REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRA TIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOHAMED SEDDIK BEN YAHIA - JIJEL

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre :
Série : ....

MEMOIRE
présenté pour obtenir le diplôme de master
Filière : physique
Spécialité : Physique Théorique

Présenté par

Boufenneche Tariq

Intitulé

Calcul Quantique et Téléportation

Soutenu le : 27/06/2018

Devant le jury :

Président :	N .Farkous	Prof.	Univ. MSBY, Jijel
Rapporteur :	T. Boudjedaa	Prof.	Univ. MSBY, Jijel
Examinateurs :	K . Khalfaoui	Prof.	Univ. MSBY, Jijel

remerciements

*Tous mes remerciements vont tout premièrement à **Dieu** tout puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il ma donné pour réaliser ce mémoire.*

*Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes vifs remerciements à mon encadreur le professeur T. **Boudjedaa** qui m'a donné la chance de préparer ce travail sous sa direction et pour son aide, sa gentillesse, ses encouragement et pour les efforts qui me a fournis à fin d'effectuer ce travail.*

*Je remercie très sincèrement Dr N. **Ferkous** pour avoir accepté d'être président du jury.*

*Mes remerciements vont également à Dr **K. Khalfauoi** à l'université de Jijel qui a accepté de juger ce travail.*

Je voudrais exprimer ma reconaissance à tous mes enseignants pendant toutes les années d'études à l'université de Jijel

*J'adresse mes plus sincères remerciements à Mlle **H.Lamri** la secrétaire du laboratoire de physique théorique pour son enthousiasme et son soutien moral.*

Je dédie ce modeste travail et ma profonde gratitude à ma chère famille pour tous leur sacrifices, leurs amour, leur tendresse, leur soutien et leur prières tout au long de mes études, et pour l'éducation qu'elle m'a prodigué, avec tous les moyens et aux prix de toutes les sacrifices, qu'elle consentis à mon égard, pour le sens du devoir qu'elle mon enseigné depuis mon enfance.

Enfin n'oubliée pas d'exprimer mes sincères remerciements à tous ceux qui ont porté leur aide, de près ou de loin, soit par leurs encouragements ou par leurs documentations.

B.Tariq

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

La mécanique quantique par ses concepts et réglés a pu expliquer le monde microscopique et a envahi par son exploit nos produits de consommation technologique. De nos jours, on s'intéresse de plus en plus à son développement donnant naissance à une nouvelle discipline de la science dite : Information quantique.

L'information quantique exploite essentiellement les effets de superposition et de mesure et d'intrication dans les domaines tels que l'informatique et la cryptographie. La superposition et la mesure, deux principes complémentaires, de la mécanique quantique, bien connus depuis les débuts de son développement. Ils la distingue énormément de la mécanique classique qui se définit complètement déterministe. L'état classique d'un système physique est complètement déterminé par la donnée initiale et la mesure est là pour une simple vérification des lois classiques. Dans ce cas classique, une superposition des états n'est possible que dans le cas des phénomènes ondulatoires se propageant dans l'espace-temps. Par contre en mécanique quantique on admet et on généralise ce principe de superposition à tous les systèmes physiques mais on confère à la mesure un statut particulier qui délimite l'effet de cette superposition. Les bases de cette nouvelle mécanique ont permis de sonder le phénomène d'interaction matière-rayonnement et une technologie nouvelle s'est bâtie dessus. Un développement proliférant en informatique et en télécommunication a vu le jour. Par ailleurs, depuis son avènement une opposition à ces idées nouvelles s'est formé essayant de mettre en cause les principes de bases de cette mécanique quantique. Plusieurs de ses fondateurs tels Einstein, de Broglie et Schrodinger ne l'ont pas acceptée comme théorie complète et ont essayé de construire des modèles physiques montrant son incomplétude. Deux exemple très connus sont le paradoxe EPR et le chat de Schrodinger. Ces derniers exploitent le principe de superposition dans sa version la plus profonde : les états intriqués (non séparables). Leur modèle suppose alors l'existence de variables cachées dont la mécanique quantique ne tient pas compte. Les inégalités de Bell, dues à J. S. Bell, sont les relations auxquelles obéissent les mesures sur des états intriqués dans l'hypothèse d'une théorie déterministe locale à variables cachées (complète selon l'argument EPR). L'expérience Aspect a démontré que les inégalités de Bell sont violées, et elle nous force à renoncer encore une fois à une physique causale et locale au même temps. J. S. Bell plaide alors pour une physique déterministe non locale à l'image de la mécanique quantique déterministe de Bohm. Le statut de la mécanique quantique reste souverain et les physiciens de la nouvelle génération ont préféré mener encore ce débat philosophique dans une ambiance plus défiante qui est celui des expérimentations. On assiste maintenant à une nouvelle ère de technologie de dimension nanométrique permettant par sa petitesse infime de s'assurer encore plus de la validité des concepts quantiques et de nous mener à des exploits inouïs telle que la téléportation quantique. En plus, les scientifiques ont commencé à imaginer les retombées de ces réalisations miniaturisées de la mécanique quantique et on voit naitre des sciences nouvelles comme l'informatique quantique permettant un pouvoir sans précédant en comparaison avec ce qui a été fait auparavant. L'objectif de ce mémoire est une initiation au calcul quantique que nous allons exhiber dans le cas de la téléportation quantique. Dans un premier temps, nous allons reprendre l'exemple, devenu maintenant pédagogique, de la téléportation d'un qubit, proposé par G. Brassard et al, puis nous allons considérer le cas de la téléportation de deux qubits (citer la référence).

Dans le deuxième chapitre, nous présentons les concepts fondamentaux de la mécanique quantique. Nous donnons quelques définitions et présentons son système complet de postulats et les notions d'opérations quantiques, de mesure et d'intrication sont introduites. Dans le troisième chapitre, on considère la téléportation d'un qubit via le calcul quantique Nous examinons cette téléportation suivant deux formalismes, celui des kets et celui de la matrice densité. Dans le chapitre quatre, on présente la téléportation de deux qubits dans les deux approches. Comme on va le voir, le calcul utilisant le formalisme de la matrice densité est très long. Bien sûr, dans le cas considéré, les deux qubits sont séparés et purs. Le calcul quantique présenté (en matrice densité) est une simple imitation de celui des kets. Que peut-on dire d'une situation plus compliqué ? est-ce possible de téléporter et sous quelles conditions ? On va pas répondre à ces questions naïves. Pour pouvoir progresser en calcul quantique, nous allons utiliser une plate forme de calcul quantique élaborée en java par le Dr K. Khalfaoui pour refaire le calcul qu'on a déjà fait en l'implémentant et comparer nos résultats à ceux de la machine. Le cinquième chapitre contient l'essentiel de cette implémentation .En fin, une conclusion générale est présentée.

Chapitre 2

Les principes de la mécanique quantique

2.1 Le principe d'incertitude

Le principe d'incertitude de Heisenberg stipule que la connaissance qu'on pourrait avoir d'un système quantique contient toujours une indétermination. L'exemple théorique (le microscope par exemple) qu'il a proposé montre que toute mesure de la position d'un électron à l'aide d'un appareil quelconque utilisant le rayonnement devra selon la dualité onde-particule être accompagnée d'un échange d'impulsion entre l'électron et l'appareil de mesure. Cet échange d'impulsion est beaucoup plus grand que la précision sur la position sera plus grande. Suivant le formalisme, cette dualité onde-particule se manifeste dans la mesure par une limitation sur la précision de chacune de deux variables conjuguées. Dans ce cas de la position et de l'impulsion on a la relation suivante

$$\Delta x \Delta p \sim \hbar \tag{2.1}$$

où Δx et Δp sont des incertitudes définies sur la détermination des ces variables.

Ces relations d'incertitudes sont fondamentales et permettent d'expliquer et d'élucider les paradoxes qui surgissent au cours d'une analyse des effets quantiques au moyen des images habituelles de la physique classique en de basant sur la connexion intime entre la description statistique de la mécanique quantique et les possibilités effectives de mesure. Là encore et avec plus de détermination, on voit que l'hypothèse de l'atomicité remets en cause d'une manière plus directe le cadre de causalité "rigide" de la mécanique classique. Le cadre général de ce principe est le principe de complémentarité qui permet de tenir compte de cette hypothèse d'automaticité et de l'exigence de la finitude du quantum de Planck.

. "Ce principe de la complémentarité peut être considéré comme une généralisation rationnelle de l'idéal même de la causalité". Cette manière nouvelle de voir les choses a suscité d'ardentes discussions et une controverse s'est installée parmi les physiciens de cette époque. Le paradoxe EPR figure parmi ces tentatives de démonstration de l'incomplétude du formalisme quantique. Son contenu a été publié dans la prestigieuse revue Physical Review sous le titre "Can quantum-mecahnical description be considered complete" Phys Rev 47 (1935), 777-780.

2.2 Le principe de superposition

Le principe de superposition affirme que l'état physique des systèmes quantiques obéit à la règle de combinaison des états. Un système qui a plusieurs états possibles, admet la somme de tous ces états comme un état possible. Le système se trouvera alors dans une superposition des états. Ce phénomène parait être étrange dans un monde classique des particules alors qu'il est déjà présent dans le monde des ondes. Si on admet la dualité onde-particule, il nous est alors possible d'accéder aux propriétés étranges du monde quantique. Ce fait expérimental s'avère d'une richesse extrêmement inégalable et libère le comportement de la nature de la vision restreinte de l'ancienne causalité régissant l'évolution des particules.

2.3 La représentation d'un état quantique

L'état physique du système contient toute l'information physique. Mathématiquement, l'état physique est un objet mathématique qui donne le maximum d'information possible sur le système dans le but de prévoir les résultats des expériences que l'on peut réaliser sur lui. C'est un élément vectoriel, vu sa linéarité suivant le principe de superposition, on le choisit un vecteur d'un espace de Hilbert. Le choix de cet espace est motivé par l'approche probabiliste qui nous assure le retour aux situations classiques via le principe de correspondance.

2.3.1 La notation de Dirac

Il est habituel de noter l'état du système par un vecteur normé $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, avec $|\psi\rangle$ est appelé " ket ψ " et on notera $\langle\psi|$ appelé "bra ψ" , le vecteur dual $\in \mathcal{H}^*$

Les grandeurs physiques sont des opérateurs hermitiens complets, et une mesure complète sur cette grandeur doit la déterminer complètement et la valeur moyenne de l'observable A dans l'état $|\psi\rangle$ sera notée $\langle\psi| A \ |\psi\rangle$.

2.3.2 L'espace de Hilbert

Définition :

Un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est un espace vectoriel doté d'un produit scalaire hermitien et dont les propriétés de convergence sont complète, ceci permet et garantit la traduction des propriétés quantiques en valeurs mathématiques d'une manière univoque. La dimension de cet espace est en général quelconque et en information quantique on utilise des espaces de dimension fini de valeurs 2 pour un qubit et de valeurs 2^n pour un n-qubit.

2.3.3 Les postulats de la mécanique quantique

Postulat 1

On associe à chaque système physique fermé un espace linéaire complexe muni d'un produit hermitien complet qu'on nomme espace de Hilbert. L'état du système est alors décrit par un vecteur de norme égale à l'unité appartenant à cet espace de Hilbert qu'on note $|\psi\rangle$. Exemple : le qubit de l'information quantique

$$|\psi\rangle = a\,|0\rangle + b\,|1\rangle \quad \text{avec} \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1\,;\ |\psi\rangle \in \mathcal{H} \equiv \mathbb{C}^2 \tag{2.2}$$

C'est l'état fondamental de l'information quantique. Il appartient à un espace complexe de dimension 2. Il est abstrait mais il peut être réalisé physiquement de différentes manières : des états d'atomes, de spins, de photons, etc...

Le n-qubit est un vecteur dans un espace complexe de dimension 2^n

$$|\psi\rangle = \sum_{i_1,i_2...i_n=0,1} a_{i_1,i_2...i_n}\,|i_1, i_2...i_n\rangle \quad \text{avec} \qquad \sum_{i_1,i_2...i_n=0,1} |a_{i_1,i_2...i_n}|^2 = 1\,;\ |\psi\rangle \in \mathcal{H} \equiv \mathbb{C}^{2^n} \tag{2.3}$$

Postulat 2

Une observable (qui peut être aussi une grandeur physique) est une propriété du système quantique qui en principe peut être mesurée. une observable est un opérateur auto-adjoint dont la base propre est complète. Cet opérateur agit sur l'espace des états du système quantique.

$$\begin{aligned} A \quad &: \quad |\psi\rangle \to A\,|\psi\rangle \\ A\,(a\,|\psi\rangle + b\,|\varphi\rangle) \quad &= \quad a\,(A\,|\psi\rangle) + b\,(A\,|\varphi\rangle) \\ \langle A^{+}\phi|\,\psi\rangle \quad &= \quad \langle\phi|\,A\psi\rangle \end{aligned} \tag{2.4}$$

Cet opérateur auto-adjoint peut être développé comme

$$A = \sum_n a_n P_n \tag{2.5}$$

où a_n est une valeur propre et P_n le projecteur sur le sous-espace propre correspondant à la valeur propre et s'écrivant

$$P_n = \sum_\lambda |v_\lambda\rangle \langle v_\lambda| \quad \lambda \text{ étant la dimension de l'espace propre} \tag{2.6}$$

Cet ensemble de projecteurs vérifie

$$P_n P_m = \delta_{nm} P_n;\ P_n^+ = P_n;\ \sum_n P_n = I \tag{2.7}$$

Comme

$$P_n^2 = P_n \text{ et } P_n = P_n^+ \tag{2.8}$$

on peut alors écrire

$$\sum_n P_n^+ P_n = I \tag{2.9}$$

D'habitude on définit la mesure quantique à partir de cet ensemble de projecteurs mais il est plus intéressant d'utiliser un ensemble d'opérateurs plus général.

Postulat 3

Une mesure quantique est décrite par un ensemble d'opérateurs de mesure $\{M_n\}$ .Ces opérateurs agissent sur l'espace des états du système physique. Notons (n) le résultat de mesure. Si le système physique est dans l'état $|\psi\rangle$ juste avant la mesure alors la probabilité d'avoir (n) comme résultat de mesure est

$$P(n) = \langle \psi \mid M_n^+ M_n | \psi\rangle \tag{2.10}$$

pour qu'on ait $\sum_n P(n) = 1$ l'ensemble des opérateurs $\{M_n\}$ vérifie

$$\sum_n M_n^+ M_n = I \tag{2.11}$$

Juste après la mesure, si le résultat de mesure est (n), l'état du système quantique (réduction du paquet d'ondes) est

$$| \widetilde{\psi}\rangle = \frac{M_n \mid \psi >}{\sqrt{\langle \psi \mid M_n^+ M_n | \psi\rangle}} \tag{2.12}$$

En conséquence, en mécanique quantique, il n'existe aucune mesure qui puisse distinguer deux états quantiques non orthogonaux. En effet, soient $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$ deux états non orthogonaux et $\{M_n\}$ un ensemble d'opérateurs de mesures quantiques. Notons respectivement

$$E_1 = \sum_{n,(1)} M_n^+ M_n \text{ et } E_2 = \sum_{n,(2)} M_n^+ M_n \tag{2.13}$$

l'ensemble qui donne l'état (1) et respectivement l'état (2), nous avons alors respectivement

$$\langle \psi_1 \mid E_1 | \psi_1 \rangle = 1 \text{ et } \langle \psi_2 \mid E_2 | \psi_2 \rangle = 1 \tag{2.14}$$

et en plus

$$E_1 + E_2 = I \tag{2.15}$$

Alors on a

$$\langle \psi_1 \mid E_2 | \psi_1 \rangle = 0 \tag{2.16}$$

Comme E_i est hermétique et est défini positif, définissons alors $\sqrt{E_i}$ et par conséquent $\sqrt{E_2} \mid \psi_1\rangle = 0$. Sachant que $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$ sont deux états non orthogonaux, écrivons

$$|\psi_2\rangle = \alpha \mid \psi_1\rangle + \beta \mid \varphi\rangle \quad \text{où} \quad \mid \varphi\rangle \perp \mid \psi_1\rangle \text{ et } \mid \beta \mid < 1 \tag{2.17}$$

On a alors

$$\sqrt{E_2} \mid \psi_2\rangle = \beta \sqrt{E_2} \mid \varphi\rangle \tag{2.18}$$

Nous déduisons alors que

$$\langle \psi_2 \mid E_2 | \psi_2 \rangle = \mid \beta \mid^2 < 1 \tag{2.19}$$

en contradiction avec l'hypothèse

$$\langle\psi_2 \mid E_2 | \psi_2\rangle = 1 \tag{2.20}$$

D'où le résultat.

Mesures projectives

L'ensemble $\{M_n\}$des opérateurs de mesure admet un cas particulier intéressant qui est celui des mesures projectives. Une mesure projective est décrite par une observable M dont l'ensemble des projecteurs est $\{P_n\}$ avec

$$M = \sum_n a_n P_n \equiv \sum_n (n) P_n \tag{2.21}$$

P_n est le projecteur sur le sous espace de la valeur propre a_n. La probabilité d'avoir a_n est

$$P(a_n) \equiv P(n) = \langle\psi \mid P_n | \psi\rangle = \langle\psi \mid P_n^+ P_n | \psi\rangle \tag{2.22}$$

et on a

$$\sum_n P_n = \sum_n P_n^+ P_n = I \tag{2.23}$$

Juste après la mesure on a

$$| \widetilde{\psi}\rangle = \frac{P_n \mid \psi >}{\sqrt{P_n}} \tag{2.24}$$

Ces projecteurs de mesure vérifient aussi

$$P_n P_m = \delta_{nm} P_n;\ P_n^+ = P_n;\ P_n^2 = P_n \text{ et } P_n = P_n^+ \tag{2.25}$$

On voit bien que cet ensemble de mesure est un cas spécial de l'ensemble $\{M_n\}$ des opérateurs de mesure.

Valeur moyenne d'une mesure projective et principe d'incertitude

Soit M l'observable de mesure. La moyenne de cette observable de mesure est

$$\mathcal{E}(M) = \sum_n a_n P(n) = \sum_n a_n \langle\psi \mid P_n \vert \psi\rangle =< \psi \mid \sum_n a_n P_n \mid \psi\rangle =< \psi \mid M \mid \psi\rangle =< M >_\Psi \tag{2.26}$$

L'écart quadratique de M est défini par

$$\Delta(M) = \sqrt{< M^2 >_\Psi - < M >_\Psi^2} \tag{2.27}$$

Et il n'est pas difficile de s'assurer qu'on a le principe d'incertitude de Heisenberg suivant

$$\Delta(M)\Delta(M') \geq \frac{|< [M, M'] >_\Psi|}{2} \tag{2.28}$$

Les mesures POVM (Positif-Operator-Valued-Measure) A partir de l'ensemble $\{M_n\}$ on peut aussi construire un ensemble d'opérateurs de mesure définis positifs. En effet, définissons

$$E_n = M_n^+ M_n \tag{2.29}$$

E_n est défini positif et on a

$$P(n) =< E_n >_\Psi \text{ et } \sum_n E_n = I \tag{2.30}$$

On appelle cet ensemble $\{E_n\}$ l'ensemble des opérateurs de mesure définis positifs (POVM). Les mesures projectives forment un ensemble POVM.

Postulat 4

L'évolution d'un système quantique fermé est décrite par une opération unitaire comme

$$|\psi(t_2)\rangle = U(t_2, t_1)\, |\psi(t_1)\rangle \tag{2.31}$$

L'opérateur $U(t_2, t_1)$ est unitaire $U^+(t_2, t_1)U(t_2, t_1) = I$ et plus précisément, l'évolution en temps continu est décrite par l'équation de Schrodinger.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi(t)\right\rangle = H\left|\psi(t)\right\rangle \tag{2.32}$$

où H est l'opérateur hamiltonien du système ; autrement dit, $U(t_2,t_1) = \exp\left[\frac{-i}{\hbar}H(t_2-t_1)\right]$.

Cet opérateur unitaire est un cas particulier d'opérations quantiques en information quantique. En calcul classique existent déjà des portes logiques permettant de faire le calcul classique. Par analogie, on construit des opérations quantiques "équivalentes" qui sont en général des opérateurs unitaires. Parmi ces opérations quantiques, citons les plus connues : celles qui agissent sur un qubit telles que : $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $U_{phase} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix}$

et celles qui agissent sur un double qubit $U_{cnot} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $U_{cphase} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix}$

En général, une opération quantique sur n-qubits est un opérateur unitaire agissant sur $\mathbb{C}^{2^n} \to \mathbb{C}^{2^n}$et il en existe en fonction des besoins et de possibilité de les réaliser. Un principe universel permet de limiter le nombre (des opérations fondamentales permettent d'en écrire les autres en fonction d'elles).

2.3.4 Systèmes composées

Postulat L'espace des états d'un système composé est le produit tensoriel des espaces des états de chacune des parties du système total. En plus si les parties de ce système sont préparées dans les états suivants : $\mid \psi_i\rangle \quad i = 1 - N$ alors l'état du système total est

$$\mid \psi_1\rangle\otimes \mid \psi_2\rangle \otimes ...\otimes \mid \psi_N\rangle \tag{2.33}$$

Application Soit Q l'espace des états d'un système quantique et $\{M_n\}$ un ensemble d'opérateurs de mesure agissant sur Q. Introduisons un système auxiliaire $\mathcal{M}$ qui a une base orthonormé $\{|n\rangle\}$où n sont les différents résultats de mesure données par l'ensemble $\{M_n\}$ .Fixons d'abord l'état de $\mathcal{M}$ à $|0\rangle$ et définissons l'opérateur U agissant sur $|\psi\rangle \otimes |0\rangle$, où $|\psi\rangle$ est l'état du système physique, par

$$U|\psi\rangle|0\rangle \equiv \sum_n M_n |\psi\rangle |n\rangle . \tag{2.34}$$

Comme

$$\sum_n M_n^+ M_n = I. \tag{2.35}$$

On a

$$\begin{aligned} \langle\varphi|\langle 0| U^+ U |\psi\rangle |0\rangle &= \sum_{n,n\prime} \langle\varphi| M_n^+ M_{n\prime} |\psi\rangle \langle n \mid n'\rangle \\ &= \sum_n \langle\varphi| M_n^+ M_n |\psi\rangle = \langle\varphi \mid \psi\rangle \\ &= (\langle\varphi|\langle 0|)(|\psi\rangle|0\rangle) \end{aligned} \tag{2.36}$$

ie, U conserve le produit scalaire des vecteurs de la forme $|\psi\rangle|0\rangle$ .Or $|\psi\rangle|0\rangle$ constitue un s-espace de l'espace $Q \otimes \mathcal{M}$ où $\mathcal{M}$ est l'espace généré par $\{|n\rangle\}$. Donc d'après les propriétés algébriques on peut étendre U sur tout l'espace $\phi \otimes M$ en conservant son unitariste.

Associons maintenant à cet opérateur unitaire U la mesure projective $\{P_n\}$ défini par

$$P_n = I_Q \otimes |n\rangle\langle n| . \tag{2.37}$$

On a

$$
\begin{aligned}
\langle\psi|\langle 0| U^{+} P_n U |\psi\rangle |0\rangle &= \sum_{n\prime,n\prime\prime} \langle\psi| M^{+}_{n\prime} \ \langle n'| I_Q \otimes |n\rangle \langle n| M_{n\prime\prime} |\psi\rangle |n''\rangle \\
&= \sum_{n\prime,n\prime\prime} \langle\psi| M^{+}_{n\prime} \ M_{n\prime\prime} |\psi\rangle \delta_{n\prime,n}\delta_{n\prime\prime,n} \\
&= \langle\psi| M^{+}_{n} \ M_n |\psi\rangle = P(n). \qquad (2.38)
\end{aligned}
$$

et

$$
\frac{P_n U |\psi\rangle |0\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\langle 0| U^{+} P_n U |\psi\rangle |0\rangle}} = \frac{M_n |\psi\rangle |n\rangle}{\sqrt{\langle\psi| M^{+}_{n} \ M_n |\psi\rangle}} \qquad (2.39)
$$

L'état du système physique est alors

$$
\frac{M_n |\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi| M^{+}_{n} \ M_n |\psi\rangle}} \qquad (2.40)
$$

et le probabilité avant la mesure est

$$
P(n) = \langle\psi| M^{+}_{n} \ M_n |\psi\rangle \qquad (2.41)
$$

A partir de$\{P_n\}$ et U on retrouve l'ensemble $\{M_n\}$ via le système auxiliaire.

