\tau_f}d\tau\int_0^{\pi}d\sigma L, \tag{1.7}$$

où

$$L = \frac{-1}{2\pi\alpha'} \left[\left(\dot{X} X' \right)^2 - \left(\dot{X}^2 X'^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \tag{1.8}$$

à partir d'une variation δS (principe de moindre action $\delta S = 0$) correspondant à une petite variation $X^\mu \to X^\mu + \delta X^\mu$ avec $\delta X^\mu(\sigma, \tau_i) = \delta X^\mu(\sigma, \tau_f)$ et $\delta X^\mu(\sigma = 0, \pi)$ arbitraire, les équations du mouvement sont données par [10] :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial L}{\partial X'^\mu} = 0, \tag{1.9}$$

avec les conditions aux bords :

$$\frac{\partial L}{\partial X'^\mu}(\sigma = 0, \tau) = \frac{\partial L}{\partial X'^\mu}(\sigma = \pi, \tau) = 0. \tag{1.10}$$

On définit :

$$\mathcal{P}^\mu(\sigma, \tau) = -\frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{\left(\dot{X} X' \right) X'^\mu - (X')^2 \dot{X}^\mu}{\sqrt{\left(\dot{X} X' \right)^2 - \left(\dot{X} \right)^2 (X')^2}}, \tag{1.11}$$

qui est le moment conjugué de $X^\mu(\sigma, \tau)$ décrivant la dynamique du système et vérifiant les crochets de Poisson canoniques :

$$\{X^\mu(\sigma, \tau), X^\nu(\sigma', \tau)\} = \{\mathcal{P}^\mu(\sigma, \tau), \mathcal{P}^\nu(\sigma', \tau)\} = 0, \tag{1.12}$$

$$\{X^\mu(\sigma, \tau), \mathcal{P}^\nu(\sigma', \tau)\} = -g^{\mu\nu} \delta(\sigma - \sigma'), \tag{1.13}$$

$X^\mu(\sigma, \tau)$ et $\mathcal{P}^\mu(\sigma, \tau)$ sont considérés comme variables dynamiques indépendantes.

et

$$\Pi^\mu(\sigma, \tau) = -\frac{\partial L}{\partial \acute{X}_\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{\left(\dot{X} X' \right) \dot{X}_\mu - \left(\dot{X} \right)^2 X'_\mu}{\sqrt{\left(\dot{X} X' \right)^2 - \left(\dot{X} \right)^2 (X')^2}}. \tag{1.14}$$

L'invariance de l'action sous les transformations de Lorentz avec les relations (1.9) et (1.10) conduit aux moments énergie et angulaire de la corde. En particulier, on peut monter qu'il y a conservation locale de l'écoulement du moment énergie et du moment angulaire à l'intérieur de la corde qui sont définis par :

$P^\mu(\tau) = \int_0^\pi d\sigma \mathcal{P}^\mu(\sigma, \tau)$ moment énergie total de la corde.

$M^{\mu\nu}(\tau) = \int_0^\pi d\sigma \left(\mathcal{P}^\mu X^\nu - \mathcal{P}^\nu X^\mu \right)$ moment angulaire total de la corde.

La symétrie de reparamétrisation de l'action se traduit par l'existence d'équations de contraintes entre $\mathcal{P}^{\mu}(\sigma,\tau)$ et $X^{\mu}(\sigma,\tau)$ données par les identités :

$$\begin{cases} \mathcal{P}^2 + \frac{X'^2}{\pi^2} = 0 \\ \mathcal{P}^{\mu} X'_{\mu} = 0 \end{cases} . \tag{1.15}$$

Maintenant, les équations de mouvement (1.9) sont non linéaires, un choix particulier d'une jauge orthogonale permet de les ramener aux équations de Dalembert suivantes :

$$\ddot{X}_{\mu}(\sigma,\tau) - X''_{\mu}(\sigma,\tau) = 0, \tag{1.16}$$

et les relations (1.15) se ramènent aux équations :

$$\begin{cases} \dot{X}^2 + X'^2 = 0 \\ \dot{X}X' = 0 \end{cases} , \tag{1.17}$$

qui décrivent un système de coordonnées orthonormées sur le world-sheet. Donc, les équations (1.11) et (1.14) deviennent :

$$\mathcal{P}^{\mu}(\sigma,\tau) = \frac{1}{2\pi\alpha'}\dot{X}^{\mu}, \tag{1.18}$$

$$\Pi^{\mu}(\sigma,\tau) = -\frac{1}{2\pi\alpha'}X'^{\mu}. \tag{1.19}$$

Dans le cas de la corde ouverte, où la coordonnée σ varie entre 0 et π, les champs $X^{\mu}(\sigma,\tau)$ satisfont des conditions aux bords. On distingue deux types d'extrémités pour les cordes ouvertes [36] :

1- Celles qui obéissent à la condition aux limites de Neumann lorsque les deux extrémités de la corde sont libres

$$\partial_{\sigma} X^{\mu}(\tau, \sigma = 0, \pi) = 0. \tag{1.20}$$

2- Celles qui restent fixes dans un hyperplan répondent à la condition aux limites de Dirichlet quand les deux extrémités d'une corde en mouvement sont fixées

$$X^{\mu}(\tau, \sigma = 0, \pi) = 0. \tag{1.21}$$

Notons ici que la condition de Neumann respecte l'invariance de Poincaré et donc la conservation du vecteur énergie-impulsion. La solution générale de cette équation est donnée par :

$$X^{\mu}(\sigma,\tau) = x^{\mu} + 2\alpha'\, p^{\mu}\tau + \sqrt{2\alpha'}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left\{a_n^{\mu}(0)\exp(-\imath n\tau) - a_n^{\mu *}(0)\exp(\imath n\tau)\right\}\cos n\sigma, \tag{1.22}$$

où $2\alpha'$ est une constante arbitraire avec une dimension de longueur. x^μ et p^μ sont deux constantes d'intégration qui correspondent à la coordonnée du centre de masse et à l'impulsion totale de la corde respectivement, a_n^μ représentent les modes de vibration de la corde. Si on définit :

$$\begin{aligned} a_n^\mu &= a_n^\mu(0)\exp(-\imath n\tau) \qquad , \qquad a_n^{\mu *} = a_n^{\mu *}(0)\exp(\imath n\tau), \\ \alpha_0^\mu &= 2\alpha' p^\mu, \\ \alpha_n^\mu &= \sqrt{2n\alpha'}a_n^\mu \qquad , \qquad \alpha_{-n}^\mu = \alpha_n^{\mu *} \qquad n \geqslant 0, \end{aligned} \tag{1.23}$$

on peut écrire l'équation (1.22) sous la forme :

$$X^\mu(\sigma,\tau) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^\mu\tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\alpha_n^\mu\exp(-\imath n\tau)\cos n\sigma. \tag{1.24}$$

Les générateurs de Virasoro sont donnés par :

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{2}\pi\alpha'\int_{-\pi}^{\pi}d\sigma\exp\imath n(\tau+\sigma)\left(\mathcal{P}^2+\frac{(X^\mu)^2}{2\pi\alpha'}\right) \\ &= \frac{1}{4\alpha'}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\alpha_{n-m}\alpha_m \\ &= 0. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Le Hamiltonien de la corde ouverte est donné par [7]

$$\begin{aligned} H &= \int_0^\pi d\sigma\left(\mathcal{P}_\mu\dot{X}^\mu - L\right) \\ &= \int_0^\pi d\sigma\left(\mathcal{P}_\mu\dot{X}^\mu - \frac{1}{4\pi\alpha'}\left((2\pi\alpha'\mathcal{P})^2 - X'^2\right)\right) \\ &= \pi\int_0^\pi d\sigma\left(\alpha'\mathcal{P}^2+\frac{X'^2}{4\pi^2\alpha'}\right). \end{aligned} \tag{1.26}$$

Le cas particulier $H = L_0$ et la condition $L_0 = 0$ permet d'écrire la masse de la corde suivant l'équation :

$$M^2 = -p^2 = \frac{1}{\alpha'}\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_{n-m}\alpha_m, \tag{1.27}$$

qui est l'équivalent relativiste de l'expression de l'énergie d'une corde de violon en vibration. Le moment angulaire peut s'écrire :

$$M^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu - \imath\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\alpha_{-n}^\mu\alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu\alpha_n^\mu\right). \tag{1.28}$$

1.1.3 Quantification

Quand $X^{\mu}(\sigma,\tau)$ et $\mathcal{P}^{\mu}(\sigma,\tau)$ sont traités comme indépendants, les contraintes de Virasoro sont incompatibles avec les crochets de Poisson et par suite, la quantification canonique n'est plus directe, ce qui nous conduit à utiliser deux méthodes de quantification [7] :

La quantification covariante :

Cette méthode traite les coordonnées et les moments conjugués comme indépendantes et les contraintes (conditions de Virasoro) seront considérées comme des conditions initiales sur les fonctions d'onde.

La quantification dans la jauge transverse :

Avant de quantifier le système on résout les équations des contraintes dans le cadre d'un choix spécifique d'une paramétrisation σ et τ, ceci nous conduira à ne garder que les variables dynamiques effectivement indépendantes.

Jauge covariante

Rappelons que $X^{\mu}(\sigma,\tau)$ est la coordonnée de la corde dans l'espace-temps et $\mathcal{P}^{\mu}(\sigma,\tau)$ est le moment associé à la corde.

Relations de commutations : On postule les relations de commutation suivantes :

$$\left[X^{\mu}(\sigma,\tau),\mathcal{P}^{\nu}(\sigma',\tau)\right] = i\eta^{\mu\nu}\delta(\sigma-\sigma'), \tag{1.29}$$

$$\left[X^{\mu}(\sigma,\tau),X^{\nu}(\sigma',\tau)\right] = \left[\mathcal{P}^{\mu}(\sigma,\tau),\mathcal{P}^{\nu}(\sigma',\tau)\right]=0, \tag{1.30}$$

en termes des variables dynamiques x^{μ},p^{μ} et α_n^{μ}, elles deviennent :

$$\left[x^{\mu},p^{\nu}\right] = \imath\eta^{\mu\nu}, \tag{1.31}$$

$$\left[\alpha_n^{\mu},\alpha_m^{\nu}\right] = n\delta_{m+n,0}\eta^{\mu\nu}, \tag{1.32}$$

où x^{μ} et p^{ν} sont les variables du centre de masse et les α_n peuvent être perçus (analogie au cas quantique de l'oscillateur harmonique) comme des opérateurs de création ou d'annihilation pour les n négatifs ou positifs respectivement.

Maintenant, il est fondamental de noter que l'espace de Fock généré par l'application sur l'état fondamental des $a_n^{\dagger\mu}$ n'est pas défini positif, car les composantes temporelles des a_n^{μ} ont un signe moins ; inhabituel dans leur relation de commutation :

$$\left[a_n^0, a_n^{\dagger 0}\right] = -1, \tag{1.33}$$

et de ce fait, un état de la forme $a_n^{\dagger 0} |0\rangle$ a une norme négative. Il faut donc veiller à éliminer ces états dit de ghost (à faire par la suite).

On peut maintenant faire correspondre aux générateurs de Virasoro classique les opérateurs

$$l_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} : \alpha_{-n-m}^{\mu} \alpha_{m,\mu} : \tag{1.34}$$

La définition de l'opérateur l_0 pose un problème d'ambiguïté d'ordre, une constante arbitraire quelconque pourrait alors être ajoutée pour éliminer ce problème : $l_0 \to l_0 - \alpha(0)$

Le Hamiltonien devient :

$$H = \alpha' p^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \alpha_n - \frac{\alpha(0)}{\alpha'}. \tag{1.35}$$

Contrairement à ce qui précède, le moment angulaire reste le même :

$$M^{\mu\nu} = x^{\mu} p^{\nu} - x^{\nu} p^{\mu} - \imath \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\alpha_{-n}^{\mu} \alpha_n^{\nu} - \alpha_{-n}^{\nu} \alpha_n^{\mu} \right). \tag{1.36}$$

La condition d'annulation de l_0 qui donnait classiquement la condition sur la masse m de la corde s'écrit :

$$\left(l_0 - \alpha(0) \right) |0\rangle, \tag{1.37}$$

et les états physiques $|\Psi\rangle_{ph}$ satisfont les contraintes suivantes :

$$l_n |\Psi\rangle_{ph} = 0 \ , \ \ n \geq 0, \tag{1.38}$$

$$\left(l_0 - \alpha(0) \right) |\Psi\rangle_{ph} = 0. \tag{1.39}$$

A cause de la métrique $\eta^{\mu\nu}$ qui n'est pas définie positive, on ne peut pas affirmer qu'il n' y a pas de ghosts parmi ces états physiques. Le ≪no-ghost-theorem≫ permet de construire un ensemble d'opérateurs dit ≪transverses≫ vérifiant certaines propriétés fondamentales qui assurent que les opérateurs transverses transforment un état physique en d'autre états physiques et en particulier, quand on les applique au vide $|0\rangle$ ils décrient un sous espace F des états physiques avec une norme définie positive. La théorie est alors libre de ghosts ssi $(\alpha(0) < 1,\ D \leq 25)$ ou $(\alpha(0) = 1,\ D = 26)$, D étant la dimension d'espace-temps. Cette dernière est justement la condition qu'il faut pour une théorie de cordes bosoniques cohérente.

Algèbre de Virasoro : L'algèbre de Virasoro fournit un cadre extrêmement puissant pour unifier les concepts de la symétrie et de la localité.

D'une part, l'algèbre de Virasoro est appropriée dans n'importe quelle théorie dans un espace à deux dimensions qui possède une invariance conforme.

D'autre part, la solution des équations du mouvement d'une corde bosonique ouverte mène à l'apparition de quelques contraintes qui sont exprimées en termes d'un ensemble infini de conditions initiales.

Rappelons que les opérateurs de Virasoro sont définis par :

$$l_n = \frac{1}{2}\sum_{p\in z}\alpha^{\mu}_{n-p}\alpha_{p,\mu}, \tag{1.40}$$

l'algèbre de Virasoro prend alors la forme suivante :

$$[l_n, l_m] = (n-m)\, l_{n+m} + \frac{D}{12}n\left(n^2-1\right)\delta_{n+m,0}. \tag{1.41}$$

La jauge transverse

Ici par contre, on résout d'abord les équations de contraintes (1.15), en faisant un choix spécifique pour la paramétrisation τ et σ ce qui nous conduit aux variables dynamiques effectivement indépendantes $X^i(\tau,\sigma), \mathcal{P}^j(\tau,\sigma'), x_0^-, p^+$. C'est la jauge transverse, et dans cette jauge, au lieu de considérer les directions $x^0, x^1, ..., x^{D-1}$, on utilise les directions x^+, x^-et x^i du cône de lumière où $i = 2, ..., D-2$ et

$$x^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x^0 + x^1\right), \tag{1.42}$$

$$x^- = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x^0 - x^1\right), \tag{1.43}$$

d'où l'appellation : jauge du cône de lumière.

Relations de commutations : On postule les relations de commutations suivantes :

$$\left[X^i(\tau,\sigma), \mathcal{P}^j(\tau,\sigma')\right] = i\eta^{ij}\delta(\sigma-\sigma'), \tag{1.44}$$

$$\left[X^i(\tau,\sigma), X^j(\tau,\sigma')\right] = \left[\mathcal{P}^i(\tau,\sigma), \mathcal{P}^j(\tau,\sigma')\right] = 0, \tag{1.45}$$

et

$$\left[x_0^-, p^+\right] = -i, \tag{1.46}$$

les autres commutateurs sont nuls :

$$\begin{aligned}\left[x_0^i, p^+\right] &= 0, &(1.47)\\ \left[x_0^-, X^i(\tau,\sigma)\right] &= \left[x_0^-, \mathcal{P}^i(\tau,\sigma)\right] = 0, &(1.48)\\ \left[p^+, X^i(\tau,\sigma)\right] &= \left[p^+, \mathcal{P}^i(\tau,\sigma)\right] = 0. &(1.49)\end{aligned}$$

Dans cette jauge, l'expression :

$$X^i(\tau,\sigma) = x_0^i + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^i\tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^i \cos n\sigma \exp(-in\tau), \tag{1.50}$$

reste inchangée par rapport à celle de l'équation (1.22).

A partir de (1.44), (1.45) et (1.18) on peut construire les autres relations de commutations :

$$\begin{aligned}\left[X^i(\tau,\sigma), \dot{X}^j(\tau,\sigma')\right] &= 2\pi\alpha' i\eta^{ij}\delta(\sigma-\sigma'), &(1.51)\\ \left[X^i(\tau,\sigma), X'^j(\tau,\sigma')\right] &= \frac{d}{d\sigma'}\left[X^i(\tau,\sigma), X^j(\tau,\sigma')\right] = 0, &(1.52)\\ \left[X'^i(\tau,\sigma), \dot{X}^j(\tau,\sigma')\right] &= 2\pi\alpha' i\eta^{ij}\frac{d}{d\sigma}\delta(\sigma-\sigma'), &(1.53)\\ \left[X'^i(\tau,\sigma), X'^j(\tau,\sigma')\right] &= \left[\dot{X}^i(\tau,\sigma), \dot{X}^j(\tau,\sigma')\right] = 0, &(1.54)\\ \left[\left(\dot{X}^i \pm X'^i\right)(\tau,\sigma), \left(\dot{X}^j \pm X'^j\right)(\tau,\sigma')\right] &= \pm 4\pi\alpha' i\eta^{ij}\frac{d}{d\sigma}\delta(\sigma-\sigma'). &(1.55)\end{aligned}$$

Opérateur de masse : L'opérateur de masse est défini par :

$$M^2 = 2p^+p^- - p^ip^i, \tag{1.56}$$

où p^- est le conjugué canonique dans la direction x^+ et p^+ est le conjugué canonique dans la direction x^-. Ces derniers sont reliés par le générateur l_0 à travers la relation :

$$\frac{1}{\alpha'}l_0 = 2p^+p^-, \tag{1.57}$$

l'opérateur l_0 peut être décomposé sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}l_0 &= \frac{1}{2}\sum_{p\in z}\alpha_{-p}^i\alpha_p^i\\ &= \frac{1}{2}\alpha_0^i\alpha_0^i + \sum_{p=1}^{\infty}\alpha_{-p}^i\alpha_p^i - \frac{(D-2)}{24}. &(1.58)\end{aligned}$$

Donc, la substitution de (1.58) dans (1.56) nous conduit à la formule de l'opérateur de masse que nous écrivons en termes d'opérateurs de créations et annihilations :

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'}\left[-\frac{(D-2)}{24} + \sum_{p=1}^{\infty} p a_p^{\dagger i} a_p^i\right]. \tag{1.59}$$

Algèbre de Poincaré : Tous les commutateurs de l'algèbre sont vérifiés à l'exception de $[M^{i-}, M^{j-}]$ qui donne le résultat suivant :

$$\left[M^{i-}, M^{j-}\right] = -\frac{2}{(p^+)^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\alpha_{-n}^i \alpha_n^j - \alpha_{-n}^j \alpha_n^i\right)\left[n\left(1-\frac{D-2}{24}\right) - \frac{1}{n}\left(a - \frac{D-2}{24}\right)\right]. \tag{1.60}$$

Pour rétablir la covariance de Poincaré, ce commutateur doit s'annuler ce qui implique :

$$\begin{aligned} D &= 26 \\ a &= 1 \end{aligned} \tag{1.61}$$

1.2 Théorie des cordes fermioniques

La théorie des cordes bosoniques présente de nombreuses insuffisances en plus de sa dimension 26 de l'espace temps. L'existence du tachyon montre qu'elle n'est pas définie au voisinage de son vide stable qui induit une instabilité dans la théorie.

En outre, la théorie des cordes bosonique ne contient que des excitations bosoniques. Dans l'espoir d'obtenir une théorie qui puisse décrire notre univers, nous devons construire une théorie de cordes qui possède également des excitations fermioniques. La théorie obtenue est appelée : théorie des cordes fermioniques.

Tandis que les champs bosoniques, représentant les coordonnées physiques de la corde, doivent être définis globalement sur la surface d'univers, les champs fermioniques (spineurs) peuvent être soit périodiques $(\psi^\mu(\sigma+2\pi) = +\psi^\mu(\sigma))$ soit antipériodiques $(\psi^\mu(\sigma+2\pi) = -\psi^\mu(\sigma))$ le long de la corde, définissant respectivement les secteurs de Ramond (Secteur fermionique) et de Neveu-Schwarz (Secteur bosonique) [36, 37, 38]

1.2.1 Cordes fermioniques classiques

Action supersymétrique

L'action supersymétrique s'écrit :

$$S = \frac{1}{2\pi} \int d\sigma d\tau \left[\partial_a X^\mu \partial^a X_\mu - i\overline{\psi}^\mu \gamma^a \partial_a \psi_\mu \right], \tag{1.62}$$

ψ^μ est un spineur de Majorana à 2 dimension sur le world sheet $\psi^\mu = \binom{\psi^\mu_+}{\psi^\mu_-}$ où on note $+$ et $-$ les indices de chiralité et les matrices γ^a sont les matrices de Dirac à deux dimensions définies par :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & \imath \\ \imath & 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{1.63}$$

Ces matrices fournissent une représentation de l'algèbre de Clifford à deux dimensions :

$$\left\{ \gamma^a, \gamma^b \right\} = -2\eta^{ab}. \tag{1.64}$$

L'action (1.62) est invariante sous les transformations supersymétriques (sur le world-sheet) suivantes, écrites sous forme infinitésimale :

$$\delta X^\mu = \overline{\varepsilon} \psi^\mu, \tag{1.65}$$

$$\delta \psi^\mu = -i\gamma^a \partial_a X^\mu \varepsilon, \tag{1.66}$$

ces transformations sont appelées transformations supersymétriques, car elles mixent les coordonnées bosoniques et fermioniques. ε est un spineur de Majorana constant.

Les équations de mouvement déduites de l'action (1.62) s'écrivent :

$$\partial_a \partial^a X^\mu = 0, \tag{1.67}$$

$$\gamma^a \partial_a \psi^\mu = 0, \tag{1.68}$$

la première relation représente l'équation de Klein-Gordon bidimensionnelle et la deuxième représente l'équation de Dirac bidimensionnelle.

L'équation (1.68) peut se découpler en deux équations pour les composantes ψ_- et ψ_+ à savoir :

$$\begin{aligned} \partial_+\psi_- &= \left(\frac{\partial}{\partial\sigma} + \frac{\partial}{\partial\tau}\right)\psi_- = 0, \\ \partial_-\psi_+ &= \left(\frac{\partial}{\partial\sigma} - \frac{\partial}{\partial\tau}\right)\psi_+ = 0. \end{aligned} \tag{1.69}$$

On peut remarquer que ψ_+ et ψ_- sont des états propres de l'opérateur de chiralité bidimensionnel $\gamma^0\gamma^1$, avec pour valeurs propres respectivement -1 et $+1$, c'est à dire de chiralité négative et positive. Donc, l'action définie plus haut s'écrit comme :

$$S = \frac{1}{2\pi}\int d\sigma d\tau \left[\partial_+ X\partial^- X + i\left(\left(\psi_-\partial_+\psi_- + \psi_+\partial_-\psi_+\right)\right)\right]. \tag{1.70}$$

La variation de la partie bosonique est obtenue précédemment. Maintenant la variation de la partie fermionique donne deux équations du mouvement :

$$\partial_-\psi_+ = 0, \quad \partial_+\psi_- = 0, \tag{1.71}$$

où $\psi_\pm$ sont les deux composantes du spineur ψ.

Conditions aux bords et équations du mouvement

Les conditions aux bords se réécrivent de la façon suivante :

$$\left[\psi_-\delta\psi_- - \psi_+\delta\psi_+\right]_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} = 0, \tag{1.72}$$

le choix $\psi_+(\tau,0) = \psi_-(\tau,0)$ au point $\sigma = 0$ conduit aux possibilités de deux secteurs définis comme suit :

$$\psi_+(\tau,\pi) = +\psi_-(\tau,\pi) \qquad \text{secteur de Ramond} \tag{1.73}$$

$$\psi_+(\tau,\pi) = -\psi_-(\tau,\pi) \qquad \text{secteur de Neveu-Shwarz} \tag{1.74}$$

Ces conditions conduisent à des états fermioniques pour le secteur de Ramond et des états bosoniques pour le secteur de Neveu-Shwarz.

Les solutions des équations (1.73) et (1.74) se développent en modes, comme dans le cas bosonique. Pour le secteur de Ramond, on trouve :

$$\psi_{\pm}^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n^{\mu} \; e^{-in(\tau \pm \sigma)} \qquad \text{avec } d_n^{\mu\dagger} = d_{-n}^{\mu} \tag{1.75}$$

et pour le secteur de Neveu-Shwarz :

$$\psi_{\pm}^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r \in z+\frac{1}{2}} b_r^{\mu} \; e^{-ir(\tau \pm \sigma)} \qquad \text{avec } b_r^{\mu\dagger} = b_{-r}^{\mu} \tag{1.76}$$

L'indice n est toujours entier et l'indice r demi-entier.

Générateurs de Virasoro

Les générateurs de la superalgèbre de Virasoro s'écrivent comme :

$$L_n = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} d\sigma \left(e^{in\sigma} T_{++} + e^{-in\sigma} T_{--} \right) = 0, \tag{1.77}$$

pour les coordonnées bosoniques et

$$F_n = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\pi} d\sigma \left(e^{in\sigma} J_{+} + e^{-in\sigma} J_{-} \right) = 0 \quad \text{(R)} \tag{1.78}$$

$$G_r = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\pi} d\sigma \left(e^{ir\sigma} J_{+} + e^{-ir\sigma} J_{-} \right) = 0 \quad \text{(N-S)} \tag{1.79}$$

pour les coordonnées fermioniques où T_{++} et T_{--} représentent le tenseur energie-impulsion et J_+ et J_- représentent le supercourant de Noether tel que :

$$T_{++} = \partial_+ X^{\mu} \partial_+ X_{\mu} + \frac{1}{2} \psi_+^{\mu} \partial_+ \psi_{+\mu} = 0, \tag{1.80}$$

$$T_{--} = \partial_- X^{\mu} \partial_- X_{\mu} + \frac{1}{2} \psi_-^{\mu} \partial_- \psi_{-\mu} = 0, \tag{1.81}$$

$$J_+ = \psi_+^{\mu} \partial_+ X_{\mu} = 0, \tag{1.82}$$

$$J_- = \psi_-^{\mu} \partial_- X_{\mu} = 0. \tag{1.83}$$

1.2.2 Quantification

Secteur de Ramond

La quantification de coordonnées X^μ et ψ^μ se traduit par les relations de commutations et d'anticommutations suivantes :

$$\left[X^\mu(\tau,\sigma), \dot{X}^\nu(\tau,\sigma')\right] = 2\pi\alpha' i\eta^{\mu\nu}\delta(\sigma-\sigma'), \tag{1.84}$$

$$\left[\psi^\mu(\tau,\sigma), \psi^\nu(\tau,\sigma')\right]_+ = 2\pi\alpha'\eta^{\mu\nu}\delta(\sigma-\sigma'), \tag{1.85}$$

où l'on en déduit

$$[\alpha_n^\mu, \alpha_m^\nu] = n\eta^{\mu\nu}\delta_{n+m,0}, \tag{1.86}$$

$$[d_n^\mu, d_m^\nu]_+ = \eta^{\mu\nu}\delta_{n+m,0}. \tag{1.87}$$

Les générateurs de la superalgèbre de Virasoro sont :

$$L_n = \frac{1}{2}\sum_{p\in z}\left\{\alpha_{n-p}^\mu\alpha_{p,\mu} + (p+\frac{1}{2}n)d_{n-p}^\mu d_{p,\mu}\right\}, \tag{1.88}$$

$$F_n = \sum_{p\in z}\alpha_{n-p}^\mu d_{p,\mu}. \tag{1.89}$$

Le Hamiltonien s'écrit :

$$H_R = \alpha' p^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_{-n}\alpha_n + \sum_{p=1}^{+\infty} p d_{-p} d_p. \tag{1.90}$$

Les états physiques sont définis par :

$$\begin{aligned} L_n|\psi\rangle &= 0 \qquad n>0, \\ (L_0-a)|\psi\rangle &= 0, \\ F_n|\psi\rangle &= 0, \\ F_0|\psi\rangle &= 0. \end{aligned} \tag{1.91}$$

La superalgèbre de Virasoro est donnée par :

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{D}{8}n^3\delta_{n+m,0}, \tag{1.92}$$

$$[L_n, F_m] = \left(\frac{1}{2}n-m\right)F_{n+m}, \tag{1.93}$$

$$[F_n, F_m]_+ = 2L_{n+m} + \frac{1}{2}Dn^2\delta_{n+m,0}. \tag{1.94}$$

Remarquons qu'à partir de l'équation (1.94), on peut montrer que $F_0^2 = L_0$. On déduit alors que la constante d'anomalie $a = 0$.