2.3.5 Opérateur densité (la matrice de densité)

La mécanique quantique peut être formulée dans un formalisme dit formalisme de la matrice densité qui est plus convenable et plus compatible avec presque tous les scénarios qu'on puisse rencontrés.

Supposons que l'état du système n'est pas complètement connu. Précisément, qu'il peut être dans différents états $|\psi_i\rangle$ avec des probabilité P_i.

On appelle l'ensemble$\{P_i, \ |\psi_i\rangle\}$ ensemble d'états purs. Nous définissons l'opérateur densité ou la matrice densité par

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle\psi_i| \tag{2.42}$$

Soit $\mathcal{U}$ un opérateur unitaire d'évolution du système ρ alors évolue comme

$$\begin{aligned} \rho \quad \longrightarrow \quad & \rho^{(U)} = \sum_i P_i U |\psi_i\rangle \langle\psi_i| U^+ \\ = \quad & U \rho U^+ \end{aligned} \tag{2.43}$$

Si l'état du système est initialement $|\psi_i\rangle$ la probabilité d'avoir le résultat (m) est

$$p(m \mid i) = \langle\psi_i| M_m^+ M_{\ m} |\psi_i\rangle \tag{2.44}$$

$\{M_m\}$ est un ensemble d'opérateurs de mesure. Ou bien on peut écrire

$$\begin{aligned} p(m \mid i) &= \sum_\lambda \langle\psi_i| \lambda \rangle \langle\lambda| M_m^+ M_{\ m} |\psi_i\rangle \\ &= \sum_\lambda \langle\lambda| M_m^+ M_{\ m} |\psi_i\rangle \ \langle\psi_i| \lambda \rangle \\ &= Tr\left(M_m^+ M_{\ m} |\psi_i\rangle \langle\psi_i|\right) \end{aligned} \tag{2.45}$$

Si l'état initial n'est pas complètement connu on a la probabilité d'avoir le résultat (m) est

$$\begin{aligned} p(m) &= \sum_i p_i \, p(m \mid i) \\ &= \sum_i p_i \, Tr\left(M_m^+ M_{\ m} |\psi_i\rangle \langle\psi_i|\right) \\ &= Tr\left(M_m^+ M_{\ m} \rho\right) \end{aligned} \tag{2.46}$$

Si $|\psi_i\rangle$ est l'état avant la mesure

$$|\psi_i{}^m\rangle = \frac{M_m |\psi_i\rangle}{\sqrt{\langle\psi_i| M_m^+ M_{\ m} |\psi_i\rangle}} \tag{2.47}$$

est l'état juste aprés la mesure. Soit la probabilité $p(i \mid m)$ de i sachant que le résultat est (m), on sait que (d'après la théorie des probabilités conditionnelles)

$$p(i \mid m) = \frac{p(m \mid i)\, p_i}{p(m)} \tag{2.48}$$

Juste aprés la mesure pour un système décrit par la matrice densité on a une matrice densité

$$\begin{aligned}
\rho_{(m)} &= \sum_i p(i \mid m) |\psi_i{}^m\rangle \langle\psi_i^m| \\
&= \sum_i p(i \mid m) \frac{M_{\ m} |\psi_i\rangle \langle\psi_i| M_m^+}{\langle\psi_i| M_m^+ M_{\ m} |\psi_i\rangle} \\
&= \frac{p(m \mid i)\, p_i}{p(m)} \frac{M_{\ m} |\psi_i\rangle \langle\psi_i| M_m^+}{p(m \mid i)} \\
&= \frac{M_{\ m} \rho M_m^+}{Tr\left(M_m^+ M_{\ m} \rho\right)}
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Juste après la mesure (m) sachant que avant la mesure le système est décrit par ρ on a

$$\rho_{(m)} = \frac{M_{\ m} \rho M_m^+}{Tr\left(M_m^+ M_{\ m} \rho\right)} \tag{2.50}$$

Si l'état du système est complètement déterminé $|\psi\rangle$ nous dirons que l'état est pur et on lui associe le matrice densité

$$\rho = |\psi\rangle \langle\psi| \tag{2.51}$$

Sinon il est dit un état mélange ou mixte

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle\psi_i| \tag{2.52}$$

Avec p_i la probabilité de chaque état $|\psi_i\rangle$. Dans le cas pur on a :

$$\rho^2 = |\psi\rangle \langle\psi| \psi \rangle \langle\psi| = \rho \tag{2.53}$$

et

$$\begin{aligned} Tr\rho &= Tr\rho^2 = \sum_{\lambda} \langle\lambda| \psi \rangle \langle\psi| \lambda \rangle \\ &= \langle\psi| \sum_{\sum\lambda} |\lambda\rangle \langle\lambda| \psi \rangle \\ &= \langle\psi| \psi \rangle = 1 \end{aligned} \tag{2.54}$$

Dans le cas mélange

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \sum_i \sum_j P_i P_j |\psi_i\rangle \underbrace{\langle\psi_i| \psi_j \rangle}_{\delta_{ij}} \langle\psi_j| \\ &= \sum_i P_i^2 |\psi_i\rangle \langle\psi_i| \end{aligned} \tag{2.55}$$

Et

$$\begin{aligned} Tr\rho^2 &= \sum_i P_i^2 \sum_{\lambda} \langle\lambda| \psi_i \rangle \langle\psi_i| \lambda \rangle \\ &= \sum_i P_i^2 \langle\psi_i| \psi_i \rangle = \sum_i P_i^2 < 1 \end{aligned} \tag{2.56}$$

Car $\sum_i P_i = 1$ $(Tr\rho = 1)$.En effet

$$\begin{aligned} Tr\rho &= \sum_i P_i \sum_{\lambda} \langle\lambda| \psi_i \rangle \langle\psi_i| \lambda \rangle \\ &= \sum_i P_i \langle\psi_i| \psi_i \rangle = \sum_i P_i = 1 \end{aligned} \tag{2.57}$$

ρ est un opérateur positif

$$\begin{aligned} \langle\varphi|\,\rho\,|\varphi\rangle &= \sum_i P_i \langle\varphi|\,\psi_i\,\rangle\,\langle\psi_i|\,\varphi\,\rangle \\ &= \sum_i P_i \left|\langle\varphi|\,\psi_i\,\rangle\right|^2 \geq 0 \end{aligned} \tag{2.58}$$

Propriètés :

1)ρ un opérateur densité associé à l'ensemble $\{P_i, |\psi_i\rangle\}$ si et seulement si $Tr\rho = 1$, ρ opérateur positif.

2)Deux ensembles $\{P_i\ , |\psi_i\rangle\}$ et $\{P_i',\ \ |\psi_i'\rangle\}$ généré la même matrice densité si et seulement si $|\psi_i'\rangle = U\,|\psi_i\rangle$ et U unitaire.

Si on suppose que le système peut être dans l'état mélange ρ_m avec une probabilité $p(m)$ la description se fait alors par

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_m p\,(m)\,\rho_m \\ &= Tr\left(M_m^+ M\ _m\rho\right) \frac{M\ _m\rho M_m^+}{Tr\left(M_m^+ M\ _m\rho\right)} \\ &= \sum_m M\ _m\rho M_m^+ \end{aligned} \tag{2.59}$$

Si le système est composé et chaque composante est décrite par ρ_i alors il est décrit par

$$\rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \ldots \otimes \rho_n. \tag{2.60}$$

Matrice densité réduite Soit le système composé $\{AB\}$ décrit par la matrice densité ρ^{AB}ou peut décrire chacun des parties par une matrice densité

$$\rho^A = Tr_B\left(\rho^{AB}\right) \tag{2.61}$$

$$\rho^B = Tr_A\left(\rho^{AB}\right) \tag{2.62}$$

Où Tr_B trace partielle sur B et Tr_A trace partielle sur A qu'on définit de la sorte

$$\begin{aligned} Tr_B(\rho^A \otimes \rho^B) &= \sum_i (I_{H_A} \otimes \langle \psi_i^B |)(\rho^A \otimes \rho^B)(I_{H_A} \otimes | \psi_i^B \rangle\ ) \\ &= I_{H_A} \rho^A I_{H_A} \otimes \sum_i \langle \psi_i^B | \rho^B | \psi_i^B \rangle = \rho^A \end{aligned} \tag{2.63}$$

$$\begin{aligned} Tr_A(\rho^A \otimes \rho^B) &= \sum_i ((\langle \psi_i^A | \otimes I_{H_B})(\rho^A \otimes \rho^B)(| \psi_i^A \rangle\ \otimes I_{H_B}) \\ &= \sum_i ((\langle \psi_i^A | \rho^A | \psi_i^A \rangle) \otimes (I_{H_B} \rho^B I_{H_B}) = \rho^B \end{aligned} \tag{2.64}$$

Cette trace partielle décrit correctement chacun des parties.

Si on suppose qu'on effectue une mesure sur A via l'ensemble des mesures $\{M\}$. Sur le produit tensoriel $A \otimes B$ on a l'ensemble des mesures

$$\overline{M} = M \otimes I_B \tag{2.65}$$

Et on a

$$\begin{aligned} Tr\left(M \rho^A\right) &= Tr\left(\overline{M} \rho^{AB}\right) \\ &= Tr\left(\left(M \otimes I_B\right) \rho^{AB}\right) \end{aligned} \tag{2.66}$$

et on montre que la seule fonction ρ^A vérifiant ce résultat est

$$\rho^A = Tr_B\left(\rho^{AB}\right)$$

Décomposition de Schmidt Soit $|\psi\rangle$ un état pur d'un système composé AB. Alors $\exists$ une base orthonormée $|i_A\rangle$de A et une base orthonormée $|i_B\rangle$ de B telles que

$$|\psi\rangle = \sum_i \lambda_i |i_A\rangle |i_B\rangle \tag{2.67}$$

où $\lambda_i \geq 0$ satisfaisant à $\sum_i \lambda_i^2 = 1$.

Cette décomposition est dite de Schmidt et λ_i sont des coefficients de Schmidt.

Exemple Soit un système à deux qubits décrits par l'état pur

$$|\psi\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{2} \tag{2.68}$$

La décomposition de Schmidt

$$|\psi\rangle = \sum_i^2 \lambda_i |i_A\rangle |i_B\rangle, \qquad \lambda_i \geq 0, \qquad \sum_i \lambda_i^2 = 1. \tag{2.69}$$

$\{|i_A\rangle\}$ orthonormée et

$$\langle 1_A | 1_A\rangle = \langle 2_A | 2_A\rangle = 1, \qquad \langle 1_A | 2_A\rangle = \langle 1_B | 2_B\rangle = 0 \tag{2.70}$$

Evidemment on identifie

$$|1_A\rangle = |1_B\rangle = |0\rangle, \qquad |2_A\rangle = |2_B\rangle = |1\rangle \tag{2.71}$$

Alors

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1_A\rangle |1_B\rangle + |2_A\rangle |2_B\rangle) \tag{2.72}$$

Avec

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \sum_i^2 \lambda_i^2 = 1 \tag{2.73}$$

Même chose pour

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle &= \frac{|00\rangle + |11\rangle + |01\rangle + |10\rangle}{2} \\
&= \lambda_1 |1_A\rangle |1_B\rangle + \lambda_2 |2_A\rangle |2_B\rangle
\end{aligned} \tag{2.74}
$$

Avec

$$
|1_A\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \tag{2.75}
$$

$$
|2_A\rangle = \gamma |0\rangle + \delta |1\rangle, \qquad |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1 \tag{2.76}
$$

$$
\langle 1_A | 2_A\rangle = \alpha^* \gamma + \beta^* \delta = 0 \tag{2.77}
$$

Et aussi

$$
|1_B\rangle = \overline{\alpha} |0\rangle + \overline{\beta} |1\rangle, \qquad |\overline{\alpha}|^2 + |\overline{\beta}|^2 = 1 \tag{2.78}
$$

$$
|2_B\rangle = \overline{\gamma} |0\rangle + \overline{\delta} |1\rangle, \qquad |\overline{\gamma}|^2 + |\overline{\delta}|^2 = 1 \tag{2.79}
$$

$$
\langle 1_B | 2_B\rangle = \overline{\alpha}^* \overline{\gamma} + \overline{\beta}^* \overline{\delta} = 0 \tag{2.80}
$$

Alors

$$
|\psi\rangle = \lambda_1 (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) \left(\overline{\alpha} |0\rangle + \overline{\beta} |1\rangle\right) + \lambda_2 (\gamma |0\rangle + \delta |1\rangle) \left(\overline{\gamma} |0\rangle + \overline{\delta} |1\rangle\right) \tag{2.81}
$$

D'où

$$
\lambda_1 \alpha \overline{\alpha} + \lambda_2 \gamma \overline{\gamma} = \frac{1}{2}, \qquad \lambda_1 \beta \overline{\alpha} + \lambda_2 \delta \overline{\gamma} = \frac{1}{2} \tag{2.82}
$$

$$
\lambda_1 \alpha \overline{\beta} + \lambda_2 \gamma \overline{\delta} = \frac{1}{2}, \qquad \lambda_1 \beta \overline{\beta} + \lambda_2 \delta \overline{\delta} = \frac{1}{2}, \tag{2.83}
$$

De cette méthode de décomposition de Schmidt on peut definir une purification de

l'état d'un système comme suit

Purification de Schmidt

Soit un système A décrit par

$$\rho^A = \sum_i P_i \left|i_A\right\rangle \left\langle i_A\right| \tag{2.84}$$

Purifiant A en le composant avec un système fictif R dont la base orthonormée est $\left|i_R\right\rangle$, l'état pur

$$\left|AR\right\rangle = \sum_i \sqrt{P_i} \left|i_A\right\rangle \left|i_R\right\rangle \tag{2.85}$$

Et dit purifié de A.

Et on a

$$\rho^A = Tr_R \left(\left|AR\right\rangle \left\langle AR\right|\right) \tag{2.86}$$

En effet

$$\begin{aligned} Tr_R\left(\left|AR\right\rangle\left\langle AR\right|\right) &= \sum_{ij} \sqrt{P_i P_j} \left|i^A\right\rangle \left\langle j^A\right| Tr\left(\left|i^R\right\rangle \left\langle j^R\right|\right) \\ &= \sum_{ij} \sqrt{P_i P_j} \left|i^A\right\rangle \left\langle j^A\right| \delta_{ij} \\ &= \sum_i P_i \left|i^A\right\rangle \left\langle i^A\right| = \rho^A \end{aligned} \tag{2.87}$$

2.3.6 Intrication quantique (superposition des espaces)

L' intrication quantique est un phénomène (très étrange) de la mécanique quantique c'est comme une liaison de deux particules quantiques qui s'influencent mutuellement et simultanément. L'état intriqué vit dans un espace des deux particules qui selon la mécanique quantique est le produit tensoriel des deux espaces des particules alors que leur localité n'affecte en rien cet état, et de cette propriété la séparation dans l'espace-temps n'est nullement une séparation quantique, la localité et la causalité sont protégés par le fait que : un canal classique est forcément utilisé pour pouvoir s'en servir " complémentarité de Bohr". La superposition des espaces permet alors l'existence des états qu'on peut séparer dans l'espace entier de description quantique alors que leur séparation dans l'espace soit possible (paradoxe EPR). Ces états intriqués, comme ceux de EPR ou Bell et autre, ont alors ouvert au phénomène quantique une possibilité inouïe connue sous le nom de la téléportation quantique. Ces états intriqués sont alors utilisés comme un canal quantique de téléportation d'états quantiques qui est partagé entre des parties et au moyen d'opérations quantiques et mesures quantiques permettent la téléportation entre les parties. Bien sûr, la causalité est protégée au moyen du principe de complémentarité qui exige l'utilisation d'un canal classique sur lequel les limites habituelles sont permises (pas de propagation plus vite que la lumière). Sans rentrer dans les détails (on évite le pire à notre niveau de Master), nous définissons un état séparable par

$$|\Psi\rangle \text{ qui peut se mettre comme produit } |\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle \tag{2.88}$$

et les états non séparables, ou bien intriqués, ceux qui ne le permettent pas. Une théorie mathématique qui recherche la nature de ces états est en cours d'élaboration et des avancées appréciables ont déjà vues le jour (ce qui sort du niveau et du thème de ce Master) mais leur utilisation dans la téléportation est nécessaire.

Etats de Bell comme exemple

Les états de Bell sont des états intriqués qui vivent dans l'espace $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ est forme une base de cet espace. Ils sont définis par

$$|B_{xy}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0y\rangle + (-1)^x |1\bar{y}\rangle) \tag{2.89}$$

où l'on a :$y = 0, 1$ et $x = 0, 1$ et pour $y = 0 \rightarrow \bar{y} = 1 et y = 1 \rightarrow \bar{y} = 0$

Il existe 4 états possibles, qui peuvent s'écrire comme

$$|B_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \tag{2.90}$$

$$|B_{01}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) \tag{2.91}$$

$$|B_{10}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \tag{2.92}$$

$$|B_{11}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \tag{2.93}$$

Dans notre application de téléportation d'un qubit, ces états sont utilisés comme canal quantique.

Chapitre 3

Téléportation quantique

La téléportation quantique est une technique de transport des états quantiques utilisant l'intrication quantique comme canal de téléportation. Sa première apparition en tant qu'idée possible a vu le monde dès le début des années 90 (G. Brassard et al) et son test expérimental est validé. Nous pouvons dire que cet exploit de la mécanique quantique va révolutionné encore la physique et ses applications en technologie. Dans ce qui suit, nous allons présenter cette téléportation pour un qubit et deux qubits. Chaque schéma de téléportation a son protocole : pour l'état quantique à téléporter (ensemble de qubits séparés ou mélange) on propose le canal quantique (les états intriqués) et des opérations quantiques adéquates ainsi qu'un ensemble de mesure adéquat. La présence d'un canal classique d'information est nécessaire.

3.1 Téléportation d'un qubit : calcul par le formalisme des kets

Protocole de Téléportation d'un qubit :

Alice et Bob se partage le canal quantique de téléportation de Bell suivant

$$|B_{xy}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0y\rangle + (-1)^x |1\bar{y}\rangle) \tag{3.1}$$

L'état qubit qu'on veut téléporter $|\phi\rangle$

$$|\phi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \tag{3.2}$$

L'état d'entrée est le produit tensoriel : $|\phi\rangle \otimes |B_{xy}\rangle$

$$|\phi\rangle \otimes |B_{xy}\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,y\rangle + (-1)^x|1,\bar{y}\rangle) \tag{3.3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha|00y\rangle + \alpha(-1)^x|01\bar{y}\rangle + \beta|10y\rangle + \beta(-1)^x|11\bar{y}\rangle\right) = |R_1\rangle \tag{3.4}$$

Les deux premiers qubits sont ceux d'Alice et le troisième celui de Bob.

La première opération quantique est :$U_{cnot} \otimes I_2$

$$U_{cnot} \otimes I_2|R_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha|00y\rangle + \alpha(-1)^x|01\bar{y}\rangle + \beta|11y\rangle + \beta(-1)^x|10\bar{y}\rangle\right) = |R_2\rangle \tag{3.5}$$

La deuxième opération quantique est :$H \otimes I_2 \otimes I_2$

$$H \otimes I_2 \otimes I_2|R_2\rangle = \frac{1}{2}\alpha(|00y\rangle + |10y\rangle) + \alpha(-1)^x(|01\bar{y}\rangle + |01\bar{y}\rangle) + \tag{3.6}$$

$$\beta(|01y\rangle - |11y\rangle + \beta(-1)^x(|00\bar{y}\rangle - |10\bar{y}\rangle)) \tag{3.7}$$

Alice mesure ses deux qubits : si la mesure donne pour les valeurs de ses qubits $M_1 = 0$ et $M_2 = 0$, alors la projection de la mesure donne

$$\begin{aligned} |Rm_{xy}\rangle &= \left(\alpha|00y\rangle + \beta(-1)^x|00\bar{y}\rangle\right) \\ &= |00\rangle\left(\alpha|y\rangle + \beta(-1)^x|\bar{y}\rangle\right) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Pour les cas ($x = 0$ et $y = 0$) : On voit que Bob a automatiquement le qubit $|\phi\rangle$ et alors la correction en opération quantique est $U_{00} = 1_2$

$$U_{00}\left(\alpha\left|0\right\rangle + \beta\left|1\right\rangle\right) = \left|\phi\right\rangle$$

$$U_{00} = 1_2 \tag{3.9}$$

Pour les cas ($x = 0$ et $y = 1$) on a

$$U_{01}\left(\alpha\left|1\right\rangle + \beta\left|0\right\rangle\right) = \left|\phi\right\rangle$$

$$U_{01} = X \tag{3.10}$$

Pour les cas ($x = 1$ et $y = 0$) on a

$$U_{10}\left(\alpha\left|0\right\rangle - \beta\left|1\right\rangle\right) = \left|\phi\right\rangle$$

$$U_{10} = Z \tag{3.11}$$

Pour les cas ($x = 1$ et $y = 1$) on a

$$U_{11}\left(\alpha\left|1\right\rangle - \beta\left|0\right\rangle\right) = \left|\phi\right\rangle$$

$$U_{11} = XZ \tag{3.12}$$

$\rightarrow$ Pour le cas général on a la correction suivante : $\rightarrow$

$$U_{xy} = (X)^x (Z)^y \tag{3.13}$$

Si maintenant les valeurs de mesure $M_1 = 1$ et $M_2 = 0$ on refait la même chose et on a

$$\begin{aligned} |Rm_{xy}\rangle &= \left(\alpha\,|10y\rangle - \beta(-1)^x\,|10\overline{y}\rangle\right) \\ &= |10\rangle\left(\alpha\,|y\rangle - \beta(-1)^x\,|\overline{y}\rangle\right) \end{aligned} \tag{3.14}$$

Pour le cas ($x = 0$ et $y = 0$) on a pour téléporter $|\phi\rangle$ la correction de Bob

$$U_{00}\left(\alpha\,|0\rangle - \beta\,|1\rangle\right) = |\phi\rangle$$

$$U_{00} = Z \tag{3.15}$$

Pour le cas ($x = 0$ et $y = 1$) on a

$$U_{01}\left(\alpha\,|1\rangle - \beta\,|0\rangle\right) = |\phi\rangle$$

$$U_{01} = ZX \tag{3.16}$$

Pour le cas ($x = 1$ et $y = 0$) on a

$$U_{10}\left(\alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle\right) = |\phi\rangle$$

$$U_{10} = 1_2 \tag{3.17}$$

pour le cas ($x = 1$ et $y = 1$) on a

$$U_{11}\left(\alpha\,|1\rangle + \beta\,|0\rangle\right) = |\phi\rangle$$

$$U_{11} = X \tag{3.18}$$

$\rightarrow$ pour le cas général on a$\rightarrow$

$$U_{xy} = (X)^y (Z)^{\bar{x}} \tag{3.19}$$

Pour les valeurs de mesure $M_1 = 0$ et $M_2 = 1$ on a l'état projeté

$$\begin{aligned} |Rm_{xy}\rangle &= \left((-1)^x \alpha \left|01\bar{y}\right\rangle + \beta \left|01y\right\rangle\right) \\ &= \left|01\right\rangle \left((-1)^x \alpha \left|\bar{y}\right\rangle + \beta \left|y\right\rangle\right) \end{aligned} \tag{3.20}$$

Pour le cas ($x = 0$ et $y = 0$) : La correction de Bob pour obtenir $|\phi\rangle$

$$U_{00} \left(\alpha \left|1\right\rangle + \beta \left|0\right\rangle\right) = |\phi\rangle$$

$$U_{00} = X \tag{3.21}$$

Pour les cas ($x = 0$ et $y = 1$) on a

$$U_{01} \left(\alpha \left|0\right\rangle + \beta \left|1\right\rangle\right) = |\phi\rangle$$

$$U_{01} = 1_2 \tag{3.22}$$

Pour le cas ($x = 1$et $y = 0$) on a

$$U_{10} \left(-\alpha \left|1\right\rangle + \beta \left|0\right\rangle\right) = |\phi\rangle$$

$$U_{10} = XZ \tag{3.23}$$

Pour le cas ($x = 1$ et $y = 1$) on a

$$U_{11} \left(-\alpha \left|0\right\rangle + \beta \left|1\right\rangle\right) = |\phi\rangle$$

$$U_{11} = Z \tag{3.24}$$

Pour les valeurs de mesure $M_1 = 1$ et $M_2 = 1$, l'état projeté est

$$\begin{aligned} |Rm_{xy}\rangle &= \left((-1)^x \alpha \left|11\bar{y}\right\rangle - \beta \left|11y\right\rangle\right) \\ &= \left|11\right\rangle \left((-1)^x \alpha \left|\bar{y}\right\rangle - \beta \left|y\right\rangle\right) \end{aligned} \tag{3.25}$$

Pour le cas ($x = 0$ et $y = 0$) on a

$$U_{00} \left(\alpha \left|1\right\rangle - \beta \left|0\right\rangle\right) = \left|\phi\right\rangle$$

$$U_{00} = ZX \tag{3.26}$$

Pour les cas ($x = 0$ et $y = 1$) on a

$$U_{01} \left(\alpha \left|0\right\rangle - \beta \left|1\right\rangle\right) = \left|\phi\right\rangle$$

$$U_{01} = Z \tag{3.27}$$

Pour le cas ($x = 1$ et $y = 0$) on a

$$U_{10} \left(-\alpha \left|1\right\rangle - \beta \left|0\right\rangle\right) = \left|\phi\right\rangle$$

$$U_{10} = X \tag{3.28}$$

Pour le cas ($x = 1$ et $y = 1$) on a

$$U_{11} \left(-\alpha \left|0\right\rangle - \beta \left|1\right\rangle\right) = \left|\phi\right\rangle$$

$$U_{11} = 1_2 \tag{3.29}$$

3.2 Téléportation d'un qubit : calcul par le formalisme de la matrice densité

Nous allons maintenant refaire les calculs par le formalisme de la matrice densité. Nous utilisons deux formes de la matrice densité : les Bra-ket de Dirac et la forme matricielle.

3.2.1 La méthode : calcul en Bra-ket

a) La matrice densité du canal quantique de Bell est

$$\rho_{xy} = |B_{xy}\rangle \langle B_{xy}| \tag{3.30}$$

$$= \frac{1}{2}(|0,y\rangle + (-1)^x |1,\bar{y}\rangle)(\langle 0,y| + (-1)^x \langle 1,\bar{y}|)$$

$$= \frac{1}{2}(|0,y\rangle \langle 0,y| + (-1)^x |0,y\rangle \langle 1,\bar{y}| + (-1)^x |1,\bar{y}\rangle \langle 0,y| + |1,\bar{y}\rangle \langle 1,\bar{y}|) \tag{3.31}$$

b) Et la matrice densité de l'état à téléporter est

$$\rho_\phi = |\phi\rangle \langle\phi| \tag{3.32}$$

on a

$$\begin{aligned} |\phi\rangle &= \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \\ \rho_\phi &= (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)(\alpha^*\langle 0| + \beta^*\langle 1|) \end{aligned}$$

$$\rho_\phi = (|\alpha|^2|0\rangle\langle 0| + \alpha\beta^*|0\rangle\langle 1| + \beta\alpha^*|1\rangle\langle 0| + |\beta|^2|1\rangle\langle 1|) \tag{3.33}$$

c) La la matrice densité d'entrée est

$$\rho_{tot} = \rho_\phi \otimes \rho_{xy} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned} \rho_{tot} &= \rho_\phi \otimes \rho_{xy} = \\ &= \frac{1}{2}(|\alpha|^2|0\rangle\langle 0| + \alpha\beta^*|0\rangle\langle 1| + \beta\alpha^*|1\rangle\langle 0| + |\beta|^2|1\rangle\langle 1|) \otimes (|0,y\rangle\langle 0,y| + \\ &\quad (-1)^x|0,y\rangle\langle 1,\overline{y}| + (-1)^x|1,\overline{y}\rangle\langle 0,y| + |1,\overline{y}\rangle\langle 1,\overline{y}|) \\ &= \frac{1}{2}(|\alpha|^2(|00y\rangle\langle 00y| + (-1)^x|00y\rangle\langle 01\overline{y}| + (-1)^x|01\overline{y}\rangle\langle 00y| + |01\overline{y}\rangle\langle 01\overline{y}|) \\ &\quad +\alpha\beta^*(|00y\rangle\langle 10\overline{y}| + (-1)^x|00y\rangle\langle 11\overline{y}| + (-1)^x|01\overline{y}\rangle\langle 10y| + |01\overline{y}\rangle\langle 11\overline{y}|) \\ &\quad +\beta\alpha^*(|10y\rangle\langle 00y| + (-1)^x|10y\rangle\langle 01\overline{y}| + (-1)^x|11\overline{y}\rangle\langle 00y| + |11\overline{y}\rangle\langle 01\overline{y}|) \\ &\quad +|\beta|^2(|10y\rangle\langle 10y| + (-1)^x|10y\rangle\langle 11\overline{y}| + (-1)^x|11\overline{y}\rangle\langle 10y| + |11\overline{y}\rangle\langle 11\overline{y}|) \end{aligned} \tag{3.35}$$

Alice applique ses deux opérations quantiques précédentes

$$U_1 = U_{cnot} \otimes I_2 \tag{3.36}$$

$$U_2 = H \otimes I_4 \tag{3.37}$$

Qui s'écrivent en Bra-ket comme :

$$U_{cnot} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \tag{3.38}$$

$$U_{cnot} = [|0\rangle \langle 0| \otimes (|0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1|) + |1\rangle \langle 1| \otimes (|0\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle 0|)] \tag{3.39}$$

Et

$$I_2 = (|0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1|) \tag{3.40}$$

Par conséquent, on a pour U_1

$$\begin{aligned} U_1 \;\; = \;\; & (|000\rangle \langle 000| + |001\rangle \langle 001| + |010\rangle \langle 010| + |011\rangle \langle 011| + \\ & |100\rangle \langle 110| + |101\rangle \langle 111| + |110\rangle \langle 100| + |111\rangle \langle 101|) \end{aligned} \tag{3.41}$$

Et on note U_1^+ l'adjoint U_1 qu'on va utiliser en opération par la suite.

Revenons à U_2, on a

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$U_2 = H \otimes I_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.42}$$

$$U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle \langle 0| + |0\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle 0| - |1\rangle \langle 1|) \otimes (|0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1|) \otimes (|0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1|)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle\langle 000| + |001\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 010| + |011\rangle\langle 011| + |000\rangle\langle 100| +$$
$$|001\rangle\langle 101| + |010\rangle\langle 110| + |011\rangle\langle 111| + |100\rangle\langle 000| + |101\rangle\langle 001|$$

$$+ |110\rangle\langle 010| + |111\rangle\langle 011| - |100\rangle\langle 100| - |101\rangle\langle 101| - |110\rangle\langle 110| - |111\rangle\langle 111|) \quad (3.43)$$

EtU_2^+ l'adjoint U_2.

d) Après les opérations quantiques on a :

$$\rho_{tot}^1 = U_1 \rho_{tot} U_1^\dagger \quad (3.44)$$

Et

$$\rho_{tot}^2 = U_2 \rho_{tot}^1 U_2^\dagger \quad (3.45)$$

Le résultat est le suivant

$$\rho_{tot}^1 = [|\alpha|^2 \delta_{(0y)}(|000\rangle\langle 000| + (-1)^x |000\rangle\langle 011|) + \alpha\beta^*\delta_{(0y)}(|000\rangle\langle 110| + (-1)^x |000\rangle\langle 101|) +$$
$$|\alpha|^2 \delta_{(1y)}(|001\rangle\langle 001| + (-1)^x |001\rangle\langle 010|) + \alpha\beta^*\delta_{(1y)}(|001\rangle\langle 111| + (-1)^x |001\rangle\langle 100|) +$$
$$|\alpha|^2 \delta_{(1y)}((-1)^x |010\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 010|) + \alpha\beta^*\delta_{(1y)}((-1)^x |010\rangle\langle 111| + |010\rangle\langle 100|) +$$
$$|\alpha|^2 \delta_{(0y)}((-1)^x |011\rangle\langle 000| + |011\rangle\langle 011|) + \alpha\beta^*\delta_{(0y)}((-1)^x |011\rangle\langle 110| + |011\rangle\langle 101|) +$$
$$\beta\alpha^*\delta_{(1y)}((-1)^x \ |100\rangle\langle 001| + |100\rangle\langle 010|) + |\beta|^2 \delta_{(1y)}((-1)^x |100\rangle\langle 110| + |100\rangle\langle 100|) +$$
$$\beta\alpha^*\delta_{(0y)}((-1)^x |101\rangle\langle 000| + |101\rangle\langle 011|) + |\beta|^2 \delta_{(0y)}((-1)^x |101\rangle\langle 111| + |101\rangle\langle 101|) +$$
$$\beta\alpha^*\delta_{(0y)}(|110\rangle\langle 000| + (-1)^x |110\rangle\langle 011|) + |\beta|^2 \delta_{(0y)}(|110\rangle\langle 110| + (-1)^x |101\rangle\langle 101|) +$$
$$\beta\alpha^*\delta_{(1y)}(|111\rangle\langle 001| + (-1)^x |111\rangle\langle 010|) + |\beta|^2 \delta_{(1y)}(|111\rangle\langle 111| + (-1)^x |111\rangle\langle 100|)]$$

$$\rho_{tot}^2 = [|\alpha|^2 \delta_{(0y)}(|000\rangle\langle 000| + |000\rangle\langle 100|) + (-1)^x |\alpha|^2 \delta_{(0y)}(|000\rangle\langle 011| + |000\rangle\langle 101|) +$$
$$\alpha\beta^*\delta_{(0y)}(\ |000\rangle\langle 010| - |000\rangle\langle 110|) + (-1)^x \alpha\beta^*\delta_{(0y)}(|000\rangle\langle 001| - |000\rangle\langle 101|) +$$
$$|\alpha|^2 \delta_{(1y)}(\ |001\rangle\langle 001| + |001\rangle\langle 101|\ ) + (-1)^x |\alpha|^2 \delta_{(1y)}(|001\rangle\langle 010| + |001\rangle\langle 110|) +$$

$$
\begin{aligned}
&\alpha\beta^*\delta_{(1y)}(|001\rangle\langle 011| - |001\rangle\langle 110|) + (-1)^x\alpha\beta^*\delta_{(1y)}(|001\rangle\langle 000| - |001\rangle\langle 100|) + \\
&(-1)^x|\alpha|^2\delta_{(1y)}(|010\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 101|) + |\alpha|^2\delta_{(1y)}(|010\rangle\langle 010| + |010\rangle\langle 110|) + \\
&(-1)^x\alpha\beta^*\delta_{(1y)}(|010\rangle\langle 011| - |010\rangle\langle 111|) + \alpha\beta^*\delta_{(1y)}(|010\rangle\langle 000| - |010\rangle\langle 100|) + \\
&(-1)^x|\alpha|^2\delta_{(0y)}(|011\rangle\langle 000| + |011\rangle\langle 100|) + |\alpha|^2\delta_{(0y)}(|011\rangle\langle 011| + |011\rangle\langle 110|) + \\
&(-1)^x\alpha\beta^*\delta_{(0y)}(|011\rangle\langle 010| - |011\rangle\langle 110|) + \alpha\beta^*\delta_{(0y)}(|011\rangle\langle 001| - |011\rangle\langle 101|) + \\
&(-1)^x\beta\alpha^*\delta_{(1y)}(|000\rangle\langle 001| + |000\rangle\langle 101|) + \beta\alpha^*\delta_{(1y)}(|000\rangle\langle 010| + |000\rangle\langle 110|) + \\
&(-1)^x|\beta|^2\delta_{(1y)}(|000\rangle\langle 010| - |000\rangle\langle 110|) + |\beta|^2\delta_{(1y)}(|000\rangle\langle 000| - |000\rangle\langle 100|) + \\
&(-1)^x\beta\alpha^*\delta_{(0y)}(|001\rangle\langle 000| + |001\rangle\langle 100|) + \beta\alpha^*\delta_{(0y)}(|001\rangle\langle 011| + |001\rangle\langle 111|) + \\
&(-1)^x|\beta|^2\delta_{(0y)}(|001\rangle\langle 011| - |001\rangle\langle 111|) + |\beta|^2\delta_{(0y)}(|001\rangle\langle 001| - |001\rangle\langle 101|) + \\
&\beta\alpha^*\delta_{(0y)}(|010\rangle\langle 000| + |010\rangle\langle 100|) + (-1)^x\alpha\beta^*\delta_{(0y)}(|010\rangle\langle 011| + |010\rangle\langle 111|) + \\
&|\beta|^2\delta_{(0y)}(|010\rangle\langle 010| - |010\rangle\langle 110|) + (-1)^x|\beta|^2\delta_{(0y)}(|010\rangle\langle 001| - |011\rangle\langle 101|) + \\
&\beta\alpha^*\delta_{(1y)}(|011\rangle\langle 001| + |011\rangle\langle 101|) + (-1)^x\beta\alpha^*\delta_{(1y)}(|011\rangle\langle 010| + |011\rangle\langle 110|) + \\
&|\beta|^2\delta_{(1y)}(|011\rangle\langle 011| - |011\rangle\langle 111|) + (-1)^x|\beta|^2\delta_{(1y)}(|011\rangle\langle 000| - |011\rangle\langle 100|) + \\
&|\alpha|^2\delta_{(0y)}(|100\rangle\langle 000| + |100\rangle\langle 100|) + (-1)^x|\alpha|^2\delta_{(0y)}(|100\rangle\langle 011| + |100\rangle\langle 111|) + \\
&\alpha\beta^*\delta_{(0y)}(|100\rangle\langle 010| - |100\rangle\langle 110|) + (-1)^x\alpha\beta^*\delta_{(0y)}(|100\rangle\langle 001| - |100\rangle\langle 101|) + \\
&|\alpha|^2\delta_{(1y)}(|101\rangle\langle 001| + |101\rangle\langle 101|) + (-1)^x|\alpha|^2\delta_{(1y)}(|101\rangle\langle 010| + |101\rangle\langle 110|) + \\
&\alpha\beta^*\delta_{(1y)}(|101\rangle\langle 011| - |101\rangle\langle 111|) + (-1)^x\alpha\beta^*\delta_{(1y)}(|101\rangle\langle 000| - |101\rangle\langle 100|) + \\
&(-1)^x|\alpha|^2\delta_{(1y)}(|010\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 101|) + |\alpha|^2\delta_{(1y)}(|010\rangle\langle 010| + |010\rangle\langle 110|) + \\
&(-1)^x\alpha\beta^*\delta_{(1y)}(|010\rangle\langle 011| - |010\rangle\langle 111|) + \alpha\beta^*\delta_{(1y)}(|010\rangle\langle 000| - |010\rangle\langle 100|) + \\
&(-1)^x|\alpha|^2\delta_{(1y)}(|110\rangle\langle 001| + |110\rangle\langle 101|) + |\alpha|^2\delta_{(1y)}(|011\rangle\langle 010| + |110\rangle\langle 110|) + \\
&(-1)^x\alpha\beta^*\delta_{(1y)}(|110\rangle\langle 011| - |110\rangle\langle 111|) + \alpha\beta^*\delta_{(1y)}(|110\rangle\langle 000| - |110\rangle\langle 100|) + \\
&(-1)^x|\alpha|^2\delta_{(0y)}(|111\rangle\langle 000| + |111\rangle\langle 100|) + |\alpha|^2\delta_{(0y)}(|111\rangle\langle 011| + |111\rangle\langle 111|) + \\
&(-1)^x\alpha\beta^*\delta_{(0y)}(|111\rangle\langle 010| - |111\rangle\langle 110|) + \alpha\beta^*\delta_{(0y)}(|111\rangle\langle 001| - |111\rangle\langle 101|) + \\
&(-1)^x\alpha\beta^*\delta_{(0y)}(|011\rangle\langle 010| - |011\rangle\langle 110|) + \alpha\beta^*\delta_{(0y)}(|011\rangle\langle 001| - |011\rangle\langle 101|) \\
&- (-1)^x\beta\alpha^*\delta_{(1y)}(|100\rangle\langle 001| + |100\rangle\langle 101|) - \beta\alpha^*\delta_{(1y)}(|100\rangle\langle 010| + |100\rangle\langle 110|) \\
&- (-1)^x|\beta|^2\delta_{(1y)}(|100\rangle\langle 010| - |100\rangle\langle 110|) - |\beta|^2\delta_{(1y)}(|100\rangle\langle 000| - |100\rangle\langle 100|) \\
&- (-1)^x\beta\alpha^*\delta_{(0y)}(|101\rangle\langle 000| + |101\rangle\langle 100|) - \beta\alpha^*\delta_{(0y)}(|101\rangle\langle 011| + |101\rangle\langle 111|) \\
&- (-1)^x|\beta|^2\delta_{(0y)}(|101\rangle\langle 011| - |101\rangle\langle 111|) - |\beta|^2\delta_{(0y)}(|101\rangle\langle 001| - |101\rangle\langle 101|)
\end{aligned}
$$

$$-\beta\alpha^*\delta_{(0y)}(|110\rangle\langle 000| + |110\rangle\langle 100|) - (-1)^x\beta\alpha^*\delta_{(0y)}(|110\rangle\langle 011| + |110\rangle\langle 111|)$$
$$-|\beta|^2\delta_{(0y)}(|110\rangle\langle 010| - |110\rangle\langle 110|) - (-1)^x|\beta|^2\delta_{(0y)}(|110\rangle\langle 001| - |111\rangle\langle 101|)$$
$$-\beta\alpha^*\delta_{(1y)}(|111\rangle\langle 001| + |111\rangle\langle 101|) - (-1)^x\beta\alpha^*\delta_{(1y)}(|111\rangle\langle 010| + |111\rangle\langle 110|)$$
$$-|\beta|^2\delta_{(1y)}(|111\rangle\langle 011| - |111\rangle\langle 111|) - (-1)^x|\beta|^2\delta_{(1y)}(|111\rangle\langle 000| - |111\rangle\langle 100|)]$$

e) Entre autre calculons les traces partielles suivantes qui décrivent successivement l'état de Bob

$$\begin{aligned}
\rho^{(0)} &= tr_{(1.2)}(\rho_{tot}) \\
\rho^{(1)} &= tr_{(1.2)}(\rho_{1tot}) \\
\rho^{(2)} &= tr_{(1.2)}(\rho_{2tot})
\end{aligned} \tag{3.46}$$

1) Le calcul de $\rho^{(0)} = tr_{(1.2)}(\rho_{tot})$

$$\begin{aligned}
\rho^{(0)} &= tr_{(1.2)}(\rho_{tot}) = \sum_{i,j=0}^{1}((\langle ij| \otimes 1_2)\rho_{tot}(|ij\rangle \otimes 1_2) \\
&= ((\langle 00| \otimes 1_2)\rho_{tot}(|00\rangle \otimes 1_2) + ((\langle 01| \otimes 1_2)\rho_{tot}(|01\rangle \otimes 1_2) + \\
&\quad ((\langle 10| \otimes 1_2)\rho_{tot}(|10\rangle \otimes 1_2) + ((\langle 11| \otimes 1_2)\rho_{tot}(|11\rangle \otimes 1_2)
\end{aligned}$$

$\rightarrow$

$$\begin{aligned}
\rho^{(0)} &= \frac{1}{2}(|\alpha|^2|y\rangle\langle y| + |\alpha|^2|\bar{y}\rangle\langle\bar{y}| + |\beta|^2|y\rangle\langle y| + |\beta|^2|\bar{y}\rangle\langle\bar{y}|) \\
&= \frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)(|y\rangle\langle y| + |\bar{y}\rangle\langle\bar{y}|)
\end{aligned}$$

$$\rho^{(0)} = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) \tag{3.47}$$

Et par la même méthode on calcule $\rho^{(1)}$ et $\rho^{(2)}$

$$\rho^{(1)} = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) \tag{3.48}$$

Et

$$\rho^{(2)} = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) \tag{3.49}$$

Passons maintenant aux mesures. On définit un ensemble de mesures par $M^{(\mathrm{ab})} = M^{\mathrm{a}} \otimes M^{\mathrm{b}} \otimes 1_2$ avec $M^a = |a\rangle\langle a|$,$(a = 0,1)$ et $M^b = |b\rangle\langle b|$,$(b = 0,1)$

$$\begin{aligned} M^{(ab)} &= (|ab\rangle\langle ab|) \otimes (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) \\ &= (|ab0\rangle\langle ab0| + |ab1\rangle\langle ab1|) \end{aligned} \tag{3.50}$$

Après la mesure, La matrice densité projetée est

$$\rho_{2_{tot}} \longrightarrow \rho_{(ab)mes} = \frac{M^{(ab)}\rho_{2_{tot}}(M^{(ab)})^{\dagger}}{tr\,(M^{(ab)}\rho_{2_{tot}}(M^{(ab)})^{\dagger})} \tag{3.51}$$

Nous calculons la correction de Bob pour chacune des valeurs de mesures

1)Pour $a = 0$ et $b = 0$

$$\rho_{(00)mes} = \frac{M^{(00)}\rho_{2_{tot}}(M^{(00)})^{\dagger}}{tr\,(M^{(00)}\rho_{2_{tot}}(M^{(00)})^{\dagger})} \tag{3.52}$$

$$\begin{aligned} M^{(00)}\rho_{2_{tot}}(M^{(00)})^{\dagger} &= (|000\rangle\langle 000| + |001\rangle\langle 001|)\rho_{2_{tot}}(|000\rangle\langle 000| + |001\rangle\langle 001|) \\ &= \frac{1}{4}(|\alpha|^2\,\delta_{(0y)}\,|000\rangle\langle 000| + (-1)^x\alpha\beta^*\delta_{(0y)}\,|000\rangle\langle 001| + \\ &\quad |\alpha|^2\,\delta_{(1y)}\,|001\rangle\langle 001| + (-1)^x\alpha\beta^*\delta_{(1y)}\,|001\rangle\langle 000| + \\ &\quad (-1)^x\;\beta\alpha^*\delta_{(1y)}\,|000\rangle\langle 001| + |\beta|^2\,\delta_{(1y)}\,|000\rangle\langle 000| \\ &\quad +(-1)^x\;\beta\alpha^*\delta_{(0y)}\,|001\rangle\langle 000| + |\beta|^2\,\delta_{(0y)}\,|001\rangle\langle 001|) \end{aligned}$$

$$tr(M^{(00)}\rho_{2_{tot}}(M^{(00)})^{\dagger}) = \frac{1}{4}(|\alpha|^2\,\delta_{(0y)} + |\alpha|^2\,\delta_{(1y)} + |\beta|^2\,\delta_{(1y)} + |\beta|^2\,\delta_{(0y)}) \tag{3.53}$$