Secteur de Neveu-Schwarz

De même, les relations de commutation et d'anticommutation sont respectivement données par :

$$[\alpha_n^\mu, \alpha_m^\nu] = n\eta^{\mu\nu}\delta_{n+m,0}, \tag{1.95}$$

$$[b_r^\mu, b_s^\nu]_+ = \eta^{\mu\nu}\delta_{r+s,0}, \tag{1.96}$$

et les générateurs de la superalgèbre de Virasoro sont :

$$L_n = \frac{1}{2}\sum_{p\in z} \alpha_{n-p}^\mu, \alpha_{p,\mu} + \frac{1}{2}\sum_{r\in z+\frac{1}{2}} \left(r + \frac{1}{2}n\right) b_{n-r}^\mu, b_{r,\mu}, \tag{1.97}$$

$$G_r = \sum_{r\in z+\frac{1}{2}} \alpha_{n-r}^\mu, b_{r,\mu}, \tag{1.98}$$

où la sommation sur r porte uniquement sur les entiers impairs, ce qui implique des indices demi entiers qui se ramène à l'absence des modes b_0.

Le Hamiltonien s'écrit :

$$H = \alpha' p^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{-n}\alpha_n + \sum_{r=\frac{1}{2}}^{+\infty} rb_{-r}b_r \ . \tag{1.99}$$

Les états physiques sont définis par :

$$L_n |\psi\rangle = 0 \qquad n > 0, \tag{1.100}$$

$$(L_0 - a) |\psi\rangle = 0 \qquad a > 0, \tag{1.101}$$

$$G_r |\psi\rangle = 0 \qquad r > 0. \tag{1.102}$$

où a est une constante d'anomalie à déterminer.

La superalgèbre de Virasoro s'écrit comme suit :

$$[L_n, L_m] = (n - m) L_{n-m} + \frac{D}{8}\left(n^3 - n\right)\delta_{n+m,0}, \tag{1.103}$$

$$[L_n, G_r] = \left(\frac{1}{2}n - r\right) G_{n+r}, \tag{1.104}$$

$$[G_r, G_s]_+ = 2L_{r+s} + \frac{1}{2}D\left(r^2 - \frac{1}{4}\right)\delta_{r+s,0}. \tag{1.105}$$

1.2.3 Dimension critique

L'expression du commutateur $[M^{i-}, M^{j-}]$ est donnée par

$$\left[M^{i-}, M^{j-}\right] = -\frac{\imath}{(p^{+})^{2}} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\alpha_{-n}^{i}\alpha_{n}^{j} - \alpha_{-n}^{j}\alpha_{n}^{i}\right) \left[n\left(\frac{D-2}{8}\right) + \frac{1}{n}\left(2a - \frac{D-2}{8}\right)\right]. \quad (1.106)$$

Pour satisfaire l'invariance de Lorentz, ce commutateur doit être nul, ce qui donne la dimension de l'espace-temps $D = 10$ et les valeurs de l'anomalie a (a est nul dans le secteur de Ramond et prend le valeur $\frac{1}{2}$ dans le secteur de Neveu-Schwarz).

En fonction des modes transverses, l'opérateur de masse dans les deux secteurs Ramond et Neveu-Schwarz est donné par :

$$M_R^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n^{\dagger i}\alpha_n^i + n d_n^{\dagger i} d_n^i\right), \quad (1.107)$$

$$M_{NS}^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{\dagger i}\alpha_n^i + \sum_{r=\frac{1}{2}}^{\infty} r b_r^{\dagger i} b_r^i - \frac{1}{2}\right), \quad (1.108)$$

ce qui implique la présence du tachyon dans le modèle de Neveu-Schwarz.

1.3 Formalisme paraquantique

1.3.1 Introduction

Les aspects corpusculaire et ondulatoire de la lumière sont inséparables. La lumière se comporte à la fois comme une onde et comme un flux des particules. De même, à une particule matérielle libre d'énergie w et de quantité de mouvement p on devait associer une onde plane de fréquence ν et de longueur d'onde λ. Ces deux aspects sont bien déterminés par :

La condition de fréquence de Bohr :

$$w = h\nu = E_1 - E_2, \quad (1.109)$$

et la relation de De Broglie :

$$\lambda = \frac{h}{|p|}. \quad (1.110)$$

En théorie relativiste, ces deux dernières relations sont une conséquence directe des équations du mouvement de Heisenberg :

$$-\imath\hbar\frac{\partial A}{\partial q_\mu} = [A, P_\mu], \qquad \mu = \overline{0,3} \tag{1.111}$$

où A est une observable arbitraire et P_μ le quadrivecteur énergie-impulsion où $(P_0, P_1, P_2, P_3) = (H, P_x, P_y, P_z)$ et $(q_0, q_1, q_2, q_3) = (t, q_x, q_y, q_z)$.

En mécanique classique, un système de particules est décrit au moyen de quantités telles que la position $\overrightarrow{q}$ et l'impulsion $\overrightarrow{p}$ de chaque particule. On peut alors écrire le Hamiltonien en fonction des coordonnées q_i et leurs conjugués p_i avec ($i = \overline{1,d}$; d =DDL).

La description quantique du même système peut être construite en remplaçant les quantités classiques par des opérateurs qui agissent dans un espace des états approprié (espace de Hilbert).

Il existe des contraintes sur les opérateurs q_i et p_i :

$$\begin{cases} [q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0 \\ [q_i, p_j] = \imath\hbar\delta_{ij} \end{cases} . \tag{1.112}$$

Le point essentiel de la MQ est l'équation de Heisenberg, mais les équations de commutations (1.112) ne sont pas uniques [20], ceci conduit à une généralisation de la M.Q qu'on appellera paraquantification (P.Q).

1.3.2 Paraquantification

On peut mettre en évidence cette généralisation à travers l'étude de l'oscillateur harmonique. Le Hamiltonien d'un oscillateur harmonique s'écrit sous la forme :

$$H = \frac{1}{2}\left(p^2 + q^2\right) . \tag{1.113}$$

Les équations du mouvement sont données par :

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -q \end{cases} . \tag{1.114}$$

Le principe de correspondance avec l'équation de Heisenberg nous donnent :

$$\imath\dot{q} = [q, H] = \imath p, \tag{1.115}$$

$$\imath\dot{p} = [p, H] = -\imath q, \tag{1.116}$$

mais avec la restriction $[q,p]=i$, on montre que cette condition n'est pas unique. Pour cela, on utilisera les opérateurs définis par :

$$\begin{aligned} a &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(q+ip), && (1.117)\\ a^\dagger &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(q-ip). && (1.118)\end{aligned}$$

Pour l'oscillateur bosonique :

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\left(p^2+q^2\right)=\frac{1}{2}\left(a^\dagger a+aa^\dagger\right)\equiv N, && (1.119)\\ [a,N] &= a, \quad \left[a^\dagger,N\right]=-a^\dagger. && (1.120)\end{aligned}$$

Le spectre de N est défini comme suit :

$$\begin{cases} N\ \left|n\right\rangle = N_n\left|n\right\rangle \\ \left\langle n\ |n'\right\rangle = \delta_{n,n'} \end{cases}, \tag{1.121}$$

et

$$N_n = N_0 + n \qquad \text{avec} \quad N_0 \geq 0,\ n\in\mathbb{N}. \tag{1.122}$$

Nous savons que :

$$\begin{cases} a\left|n\right\rangle = \sqrt{n}\left|n-1\right\rangle \\ a^\dagger\left|n\right\rangle = \sqrt{n+1}\left|n+1\right\rangle \\ \left\langle n\right| a = \sqrt{n+1}\left\langle n+1\right| \\ \left\langle n\right| a^\dagger = \sqrt{n}\left\langle n-1\right| \end{cases}. \tag{1.123}$$

D'après les équations (1.119), (1.121), (1.122) et (1.123) on montre facilement que :

$$N_0+n=\frac{1}{2}\left(\left|a_{n-1,n}\right|^2+\left|a_{n,n+1}\right|^2\right), \tag{1.124}$$

avec :

$$a_{n,n'} \equiv \left\langle n\right| a\left|n'\right\rangle. \tag{1.125}$$

On peut alors résoudre cette équation par récurrence sur n pour obtenir :

$$a_{n,n+1}=a^\dagger_{n+1,n}=\begin{cases} (2N_0+n)^{\frac{1}{2}} & n \text{ pair} \\ (1+n)^{\frac{1}{2}} & n \text{ impair} \end{cases}, \tag{1.126}$$

on arrive alors au résultat :

$$\begin{aligned}\langle n|\left[a,a^{\dagger}\right]|n'\rangle &= \sum_{n''}\left\{\langle n|a|n''\rangle\langle n''|a^{\dagger}|n'\rangle-\langle n|a^{\dagger}|n''\rangle\langle n''|a|n'\rangle\right\}\\ &= \delta_{nn'}\left(|a_{n,n+1}|^2-|a^{\dagger}_{n,n-1}|^2\right).\end{aligned}\tag{1.127}$$

Ce qui est équivalent à écrire :

$$\langle n|\left[a,a^{\dagger}\right]|n'\rangle=\delta_{nn'}\begin{cases}2N_0 & n \text{ pair}\\ 2(1-N_0) & n \text{ impair}\end{cases}.\tag{1.128}$$

Nous définissons l'ordre de la paraquantification de telle sorte que $N_0=\frac{Q}{2}$ où Q est l'ordre de la PQ.

Remarquons que seule la valeur $Q=1$ nous conduit à la relation de commutation ordinaire $\left[a,a^{\dagger}\right]=1$ qui représente le cas d'un oscillateur harmonique (bosonique) dans le cadre quantique.

Pour $Q=2$ c-à-d $N_0=1$ nous aurons une relation du type :

$$aaa^{\dagger}-a^{\dagger}aa=2a.\tag{1.129}$$

De même, le Hamiltonien d'un oscillateur fermionique est défini par :

$$H=\frac{1}{2}\left(b^{\dagger}b-bb^{\dagger}\right)\equiv N,\tag{1.130}$$

on peut alors montrer que :

$$N=\frac{1}{2}\left(|b_{n-1,n}|^2-|b_{n,n+1}|^2\right).\tag{1.131}$$

De la même manière, on montre que $Q=1$ conduit aux relations d'anticommutation :

$$\{b,b^{\dagger}\}=1,\quad \{b,b\}=\{b^{\dagger},b^{\dagger}\}=0,\tag{1.132}$$

donc $b^2=\left(b^{\dagger}\right)^2=0$.

Pour $Q=2$ nous aurons les relations :

$$bb^{\dagger}b=2b,\quad bbb^{\dagger}+b^{\dagger}bb=2b,\tag{1.133}$$

et

$$b^3=\left(b^{\dagger}\right)^3=0.\tag{1.134}$$

1.3.3 Généralisation au cas de plusieurs oscillateurs

Soit un système de plusieurs oscillateurs harmoniques bosoniques ou fermioniques.

Dans le cadre paraquantique, les opérateurs a_k et $a_k^\dagger$ (bosoniques ou fermioniques) vérifient des relations trilinéaires de telle sorte que [21] :

$$\begin{aligned}
\left[a_k, \left[a_l^\dagger, a_n\right]_\mp\right] &= 2\delta_{kl}a_n, & (1.135)\\
\left[a_k, \left[a_l^\dagger, a_n^\dagger\right]_\mp\right] &= 2\delta_{kl}a_n^\dagger \mp 2\delta_{kn}a_l^\dagger, & (1.136)\\
\left[a_k, \left[a_l, a_n\right]_\mp\right] &= 0. & (1.137)
\end{aligned}$$

Le signe en haut est associé aux parafermions, celui en bas aux parabosons.

Le vide est défini par :

$$\begin{aligned}
\langle 0 \,|0\rangle &= 1, & (1.138)\\
a_k \,|0\rangle &= 0 \quad \forall k, & (1.139)
\end{aligned}$$

avec la condition qui fixe l'ordre de la paraquantification :

$$a_k a_l^\dagger \,|0\rangle = Q\delta_{kl} \,|0\rangle \,. \tag{1.140}$$

Ces relations dépendent du vide, mais on peut trouver des relations qui se suffisent à elles seules ("self-contained").

Le problème qui se pose est que lorsque l'ordre de la paraquantification augmente les relations se compliquent. L'une des solutions à ce problème est d'utiliser la décomposition de Green [4], qui est définie comme suit :

$$a_k = \sum_{\alpha=1}^{Q} a_k^{(\alpha)} \quad , \quad a_k^\dagger = \sum_{\alpha=1}^{Q} a_k^{(\alpha)\dagger}, \tag{1.141}$$

où $a_k^{(\alpha)}$ est la composante de Green qui agit dans le para-espace de Green.

les relations (1.135), (1.136) et (1.137) deviennent bilinéaires (mais du type anormal) :

$$\begin{aligned}
\left[a_k^{(\alpha)}, a_l^{(\alpha)\dagger}\right]_\pm &= \delta_{kl}, & (1.142)\\
\left[a_k^{(\alpha)}, a_l^{(\alpha)}\right]_\pm &= 0, & (1.143)\\
\left[a_k^{(\alpha)}, a_l^{(\beta)\dagger}\right]_\mp &= \left[a_k^{(\alpha)}, a_l^{(\beta)}\right]_\mp = 0 \qquad (\alpha \neq \beta). & (1.144)
\end{aligned}$$

Le vide $|0\rangle'$ vérifie :

$$a_k^{(\alpha)}\,|0\rangle' = 0\,, \qquad \forall k, \alpha. \tag{1.145}$$

Donc

$$a_k\,|0\rangle' = 0\,, \qquad \forall k, \tag{1.146}$$

et

$$a_k a_l^\dagger\,|0\rangle' = Q\ \delta_{kl}\,|0\rangle'\,. \tag{1.147}$$

Ce qui implique que $|0\rangle'$et $|0\rangle$ sont équivalents.

Chapitre 2

Cordes parafermioniques ouvertes entre deux Dp-branes parallèles dans le modèle de Ramond

Les équations du mouvement pour la surface d'univers demandent l'annulation des variations du terme intégral bidimensionnel et du terme de bord, donnant ainsi à la fois les équations du mouvement et les conditions aux bords, qui définissent les points de l'espace-temps auxquels les extrémités des cordes ouvertes sont attachées. L'ensemble de ces points forme une membrane, dite de Dirichlet, ou D-brane. En se propageant dans la direction temporelle, une D-brane de dimension p, ou Dp-brane, engendre un volume d'univers, de dimension $p+1$.

Dans la Ref [5], l'auteur traite trois types de configurations de cordes bosoniques ouvertes : une corde sur une Dp-brane, une corde entre deux Dp-branes parallèles et enfin une corde entre deux Dp-, Dq-branes parallèles.

Il s'agit dans ce chapitre d'étudier ces configurations dans le cadre des cordes parafermioniques. Deux types de conditions aux bords sont alors possibles (voir par exemple [35]). On étudiera le spectre en précisant la dégénérescence. Le calcul de la fonction de partition ainsi que la fermeture de la superalgèbre de Virasoro permettront de vérifier la cohérence des modèles paraquantiques développés.

2.1 Conditions aux bords

En présence d'un objet étendu de dimension $p+1$, les coordonnées bosoniques vérifient des conditions aux bords de type Neumann pour les indices $i = 2, ..., p$ et de type Dirichlet pour les indices $a = p+1, ..., d$.

Dans le cas où la corde ouverte est entre deux Dp-branes parallèles [5], quatre secteurs caractérisent la position des extrémités de la corde notés $[ij]$ où $i, j = 1, 2$ (1 pour la première brane et 2 pour la deuxième brane).

Les coordonnées de la corde $X^{\,i=2,...,p}$, dites tangentielles, vérifient les conditions de Neumann (dites du type NN) :

$$\frac{\partial X^i}{\partial \sigma}(\tau,\sigma)\bigg|_{\sigma=0} = \frac{\partial X^i}{\partial \sigma}(\tau,\sigma)\bigg|_{\sigma=\pi} = 0 \qquad i = 2, ..., p \tag{2.1}$$

La décomposition en modes des coordonnées de type NN s'écrit comme suit :

$$X^i(\tau,\sigma) = x_0^i + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^i\tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^i \cos n\sigma \exp(-in\tau). \tag{2.2}$$

Les coordonnées $X^{a=p+1,...,d}$ normales satisfont les conditions aux bords de Dirichlet (dites du type DD) :

$$X^a(\tau,\sigma)\big|_{\sigma=0} = \overline{x}_1^a \quad , \quad X^a(\tau,\sigma)\big|_{\sigma=\pi} = \overline{x}_2^a \quad , \quad a = p+1, ..., d \tag{2.3}$$

La décomposition en modes des coordonnées de type DD s'écrit comme suit :

$$X^a(\tau,\sigma) = \overline{x}_1^a + (\overline{x}_2^a - \overline{x}_1^a)\frac{\sigma}{\pi} + \sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^a \exp(-in\tau)\sin n\sigma. \tag{2.4}$$

Les constantes $\overline{x}_1^a$ et $\overline{x}_2^a$ fixent seulement les D-branes (ne participent pas à la fluctuation de la corde ouverte) et la séparation $(\overline{x}_2^a - \overline{x}_1^a)$ représente la distance entre les deux extrémités $\sigma = 0$ et $\sigma = \pi$ [5]. Notons que le développement se fait en modes entiers. Remarquons que dans l'équation (2.4) le moment a disparu et donc les modes zéro $\left(\alpha_0^a = \sqrt{2\alpha'}p^a\right)$.

Les relations de commutations sont données par :

$$\begin{aligned}
\left[X^i(\tau,\sigma), \dot{X}^j(\tau,\sigma')\right] &= 2\pi\alpha' i\delta^{ij}\delta(\sigma-\sigma'), \\
\left[X^a(\tau,\sigma), \dot{X}^b(\tau,\sigma')\right] &= 2\pi\alpha' i\delta^{ab}\delta(\sigma-\sigma'),
\end{aligned} \tag{2.5}$$

qui seront équivalentes à :

$$\begin{cases} [\alpha_m^i, \alpha_n^j] = m\delta^{ij}\delta_{m+n,0} \\ \left[\alpha_m^a, \alpha_n^b\right] = m\delta^{ab}\delta_{m+n,0} \end{cases}. \tag{2.6}$$

Maintenant, les conditions aux bords pour les coordonnées fermioniques sont données par [35] :

$$\begin{array}{llll} NN & : & \psi_+^i \mid_{\sigma=0} = \psi_-^i \mid_{\sigma=0} , & \psi_+^i \mid_{\sigma=\pi} = \psi_-^i \mid_{\sigma=\pi} , \\ DD & : & \psi_+^a \mid_{\sigma=0} = -\psi_-^a \mid_{\sigma=0} , & \psi_+^a \mid_{\sigma=\pi} = -\psi_-^a \mid_{\sigma=\pi} . \end{array} \tag{2.7}$$

Le champ fermionique dans le secteur de Ramond prend la décomposition en modes entiers suivante :

$$\begin{array}{llcl} NN & \psi_\pm^i(\sigma,\tau) & = & \frac{1}{\sqrt{2}}\sum\limits_{n\in z} d_n^i e^{-in(\tau\pm\sigma)}, \\ DD & \psi_\pm^a(\sigma,\tau) & = & \frac{1}{\sqrt{2}}\sum\limits_{n\in z} d_n^a e^{-in(\tau\pm\sigma)}, \end{array} \tag{2.8}$$

ce qui conduit à :

$$d_n^I = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\int_0^\pi d\sigma(\psi_+(\tau,\sigma)\exp(in(\tau+\sigma)) + \psi_-(\tau,\sigma)\exp(in(\tau-\sigma))), \tag{2.9}$$

où l'indice I correspond à $I = i, a$.

Notons que, les modes d_0^I satisfont l'algèbre de Clifford et qu'ils commutent avec tous les autres oscillateurs :

$$\left[d_0^I, d_0^J\right]_+ = \eta^{IJ}. \tag{2.10}$$

La relation (2.9) donne :

$$\left[d_n^I, d_m^J\right]_+ = \eta^{IJ}\delta_{n+m,0}. \tag{2.11}$$

2.2 Le Modèle

Nous nous proposons de construire l'extension paraquantique de la théorie dans la jauge transverse. Cela signifie que les variables dynamiques $X^I(\tau,\sigma)$, $\psi^I(\tau,\sigma)$, $\mathcal{P}^I(\tau,\sigma)$, x^- et p^+ réinterprétées comme opérateurs satisfont des relations de commutation trilinéaires .

Pour ce faire, nous commençons avec le cas ordinaire basé sur les relations de (anti)commutation bilinéaires :

$$\begin{aligned}
\left[X^I(\tau,\sigma), \mathcal{P}^J(\tau,\sigma')\right] &= i\delta^{IJ}\delta(\sigma-\sigma'), \\
\left[\Psi^I(\tau,\sigma), \Psi^J(\tau,\sigma')\right]_+ &= \delta^{IJ}\delta(\sigma-\sigma'), \\
\left[x^-, p^+\right] &= i, \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

et tous les autres commutateurs sont nuls.

Nous introduisons la décomposition de Green sur les opérateurs $X^I(\tau,\sigma)$, $\psi^I(\tau,\sigma)$, $\mathcal{P}^I(\tau,\sigma)$, x^- et p^+ définie par :

$$\begin{aligned}
X^I(\tau,\sigma) &= \sum_{\alpha=1}^{Q} X^{I(\alpha)}(\tau,\sigma); \quad \mathcal{P}^I(\tau,\sigma) = \sum_{\alpha=1}^{Q} \mathcal{P}^{I(\alpha)}(\tau,\sigma), \\
\Psi^I(\tau,\sigma) &= \sum_{\alpha=1}^{Q} \Psi^{I(\alpha)}(\tau,\sigma); \quad x^- = \sum_{\alpha=1}^{Q} x^{-(\alpha)}\ ;\ p^+ = \sum_{\alpha=1}^{Q} p^{+(\alpha)}, \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

où Q est l'ordre de la paraquantification.

Paraquantifier la théorie consiste à postuler les relations de (anti)commutation bilinéaires anormales suivantes. Ici, le mot anomal signifie que ces relations sont équivalentes à (2.12) quand elles portent sur les mêmes composantes de Green (α,α) et inversées et prises nulles lorsqu'il s'agit de deux composantes de Green (α,β) différentes :

$$
\begin{aligned}
\left[X^{I(\alpha)}(\tau,\sigma), X^{J(\alpha)}(\tau,\sigma')\right] &= \left[\mathcal{P}^{I(\alpha)}(\tau,\sigma), \mathcal{P}^{J(\alpha)}(\tau,\sigma')\right] = 0, \\
\left[X^{I(\alpha)}(\tau,\sigma), X^{J(\beta)}(\tau,\sigma')\right]_+ &= \left[\mathcal{P}^{I(\alpha)}(\tau,\sigma), \mathcal{P}^{J(\beta)}(\tau,\sigma')\right]_+ = 0;\ \alpha\neq\beta, \\
\left[X^{I(\alpha)}(\tau,\sigma), \mathcal{P}^{J(\alpha)}(\tau,\sigma')\right] &= i\delta^{IJ}\delta(\sigma-\sigma'), \\
\left[X^{I(\alpha)}(\tau,\sigma), \mathcal{P}^{J(\beta)}(\tau,\sigma')\right]_+ &= 0;\ \alpha\neq\beta, \\
\left[\Psi^{I(\alpha)}(\tau,\sigma), \Psi^{J(\alpha)}(\tau,\sigma')\right]_+ &= \delta^{IJ}\delta(\sigma-\sigma'), \\
\left[\Psi^{I(\alpha)}(\tau,\sigma), \Psi^{J(\beta)}(\tau,\sigma')\right]_- &= 0;\ \alpha\neq\beta, \\
\left[X^{I(\alpha)}(\tau,\sigma), \Psi^{J(\alpha)}(\tau,\sigma')\right] &= \left[\mathcal{P}^{I(\alpha)}(\tau,\sigma), \Psi^{J(\alpha)}(\tau,\sigma')\right] = 0, \\
\left[X^{I(\alpha)}(\tau,\sigma), \Psi^{J(\beta)}(\tau,\sigma')\right]_+ &= \left[\mathcal{P}^{I(\alpha)}(\tau,\sigma), \Psi^{J(\beta)}(\tau,\sigma')\right]_+ = 0;\ \alpha\neq\beta, \\
\left[x^{-(\alpha)}, p^{+(\alpha)}\right] &= i, \\
\left[x^{-(\alpha)}, p^{+(\beta)}\right]_+ &= 0;\quad \alpha\neq\beta, \\
\left[x^{-(\alpha)}, A^{(\alpha)}\right] &= \left[p^{+(\alpha)}, A^{(\alpha)}\right] = 0, \\
\left[x^{-(\alpha)}, A^{(\beta)}\right]_+ &= \left[p^{+(\alpha)}, A^{(\beta)}\right]_+ = 0;\ \alpha\neq\beta,
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

$A = X^I(\tau,\sigma), \mathcal{P}^I(\tau,\sigma)$ et $\Psi^I(\tau,\sigma)$.

Notons ici que la valeur particulière $Q = 1$ correspond au cas quantique ordinaire. Maintenant, on peut démontrer que les relations bilinéaires anormales précédentes sont équivalentes aux relations de commutation trilinéaires suivantes qui définissent le système paraquantique :

$$
\begin{aligned}
\left[X^I(\sigma,\tau),\left[\mathcal{P}^J(\sigma',\tau),\mathcal{P}^K(\sigma'',\tau)\right]_+\right] &= 2i\left\{\delta^{IJ}\delta(\sigma-\sigma')\mathcal{P}^K(\sigma'',\tau)+\delta^{IK}\delta(\sigma-\sigma'')\mathcal{P}^J(\sigma',\tau)\right\},\\
\left[X^I(\sigma,\tau),\left[X^J(\sigma',\tau),\mathcal{P}^K(\sigma'',\tau)\right]_+\right] &= 2i\delta^{IK}\delta(\sigma-\sigma'')X^J(\sigma',\tau),\\
\left[\mathcal{P}^I(\sigma,\tau),\left[X^J(\sigma',\tau),X^K(\sigma'',\tau)\right]_+\right] &= -2i\left\{\delta^{IJ}\delta(\sigma-\sigma')X^K(\sigma'',\tau)+\delta^{IK}\delta(\sigma-\sigma'')X^J(\sigma',\tau)\right\},\\
\left[\Psi^I(\sigma,\tau),\left[\Psi^J(\sigma',\tau),\Psi^K(\sigma'',\tau)\right]_-\right] &= 2\left\{\delta^{IJ}\delta(\sigma-\sigma')\Psi^K(\sigma'',\tau)-\delta^{IK}\delta(\sigma-\sigma'')\Psi^J(\sigma',\tau)\right\},\\
\left[\Psi^I(\sigma,\tau),\left[\Psi^J(\sigma',\tau),X^K(\sigma'',\tau)\right]_+\right] &= 2\delta^{IJ}\delta(\sigma-\sigma')X^K(\sigma'',\tau),\\
\left[\Psi^I(\sigma,\tau),\left[\Psi^J(\sigma',\tau),\mathcal{P}^K(\sigma'',\tau)\right]_+\right] &= 2\delta^{IJ}\delta(\sigma-\sigma')\mathcal{P}^K(\sigma'',\tau),\\
\left[X^I(\sigma,\tau),\left[\Psi^J(\sigma',\tau),\mathcal{P}^K(\sigma'',\tau)\right]_+\right] &= 2i\delta^{JK}\delta(\sigma-\sigma'')\Psi^J(\sigma',\tau),\\
\left[\mathcal{P}^I(\sigma,\tau),\left[x^-,X^J(\sigma',\tau)\right]_+\right] &= -i\delta^{IJ}\delta(\sigma-\sigma')x^-,\\
\left[X^I(\sigma,\tau),\left[x^-,\mathcal{P}^J(\sigma',\tau)\right]_+\right] &= i\delta^{IJ}\delta(\sigma-\sigma')x^-,\\
\left[x^-,\left[X^J(\sigma,\tau),p^+\right]_+\right] &= -iX^J(\sigma,\tau),\\
\left[x^-,\left[\mathcal{P}^I(\sigma,\tau),p^+\right]_+\right] &= -i\mathcal{P}^I(\sigma,\tau),
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

et tous les autres commutateurs du type $\left[A,[B,C]_+\right]$ sont nuls.