2)Pour $a = 0$ et $b = 1$

$$\rho_{(01)mes} = \frac{M^{(01)}\rho_{2_{tot}}(M^{(01)})^\dagger}{tr\,(M^{(01)}\rho_{2_{tot}}(M^{(01)})^\dagger)} \tag{3.54}$$

$$M^{(01)}\rho_{2_{tot}}(M^{(01)})^\dagger = (|010\rangle\langle 010| + |011\rangle\langle 011|)\rho_{2_{tot}}(|010\rangle\langle 010| + |011\rangle\langle 011|)$$

$$\begin{aligned}
= \; & \frac{1}{4}(|\alpha|^2\,\delta_{(1y)}\,|010\rangle\langle 010| + (-1)^x\alpha\beta^*\delta_{(1y)}\,|010\rangle\langle 011| + |\alpha|^2\,\delta_{(1y)}\,|011\rangle\langle 010| + \\
& (-1)^x\alpha\beta^*\delta_{(0y)}\,|011\rangle\langle 010| + (-1)^x\;\beta\alpha^*\;\delta_{(0y)}\,|010\rangle\langle 011| + |\beta|^2\,\delta_{(0y)}\,|010\rangle\langle 010| \\
& +\beta\alpha^*\;\delta_{(1y)}\,|011\rangle\langle 010| + |\beta|^2\,\delta_{(1y)}\,|011\rangle\langle 011|)
\end{aligned} \tag{3.55}$$

$$\rightarrow tr\left(M^{(01)}\rho_{2_{tot}}(M^{(01)})^\dagger\right) = \frac{1}{4}(|\alpha|^2\,\delta_{(1y)} + |\beta|^2\,\delta_{(0y)} + |\beta|^2\,\delta_{(1y)} + |\alpha|^2\,\delta_{(0y)}) \tag{3.56}$$

3)Pour $a = 1$ et $b = 0$

$$\rho_{(10)mes} = \frac{M^{(10)}\rho_{2_{tot}}(M^{(10)})^\dagger}{tr\,(M^{(10)}\rho_{2_{tot}}(M^{(10)})^\dagger)} \tag{3.57}$$

$$\begin{aligned}
M^{(10)}\rho_{2_{tot}}(M^{(10)})\dagger \;=\; & (|100\rangle\langle 100| + |101\rangle\langle 101|)\rho_{2_{tot}}(|100\rangle\langle 100| + |101\rangle\langle 101|) \\
= \; & \frac{1}{4}(|\alpha|^2\,\delta_{(0y)}\,|100\rangle\langle 100| - (-1)^x\alpha\beta^*\delta_{(0y)}\,|100\rangle\langle 101| + \\
& |\alpha|^2\,\delta_{(1y)}\,|101\rangle\langle 101| - (-1)^x\alpha\beta^*\delta_{(1y)}\,|101\rangle\langle 100| - \\
& (-1)^x\;\beta\alpha^*\delta_{(1y)}\,|100\rangle\langle 101| + |\beta|^2\,\delta_{(1y)}\,|100\rangle\langle 100| \\
& -(-1)^x\;\beta\alpha^*\delta_{(0y)}\,|101\rangle\langle 100| + |\beta|^2\,\delta_{(0y)}\,|101\rangle\langle 101|)
\end{aligned}$$

$$\rightarrow tr\left(M^{(10)}\rho_{2_{tot}}(M^{(10)})^{\dagger}\right) = \frac{1}{4}(|\alpha|^2\,\delta_{(0y)} + |\alpha|^2\,\delta_{(1y)} + |\beta|^2\,\delta_{(0y)} + |\beta|^2\,\delta_{(1y)}) \tag{3.58}$$

4)Pour $a = 1$ et $b = 1$

$$\rho_{(11)mes} = \frac{M^{(11)}\rho_{2_{tot}}(M^{(11)})^{\dagger}}{tr\left(M^{(11)}\rho_{2_{tot}}(M^{(11)})^{\dagger}\right)} \tag{3.59}$$

$$\begin{aligned}
M^{(11)}\rho_{2_{tot}}(M^{(11)})^{\dagger} &= (|110\rangle\langle 110| + |111\rangle\langle 111|)\rho_{2_{tot}}(|110\rangle\langle 110| + |111\rangle\langle 111|) \\
&= \frac{1}{4}(|\alpha|^2\,\delta_{(1y)}\,|110\rangle\langle 110| - (-1)^x\alpha\beta^*\delta_{(1y)}\,|110\rangle\langle 111| + \\
&\quad |\alpha|^2\,\delta_{(1y)}\,|111\rangle\langle 110| - (-1)^x\alpha\beta^*\delta_{(0y)}\,|111\rangle\langle 110| - \\
&\quad (-1)^x\,\beta\alpha^*\delta_{(0y)}\,|110\rangle\langle 111| + |\beta|^2\,\delta_{(0y)}\,|110\rangle\langle 110| \\
&\quad +(-1)^x\,\beta\alpha^*\delta_{(1y)}\,|111\rangle\langle 110| + |\beta|^2\,\delta_{(0y)}\,|111\rangle\langle 111|)
\end{aligned}$$

$$tr\left(M^{(11)}\rho_{2_{tot}}(M^{(11)})^{\dagger}\right) = \frac{1}{4}(|\alpha|^2\,\delta_{(0y)} + |\alpha|^2\,\delta_{(1y)} + |\beta|^2\,\delta_{(0y)} + |\beta|^2\,\delta_{(1y)}) \tag{3.60}$$

A ce stade, Bob doit opérer des corrections pour chaque valeur de la mesure (a, b) et chaque état intriqué de Bell (x, y). L'opération quantique (de correction) $U^{(a,b)}_{(xy)}$ est telle que

$$U^{(a,b)}\rho_{(ab)_{mes}}U^{(a,b)\dagger} = \rho_{\phi} \tag{3.61}$$

$$\rho_{\phi} = (|\alpha|^2\,|0\rangle\langle 0| + \alpha\beta^*\,|0\rangle\langle 1| + \beta\alpha^*\,|1\rangle\langle 0| + |\beta|^2\,|1\rangle\langle 1|)$$

Pour le cas de valeurs de mesures ($a = 0$et $b = 0$) :

- Pour l'état de Bell ($x = 0$ et $y = 0$)

on a :$(|\alpha|^2+|\beta|^2)=1$

$$\begin{aligned} U_{00}^{(00)}\rho_{mes}^{00}U_{00}^{(00)\dagger} &= U_{00}^{(00)}(|\alpha|^2\,|000\rangle\,\langle000|+\alpha\beta^*\,|000\rangle\,\langle001|+ \\ &\quad \beta\alpha^*\,|001\rangle\,\langle000|+|\beta|^2\,|001\rangle\,\langle001|)U_{00}^{(00)\dagger} \\ &= |00\rangle\,\langle00|\otimes\rho_\phi \end{aligned} \tag{3.62}$$

$$U_{00}^{(00)}=1_4\otimes 1_2 \tag{3.63}$$

- Pour l'état de Bell ($x=0$ et $y=1$)

$$\begin{aligned} U_{01}^{(00)}\rho_{mes}^{00}U_{01}^{(00)\dagger} &= U_{01}^{(00)}(|\alpha|^2\,|001\rangle\,\langle001|+\alpha\beta^*\,|001\rangle\,\langle000|+ \\ &\quad \beta\alpha^*\,|000\rangle\,\langle001|+|\beta|^2\,|000\rangle\,\langle000|)U_{01}^{(00)\dagger} \\ &= |00\rangle\,\langle00|\otimes\rho_\phi \end{aligned} \tag{3.64}$$

$$U_{01}^{(00)}=1_4\otimes X \tag{3.65}$$

- Pour l'état de Bell ($x=1$ et $y=0$)

$$\begin{aligned} U_{10}^{(00)}\rho_{mes}^{00}U_{10}^{(00)\dagger} &= U_{10}^{(00)}(|\alpha|^2\,|000\rangle\,\langle000|-\alpha\beta^*\,|000\rangle\,\langle001|- \\ &\quad \beta\alpha^*\,|001\rangle\,\langle000|+|\beta|^2\,|001\rangle\,\langle001|)U_{10}^{(00)\dagger} \\ &= |00\rangle\,\langle00|\otimes\rho_\phi \end{aligned} \tag{3.66}$$

$$U_{10}^{(00)}=1_4\otimes Z \tag{3.67}$$

- Pour l'état de Bell ($x=1$ et $y=1$)

$$\begin{aligned} U_{11}^{(00)} \rho_{mes}^{00} U_{01}^{(00)\dagger} &= U_{11}^{(00)} (|\alpha|^2 \left|001\right\rangle \left\langle 001\right| - \alpha\beta^* \left|001\right\rangle \left\langle 000\right| - \\ &\quad \beta\alpha^* \left|000\right\rangle \left\langle 001\right| + |\beta|^2 \left|000\right\rangle \left\langle 000\right|) U_{11}^{(00)\dagger} \\ &= \left|00\right\rangle \left\langle 00\right| \otimes \rho_\phi \end{aligned} \tag{3.68}$$

$$U_{11}^{(00)} = 1_4 \otimes Y \tag{3.69}$$

Pour le cas de valeurs de mesures ($a = 0$et $b = 1$) :

- Pour l'état de Bell ($x = 0$ et $y = 0$)

$$\begin{aligned} U_{00}^{(01)} \rho_{mes}^{01} U_{00}^{(01)\dagger} &= U_{00}^{(01)} (|\alpha|^2 \left|011\right\rangle \left\langle 011\right| + \alpha\beta^* \left|011\right\rangle \left\langle 010\right| + \\ &\quad \beta\alpha^* \left|010\right\rangle \left\langle 011\right| + |\beta|^2 \left|010\right\rangle \left\langle 010\right|) U_{00}^{(01)\dagger} \\ &= \left|01\right\rangle \left\langle 01\right| \otimes \rho_\phi \end{aligned} \tag{3.70}$$

$$U_{00}^{(01)} = 1_4 \otimes X \tag{3.71}$$

- Pour l'état de Bell ($x = 0$ et $y = 1$)

$$\begin{aligned} U_{01}^{(01)} \rho_{mes}^{01} U_{01}^{(01)\dagger} &= U^{(01)} (\alpha^2 \left|010\right\rangle \left\langle 010\right| + \alpha\beta^* \left|010\right\rangle \left\langle 011\right| + \\ &\quad \beta\alpha^* \left|011\right\rangle \left\langle 010\right| + \beta^2 \left|011\right\rangle \left\langle 011\right|) U^{(01)\dagger} \\ &= \left|01\right\rangle \left\langle 01\right| \otimes \rho_\phi \end{aligned} \tag{3.72}$$

$$U_{01}^{(01)} = 1_4 \otimes 1_2 \tag{3.73}$$

- Pour l'état de Bell ($x = 1$ et $y = 0$)

$$\begin{aligned} U_{10}^{(01)} \rho_{mes}^{01} U_{10}^{(01)\dagger} &= U_{10}^{(01)}(\alpha^2 |011\rangle \langle 011| - \alpha\beta^* |011\rangle \langle 010| - \\ &\quad \beta\alpha^* |010\rangle \langle 011| + |\beta|^2 |010\rangle \langle 010|) U_{10}^{(01)\dagger} \\ &= |01\rangle \langle 01| \otimes \rho_\phi \end{aligned} \tag{3.74}$$

$$U_{10}^{(01)} = 1_4 \otimes Y \tag{3.75}$$

- Pour l'état de Bell ($x = 1$ et $y = 1$)

$$\begin{aligned} U_{11}^{(01)} \rho_{mes}^{01} U_{11}^{(01)\dagger} &= U_{11}^{(01)}(|\alpha|^2 |010\rangle \langle 010| - \alpha\beta^* |010\rangle \langle 011| - \\ &\quad \beta\alpha^* |011\rangle \langle 010| + |\beta|^2 |011\rangle \langle 011|) U_{11}^{(01)\dagger} \\ &= |01\rangle \langle 01| \otimes \rho_\phi \end{aligned} \tag{3.76}$$

$$U_{11}^{(01)} = 1_4 \otimes Z \tag{3.77}$$

Pour le cas de valeurs de mesures ($a = 1$et $b = 0$) :

- Pour l'état de Bell ($x = 0$ et $y = 0$)

$$\begin{aligned} U_{00}^{(10)} \rho^{10} U_{00}^{(10)\dagger} &= U_{11}^{(10)}(|\alpha|^2 |010\rangle \langle 010| - \alpha\beta^* |010\rangle \langle 011| - \\ &\quad \beta\alpha^* |011\rangle \langle 010| + |\beta|^2 |011\rangle \langle 011|) U_{00}^{(10)\dagger} \\ &= |10\rangle \langle 10| \otimes \rho_\phi \end{aligned} \tag{3.78}$$

$$U_{00}^{(10)} = 1_4 \otimes Z \tag{3.79}$$

- Pour l'état de Bell ($x = 0$ et $y = 1$)

$$\begin{aligned}
U_{01}^{(10)} \rho_{mes}^{10} U_{01}^{(10)\dagger} &= U_{01}^{10}(|\alpha|^2 |101\rangle \langle 101| - \alpha\beta^* |101\rangle \langle 100| - \\
&\quad \beta\alpha^* |100\rangle \langle 101| + |\beta|^2 |100\rangle \langle 100|) U_{10}^{(10)\dagger} \\
&= |10\rangle \langle 10| \otimes \rho_\phi
\end{aligned} \tag{3.80}$$

$$U_{01}^{(10)} = 1_4 \otimes Y \tag{3.81}$$

- Pour l'état de Bell ($x = 1$ et $y = 0$)

$$\begin{aligned}
U_{10}^{(10)} \rho_{mes}^{10} U_{10}^{(10)\dagger} &= U^{(10)}(|\alpha|^2 |100\rangle \langle 100| + \alpha\beta^* |100\rangle \langle 101| + \\
&\quad \beta\alpha^* |101\rangle \langle 100| + |\beta|^2 |101\rangle \langle 101|) U^{(10)\dagger} \\
&= |10\rangle \langle 10| \otimes \rho_\phi
\end{aligned} \tag{3.82}$$

$$U_{10}^{(10)} = 1_4 \otimes 1_2 \tag{3.83}$$

- Pour l'état de Bell ($x = 1$ et $y = 1$)

$$\begin{aligned}
U_{11}^{(10)} \rho_{mes}^{10} U_{11}^{(10)\dagger} &= U_{11}^{(10)}(|\alpha|^2 |101\rangle \langle 101| + \alpha\beta^* |101\rangle \langle 100| + \\
&\quad \beta\alpha^* |100\rangle \langle 101| + |\beta|^2 |100\rangle \langle 100|) U_{01}^{(00)\dagger} \\
&= |10\rangle \langle 10| \otimes \rho_\phi
\end{aligned} \tag{3.84}$$

$$U_{11}^{(10)} = 1_4 \otimes X \tag{3.85}$$

Pour le cas de valeurs de mesures ($a = 1$et $b = 0$) :

- Pour l'état de Bell ($x = 0$ et $y = 0$)

$$
\begin{aligned}
U_{00}^{(11)}\rho_{mes}^{11}U_{00}^{(11)\dagger} &= U_{00}^{11}(|\alpha|^2\,|111\rangle\langle 111| - \alpha\beta^*\,|111\rangle\langle 110| - \\
&\quad \beta\alpha^*\,|110\rangle\langle 111| + |\beta|^2\,|110\rangle\langle 110|)U_{00}^{(11)\dagger} \\
&= |11\rangle\langle 11| \otimes \rho_\phi
\end{aligned} \tag{3.86}
$$

$$
U_{00}^{(11)} = 1_4 \otimes Y \tag{3.87}
$$

- Pour l'état de Bell ($x = 0$ et $y = 1$)

$$
\begin{aligned}
U_{01}^{(11)}\rho_{mes}^{11}U_{01}^{(11)\dagger} &= U_{01}^{(11)}(|\alpha|^2\,|110\rangle\langle 110| - \alpha\beta^*\,|110\rangle\langle 111| - \\
&\quad \beta\alpha^*\,|111\rangle\langle 110| + |\beta|^2\,|111\rangle\langle 111|)U_{01}^{(11)\dagger} \\
&= |11\rangle\langle 11| \otimes \rho_\phi
\end{aligned} \tag{3.88}
$$

$$
U_{01}^{(11)} = 1_4 \otimes Z \tag{3.89}
$$

- Pour l'état de Bell ($x = 1$ et $y = 0$)

$$
\begin{aligned}
U_{10}^{(11)}\rho_{mes}^{11}U_{10}^{(11)\dagger} &= U_{10}^{(11)}(|\alpha|^2\,|111\rangle\langle 111| + \alpha\beta^*\,|111\rangle\langle 110| + \\
&\quad \beta\alpha^*\,|110\rangle\langle 111| + |\beta|^2\,|110\rangle\langle 110|)U_{10}^{(11)\dagger} \\
&= |11\rangle\langle 11| \otimes \rho_\phi
\end{aligned} \tag{3.90}
$$

$$
U_{10}^{(11)} = 1_4 \otimes X \tag{3.91}
$$

- Pour l'état de Bell ($x = 1$ et $y = 1$)

$$\begin{aligned} U_{11}^{(11)} \rho_{mes}^{11} U_{11}^{(11)\dagger} &= U^{(11)}(|\alpha|^2 |110\rangle \langle 110| + \alpha\beta^* |110\rangle \langle 111| + \\ &\quad \beta\alpha^* |111\rangle \langle 110| + |\beta|^2 |111\rangle \langle 111|) U^{(11)\dagger} \\ &= |11\rangle \langle 11| \otimes \rho_\phi \end{aligned} \tag{3.92}$$

$$U_{11}^{(11)} = 1_4 \otimes 1_2 \tag{3.93}$$

3.2.2 La méthode : calcul matriciel

a) On calcule matricielle ment $\rho_{xy} = |B_{xy}\rangle \langle B_{xy}|$

$$\rho_{xy} = \frac{1}{2}(|0,y\rangle \langle 0,y| + (-1)^x |0,y\rangle \langle 1,\bar{y}| + (-1)^x |1,\bar{y}\rangle \langle 0,y| + |1,\bar{y}\rangle \langle 1,\bar{y}|)$$

Pour $x = 0$ et $y = 0$

$$\rho_{00} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.94}$$

Pour $x = 1$ et $y = 1$

$$\rho_{11} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.95}$$

Pour $x = 0$ et $y = 1$

$$\rho_{01} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.96}$$

Pour $x = 1$ et $y = 0$

$$\rho_{10} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.97}$$

Sa forme générale est la suivante

$$\rho_{xy} = 1/2\begin{pmatrix} \bar{y} & 0 & 0 & (-1)^x\bar{y} \\ 0 & y & (-1)^x y & 0 \\ 0 & (-1)^x y & y & 0 \\ (-1)^x\bar{y} & 0 & 0 & \bar{y} \end{pmatrix} \tag{3.98}$$

b) On écrit matricielle ment la matrice densité $\rho_\phi = |\phi\rangle\langle\phi|$

$$\begin{aligned} |\phi\rangle &= \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \\ \rho_\phi &= (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)(\alpha^*\langle 0| + \beta^*\langle 1|) \end{aligned}$$

$$\rho_\phi = (|\alpha|^2|0\rangle\langle 0| + \alpha\beta^*|0\rangle\langle 1| + \beta\alpha^*|1\rangle\langle 0| + |\beta|^2|1\rangle\langle 1|)$$

$\longrightarrow$

$$\rho_\phi = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \beta\alpha^* & |\beta|^2 \end{pmatrix} \tag{3.99}$$

c) L'état d'entrée total est donné par la matrice densité $\rho_{tot} = \rho_{\phi} \otimes \rho_{xy}$

Pour plus de clareté en écriture, on pose :($\bar{y}$=z) et on note les blocs de matrices suivants

$$\rho_{tot} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{3.100}$$

$$A = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 z & 0 & 0 & |\alpha|^2 (-1)^x z \\ 0 & |\alpha|^2 y & |\alpha|^2 (-1)^x y & 0 \\ 0 & |\alpha|^2 (-1)^x y & |\alpha|^2 y & 0 \\ |\alpha|^2 (-1)^x z & 0 & 0 & |\alpha|^2 z \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \alpha\beta^* z & 0 & 0 & \alpha\beta^*(-1)^x z \\ 0 & \alpha\beta^* y & \alpha\beta^*(-1)^x y & 0 \\ 0 & \alpha\beta^*(-1)^x y & \alpha\beta^* y & 0 \\ \alpha\beta^*(-1)^x z & 0 & 0 & \alpha\beta^* z \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \beta\alpha^* z & 0 & 0 & \beta\alpha^*(-1)^x z \\ 0 & \beta\alpha^* y & \beta\alpha^*(-1)^x y & 0 \\ 0 & \beta\alpha^*(-1)^x y & \beta\alpha^* y & 0 \\ \beta\alpha^*(-1)^x z & 0 & 0 & \beta\alpha^* z \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} |\beta|^2 z & 0 & 0 & |\beta|^2 (-1)^x z \\ 0 & |\beta|^2 y & |\beta|^2 (-1)^x y & 0 \\ 0 & |\beta|^2 (-1)^x y & |\beta|^2 y & 0 \\ |\beta|^2 (-1)^x z & 0 & 0 & |\beta|^2 z \end{pmatrix}$$

Aprés cela, calculons les matrices des opérations quantiques de Alice

$$U_1 = U_{cnot} \otimes I_2$$

$$U_2 = H \otimes I_4$$

L' écriture matricielle de U_1et U_2

$$U_{\text{cnot}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.101}$$

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.102}$$

$$U_2 = H \otimes I_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$

$$U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.103}$$

d) La matrice densité totale après opérations quantiques

$$\rho_{tot}^{1} = U_1 \rho_{tot} U_1^{\dagger} \tag{3.104}$$

et

$$\rho_{tot}^{2} = U_2 \rho_{tot}^{1} U_2^{\dagger} \tag{3.105}$$

1) Ou bien sous forme matricielle

$$\rho_{tot}^{1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.106}$$

$$\rho_{tot}^{1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} \tag{3.107}$$

Avec les blocs de matrices suivants

$$E=\begin{pmatrix} z\left|\alpha\right|^2 & 0 & 0 & (-1)^x z\left|\alpha\right|^2 \\ 0 & y\left|\alpha\right|^2 & (-1)^x y\left|\alpha\right|^2 & 0 \\ 0 & (-1)^x y\left|\alpha\right|^2 & y\left|\alpha\right|^2 & 0 \\ (-1)^x z\left|\alpha\right|^2 & 0 & 0 & z\left|\alpha\right|^2 \end{pmatrix}$$

$$F=\begin{pmatrix} 0 & (-1)^x z\alpha\beta^* & z\alpha\beta^* & 0 \\ (-1)^x y\alpha\beta^* & 0 & 0 & y\alpha\beta^* \\ y\alpha\beta^* & 0 & 0 & (-1)^x y\alpha\beta^* \\ 0 & z\alpha\beta^* & (-1)^x z\alpha\beta^* & 0 \end{pmatrix}$$

$$G=\begin{pmatrix} 0 & (-1)^x y\beta\alpha^* & y\beta\alpha^* & 0 \\ (-1)^x z\beta\alpha^* & 0 & 0 & z\beta\alpha^* \\ z\beta\alpha^* & 0 & 0 & (-1)^x z\beta\alpha^* \\ 0 & y\beta\alpha^* & (-1)^x y\beta\alpha^* & 0 \end{pmatrix}$$

$$H=\begin{pmatrix} y\left|\beta\right|^2 & 0 & 0 & (-1)^x y\left|\beta\right|^2 \\ 0 & z\left|\beta\right|^2 & (-1)^x z\left|\beta\right|^2 & 0 \\ 0 & (-1)^x z\left|\beta\right|^2 & z\left|\beta\right|^2 & 0 \\ (-1)^x y\left|\beta\right|^2 & 0 & 0 & y\left|\beta\right|^2 \end{pmatrix}$$

2) Et pour la deuxième opérations quantique on a

$$\rho_{tot}^2 = U_2\rho_{tot}^1 U_2^+ \tag{3.108}$$

$$\rho_{tot}^2 = 1/4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.109}$$

$$\rho_{ot^2}^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} K & L & M & W \\ X & V & N & S \end{pmatrix} \tag{3.110}$$

Avec les blocs de matrice suivants

$$K = \begin{pmatrix} z\left|\alpha\right|^2 + y\left|\beta\right|^2 & (-1)^x y\beta\alpha^* + (-1)^x z\alpha\beta^* \\ (-1)^x y\alpha\beta^* + (-1)^x z\beta\alpha^* & y\left|\alpha\right|^2 + z\left|\beta\right|^2 \\ y\alpha\beta^* + z\beta\alpha^* & (-1)^x y\left|\alpha\right|^2 + (-1)^x z\left|\beta\right|^2 \\ (-1)^x z\left|\alpha\right|^2 + (-1)^x y\left|\beta\right|^2 & y\beta\alpha^* + z\alpha\beta^* \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} y\beta\alpha^* + z\alpha\beta^* & (-1)^x z\left|\alpha\right|^2 + (-1)^x y\left|\beta\right|^2 \\ (-1)^x y\left|\alpha\right|^2 + (-1)^x z\left|\beta\right|^2 & y\alpha\beta^* + z\beta\alpha^* \\ y\left|\alpha\right|^2 + z\left|\beta\right|^2 & (-1)^x y\alpha\beta^* + (-1)^x z\beta\alpha^* \\ (-1)^x y\beta\alpha^* + (-1)^x z\alpha\beta^* & z\left|\alpha\right|^2 + y\left|\beta\right|^2 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} z\left|\alpha\right|^2 - y\left|\beta\right|^2 & (-1)^x y\beta\alpha^* - (-1)^x z\alpha\beta^* \\ (-1)^x z\beta\alpha^* - (-1)^x y\alpha\beta^* & y\left|\alpha\right|^2 - z\left|\beta\right|^2 \\ z\beta\alpha^* - y\alpha\beta^* & (-1)^x y\left|\alpha\right|^2 - (-1)^x z\left|\beta\right|^2 \\ (-1)^x z\left|\alpha\right|^2 - (-1)^x y\left|\beta\right|^2 & y\beta\alpha^* - z\alpha\beta^* \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} y\beta\alpha^* - z\alpha\beta^* & (-1)^x z\left|\alpha\right|^2 - (-1)^x y\left|\beta\right|^2 \\ (-1)^x y\left|\alpha\right|^2 - (-1)^x z\left|\beta\right|^2 & z\beta\alpha^* - y\alpha\beta^* \\ y\left|\alpha\right|^2 - z\left|\beta\right|^2 & (-1)^x z\beta\alpha^* - (-1)^x y\alpha\beta^* \\ (-1)^x y\beta\alpha^* - (-1)^x z\alpha\beta^* & z\left|\alpha\right|^2 - y\left|\beta\right|^2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} z\left|\alpha\right|^2 - y\left|\beta\right|^2 & (-1)^x z\alpha\beta^* - (-1)^x y\beta\alpha^* \\ (-1)^x y\alpha\beta^* - (-1)^x z\beta\alpha^* & y\left|\alpha\right|^2 - z\left|\beta\right|^2 \\ y\alpha\beta^* - z\beta\alpha^* & (-1)^x y\left|\alpha\right|^2 - (-1)^x z\left|\beta\right|^2 \\ (-1)^x z\left|\alpha\right|^2 - (-1)^x y\left|\beta\right|^2 & z\alpha\beta^* - y\beta\alpha^* \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} z\alpha\beta^* - y\beta\alpha^* & (-1)^x z\left|\alpha\right|^2 - (-1)^x y\left|\beta\right|^2 \\ (-1)^x y\left|\alpha\right|^2 - (-1)^x z\left|\beta\right|^2 & y\alpha\beta^* - z\beta\alpha^* \\ y\left|\alpha\right|^2 - z\left|\beta\right|^2 & (-1)^x y\alpha\beta^* - (-1)^x z\beta\alpha^* \\ (-1)^x z\alpha\beta^* - (-1)^x y\beta\alpha^* & z\left|\alpha\right|^2 - y\left|\beta\right|^2 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} z\left|\alpha\right|^2 + y\left|\beta\right|^2 & -(-1)^x y\beta\alpha^* - (-1)^x z\alpha\beta^* \\ -(-1)^x y\alpha\beta^* - (-1)^x z\beta\alpha^* & y\left|\alpha\right|^2 + z\left|\beta\right|^2 \\ -y\alpha\beta^* - z\beta\alpha^* & (-1)^x y\left|\alpha\right|^2 + (-1)^x z\left|\beta\right|^2 \\ (-1)^x z\left|\alpha\right|^2 + (-1)^x y\left|\beta\right|^2 & -y\beta\alpha^* - z\alpha\beta^* \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} -y\beta\alpha^* - z\alpha\beta^* & (-1)^x z\left|\alpha\right|^2 + (-1)^x y\left|\beta\right|^2 \\ (-1)^x y\left|\alpha\right|^2 + (-1)^x z\left|\beta\right|^2 & -y\alpha\beta^* - z\beta\alpha^* \\ y\left|\alpha\right|^2 + z\left|\beta\right|^2 & -(-1)^x y\alpha\beta^* - (-1)^x z\beta\alpha^* \\ -(-1)^x y\beta\alpha^* - (-1)^x z\alpha\beta^* & z\left|\alpha\right|^2 + y\left|\beta\right|^2 \end{pmatrix}$$

e) Pour le calcul des traces partielles (la trace prises sur les deux premiers qubits) on a les résultats suivants

$$\rho^{(0)} = tr_{(1.2)}(\rho_{tot}) \quad (3.111)$$

$$\rho^{(1)} = tr_{(1.2)}(\rho_{1tot}) \quad (3.112)$$

$$\rho^{(2)} = tr_{(1.2)}(\rho_{2tot}) \quad (3.113)$$

$$\begin{aligned}
\rho^{(0)} &= tr_{(1.2)}(\rho_{tot}) = \sum_{i,j=0}^{1}((\langle i,j| \otimes 1_2)\rho_{tot}(|i,j\rangle \otimes 1_2) \\
&= ((\langle 00| \otimes 1_2)\rho_{tot}(|00\rangle \otimes 1_2) + ((\langle 01| \otimes 1_2)\rho_{tot}(|01\rangle \otimes 1_2) + \\
&\quad ((\langle 10| \otimes 1_2)\rho_{tot}(|10\rangle \otimes 1_2) + ((\langle 11| \otimes 1_2)\rho_{tot}(|11\rangle \otimes 1_2) \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (|\alpha|^2+|\beta|^2)(z+y) & 0 \\ 0 & (|\alpha|^2+|\beta|^2)(z+y) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.114)
\end{aligned}$$

2) Pour le calcul de $\rho^{(1)} = tr_{(1.2)}(\rho_{1tot})$

$$\begin{aligned}
\rho^{(1)} &= tr_{(1.2)}(\rho_{1tot}) = \sum_{i,j=0}^{1}((\langle i,j| \otimes 1_2)\rho^{1}_{tot}(|i,j\rangle \otimes 1_2) \\
&= ((\langle 00| \otimes 1_2)\rho^{1}_{tot}(|00\rangle \otimes 1_2) + ((\langle 01| \otimes 1_2)\rho^{1}_{tot}(|01\rangle \otimes 1_2) + \\
&\quad ((\langle 10| \otimes 1_2)\rho^{1}_{tot}(|10\rangle \otimes 1_2) + ((\langle 11| \otimes 1_2)\rho^{1}_{tot}(|11\rangle \otimes 1_2) \quad (3.115) \\
&= 1/2\begin{pmatrix} (|\alpha|^2+|\beta|^2)(z+y) & 0 \\ 0 & (|\alpha|^2+|\beta|^2)(z+y) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

3) Pour le calcul de $\rho^{(2)} = tr_{(1.2)}(\rho_{2tot})$ de la mème manière le resultat est

$$\rho^{(2)} = tr_{(1.2)}(\rho_{2tot}) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2(|\alpha|^2+|\beta|^2)(z+y) & 0 \\ 0 & 2(|\alpha|^2+|\beta|^2)(z+y) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.116)$$

Revenons maintenant aux mesures que Alice introduit. Cet ensemble de mesures est défini par :

$M^{(ab)} = M^a \otimes M^b \otimes 1_2$ avec $M^a = |a\rangle\langle a|$,$(a = 0, 1)$ et $M^b = |b\rangle\langle b|$,$(b = 0, 1)$

$$\begin{aligned} M^{(ab)} &= (|ab\rangle\langle ab|)(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) \\ &= (|ab0\rangle\langle ab0| + |ab1\rangle\langle ab1|) \end{aligned} \tag{3.117}$$

Après ces mesures, l'état est projeté et on a

$$\rho_{2tot} \longrightarrow \rho_{(ab)mes} = \frac{M^{(ab)}\rho_{2_{tot}}(M^{(ab)})^\dagger}{tr\,(M^{(ab)}\rho_{2_{tot}}(M^{(ab)})^\dagger)} \tag{3.118}$$

1) Pour les valeurs de mesure $(a = 0$ et $b = 0)$

$$\rho_{(00)mes} = \frac{M^{(00)}\rho_{2_{tot}}(M^{(00)})^\dagger}{tr\,(M^{(00)}\rho_{2_{tot}}(M^{(00)})^\dagger)} \tag{3.119}$$

$$M^{(00)}\rho_{2_{tot}}(M^{(00)})^\dagger = (|000\rangle\langle 000| + |001\rangle\langle 001|)\rho_{2_{tot}}(|000\rangle\langle 000| + |001\rangle\langle 001|)$$

$$= \frac{1}{4}|00\rangle\langle 00| \otimes \begin{pmatrix} |\alpha|^2 z + |\beta|^2 y & (-1)^x y\beta\alpha^* + (-1)^x z\alpha\beta^* \\ (-1)^x z\beta\alpha^* + (-1)^x y\alpha\beta^* & |\alpha|^2 y + |\beta|^2 z \end{pmatrix} \tag{3.120}$$

$$tr\left(M^{(00)}\rho_{2_{tot}}(M^{(00)})^\dagger\right) = \frac{1}{4} \tag{3.121}$$

$\longrightarrow$

$$\rho_{(00)mes} = |00\rangle\langle 00| \otimes \begin{pmatrix} |\alpha|^2 z + |\beta|^2 y & (-1)^x y\beta\alpha^* + (-1)^x z\alpha\beta^* \\ (-1)^x z\beta\alpha^* + (-1)^x y\alpha\beta^* & |\alpha|^2 y + |\beta|^2 z \end{pmatrix} \tag{3.122}$$

1) Pour les valeurs de mesure ($a = 0$ et $b = 1$)

$$\rho_{(01)mes} = \frac{M^{(01)}\rho_{2_{tot}}(M^{(01)})^{\dagger}}{tr\,(M^{(01)}\rho_{2_{tot}}(M^{(01)})^{\dagger})} \tag{3.123}$$

$$M^{(01)}\rho_{2_{tot}}(M^{(01)})\dagger = (|010\rangle\langle 010| + |011\rangle\langle 011|)\rho_{2_{tot}}(|010\rangle\langle 010| + |011\rangle\langle 011|)$$

$$= \frac{1}{4}\,|01\rangle\langle 01| \otimes \begin{pmatrix} |\alpha|^2 y + |\beta|^2 z & (-1)^x z\beta\alpha^* + (-1)^x y\alpha\beta^* \\ (-1)^x y\beta\alpha^* + (-1)^x z\alpha\beta^* & |\alpha|^2 z + |\beta|^2 y \end{pmatrix} \tag{3.124}$$

$$tr\left(M^{(01)}\rho_{2_{tot}}(M^{(01)})^{\dagger}\right) = \frac{1}{4} \tag{3.125}$$

$\rightarrow$

$$\rho_{(01)mes} = |01\rangle\langle 01| \otimes \begin{pmatrix} |\alpha|^2 y + |\beta|^2 z & (-1)^x z\beta\alpha^* + (-1)^x y\alpha\beta^* \\ (-1)^x y\beta\alpha^* + (-1)^x z\alpha\beta^* & |\alpha|^2 z + |\beta|^2 y \end{pmatrix} \tag{3.126}$$

Et en suivant la même méthode on a

3) Pour les valeurs de mesure ($a = 1$ et $b = 0$)

$$\rho_{(10)mes} = |10\rangle\langle 10| \otimes \begin{pmatrix} |\alpha|^2 z + |\beta|^2 y & -(-1)^x y\beta\alpha^* - (-1)^x z\alpha\beta^* \\ -(-1)^x z\beta\alpha^* - (-1)^x y\alpha\beta^* & |\alpha|^2 y + |\beta|^2 z \end{pmatrix} \tag{3.127}$$

4) Pour les valeurs de mesure ($a = 1$ et $b = 1$)

$$\rho_{(11)mes} = |11\rangle\langle 11| \otimes \begin{pmatrix} |\alpha|^2 y + |\beta|^2 z & -(-1)^x z\beta\alpha^* - (-1)^x y\alpha\beta^* \\ -(-1)^x y\beta\alpha^* - (-1)^x z\alpha\beta^* & |\alpha|^2 z + |\beta|^2 y \end{pmatrix} \tag{3.128}$$

En resumé, pour chaque valeur de mesure (a, b),et chaque etat de Bell (x, y) on trouve l'opération quantique (de correction de Bob) $U^{(a,b)}$telle que :

$$U^{(a,b)}\rho_{(ab)_{mes}}U^{(a,b)\dagger} = |ab\rangle\langle ab| \otimes \rho_\phi \tag{3.129}$$

Concernant le cas ($a = 0$ et $b = 0$) et ($x = 0$ et $y = 0$)

$$\rho_{\substack{(00)\\(00)}mes} = |00\rangle\langle 00| \otimes \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \beta\alpha^* & |\beta|^2 \end{pmatrix} \tag{3.130}$$

$\rightarrow$

$$U^{(00)}_{(00)} = 1_4 \otimes 1_2 = 1_4 \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.131}$$

Concernant le cas ($a = 0$ et $b = 0$) et ($x = 0$ et $y = 1$)

$$\rho_{\substack{(00)\\(01)}mes} = |00\rangle\langle 00| \otimes \begin{pmatrix} |\beta|^2 & \beta\alpha^* \\ \alpha\beta^* & |\alpha|^2 \end{pmatrix} \tag{3.132}$$

$$U^{(00)}_{(01)} = 1_4 \otimes X = 1_4 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.133}$$

Concernant le cas ($a = 0$ et $b = 0$) et ($x = 1$ et $y = 0$)

$$\rho_{\substack{(00)\\(10)}mes} = |00\rangle\langle 00| \otimes \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & -\alpha\beta^* \\ -\beta\alpha^* & |\beta|^2 \end{pmatrix} \tag{3.134}$$

$$U^{(00)}_{(10)} = 1_4 \otimes Z = 1_4 \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.135}$$

Concernant le cas ($a = 0$ et $b = 0$) et ($x = 1$ et $y = 1$)

$$\rho_{\substack{(00)\\(11)}mes} = |00\rangle\langle 00| \otimes \begin{pmatrix} |\beta|^2 & -\beta\alpha^* \\ -\alpha\beta^* & |\alpha|^2 \end{pmatrix} \tag{3.136}$$

$$U^{(00)}_{(11)} = 1_4 \otimes Y \tag{3.137}$$

Concernant le cas ($a = 0$ et $b = 1$) et ($x = 0$ et $y = 0$)

$$\rho_{\substack{(01)\\(00)}mes} = |01\rangle\langle 01| \otimes \begin{pmatrix} |\beta|^2 & \beta\alpha^* \\ \alpha\beta^* & |\alpha|^2 \end{pmatrix} \tag{3.138}$$

$$U_{(00)}^{(01)} = 1_4 \otimes X \tag{3.139}$$

Concernant le cas ($a = 0$ et $b = 1$) et ($x = 0$ et $y = 1$)

$$\rho_{\substack{(01)\\(01)}mes} = |01\rangle\langle 01| \otimes \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \beta\alpha^* & |\beta|^2 \end{pmatrix} \tag{3.140}$$

$$U_{(01)}^{(01)} = 1_4 \otimes 1_2 \tag{3.141}$$

Concernant le cas ($a = 0$ et $b = 1$) et ($x = 1$ et $y = 0$)

$$\rho_{\substack{(01)\\(10)}mes} = |01\rangle\langle 01| \otimes \begin{pmatrix} |\beta|^2 & -\beta\alpha^* \\ -\alpha\beta^* & |\alpha|^2 \end{pmatrix} \tag{3.142}$$

$$U_{(10)}^{(01)} = 1_4 \otimes Y \tag{3.143}$$

Concernant le cas ($a = 0$ et $b = 1$) et ($x = 1$ et $y = 1$)

$$\rho_{\substack{(01)\\(11)}mes} = |01\rangle\langle 01| \otimes \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & -\alpha\beta^* \\ -\beta\alpha^* & |\beta|^2 \end{pmatrix} \tag{3.144}$$

$$U_{(11)}^{(01)} = 1_4 \otimes Z \tag{3.145}$$

Concernant le cas ($a = 1$ et $b = 0$) et ($x = 0$ et $y = 0$)

$$\rho_{\substack{(10)\\(00)}mes} = |10\rangle\langle 10| \otimes \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & -\alpha\beta^* \\ -\beta\alpha^* & |\beta|^2 \end{pmatrix} \tag{3.146}$$

$$U^{(10)}_{(00)} = 1_4 \otimes Z \tag{3.147}$$

Concernant le cas ($a = 1$ et $b = 0$) et ($x = 0$ et $y = 1$)

$$\rho_{\substack{(10)\\(01)}mes} = |10\rangle\langle 10| \otimes \begin{pmatrix} |\beta|^2 & -\beta\alpha^* \\ -\alpha\beta^* & |\alpha|^2 \end{pmatrix} \tag{3.148}$$

$$U^{(10)}_{(01)} = 1_4 \otimes Y \tag{3.149}$$

Concernant le cas ($a = 1$ et $b = 0$) et ($x = 1$ et $y = 0$)

$$\rho_{\substack{(10)\\(10)}mes} = |10\rangle\langle 10| \otimes \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \beta\alpha^* & |\beta|^2 \end{pmatrix} \tag{3.150}$$

$$U^{(10)}_{(10)} = 1_4 \otimes 1_2 \tag{3.151}$$

Concernant le cas ($a = 1$ et $b = 0$) et ($x = 1$ et $y = 1$)

$$\rho_{\substack{(10)\\(11)}mes} = |10\rangle\langle 10| \otimes \begin{pmatrix} |\beta|^2 & \beta\alpha^* \\ \alpha\beta^* & |\alpha|^2 \end{pmatrix} \tag{3.152}$$

$$U^{(10)}_{(11)} = 1_4 \otimes X \tag{3.153}$$

Concernant le cas ($a = 1$ et $b = 1$) et ($x = 0$ et $y = 0$)

$$\rho_{\substack{(11)\\(00)}mes} = |11\rangle\langle 11| \otimes \begin{pmatrix} |\beta|\,v^2 & -\beta\alpha^* \\ -\alpha\beta^* & |\alpha|^2 \end{pmatrix} \tag{3.154}$$

$$U^{(11)}_{(00)} = 1_4 \otimes Y \tag{3.155}$$

Concernant le cas ($a = 1$ et $b = 1$) et ($x = 0$ et $y = 1$)

$$\rho_{\substack{(11)\\(01)}mes} = |11\rangle \langle 11| \otimes \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & -\alpha\beta^* \\ -\beta\alpha^* & |\beta|^2 \end{pmatrix} \tag{3.156}$$

$$U^{(11)}_{(01)} = 1_4 \otimes Z \tag{3.157}$$

Concernant le cas ($a = 1$ et $b = 1$) et ($x = 1$ et $y = 0$)

$$\rho_{\substack{(11)\\(10)}mes} = |11\rangle \langle 11| \otimes \begin{pmatrix} |\beta|^2 & \beta\alpha^* \\ \alpha\beta^* & |\alpha|^2 \end{pmatrix} \tag{3.158}$$

$$U^{(11)}_{(10)} = 1_4 \otimes X \tag{3.159}$$

Concernant le cas ($a = 1$ et $b = 1$) et ($x = 1$ et $y = 1$)

$$\rho_{\substack{(11)\\(11)}mes} = |11\rangle \langle 11| \otimes \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \beta\alpha^* & |\beta|^2 \end{pmatrix} \tag{3.160}$$

$$U^{(11)}_{(11)} = 1_4 \otimes 1_2 \tag{3.161}$$

Remarquons que les différentes méthodes donnent les mêmes résultats qui prouvent que les erreurs de calculs sont absentes et en plus tous ces calculs vont être vérifiés via l'implémentation informatique.

Chapitre 4

La téléportation de deux qubits

On passe maintenant au cas de téléportation de deux qubits séparés. Le protocole sera changé comme on va le voir et le canal quantique (états intriqué) contient 4-qubits en intrication, c à d, chaque 2-qubits permettront le transfert d'information des deux qubits à téléportés. Ici encore, on utilisera deux méthodes de calculs

1) La méthode des kets

2) La méthode de la matrice densité

4.1 Calcul par le formalisme des kets

Alice et Bob se partage le canal quantique (état intriqué) suivant

$$|\varphi\rangle_{1234} = \frac{1}{2}(|0000\rangle + |0011\rangle + |1100\rangle - |1111\rangle)_{1234} \tag{4.1}$$

Avec les qubits 2 et 3 sont ceux de Alice et 1 et 4 ceux de Bob.

L'état à téléporter est le produit tensoriel $|\phi_a\rangle$ et $|\phi_b\rangle$ et on a

$$\begin{aligned} |\phi_a\rangle &= \alpha_a |0\rangle_a + \beta_a |0\rangle_a & (4.2) \\ |\phi_b\rangle &= \alpha_b |0\rangle_b + \beta_b |0\rangle_b & (4.3) \end{aligned}$$

Avec

$$|\alpha_a|^2 + |\beta_a|^2 = 1 \tag{4.4}$$

$$|\alpha_b|^2 + |\beta_b|^2 = 1 \tag{4.5}$$

$$|\phi_{ab}\rangle = |\phi_a\rangle \otimes |\phi_b\rangle = (\alpha_a\alpha_b\,|00\rangle + \alpha_a\beta_b\,|01\rangle + \beta_a\alpha_b\,|10\rangle + \beta_a\beta_b\,|11\rangle)_{ab} \tag{4.6}$$

L'état d'entrée est

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{ab1234} &= |\phi_{ab}\rangle \otimes |\varphi\rangle_{1234} \\ &= \frac{1}{2}[\alpha_a\alpha_b(|000000\rangle + |000011\rangle + |001100\rangle - |001111\rangle) \\ &\quad +\alpha_a\beta_b(|010000\rangle + |010011\rangle + |011100\rangle - |011111\rangle) \\ &\quad +\beta_a\alpha_b(|100000\rangle + |100011\rangle + |101100\rangle - |101111\rangle) \\ &\quad +\beta_a\beta_b(|110000\rangle + |110011\rangle + |111100\rangle - |111111\rangle)]_{ab1234} \end{aligned} \tag{4.7}$$

Avec les qubits 2,3,a,b sont de Alice et 1 et 4 ceux de Bob.