En termes de modes, et dans le secteur de Ramond, on peut dériver les relations de commutation trilinéaires suivantes (voir Annexe A) :

$$
\begin{aligned}
\left[\alpha_n^I,\left[\alpha_m^J,\alpha_l^K\right]_+\right] &= 2n(\delta^{IJ}\delta_{n+m,0}\alpha_l^K+\delta^{IK}\delta_{n+l,0}\alpha_m^J),\\
\left[\alpha_n^I,\left[\alpha_m^J,A\right]_+\right] &= 2n\delta^{IJ}\delta_{n+m,0}A;\ A\neq\alpha_l^K,\\
\left[d_n^I,\left[d_m^J,d_l^K\right]_-\right] &= 2(\delta^{IJ}\delta_{n+m,0}d_l^K-\delta^{IK}\delta_{n+l,0}d_m^J),\\
\left[d_n^I,\left[d_m^J,B\right]_+\right] &= 2\delta^{IJ}\delta_{n+m,0}B;\ B\neq d_l^K,\\
\left[x^I,\left[p^J,p^K\right]_+\right] &= 2i\left(\delta^{IJ}p^K+\delta^{IK}p^J\right),\\
\left[x^I,\left[p^J,C\right]_+\right] &= 2i\delta^{IJ}C;\ C\neq p^K,\\
\left[x^-,\left[p^+,p^+\right]_+\right] &= 4ip^+,\\
\left[x^-,\left[p^+,D\right]_+\right] &= 2iD;\quad D\neq p^+,
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

2.3 Opérateur de masse

Dans ce cas, où la corde est positionnée entre deux Dp-branes parallèles, la relation (1.56) reçoit un terme additif en plus des deux types de modes mensionnés auparavant dits NN et DD. Donc, l'opérateur de masse s'écrit comme :

$$M^2 = \left(\frac{\overline{x}_2^a - \overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2 + 2p^+p^- - p^ip^i, \tag{2.17}$$

ici, $\left(\frac{\overline{x}_2^a - \overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2$ est le décalage de l'opérateur de masse dans le sens positif, $p^ip^i = \frac{1}{2\alpha'}\alpha_0^i\alpha_0^i$ et $2p^+p^- = \frac{1}{\alpha'}l_0$ où l_0 peut être décomposé sous la forme symétrisée suivante :

$$\begin{aligned} l_0 &= \frac{1}{4}\left(\sum_{n\in z}\sum_I\left(\left[\alpha_{-n}^I, \alpha_n^I\right]_+ + n\left[d_{-n}^I, d_n^I\right]_-\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\alpha_0^i\alpha_0^i + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_I\left(\left[\alpha_{-n}^I, \alpha_n^I\right]_+ + n\left[d_{-n}^I, d_n^I\right]_-\right) \\ &\quad + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_I\left(\left[\alpha_n^I, \alpha_{-n}^I\right]_+ - n\left[d_n^I, d_{-n}^I\right]_-\right). \end{aligned} \tag{2.18}$$

En utilisant la relation (2.6), on peut écrire :

$$\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=2}^{p}\left[\alpha_n^i, \alpha_{-n}^i\right]_+ = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=2}^{p}\left[\alpha_{-n}^i, \alpha_n^i\right]_+ - \frac{Q\,(p-1)}{24}. \tag{2.19}$$

Cette expression contient un terme divergent, ce terme joue le rôle de la constante additive évoquée auparavant qu'on notera a_{NN} où

$$a_{NN} = -\frac{Q\,(p-1)}{24}. \tag{2.20}$$

De même que précédemment pour les modes d suivant la direction tangentielle, on utilise la relation d'anticommutation (2.11) pour trouver :

$$-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=2}^{p}n\left[d_n^i, d_{-n}^i\right]_- = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=2}^{p}n\left[d_{-n}^i, d_n^i\right]_- + \frac{Q(p-1)}{24}, \tag{2.21}$$

ce qui donne

$$d_{NN} = \frac{Q\,(p-1)}{24}. \tag{2.22}$$

De même on trouvera les autres contributions suivant la direction normale :

$$a_{DD} = -\frac{Q\,(d-p)}{24}, \qquad d_{DD} = \frac{Q\,(d-p)}{24}. \tag{2.23}$$

On note que a_R est la constante d'ordre normal définie comme :

$$a_R = a_{NN} + a_{DD} + d_{NN} + d_{DD}. \tag{2.24}$$

Ce qui conduit finalement à $a_R = 0$ et la relation (2.18) prend la forme finale :

$$\begin{aligned} l_0 &= \frac{1}{2}\alpha_0^i\alpha_0^i + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=2}^{p}\left(\left[\alpha_{-n}^i\alpha_n^i\right]_+ + n\left[d_{-n}^i, d_n^i\right]_-\right) \\ &+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{a=p+1}^{d}\left(\left[\alpha_{-n}^a,\alpha_n^a\right]_+ + n\left[d_{-n}^a, d_n^a\right]_-\right). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Donc, en prenant la relation (1.57), la substitution de (2.25) dans (2.17) nous conduit à la formule de l'opérateur de masse que nous écrivons en termes d'opérateurs de créations et annihilations :

$$M^2 = \left(\frac{\overline{x}_2^a - \overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2 + \frac{1}{\alpha'}\left(N_{n+}^i + N_{n+}^a\right), \tag{2.26}$$

où

$$\begin{aligned} N_{n+}^i &= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=2}^{p}\left(\left[\alpha_{-n}^i\alpha_n^i\right]_+ + n\left[d_{-n}^i, d_n^i\right]_-\right), \\ N_{n+}^a &= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{a=p+1}^{d}\left(\left[\alpha_{-n}^a,\alpha_n^a\right]_+ + n\left[d_{-n}^a, d_n^a\right]_-\right). \end{aligned} \tag{2.27}$$

2.4 Spectre et dégénérescence

Maintenant, considérons les équations (2.26) et (2.27) et déterminons le spectre de masse des états de la corde parafermionique.

Etat fondamental

$$M^2\left|p^+, \overrightarrow{p_T}\right\rangle_R = \left(\frac{\overline{x}_2^a - \overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2\left|p^+, \overrightarrow{p_T}\right\rangle_R, \tag{2.28}$$

où $|p^+, \overrightarrow{p_T}\rangle$ est un état du vide d'impulsion $\overrightarrow{p_T}$. L'état fondamental $|p^+, \overrightarrow{p_T}\rangle$ est défini comme étant annulé par tous les modes ($\alpha_n^i, \alpha_n^a, d_n^i$ et d_n^a) pour $n > 0$.

Remarquons que, à la différence du cas ordinaire où l'état fondamental a une masse nulle, ici l'état fondamental a une masse égale à $m^2 = \left(\frac{\overline{x}_2^a - \overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2$.

Notons ici que l'état fondamental a une dégénérescence à cause de la présence des modes zéro (d_0) qui commutent avec l'opérateur de masse M^2 ($[M^2, d_0] = 0$). Cette propriété se traduit dans la théorie des groupe par une dégénérescence égale à $2^{\left[\frac{(p-1)}{2}+\frac{(d-p)}{2}\right]} = 2^{\frac{(d-1)}{2}}$ donc l'état fondamental est un spineur massif de spin $\frac{1}{2}$ dû à la présence du décalage entre les D-branes. Notons aussi que le secteur de Ramond est un secteur fermionique de la théorie des cordes fermioniques.

1$^{\text{er}}$ niveau excité :

Le 1er niveau excité est représenté par quatre types d'états :$\left\{\alpha_{-1}^a, d_{-1}^a, \alpha_{-1}^j, d_{-1}^j\right\} |p^+, \overrightarrow{p_T}\rangle_R$

L'utilisation de la relation (2.6) conduit au résultat :

$$m^2 = \left(\frac{\overline{x}_2^a - \overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2 + \frac{1}{\alpha'}. \tag{2.29}$$

$\left\{\alpha_{-1}^a, d_{-1}^a\right\} |p^+, \overrightarrow{p_T}\rangle_R$ représentent deux spineurs massifs de spin $\frac{1}{2}$ et $\left\{\alpha_{-1}^j, d_{-1}^j\right\} |p^+, \overrightarrow{p_T}\rangle_R$ représentent deux spineurs massifs de spin $\frac{3}{2}$. Remarquons ici que les quatre types d'états sont caractérisés par la même masse au carré mais de spins différents suivant la direction considérée (NN ou DD), de sorte que, seul l'indice i est un indice de Lorentz.

2$^{\text{ème}}$ niveau excité :

Le 2ème niveau excité est représenté par les états suivants :

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha_{-2}^a, d_{-2}^a, \alpha_{-2}^j, d_{-2}^j, \left[\alpha_{-1}^a, \alpha_{-1}^b\right]_+, \left[\alpha_{-1}^a, \alpha_{-1}^j\right]_+, \left[\alpha_{-1}^j, \alpha_{-1}^k\right]_+, \\ \left[\alpha_{-1}^a, d_{-1}^b\right]_+, \left[\alpha_{-1}^a, d_{-1}^j\right]_+, \left[\alpha_{-1}^j, d_{-1}^a\right]_+, \left[\alpha_{-1}^j, d_{-1}^k\right]_+, \\ \left[d_{-1}^a, d_{-1}^b\right]_-, \left[d_{-1}^a, d_{-1}^j\right]_-, \left[d_{-1}^j, d_{-1}^k\right]_-. \end{array}\right\} |p^+, \overrightarrow{p_T}\rangle_R$$

La masse de ces états est donnée par :

$$m^2 = \left(\frac{\overline{x}_2^a - \overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2 + \frac{2}{\alpha'}, \tag{2.30}$$

de sorte que les états $\left\{\alpha_{-2}^a, d_{-2}^a, \left[\alpha_{-1}^a, \alpha_{-1}^b\right]_+, \left[\alpha_{-1}^a, d_{-1}^b\right]_+, \left[d_{-1}^a, d_{-1}^b\right]_-\right\} |p^+, \overrightarrow{p_T}\rangle_R$ sont des spinneurs de spin $\frac{1}{2}$, les états $\left\{\alpha_{-2}^j, d_{-2}^j, \left[\alpha_{-1}^a, \alpha_{-1}^j\right]_+, \left[\alpha_{-1}^a, d_{-1}^j\right]_+, \left[\alpha_{-1}^j, d_{-1}^a\right]_+, \left[d_{-1}^a, d_{-1}^j\right]_-\right\} |p^+, \overrightarrow{p_T}\rangle_R$ sont des spineurs de spin $\frac{3}{2}$ et les états $\left\{\left[\alpha_{-1}^j, \alpha_{-1}^k\right]_+, \left[\alpha_{-1}^j, d_{-1}^k\right]_+, \left[d_{-1}^j, d_{-1}^k\right]_-\right\} |p^+, \overrightarrow{p_T}\rangle_R$ sont des spineur de spin $\frac{5}{2}$.

Les états et les dégénérescences de masse sont représentés dans le tableau ci après :

Niveau	Type d'état	Dégénérescence	Spin
0	$\vert p^+, \overrightarrow{p_T}\rangle$	$2^{\frac{(d-1)}{2}}$	$\frac{1}{2}$
1	$\left\{\begin{array}{c} \left\{\alpha^b_{-1}, d^b_{-1}\right\} \vert p^+, \overrightarrow{p_T}\rangle_R \\ \left\{\alpha^j_{-1}, d^j_{-1}\right\} \vert p^+, \overrightarrow{p_T}\rangle_R \end{array}\right\}$	$2^{\frac{(d-1)}{2}}\left\{2\left(d-1\right)\right\}$	$\left\{\begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{array}\right\}$
2	$\left\{\begin{array}{c} \left\{\begin{array}{c} \alpha^b_{-2}, d^b_{-2}, \left[\alpha^b_{-1}, \alpha^c_{-1}\right]_+, \\ \left[\alpha^b_{-1}, d^c_{-1}\right]_+, \left[d^b_{-1}, d^c_{-1}\right]_- \end{array}\right\} \vert p^+, \overrightarrow{p_T}\rangle_R \\ \left\{\begin{array}{c} \alpha^j_{-2}, d^j_{-2}, \left[\alpha^b_{-1}, \alpha^j_{-1}\right]_+, \left[d^b_{-1}, d^j_{-1}\right]_-, \\ \left[\alpha^b_{-1}, d^j_{-1}\right]_+, \left[\alpha^j_{-1}, d^b_{-1}\right]_+ \end{array}\right\} \vert p^+, \overrightarrow{p_T}\rangle_R \\ \left\{\begin{array}{c} \left[\alpha^j_{-1}, \alpha^k_{-1}\right]_+, \left[\alpha^j_{-1}, d^k_{-1}\right]_+, \\ \left[d^j_{-1}, d^k_{-1}\right]_- \end{array}\right\} \vert p^+, \overrightarrow{p_T}\rangle_R \end{array}\right\}$	$2^{\frac{(d-1)}{2}}\left\{2d\left(d-1\right)\right\}$	$\left\{\begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{array}\right\}$
3	$\left\{\begin{array}{c} \left\{\begin{array}{c} \alpha^b_{-3}, d^b_{-3}, \left[\alpha^b_{-2}, \alpha^c_{-1}\right]_+, \left[d^b_{-2}, d^c_{-1}\right]_- \\ \left[\alpha^b_{-2}, d^c_{-1}\right]_+, \left[\alpha^b_{-1}, d^c_{-2}\right]_+, \end{array}\right\} \vert p^+, \overrightarrow{p_T}\rangle_R \\ \left\{\begin{array}{c} \alpha^j_{-3}, d^j_{-3}, \left[\alpha^b_{-2}, \alpha^j_{-1}\right]_+, \\ \left[\alpha^b_{-1}, \alpha^j_{-2}\right]_+, \left\langle\alpha^b_{-1}, \alpha^c_{-1}, \alpha^j_{-1}\right\rangle_+, \\ \left[\alpha^b_{-2}, d^j_{-1}\right]_+, \left[\alpha^b_{-1}, d^j_{-2}\right]_+, \\ \left[\alpha^j_{-2}, d^b_{-1}\right]_+, \left[\alpha^j_{-1}, d^b_{-2}\right]_+, \\ \left[d^b_{-2}, d^j_{-1}\right]_-, \left[d^b_{-1}, d^j_{-2}\right]_-, \\ \left\langle\alpha^b_{-1}, \alpha^c_{-1}, d^j_{-1}\right\rangle_+, \left\langle\alpha^b_{-1}, \alpha^j_{-1}, d^c_{-1}\right\rangle_+, \\ \left\langle d^b_{-1}, d^c_{-1}, d^j_{-1}\right\rangle_- \end{array}\right\} \vert p^+, \overrightarrow{p_T}\rangle_R \\ \left\{\begin{array}{c} \left[\alpha^j_{-2}, \alpha^k_{-1}\right]_+, \left[\alpha^j_{-2}, d^k_{-1}\right]_+, \\ \left[\alpha^j_{-1}, d^k_{-2}\right]_+, \left[d^j_{-2}, d^k_{-1}\right]_-, \\ \left\langle\alpha^b_{-1}, \alpha^j_{-1}, \alpha^k_{-1}\right\rangle_+, \left\langle\alpha^j_{-1}, \alpha^k_{-1}, d^b_{-1}\right\rangle_+, \\ \left\langle\alpha^b_{-1}, \alpha^j_{-1}, d^k_{-1}\right\rangle_+, \left\langle\alpha^b_{-1}, d^j_{-1}, d^k_{-1}\right\rangle_+, \\ \left\langle\alpha^j_{-1}, d^b_{-1}, d^k_{-1}\right\rangle_+, \left\langle d^b_{-1}, d^j_{-1}, d^k_{-1}\right\rangle_- \end{array}\right\} \vert p^+, \overrightarrow{p_T}\rangle_R \\ \left\{\begin{array}{c} \left\langle\alpha^j_{-1}, \alpha^k_{-1}, \alpha^l_{-1}\right\rangle_+, \left\langle\alpha^j_{-1}, \alpha^k_{-1}, d^l_{-1}\right\rangle_+, \\ \left\langle\alpha^j_{-1}, d^k_{-1}, d^l_{-1}\right\rangle_+, \left\langle d^j_{-1}, d^k_{-1}, d^l_{-1}\right\rangle_- \end{array}\right\} \vert p^+, \overrightarrow{p_T}\rangle_R \end{array}\right\}$	$2^{\frac{(d-1)}{2}}\left\{\frac{4}{3}d\left(d^2-1\right)\right\}$	$\left\{\begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ \frac{7}{2} \end{array}\right\}$

Tableau 1

La masse de chaque niveau est toujours positive et les états sont des spineurs. En particulier, nous avons à partir du premier niveau, une variété de valeurs de spin selon les différents types des indices (niveau 1$\longrightarrow \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$, niveau 2$\longrightarrow \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ etc) à la différence du cas de la corde ordinaire qui contient seulement une seule valeur de spin (niveau 1$\longrightarrow \frac{1}{2}$, niveau 2$\longrightarrow \frac{3}{2}$ etc).

La notation $\langle a, b, c, ...\rangle_{\pm}$ décrit la symétrisation (antisymétrisation) de toutes les permutations possibles des produits d'oscillateurs.

2.5 Fonction de partition

L'étude du spectre se base sur la construction de la fonction génératrice du système. La dégénérescence des états pour chaque niveau de masse augmente en exponentiel, cette dégénérescence est obtenue à partir de cette fonction génératrice appelée fonction de partition qui est donnée par :

$$f(x) = \sum_{N=0}^{\infty} d(N)\, x^N, \tag{2.31}$$

avec $d(N) \rightarrow$ nombre d'états pour chaque niveau et $N = \alpha' M^2$ ce qui nous conduit à écrire :

$$f_R(x) = Tr x^N, \tag{2.32}$$

nous avons :

$$TrA = \sum_n \langle n| A |n\rangle . \tag{2.33}$$

On montre que :

$$\begin{aligned} f_R(x) &= Trx^N = \sum_{n'_i, n'_a} x^{\langle n'_i, n'_a | N^i_{n+} + N^a_{n+} | n'_i, n'_a \rangle} \\ &= 2^{\frac{(d-1)}{2}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^n}{1-x^n}\right)^{p-1} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^n}{1-x^n}\right)^{d-p} . \end{aligned} \tag{2.34}$$

Le développement limité au voisinage de $x = 0$ donne :

$$f_R(x) = 2^{\frac{(d-1)}{2}} \left[1 + 2(d-1)x + 2d\,(d-1)\,x^2 + ...\right] . \tag{2.35}$$

Les coéfficients de ce polynôme représentent effectivement les dégénérescences des états pour chaque niveau de masse qui étaient représentés dans le tableau 1.

Notons ici qu'on retrouve la même forme que celle du cas ordinaire sauf qu'ici $d - 1 = \frac{8}{Q}$.

2.6 Superalgèbre de Virasoro

Considérons les générateurs de Virasoro décomposés suivant les types de coordonnées NN, DD :

$$\begin{aligned}
l_n^{tot} &= l_n^{NN} + l_n^{DD}, \quad F_n^{tot} = F_n^{NN} + F_n^{DD}, \\
l_n^{NN} &= \frac{1}{4}\sum_{p\in z}\left(\left[\alpha_{n-p}^{i}, \alpha_{p,i}\right]_{+} + (\frac{n}{2}+p)\left[d_{n-p}^{i}, d_{p,i}\right]_{-}\right), \\
l_n^{DD} &= \frac{1}{4}\sum_{p\in z}\left(\left[\alpha_{n-p}^{a}, \alpha_{p,a}\right]_{+} + (\frac{n}{2}+p)\left[d_{n-p}^{a}, d_{p,a}\right]_{-}\right), \\
F_n^{NN} &= \frac{1}{2}\sum_{p\in z}\left[\alpha_{n-p}^{i}, d_{p,i}\right]_{+}, \quad F_n^{DD} = \frac{1}{2}\sum_{p\in z}\left[\alpha_{n-p}^{a}, d_{p,a}\right]_{+}.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Pour construire l'algèbre de Virasoro, il nous faut déterminer les commutateurs $\left[l_n^{NN}, l_m^{NN}\right]$, $\left[l_n^{DD}, l_m^{DD}\right]$, $\left[l_n^{NN}, F_m^{NN}\right]$ et $\left[l_n^{DD}, F_m^{DD}\right]$ et des anticommutateurs $\left[F_n^{NN}, F_m^{NN}\right]_{+}$et $\left[F_n^{DD}, F_m^{DD}\right]_{+}$

$$\begin{aligned}
\left[l_n^{NN}, l_m^{NN}\right] &= (n-m)\, l_{n+m}^{NN} + \frac{Q\,(p-1)}{8} n^3 \delta_{n+m,0}, \\
\left[l_n^{DD}, l_m^{DD}\right] &= (n-m)\, l_{n+m}^{DD} + \frac{Q\,(d-p)}{8} n^3 \delta_{n+m,0}, \\
\left[F_n^{NN}, F_m^{NN}\right]_{+} &= 2l_{r+s}^{NN} - \frac{Q(p-1)}{2} n^2 \delta_{n+m,0}, \quad \left[F_n^{DD}, F_m^{DD}\right]_{+} = 2l_{n+m}^{DD} - \frac{Q(d-p)}{2} n^2 \delta_{n+m,0}, \\
\left[l_n^{NN}, F_m^{NN}\right] &= \left(\frac{1}{2}n - m\right) F_{n+m}^{NN} \delta_{n+m,0}, \quad \left[l_n^{DD}, F_m^{DD}\right] = \left(\frac{1}{2}n - m\right) F_{n+m}^{DD} \delta_{n+m,0}.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Le commutateur entre deux générateurs de types différents étant nul, la superalgèbre de Virasoro prend la forme finale :

$$\begin{aligned}
\left[l_n^{tot}, l_m^{tot}\right] &= (n-m)\, l_{n+m}^{tot} + \frac{Q\,(d-1)}{8} n^3 \delta_{n+m,0}, \\
\left[F_n^{tot}, F_m^{tot}\right]_{+} &= 2l_{n+m}^{tot} - \frac{Q(d-1)}{2} n^2 \delta_{n+m,0}, \\
\left[l_n^{tot}, F_m^{tot}\right] &= \left(\frac{1}{2}n - m\right) F_{n+m}^{tot} \delta_{n+m,0}.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Remarquons qu'on retrouve bien la superalgèbre de Virasoro habituelle si on prend la substitution $d-1 \to D$ et $Q = 1$. Ces résultats prouvent la cohérence du modèle paraquantique développé.

Chapitre 3

Cordes parafermioniques ouvertes entre deux Dp-branes parallèles dans le modèle de Neveu-Schwarz

Dans ce chapitre, nous allons étudier la configuration d'une corde parafermionique ouverte entre deux Dp-branes parallèles dans le modèle de NS. Nous nous intéresserons à déterminer l'opérateur de masse pour construire le spectre et la dégénérescence. Nous ferons la description des états pour chaque niveau de masse. Nous noterons la non trivialité de la masse due à la séparation entre les deux Dp-branes ajoutée à la présence d'une deuxième contribution purement paraquantique. Toutes les questions abordées dans le chapitre précédent seront reprises dans ce cas.

Tout d'abord, nous considérons les conditions aux bords pour les coordonnées fermioniques de types NN et DD qui sont données par :

$$\begin{array}{llll} NN & : & \psi_+^i \mid_{\sigma=0} = \psi_-^i \mid_{\sigma=0} \,, & \psi_+^i \mid_{\sigma=\pi} = -\psi_-^i \mid_{\sigma=\pi} \,, \\ DD & : & \psi_+^a \mid_{\sigma=0} = -\psi_-^a \mid_{\sigma=0} \,, & \psi_+^a \mid_{\sigma=\pi} = +\psi_-^a \mid_{\sigma=\pi} \,. \end{array} \tag{3.1}$$

La décomposition de ces coordonnées en modes demi-entiers s'écrit :

$$\begin{aligned} NN \qquad \psi^i_{\pm}(\sigma,\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{r\in z+\frac{1}{2}} b^i_r e^{-ir(\tau\pm\sigma)}, \\ DD \qquad \psi^a_{\pm}(\sigma,\tau) &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{r\in z+\frac{1}{2}} b^a_r e^{-ir(\tau\pm\sigma)}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

d'où l'expression des modes b_r comme une combinaison linéaire de champs fermioniques $\psi_{\pm}$

$$b^I_r = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\int_0^{\pi} d\sigma(\psi_+(\tau,\sigma)\exp(ir(\tau+\sigma)) + \psi_-(\tau,\sigma)\exp(ir(\tau-\sigma))), \tag{3.3}$$

ce qui conduit à la relation d'anticommutation suivante :

$$\left[b^I_r, b^J_s\right]_+ = \eta^{IJ}\delta_{r+s,0}. \quad I = i, a. \tag{3.4}$$

L'indice r prend des valeurs demi-entières, ce qui implique l'absence des modes zéro.

De même que dans le chapitre deux, on peut dériver les relations de commutation trilinéaires suivantes :

$$\begin{aligned} \left[\alpha^I_n, \left[\alpha^J_m, \alpha^K_l\right]_+\right] &= 2n(\delta^{IJ}\delta_{n+m,0}\alpha^K_l + \delta^{IK}\delta_{n+l,0}\alpha^J_m), \\ \left[\alpha^I_n, \left[\alpha^J_m, A\right]_+\right] &= 2\delta^{IJ}n\delta_{n+m,0}A;\ A \neq \alpha^K_l, \\ \left[b^I_r, \left[b^J_s, b^K_t\right]_-\right] &= 2(\delta^{IJ}\delta_{r+s,0}b^K_t - \delta^{IK}\delta_{r+t,0}b^J_s), \\ \left[b^I_r, \left[b^J_s, B\right]_+\right] &= 2\delta^{IJ}\delta_{r+s,0}B;\ B \neq b^K_t, \\ \left[x^I, \left[p^J, p^K\right]_+\right] &= 2i\left(\delta^{IJ}p^K + \delta^{IK}p^J\right), \\ \left[x^I, \left[p^J, C\right]_+\right] &= 2i\delta^{IJ}C;\ C \neq p^K, \\ \left[x^-, \left[p^+, p^+\right]_+\right] &= 4ip^+, \\ \left[x^-, \left[p^+, D\right]_+\right] &= 2iD;\quad D \neq p^+. \end{aligned} \tag{3.5}$$

3.1 Opérateur de masse

De même que précédemment, on définit l'opérateur l_0 comme suit :

$$\begin{aligned} l_0 &= \frac{1}{4}\left(\begin{array}{c} \sum_{i=2}^{p}\left(\sum_{n\in z}\left[\alpha_{-n}^{i},\alpha_{n}^{i}\right]_{+}+\sum_{r\in z+\frac{1}{2}} r\left[b_{-r}^{i},b_{r}^{i}\right]_{-}\right) \\ +\sum_{a=p+1}^{d}\left(\sum_{n\in z}\left[\alpha_{-n}^{a},\alpha_{n}^{a}\right]_{+}+\sum_{r\in z+\frac{1}{2}} r\left[b_{-r}^{a},b_{r}^{a}\right]_{-}\right)\end{array}\right) \\ &= \frac{1}{2}\alpha_0^i\alpha_0^i+\frac{1}{4}\left(\begin{array}{c} \sum_{i=2}^{p}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_{-n}^{i},\alpha_{n}^{i}\right]_{+}+\sum_{r=\frac{1}{2}}^{\infty} r\left[b_{-r}^{i},b_{r}^{i}\right]_{-}\right) \\ +\sum_{a=p+1}^{d}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_{-n}^{a},\alpha_{n}^{a}\right]_{+}+\sum_{r=\frac{1}{2}}^{\infty} r\left[b_{-r}^{a},b_{r}^{a}\right]_{-}\right)\end{array}\right) \\ &\quad +\frac{1}{4}\left(\begin{array}{c} \sum_{i=2}^{p}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_{n}^{i},\alpha_{-n}^{i}\right]_{+}-\sum_{r=\frac{1}{2}}^{\infty} r\left[b_{r}^{i},b_{-r}^{i}\right]_{-}\right) \\ +\sum_{a=p+1}^{d}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_{n}^{a},\alpha_{-n}^{a}\right]_{+}-\sum_{r=\frac{1}{2}}^{\infty} r\left[b_{r}^{a},b_{-r}^{a}\right]_{-}\right)\end{array}\right). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Le calcul des deux derniers termes conduit à :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}\sum_{r=\frac{1}{2}}^{\infty}\sum_{i=2}^{p} r\left[b_{r}^{i},b_{-r}^{i}\right]_{-} &= -\frac{1}{4}\sum_{r=\frac{1}{2}}^{\infty}\sum_{i=2}^{p}\left(-r\left[b_{-r}^{i},b_{r}^{i}\right]_{-}+r\left[b_{r}^{i},b_{-r}^{i}\right]_{+}\right) \\ &= \frac{1}{4}\sum_{r=\frac{1}{2}}^{\infty}\sum_{i=2}^{p} r\left[b_{-r}^{i},b_{r}^{i}\right]_{-}-\frac{Q\left(p-1\right)}{48}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

où le terme associé à l'ambiguïté d'ordre s'écrit :

$$b_{NN}=-\frac{Q\left(p-1\right)}{48}, \tag{3.8}$$

on peut faire de même pour les composantes DD et trouver :

$$b_{DD}=-\frac{Q\left(d-p\right)}{48}. \tag{3.9}$$

Concernant la partie bosonique (modes α), c'est toujours le résultat trouvé dans le chapitre précédent.