Comme on le sait, on peut mesurer en projetant sur les états de Bell, et on a les mesures possibles suivantes

$$|\psi^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle) \tag{4.8}$$

$$\langle\psi^{\pm}| = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 01| \pm \langle 10|) \tag{4.9}$$

Et

$$|\phi^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle) \tag{4.10}$$

$$\langle\phi^{\pm}| = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 00| \pm \langle 11|) \tag{4.11}$$

Pour chacune des mesures calculons la projection

(1)-

$$
\begin{aligned}
{}_{b3}\langle\phi^{\pm}|_{a2}\langle\phi^{+}|\,|\psi\rangle_{ab1234} &= \frac{1}{2}((\langle 00| \pm \langle 11|) \otimes ((\langle 00| + \langle 11|) \otimes |\psi\rangle_{ab1234} \\
&= \frac{1}{4}(\alpha_a\alpha_b|00\rangle \pm \alpha_a\beta_b|01\rangle + \beta_a\alpha_b|10\rangle \mp \beta_a\beta_b|11\rangle)_{14} \qquad (4.12)
\end{aligned}
$$

(2)-

$$
\begin{aligned}
{}_{b3}\langle\phi^{\pm}|_{a2}\langle\phi^{-}|\,|\psi\rangle_{ab1234} &= \frac{1}{2}((\langle 00| \pm \langle 11|) \otimes ((\langle 00| - \langle 11|) \otimes |\psi\rangle_{ab1234} \\
&= \frac{1}{4}(\alpha_a\alpha_b|00\rangle \pm \alpha_a\beta_b|01\rangle - \beta_a\alpha_b|10\rangle \pm \beta_a\beta_b|11\rangle)_{14} \qquad (4.13)
\end{aligned}
$$

(3)-

$$
\begin{aligned}
{}_{b3}\langle\psi^{\pm}|_{a2}\langle\phi^{+}|\,|\psi\rangle_{ab1234} &= \frac{1}{2}((\langle 01| \pm \langle 10|) \otimes ((\langle 00| + \langle 11|) \otimes |\psi\rangle_{ab1234} \\
&= \frac{1}{4}(\alpha_a\alpha_b|01\rangle \pm \alpha_a\beta_b|00\rangle - \beta_a\alpha_b|11\rangle \pm \beta_a\beta_b|10\rangle)_{14} \qquad (4.14)
\end{aligned}
$$

(4)-

$$
\begin{aligned}
{}_{b3}\langle\psi^{\pm}|_{a2}\langle\phi^{-}|\,|\psi\rangle_{ab1234} &= \frac{1}{2}((\langle 01| \pm \langle 10|) \otimes ((\langle 00| - \langle 11|) \otimes |\psi\rangle_{ab1234} \\
&= \frac{1}{4}(\alpha_a\alpha_b|01\rangle \pm \alpha_a\beta_b|00\rangle + \beta_a\alpha_b|11\rangle \mp \beta_a\beta_b|10\rangle)_{14} \qquad (4.15)
\end{aligned}
$$

(5)-

$$
\begin{aligned}
{}_{b3}\langle\phi^{\pm}|_{a2}\langle\psi^{+}|\,|\psi\rangle_{ab1234} &= \frac{1}{2}((\langle 00| \pm \langle 11|) \otimes ((\langle 01| + \langle 10|) \otimes |\psi\rangle_{ab1234} \\
&= \frac{1}{4}(\alpha_a\alpha_b|10\rangle \mp \alpha_a\beta_b|11\rangle + \beta_a\alpha_b|00\rangle \pm \beta_a\beta_b|01\rangle)_{14} \qquad (4.16)
\end{aligned}
$$

(6)-

$$\begin{aligned} {}_{b3}\left\langle \phi^{\pm}\right|_{a2}\left\langle \psi^{-}\right|\left|\psi\right\rangle_{ab1234} &= \frac{1}{2}((\langle 00| \pm \langle 11|) \otimes ((\langle 01| - \langle 10|) \otimes |\psi\rangle_{ab1234} \\ &= \frac{1}{4}(\alpha_a\alpha_b|10\rangle \mp \alpha_a\beta_b|11\rangle - \beta_a\alpha_b|00\rangle \mp \beta_a\beta_b|01\rangle)_{14} \end{aligned} \quad (4.17)$$

(7)-

$$\begin{aligned} {}_{b3}\left\langle \psi^{\pm}\right|_{a2}\left\langle \psi^{+}\right|\left|\psi\right\rangle_{ab1234} &= \frac{1}{2}((\langle 01| \pm \langle 10|) \otimes ((\langle 01| + \langle 10|) \otimes |\psi\rangle_{ab1234} \\ &= \frac{1}{4}(-\alpha_a\alpha_b|11\rangle \pm \alpha_a\beta_b|10\rangle + \beta_a\alpha_b|01\rangle \pm \beta_a\beta_b|00\rangle)_{14} \end{aligned} \quad (4.18)$$

(8)-

$$\begin{aligned} {}_{b3}\left\langle \psi^{\pm}\right|_{a2}\left\langle \psi^{-}\right|\left|\psi\right\rangle_{ab1234} &= \frac{1}{2}((\langle 01| \pm \langle 10|) \otimes ((\langle 01| - \langle 10|) \otimes |\psi\rangle_{ab1234} \\ &= \frac{1}{4}(-\alpha_a\alpha_b|11\rangle \pm \alpha_a\beta_b|10\rangle - \beta_a\alpha_b|01\rangle \mp \beta_a\beta_b|00\rangle)_{14} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Puis, nous appliquons un opérateur "contrôle phase" qu'par son action sur un double qubits

$$\begin{aligned} U_{cf}|00\rangle &= |00\rangle \\ U_{cf}|01\rangle &= |01\rangle \\ U_{cf}|10\rangle &= |10\rangle \\ U_{cf}|11\rangle &= -|11\rangle \end{aligned} \quad (4.20)$$

→L'action de ce contrôle phase sur chacune des expressions (1,2,3,4,5,6,7,8) est donnée par

$$
\begin{aligned}
U_{cf}(1) &= \frac{1}{4}(\alpha_a\alpha_b\,|00\rangle \pm \alpha_a\beta_b\,|01\rangle + \beta_a\alpha_b\,|10\rangle \pm \beta_a\beta_b\,|11\rangle)_{14} \\
U_{cf}(2) &= \frac{1}{4}(\alpha_a\alpha_b\,|00\rangle \pm \alpha_a\beta_b\,|01\rangle + \beta_a\alpha_b\,|10\rangle \mp \beta_a\beta_b\,|11\rangle)_{14} \\
U_{cf}(3) &= \frac{1}{4}(\alpha_a\alpha_b\,|01\rangle \pm \alpha_a\beta_b\,|00\rangle + \beta_a\alpha_b\,|11\rangle \pm \beta_a\beta_b\,|10\rangle)_{14} \\
U_{cf}(4) &= \frac{1}{4}(\alpha_a\alpha_b\,|01\rangle \pm \alpha_a\beta_b\,|00\rangle - \beta_a\alpha_b\,|11\rangle \mp \beta_a\beta_b\,|10\rangle)_{14} \\
U_{cf}(5) &= \frac{1}{4}(\alpha_a\alpha_b\,|10\rangle \pm \alpha_a\beta_b\,|11\rangle + \beta_a\alpha_b\,|00\rangle \pm \beta_a\beta_b\,|01\rangle)_{14} \\
U_{cf}(6) &= \frac{1}{4}(\alpha_a\alpha_b\,|10\rangle \pm \alpha_a\beta_b\,|11\rangle - \beta_a\alpha_b\,|00\rangle \mp \beta_a\beta_b\,|01\rangle)_{14} \\
U_{cf}(7) &= \frac{1}{4}(\alpha_a\alpha_b\,|11\rangle \pm \alpha_a\beta_b\,|10\rangle + \beta_a\alpha_b\,|01\rangle \pm \beta_a\beta_b\,|00\rangle)_{14} \\
U_{cf}(8) &= \frac{1}{4}(\alpha_a\alpha_b\,|11\rangle \pm \alpha_a\beta_b\,|10\rangle - \beta_a\alpha_b\,|01\rangle \mp \beta_a\beta_b\,|00\rangle)_{14} \qquad (4.21)
\end{aligned}
$$

Et pour chaque valeur $+, -$ des états de mesures de Bell nous séparons les qubits de Bob sous la forme d'un produit tensoriel $|(1)\rangle \otimes |(4)\rangle$ comme suit

$$
\begin{aligned}
U_{cf}(1)^{+} &= \frac{1}{4}(\alpha_a|0\rangle + \beta_a|1\rangle)_1 \otimes (\alpha_b|0\rangle + \beta_b|1\rangle)_4 \\
U_{cf}(1)^{-} &= \frac{1}{4}(\alpha_a|0\rangle + \beta_a|1\rangle)_1 \otimes (\alpha_b|0\rangle - \beta_b|1\rangle)_4 \\
U_{cf}(2)^{+} &= \frac{1}{4}(\alpha_a|0\rangle - \beta_a|1\rangle)_1 \otimes (\alpha_b|0\rangle + \beta_b|1\rangle)_4 \\
U_{cf}(2)^{-} &= \frac{1}{4}(\alpha_a|0\rangle - \beta_a|1\rangle)_1 \otimes (\alpha_b|0\rangle - \beta_b|1\rangle)_4 \\
U_{cf}(3)^{+} &= \frac{1}{4}(\alpha_a|0\rangle + \beta_a|1\rangle)_1 \otimes (\alpha_b|1\rangle + \beta_b|0\rangle)_4 \\
U_{cf}(3)^{-} &= \frac{1}{4}(\alpha_a|0\rangle + \beta_a|1\rangle)_1 \otimes (\alpha_b|1\rangle - \beta_b|0\rangle)_4 \\
U_{cf}(4)^{+} &= \frac{1}{4}(\alpha_a|0\rangle - \beta_a|1\rangle)_1 \otimes (\alpha_b|1\rangle + \beta_b|0\rangle)_4 \\
U_{cf}(4)^{-} &= \frac{1}{4}(\alpha_a|0\rangle - \beta_a|1\rangle)_1 \otimes (\alpha_b|1\rangle + \beta_b|0\rangle)_4 \\
U_{cf}(5)^{+} &= \frac{1}{4}(\alpha_a|1\rangle + \beta_a|0\rangle)_1 \otimes (\alpha_b|0\rangle + \beta_b|1\rangle)_4 \\
U_{cf}(5)^{-} &= \frac{1}{4}(\alpha_a|1\rangle + \beta_a|0\rangle)_1 \otimes (\alpha_b|0\rangle - \beta_b|1\rangle)_4 \\
U_{cf}(6)^{+} &= \frac{1}{4}(\alpha_a|1\rangle - \beta_a|0\rangle)_1 \otimes (\alpha_b|0\rangle + \beta_b|1\rangle)_4 \\
U_{cf}(6)^{-} &= \frac{1}{4}(\alpha_a|1\rangle - \beta_a|0\rangle)_1 \otimes (\alpha_b|0\rangle - \beta_b|1\rangle)_4 \\
U_{cf}(7)^{+} &= \frac{1}{4}(\alpha_a|1\rangle + \beta_a|0\rangle)_1 \otimes (\alpha_b|1\rangle + \beta_b|0\rangle)_4 \\
U_{cf}(7)^{-} &= \frac{1}{4}(\alpha_a|1\rangle + \beta_a|0\rangle)_1 \otimes (\alpha_b|1\rangle - \beta_b|0\rangle)_4 \\
U_{cf}(8)^{+} &= \frac{1}{4}(\alpha_a|1\rangle - \beta_a|0\rangle)_1 \otimes (\alpha_b|1\rangle + \beta_b|0\rangle)_4 \\
U_{cf}(8)^{-} &= \frac{1}{4}(\alpha_a|1\rangle - \beta_a|0\rangle)_1 \otimes (\alpha_b|1\rangle - \beta_b|0\rangle)_4
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

Un calcul direct montre que les opérations quantiques que Bob doit appliquer pour corriger et obtenir l'état $|\varphi_{ab}\rangle$ sont les suivantes, pour respectivement le signe $+, -$ de la mesure de Alice

Pour l'expression (1)$\rightarrow$

$$(+)\ 1_2 \otimes 1_2 \tag{4.23}$$

$$(-)\ 1_2 \otimes Z \tag{4.24}$$

Pour l'expression (2)$\rightarrow$

$$(+)\ Z \otimes 1_2 \tag{4.25}$$

$$(-)\ Z \otimes Z \tag{4.26}$$

Pour l'expression (3)$\rightarrow$

$$(+)\ 1_2 \otimes X \tag{4.27}$$

$$(-)\ 1_2 \otimes Z \tag{4.28}$$

Pour l'expression (4)$\rightarrow$

$$(+)\ Z \otimes X \tag{4.29}$$

$$(-)\ Z \otimes Y \tag{4.30}$$

Pour l'expression (5)$\rightarrow$

$$(+)\ X \otimes 1_2 \tag{4.31}$$

$$(-)\ X \otimes Z \tag{4.32}$$

Pour l'expression (6)$\rightarrow$

$$(+)\ Y \otimes 1_2 \tag{4.33}$$

$$(-)\ Y \otimes Z \tag{4.34}$$

Pour l'expression (7)→

$$(+)\; X \otimes X \tag{4.35}$$

$$(-)\; X \otimes Y \tag{4.36}$$

Pour l'expression (8)→

$$(+)\; Y \otimes X \tag{4.37}$$

$$(-)\; Y \otimes Y \tag{4.38}$$

4.2 Calcul par le formalisme de la matrice densité

Nous allons refaire maintenant le même calcul en utilisant le formalisme de la matrice densité. On a l'état à téléporté

$$\begin{aligned} |\phi_a\rangle &= \alpha_a |0\rangle_a + \beta_a |0\rangle_a \\ |\phi_b\rangle &= \alpha_b |0\rangle_b + \beta_b |0\rangle_b \end{aligned}$$

Dont la matrice densité est

$$\rho_\varphi = |\phi_{ab}\rangle \langle\phi_{ab}| \tag{4.39}$$

Ce que veut dire qu'on a

$$|\phi_{ab}\rangle = |\phi_a\rangle \otimes |\phi_b\rangle = (\alpha_a\alpha_b |00\rangle + \alpha_a\beta_b |01\rangle + \beta_a\alpha_b |10\rangle + \beta_a\beta_b |11\rangle)_{ab} \tag{4.40}$$

$$\langle\phi_{ab}| = \langle\phi_a| \otimes \langle\phi_b| = (\alpha_a^*\alpha_b^* \langle 00| + \alpha_a^*\beta_b^* \langle 01| + \beta_a^*\alpha_b^* \langle 10| + \beta_a^*\beta_b^* \langle 11|)_{ab} \tag{4.41}$$

$$
\begin{aligned}
\rho_{\varphi} \quad = \quad & [|\alpha_a\alpha_b|^2 |00\rangle\langle 00| + |\alpha_a|^2 \alpha_b\beta_b^* |00\rangle\langle 01| + \alpha_a\alpha_b\beta_a^*\alpha_b^* |00\rangle\langle 10| + \alpha_a\alpha_b\beta_a^*\beta_b^* |00\rangle\langle 11| + \\
& |\alpha_a|^2 \beta_b\alpha_b^* |01\rangle\langle 00| + |\alpha_a\beta_b|^2 |01\rangle\langle 01| + \alpha_a\beta_b\beta_a^*\alpha_b^* |01\rangle\langle 10| + \alpha_a |\beta_b|^2 \beta_a^* |01\rangle\langle 11| + \\
& \beta_a |\alpha_b|^2 \alpha_a^* |10\rangle\langle 00| + \beta_a\alpha_b\alpha_a^*\beta_b^* |10\rangle\langle 01| + |\beta_a\alpha_b|^2 |10\rangle\langle 10| + |\beta_a|^2 \alpha_b\beta_b^* |10\rangle\langle 11| + \\
& \beta_a\beta_b\alpha_a^*\alpha_b^* |11\rangle\langle 00| + \beta_a |\beta_b|^2 \alpha_a^* |11\rangle\langle 01| + |\beta_a|^2 \beta_b\alpha_b^* |11\rangle\langle 10| + |\beta_a\beta_b|^2 |11\rangle\langle 11|] \qquad (4.42)
\end{aligned}
$$

La matrice densité du canal quantique d'intrication de Alice-Bob est

$$\rho_{\varphi} = |\varphi\rangle_{1234} \langle\varphi|_{1234} \tag{4.43}$$

Avec

$$|\varphi\rangle_{1234} = \frac{1}{2}(|0000\rangle + |0011\rangle + |1100\rangle - |1111\rangle)_{1234} \tag{4.44}$$

$$\langle\varphi|_{1234} = \frac{1}{2}(\langle 0000| + \langle 0011| + \langle 1100| - \langle 1111|)_{1234} \tag{4.45}$$

Donc

$$
\begin{aligned}
\rho_{\varphi} \quad = \quad & \frac{1}{4}(|0000\rangle\langle 0000| + |0000\rangle\langle 0011| + |0000\rangle\langle 1100| - |0000\rangle\langle 1111| + \\
& |0011\rangle\langle 0000| + |0011\rangle\langle 0011| + |0011\rangle\langle 1100| - |0011\rangle\langle 1111| + \\
& |1100\rangle\langle 0000| + |1100\rangle\langle 0011| + |1100\rangle\langle 1100| - |1100\rangle\langle 1111| + \\
& |1111\rangle\langle 0000| - |1111\rangle\langle 0011| - |1111\rangle\langle 1100| + |1111\rangle\langle 1111|) \qquad (4.46)
\end{aligned}
$$

La matrice de densité totale d'entrée est

$$\rho_{tot} = \rho_{\phi} \otimes \rho_{\varphi} \tag{4.47}$$

Puis Alice applique les mesures possibles sur $(\overleftrightarrow{b,3},\overleftrightarrow{a,2})$ où la double flêche veut dire que la mesure s'effectue sur la paire au même temps en utilisant la base de Bell

$$|\psi^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle) \tag{4.48}$$

$$\langle\psi^{\pm}| = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 01| \pm \langle 10|) \tag{4.49}$$

Et

$$|\phi^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle) \tag{4.50}$$

$$\langle\phi^{\pm}| = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 00| \pm \langle 11|) \tag{4.51}$$

Ainsi l'ensemble de mesure est définit comme suit

$M^{(ab1234)} = M^{(a2)}\widetilde{\otimes}M^{(b3)}\widetilde{\otimes}1_4^{(14)}$ avec les opérateurs de mesure suivants $M^{(a2)} = M^{(b3)} = |\psi^{\pm}\rangle\langle\psi^{\pm}|$ et $|\phi^{\pm}\rangle\langle\phi^{\pm}|$ et où le symbole $\widetilde{\otimes}$ indique qu'il faudrait respecter l'ordre $(ab1234)$ quand on applique le postulat de mesure habituel dans le formalisme de la matrice densité

$$|\psi\rangle_{ab1234}\langle\psi|_{ab1234} \rightarrow (|\psi\rangle_{ab1234}\langle\psi|_{ab1234})_{mes} = \frac{M^{(ab1234)}|\psi\rangle_{ab1234}\langle\psi|_{ab1234}(M^{(ab1234)})^{\dagger}}{tr\,(M^{(ab1234)}|\psi\rangle_{ab1234}\langle\psi|_{ab1234}(M^{(ab1234)})^{\dagger})}$$

Les différent résultats de projection sont en fonction de l'ensemble de mesure $M^{(ab1234)}$.On a les résultats suivants

(1)-

$$\begin{aligned}
&|\phi^{-}\rangle_{a2}|\phi^{\pm}\rangle_{b3b3}\langle\phi^{\pm}|_{a2}\langle\phi^{+}|\,|\psi\rangle_{ab1234}\langle\psi|_{ab1234}|\phi^{-}\rangle_{a2}|\phi^{\pm}\rangle_{b3b3}\langle\phi^{\pm}|_{a2}\langle\phi^{+}| \\
= \; &\frac{1}{4}((\langle 00| \pm \langle 11|) \otimes ((\langle 00| + \langle 11|) \otimes |\psi\rangle_{ab1234}\langle\psi|_{ab1234} \\
&\otimes(|00\rangle + |11\rangle) \otimes (|00\rangle \pm |11\rangle)) \\
= \; &\frac{1}{16}(\alpha_a\alpha_b|00\rangle \pm \alpha_a\beta_b|01\rangle + \beta_a\alpha_b|10\rangle \mp \beta_a\beta_b|11\rangle)_{14} \\
&(\alpha_a^*\alpha_b^*\langle 00| \pm \alpha_a^*\beta_b^*\langle 01| + \beta_a^*\alpha_b^*\langle 10| \mp \beta_a^*\beta_b^*\langle 11|)_{14}
\end{aligned} \tag{4.52}$$

(2)-

$$
\begin{aligned}
& |\phi^-\rangle_{a2} |\phi^\pm\rangle_{b3b3} \langle\phi^\pm|_{a2} \langle\phi^-| \, |\psi\rangle_{ab1234} \langle\psi|_{ab1234} |\phi^-\rangle_{a2} |\phi^\pm\rangle_{b3b3} \langle\phi^\pm|_{a2} \langle\phi^-| \\
= \; & \frac{1}{4}((\langle 00| \pm \langle 11|) \otimes ((\langle 00| - \langle 11|) \otimes |\psi\rangle_{ab1234} \langle\psi|_{ab1234} \\
& \otimes(|00\rangle - |11\rangle) \otimes (|00\rangle \pm |11\rangle) \\
= \; & \frac{1}{16}(\alpha_a\alpha_b |00\rangle \pm \alpha_a\beta_b |01\rangle - \beta_a\alpha_b |10\rangle \pm \beta_a\beta_b |11\rangle)_{14} \\
& (\alpha_a^*\alpha_b^* \langle 00| \pm \alpha_a^*\beta_b^* \langle 01| - \beta_a^*\alpha_b^* \langle 10| \pm \beta_a^*\beta_b^* \langle 11|)_{14}
\end{aligned} \tag{4.53}
$$

(3)-

$$
\begin{aligned}
& |\phi^+\rangle_{a2} |\psi^\pm\rangle_{b3b3} \langle\psi^\pm|_{a2} \langle\phi^+| \, |\psi\rangle_{ab1234} \langle\psi|_{ab1234} |\phi^+\rangle_{a2} |\psi^\pm\rangle_{b3b3} \langle\psi^\pm|_{a2} \langle\phi^+| \\
= \; & \frac{1}{4}((\langle 01| \pm \langle 10|) \otimes ((\langle 01| + \langle 10|) \otimes |\psi\rangle_{ab1234} \langle\psi|_{ab1234} \\
& \otimes(|01\rangle + |10\rangle) \otimes (|01\rangle \pm |10\rangle) \\
= \; & \frac{1}{16}(\alpha_a\alpha_b |01\rangle \pm \alpha_a\beta_b |00\rangle - \beta_a\alpha_b |11\rangle \pm \beta_a\beta_b |10\rangle)_{14} \\
& (\alpha_a^*\alpha_b^* \langle 01| \pm \alpha_a^*\beta_b^* \langle 00| - \beta_a^*\alpha_b^* \langle 11| \pm \beta_a^*\beta_b^* \langle 10|)_{14}
\end{aligned} \tag{4.54}
$$

(4)-

$$
\begin{aligned}
& |\phi^-\rangle_{a2} |\psi^\pm\rangle_{b3b3} \langle\psi^\pm|_{a2} \langle\phi^-| \, |\psi\rangle_{ab1234} \langle\psi|_{ab1234} |\phi^-\rangle_{a2} |\psi^\pm\rangle_{b3b3} \langle\psi^\pm|_{a2} \langle\phi^-| \\
= \; & \frac{1}{4}((\langle 01| \pm \langle 10|) \otimes ((\langle 01| - \langle 10|) \otimes |\psi\rangle_{ab1234} \langle\psi|_{ab1234} \\
& \otimes(|01\rangle - |10\rangle) \otimes (|01\rangle \pm |10\rangle) \\
= \; & \frac{1}{16}(\alpha_a\alpha_b |01\rangle \pm \alpha_a\beta_b |00\rangle - \beta_a\alpha_b |11\rangle \mp \beta_a\beta_b |10\rangle)_{14} \\
& (\alpha_a^*\alpha_b^* \langle 01| \pm \alpha_a^*\beta_b^* \langle 00| - \beta_a^*\alpha_b^* \langle 11| \mp \beta_a^*\beta_b^* \langle 10|)_{14}
\end{aligned} \tag{4.55}
$$