On obtient alors le résultat suivant :

$$l_0 = \frac{1}{2}\alpha_0^i\alpha_0^i+\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{p}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_{-n}^{i},\alpha_{n}^{i}\right]_{+}+\sum_{r=\frac{1}{2}}^{\infty} r\left[b_{-r}^{i},b_{r}^{i}\right]_{-}\right) \tag{3.10}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{a=p+1}^{d}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_{-n}^{a},\alpha_{n}^{a}\right]_{+}+\sum_{r=\frac{1}{2}}^{\infty} r\left[b_{-r}^{a},b_{r}^{a}\right]_{-}\right)-\frac{Q\left(d-1\right)}{16}, \tag{3.11}$$

avec

$$a_{NS} = -\frac{Q\,(d-1)}{16}, \tag{3.12}$$

donc, l'opérateur de masse s'écrit :

$$M^2 = \left(\frac{\overline{x}_2^a - \overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2 + \frac{1}{\alpha'}\left(N_{n+}^i + N_{n+}^a - \frac{Q\,(d-1)}{16}\right), \tag{3.13}$$

où

$$\begin{aligned} N_{n+}^i &= \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{p}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_{-n}^i, \alpha_n^i\right]_+ + \sum_{r=\frac{1}{2}}^{\infty} r\left[b_{-r}^i, b_r^i\right]_-\right), \\ N_{n+}^a &= \frac{1}{2}\sum_{a=p+1}^{d}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_{-n}^a, \alpha_n^a\right]_+ + \sum_{r=\frac{1}{2}}^{\infty} r\left[b_{-r}^a, b_r^a\right]_-\right). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Remarquons ici que le terme d'anomalie a_{NS} ne dépend ni de la dimension p de la brane ni de l'ordre Q et qu'on obtient toujours $a_{NS} = \frac{1}{2}$ (cas avec absence de D-branes) car rappelons que $d - 1 = \frac{8}{Q}$.

3.2 Spectre et dégénérescence

On considère les relations (3.13) et (3.14) pour déterminer le spectre et la dégénérescence.

Etat fondamental

$$M^2\left|p^+, \overrightarrow{p_T}\right\rangle_{NS} = \left[\left(\frac{\overline{x}_2^a - \overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2 - \frac{1}{\alpha'}\frac{Q\,(d-1)}{16}\right]\left|p^+, \overrightarrow{p_T}\right\rangle_{NS}. \tag{3.15}$$

Dans ce cas, l'absence des modes zero conduit à la non dégénérescence de la masse de l'état fondamental où ce dernier correspond à un champ scalaire de spin 0. Ici la masse au carré $m^2 = \left(\frac{\overline{x}_2^a - \overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2 - \frac{1}{\alpha'}\frac{Q(d-1)}{16}$, donc ce champ scalaire peut être tachyonique, sans masse où massif suivant la valeur $\left(\frac{\overline{x}_2^a - \overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2 - \frac{1}{2\alpha'}$.

1$^{\text{er}}$ niveau excité :

Le premier niveau excité est représenté par les deux états $b_{-\frac{1}{2}}^b\left|p^+, \overrightarrow{p_T}\right\rangle_{NS}$ et $b_{-\frac{1}{2}}^j\left|p^+, \overrightarrow{p_T}\right\rangle_{NS}$ qui sont respectivement un état scalaire et un état vectoriel avec une masse au carrée positive donnée par : $m^2 = \left(\frac{\overline{x}_2^a - \overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2 - \frac{1}{\alpha'}\frac{Q(d-1)}{16} + \frac{1}{2\alpha'} = \left(\frac{\overline{x}_2^a - \overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2$.

2$^{\text{ème}}$ niveau excité :

Le deuxième niveau excité est représenté par deux états scalaires $\left\{\alpha_{-1}^{b},\left[b_{-\frac{1}{2}}^{b},b_{-\frac{1}{2}}^{c}\right]_{-}\right\}|p^{+},\overrightarrow{p_{T}}\rangle_{NS}$, deux états vectoriels $\left\{\alpha_{-1}^{j},\left[b_{-\frac{1}{2}}^{b},b_{-\frac{1}{2}}^{j}\right]_{-}\right\}|p^{+},\overrightarrow{p_{T}}\rangle_{NS}$ et un état tensoriel $\left[b_{-\frac{1}{2}}^{j},b_{-\frac{1}{2}}^{k}\right]_{-}|p^{+},\overrightarrow{p_{T}}\rangle_{NS}$, ces états ont la même masse au carré donnée par : $m^{2}=\left(\frac{\overline{x}_{2}^{a}-\overline{x}_{1}^{a}}{2\pi\alpha'}\right)^{2}-\frac{1}{\alpha'}\frac{Q(d-1)}{16}+\frac{1}{\alpha'}=\left(\frac{\overline{x}_{2}^{a}-\overline{x}_{1}^{a}}{2\pi\alpha'}\right)^{2}+\frac{1}{2\alpha'}$.

Les états des quatre premiers niveaux de masse, leurs dégénérescences et leurs spin sont regroupés dans le tableau ci-dessous où on notera la contribution de la paraquantification dans les dégénérescences à travers la relation $d-1=\frac{8}{Q}$:

Niveau	Type d'état	Dégénérescence	Spin
0	$\vert p^{+},\overrightarrow{p_{T}}\rangle_{NS}$	1	0
$\frac{1}{2}$	$\left\{\begin{array}{c} b_{-\frac{1}{2}}^{b}\vert p^{+},\overrightarrow{p_{T}}\rangle_{NS} \\ b_{-\frac{1}{2}}^{j}\vert p^{+},\overrightarrow{p_{T}}\rangle_{NS}\end{array}\right\}$	$(d-1)$	$\left\{\begin{array}{c}0\\1\end{array}\right\}$
1	$\left\{\begin{array}{c} \left\{\alpha_{-1}^{b},\left[b_{-\frac{1}{2}}^{b},b_{-\frac{1}{2}}^{c}\right]_{-}\right\}\vert p^{+},\overrightarrow{p_{T}}\rangle_{NS} \\ \left\{\alpha_{-1}^{j},\left[b_{-\frac{1}{2}}^{b},b_{-\frac{1}{2}}^{j}\right]_{-}\right\}\vert p^{+},\overrightarrow{p_{T}}\rangle_{NS} \\ \left[b_{-\frac{1}{2}}^{j},b_{-\frac{1}{2}}^{k}\right]_{-}\vert p^{+},\overrightarrow{p_{T}}\rangle_{NS}\end{array}\right\}$	$\frac{1}{2}d(d-1)$	$\left\{\begin{array}{c}0\\1\\2\end{array}\right\}$
$\frac{3}{2}$	$\left\{\begin{array}{c} \left\{\begin{array}{c} b_{-\frac{3}{2}}^{b},\left[\alpha_{-1}^{b},b_{-\frac{1}{2}}^{c}\right]_{+}, \\ \left\langle b_{-\frac{1}{2}}^{b},b_{-\frac{1}{2}}^{c},b_{-\frac{1}{2}}^{d}\right\rangle_{-}\end{array}\right\}\vert p^{+},\overrightarrow{p_{T}}\rangle_{NS} \\ \left\{\begin{array}{c} \left[\alpha_{-1}^{b},b_{-\frac{1}{2}}^{j}\right]_{+},\left[\alpha_{-1}^{j},b_{-\frac{1}{2}}^{b}\right], \\ \left\langle b_{-\frac{1}{2}}^{b},b_{-\frac{1}{2}}^{c},b_{-\frac{1}{2}}^{j}\right\rangle_{-},b_{-\frac{3}{2}}^{j}\end{array}\right\}\vert p^{+},\overrightarrow{p_{T}}\rangle_{NS} \\ \left\{\left[\alpha_{-1}^{j},b_{-\frac{1}{2}}^{k}\right]_{+},\left\langle b_{-\frac{1}{2}}^{b},b_{-\frac{1}{2}}^{j},b_{-\frac{1}{2}}^{k}\right\rangle_{-}\right\}\vert p^{+},\overrightarrow{p_{T}}\rangle_{NS} \\ \left\langle b_{-\frac{1}{2}}^{j},b_{-\frac{1}{2}}^{k},b_{-\frac{1}{2}}^{l}\right\rangle_{-}\vert p^{+},\overrightarrow{p_{T}}\rangle_{NS}\end{array}\right\}$	$\frac{1}{6}\left(d^{3}+5d-6\right)$	$\left\{\begin{array}{c}0\\1\\2\\3\end{array}\right\}$

Tableau 2

Notons ici que dans le cas ordinaire, avec seulement les conditions de Neumann, les états parafermioniques pour les quatre premiers niveaux du spectre ont des spins égaux à $0,1,2$ et 3 respectivement. Néanmoins, dans ce cas, en plus de spin 0 pour l'état fondamental, on a les spins 0 et 1 pour le premier niveau, les spins $0,1$ et 2 pour le deuxième niveau,...etc. On peut constater aussi que le nouveau terme dans l'expression de l'opérateur de masse implique qu'il y a une possibilité d'élimination de l'état tachyonique ainsi que, pour une large séparation, on peut retrouver un état fondamental avec une masse.

3.3 Fonction de partition

Elle est définie par :

$$f_{NS}(x) = Trx^N = \sum_{n'_i, n'_a} x^{\left\langle n'_i, n'_a \left| N^i_{n+} + N^a_{n+} \right| n'_i, n'_a \right\rangle}, \tag{3.16}$$

où N^i_{n+}, N^a_{n+} sont respectivement les nombres d'occupations du niveau excité suivant les deux directions tangentielle et normale, on peut alors écrire :

$$f_{NS}(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + x^{n-\frac{1}{2}}}{1 - x^n} \right)^{p-1} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + x^{n-\frac{1}{2}}}{1 - x^n} \right)^{d-p}.$$

Le développement de cette fonction au voisinage de $x = 0$ conduit au résultat suivant :

$$f_{NS}(x) = \left[1 + (d-1)\sqrt{x} + \frac{1}{2} d (d-1) x + \frac{1}{6} \left(d^3 + 5d - 6 \right) x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{24} d(d^3 + 2d^2 + 23d - 26) x^2 ..... \right]. \tag{3.17}$$

Remarquons ici que les coefficients de la fonction de partition dépondent uniquement de la dimension d (et donc de l'ordre Q) et sont identiques à ceux trouvés par le calcul directe de la dégénérescence de chaque niveau excité exprimée dans le tableau 2.

3.4 Superalgèbre de Virasoro

Les générateurs de Virasoro L_n et G_r en termes des modes NN et DD sont donnés par :

$$\begin{aligned}
L_n^{NN} &= \frac{1}{4} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left[\alpha^i_{n-p}, \alpha_{p,i} \right]_+ + \frac{1}{4} \sum_{r \in z + \frac{1}{2}} \left(\frac{n}{2} + r \right) \left[b^i_{n-r}, b_{r,i} \right]_- , \\
L_n^{DD} &= \frac{1}{4} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left[\alpha^a_{n-p}, \alpha_{p,a} \right]_+ + \frac{1}{4} \sum_{r \in z + \frac{1}{2}} \left(\frac{n}{2} + r \right) \left[b^a_{n-r}, b_{r,a} \right]_- , \\
G_r^{NN} &= \frac{1}{2} \sum_{r \in z + \frac{1}{2}} \left[\alpha^i_{n-r}, b_{r,i} \right]_+ , \quad G_r^{DD} = \frac{1}{2} \sum_{r \in z + \frac{1}{2}} \left[\alpha^a_{n-r}, b_{r,a} \right]_+ .
\end{aligned}$$

On peut démontrer que ces générateurs vérifient les relations de (anti) commutations suivantes :

$$
\begin{aligned}
\left[l_n^{NN}, l_m^{NN}\right] &= (n-m)\, l_{n+m}^{NN} + \frac{Q\,(p-1)}{8} n \left(n^2-1\right) \delta_{n+m,0}, \\
\left[l_n^{DD}, l_m^{DD}\right] &= (n-m)\, l_{n+m}^{DD} + \frac{Q\,(d-p)}{8} n \left(n^2-1\right) \delta_{n+m,0}, \\
\left[G_r^{NN}, G_s^{NN}\right]_+ &= 2l_{r+s}^{NN} + \frac{Q(p-1)}{2} \left(r^2-\frac{1}{4}\right) \delta_{r+s,0}, \\
\left[G_r^{DD}, G_s^{DD}\right]_+ &= 2l_{n+m}^{DD} + \frac{Q(d-p)}{2} \left(r^2-\frac{1}{4}\right) \delta_{r+s,0}, \\
\left[l_n^{NN}, G_r^{NN}\right] &= \left(\frac{1}{2}n-r\right) G_{n+r}^{NN} \delta_{n+r,0}, \\
\left[l_n^{DD}, G_r^{DD}\right] &= \left(\frac{1}{2}n-r\right) G_{n+r}^{DD} \delta_{n+r,0},
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

et tous les autres commutateurs sont nuls.

La superalgèbre de Virasoro se calcule alors de la façon suivante :

$$
\begin{aligned}
\left[l_n, l_m\right] &= \left[l_n^{NN}, l_m^{NN}\right] + \left[l_n^{DD}, l_m^{DD}\right], \\
\left[G_r, G_s\right]_+ &= \left[G_r^{NN}, G_s^{NN}\right]_+ + \left[G_r^{DD}, G_s^{DD}\right]_+, \\
\left[l_n, G_r\right] &= \left[l_n^{NN}, G_r^{NN}\right] + \left[l_n^{DD}, G_r^{DD}\right],
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

et prend la forme finale :

$$
\begin{aligned}
\left[l_n, l_m\right] &= (n-m)\, l_{n+m} + \frac{Q\,(d-1)}{8} n \left(n^2-1\right) \delta_{n+m,0}, \\
\left[G_r, G_s\right]_+ &= 2l_{r+s} + \frac{Q(d-1)}{2} \left(r^2-\frac{1}{4}\right) \delta_{r+s,0}, \\
\left[l_n, G_r\right] &= \left(\frac{1}{2}n-r\right) G_{n+r} \delta_{n+r,0}.
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

De même que pour le cas de Ramond, ici aussi, ces résultats prouvent la cohérence du modèle paraquantique développé.

Chapitre 4

Projection GSO et supersymétrie d'espace-temps

4.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de construire une théorie supersymétrique dans l'espace-temps qui décrit à la fois des parabosons et des parafermions à partir de l'unification des secteurs de Ramond (parafermionque) et de Neveu-Schwarz (parabosonique). La théorie obtenue est appelée la théorie des parasupercordes de RNS. Pour cela, nous utilisons les résultats obtenus dans les chapitres 2 et 3. Cette manière d'unifier les parabosons et les parafermions exige l'utilisation des deux spectres obtenus dans les secteurs de Ramond et de Neveu-Schwarz qui sont résumés dans le tableau suivant :

Niveau	R dégénérescence	m^2	NS dégénérescence	m^2
$-\frac{1}{2}$	/	/	1	$\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2 - T_0$
0	$2^{\frac{(d-1)}{2}}$	$\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2$	$(d-1)$	$\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2 - T_0 + \frac{1}{2\alpha'}$
$\frac{1}{2}$	/	/	$\frac{1}{2}d(d-1)$	$\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2 - T_0 + \frac{1}{\alpha'}$
1	$2^{\frac{(d-1)}{2}}\left\{2\left(d-1\right)\right\}$	$\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2 + \frac{1}{\alpha'}$	$\frac{1}{6}\left(d^3+5d-6\right)$	$\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2 - T_0 + \frac{3}{2\alpha'}$
$\frac{3}{2}$	/	/	$\frac{1}{24}d\begin{pmatrix} d^3+2d^2 \\ +23d-26 \end{pmatrix}$	$\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2 - T_0 + \frac{2}{\alpha'}$
2	$2^{\frac{(d-1)}{2}}\left\{2d\left(d-1\right)\right\}$	$\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2 + \frac{2}{\alpha'}$	$\frac{1}{120}d\begin{pmatrix} d^4+5d^3+65d^2 \\ -5d-66 \end{pmatrix}$	$\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2 - T_0 + \frac{5}{2\alpha'}$

Tableau 3

où $T_0 = \frac{1}{\alpha'}\frac{Q(d-1)}{16} = \frac{1}{2\alpha'}$.

Comme on peut le voir dans le tableau 3, la dégénérescence dépend de la dimension d. Cependant, il n'est pas trivial de voir la dégénérescence correspondante de chaque niveau de masse pour les deux secteurs. Pour pouvoir les comparer, nous pouvons voir ceci dans la jauge du cône de lumière (coordonnées tangentielles et normales) où le nombre de degrés de liberté est $d-1 = \frac{8}{Q}$. Considérons alors les différents cas possibles.

1- $(d, Q) = (9, 1)$ (cas ordinaire)

Niveau	R dégénérescence	m^2	NS dégénérescence	m^2
$-\frac{1}{2}$	/	/	1	$\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2 - \frac{1}{2\alpha'}$
0	16	$\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2$	8	$\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2$
$\frac{1}{2}$	/	/	36	$\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2 + \frac{1}{2\alpha'}$
1	$16\left\{16\right\}$	$\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2 + \frac{1}{\alpha'}$	128	$\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2 + \frac{1}{\alpha'}$
$\frac{3}{2}$	/	/	402	$\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2 + \frac{3}{2\alpha'}$
2	$16\left\{144\right\}$	$\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2 + \frac{2}{\alpha'}$	1152	$\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2 + \frac{2}{\alpha'}$

Tableau 4

2- $(d, Q) = (5, 2)$

Niveau	R dégénérescence	m^2	NS dégénérescence	m^2
$-\frac{1}{2}$	/	/	1	$\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2-\frac{1}{2\alpha'}$
0	4	$\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2$	4	$\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2$
$\frac{1}{2}$	/	/	10	$\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2+\frac{1}{2\alpha'}$
1	$4\{8\}$	$\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2+\frac{1}{\alpha'}$	24	$\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2+\frac{1}{\alpha'}$
$\frac{3}{2}$	/	/	55	$\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2+\frac{3}{2\alpha'}$
2	$4\{40\}$	$\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2+\frac{2}{\alpha'}$	116	$\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2+\frac{2}{\alpha'}$

Tableau 5

3- $(d, Q) = (3, 4)$

Niveau	R dégénérescence	m^2	NS dégénérescence	m^2
$-\frac{1}{2}$	/	/	1	$\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2-\frac{1}{2\alpha'}$
0	2	$\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2$	2	$\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2$
$\frac{1}{2}$	/	/	3	$\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2+\frac{1}{2\alpha'}$
1	$2\{4\}$	$\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2+\frac{1}{\alpha'}$	6	$\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2+\frac{1}{\alpha'}$
$\frac{3}{2}$	/	/	11	$\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2+\frac{3}{2\alpha'}$
2	$2\{12\}$	$\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2+\frac{2}{\alpha'}$	18	$\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2+\frac{2}{\alpha'}$

Tableau 6

D'après le tableau 4 (cas ordinaire), nous voyons que ces dégénérescences sont similaires à celles obtenues dans la référence [35]. La seule différence est dans la masse au carré, c'est parce que dans notre cas, la corde est entre deux Dp-branes parallèles séparées par la distance $(\overline{x}_2^a - \overline{x}_1^a)^2$.

L'étude du spectre d'une corde parafermionique dans les secteurs de Ramond et de Neveu-Schwarz a prouvé que la théorie est incohérente. Néanmoins, le problème de présence de tachyon qui se pose dans le cas ordinaire du modèle de NS peut être éliminé par un choix spécifique de la séparation entre les deux branes. Il reste donc le problème de la non compatibilité entre le nombre de parabosons et de parafermions à chaque niveau de masse. Ainsi, la théorie n'a pas un espace-temps supersymétrique.

En effet, pour les niveaux de masse qui correspondent aux états avec un nombre pair d'opérateurs parafermioniques (secteur NS)(voir les états dans les tableaux 1 et 2 et les dégénérescence dans le tableau 4), il n'y a pas d'états correspondants pour le secteur R. D'autre part, pour les autres niveaux de masse, on peut voir que, pour chaque niveau, la dégénérescence dans le cas de R est exactement deux fois celle dans le cas NS. Néanmoins il existe un moyen élégant de s'affranchir de ce problème : c'est la projection GSO. Notons cependant que ces observations ne sont plus valables pour les deux autres cas ($(d,Q) = (5,2),(3,4)$) et que à priori cette projection GSO ne pourrait pas être appliquée.

4.2 Projection GSO et supersymétrie d'espace-temps

Pour la cohérence de la théorie, Gliozzi, Scherk et Olive ont montré la nécessité de la troncature dans le spectre RNS en proposant leur modèle, nommé, le mécanisme de projection GSO. Dans ce mécanisme, les états fondamentaux du secteur de Ramond (16 composantes) contiennent deux spineurs de Weyl à huit composantes. Le principe de la projection est d'en éliminer l'une des deux composants de chiralité du spineur. Pour le secteur de Neveu-Schwarz, ils ont proposé une condition qui exclut la contribution due à un nombre pair d'excitations fermioniques, cette projection décrite par l'équation :

$$f_{NS}(x) = \frac{1}{2} Tr \left[x^N - (-1)^F x^N \right], \tag{4.1}$$

où F est l'opérateur nombre fermionique, correspond à éliminer la contribution due à un nombre pair d'excitations de l'oscillateur.

Ces deux projections sont traduites par les deux fonctions de partition ci après :

Secteur de Ramond

$$f_R(x) = \frac{2^{\frac{(d-1)}{2}}}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^n}{1-x^n} \right)^{(p-1)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^n}{1-x^n} \right)^{(d-p)} . \tag{4.2}$$

Secteur de Neveu-Schwarz

$$
\begin{aligned}
f_{NS}(x) = & \frac{1}{2\sqrt{x}} \left\{ \left[\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^{n-\frac{1}{2}}}{1-x^n} \right)^{(p-1)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^{n-\frac{1}{2}}}{1-x^n} \right)^{(d-p)} \right] - \right. \\
& \left. \left[\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-x^{n-\frac{1}{2}}}{1-x^n} \right)^{(p-1)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-x^{n-\frac{1}{2}}}{1-x^n} \right)^{(d-p)} \right] \right\}, \qquad (4.3)
\end{aligned}
$$

dont les développements en séries sont exactement identiques pour le cas ordinaire $(d, Q) = (9, 1)$. En effet :

$$f_R(x) = 8 + 128x + 1152x^2 + ... \qquad (4.4)$$

et

$$f_{NS}(x) = 8 + 128x + 1152x^2 + ... \qquad (4.5)$$

ce qui se traduit par les résultats dans le tableau 7 ci-après.

Niveau	dégénérescence (R)	m^2	dégénérescence (NS)	m^2
0	8	$\left(\frac{\overline{x}_2^a - \overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2$	8	$\left(\frac{\overline{x}_2^a - \overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2$
1	128	$\left(\frac{\overline{x}_2^a - \overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2 + \frac{1}{\alpha'}$	128	$\left(\frac{\overline{x}_2^a - \overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2 + \frac{1}{\alpha'}$
2	1152	$\left(\frac{\overline{x}_2^a - \overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2 + \frac{2}{\alpha'}$	1152	$\left(\frac{\overline{x}_2^a - \overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2 + \frac{2}{\alpha'}$

Tableau 7

Ces résultats assurent l'absence des états tachyoniques quel que soit la séparation entre les deux Dp-branes et démontrent l'équivalence entre le nombre de fermions (secteur de Ramond) et le nombre de bosons (secteur de Neveu-Schwarz) ce qui conduit à une théorie supersymétrique dans l'espace-temps . Donc, la construction d'un modèle supersymétrique à partir d'une corde fermionique ouverte entre deux Dp-brane parallèles de même dimensionalités est identique à celui du cas ordinaire (voir par exemple [35]).

On peut cependant confirmer que, comme c'est déjà évoqué auparavant, cette projection GSO ne permet pas d'équilibrer les degrés de liberté parabosoniques et parafermioniques, en effet, le développement en séries des deux fonctions de partition (4.2) et (4.3) donnent :

$(d, Q) = (5, 2)$

$$f_R(x) = 2 + 16x + 80x^2 + ... \qquad (4.6)$$

$$f_{NS}(x) = 4 + 24x + 116x^2 + ... \tag{4.7}$$

$(d, Q) = (3, 4)$

$$f_R(x) = 1 + 4x + 12x^2 + ... \tag{4.8}$$

$$f_{NS}(x) = 2 + 6x + 18x^2 + ... \tag{4.9}$$

les dégénérescences ne suivent pas un ordre particulier (comme c'est le cas pour le cas ordinaire) pour pouvoir en déterminera une approche qui permettra l'équilibre des degrés de liberté parabosoniques et parafermioniques.

Chapitre 5

Cordes parafermioniques ouvertes entre deux Dp-, Dq-branes parallèles

5.1 Introduction

La configuration d'une corde bosonique ouverte entre deux Dp et Dq branes parallèles est étudiée pour différentes dimensions p et q [5]. Ceci conduit à la présence de nouvelles coordonnées ND ou DN dites mixtes en plus de celles présentées précédemment. Les D-branes ont alors des champs scalaires dans les directions normales et mixtes sur leur word-volume et des champs vectoriels dans les directions longitudinales à la brane.

Dans le présent chapitre, nous nous intéressons à l'étude des degrés de liberté fermioniques où p et q sont des entiers vérifiant $q < p < 9$. En plus du cas bosonique, nous examinons la cohérence des modèles de Ramond et de Neveu-Schwarz dans le cas paraquantique. Toutes les questions abordées dans les deux chapitres 2 et 3 seront reprises dans le cadre de la paraquantification où on démontrera la cohérence de ce modèle paraquantique [40].

5.2 Conditions aux bords et expansions en modes

En plus des deux conditions aux bords (NN et DD) mentionnées auparavant, une troisième condition aux bords dite ND (ou DN) est présente et est donnée par :

$$\left.\frac{\partial X^r}{\partial \sigma}(\tau,\sigma)\right|_{\sigma=0} = 0,\;\; X^r(\tau,\sigma)|_{\sigma=\pi} = \overline{x}_2^r; \quad r = \overline{q+1,p} \tag{5.1}$$

où l'indice r désigne la direction mixte de la brane.

L'expansion en termes des modes de ces coordonnées est donnée par :

$$X^r(\tau,\sigma) = \overline{x}_2^r + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\in z_{odd}} \frac{2}{n}\alpha^r_{\frac{n}{2}} \exp\left(-i\frac{n}{2}\tau\right)\cos\left(\frac{n}{2}\sigma\right), \tag{5.2}$$

où le nombre de ces coordonnées est égal à $(p-q)$.

Les modes d'oscillateurs vérifient les relations de commutation suivantes :

$$\left[\alpha^r_{\frac{n}{2}}, \alpha^s_{\frac{m}{2}}\right] = \frac{n}{2}\delta^{rs}\delta_{\frac{n}{2}+\frac{m}{2},0}, \tag{5.3}$$

où r se réfère à l'indice scalaire dans l'espace-temps.

Pour les champs fermioniques, les conditions aux bords sont données par [35] :

$$\begin{aligned}
ND \;\; &: \qquad \psi^r_+|_{\sigma=0} = +\psi^r_-|_{\sigma=0}\,, \qquad \psi^r_+|_{\sigma=\pi} = -\eta\psi^r_-|_{\sigma=\pi}\,,\\
DN \;\; &: \qquad \psi^r_+|_{\sigma=0} = -\psi^r_-|_{\sigma=0}\,, \qquad \psi^r_+|_{\sigma=\pi} = \eta\psi^r_-|_{\sigma=\pi}\,.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Dans le secteur de Ramond, les expansions en modes prennent la forme :

$$\psi^r_\pm(\tau,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in z_{odd}} d^r_{\frac{n}{2}} e^{-i\frac{n}{2}(\tau\pm\sigma)}, \tag{5.5}$$

où les modes des oscillateurs satisfont les relations d'anticommutation :

$$\left[d^r_{\frac{n}{2}}, d^s_{\frac{m}{2}}\right]_+ = \delta^{rs}\delta_{\frac{n}{2}+\frac{m}{2},0}, \tag{5.6}$$

remarquons ici l'absence des modes zéro.

Maintenant, pour le secteur de Neveu-Schwarz, les expansions en modes sont données par :

$$\begin{aligned}
ND \quad \psi^r_\pm(\tau,\sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n b^r_n e^{-in(\tau\pm\sigma)},\\
DN \quad \psi^r_\pm(\tau,\sigma) &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n b^r_n e^{-in(\tau\pm\sigma)},
\end{aligned} \tag{5.7}$$

où les modes b_n^r satisfont les relations d'anticommutation :

$$[b_n^r, b_m^s]_+ = \delta^{rs}\delta_{n+m,0}, \tag{5.8}$$

ici, contrairement au cas ordinaire, les modes zéro b_0^r sont présents et satisfont l'algèbre de Clifford :

$$[b_0^r, b_0^s]_+ = \delta^{rs}. \tag{5.9}$$

5.3 Le Modèle

En plus des relations trilinéaires (2.16) et (3.5) dérivées dans les chapitres deux et trois, dans notre cas, la présence des coordonnées mixtes (ND et DN) conduit à la dérivation des relations trilinéaires suivantes :

$$\begin{aligned}
\left[\alpha^r_{\frac{n}{2}}, \left[\alpha^s_{\frac{m}{2}}, \alpha^t_{\frac{l}{2}}\right]_+\right] &= n(\delta^{rs}\delta_{\frac{n}{2}+\frac{m}{2},0}\alpha^t_{\frac{l}{2}} + \delta^{rt}\delta_{\frac{n}{2}+\frac{l}{2},0}\alpha^s_{\frac{m}{2}}),\\
\left[\alpha^r_{\frac{n}{2}}, \left[\alpha^s_{\frac{m}{2}}, A\right]_+\right] &= n\delta^{rs}\delta_{\frac{n}{2}+\frac{m}{2},0}A;\ A \neq \alpha^t_{\frac{l}{2}},\\
\left[d^r_{\frac{n}{2}}, \left[d^s_{\frac{m}{2}}, d^t_{\frac{l}{2}}\right]_-\right] &= 2(\delta^{rs}\delta_{\frac{n}{2}+\frac{m}{2},0}d^t_{\frac{l}{2}} - \delta^{rt}\delta_{\frac{n}{2}+\frac{l}{2},0}d^s_{\frac{m}{2}}),\\
\left[d^r_{\frac{n}{2}}, \left[d^s_{\frac{m}{2}}, B\right]_+\right] &= 2\delta^{rs}\delta_{\frac{n}{2}+\frac{m}{2},0}B;\ B \neq d^t_{\frac{l}{2}},\\
\left[b^r_n, \left[b^s_m, b^t_l\right]_-\right] &= 2(\delta^{rs}\delta_{n+m,0}b^t_l - \delta^{rt}\delta_{n+l,0}b^s_m),\\
\left[b^r_n, [b^s_m, C]_+\right] &= 2\delta^{rs}\delta_{n+m,0}C;\ C \neq b^t_l,\\
\left[x^-, \left[p^+, p^+\right]_+\right] &= 4ip^+,\\
\left[x^-, \left[p^+, D\right]_+\right] &= 2iD;\quad D \neq p^+,
\end{aligned} \tag{5.10}$$

et tous les autres commutateurs du type $\left[E, [F, G]_+\right]$ sont nuls.

5.4 Spectre, dégénérescence et fonction de partition

5.4.1 Modèle de Ramond

Opérateur de masse modifié

L'opérateur de masse prend la forme :

$$M^2 = \left(\frac{\overline{x}_2^a - \overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2 + \frac{1}{\alpha'}\left(N_{i+}^R + N_{r+}^R + N_{a+}^R\right), \tag{5.11}$$

où

$$N_{I+}^R = \sum_{N>0}\sum_{I}\frac{1}{2}\left(\left[\alpha_{-N}^I, \alpha_N^I\right]_+ + N\left[d_{-N}^I, d_N^I\right]_-\right), \tag{5.12}$$

avec la convention :

$$(I,N) = \begin{cases} (i,n) \text{ pour } NN; \quad i = \overline{2,q} \\ (r, \frac{n}{2}) \text{ pour } ND, DN; \quad r = \overline{q+1,p} \\ (a,n) \text{ pour } DD; \quad a = \overline{p+1,d} \end{cases} . \tag{5.13}$$

et où nous avons symétrisé (antisymétrisé) le produit des modes parabosoniques (parafermioniques).

Ici, N_{i+}^R, N_{r+}^R et N_{a+}^R sont les opérateurs nombres correspondant respectivement aux secteurs longitudinal, mixte et normal.

Analyse du spectre et fonction de partition

Maintenant que nous avons construit l'opérateur de masse au carré, nous pouvons construire le spectre et calculer la fonction de partition. L'état fondamental $|p^+, \overrightarrow{p_T}\rangle_R$ vérifie la relation :

$$M^2\left|p^+, \overrightarrow{p_T}\right\rangle_R = \left(\frac{\overline{x}_2^a - \overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2\left|p^+, \overrightarrow{p_T}\right\rangle_R, \tag{5.14}$$

qui est un état massif avec une valeur propre $m^2 = \left(\frac{\overline{x}_2^a - \overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2$.

Les modes zéro pour les composantes NN et DD qui satisfont la relation $\left[M^2, d_0^{i,a}\right] = 0$ impliquent une dégénérescence de cette masse de degré $2^{\left(\frac{(q-1)}{2}+\frac{(d-p)}{2}\right)}$.

Les états du premier niveau sont obtenus quand on applique les opérateurs de création $\alpha_{-\frac{1}{2}}^s, d_{-\frac{1}{2}}^s$ (dans la direction mixte) sur l'état fondamental . L'utilisation des relations trilinéaires

(5.10) conduit à la valeur propre suivante de la masse :

$$m^2 = \left[\left(\frac{\overline{x}_2^a - \overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{1}{2\alpha'} \right], \tag{5.15}$$

avec le degré de dégénérescence $2^{\left(\frac{(q-1)+(d-p)}{2}\right)}\,(p-q)$ pour chacun.

De la même manière, on peut obtenir les autres premiers niveaux, les résultats sont résumés dans le tableau 5. 1

Niveau	Degré de dégénérescence	m^2
0	$2^{\left(\frac{(q-1)+(d-p)}{2}\right)}$	$\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2$
$\frac{1}{2}$	$2^{\left(\frac{(q-1)+(d-p)}{2}\right)}\{2(p-q)\}$	$\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2+\frac{1}{2\alpha'}$
1	$2^{\left(\frac{(q-1)+(d-p)}{2}\right)}\{2\left[(d-1)-(p-q)+(p-q)^2\right]\}$	$\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2+\frac{1}{\alpha'}$
$\frac{3}{2}$	$2^{\left(\frac{(q-1)+(d-p)}{2}\right)}\left\{\begin{array}{c}(p-q)\left[4(d-1)+\frac{8}{3}\right]\\-4(p-q)^2+\frac{4}{3}(p-q)^3\end{array}\right\}$	$\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2+\frac{3}{2\alpha'}$
2	$2^{\left(\frac{(q-1)+(d-p)}{2}\right)}\left\{\begin{array}{c}2d(d-1)+4\,(p-q)\,(1-d)\\+(p-q)^2\left[\frac{5}{6}+4d\right]\\-\frac{7}{2}\,(p-q)^3+\frac{2}{3}\,(p-q)^4\end{array}\right\}$	$\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2+\frac{2}{\alpha'}$

Tableau5.1. Spectre d'une corde parafermionique dans le secteur de R

On trouvera les états correspondants à ces premiers niveaux dans l'annexe C.

Remarquons ici que les dégénérescences dépendent de l'ordre de la paraquantification qui est liée à la dimension D de l'espace-temps à travers la relation $d-1=\frac{8}{Q}$ [27, 28] et qui introduit de nouveau des contraintes sur les possibilités des valeurs de (p,q) et bien sûr $|p^+,\overrightarrow{p_T}\rangle_R$ reste non tachyonique pour toutes les valeurs permises de $Q=1,2,4,8$.

Après avoir étudié le spectre, concentrons-nous maintenant sur la fonction de partition. En général, elle s'écrit comme suite :

$$f_R\left(x\right) = 2^{\left(\frac{(q-1)+(d-p)}{2}\right)} Tr x^{N_+} = \sum_{n=0}^{\infty} d_R(n) x^n, \tag{5.16}$$

où $d_R(n)$ est le degré de dégénérescence du $n^{ième}$niveau .

Dans notre cas, cette fonction prend la forme :

$$f_R\left(x\right) = 2^{\left(\frac{(q-1)+(d-p)}{2}\right)} \sum_{n'_i,n'_r,n'_a} x^{\left\langle n'_i,n'_r,n'_a \left| N^R_{i+}+N^R_{r+}+N^R_{a+} \right| n'_i,n'_r,n'_a \right\rangle}, \tag{5.17}$$

où les opérateurs N_{i+}^{R}, N_{r+}^{R} et N_{a+}^{R} sont donnés explicitement dans (5.12). Nous pouvons ensuite dériver la formule suivante :

$$f_R\left(x\right)=2^{\left(\frac{(q-1)+(d-p)}{2}\right)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+x^n}{1-x^n}\right)^{q-1}\prod_{n\in z_{odd}^{+}}^{\infty}\left(\frac{1+x^{\frac{n}{2}}}{1-x^{\frac{n}{2}}}\right)^{p-q}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+x^n}{1-x^n}\right)^{d-p}. \tag{5.18}$$

On peut suprimer la mention "impaire" et écrire le produit sur tous les nombres entiers n par la substitution suivante :

$$\prod_{n\in z_{odd}^{+}}^{\infty}\left(\frac{1+x^{\frac{n}{2}}}{1-x^{\frac{n}{2}}}\right)^{p-q}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+x^{\frac{2n-1}{2}}}{1-x^{\frac{2n-1}{2}}}\right)^{p-q}. \tag{5.19}$$

La fonction de partition devient :

$$f_R(x)=2^{\left(\frac{(q-1)+(d-p)}{2}\right)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+x^n}{1-x^n}\right)^{q-1}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+x^{\frac{2n-1}{2}}}{1-x^{\frac{2n-1}{2}}}\right)^{p-q}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+x^n}{1-x^n}\right)^{d-p}. \tag{5.20}$$

Le développement en séries de cette fonction donne le résultat suivant :

$$\begin{aligned}f_R(x) &= 2^{\left(\frac{(q-1)+(d-p)}{2}\right)}\Big\{1+2(p-q)\sqrt{x}+2\left[(d-1)-(p-q)+(p-q)^2\right]x\\ &+\left[(p-q)\left(4(d-1)+\frac{8}{3}\right)-4(p-q)^2+\frac{4}{3}(p-q)^3\right]x^{\frac{3}{2}}\\ &+\Bigg[2d(d-1)+4\left(p-q\right)\left(1-d\right)+(p-q)^2\left(\frac{5}{6}+4d\right)\\ &-\frac{7}{2}\left(p-q\right)^3+\frac{2}{3}\left(p-q\right)^4\Bigg]x^2+...\Big\},\end{aligned} \tag{5.21}$$

les coefficients de cette fonction représentent les degrés de dégénérescence des différents niveaux de masse.

On s'aperçoit alors que ces coefficients correspondent exactement aux degrés de dégénérescence calculés directement à partir du spectre pour chaque niveau de masse et reportés dans le (Tableau 5. 1). Cela confirme la cohérence de la théorie.

5.4.2 Modèle de Neveu-Schwarz

Opérateur de masse

Comme dans le secteur Ramond, on peut montrer que l'opérateur de masse au carré modifié prend la forme :

$$M^2=\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2+\frac{1}{\alpha'}\left(N_{i+}^{NS}+N_{r+}^{NS}+N_{a+}^{NS}-Q\frac{(d-1)}{16}+Q\frac{(p-q)}{8}\right), \tag{5.22}$$

où

$$N_{I+}^{NS} = \sum_{N>0}\sum_{I}\frac{1}{2}\left(\left[\alpha_{-N}^{I}, \alpha_{N}^{I}\right]_{+} + N\left[b_{-N}^{I}, b_{N}^{I}\right]_{-}\right), \tag{5.23}$$

avec la convention :

$$(I,N) = \begin{cases} (i, \frac{n}{2}) \text{ pour } NN; \quad i = \overline{2,q} \\ (r,n) \text{ pour } ND, DN; \quad r = \overline{q+1,p} \\ (a, \frac{n}{2}) \text{ pour } DD; \quad a = \overline{p+1,d} \end{cases}. \tag{5.24}$$

.

Analyse du spectre et fonction de partition

Nous procédons de la même manière que précédemment, l'état fondamental vérifie l'équation :

$$M^2\left|p^+, \overrightarrow{p_T}\right\rangle_{NS} = \left[\left(\frac{\overline{x}_2^a - \overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2 + \frac{1}{\alpha'}(-Q\frac{(d-1)}{16} + Q\frac{(p-q)}{8})\right]\left|p^+, \overrightarrow{p_T}\right\rangle_{NS}, \tag{5.25}$$

c'est à dire

$$m^2 = \left(\frac{\overline{x}_2^a - \overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2 + \frac{1}{\alpha'}(-Q\frac{(d-1)}{16} + Q\frac{(p-q)}{8}). \tag{5.26}$$

Notons ici que $-Q\frac{(d-1)}{16} = -\frac{1}{2}$ de sorte que le terme $T = \frac{1}{\alpha'}(-Q\frac{(d-1)}{16} + Q\frac{(p-q)}{8}) = 0$ pour les valeurs de Q, p et q vérifiant $(Q,(p-q)) = (1,4), (2,2)$ ou $(4,1)$. On peut alors affirmer que, pour ces valeurs, la théorie est libre de tachyons pour toute séparation entre les deux branes. Ici encore, la présence des modes zéro b_0^r (dans les directions mixtes) implique une dégénérescence de la masse avec le degré $2^{\frac{(p-q)}{2}}$. Nous pouvons dériver les autres premiers niveaux en appliquant les différents opérateurs de création et en calculant leurs masses et les dégénérescences. Nous résumons les résultats dans le tableau 5. 2

Niveau	Degré de dégénérescence	m^2
0	$2^{\frac{(p-q)}{2}}$	$\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2+T$
$\frac{1}{2}$	$2^{\frac{(p-q)}{2}}(d-1)$	$\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2+T+\frac{1}{2\alpha'}$
1	$2^{\frac{(p-q)}{2}}\left\{\frac{1}{2}d(d-1)+(p-q)\right\}$	$\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2+T+\frac{1}{\alpha'}$
$\frac{3}{2}$	$2^{\frac{(p-q)}{2}}\left\{\frac{d^3+5d-6}{6}+(p-q)(d-1)\right\}$	$\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2+T+\frac{3}{2\alpha'}$
2	$2^{\frac{(p-q)}{2}}\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{24}d\left(d^3+2d^2+23d-26\right)-\frac{1}{12}(p-q)^4\\+\frac{1}{2}(p-q)^3+\frac{1}{4}(p-q)^2\left[p^2+q^2-8\right]\\+\frac{1}{6}(p-q)\left[3d^2-3d-p^3+q^3+9\right]\end{array}\right\}$	$\left(\frac{\overline{x}_2^a-\overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2+T+\frac{2}{\alpha'}$

Tableau 5. 2. Spectre d'une corde parafermionique dans le secteur de NS

Maintenant, le calcul de la fonction de partition conduit au résultat suivant :

$$\begin{aligned} f_{NS}(x) &= 2^{\frac{(p-q)}{2}} \sum_{n_i',n_r',n_a'} x^{\left\langle n_i',n_r',n_a' \middle| N_{i+}^{NS}+N_{r+}^{NS}+N_{a+}^{NS} \middle| n_i',n_r',n_a' \right\rangle} \\ &= 2^{\frac{(p-q)}{2}} \left[\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^{n-\frac{1}{2}}}{1-x^n} \right)^{(q-1)} \prod_{n=1}^{\infty} (1+x^n)^{(p-q)} \right. \\ & \left. \quad \times \prod_{n\in z_{odd}^+}^{\infty} \left(\frac{1}{1-x^{\frac{n}{2}}} \right)^{(p-q)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^{n-\frac{1}{2}}}{1-x^n} \right)^{(d-p)} \right], \end{aligned} \tag{5.27}$$

où

$$\prod_{n\in z_{odd}^+}^{\infty} \left(\frac{1}{1-x^{\frac{n}{2}}} \right)^{(p-q)} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-x^{n-\frac{1}{2}}} \right)^{(p-q)}, \tag{5.28}$$

ce qui nous donne

$$f_{NS}(x) = 2^{\frac{(p-q)}{2}} \left[\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^{n-\frac{1}{2}}}{1-x^n} \right)^{(q-1)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^n}{1-x^{n-\frac{1}{2}}} \right)^{(p-q)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^{n-\frac{1}{2}}}{1-x^n} \right)^{(d-p)} \right]. \tag{5.29}$$

L'expansion de cette fonction au voisinage de x = 0 donne :

$$\begin{aligned} f_{NS}(x) &= 2^{\frac{(p-q)}{2}} \Bigg\{ 1 + (d-1)\sqrt{x} + \left[\frac{1}{2}d(d-1) + (p-q)\right] x \\ &+ \left[\frac{d^3+5d-6}{6} + (p-q)(d-1)\right] x^{\frac{3}{2}} \\ &+ \Bigg[\frac{1}{24}d\left(d^3+2d^2+23d-26\right) - \frac{1}{12}(p-q)^4 \\ &+ \frac{1}{2}(p-q)^3 + \frac{1}{4}(p-q)^2\left(p^2+q^2-8\right) \\ &+ \frac{1}{6}(p-q)\left(3d^2-3d-p^3+q^3+9\right)\Bigg] x^2 \Bigg\} + ... \end{aligned} \tag{5.30}$$

Ici encore, nous observons la correspondance parfaite entre les degrés de dégénérescences de chaque niveau de masse (Table 5. 2.) et les coefficients de la fonction de partition. Ce qui se traduit par la cohérence du modèle développé.

5.5 Superalgèbre de Virasoro

On peut vérifier la fermeture de la superalgèbre de Virasoro L, F, qui renforce le résultat de la cohérence de cette théorie. En effet, dans le secteur de Ramond, les opérateurs L et F prennent la forme :

$$\begin{aligned} L_n &= L_n^{NN} + L_n^{ND} + L_n^{DD}, \\ F_n &= F_n^{NN} + F_n^{ND} + F_n^{DD}, \end{aligned} \tag{5.31}$$

où

$$\begin{aligned} L_n^{NN} &= \frac{1}{4}\sum_{p\in z} \left\{ \left[\alpha^i_{n-p}, \alpha_{p,i}\right]_+ + (p+\frac{1}{2}n)\left[d^i_{n-p}, d_{p,i}\right]_- \right\}, \\ L_n^{ND} &= \frac{1}{4}\sum_{p\in z_{odd}} \left\{ \left[\alpha^r_{n-\frac{p}{2}}, \alpha_{\frac{p}{2},r}\right]_+ + \frac{1}{2}(p+n)\left[d^r_{n-\frac{p}{2}}, d_{\frac{p}{2},r}\right]_- \right\}, \\ L_n^{DD} &= \frac{1}{4}\sum_{p\in z} \left\{ \left[\alpha^a_{n-p}, \alpha_{p,a}\right]_+ + (p+\frac{1}{2}n)\left[d^a_{n-p}, d_{p,a}\right]_- \right\}, \end{aligned} \tag{5.32}$$

et

$$\begin{aligned} F_n^{NN} &= \frac{1}{2}\sum_{p\in z}\left[\alpha_{n-p}^{i}, d_{p,i}\right]_{+}, \\ F_n^{ND} &= \frac{1}{2}\sum_{p\in z_{odd}}\left[\alpha_{n-\frac{p}{2}}^{r}, d_{\frac{p}{2},r}\right]_{+}, \\ F_n^{DD} &= \frac{1}{2}\sum_{p\in z}\left[\alpha_{n-p}^{a}, d_{p,a}\right]_{+}. \end{aligned} \tag{5.33}$$

en utilisant les relations de commutations trilinéaires (5.10), et après un long calcul, on peut obtenir les résultats suivants :

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= (n-m)\, L_{n+m} + Q\frac{(d-1)}{8}n^3\delta_{n+m,0} - Q\frac{(p-q)}{4}n^3\delta_{n+m,0}, \\ [F_n, F_m]_+ &= 2L_{n+m} + Q\frac{(d-1)}{2}n^2\delta_{n+m,0} - Q\frac{(p-q)}{4}n^2\delta_{n+m,0}, \\ [L_n, F_m] &= \left(\frac{1}{2}n - m\right) F_{n+m}. \end{aligned} \tag{5.34}$$

Comparée à l'algèbre de Virasoro habituelle, cette dernière est modifiée par un terme central additionnel (anomalie additionnelle) de signe négatif. Ce terme central dépend des dimensions p et q des branes et de l'ordre de la parquantification Q. Remarquons aussi qu'on retrouve bien l'algèbre $((1.92), (1.93), (1.94))$ quand $p = q$ et $Q = 1$ (avec la substitution $d - 1 \to D$).

5.6 Resultats

Dans ce chapitre, nous avons étudié la théorie d'une corde parafermionique ouverte entre deux Dp et Dq-branes parallèles dans les secteurs de Ramond et de Neveu-Schwarz. Une fois les relations de commutation trilinéaires en termes de modes dérivées, on a abordé l'étude du spectre. Les opérateurs de masse montrent que l'énergie du point zéro est toujours nulle dans le secteur de Ramond et est multipliée par l'ordre de la paraquantification Q dans le cas de Neveu Schwarz, de sorte que la théorie NS est libre de tachyons pour toute séparation entre les deux branes pour les valeurs $(Q, (p-q)) = (1, 4), (2, 2)$ ou $(4, 1)$.

Une description détaillée des cinq premiers niveaux du spectre et de leurs dégénérescences pour les deux secteurs a été développée et représentée dans les tableaux 5. 1 et 5. 2.

La vérification de la cohérence de ce modèle a nécessité le calcul de la fonction de partition et sa confrontation avec les résultats des dégénérescences. L'accord parfait entre les deux résultats confirme la cohérence de chaque modèle développé. Cette consistance est renforcée par la fermeture de la superalgèbre de Virasoro L, F.

Conclusion Générale

Le propos de cette thèse est l'étude des cordes fermioniques ouvertes en présence de D-branes dans le formalisme de la paraquantification. La cohérence de la théorie des cordes bosoniques nécessite 26 dimensions d'espace-temps, elle décrit uniquement les particules bosoniques (en particulier : le photon et le graviton) en plus d'une particule indésirable : le tachyon. Dans un souci d'avoir une théorie sans tachyon, qui décrit à la fois des bosons et des fermions, un champ fermionique comme spineur sur le feuillet d'univers a été introduit pour y construire une théorie supersymétrique à 2 dimensions. Comme résultat, deux secteurs ont été obtenus, secteur de Ramond sans tachyon qui ne décrit que les fermions, et le secteur de Neveu-Schwarz qui ne décrit que les bosons où le tachyon est toujours présent. Face à cet échec, et en comparant les deux spectres, Ferdinando Gliozzi, Joël Scherk et David I. Olive (GSO) se sont aperçu qu'il y a une possibilité de combiner ces deux secteurs à travers une opération dite projection GSO qui a permis d'établir les deux résultats suivant :

- L'élimination de la particule tachyonique indésirable

- A chaque niveau de masse, il y a autant de bosons que de fermions. Cette propriété est l'une des plus révélatrices de la supersymétrie d'espace-temps.

Combiner ces deux secteurs après projection GSO conduit donc à une théorie des cordes supersymétrique. Elle est baptisée : théorie des supercordes de Ramond-Neveu-Schwarz comme théorie alternative à la théorie des supercordes de Green Schwarz conçue à l'origine comme théorie supersymétrique dans l'espace-temps, mais dont l'action comporte des termes hautement non linéaires qui laissent à priori impossible toute quantification covariante de la théorie. L'état fondamental dans la théorie des supercordes de Ramond-Neveu-Schwarz consiste alors en 8 degrés de liberté fermioniques sans masse et 8 degrés de liberté bosoniques sans masse qui représentent donc un vecteur supermultiplet pour la théorie de Yang-mills $N = 1$ supersymetrique à $D = 10$.

Dans ce travail, Il s'agissait de faire une investigation pour reprendre toutes ces questions lorsque la corde est en présence de D-branes dans le contexte de la généralisation de la mécanique quantique qu'est la paraquantification. En effet, cette présence de D-branes révèle de nouvelles possibilités intéressantes qui méritent d'être développées. Deux paramètres peuvent alors être considérés : l'orientation de ces D-branes et leurs dimensions : Dans ce travail, et à cause de la complexité de la question, nous nous somme restreint au cas de D-branes parallèles, d'abord, de même dimensionnalités et ensuite de dimensions différentes et ceci dans le contexte de la paraquantification. La propriété qui a été discutée est la brisure ou la préservation éventuelle de la supersymétrie d'espace-temps. Pour cela, il a fallu d'abord construire les deux modèles paraquantiques de Ramond et Neveu Schwarz séparément, étudier leurs cohérences à travers l'analyse du spectre, le calcul de la fonction de partition et la fermeture de la superalgèbre de Virasoro, pour ensuite aborder la question de la brisure éventuelle de cette supersymétrie d'espace-temps (GSO). Les résultats obtenus se résument comme suite :

• Dans les chapitres deux et trois, les deux modèles de la corde (para)fermionique ouverte (Ramond et Neveu-Schwarz) en présence de D-branes parallèles de même dimensionnalités ont été développés et leurs cohérences vérifiées.

• Le chapitre 4 a permis de retrouver le cas ordinaire selon lequel, la présence de D-branes parallèles de même dimensionnalités ne modifie en rien les propriétés de supersymétrie d'espace-temps de la théorie (obtenue suite à la projection GSO) et qui est semblable à celle des supercordes de Green Schwarz de type 1. Ceci n'est cependant pas le cas pour les ordres supérieurs permis de la paraquantification ($Q = 2, 4$). En effet, et à cause des dégénérescences obtenues pour les deux secteurs à chaque niveau de masse, il s'est avéré impossible de les combiner dans le même esprit de la GSO et qu'il y a par conséquent brisure de la supersymétrie d'espace temps.