(5)-

$$
\begin{aligned}
& \left|\psi^{+}\right\rangle_{a2}\left|\phi^{\pm}\right\rangle_{b3b3}\left\langle\phi^{\pm}\right|_{a2}\left\langle\psi^{+}\right| |\psi\rangle_{ab1234}\langle\psi|_{ab1234}\left|\psi^{+}\right\rangle_{a2}\left|\phi^{\pm}\right\rangle_{b3b3}\left\langle\phi^{\pm}\right|_{a2}\left\langle\psi^{+}\right| \\
= & \frac{1}{4}((\langle 00| \pm \langle 11|) \otimes ((\langle 01| + \langle 10|) \otimes |\psi\rangle_{ab1234}\langle\psi|_{ab1234} \\
& \otimes(|01\rangle + |10\rangle) \otimes (|00\rangle \pm |11\rangle) \\
= & \frac{1}{16}(\alpha_a\alpha_b|10\rangle \pm \alpha_a\beta_b|11\rangle - \beta_a\alpha_b|00\rangle \pm \beta_a\beta_b|01\rangle)_{14} \\
& (\alpha_a^*\alpha_b^*\langle 10| \pm \alpha_a^*\beta_b^*\langle 11| - \beta_a^*\alpha_b^*\langle 00| \pm \beta_a^*\beta_b^*\langle 01|)_{14}
\end{aligned} \tag{4.56}
$$

(6)-

$$
\begin{aligned}
& \left|\psi^{-}\right\rangle_{a2}\left|\phi^{\pm}\right\rangle_{b3b3}\left\langle\phi^{\pm}\right|_{a2}\left\langle\psi^{-}\right| |\psi\rangle_{ab1234}\langle\psi|_{ab1234}\left|\psi^{-}\right\rangle_{a2}\left|\phi^{\pm}\right\rangle_{b3b3}\left\langle\phi^{\pm}\right|_{a2}\left\langle\psi^{-}\right| \\
= & \frac{1}{4}((\langle 00| \pm \langle 11|) \otimes ((\langle 01| - \langle 10|) \otimes |\psi\rangle_{ab1234}\langle\psi|_{ab1234} \\
& \otimes(|01\rangle - |10\rangle) \otimes (|00\rangle \pm |11\rangle) \\
= & \frac{1}{16}(\alpha_a\alpha_b|10\rangle \mp \alpha_a\beta_b|11\rangle - \beta_a\alpha_b|00\rangle \mp \beta_a\beta_b|01\rangle)_{14} \\
& (\alpha_a^*\alpha_b^*\langle 10| \mp \alpha_a^*\beta_b^*\langle 11| - \beta_a^*\alpha_b^*\langle 00| \mp \beta_a^*\beta_b^*\langle 01|)_{14}
\end{aligned} \tag{4.57}
$$

(7)-

$$
\begin{aligned}
& \left|\psi^{+}\right\rangle_{a2}\left|\psi^{\pm}\right\rangle_{b3b3}\left\langle\psi^{\pm}\right|_{a2}\left\langle\psi^{+}\right| |\psi\rangle_{ab1234}\langle\psi|_{ab1234}\left|\psi^{+}\right\rangle_{a2}\left|\psi^{\pm}\right\rangle_{b3b3}\left\langle\psi^{\pm}\right|_{a2}\left\langle\psi^{+}\right| \\
= & \frac{1}{4}((\langle 01| \pm \langle 10|) \otimes ((\langle 01| + \langle 10|) \otimes |\psi\rangle_{ab1234}\langle\psi|_{ab1234} \\
& \otimes(|01\rangle + |10\rangle) \otimes (|01\rangle \pm |10\rangle) \\
= & \frac{1}{16}(-\alpha_a\alpha_b|11\rangle \pm \alpha_a\beta_b|10\rangle + \beta_a\alpha_b|01\rangle \pm \beta_a\beta_b|00\rangle)_{14} \\
& (-\alpha_a^*\alpha_b^*\langle 11| \pm \alpha_a^*\beta_b^*\langle 10| + \beta_a^*\alpha_b^*\langle 01| \pm \beta_a^*\beta_b^*\langle 00|)_{14}
\end{aligned} \tag{4.58}
$$

(8)-

$$
\begin{aligned}
& |\psi^-\rangle_{a2} |\psi^\pm\rangle_{b3b3} \langle\psi^\pm|_{a2} \langle\psi^-| \, |\psi\rangle_{ab1234} \langle\psi|_{ab1234} |\psi^-\rangle_{a2} |\psi^\pm\rangle_{b3b3} \langle\psi^\pm|_{a2} \langle\psi^-| \\
= \; & \frac{1}{4}((\langle 01| \pm \langle 10|) \otimes (\langle 01| - \langle 10|) \otimes |\psi\rangle_{ab1234} \langle\psi|_{ab1234} \\
& \otimes(|01\rangle - |10\rangle) \otimes (|01\rangle \pm |10\rangle)) \\
= \; & \frac{1}{16}(-\alpha_a\alpha_b |11\rangle \pm \alpha_a\beta_b |10\rangle - \beta_a\alpha_b |01\rangle \mp \beta_a\beta_b |00\rangle)_{14} \\
& (-\alpha_a^*\alpha_b^* \langle 11| \pm \alpha_a^*\beta_b^* \langle 10| - \beta_a^*\alpha_b^* \langle 01| \mp \beta_a^*\beta_b^* \langle 00|)_{14} \qquad (4.59)
\end{aligned}
$$

Alece niveau, Bob applique une opération quantique "controle phase" U_{cf} définie par

$$
\langle ij| U_{cf} |ij\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (4.60)
$$

$\rightarrow$Ou bien

$$
U_{cf} = |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10| - |11\rangle\langle 11| \qquad (4.61)
$$

Suivant chaque opération de mesure on a ce qui suit par application de U_{cf}

$$
\begin{aligned}
U_{cf}(1)(U_{cf})^\dagger \; = \; & (\alpha_a\alpha_b |00\rangle \pm \alpha_a\beta_b |01\rangle + \beta_a\alpha_b |10\rangle \pm \beta_a\beta_b |11\rangle)_{14} \\
& (\alpha_a^*\alpha_b^* \langle 00| \pm \alpha_a^*\beta_b^* \langle 01| + \beta_a^*\alpha_b^* \langle 10| \pm \beta_a^*\beta_b^* \langle 11|)_{14} \qquad (4.62)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U_{cf}(2)(U_{cf})^\dagger \; = \; & (\alpha_a\alpha_b |00\rangle \pm \alpha_a\beta_b |01\rangle - \beta_a\alpha_b |10\rangle \mp \beta_a\beta_b |11\rangle)_{14} \\
& (\alpha_a^*\alpha_b^* \langle 00| \pm \alpha_a^*\beta_b^* \langle 01| - \beta_a^*\alpha_b^* \langle 10| \mp \beta_a^*\beta_b^* \langle 11|)_{14} \qquad (4.63)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}U_{cf}(3)(U_{cf})^{\dagger} &= (\alpha_a\alpha_b\,|01\rangle \pm \alpha_a\beta_b\,|00\rangle + \beta_a\alpha_b\,|11\rangle \pm \beta_a\beta_b\,|10\rangle)_{14}\\ &\quad (\alpha_a^*\alpha_b^*\,\langle 01| \pm \alpha_a^*\beta_b^*\,\langle 00| + \beta_a^*\alpha_b^*\,\langle 11| \pm \beta_a^*\beta_b^*\,\langle 10|)_{14}\end{aligned} \tag{4.64}$$

$$\begin{aligned}U_{cf}(4)(U_{cf})^{\dagger} &= (\alpha_a\alpha_b\,|01\rangle \pm \alpha_a\beta_b\,|00\rangle + \beta_a\alpha_b\,|11\rangle \mp \beta_a\beta_b\,|10\rangle)_{14}\\ &\quad (\alpha_a^*\alpha_b^*\,\langle 01| \pm \alpha_a^*\beta_b^*\,\langle 00| + \beta_a^*\alpha_b^*\,\langle 11| \mp \beta_a^*\beta_b^*\,\langle 10|)_{14}\end{aligned} \tag{4.65}$$

$$\begin{aligned}U_{cf}(5)(U_{cf})^{\dagger} &= (\alpha_a\alpha_b\,|10\rangle \mp \alpha_a\beta_b\,|11\rangle - \beta_a\alpha_b\,|00\rangle \pm \beta_a\beta_b\,|01\rangle)_{14}\\ &\quad (\alpha_a^*\alpha_b^*\,\langle 10| \mp \alpha_a^*\beta_b^*\,\langle 11| - \beta_a^*\alpha_b^*\,\langle 00| \pm \beta_a^*\beta_b^*\,\langle 01|)_{14}\end{aligned} \tag{4.66}$$

$$\begin{aligned}U_{cf}(6)(U_{cf})^{\dagger} &= (\alpha_a\alpha_b\,|10\rangle \pm \alpha_a\beta_b\,|11\rangle - \beta_a\alpha_b\,|00\rangle \mp \beta_a\beta_b\,|01\rangle)_{14}\\ &\quad (\alpha_a^*\alpha_b^*\,\langle 10| \pm \alpha_a^*\beta_b^*\,\langle 11| - \beta_a^*\alpha_b^*\,\langle 00| \mp \beta_a^*\beta_b^*\,\langle 01|)_{14}\end{aligned} \tag{4.67}$$

$$\begin{aligned}U_{cf}(7)(U_{cf})^{\dagger} &= (\alpha_a\alpha_b\,|11\rangle \pm \alpha_a\beta_b\,|10\rangle + \beta_a\alpha_b\,|01\rangle \pm \beta_a\beta_b\,|00\rangle)_{14}\\ &\quad (\alpha_a^*\alpha_b^*\,\langle 11| \pm \alpha_a^*\beta_b^*\,\langle 10| + \beta_a^*\alpha_b^*\,\langle 01| \pm \beta_a^*\beta_b^*\,\langle 00|)_{14}\end{aligned} \tag{4.68}$$

$$\begin{aligned}U_{cf}(8)(U_{cf})^{\dagger} &= (+\alpha_a\alpha_b\,|11\rangle \pm \alpha_a\beta_b\,|10\rangle - \beta_a\alpha_b\,|01\rangle \mp \beta_a\beta_b\,|00\rangle)_{14}\\ &\quad (+\alpha_a^*\alpha_b^*\,\langle 11| \pm \alpha_a^*\beta_b^*\,\langle 10| - \beta_a^*\alpha_b^*\,\langle 01| \mp \beta_a^*\beta_b^*\,\langle 00|)_{14}\end{aligned} \tag{4.69}$$

Pour que Bob ait l'état à téléporter, il doit corriger par des opérations quantiques qui suivant les mesures sont comme suit (avec les qubits de Bob (1,4)→($|\phi_a\rangle$,$|\phi_b\rangle$)

Pour (1) on a

$$U_{cf}(1)^{+}(U_{cf})^{\dagger} = (\alpha_a |0\rangle + \beta_a |1\rangle)_1 \otimes (\alpha_b |0\rangle + \beta_b |1\rangle)_4 \tag{4.70}$$

$$(\alpha_a^* \langle 0| + \beta_a^* \langle 1|)_1 \otimes (\alpha_b^* \langle 0| + \beta_b^* \langle 1|)_4 \tag{4.71}$$

$$U(U_{cf}(1)^{+}(U_{cf})^{\dagger})U^{\dagger} = \rho_{\phi} \tag{4.72}$$

$$U = 1_2 \otimes 1_2 \tag{4.73}$$

Et de la même manière

$$U(U_{cf}(1)^{-}(U_{cf})^{\dagger})U^{\dagger} = \rho_{\phi} \tag{4.74}$$

$$U = 1_2 \otimes Z \tag{4.75}$$

Pour (2) on a

$$U(U_{cf}(2)^{+}(U_{cf})^{\dagger})U^{\dagger} = \rho_{\phi} \tag{4.76}$$

$$U = Z \otimes 1_2 \tag{4.77}$$

Et de la même manière

$$U(U_{cf}(2)^{-}(U_{cf})^{\dagger})U^{\dagger} = \rho_{\phi} \tag{4.78}$$

$$U = Z \otimes Z \tag{4.79}$$

Pour (3) on a

$$U(U_{cf}(3)^{+}(U_{cf})^{\dagger})U^{\dagger}=\rho_{\phi} \tag{4.80}$$

$$U=1_{2}\otimes X \tag{4.81}$$

Et de la même manière

$$U(U_{cf}(3)^{-}(U_{cf})^{\dagger})U^{\dagger}=\rho_{\phi} \tag{4.82}$$

$$U=1_{2}\otimes Z \tag{4.83}$$

Pour (4) on a

$$U(U_{cf}(4)^{+}(U_{cf})^{\dagger})U^{\dagger}=\rho_{\phi} \tag{4.84}$$

$$U=Z\otimes X \tag{4.85}$$

Et de la même manière

$$U(U_{cf}(4)^{-}(U_{cf})^{\dagger})U^{\dagger}=\rho_{\phi} \tag{4.86}$$

$$U=Z\otimes Y \tag{4.87}$$

$$U(U_{cf}(5)^{+}(U_{cf})^{\dagger})U^{\dagger}=\rho_{\phi} \tag{4.88}$$

Pour (5) on

$$U = X \otimes 1_2 \tag{4.89}$$

Et de la même manière

$$U(U_{cf}(5)^{-}(U_{cf})^{\dagger})U^{\dagger} = \rho_{\phi} \tag{4.90}$$

$$U = X \otimes Z \tag{4.91}$$

Pour (6) on a

$$U(U_{cf}(6)^{+}(U_{cf})^{\dagger})U^{\dagger} = \rho_{\phi} \tag{4.92}$$

$$U = Y \otimes 1_2 \tag{4.93}$$

Et de la même manière

$$U(U_{cf}(6)^{-}(U_{cf})^{\dagger})U^{\dagger} = \rho_{\phi} \tag{4.94}$$

$$U = Y \otimes Z \tag{4.95}$$

Pour (7) on a

$$U(U_{cf}(7)^{+}(U_{cf})^{\dagger})U^{\dagger} = \rho_{\phi} \tag{4.96}$$

$$U = X \otimes X \tag{4.97}$$

Et de la même manière

$$U(U_{cf}(7)^{-}(U_{cf})^{\dagger})U^{\dagger} = \rho_{\phi} \tag{4.98}$$

$$U = X \otimes Y \tag{4.99}$$

Pour (8) on a

$$U(U_{cf}(8)^{+}(U_{cf})^{\dagger})U^{\dagger} = \rho_{\phi} \tag{4.100}$$

$$U = Y \otimes X \tag{4.101}$$

Et de la même manière

$$U(U_{cf}(8)^{-}(U_{cf})^{\dagger})U^{\dagger} = \rho_{\phi} \tag{4.102}$$

$$U = Y \otimes Y \tag{4.103}$$

Enfin remarquons que les deux méthodes donnent exactement le même résultat qui garantit qu'il est indemne d'erreurs. Ce même calcul est testé à la machine via une implémentation en java. Ce qui fera l'objet du prochain chapitre.

5.1. Les portes quantiques :

Les portes quantiques correspondent mathématiquement à des transformations matricielles permettant l'évolution d'un système vers un certain état désiré. Le 2ème postulat de la mécanique quantique exige que la transformation d'un Qbit doit être unitaire et réversible afin de préserver sa norme.

5.1.1 Portes unitaires

On s'intéresse d'abord aux portes unaires qui s'opèrent, comme leur nom l'indique, sur un seul Qbit. Dès lors, la matrice de transformation qui les représente est de dimension 2x2.

Porte X :

La porte X est l'équivalent du Not quantique. Sa matrice est donnée comme suit :

$$X \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sa table de vérité est la suivante :

Entrée	Sortie
$\|0\rangle$	$\|1\rangle$
$\|1\rangle$	$\|0\rangle$
$\alpha\|0\rangle + \beta\|1\rangle$	$\beta\|0\rangle + \alpha\|1\rangle$

La porte Y :

La porte Y peut être décrite sous la forme de la matrice suivante :

$$Y \equiv \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

La table qui suit donne la table de vérité de la porte Y:

Entrée	Sortie
$\|0\rangle$	$i\|1\rangle$
$\|1\rangle$	$-i\|0\rangle$
$\alpha\|0\rangle + \beta\|1\rangle$	$-\beta i\|0\rangle + \alpha i\|1\rangle$

La porte Z :

La porte Z est donnée par la matrice :

$$Z \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Sa table de vérité est la suivante :

Entrée	Sortie
$\|0\rangle$	$\|0\rangle$
$\|1\rangle$	$-\|1\rangle$
$\alpha\|0\rangle + \beta\|1\rangle$	$\alpha\|0\rangle - \beta\|1\rangle$

Remarque : Ces trois portes X, Y et Z sont connue par les matrices de Pauli.

La porte Hadamard :

$$H \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Ce qui suit est la table de vérité de cette porte :

Entrée	Sortie
$\|0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\|0\rangle + \|1\rangle)$
$\|1\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\|0\rangle - \|1\rangle)$
$\alpha\|0\rangle + \beta\|1\rangle$	$\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}\|0\rangle + \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2}}\|1\rangle$

Les portes de rotation :

Un Qbit est représenté géométriquement sur une surface d'une sphère dite sphère de Bloch. Cette représentation nous permet de d'appliquer des transformations de rotation basées sur les fonctions cos et sin. Il s'agit de ces matrices rotationnelles :

$$R_x(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) & -isin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \\ -isin\left(\frac{\gamma}{2}\right) & \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$R_y(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) & -sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \\ sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) & \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$R_z(\gamma) = \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\gamma}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\gamma}{2}} \end{bmatrix}$$

$$Ph(\gamma) = \begin{bmatrix} e^{i\gamma} & 0 \\ 0 & e^{i\gamma} \end{bmatrix}$$

5.1.2 Les portes multi-Qbits :

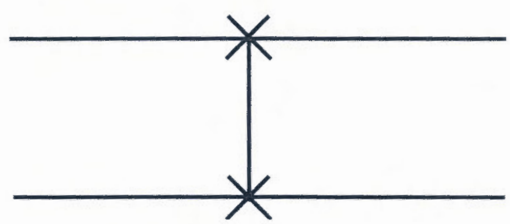
La porte SWAP :

Cette porte permet la permutation des positions de deux Qbits. Elle est donnée par la matrice suivante :

$$SWAP \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entrée	Sortie
$\|00\rangle$	$\|00\rangle$
$\|01\rangle$	$\|10\rangle$
$\|10\rangle$	$\|01\rangle$
$\|11\rangle$	$\|11\rangle$
$\boldsymbol{\alpha\|00\rangle + \beta\|01\rangle + \gamma\|10\rangle + \delta\|11\rangle}$	$\alpha\|00\rangle + \gamma\|01\rangle + \beta\|10\rangle + \delta\|11\rangle$

Sa représentation graphique est la suivante :



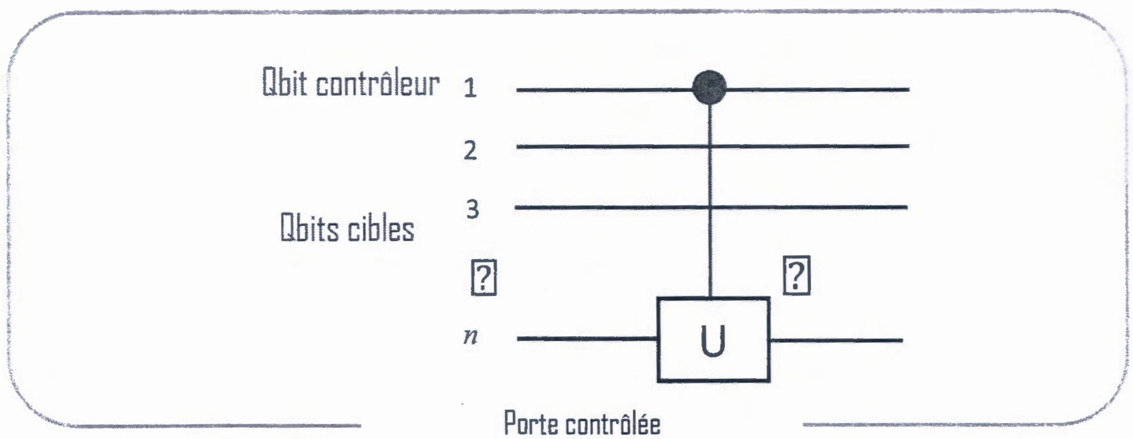
Porte SWAP

Portes contrôlées :

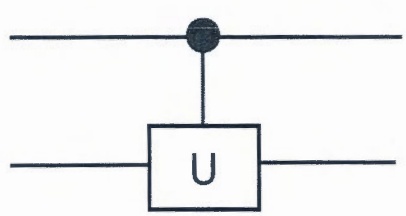
Ces portes agissent généralement sur plusieurs Qbits. Un Qbit de contrôle et des Qbits cibles.

- Si la valeur du Qbit de contrôle satisfait une certaine condition, on applique un transformation sur les Qbits cibles.
- Sinon, rien à faire.

Il est à noter que le Qbit de contrôle reste invariant. La représentation générale d'une porte contrôlée est :



Pour n=2, la matrice de transformation correspondante à une porte contrôlée est donnée par la relation suivante :



$$C_U = I \oplus U$$

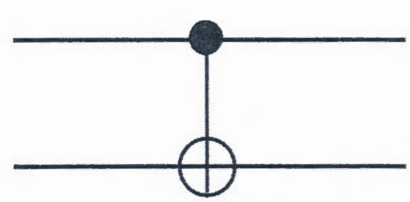
○ Le Not contrôlé (CNot) :

Le CNOT est un cas particulier des portes contrôlée. C'est l'analogue quantique de la porte XOR classique. Il s'agit d'une transformation X contrôlée :

$$CNOT \equiv I \oplus X \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Entrée	Sortie
$\vert 00\rangle$	$\vert 00\rangle$
$\vert 01\rangle$	$\vert 01\rangle$
$\vert 10\rangle$	$\vert 11\rangle$
$\vert 11\rangle$	$\vert 10\rangle$
$\alpha\vert 00\rangle + \beta\vert 01\rangle + \gamma\vert 10\rangle + \delta\vert 11\rangle$	$\alpha\vert 00\rangle + \beta\vert 01\rangle + \delta\vert 10\rangle + \gamma\vert 11\rangle$

Sa représentation graphique est la suivante :



Porte CNOT

- **La porte Toffoli :**

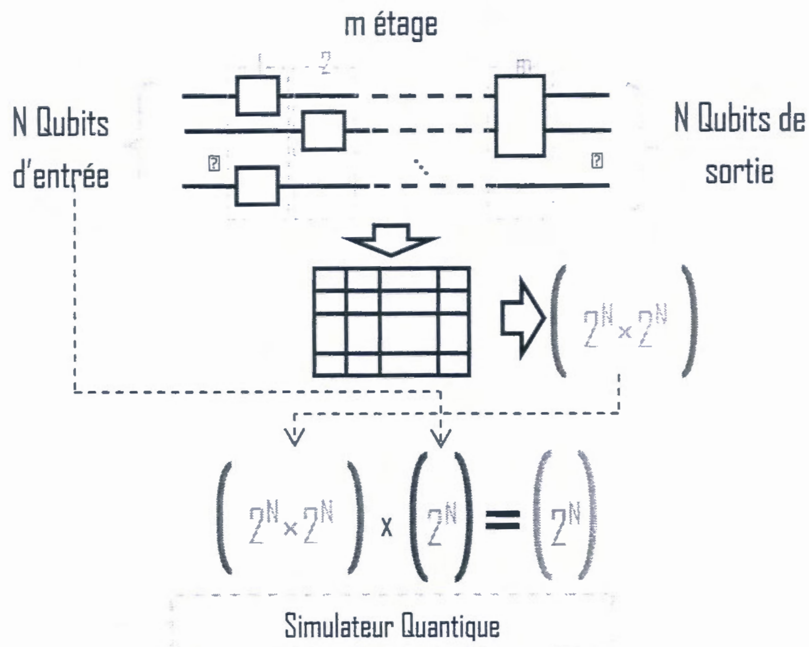
Il s'agit d'une porte X contrôlée par deux Qbits de contrôle.

$$TOFFOLI \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Entrée	Sortie
$\lvert 000\rangle$	$\lvert 000\rangle$
$\lvert 001\rangle$	$\lvert 001\rangle$
$\lvert 010\rangle$	$\lvert 010\rangle$
$\lvert 011\rangle$	$\lvert 011\rangle$
$\lvert 100\rangle$	$\lvert 100\rangle$
$\lvert 101\rangle$	$\lvert 101\rangle$
$\lvert 110\rangle$	$\lvert 111\rangle$
$\lvert 111\rangle$	$\lvert 110\rangle$
$a_1\lvert 000\rangle + a_2\lvert 001\rangle + a_3\lvert 010\rangle + a_4\lvert 011\rangle + a_5\lvert 100\rangle + a_6\lvert 101\rangle + a_7\lvert 110\rangle + a_8\lvert 111\rangle$	$a_1\lvert 000\rangle + a_2\lvert 001\rangle + a_3\lvert 010\rangle + a_4\lvert 011\rangle + a_5\lvert 100\rangle + a_6\lvert 101\rangle + a_8\lvert 110\rangle + a_7\lvert 111\rangle$

5.2 Simulateur quantique :

Afin de vérifier les résultats obtenus au chapitre précédent, nous nous appuyons sur une application informatique de simulation d'un calculateur quantique [Ref]. Ayant un circuit avec n Qbits en entrée/sortie, l'idée principale est de procéder par un traitement en série. Dans un premier temps, ils calculent d'abord la matrice correspondante à chaque étage. Ensuite, ils déduisent la matrice globale par un produit de ces matrices partielles. Dans ce qui suit, on se limite à la présentation du traitement des états quantiques représentés par des vecteurs. Pour les états mixtes, le traitement est similaire mais en manipulant des matrices.