• Enfin, le cinquième chapitre (objet principal de la thèse) est consacré à l'étude d'une corde parafermionique ouverte entre deux Dp-, Dq-branes parallèles. En plus des coordonnées de type NN et DD, un autre type de coordonnées est présent dites mixtes qu'on note ND ou DN. La particularité de ces dernières par rapport aux précédentes (NN et DD) est le fait que les modes demi-entiers dans le secteur de Neveu-Schwarz (NS) deviennent entiers dans le modèle de Ramond et inversement pour les modes entiers dans le secteur de Ramond (R). Ceci conduit à une dégénérescence au niveau de plus basse énergie aussi bien pour le secteur de Ramond que celui de Neveu-Schwarz. Comme résultat, l'énergie du point zéro de la corde est toujours nulle pour le cas Ramond et dépend des dimensions p, q des D-branes et de l'ordre de la paraquantification Q dans le cas de Neveu-Schwarz. En particulier, cette constante d'ordre normal est nulle (donc la théorie NS est libre de tachyons) pour toute séparation entre les deux D-branes pour les valeurs $(Q,(p-q)) = (1,4),(2,2)$ ou $(4,1)$. La vérification de la cohérence de ces modèles a nécessité l'analyse du spectre, le calcul des fonctions de partition et leur confrontation avec les résultats des dégénérescences (où un accord parfait entre les deux résultats a été obtenu), et enfin, la vérification de la fermeture de la superalgèbre de Virasoro. Maintenant, appliquer la projection GSO dans ce cas s'avère complexe à cause du fait que, et à la différence du cas des D-branes de même dimensionnalité, dans ce cas, chaque secteur peut aussi bien décrire des bosons que des fermions selon qu'on considère les composantes ND (ou DN) ou les composantes NN (ou DD). Dans le cas de la mécanique quantique ordinaire $(Q = 1)$, une analyse plus poussée au niveau de la théorie des D-branes a révélée que seuls les cas (p-q) = multiple de 4 donne une dégénérescence entre les deux secteurs et que le système Dp-,Dq-branes est en partie supersymétrique (supersymétrie non brisée). Maintenant, pour les deux autres cas $(Q,(p-q)) = (2,2)$ ou $(4,1)$ et malgré que le tachyon est éliminé, la condition $(p-q) =$ multiple de 4 est violée.

Annexe A
Relations de commutation trilinéaires

Calcul de $\left[d_n^I, \left[d_m^J, d_l^K\right]_-\right]$:

$$\begin{aligned}
&\left[d_n^I, \left[d_m^J, d_l^K\right]_-\right] \\
= \; & \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^3}\int_0^\pi d\sigma \int_0^\pi d\sigma' \int_0^\pi d\sigma'' \\
&\left[\psi_+^I\left(\tau,\sigma\right)\exp\left(in\left(\tau+\sigma\right)\right), \left[\psi_+^J\left(\tau,\sigma'\right)\exp\left(im\left(\tau+\sigma'\right)\right), \psi_+^K\left(\tau,\sigma''\right)\exp\left(il\left(\tau+\sigma''\right)\right)\right]_-\right] - \\
&\frac{1}{2\sqrt{2}\pi^3}\int_0^\pi d\sigma \int_0^\pi d\sigma' \int_0^\pi d\sigma'' \\
&\left[\psi_-^I\left(\tau,\sigma\right)\exp\left(in\left(\tau-\sigma\right)\right), \left[\psi_-^J\left(\tau,\sigma'\right)\exp\left(im\left(\tau-\sigma'\right)\right), \psi_-^J\left(\tau,\sigma''\right)\exp\left(il\left(\tau-\sigma''\right)\right)\right]_-\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A \;=\; & \int_0^\pi d\sigma \int_0^\pi d\sigma' \int_0^\pi d\sigma'' \\
&\left[\psi_+^I\left(\tau,\sigma\right)\exp\left(in\left(\tau+\sigma\right)\right), \left[\psi_+^J\left(\tau,\sigma'\right)\exp\left(im\left(\tau+\sigma'\right)\right), \psi_+^K\left(\tau,\sigma''\right)\exp\left(il\left(\tau+\sigma''\right)\right)\right]_-\right] \\
=\; & \int_0^\pi d\sigma \int_0^\pi d\sigma' \int_0^\pi d\sigma'' \exp\left(in\left(\tau+\sigma\right)\right)\exp\left(im\left(\tau+\sigma'\right)\right)\exp\left(il\left(\tau+\sigma''\right)\right) \\
&\left[\psi_+^I\left(\tau,\sigma\right), \left[\psi_+^J\left(\tau,\sigma'\right), \psi_+^K\left(\tau,\sigma''\right)\right]_-\right] \\
=\; & \int_0^\pi d\sigma \int_0^\pi d\sigma' \int_0^\pi d\sigma'' \exp\left(in\left(\tau+\sigma\right)\right)\exp\left(im\left(\tau+\sigma'\right)\right)\exp\left(il\left(\tau+\sigma''\right)\right) \\
\times\; & \left\{2\left[\psi_+^I\left(\tau,\sigma\right), \psi_+^J\left(\tau,\sigma'\right)\right]\psi_+^K\left(\tau,\sigma''\right) - 2\left[\psi_+^I\left(\tau,\sigma\right), \psi_+^K\left(\tau,\sigma''\right)\right]\psi_+^J\left(\tau,\sigma'\right)\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(a)} &= 2\pi\delta\left(\sigma-\sigma'\right)\delta^{IJ}\psi_+^K\left(\tau,\sigma''\right) \\
\text{(b)} &= -2\pi\delta(\sigma-\sigma'')\delta^{IK}\psi_+^J\left(\tau,\sigma'\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1) \quad &= \int_0^\pi d\sigma \int_0^\pi d\sigma' \int_0^\pi d\sigma'' \exp\left(in\left(\tau+\sigma\right)\right) \exp\left(im\left(\tau+\sigma'\right)\right) \exp\left(il\left(\tau+\sigma''\right)\right) \times \text{(a)} \\
&= \int_0^\pi d\sigma \int_0^\pi d\sigma' \int_0^\pi d\sigma'' \exp\left(in\left(\tau+\sigma\right)\right) \exp\left(im\left(\tau+\sigma'\right)\right) \exp\left(il\left(\tau+\sigma''\right)\right) \\
&\quad \times 2\pi\delta\left(\sigma-\sigma'\right)\delta^{IJ}\psi_+^K\left(\tau,\sigma''\right) \\
&= \int_0^\pi d\sigma' \delta\left(\sigma-\sigma'\right) \exp\left(im\left(\tau+\sigma'\right)\right) \int_0^\pi d\sigma \int_0^\pi d\sigma'' \exp\left(in\left(\tau+\sigma\right)\right) \exp\left(il\left(\tau+\sigma''\right)\right) 2\pi\delta^{IJ}\psi_+^K\left(\tau,\sigma''\right) \\
&= \int_0^\pi d\sigma \int_0^\pi d\sigma'' \exp\left(im\left(\tau+\sigma\right)\right) \exp\left(in\left(\tau+\sigma\right)\right) \exp\left(il\left(\tau+\sigma''\right)\right) 2\pi\delta^{IJ}\psi_+^K\left(\tau,\sigma''\right) \\
&= \int_0^\pi d\sigma \exp\left(i\left(m+n\right)\left(\tau+\sigma\right)\right) \int_0^\pi d\sigma'' 2\pi \exp\left(il\left(\tau+\sigma''\right)\right) \delta^{IJ}\psi_+^K\left(\tau,\sigma''\right) \\
&= 4\pi^2\delta_{m+n,0} \int_0^\pi d\sigma'' \exp\left(il\left(\tau+\sigma''\right)\right) \delta^{IJ}\psi_+^K\left(\tau,\sigma''\right) \\
&= 4\pi^2\delta_{m+n,0}\delta^{IJ} \left[\int_0^\pi d\sigma'' \exp\left(il\left(\tau+\sigma''\right)\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n d_l^K \exp\left(-il\left(\tau+\sigma''\right)\right)\right] \\
&= \frac{4\pi^2}{\sqrt{2}}\delta_{m+n,0}\delta^{IJ} d_l^K \int_0^\pi d\sigma'' \\
&= \frac{4\pi^3}{\sqrt{2}}\delta_{m+n,0}\delta^{IJ} d_l^K
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad &= \int_0^\pi d\sigma \int_0^\pi d\sigma' \int_0^\pi d\sigma'' \exp\left(in\left(\tau+\sigma\right)\right) \exp\left(im\left(\tau+\sigma'\right)\right) \exp\left(il\left(\tau+\sigma''\right)\right) \times \text{(b)} \\
&= \int_0^\pi d\sigma \int_0^\pi d\sigma' \int_0^\pi d\sigma'' \exp\left(in\left(\tau+\sigma\right)\right) \exp\left(im\left(\tau+\sigma'\right)\right) \exp\left(il\left(\tau+\sigma''\right)\right) 2\pi\delta\left(\sigma-\sigma''\right)\delta^{IK}\psi_+^J\left(\tau,\sigma'\right) \\
&= 2\pi \int_0^\pi d\sigma'' \delta\left(\sigma-\sigma''\right) \exp\left(il\left(\tau+\sigma''\right)\right) \int_0^\pi d\sigma \int_0^\pi d\sigma' \exp\left(in\left(\tau+\sigma\right)\right) \exp\left(im\left(\tau+\sigma'\right)\right) \delta^{IK}\psi_+^J\left(\tau,\sigma'\right) \\
&= 2\pi \int_0^\pi d\sigma \int_0^\pi d\sigma' \exp\left(i\left(\tau+\sigma\right)\left(n+l\right)\right) \exp\left(im\left(\tau+\sigma'\right)\right) \delta^{IK} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_m d_m^J \exp\left(-im\left(\tau+\sigma'\right)\right) \\
&= \frac{4\pi^3}{\sqrt{2}}\delta_{n+l,0}\delta^{IK} d_m^J
\end{aligned}$$

$$((1)-(2)) \times \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^3} = \delta_{m+n,0}\delta^{IJ}d_l^K - \delta_{n+l,0}\delta^{IK}d_m^J$$

donc :

$$A = \delta_{m+n,0}\delta^{IJ}d_l^K - \delta_{n+l,0}\delta^{IK}d_m^J$$

de même on trouve :

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^3}\int_0^\pi d\sigma \int_0^\pi d\sigma' \int_0^\pi d\sigma'' \\ &\quad \left[\psi_-^I(\tau,\sigma)\exp(in(\tau-\sigma)), \left[\psi_-^J(\tau,\sigma')\exp(im(\tau-\sigma')), \psi_-^K(\tau,\sigma'')\exp(il(\tau-\sigma''))\right]_-\right] \\ &= \delta_{m+n,0}\delta^{IJ}d_l^K - \delta_{n+l,0}\delta^{IK}d_m^J \end{aligned}$$

donc

$$\left[d_n^I, \left[d_m^J, d_l^K\right]_-\right] = 2\left(\delta_{m+n,0}\delta^{IJ}d_l^K - \delta_{n+l,0}\delta^{IK}d_m^J\right)$$

Annexe B
Calcul de quelques commutateurs

A titre d'exemple, on se propose de calculer ce commutateur de la superalgèbre de Virasoro $[L_n, F_m]$

On commence par le calcul du commutateur $\left[L_n^{NN}, F_m^{NN}\right]$:

$$\left[L_n^{NN}, F_m^{NN}\right] = \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left[L_n^{NN}, \left[\alpha_{m-p}^i, d_{p,i}\right]_+\right]$$

un calcul simple conduit aux résultats suivants :

$$\begin{aligned} \left[L_n^{NN}, \alpha_m^i\right] &= -m\alpha_{n+m}^i \\ \left[L_n^{NN}, d_m^i\right] &= -\left(\frac{n}{2} + m\right) d_{n+m}^i \end{aligned}$$

on obtient :

$$\left[L_n^{NN}, F_m^{NN}\right] = \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left\{-(m-p)\left[\alpha_{n+m-p}^i, d_{p,i}\right]_+ - \left(\frac{n}{2} + p\right)\left[\alpha_{m-p}^i, d_{n+p,i}\right]_+\right\}$$

en faisant un changement de l'indice $p \longrightarrow (p-n)$ dans le deuxième terme, il vient :

$$\begin{aligned} \left[L_n^{NN}, F_m^{NN}\right] &= \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left\{-(m-p)\left[\alpha_{n+m-p}^i, d_{p,i}\right]_+ - \left(\frac{n}{2} + p - n\right)\left[\alpha_{n+m-p}^i, d_{p,i}\right]_+\right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{n}{2} - m\right)\left[\alpha_{n+m-p}^i, d_{p,i}\right]_+ \\ &= \left(\frac{n}{2} - m\right) F_{m+n}^{NN} \end{aligned}$$

Pour le commutateur $\left[L_n^{ND}, F_m^{ND}\right]$:

$$\left[L_n^{ND}, F_m^{ND}\right] = \frac{1}{2} \sum_{p\in z_{odd}} \left[L_n^{ND}, \left[\alpha_{m-\frac{p}{2}}^i, d_{\frac{p}{2},i}\right]_+\right]$$

où

$$\begin{aligned} \left[L_n^{ND}, \alpha_{\frac{m}{2}}^i\right] &= -\frac{m}{2}\alpha_{n+\frac{m}{2}}^i \\ \left[L_n^{ND}, d_{\frac{m}{2}}^i\right] &= -\frac{1}{2}(n+m)\, d_{n+\frac{m}{2}}^i \end{aligned}$$

on trouve

$$\left[L_n^{ND}, F_m^{ND}\right] = \frac{1}{2}\sum_{p\in z_{odd}}\left\{-\left(m-\frac{p}{2}\right)\left[\alpha^i_{n+m-\frac{p}{2}}, d_{\frac{p}{2},i}\right]_+ - \frac{1}{2}\left(n+p\right)\left[\alpha^i_{m-\frac{p}{2}}, d_{n+\frac{p}{2},i}\right]_+\right\}$$

un changement de l'indice $\frac{p}{2} \longrightarrow \frac{p}{2} - n$ dans le deuxième terme conduit à

$$\left[L_n^{ND}, F_m^{ND}\right] = \left(\frac{n}{2} - m\right) F_{m+n}^{ND}$$

De même

$$\left[L_n^{DD}, F_m^{DD}\right] = \left(\frac{n}{2} - m\right) F_{m+n}^{DD}$$

On obtient finalement le résultat suivant :

$$\left[L_n, F_m\right] = \left(\frac{n}{2} - m\right) F_{m+n}$$

Annexe C
Les états propres

Tableau C.1. Excitations Correspondants au secteur de R

Niveau	Etats propres
0	$\vert p^+, \overrightarrow{p_T}\rangle_R$
$\frac{1}{2}$	$\left\{\alpha^s_{-\frac{1}{2}}, d^s_{-\frac{1}{2}}\right\} \vert p^+, \overrightarrow{p_T}\rangle_R$
1	$\left\{\begin{array}{c} \left[\alpha^s_{-\frac{1}{2}}, \alpha^t_{-\frac{1}{2}}\right]_+, \left[d^s_{-\frac{1}{2}}, d^t_{-\frac{1}{2}}\right]_-, \left[\alpha^s_{-\frac{1}{2}}, d^t_{-\frac{1}{2}}\right]_+, \\ \alpha^b_{-1}, d^b_{-1}, \alpha^j_{-1}, d^j_{-1} \end{array}\right\} \vert p^+, \overrightarrow{p_T}\rangle_R$
$\frac{3}{2}$	$\left\{\begin{array}{c} \left\langle\alpha^s_{-\frac{1}{2}}, \alpha^t_{-\frac{1}{2}}, \alpha^u_{-\frac{1}{2}}\right\rangle_+, \left\langle d^s_{-\frac{1}{2}}, d^t_{-\frac{1}{2}}, d^u_{-\frac{1}{2}}\right\rangle_-, \left\langle\alpha^s_{-\frac{1}{2}}, \alpha^t_{-\frac{1}{2}}, d^u_{-\frac{1}{2}}\right\rangle_+, \\ \left\langle\alpha^s_{-\frac{1}{2}}, d^t_{-\frac{1}{2}}, d^u_{-\frac{1}{2}}\right\rangle_+, \left[\alpha^s_{-\frac{1}{2}}, \alpha^b_{-1}\right]_+, \left[d^s_{-\frac{1}{2}}, \alpha^b_{-1}\right]_+, \\ \left[\alpha^s_{-\frac{1}{2}}, d^b_{-1}\right]_+, \left[d^s_{-\frac{1}{2}}, d^b_{-1}\right]_-, \alpha^s_{-\frac{3}{2}}, d^s_{-\frac{3}{2}} \\ \left[\alpha^s_{-\frac{1}{2}}, \alpha^j_{-1}\right]_+, \left[\alpha^s_{-\frac{1}{2}}, d^j_{-1}\right]_+, \left[d^s_{-\frac{1}{2}}, \alpha^j_{-1}\right]_+, \left[d^s_{-\frac{1}{2}}, d^j_{-1}\right]_- \end{array}\right\} \vert p^+, \overrightarrow{p_T}\rangle_R$

Tableau C.2. Excitations Correspondants au secteur de NS

Niveau	Etats propres
0	$\vert p^+, \overrightarrow{p_T}\rangle_{NS}$
$\frac{1}{2}$	$\left\{\alpha^s_{-\frac{1}{2}}, b^b_{-\frac{1}{2}}, b^j_{-\frac{1}{2}}\right\} \vert p^+, \overrightarrow{p_T}\rangle_{NS}$
1	$\left\{\begin{array}{c} \left[\alpha^s_{-\frac{1}{2}}, \alpha^t_{-\frac{1}{2}}\right]_+, \left[b^b_{-\frac{1}{2}}, b^c_{-\frac{1}{2}}\right]_-, \left[\alpha^s_{-\frac{1}{2}}, b^b_{-\frac{1}{2}}\right]_+, \alpha^b_{-1}, b^s_{-1}, \\ \alpha^j_{-1}, \left[\alpha^s_{-\frac{1}{2}}, b^j_{-\frac{1}{2}}\right]_+, \left[b^b_{-\frac{1}{2}}, b^j_{-\frac{1}{2}}\right]_-, \left[b^j_{-\frac{1}{2}}, b^k_{-\frac{1}{2}}\right]_- \end{array}\right\} \vert p^+, \overrightarrow{p_T}\rangle_{NS}$
$\frac{3}{2}$	$\left\{\begin{array}{c} \left\langle\alpha^s_{-\frac{1}{2}}, \alpha^t_{-\frac{1}{2}}, \alpha^u_{-\frac{1}{2}}\right\rangle_+, \left\langle\alpha^s_{-\frac{1}{2}}, \alpha^t_{-\frac{1}{2}}, b^b_{-\frac{1}{2}}\right\rangle_+, \left\langle\alpha^s_{-\frac{1}{2}}, b^b_{-\frac{1}{2}}, b^c_{-\frac{1}{2}}\right\rangle_+, \\ \left\langle b^b_{-\frac{1}{2}}, b^c_{-\frac{1}{2}}, b^d_{-\frac{1}{2}}\right\rangle_-, \left[\alpha^b_{-1}, \alpha^s_{-\frac{1}{2}}\right]_+, \left[\alpha^b_{-1}, b^c_{-\frac{1}{2}}\right]_+, \left[b^s_{-1}, \alpha^t_{-\frac{1}{2}}\right]_+, \\ \left[b^s_{-1}, b^b_{-\frac{1}{2}}\right]_-, \alpha^s_{-\frac{3}{2}}, b^b_{-\frac{3}{2}}, \left\langle b^j_{-\frac{1}{2}}, b^b_{-\frac{1}{2}}, b^c_{-\frac{1}{2}}\right\rangle_-, \left\langle b^j_{-\frac{1}{2}}, \alpha^s_{-\frac{1}{2}}, \alpha^t_{-\frac{1}{2}}\right\rangle_+, \\ \left\langle\alpha^s_{-\frac{1}{2}}, b^j_{-\frac{1}{2}}, b^b_{-\frac{1}{2}}\right\rangle_+, \left[\alpha^j_{-1}, b^b_{-\frac{1}{2}}\right]_+, b^j_{-\frac{3}{2}}, \left[\alpha^b_{-1}, b^j_{-\frac{1}{2}}\right]_+, \\ \left[\alpha^j_{-1}, \alpha^s_{-\frac{1}{2}}\right]_+, \left[b^s_{-1}, b^j_{-\frac{1}{2}}\right]_-, \left\langle b^j_{-\frac{1}{2}}, b^k_{-\frac{1}{2}}, b^b_{-\frac{1}{2}}\right\rangle_-, \\ \left\langle\alpha^s_{-\frac{1}{2}}, b^j_{-\frac{1}{2}}, b^k_{-\frac{1}{2}}\right\rangle_+, \left[\alpha^j_{-1}, b^k_{-\frac{1}{2}}\right]_+, \left\langle b^j_{-\frac{1}{2}}, b^k_{-\frac{1}{2}}, b^l_{-\frac{1}{2}}\right\rangle_- \end{array}\right\} \vert p^+, \overrightarrow{p_T}\rangle_{NS}$

Bibliographie

[1] B. Hatfield, *Quantum Field Theory of Point Particules and Strings,* Westview Press, 1989.

[2] M. Kaku, *Introduction to Superstings*, Spinger-Verlag, 1990.

[3] J. Polchinski, *String Theory*, Vol.1, Cambridge University Press, 1998.

[4] J. Polchinski, *String Theory*, Vol.2, Cambridge University Press, 1998.

[5] B. Zwiebach, *A First Course In String Theory,* Cambridge University Press, 2004.

[6] D. Lüst and S. Theisen, *Lectures on String Theory,* Springer-Verlag, 1989.

[7] M.B. Green, J. H. Schwarz, E Wetten, *Superstring Theory, Volume 1*, Cambridge University Press, 1987.

[8] K. Becker, M. Becker, J.H. Schwarz, *String Theory and M-Theory : A Modern Introduction,* Cambridge University Press, 2007.

[9] G. 't Hooft, introduction to string theory, version 14-05-04, 2004.

[10] J. Scherk, *An Introduction to the Theory of Dual Models and Strings,* Rev. Mod. Phys. 47 (1975) 123-164.

[11] J. Scherk and J. H. Schwarz, *Dual Models for non-hadrons,* Nucl. Phys. B81. 118-144 (1974).

[12] D. McMahon, *String Theory Demystified,* McGraw-Hill Companies, Inc 2009.

[13] R. J. Szabo, *An Introduction to String Theory and D-brane Dynamics*, hep-th/0207142 v1 (2002).

[14] G. Arutyunov, *Lecture on String Theory,* Preprint typeset in JHEP style-HYPER VERSION.

[15] J. Polchinski, *Dirichlet Branes and Ramond-Ramond Charges*, Phys. Rev. Lett. 75 (26). 4724-4727 (1995), hep-th/9510017.

[16] L. Smolin, *Rien ne va plus en Physique !,* Préface d'Alain Connes, Quai des Sciences, Dunod, 2006.

[17] P. Di Vecchia and A. Liccardo, *D-brane in String Theory*, arXiv : hep-th/9912161 v1 (1999).

[18] C. Bachas, *Lecture on D-branes*, arXiv : hep-th/9806199.

[19] H. S. Green2, Phys. Rev. 90, 270 (1953).

[20] E. P. Wigner, Phys. Rev. 77, (1950) 711.

[21] Y. Ohnuki, S. Kamefuchi, *Quantum Field Theory and parastatistics*, Springer-Verlag, 1982.

[22] J. F. L. Hopkinson and R. W. Tucker, phys. Rev. D10 (1974) 558.

[23] F. Ardalan and F. Mansouri, Phys. Rev. D9 (1974) 3341.

[24] F. Mansouri, X. Z. Wu , Mod. Phys. Lett. A2 (1987) 215.

[25] P. C. Argyres, S. H. Henry Tye, Phys. Rev. Lett. 67 (1991) 3339-3342.

[26] F Mansouri, Nuclear Physics B (Proc. Suppl.) 6 (1989) 189-191.

[27] N. Belaloui and H. Bennacer, Czech. J. Phys. 53 (2003) 769.

[28] N. Belaloui and H. Bennacer, Czech. J. Phys. 54 (2004) 621.

[29] N. Belaloui and L. Khodja, AIP Conference Proceedings 881, 267 (2007).

[30] D. Hamam and N. Belaloui, Open parabosonic string theory between two parallel Dp-branes, AIP Conf. Proc. 1444, 334 (2012) ; doi : 10.1063/1.4715447.

[31] L. Khodja, N. Belaloui, Braz. J. Phys. 39, 652 (2009).

[32] M. A. Seridi, N. Belaloui, Int. J. of Mod. Phys. A 30, 1550175 (2015).

[33] J. Polchinski, *Tasi Lectures on D-branes*, arXiv :hep-th/9611050v2.

[34] C. V. Johnson, *D–Brane Primer*, arXiv :hep-th/0007170v3.

[35] R. Blumenhagen, D. Lust, S. Theisen, *Basic concepts of string theory*, Theoretical and Mathematical Physics, DOI 10.1007/978-3-642-29497-6, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2013.

[36] E. Kiritsis, *String Theory in a Nutshell,* Pinceton University Press, 2007.

[37] S. Mukhi, *String Theory*, SERC THEP School, IIT Guwahati, 2009.

[38] M. Gasperini, Elements of String Cosmology, Cambridge University Press, 2007.

[39] J. H. Schwarz, *The First 15 Years of Superstring Theory,* Vol.1, World Scientific, 1985.

[40] D. Hamam and N. Belaloui, *Ramond and Neveu-Schwarz paraspinnig strings in presence of D-branes,* Int. J. Mod. Phys. A 33, 1850048 (2018).

International Journal of Modern Physics A
Vol. 33, No. 8 (2018) 1850048 (17 pages)

DOI: 10.1142/S0217751X18500483

Ramond and Neveu–Schwarz paraspinning strings in presence of D-branes

D. Hamam*

LPTHIRM, Département de Physique,
Université Saad Dahlab, Blida 1, Algeria
LPTH, Département de Physique, Université de Jijel, Algeria
douriahamam@yahoo.fr

N. Belaloui

LPMPS, Département de Physique,
Université Frères Mentouri, Constantine 1, Algeria

Received 24 December 2017
Revised 15 February 2018
Accepted 20 February 2018
Published 20 March 2018

We investigate the theory of an open parafermionic string between two parallel Dp-, Dq-branes in Ramond and Neveu–Schwarz sectors. Trilinear commutation relations between the string variables are postulated and the corresponding ones in terms of modes are derived. The analysis of the spectrum shows that one can again have a free tachyon Neveu–Schwarz model for some values of the order of the paraquantization associated to some values of p and q. The consistency of this model requires the calculation of the partition function and its confrontation with the results of the degeneracies. A perfect agreement between the two results is obtained and the closure of the Virasoro superalgebra is confirmed.

Keywords: Paraspinning string; Dp-branes; spectrum; partition function.

PACS number: 11.25.Pm

1. Introduction

The paraquantization, as a generalization of the quantization, was first introduced by Green.[1] Indeed, in 1950, Wigner[2] demonstrated that, for satisfying the wave particle duality, which is a direct consequence of the Heisenberg equations of motion, the set of the usual bilinear canonical commutation relations is a particular solution. Based on trilinear commutation relations, the paraquantization consists in a

*Corresponding author.

generalization of the creation-annihilation operators algebra for the bosons and the fermions. We also note that the paraquantization is characterized by a parameter Q, the order of the paraquantization, such that $Q = 1$ corresponds to the ordinary quantization.[3] The purpose of this paper is to investigate the paraquantum extension of a Ramond and Neveu–Schwarz string in a presence of D-branes.

Since 1974, a number of new dual models are being studied with the use of operators which satisfy parastatistics commutation relations. Operators L, G for Virasoro algebra out of general parafields are constructed and the closure of the L, G algebra is verified.[4] Another study of a paraquantum string theory was done by Ardalan and Mansouri.[5] This study is based on the particular manner in which the center-of-mass variables of the string are to be handled. Indeed, these authors impose on the center-of-mass coordinates and the total energy–momentum operators of the string x^μ, p^μ to satisfy ordinary commutation relations. This is done by the choice of a specific direction in the paraspace of the Green components, characterized by the anzatz $x^{\mu(\beta)} = x^\mu \delta_{\beta 1}$ and $p^{\mu(\beta)} = p^\mu \delta_{\beta 1}$, where $x^{\mu(\beta)}$ (respectively $p^{\mu(\beta)}$) are the Green components of x^μ (respectively p^μ) (see below). This requires relative paracommutation relations between the center-of-mass coordinates and the excitation modes of the string which are exclusively anomalous bilinear commutation relations in terms of the Green components. Because of the separation of $\beta = 1$ and $\beta \neq 1$ in the precedent anzatz, these bilinear commutation relations cannot be rewritten in trilinear commutation relations form which are the basis of the paraquantization. The paraquantization of the classical massless relativistic string action is investigated and the resulting theory is found to be Poincaré-invariant in four space–time dimensions if they use para-Bose commutation relations of order 12. More generally, they find that if the dimension D of the space–time and the order Q of parabosons are related by the expression $D = 2 + \frac{24}{Q}$, then the quantized theory is Poincaré-invariant. They also construct a fermionic parastring model which is the analog of the Ramond–Neveu–Schwarz model and find that it is Poincaré-invariant in D dimensions if $D = 2 + \frac{8}{Q}$, both the fermions and the bosons being of order Q. An alternative to construct string theories directly in four (as well as in the precedent others) space–time dimensions is interacting parastrings[6] where these theories are consistent with Lorentz invariance. Also, another alternative method of obtaining the critical dimensions for these theories is the regularization of the zero point fluctuations in parastring theories.[7] One can again construct possible new string theories (fractional superstrings) based on local worldsheet symmetries corresponding to extensions of the Virasoro algebra by fractional spin currents.[8] They have four and six space–time critical dimensions where an evidence for their existence by constructing modular invariant partition functions and the massless particle spectra is presented. Free heterotic parastrings are also investigated[9] it is shown that for $D = 4$, $Q = 4$ heterotic parastring, consistency can be achieved for a root lattice of $SO(8)$ which is integral, odd and self-dual. Another para-Bose para-Fermi version of the heterotic strings is investigated,[10] by imposing the modular invariance of the one-loop amplitude, they find another possibility of the heterotic strings based on the group $E8$. In this case, a consistent analysis of the spectrum with respect to the partition function is done, and the SUSY generator algebra which corresponds to the algebra of the SUSY quantum mechanics is constructed.

Unlike works of Ardalan and Mansouri,[5] a second approach of paraquantizing string theory is proposed,[11,12] where the paraquantization is done by requiring that both the center-of-mass variables and the excitation modes of the string verify paraquantum commutation relations. Indeed, in this study, paraquantizing the string theory consists in reinterpreting the classical bosonic and fermionic string variables $X^\mu(\tau,\sigma)$, $\mathcal{P}^\nu(\tau,\sigma')$ and $\psi^\rho(\tau,\sigma'')$ as operators satisfying the paraquantum trilinear commutation relations (τ is a timelike evolution parameter, while the parameter σ labels points on the string). Let us recall that the origin of the critical dimensions $D = 26$ for bosonic strings and $D = 10$ for supersymmetric ones can be traced to the requirement of the compatibility between quantum mechanics and Lorentz invariance. In these two approaches, the resulting parabosonic (respectively paraspinning) string theories are Poincaré-invariant if the dimension D of the space–time and the order Q of the paraquantization are related by the expressions $D = 2 + \frac{24}{Q}$ $\left(\text{respectively } D = 2 + \frac{8}{Q}\right)$. One can then obtain a number of other critical dimensions at which the string theories are again consistent. Several works are investigated in the context of the second approach,[10,13] new critical dimensions and deformed noncommutativity are obtained for a low-energy parabosonic membrane theory,[14] and a detailed study of a theory of a paraquantum strings in noncommutative space–time is done.[15]

The configuration of an open bosonic string between two parallel Dp- and Dq-branes is studied for different dimensions p and q.[16] There, the string coordinates satisfy a Neumann boundary condition on the starting Dp-brane and a Dirichlet boundary condition on the ending Dq-brane. This leads us to take the common tangential coordinates NN, the common normal coordinates DD and the common mixed coordinates; ND or DN, where the D-branes have scalar fields in the normal and mixed directions of the worldvolume and vector fields in the directions longitudinal to the brane.

In the present paper, we are interested in the study of the fermionic degrees of freedom. In addition to the bosonic case, we examine the coherence of the Ramond and Neveu–Schwarz models in the paraquantum case through the comparison between the mass spectrum degeneracies and the development of the partition functions.

The paper is organized as follows. In Sec. 2, and to fix the notations, we recall some basic features on the different boundary conditions in the case of an open spinning string between two parallel Dp- and Dq-branes which we denote by NN, DD, ND or DN. The particularity of the ND and the DN compared to the NN and DD coordinates is the fact that the half-integer modes in the Neveu–Schwarz (NS) sector became integer ones and inversely for the Ramond (R) sector. For more details, one can see this list of references.[17–23]

In Sec. 3, we construct an extension of this model in the parquantum formalism. Applying the Green representation of the different dynamical variables (operators), we postulate the trilinear commutation relations between the string variables in the light cone gauge and derive the ones in terms of the modes.

In Sec. 4, and for each Ramond and Neveu–Schwarz sectors, we calculate the modified mass operators in the normal ordering process, where the zero mass energy is still null for the Ramond case and depends on the p, q brane dimensions and the order of the paraquantization in the case of NS. The spectrum of the physical states is constructed and the mass degeneracies are calculated for each mass level. The verification of the consistency of these models requires the calculation of the partition functions and their confrontation with the results for the degeneracies. The perfect agreement between the two results confirms the consistency of the paraquantum models developed. Finally, we ensure this consistence by the closure of the Virasoro superalgebra.

2. Boundary Conditions and Mode Expansions

Let us consider the configuration of two parallel Dp-, Dq-branes. An open spinning string is supposed to satisfy the NN, DD ND or DN boundary conditions when it is stretched between these different branes.

On the light-cone worldsheet, the action of the system is written as

$$S = \frac{1}{2\pi}\int d\sigma\, d\tau \left[\partial_+ X \partial^- X + i\big((\psi_-\partial_+\psi_- + \psi_+\partial_-\psi_+)\big)\right], \tag{1}$$

where X and ψ stand for bosonic and fermionic fields, respectively.

The variation of the bosonic part of the action (1) leads to the following four types of boundary conditions:[16]

(1) NN boundary conditions

$$\left.\frac{\partial X^i}{\partial\sigma}(\tau,\sigma)\right|_{\sigma=0} = \left.\frac{\partial X^i}{\partial\sigma}(\tau,\sigma)\right|_{\sigma=\pi} = 0\,, \quad i = \overline{2,q}\,, \tag{2}$$

(2) DD boundary conditions

$$X^a(\tau,\sigma)|_{\sigma=0} = \bar{x}_1^a\,, \quad X^a(\tau,\sigma)|_{\sigma=\pi} = \bar{x}_2^a\,, \quad a = \overline{p+1,d}\,, \tag{3}$$

(3) ND (or inversely DN) boundary conditions

$$\left.\frac{\partial X^r}{\partial\sigma}(\tau,\sigma)\right|_{\sigma=0} = 0\,, \quad X^r(\tau,\sigma)|_{\sigma=\pi} = \bar{x}_2^r\,, \quad r = \overline{q+1,p}\,, \tag{4}$$

where i, a and r, respectively refer to the tangential, normal and mixed directions of the brane.

The mode expansion of each type of coordinates (NN, DD and ND) are, respectively, given by

$$X^i(\sigma,\tau) = x_0^i + \sqrt{2\alpha'}\,\alpha_0^i\tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\alpha_n^i \exp(-\imath n\tau)\cos n\sigma\,, \tag{5}$$

$$X^a(\tau,\sigma) = \bar{x}_1^a + \left(\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a\right)\frac{\sigma}{\pi} + \sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\,\alpha_n^a \exp(-in\tau)\sin n\sigma\,, \tag{6}$$

$$X^r(\tau,\sigma) = \bar{x}_2^r + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\in z_{\text{odd}}}\frac{2}{n}\alpha^r_{\frac{n}{2}}\exp\left(-i\frac{n}{2}\tau\right)\cos\left(\frac{n}{2}\sigma\right), \tag{7}$$

where the numbers of coordinates NN, DD and ND are $(q-1)$, $(d-p)$, $(p-q)$, respectively.

The oscillator modes verify the following commutation relations:

$$\left[\alpha_N^I, \alpha_M^J\right] = N\delta^{IJ}\delta_{N+M,0}\,, \tag{8}$$

where

$$(I,N) = \begin{cases} (i,n) & \text{for NN}\,, \quad i = \overline{2,q}\,, \\ \left(r, \dfrac{n}{2}\right) & \text{for ND, DN}\,, \quad r = \overline{q+1,p}\,, \\ (a,n) & \text{for DD}\,, \quad a = \overline{p+1,d}\,. \end{cases} \tag{9}$$

Here, (a,r) refers to scalar indices, whereas the i are vector indices in space–time.

Similarly, the variation of the fermionic part leads to the boundary conditions[24]

$$\begin{aligned} &\text{NN:} \quad \psi_+^i|_{\sigma=0} = \psi_-^i|_{\sigma=0}\,, \quad \psi_+^i|_{\sigma=\pi} = \eta\psi_-^i|_{\sigma=\pi}\,, \\ &\text{DD:} \quad \psi_+^a|_{\sigma=0} = -\psi_-^a|_{\sigma=0}\,, \quad \psi_+^a|_{\sigma=\pi} = -\eta\psi_-^a|_{\sigma=\pi}\,, \\ &\text{ND:} \quad \psi_+^r|_{\sigma=0} = +\psi_-^r|_{\sigma=0}\,, \quad \psi_+^r|_{\sigma=\pi} = -\eta\psi_-^r|_{\sigma=\pi}\,, \\ &\text{DN:} \quad \psi_+^r|_{\sigma=0} = -\psi_-^r|_{\sigma=0}\,, \quad \psi_+^r|_{\sigma=\pi} = \eta\psi_-^r|_{\sigma=\pi}\,, \end{aligned} \tag{10}$$

where $\eta = +1, -1$ for Ramond and Neveu–Schwarz sectors, respectively.

In the Ramond sector, the mode expansions of the fermionic field take the form

$$\psi_\pm^I(\tau,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_N d_N^I\, e^{-iN(\tau\pm\sigma)}\,, \tag{11}$$

with the convention (9) and where the oscillators modes satisfy the anticommutation relations

$$\left[d_N^I, d_M^J\right]_+ = \delta^{IJ}\delta_{N+M,0}\,, \tag{12}$$

again with the same convention (9).

It is worth noting that the zero modes d_0^i and d_0^a satisfy the Clifford algebra

$$\left[d_0^i, d_0^j\right]_+ = \delta^{ij} \quad \text{and} \quad \left[d_0^a, d_0^b\right]_+ = \delta^{ab}\,, \tag{13}$$

which contributes to the degree of degeneracy of the zero mass spectrum.

Now, for the Neveu–Schwarz sector, the mode expansions are

$$
\begin{aligned}
&\text{NN, ND} \quad \psi^I_\pm(\tau,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_N b^I_N e^{-IN(\tau\pm\sigma)}\,,\\
&\qquad\qquad (I,N) = \left(i,\frac{n}{2}\right) \quad (r,n)\,,\\
&\text{DD, DN} \quad \psi^I_\pm(\tau,\sigma) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_N b^I_N e^{-IN(\tau\pm\sigma)}\,,\\
&\qquad\qquad (I,N) = \left(a,\frac{n}{2}\right) \quad (r,n)\,,
\end{aligned}
\tag{14}
$$

where the b^I_N modes satisfy the anticommutation relations

$$
\left[b^I_N, b^J_M\right]_+ = \delta^{IJ}\delta_{N+M,0}\,, \tag{15}
$$

with the inverted convention

$$
(I,N) = \begin{cases} \left(i,\dfrac{n}{2}\right) & \text{for NN}\,, \qquad i = \overline{2,q}\,,\\ (r,n) & \text{for ND, DN}\,, \quad r = \overline{q+1,p}\,,\\ \left(a,\dfrac{n}{2}\right) & \text{for DD}\,, \qquad a = \overline{p+1,d}\,. \end{cases} \tag{16}
$$

Here, unlike the ordinary case, the zero modes b^r_0 are present and satisfy the Clifford algebra

$$
\left[b^r_0, b^s_0\right]_+ = \delta^{rs}\,. \tag{17}
$$

3. Model

Let us investigate the paraquantization of the theory in the transverse gauge. This means that the dynamical variables $X^I(\tau,\sigma)$, $\psi^I(\tau,\sigma)$, $\mathcal{P}^I(\tau,\sigma)$, x^- and p^+ as operators satisfy trilinear commutation relations.

To do this, we begin with the ordinary case based on bilinear (anti)commutations relations

$$
\begin{aligned}
\left[X^I(\tau,\sigma), \mathcal{P}^J(\tau,\sigma')\right] &= i\delta^{IJ}\delta(\sigma-\sigma')\,,\\
\left[\Psi^I(\tau,\sigma), \Psi^J(\tau,\sigma')\right]_+ &= \delta^{IJ}\delta(\sigma-\sigma')\,,\\
\left[x^-, p^+\right] &= i\,,
\end{aligned}
\tag{18}
$$

and all the other commutators are null.

We introduce the Green decomposition of the operators $X^I(\tau,\sigma)$, $\mathcal{P}^I(\tau,\sigma)$, $\Psi^I(\tau,\sigma)$, x^- and p^+ defined by

$$
\begin{aligned}
X^I(\tau,\sigma) &= \sum_{\alpha=1}^{Q} X^{I(\alpha)}(\tau,\sigma)\,,\\
\mathcal{P}^I(\tau,\sigma) &= \sum_{\alpha=1}^{Q} \mathcal{P}^{I(\alpha)}(\tau,\sigma)\,,\\
\Psi^I(\tau,\sigma) &= \sum_{\alpha=1}^{Q} \Psi^{I(\alpha)}(\tau,\sigma)\,,\\
x^- &= \sum_{\alpha=1}^{Q} x^{-(\alpha)}\,,\\
p^+ &= \sum_{\alpha=1}^{Q} p^{+(\alpha)}\,,
\end{aligned}
\tag{19}
$$

where Q is the order of paraquantization.

Paraquantizing the theory consists of postulating the following anomalous bilinear (anti)commutation relations. Here, the word anomalous means that these relations are equivalent to (18) when it is between the same Green components (α,α) and inverted and taken to be zero when it is between two different Green components (α,β)

$$
\begin{aligned}
\big[X^{I(\alpha)}(\tau,\sigma), X^{J(\alpha)}(\tau,\sigma')\big] &= \big[\mathcal{P}^{I(\alpha)}(\tau,\sigma), \mathcal{P}^{J(\alpha)}(\tau,\sigma')\big] = 0\,,\\
\big[X^{I(\alpha)}(\tau,\sigma), X^{J(\beta)}(\tau,\sigma')\big]_+ &= \big[\mathcal{P}^{I(\alpha)}(\tau,\sigma), \mathcal{P}^{J(\beta)}(\tau,\sigma')\big]_+ = 0\,, \quad \alpha\neq\beta\,,\\
\big[X^{I(\alpha)}(\tau,\sigma), \mathcal{P}^{J(\alpha)}(\tau,\sigma')\big] &= i\delta^{IJ}\delta(\sigma-\sigma')\,,\\
\big[X^{I(\alpha)}(\tau,\sigma), \mathcal{P}^{J(\beta)}(\tau,\sigma')\big]_+ &= 0\,, \quad \alpha\neq\beta\,,\\
\big[\Psi^{I(\alpha)}(\tau,\sigma), \Psi^{J(\alpha)}(\tau,\sigma')\big]_+ &= \delta^{IJ}\delta(\sigma-\sigma')\,,\\
\big[\Psi^{I(\alpha)}(\tau,\sigma), \Psi^{J(\beta)}(\tau,\sigma')\big]_- &= 0\,, \quad \alpha\neq\beta\,,\\
\big[X^{I(\alpha)}(\tau,\sigma), \Psi^{J(\alpha)}(\tau,\sigma')\big] &= \big[\mathcal{P}^{I(\alpha)}(\tau,\sigma), \Psi^{J(\alpha)}(\tau,\sigma')\big] = 0\,,\\
\big[X^{I(\alpha)}(\tau,\sigma), \Psi^{J(\beta)}(\tau,\sigma')\big]_+ &= \big[\mathcal{P}^{I(\alpha)}(\tau,\sigma), \Psi^{J(\beta)}(\tau,\sigma')\big]_+ = 0\,, \quad \alpha\neq\beta\,,\\
\big[x^{-(\alpha)}, p^{+(\alpha)}\big] &= i\,,\\
\big[x^{-(\alpha)}, p^{+(\beta)}\big]_+ &= 0\,, \quad \alpha\neq\beta\,,\\
\big[x^{-(\alpha)}, A^{(\alpha)}\big] &= \big[p^{+(\alpha)}, A^{(\alpha)}\big] = 0\,,\\
\big[x^{-(\alpha)}, A^{(\beta)}\big]_+ &= \big[p^{+(\alpha)}, A^{(\beta)}\big]_+ = 0\,, \quad \alpha\neq\beta\,,
\end{aligned}
\tag{20}
$$

$A = X^I(\tau,\sigma)$, $\mathcal{P}^I(\tau,\sigma)$ and $\Psi^I(\tau,\sigma)$.

Notice here that the particular value $Q = 1$, corresponds to the ordinary quantum case. Now, one can demonstrate that the precedent anomalous relations are equivalent to the following trilinear commutation relations which define the paraquantum system

$$\begin{aligned}
\left[X^I(\sigma,\tau),\left[\mathcal{P}^J(\sigma',\tau),\mathcal{P}^K(\sigma'',\tau)\right]_+\right] &= 2i\left\{\delta^{IJ}\delta(\sigma-\sigma')\mathcal{P}^K(\sigma'',\tau)+\delta^{IK}\delta(\sigma-\sigma'')\mathcal{P}^J(\sigma',\tau)\right\},\\
\left[X^I(\sigma,\tau),\left[X^J(\sigma',\tau),\mathcal{P}^K(\sigma'',\tau)\right]_+\right] &= 2i\delta^{IK}\delta(\sigma-\sigma'')X^J(\sigma',\tau),\\
\left[\mathcal{P}^I(\sigma,\tau),\left[X^J(\sigma',\tau),X^K(\sigma'',\tau)\right]_+\right] &= -2i\left\{\delta^{IJ}\delta(\sigma-\sigma')X^K(\sigma'',\tau)+\delta^{IK}\delta(\sigma-\sigma'')X^J(\sigma',\tau)\right\},\\
\left[\Psi^I(\sigma,\tau),\left[\Psi^J(\sigma',\tau),\Psi^K(\sigma'',\tau)\right]_-\right] &= 2\left\{\delta^{IJ}\delta(\sigma-\sigma')\Psi^K(\sigma'',\tau)-\delta^{IK}\delta(\sigma-\sigma'')\Psi^J(\sigma',\tau)\right\},\\
\left[\Psi^I(\sigma,\tau),\left[\Psi^J(\sigma',\tau),X^K(\sigma'',\tau)\right]_+\right] &= 2\delta^{IJ}\delta(\sigma-\sigma')X^K(\sigma'',\tau),\\
\left[\Psi^I(\sigma,\tau),\left[\Psi^J(\sigma',\tau),\mathcal{P}^K(\sigma'',\tau)\right]_+\right] &= 2\delta^{IJ}\delta(\sigma-\sigma')\mathcal{P}^K(\sigma'',\tau),\\
\left[X^I(\sigma,\tau),\left[\Psi^J(\sigma',\tau),\mathcal{P}^K(\sigma'',\tau)\right]_+\right] &= 2i\delta^{JK}\delta(\sigma-\sigma'')\Psi^J(\sigma',\tau),\\
\left[\mathcal{P}^I(\sigma,\tau),\left[x^-,X^J(\sigma',\tau)\right]_+\right] &= -i\delta^{IJ}\delta(\sigma-\sigma')x^-,\\
\left[X^I(\sigma,\tau),\left[x^-,\mathcal{P}^J(\sigma',\tau)\right]_+\right] &= i\delta^{IJ}\delta(\sigma-\sigma')x^-,\\
\left[x^-,\left[X^J(\sigma,\tau),p^+\right]_+\right] &= -iX^J(\sigma,\tau),\\
\left[x^-,\left[\mathcal{P}^I(\sigma,\tau),p^+\right]_+\right] &= -i\mathcal{P}^I(\sigma,\tau),
\end{aligned}\tag{21}$$

and all the other commutators of the type $\left[A,[B,C]_+\right]$ are null.

In terms of modes, and in the Ramond sector, one can derive the following trilinear commutation relations with the convention (9) (see App. A):

$$\begin{aligned}
\left[\alpha_N^I,\left[\alpha_M^J,\alpha_L^K\right]_+\right] &= 2N\left(\delta^{IJ}\delta_{N+M,0}\alpha_L^K+\delta^{IK}\delta_{N+L,0}\alpha_M^J\right),\\
\left[\alpha_N^I,\left[\alpha_M^J,A\right]_+\right] &= 2\delta^{IJ}N\delta_{N+M,0}A\,,\quad A\neq\alpha_L^K\,,\\
\left[d_N^I,\left[d_M^J,d_L^K\right]_-\right] &= 2\left(\delta^{IJ}\delta_{N+M,0}d_L^K-\delta^{IK}\delta_{N+L,0}d_M^J\right),\\
\left[d_N^I,\left[d_M^J,B\right]_+\right] &= 2\delta^{IJ}\delta_{N+M,0}B\,,\quad B\neq d_L^K\,,\\
\left[x^I,\left[p^J,p^K\right]_+\right] &= 2i\left(\delta^{IJ}p^K+\delta^{IK}p^J\right),\\
\left[x^I,\left[p^J,C\right]_+\right] &= 2i\delta^{IJ}C\,,\quad C\neq p^K\,,\\
\left[x^-,\left[p^+,p^+\right]_+\right] &= 4ip^+\,,\\
\left[x^-,\left[p^+,D\right]_+\right] &= 2iD\,,\quad D\neq p^+\,,
\end{aligned}\tag{22}$$

and all the other commutators of the type $\left[E,[F,G]_+\right]$ are null.

In the Neveu–Schwarz sector, one obtains (with the convention (16))

$$\begin{aligned}
\left[\alpha_N^I, \left[\alpha_M^J, \alpha_L^K\right]_+\right] &= 2N\left(\delta^{IJ}\delta_{N+M,0}\alpha_L^K + \delta^{IK}\delta_{N+L,0}\alpha_M^J\right), \\
\left[\alpha_N^I, \left[\alpha_M^J, A\right]_+\right] &= 2\delta^{IJ}N\delta_{N+M,0}A, \quad A \neq \alpha_L^K, \\
\left[b_N^I, \left[b_M^J, b_L^K\right]_-\right] &= 2\left(\delta^{IJ}\delta_{N+M,0}b_L^K - \delta^{IK}\delta_{N+L,0}b_M^J\right), \\
\left[b_N^I, \left[b_M^J, B\right]_+\right] &= 2\delta^{IJ}\delta_{N+M,0}B, \quad B \neq b_L^K, \\
\left[x^I, \left[p^J, p^K\right]_+\right] &= 2i\left(\delta^{IJ}p^K + \delta^{IK}p^J\right), \\
\left[x^I, \left[p^J, C\right]_+\right] &= 2i\delta^{IJ}C, \quad C \neq p^K, \\
\left[x^-, \left[p^+, p^+\right]_+\right] &= 4ip^+, \\
\left[x^-, \left[p^+, D\right]_+\right] &= 2iD, \quad D \neq p^+,
\end{aligned} \tag{23}$$

and all the other commutators of the type $\left[E, [F, G]_+\right]$ are null.

4. Spectrum, Degeneracy and Partition Function

4.1. *Ramond model*

4.1.1. *Modified mass squared operator*

The mass operator is written as

$$M^2 = \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2 + \frac{1}{\alpha'}\left(N_{i+}^R + N_{r+}^R + N_{a+}^R\right), \tag{24}$$

where

$$N_{I+}^R = \sum_{N>0}\sum_I \frac{1}{2}\left(\left[\alpha_{-N}^I, \alpha_N^I\right]_+ + N\left[d_{-N}^I, d_N^I\right]_-\right), \tag{25}$$

with the convention (9), and where we have symmetrized (antisymmetrized) the bosonic (fermionic) modes product.

Here, N_{i+}^R, N_{r+}^R and N_{a+}^R are the number operators corresponding to the longitudinal, the mixed and the normal sectors, respectively. The positive quantity, $\left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2$, represents the shift on the mass operator which arises from the separation of the two parallel Dp- and Dq-branes.

4.1.2. *Analysis of the spectrum and partition function*

Now that we have constructed the mass squared operator and determined the number operator, we can construct the spectrum and calculate the partition function. The ground state $\left|p^+, \mathbf{p}_T\right\rangle_R$ satisfies the relation

$$M^2\left|p^+, \mathbf{p}_T\right\rangle_R = \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2\left|p^+, \mathbf{p}_T\right\rangle_R, \tag{26}$$

which is a massive state with an eigenvalue, $m^2 = \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2$.

Table 1. Open paraspinning string mass spectrum in the R sector.

Level	Number of degeneracies	m^2
0	$2^{\left(\frac{(q-1)+(d-p)}{2}\right)}$	$\left(\frac{\bar{x}_2^a-\bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2$
$\frac{1}{2}$	$2^{\left(\frac{(q-1)+(d-p)}{2}\right)}\{2(p-q)\}$	$\left(\frac{\bar{x}_2^a-\bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2+\frac{1}{2\alpha'}$
1	$2^{\left(\frac{(q-1)+(d-p)}{2}\right)}\{2[(d-1)-(p-q)+(p-q)^2]\}$	$\left(\frac{\bar{x}_2^a-\bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2+\frac{1}{\alpha'}$
$\frac{3}{2}$	$2^{\left(\frac{(q-1)+(d-p)}{2}\right)}\left\{\begin{array}{c}(p-q)\left[4(d-1)+\frac{8}{3}\right]\\ -4(p-q)^2+\frac{4}{3}(p-q)^3\end{array}\right\}$	$\left(\frac{\bar{x}_2^a-\bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2+\frac{3}{2\alpha'}$
2	$2^{\left(\frac{(q-1)+(d-p)}{2}\right)}\left\{\begin{array}{c}2d(d-1)+4(p-q)(1-d)\\ +(p-q)^2\left[\frac{5}{6}+4d\right]\\ -\frac{7}{2}(p-q)^3+\frac{2}{3}(p-q)^4\end{array}\right\}$	$\left(\frac{\bar{x}_2^a-\bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2+\frac{2}{\alpha'}$

The zero modes for the NN and DD components which satisfy the relation $\left[M^2, d_0^{i,a}\right]=0$ imply a degeneracy of this mass of a degree $2^{\left(\frac{(q-1)+(d-p)}{2}\right)}$.

The states of the first level are obtained when we apply the creation operators $\alpha^s_{-\frac{1}{2}}$, $d^s_{-\frac{1}{2}}$ (in the mixed direction) on the fundamental state. By the use of the trilinear relations (22), one calculates the mass eigenvalue and obtains

$$m^2=\left[\left(\frac{\bar{x}_2^a-\bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2+\frac{1}{2\alpha'}\right], \tag{27}$$

with the degree of degeneracy $2^{\left(\frac{(q-1)+(d-p)}{2}\right)}(p-q)$ for each one.

In the same way, one can obtain the other first levels as summarized in Table 1.

For the states corresponding to these first levels, see App. B.

Notice here that the degeneracies depend on the order of the paraquantization which is related to the space–time dimension D through the relation $d-1=\frac{8}{Q}$ (Refs. 11 and 12) and which again introduces constraint on the possibilities of the values of (p,q) and of course $\left|p^+,\mathbf{p}_T\right\rangle_R$ rest are not tachyonic for all the allowed values of $Q=1,2,4,8$.

Having studied the spectrum, let us now focus on the partition function. In general, this takes the following form:

$$f_R(x)=2^{\left(\frac{(q-1)+(d-p)}{2}\right)}\operatorname{Tr}x^{N_+}=\sum_{n=0}^{\infty}d_R(n)x^n\,, \tag{28}$$

where $d_R(n)$ is the degree of degeneracy of the nth level and N_+ is the number operator.