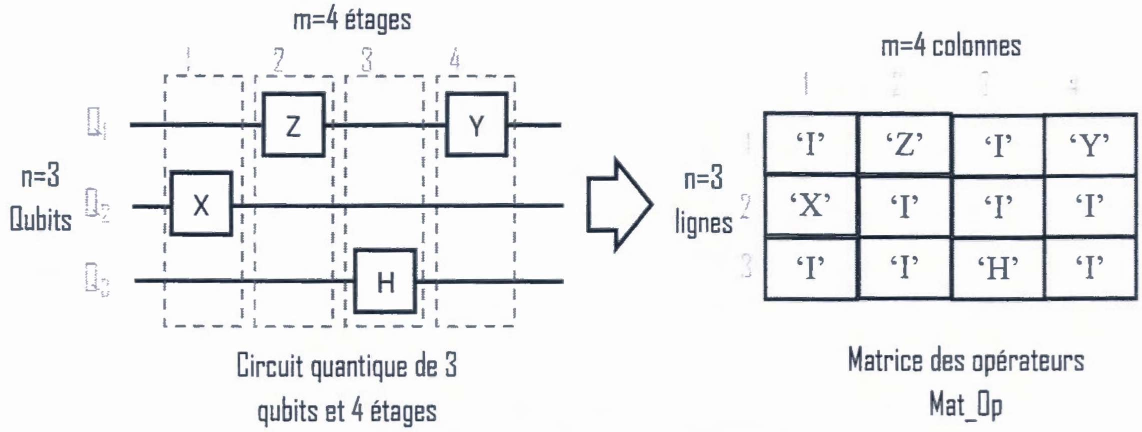


❖ Etape$_1$: Construction de la matrice des opérateurs

La matrice des opérateurs est une structure spécifiant les portes quantiques du circuit considéré. Il s'agit d'une matrice de caractères notée Mat_Op de taille n×m, tel que :

- n : le nombre des Qbits.
- m: le nombre des étages.

Sa construction nécessite un parcours horizontal du circuit quantique.



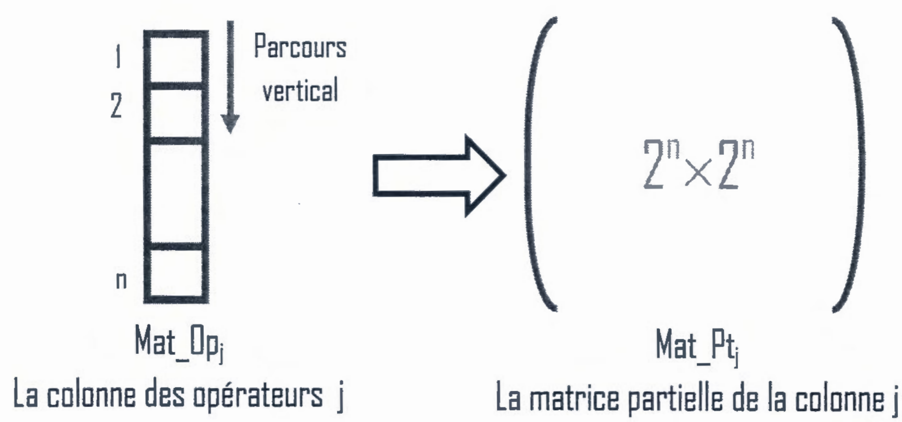
la construction de la matrice des opérateurs

Pour chaque étage, la colonne correspondante est calculée en fonction de la porte quantique et des Qbits concernés en utilisant la notation suivante :

- 'C' : le Qbit de contrôle.
- 'I' : l'opérateur d'identité.
- 'X' : la porte X.
- 'Y' : la porte Y.
- ... et ainsi de suite

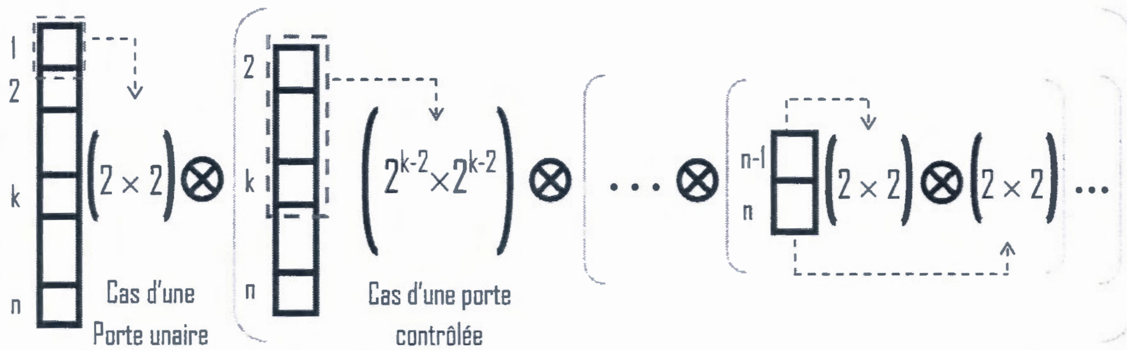
❖ Etape$_2$: Construction des matrices partielles

Après avoir construit la matrice des opérateurs, on passe maintenant au calcul des matrices partielles. A chaque colonne j correspond une matrice de taille $2^n \times 2^n$ notée Mat_Pt$_j$.



Matrices partielles

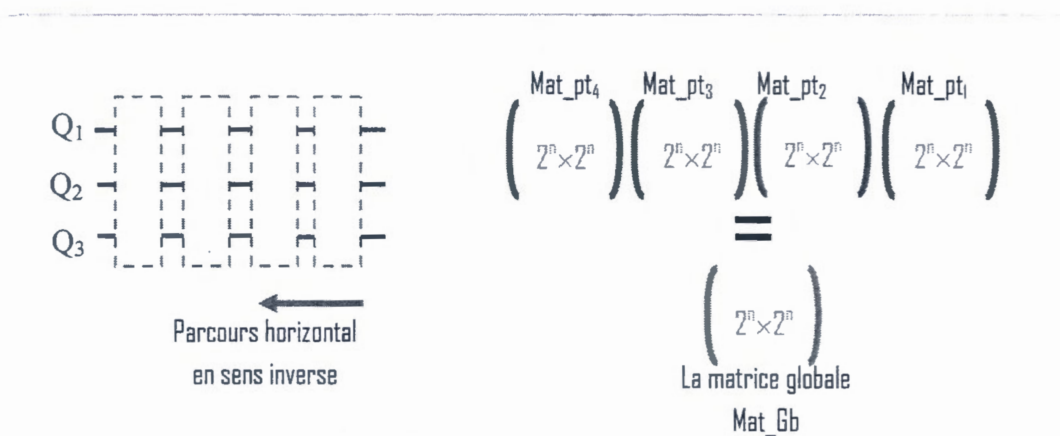
Pour chaque étage, les portes sont traitées en parallèle. L'opérateur utilisé pour calculer la matrice résultante de ce type de composition est le produit tensoriel. Les auteurs procèdent par un traitement progressif selon le schéma suivant :



le calcul d'une matrice partielle

- **Etape$_3$: Calcul de La matrice globale**

La matrice globale est une structure d'ordre $2^n \times 2^n$. Elle est calculée par un produit matriciel ordinaire de toutes les matrices partielles dans le sens inverse.



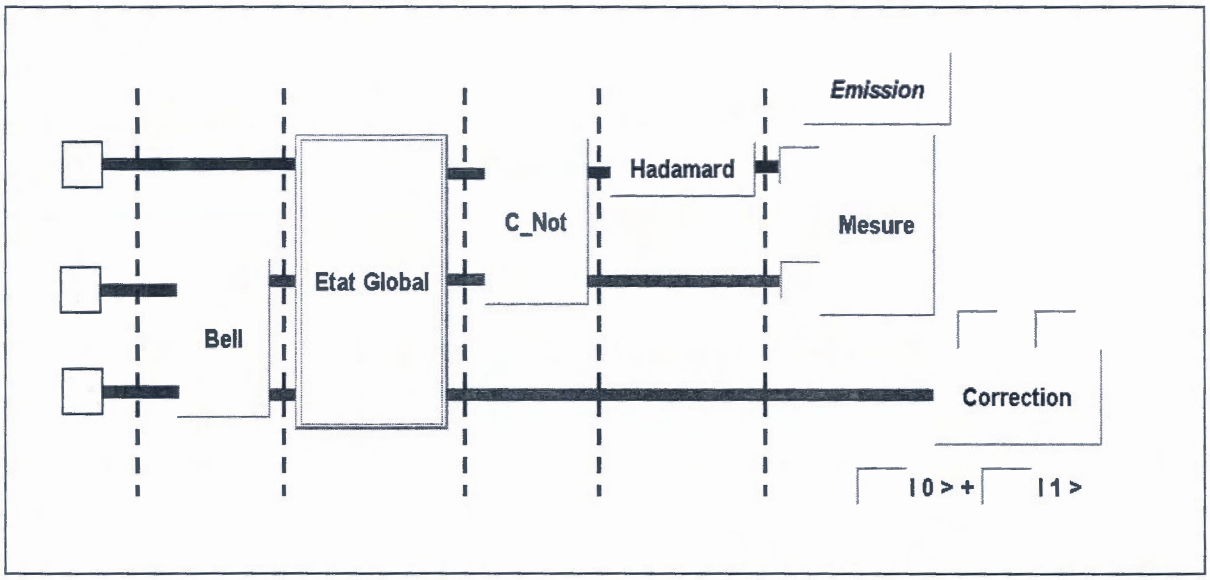
le calcul de la matrice globale

5.3 Applications et vérification des résultats :

Dans ce qui suit, nous présentons les résultats du chapitre précédent calculés par le simulateur. Pour plus de clarté, on a opté pour l'affichage des états quantiques intermédiaires obtenus par l'application des matrices partielles.

- On note I Etat_Global > : l'état quantique global contenant tous Qbits.
- L'etat de bell utilisé est B_{00}

5.3.1 Téléportation d'un Qbit :



- **Etats quantiques représentés par des vecteurs :**

  - **I Qbit_1 > = α I 0 > + β I 1 >**
  - I Qbits_23 > = 0,707 I 00 > + 0,707 I 11 >
  - I Qbits_123 > = 0,707 α I 000 > + 0,707 α I 011 > + 0,707 β I 100 > + 0,707 β I 111 >
  - I Qbits_123 > = 0,707 α I 000 > + 0,707 α I 011 > + 0,707 β I 101 > + 0,707 β I 110 >
  - I Qbits_123 > = 0,5 α I 000 > + 0,5 β I 001 > + 0,5 β I 010 > + 0,5 α I 011 > +

    0,5 α I 100 > - 0,5 β I 101 > - 0,5 β I 110 > + 0,5 α I 111 >

Supposant que les resultats des mesures des Qbits 1 et 2 sont : 0 1.

- $|\,Qbit\_123> \;=\; 0{,}5\ \beta\ |\,010> + 0{,}5\ \alpha\ |\,011>$

Cet état est équivalent à :

- $|\,Qbit\_123> \;=\; |\,01> \otimes (\,0{,}5\ \beta\ |\,0> + 0{,}5\ \alpha\ |\,1>\,)$

La normalisation de cet etat quantique donne :

- $|\,Qbit\_123> \;=\; |\,01> \otimes (\,\beta\ |\,0> + \alpha\ |\,1>\,)$

Apres transmission des resultats de mesures, la correction donne l'état suivant :

- $|\,Qbit\_123> \;=\; |\,01> \otimes \mathbf{(\,\alpha\ |\,0> + \beta\,|\,1>\,)}$

- **Etats quantiques représentés par des matrices de densités :**

- **I Qbit_1 >** =

α α	**α β**
β α	**β β**

- I Qbits_23 > =

0,5	0	0	0,5
0	0	0	0
0	0	0	0
0,5	0	0	0,5

- I Qbits_123 > =

0,5 α α	0	0	0,5 α α	0,5 α β	0	0	0,5 α β
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0,5 α α	0	0	0,5 α α	0,5 α β	0	0	0,5 α β
0,5 α β	0	0	0,5 α β	0,5 β β	0	0	0,5 β β
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0,5 α β	0	0	0,5 α β	0,5 β β	0	0	0,5 β β

- I Qbits_123 > =

0,5 α α	0	0	0,5 α α	0	0,5 α β	0,5 α β	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0,5 α α	0	0	0,5 α α	0	0,5 α β	0,5 α β	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0,5 α β	0	0	0,5 α β	0	0,5 β β	0,5 β β	0
0,5 α β	0	0	0,5 α β	0	0,5 β β	0,5 β β	0
0	0	0	0	0	0	0	0

- I Qbits_123 > =

0,25 α α	0,25 α β	0,25 α β	0,25 α α	0,25 α α	-0,25 α β	-0,25 α β	0,25 α α
0,25 α β	0,25 β β	0,25 β β	0,25 α β	0,25 α β	-0,25 β β	-0,25 β β	0,25 α β
0,25 α β	0,25 β β	0,25 β β	0,25 α β	0,25 α β	-0,25 β β	-0,25 β β	0,25 α β
0,25 α α	0,25 α β	0,25 α β	0,25 α α	0,25 α α	-0,25 α β	-0,25 α β	0,25 α α
0,25 α α	0,25 α β	0,25 α β	0,25 α α	0,25 α α	-0,25 α β	-0,25 α β	0,25 α α
-0,25 α β	-0,25 β β	0,25 β β	-0,25 α β	-0,25 α β	0,25 β β	0,25 β β	-0,25 α β
-0,25 α β	-0,25 β β	-0,25 β β	-0,25 α β	-0,25 α β	0,25 β β	0,25 β β	-0,25 α β
0,25 α α	0,25 α β	0,25 α β	0,25 α α	0,25 α α	-0,25 α β	-0,25 α β	0,25 α α

Supposant que les resultats des mesures des Qbits 1 et 2 sont : 0 1.

- I Qbits_123 > =

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0,25 β β	0,25 α β	0	0	0	0
0	0	0,25 α β	0,25 α α	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Cet état est équivalent à :

0	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

$\otimes$

0,25 β β	0,25 α β
0,25 α β	0,25 α α

La normalisation de cet etat quantique donne :

0	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

$\otimes$

β β	α β
α β	α α

Apres transmission des resultats de mesures, la correction donne l'état suivant :

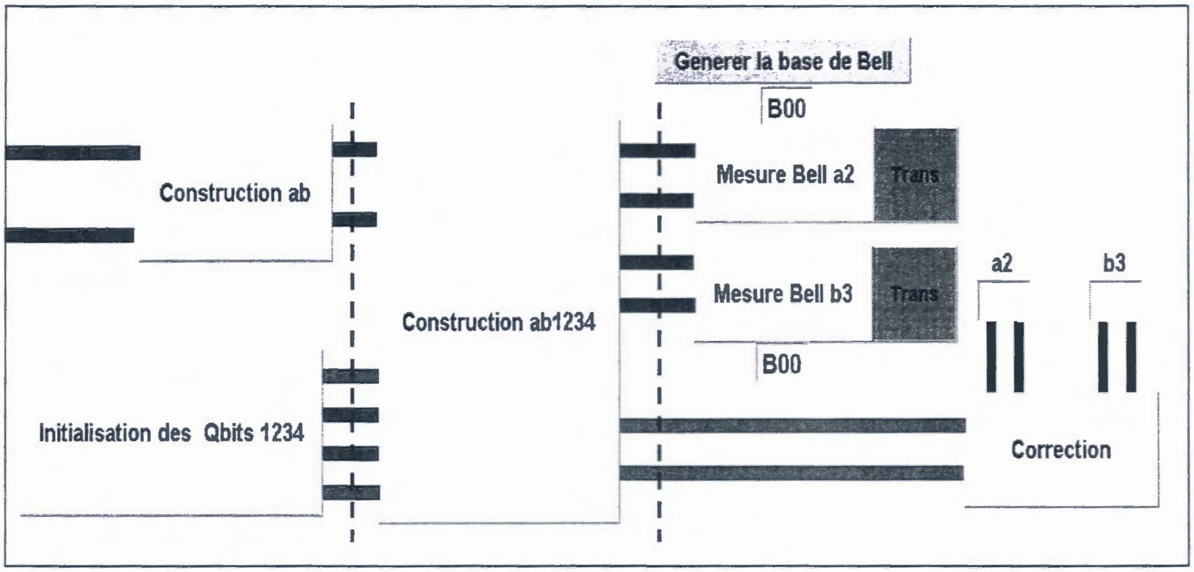
- I Qbit_123 > =

0	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

$\otimes$

α α	**α β**
α β	**β β**

5.3.2 Téléportation d'un double Qbits :



Etats quantiques représentés par des vecteurs :

- I Qbit_a > = α_01 I 0 > + β_01 I 1 >
- I Qbit_b > = α_02 I 0 > + β_02 I 1 >
- I Qbits_ab > = α_01 α_02 I 00 > + α_01 β_02 I 01 > + β_01 α_02 I 10 > + β_01 β_02 I 11 >
- I Qbits_1234 > = 0,5 I 0000 > + 0,5 I 0011 > + 0,5 I 1100 > -0,5 I 1111 >
- I Qbits_ab1234 > = 0,5 α_01 α_02 I 000000 > + 0,5 α_01 α_02 I 000011 > + 0,5 α_01 α_02 I 001100 > - 0,5 α_01 α_02 I 001111 > + 0,5 α_01 β_02 I 010000 >+ .... - 0,5 β_01 β_02 I 111111 >

Supposant que l'état de bell utilisé dans les mesures est le suivant :

- I B_00 > = 0,707 I 00 > + 0,707 I 11 >

La mesure des Qbits a et 2 donne :

- $| Qbits\_b134 > \; = 0{,}354 \; \alpha\_01 \, \alpha\_02 \; | 0000 > \; + \; 0{,}354 \; \alpha\_01 \, \alpha\_02 \; | 0011 > +$

$$0{,}354 \; \beta\_01 \; \alpha\_02 \; | 0100 > \; - 0{,}354 \; \beta\_01 \; \alpha\_02 \; | 0111 > \; +$$

$$0{,}354 \; \alpha\_01 \; \beta\_02 \; | 1000 > + 0{,}354 \; \alpha\_01 \; \beta\_02 \; | 1011 > \; +$$

$$0{,}354 \; \beta\_01 \; \beta\_02 \; | 1100 > \; - 0{,}354 \; \beta\_01 \; \beta\_02 \; | 1111 >$$

La mesure des Qbits b et 3 donne :

- $| Qbits\_14 > \; = 0{,}25 \; \alpha\_01 \; \alpha\_02 \; | 00 > \; + \; 0{,}25 \; \alpha\_01 \; \beta\_02 \; | 01 > +$

$$0{,}25 \; \beta\_01 \; \alpha\_02 \; | 10 > \; - \; 0{,}25 \; \beta\_01 \; \beta\_02 \; | 11 >$$

La normalisation de cet etat quantique donne :

- $| Qbits\_14 > \; = \alpha\_01 \; \alpha\_02 \; | 00 > \; + \; \alpha\_01 \; \beta\_02 \; | 01 > +$

$$\beta\_01 \; \alpha\_02 \; | 10 > \; - \; \beta\_01 \; \beta\_02 \; | 11 >$$

Apres transmission des resultats de mesures, la correction donne l'état suivant :

- $\mathbf{| Qbits\_14 > \; = \alpha\_01 \; \alpha\_02 \; | 00 > \; + \; \alpha\_01 \; \beta\_02 \; | 01 > +}$

$$\mathbf{\beta\_01 \; \alpha\_02 \; | 10 > \; + \; \beta\_01 \; \beta\_02 \; | 11 >}$$

Conclusion :

Dans ce mémoire nous avons considéré le calcul quantique dans le cas de la téléportation quantique d'un qubit et de deux qubits. Nous avons élaboré ce calcul dans divers formalismes de la mécanique quantique ; celui des kets et celui de la matrice densité. La téléportation quantique qui utilise l'intrication quantique comme moyen de téléporter est devenue de nos jours une expérience faisable et réalisable. Dans le cas d'un qubit le protocole étudié est celui proposée par G.Brassard et al, devenu standard et est présenté dans tous les livres d'information quantique. Dans le cas de deux qubits nous avons suivi l'article de «Teleportation of a product state of an arbitrary single-particle state ». Nous avons ainsi refait tous ces calculs en utilisant le formalisme des kets et en plus ces calculs sont remployés dans le formalisme de la matrice densité. Vu la longueur des calculs dans ce cas nous avons alors revérifier ces calculs dans la plate forme d'implémentation informatique élaborée par Mr Dr K. Khalfaoui, ce qui nous a permis de s'initier à cette plate forme et en même temps s'assurer de nos calculs.

Ce mémoire nous a permis de s'initier aux principes d'information quantique, au calcul quantique et à la téléportation quantique qui use de l'intrication quantique qui est un principe inhérent au phénomène quantique. La plate forme de calcul quantique nous a permis de revérifier nos calcul et notre initiation à ses utiles va nous permettre d'en utiliser encore plus de ses avantages de calcul pour aborder des cas plus généraux et plus compliqués en calcul quantique tels que téléportation et algorithmes quantiques et les corrections d'erreurs.

Vu l'actualité du domaine et sa complexité nous sommes maintenant en mesure de s'initier en profondeur dans ce domaine de l'information quantique.

Bibliography

[1] Man-Lan Li , Liu Ye , Jie Yang , Teleportation of a product state of an arbitrary single-particle state , September 2011

[2] Michael A. Nielsen & Isaac L. Chuang , Quantum Computation and Quantum Information ,Cambridge he University Press , 2010

[3] Willi-Hans , Steeb Yorick Hardy , PROBLEMS AND SOLUTIONS IN QUANTUM COMPUTING AND QUANTUM INFORMATION , Rand Afrikaans University, South Africa Copyright , 2004 by World Scientific Publishing Co . Re . Ltd.

[4] Dr Khalad. Khalfaoui , dévlopment d'un plate forme de calcul quantique de progé de fin d'étud en informatique , 2016

[5] Pr Tahar.Boudjedaa , cours de information quantique