In our case, this function reads

$$f_R(x)=2^{\left(\frac{(q-1)+(d-p)}{2}\right)}\sum_{n'_i,n'_r,n'_a}x^{\langle n'_i,n'_r,n'_a|N^R_{i+}+N^R_{r+}+N^R_{a+}|n'_i,n'_r,n'_a\rangle}\,, \tag{29}$$

where the operators N_{i+}^R, N_{r+}^R and N_{a+}^R are given explicitly in (25). We can then derive the following form:

$$f_R(x) = 2^{\left(\frac{(q-1)+(d-p)}{2}\right)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^n}{1-x^n}\right)^{q-1} \prod_{n\in z_{\text{odd}}^+}^{\infty} \left(\frac{1+x^{\frac{n}{2}}}{1-x^{\frac{n}{2}}}\right)^{p-q} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^n}{1-x^n}\right)^{d-p}. \tag{30}$$

If we consider only integer numbers n, one can write

$$\prod_{n\in z_{\text{odd}}^+}^{\infty} \left(\frac{1+x^{\frac{n}{2}}}{1-x^{\frac{n}{2}}}\right)^{p-q} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^{\frac{2n-1}{2}}}{1-x^{\frac{2n-1}{2}}}\right)^{p-q}. \tag{31}$$

Then the partition function becomes

$$f_R(x) = 2^{\left(\frac{(q-1)+(d-p)}{2}\right)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^n}{1-x^n}\right)^{q-1} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^{\frac{2n-1}{2}}}{1-x^{\frac{2n-1}{2}}}\right)^{p-q} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^n}{1-x^n}\right)^{d-p}. \tag{32}$$

Numerical calculation of these terms shows that

$$\begin{aligned} f_R(x) = 2^{\left(\frac{(q-1)+(d-p)}{2}\right)} \Big\{ & 1 + 2(p-q)\sqrt{x} + 2\big[(d-1) - (p-q) + (p-q)^2\big]x \\ & + \left[(p-q)\left(4(d-1) + \frac{8}{3}\right) - 4(p-q)^2 + \frac{4}{3}(p-q)^3\right]x^{\frac{3}{2}} \\ & + \bigg[2d(d-1) + 4(p-q)(1-d) + (p-q)^2\left(\frac{5}{6} + 4d\right) \\ & - \frac{7}{2}(p-q)^3 + \frac{2}{3}(p-q)^4\bigg]x^2 + \cdots \Big\}, \end{aligned} \tag{33}$$

where the coefficients of this function denote the number of states of each level.

We obtain a common chord between the development of the partition function (33) and the degeneracies of states for each mass level (Table 1). This confirms the consistence of the theory.

4.2. *Neveu–Schwarz model*

4.2.1. *Modified mass squared operator*

As in the Ramond sector, the modified mass squared operator is given in symmetrical form as

$$M^2 = \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2 + \frac{1}{\alpha'}\left(N_{i+}^{\text{NS}} + N_{r+}^{\text{NS}} + N_{a+}^{\text{NS}} - Q\frac{(d-1)}{16} + Q\frac{(p-q)}{8}\right), \tag{34}$$

where

$$N_{I+}^{\text{NS}} = \sum_{N>0} \sum_{I} \frac{1}{2}\left(\left[\alpha_{-N}^I, \alpha_N^I\right]_+ + N\left[b_{-N}^I, b_N^I\right]_-\right), \tag{35}$$

with the convention (16).

Table 2. Open paraspinning string mass spectrum in NS sector.

Level	Number of degeneracies	m^2
0	$2^{\frac{(p-q)}{2}}$	$\left(\frac{\bar{x}_2^a-\bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2+T$
$\frac{1}{2}$	$2^{\frac{(p-q)}{2}}(d-1)$	$\left(\frac{\bar{x}_2^a-\bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2+T+\frac{1}{2\alpha'}$
1	$2^{\frac{(p-q)}{2}}\left\{\frac{1}{2}d(d-1)+(p-q)\right\}$	$\left(\frac{\bar{x}_2^a-\bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2+T+\frac{1}{\alpha'}$
$\frac{3}{2}$	$2^{\frac{(p-q)}{2}}\left\{\frac{d^3+5d-6}{6}+(p-q)(d-1)\right\}$	$\left(\frac{\bar{x}_2^a-\bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2+T+\frac{3}{2\alpha'}$
2	$2^{\frac{(p-q)}{2}}\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{24}d(d^3+2d^2+23d-26)-\frac{1}{12}(p-q)^4\\+\frac{1}{2}(p-q)^3+\frac{1}{4}(p-q)^2[p^2+q^2-8]\\+\frac{1}{6}(p-q)[3d^2-3d-p^3+q^3+9]\end{array}\right\}$	$\left(\frac{\bar{x}_2^a-\bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2+T+\frac{2}{\alpha'}$

4.2.2. *Analysis of the spectrum and partition function*

We proceed in the same way and the fundamental state verifies

$$M^2\left|p^+,\mathbf{p}_T\right\rangle_{\rm NS}=\left[\left(\frac{\bar{x}_2^a-\bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2+\frac{1}{\alpha'}\left(-Q\frac{(d-1)}{16}+Q\frac{(p-q)}{8}\right)\right]\left|p^+,\mathbf{p}_T\right\rangle_{\rm NS}, \quad (36)$$

which implies

$$m^2=\left(\frac{\bar{x}_2^a-\bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2+\frac{1}{\alpha'}\left(-Q\frac{(d-1)}{16}+Q\frac{(p-q)}{8}\right). \quad (37)$$

Notice here that $-Q\frac{(d-1)}{16}=-\frac{1}{2}$ so that the term $T=\frac{1}{\alpha'}\left(-Q\frac{(d-1)}{16}+Q\frac{(p-q)}{8}\right)=0$ in the cases $(Q,(p-q))=(1,4)$, $(2,2)$ or $(4,1)$, we conclude that the theory is free of tachyons for any separation between the two branes. Here again, the presence of the zero modes b_0^r (in the mixed directions) implies a degeneracy of the mass with the degree $2^{\frac{(p-q)}{2}}$. We can derive the other first levels by applying the different creation operators, calculate their masses and the degeneracies. We summarize the results in Table 2.

Now, the partition function is given by

$$\begin{aligned}f_{\rm NS}(x)&=2^{\frac{(p-q)}{2}}\sum_{n'_i,n'_r,n'_a}x^{\langle n'_i,n'_r,n'_a|N_{i+}^{\rm NS}+N_{r+}^{\rm NS}+N_{a+}^{\rm NS}|n'_i,n'_r,n'_a\rangle}\\&=2^{\frac{(p-q)}{2}}\left[\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+x^{n-\frac{1}{2}}}{1-x^n}\right)^{(q-1)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+x^n\right)^{(p-q)}\right.\\&\qquad\left.\times\prod_{n\in z_{\rm odd}^+}\left(\frac{1}{1-x^{\frac{n}{2}}}\right)^{(p-q)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+x^{n-\frac{1}{2}}}{1-x^n}\right)^{(d-p)}\right], \quad (38)\end{aligned}$$

where

$$\prod_{n\in z^+_{\text{odd}}} \left(\frac{1}{1-x^{\frac{n}{2}}}\right)^{(p-q)} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-x^{n-\frac{1}{2}}}\right)^{(p-q)}, \tag{39}$$

which leads to

$$f_{\text{NS}}(x) = 2^{\frac{(p-q)}{2}}\left[\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+x^{n-\frac{1}{2}}}{1-x^n}\right)^{(q-1)} \times \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+x^n}{1-x^{n-\frac{1}{2}}}\right)^{(p-q)} \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+x^{n-\frac{1}{2}}}{1-x^n}\right)^{(d\,-\,p)}\right]. \tag{40}$$

The expansion of this function around $x=0$ gives

$$\begin{aligned} f_{\text{NS}}(x) = 2^{\frac{(p-q)}{2}}\Bigg\{&1+(d-1)\sqrt{x}+\left[\frac{1}{2}d(d-1)+(p-q)\right]x \\ &+\left[\frac{d^3+5d-6}{6}+(p-q)(d-1)\right]x^{\frac{3}{2}} \\ &+\left[\frac{1}{24}d\big(d^3+2d^2+23d-26\big)-\frac{1}{12}(p-q)^4\right. \\ &+\frac{1}{2}(p-q)^3+\frac{1}{4}(p-q)^2(p^2+q^2-8) \\ &\left.+\frac{1}{6}(p-q)(3d^2-3d-p^3+q^3+9)\right]x^2\Bigg\}+\cdots. \end{aligned} \tag{41}$$

Here again, we observe that the degeneracies of each mass level are equal to the coefficients of the partition function.

5. Virasoro Superalgebra

One can easily verify the closure of the L, F, Virasoro superalgebra which reinforces the consistency of this theory. Indeed, in the Ramond sector, the operators L and F take the form

$$\begin{aligned} L_n &= L_n^{\text{NN}} + L_n^{\text{ND}} + L_n^{\text{DD}}\,, \\ F_n &= F_n^{\text{NN}} + F_n^{\text{ND}} + F_n^{\text{DD}}\,, \end{aligned} \tag{42}$$

where

$$\begin{aligned} L_n^{\text{NN}} &= \frac{1}{4}\sum_{p\in z}\left\{\left[\alpha^i_{n-p},\alpha_{p,i}\right]_+ + \left(p+\frac{1}{2}n\right)\left[d^i_{n-p},d_{p,i}\right]_-\right\}, \\ L_n^{\text{ND}} &= \frac{1}{4}\sum_{p\in z_{odd}}\left\{\left[\alpha^r_{n-\frac{p}{2}},\alpha_{\frac{p}{2},r}\right]_+ + \frac{1}{2}(p+n)\left[d^r_{n-\frac{p}{2}},d_{\frac{p}{2},r}\right]_-\right\}, \\ L_n^{\text{DD}} &= \frac{1}{4}\sum_{p\in z}\left\{\left[\alpha^a_{n-p},\alpha_{p,a}\right]_+ + \left(p+\frac{1}{2}n\right)\left[d^a_{n-p},d_{p,a}\right]_-\right\}, \end{aligned} \tag{43}$$

and

$$
\begin{aligned}
F_n^{\mathrm{NN}} &= \frac{1}{2}\sum_{p\in z}\left[\alpha^i_{n-p}, d_{p,i}\right]_+ ,\\
F_n^{\mathrm{ND}} &= \frac{1}{2}\sum_{p\in z_{\mathrm{odd}}}\left[\alpha^r_{n-\frac{p}{2}}, d_{\frac{p}{2},r}\right]_+ ,\\
F_n^{\mathrm{DD}} &= \frac{1}{2}\sum_{p\in z}\left[\alpha^a_{n-p}, d_{p,a}\right]_+ .
\end{aligned}
\tag{44}
$$

By the use of the trilinear commutations relations (22), and after a lengthy calculus, one can obtain the following results:

$$
\begin{aligned}
\left[L_n, L_m\right] &= (n-m)L_{n+m} + Q\frac{(d-1)}{8}n^3\delta_{n+m,0} - Q\frac{(p-q)}{4}n^3\delta_{n+m,0} ,\\
\left[F_n, F_m\right]_+ &= 2L_{n+m} + Q\frac{(d-1)}{2}n^2\delta_{n+m,0} - Q\frac{(p-q)}{4}n^2\delta_{n+m,0} ,\\
\left[L_n, F_m\right] &= \left(\frac{1}{2}n - m\right)F_{n+m} .
\end{aligned}
\tag{45}
$$

Note that the central term is dependent on the dimensions p and q of the branes and the paraquantization order Q.

6. Results

In this paper, we have studied the theory of an open parafermionic string between two parallel Dp- and Dq-branes in the Ramond and Neveu–Schwarz sectors. We postulated the set of the trilinear commutation relations verified by $X^I(\sigma,\tau)$, $\psi^I(\sigma,\tau)$ and $\mathcal{P}^I(\sigma,\tau)$ and derived all the paracommutation relations in terms of modes.

The second point developed is the study of the spectrum. The mass operators show that the zero mass energy is still null in the Ramond sector and is multiplied by the order of the paraquantization Q in the Neveu–Schwarz case, so that the NS theory is free of tachyons for any separation between the two branes for the values $(Q,(p-q)) = (1,4)$, $(2,2)$ or $(4,1)$.

A detailed description of the first five levels of the spectrum and their degeneracies for each sectors is done and represented in Tables 1 and 2.

The verification of the consistency of this model requires the calculation of the partition function and its confrontation with the results for the degeneracies. The perfect agreement between the two results confirms the consistency of each model developed. This consistency is reinforced by the closure of the L and F Virasoro superalgebra.

Acknowledgement

This work is supported by the Algerian Ministry of Higher Education and Research under the CNEPRU project No. D00920100040.

Appendix A. Trilinear Commutation Relations

As an example, we derive one of the trilinear commutation relations $\left[d_N^I, \left[d_M^J, d_L^K\right]_-\right]$

$$\left[d_N^I, \left[d_M^J, d_L^K\right]_-\right] = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^3}\int_0^\pi d\sigma \int_0^\pi d\sigma' \int_0^\pi d\sigma'' \times \left[\psi_+^I(\tau,\sigma)\exp(iN(\tau+\sigma)), \left[\psi_+^J(\tau,\sigma')\exp(iM(\tau+\sigma')), \psi_+^K(\tau,\sigma'')\exp(iL(\tau+\sigma''))\right]_-\right] + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^3}\int_0^\pi d\sigma \int_0^\pi d\sigma' \int_0^\pi d\sigma'' \times \left[\psi_-^I(\tau,\sigma)\exp(iN(\tau-\sigma)), \left[\psi_-^J(\tau,\sigma')\exp(iM(\tau-\sigma')), \psi_-^K(\tau,\sigma'')\exp(iL(\tau-\sigma''))\right]_-\right].$$

The first integral A_1 is as follows:

$$A_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^3}\int_0^\pi d\sigma \int_0^\pi d\sigma' \int_0^\pi d\sigma'' \exp(iN(\tau+\sigma))\exp(iM(\tau+\sigma'))\exp(iL(\tau+\sigma'')) \times \left[\psi_+^I(\tau,\sigma), \left[\psi_+^J(\tau,\sigma'), \psi_+^K(\tau,\sigma'')\right]_-\right],$$

thus we use the trilinear commutation relations (21) and (11), and obtain

$$A_1 = \delta_{N+M,0}\delta^{IJ}d_L^K - \delta_{N+L,0}\delta^{IK}d_M^J.$$

In the same way, the second integral A_2 is as follows:

$$A_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^3}\int_0^\pi d\sigma \int_0^\pi d\sigma' \int_0^\pi d\sigma'' \exp(iN(\tau-\sigma))\exp(iM(\tau-\sigma'))\exp(iL(\tau-\sigma'')) \times \left[\psi_-^I(\tau,\sigma), \left[\psi_-^J(\tau,\sigma'), \psi_-^K(\tau,\sigma'')\right]_-\right],$$

thus giving

$$A_2 = \delta_{N+M,0}\delta^{IJ}d_L^K - \delta_{N+L,0}\delta^{IK}d_M^J.$$

Finally, we obtain

$$\left[d_N^I, \left[d_M^J, d_L^K\right]_-\right] = A_1 + A_2 = 2\left(\delta_{N+M,0}\delta^{IJ}d_L^K - \delta_{N+L,0}\delta^{IK}d_M^J\right).$$

Appendix B. Eigenstates

In this section, we give the corresponding excitations for an open spinning string between two parallel Dp, Dq-branes in light-cone gauge (Tables B.1 and B.2).

The notation $\langle a, b, c, \ldots\rangle_\pm$ describes the symmetrization (antisymmetrization) of the all possible permutations of oscillators products.

Table B.1. Corresponding excitations in R sector.

Level	State
0	$\vert p^+, \mathbf{p}_T\rangle_{\mathrm{R}}$
$\frac{1}{2}$	$\left\{\alpha^s_{-\frac{1}{2}}, d^s_{-\frac{1}{2}}\right\}\vert p^+, \mathbf{p}_T\rangle_{\mathrm{R}}$
1	$\left\{\left[\alpha^s_{-\frac{1}{2}}, \alpha^t_{-\frac{1}{2}}\right]_+, \left[d^s_{-\frac{1}{2}}, d^t_{-\frac{1}{2}}\right]_-, \left[\alpha^s_{-\frac{1}{2}}, d^t_{-\frac{1}{2}}\right]_+, \alpha^b_{-1}, d^b_{-1}, \alpha^j_{-1}, d^j_{-1}\right\}\vert p^+, \mathbf{p}_T\rangle_{\mathrm{R}}$
$\frac{3}{2}$	$\left\{\left\langle \alpha^s_{-\frac{1}{2}}, \alpha^t_{-\frac{1}{2}}, \alpha^u_{-\frac{1}{2}}\right\rangle_+, \left\langle d^s_{-\frac{1}{2}}, d^t_{-\frac{1}{2}}, d^u_{-\frac{1}{2}}\right\rangle_-, \left\langle \alpha^s_{-\frac{1}{2}}, \alpha^t_{-\frac{1}{2}}, d^u_{-\frac{1}{2}}\right\rangle_+,\right.$
	$\left\langle \alpha^s_{-\frac{1}{2}}, d^t_{-\frac{1}{2}}, d^u_{-\frac{1}{2}}\right\rangle_+, \left[\alpha^s_{-\frac{1}{2}}, \alpha^b_{-1}\right]_+, \left[d^s_{-\frac{1}{2}}, \alpha^b_{-1}\right]_+,$
	$\left[\alpha^s_{-\frac{1}{2}}, d^b_{-1}\right]_+, \left[d^s_{-\frac{1}{2}}, d^b_{-1}\right]_-, \alpha^s_{-\frac{3}{2}}, d^s_{-\frac{3}{2}} \left[\alpha^s_{-\frac{1}{2}}, \alpha^j_{-1}\right]_+,$
	$\left.\left[\alpha^s_{-\frac{1}{2}}, d^j_{-1}\right]_+, \left[d^s_{-\frac{1}{2}}, \alpha^j_{-1}\right]_+, \left[d^s_{-\frac{1}{2}}, d^j_{-1}\right]_-\right\}\vert p^+, \mathbf{p}_T\rangle_{\mathrm{R}}$

Table B.2. Corresponding excitations in NS sector.

Level	State
0	$\vert p^+, \mathbf{p}_T\rangle_{\mathrm{NS}}$
$\frac{1}{2}$	$\left\{\alpha^s_{-\frac{1}{2}}, b^b_{-\frac{1}{2}}, b^j_{-\frac{1}{2}}\right\}\vert p^+, \mathbf{p}_T\rangle_{\mathrm{NS}}$
1	$\left\{\left[\alpha^s_{-\frac{1}{2}}, \alpha^t_{-\frac{1}{2}}\right]_+, \left[b^b_{-\frac{1}{2}}, b^c_{-\frac{1}{2}}\right]_-, \left[\alpha^s_{-\frac{1}{2}}, b^b_{-\frac{1}{2}}\right]_+, \alpha^b_{-1}, b^s_{-1}, \alpha^j_{-1},\right.$
	$\left.\left[\alpha^s_{-\frac{1}{2}}, b^j_{-\frac{1}{2}}\right]_+, \left[b^b_{-\frac{1}{2}}, b^j_{-\frac{1}{2}}\right]_-, \left[b^j_{-\frac{1}{2}}, b^k_{-\frac{1}{2}}\right]_-\right\}\vert p^+, \mathbf{p}_T\rangle_{\mathrm{NS}}$
$\frac{3}{2}$	$\left\{\left\langle \alpha^s_{-\frac{1}{2}}, \alpha^t_{-\frac{1}{2}}, \alpha^u_{-\frac{1}{2}}\right\rangle_+, \left\langle \alpha^s_{-\frac{1}{2}}, \alpha^t_{-\frac{1}{2}}, b^b_{-\frac{1}{2}}\right\rangle_+, \left\langle \alpha^s_{-\frac{1}{2}}, b^b_{-\frac{1}{2}}, b^c_{-\frac{1}{2}}\right\rangle_+,\right.$
	$\left\langle b^b_{-\frac{1}{2}}, b^c_{-\frac{1}{2}}, b^d_{-\frac{1}{2}}\right\rangle_-, \left[\alpha^b_{-1}, \alpha^s_{-\frac{1}{2}}\right]_+, \left[\alpha^b_{-1}, b^c_{-\frac{1}{2}}\right]_+, \left[b^s_{-1}, \alpha^t_{-\frac{1}{2}}\right]_+,$
	$\left[b^s_{-1}, b^b_{-\frac{1}{2}}\right]_-, \alpha^s_{-\frac{3}{2}}, b^b_{-\frac{3}{2}}, \left\langle b^j_{-\frac{1}{2}}, b^b_{-\frac{1}{2}}, b^c_{-\frac{1}{2}}\right\rangle_-, \left\langle b^j_{-\frac{1}{2}}, \alpha^s_{-\frac{1}{2}}, \alpha^t_{-\frac{1}{2}}\right\rangle_+,$
	$\left\langle \alpha^s_{-\frac{1}{2}}, b^j_{-\frac{1}{2}}, b^b_{-\frac{1}{2}}\right\rangle_+, \left[\alpha^j_{-1}, b^b_{-\frac{1}{2}}\right]_+, b^j_{-\frac{3}{2}}, \left[\alpha^b_{-1}, b^j_{-\frac{1}{2}}\right]_+, \left[\alpha^j_{-1}, \alpha^s_{-\frac{1}{2}}\right]_+,$
	$\left[b^s_{-1}, b^j_{-\frac{1}{2}}\right]_-, \left\langle b^j_{-\frac{1}{2}}, b^k_{-\frac{1}{2}}, b^b_{-\frac{1}{2}}\right\rangle_-, \left\langle \alpha^s_{-\frac{1}{2}}, b^j_{-\frac{1}{2}}, b^k_{-\frac{1}{2}}\right\rangle_+$
	$\left.\left[\alpha^j_{-1}, b^k_{-\frac{1}{2}}\right]_+, \left\langle b^j_{-\frac{1}{2}}, b^k_{-\frac{1}{2}}, b^l_{-\frac{1}{2}}\right\rangle_-\right\}\vert p^+, \mathbf{p}_T\rangle_{\mathrm{NS}}$

References

1. H. S. Green, *Phys. Rev.* **90**, 270 (1953).
2. E. P. Wigner, *Phys. Rev.* **77**, 711 (1950).
3. Y. Ohnuki and S. Kamefuchi, *Quantum Field Theory and Parastatistics* (Springer-Verlag, 1982).
4. J. F. L. Hopkinson and R. W. Tucker, *Phys. Rev. D* **10**, 558 (1974).
5. F. Ardalan and F. Mansouri, *Phys. Rev. D* **9**, 3341 (1974).
6. F. Ardalan and F. Mansouri, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 2456 (1986).
7. F. Mansouri and X. Z. Wu, *Mod. Phys. Lett. A* **2**, 215 (1987).
8. P. C. Argyres and S. H. Henry Tye, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 3339 (1991).
9. F. Mansouri, *Nucl. Phys. B* (*Proc. Suppl.*) **6**, 189 (1989).
10. N. Belaloui and L. Khodja, *AIP Conf. Proc.* **881**, 267 (2007).
11. N. Belaloui and H. Bennacer, *Czech. J. Phys.* **53**, 769 (2003).
12. N. Belaloui and H. Bennacer, *Czech. J. Phys.* **54**, 621 (2004).
13. D. Hamam and N. Belaloui, Open parabosonic string theory between two parallel Dp-branes, *AIP Conf. Proc.* **1444**, 334 (2012), doi:10.1063/1.4715447.
14. L. Khodja and N. Belaloui, *Braz. J. Phys.* **39**, 652 (2009).
15. M. A. Seridi and N. Belaloui, *Int. J. Mod. Phys. A* **30**, 1550175 (2015).
16. B. Zwiebach, *A First Course in String Theory* (Cambridge University Press, 2004).
17. K. Becker, M. Becker and J. H. Schwarz, *String Theory and M-Theory*: *A Modern Introduction* (Cambridge University Press, 2007).
18. S. Mukhi, *String Theory* (SERC THEP School, IIT, Guwahati, 2009).
19. M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, *Superstring Theory*, Vol. 1 (Cambridge University Press, 1987).
20. G. 't Hooft, Introduction to string theory, version 14-05-04 (2004).
21. M. Gasperini, *Elements of String Cosmology* (Cambridge University Press, 2007).
22. D. McMahon, *String Theory Demystified* (McGraw-Hill, 2009).
23. P. Di Vecchia and A. Liccardo, D-branes in string theory, arXiv:hep-th/9912161v1.
24. R. Blumenhagen, D. Lust and S. Theisen, *Basic Concepts of String Theory*, Theoretical and Mathematical Physics (Springer-Verlag, Berlin, 2013), doi:10.1007/978-3-642-29497-6.

ملخص

إن الهدف من هذه المذكرة هو دراسة الأوتار الفرميونية المفتوحة بوجود اغشية-D في إطار تعميم الميكانيك الكمي وتتمثل في الميكانيكا شبه الكمية وتحديد الحالات التي يكون فيها تطبيق الاسقاط GSO ممكنا. تتمثل النتائج المتحصل عليها في:

- امكانية استخراج نماذج متجانسة للأوتار شبه الكمية بالنسبة لنموذج رامون وكذلك نوفوشوارز في الوضعيتين: غشاءين-Dp ,Dp- اوغشاءين ,Dp- Dq-.

- خارج اطار الحالة العادية التي وجدناها والتي تؤكد ان وجود اغشية D متوازية لها تفس البعد لم تغير شيئا في خصائص التماثل الفائق للفضاء-زمن للنظرية (المتحصل عليها بعد الاسقاط GSO). حيث يتضح استحالة مقارنة النموذجين حسب مفهوم الاسقاط GSO بالنسبة للرتب الاعلى الممكنة لشبه الكمية ووجود كسر في التماثل الفائق للفضاء-زمن.

- بالنسبة لحالة الاغشية-D ذات بعد مختلف، الحالة العادية هي الوحيدة التي تسمح بكسر جزئي للتماثل الفائق للفضاء-زمن بالنسبة للرتب الاعلى لشبه الكمية فالكسر يكون كليا.

كلمات مفتاحية: شبه كمية، غشاء-Dp ، دالة التجزئة، الطيف، الاسقاط GSO.

Abstract

The purpose of this thesis is the study of open fermionic strings in the presence of parallel D-branes in the context of the generalization of quantum mechanics that is the paraquantization and to determine in which case the GSO projection can be applied. The results obtained are summarized as follows:

- Possibility of constructing of parafermionic string models that are coherent both for the Ramond sector and the Neveu-Schwarz sector for the two configurations: Dp-, Dp-branes or Dp-, Dq-branes.

- Outwards from the ordinary case that we find and which confirms that the presence of parallel D-branes of the same dimensionality does not alter the properties of space-time supersymmetry of the theory (obtained following the GSO projection). It has proved impossible to combine the two sectors in the same spirit of the GSO for the higher orders allowed for paraquantization and that there is a break in the supersymmetry of space-time.

- For the case of D-branes of different dimensionalities, only the ordinary case allows a partial breaking of supersymmetry of the space-time and for the higher orders of paraquantization, the breaking is total.

Keywords: Paraquantization, Dp-branes, partition function, spectrum, GSO projection.

Résumé

Le propos de cette thèse est l'étude des cordes fermioniques ouvertes en présence de D-branes parallèles dans le contexte de la généralisation de la mécanique quantique qu'est la paraquantification et de déterminer dans quel cas la projection GSO est applicable. Les résultats obtenus se résument comme suit :

- Possibilité de construire des modèles de cordes parafermioniques cohérents aussi bien pour le secteur de Ramond que celui de Neveu-Schwarz pour les deux configurations : Dp-, Dp-branes ou Dp-, Dq-branes.

- En dehors du cas ordinaire qu'on retrouve et qui confirme que la présence de D-branes parallèles de même dimensionnalités ne modifie en rien les propriétés de supersymétrie d'espace-temps de la théorie (obtenue suite à la projection GSO). Il s'est avéré impossible de combiner les deux secteurs dans le même esprit de la GSO pour les ordres supérieurs permis de la paraquantification et qu'il y a brisure de la supersymétrie d'espace-temps.

- Pour le cas de D-branes de dimensionnalités différentes, seul le cas ordinaire permet une brisure partielle de la supersymétrie d'espace-temps et que pour les ordres supérieurs de la paraquantification, la brisure et totale.

Mots clés: Paraquantification, Dp-branes, fonction de partition, spectre, Projection GSO.