République Algérienne Démocratique & Populaire Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique Université Mohamed Seddik Ben Yahia-Jijel Faculté des Sciences et de la Technologie Département d'électronique



THÈSE

Présentée pour l'obtention du Diplôme de Doctorat LMD en Electronique *Option :* Electronique et analyse des systèmes

Par

Zouad Fadia

THÈME

Élaboration et implémentation de nouvelles approches pour la sécurisation des transmissions à base des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire

Thèse soutenue le 08/06/2019 Devant le jury composé de M :

Président	Abdelkrim BOUKABOU	Professeur	Université de Jijel
Rapporteur	Karim KEMIH	Professeur	Université de Jijel
Examinateur	Riad REMMOUCHE	MCA	Université de Jijel
Examinateur	Yassine HIMEUR	MRA	CDTA. Alger

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

À mes parents que j'aime beaucoup : Abdelhamid et khaoula Pour leur amour, sacrifice et encouragement. À mes sœurs : Amina et Ines À mon frère : Sabri À mon beau frère : Ilyes À mon neveu :Mohamed Anis À mon amie : Zahra

À tous ceux que j'aime et je respecte.

Remerciements

Tout d'abord je remercie Dieu le tout puissant qui m'a donné la volonté, le courage, la patience pour accomplir ce travail et de franchir les obstacles aux moments difficiles.

J'exprime mes sincères remerciements et ma plus grande reconnaissance et mon respect à mon encadreur Monsieur Karim Kemih, Professeur à l'Université de Mohamed Seddik Ben Yahia-jijel, qui m'a guidé et renseigné à tout moment, et pour ces précieux conseils et orientations et sa disponibilité durant ces années d'encadrement.

Je tiens à exprimer ma gratitude à Monsieur Abdelkrim Boukabou, Professeur à l'Université de Mohamed Seddik Ben Yahia-Jijel, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider ce jury.

Je remercie également Messieurs Riad Remmouche, Maître de conférence à l'Université de Mohamed Seddik Ben Yahia-Jijel, Yassine Himeur, Maitre de recherche au Centre de Développement des Technologies Avancées-Alger, de m'avoir fait l'honneur en acceptant d'examiner ce modeste travail.

Mes remerciements les plus profonds vont à Monsieur Smaine Mazouzi, Maître de conférence à l'université du 20 Août 1955-Skikda, pour son soutien et ses conseils durant mes années d'études

Je tiens à remercier aussi Monsieur Lokmane Abdelouahed, Maître de conférence à l'institut national des sciences appliquées de Rouen pour son aide, son encouragement et pour ses conseils.

Enfin, j'exprime mes remerciements à tous ceux qui ont participé de prés ou de loin à l'élaboration de ce travail même par un mot d'encouragement.

Introduction générale	1
Bibliographie	5
1. Les systèmes fractionnaires chaotiques à retard	10
1.1 Introduction	10
1.2 La théorie du chaos	11
1.2.1 Le chaos	11
1.2.2 Propriétés du chaos	12
1.2.3 Routes vers le chaos	14
1.2.4 Exemples des systèmes chaotiques	15
1.3 Fonctions spécifiques pour le calcul fractionnaire	
1.3.1 La fonction Gamma	18
1.3.2 La fonction de Mittag-Leffler	
1.4 Intégration fractionnaire	19
1.5 Dérivation fractionnaire	20
1.5.1 Définition de Riemann-Liouville (R-L)	20
1.5.2 Définition de Caputo	20
1.5.3 Définition de Grunwald-Letnikov(G-L)	21
1.6 Propriétés des opérateurs fractionnaires	21
1.7 Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire	22
1.7.1 Eléments de base de la transformée de Laplace	22
1.7.2 Transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire	22
1.7.3 Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire	22
1.8 Approximation des opérateurs fractionnaires	23
1.8.1 Approximation d'intégrateur fractionnaire	23
1.8.2 Approximation du dérivateur d'ordre fractionnaire	24

1.9 Implémentation par des circuits électriques analogiques des opérateurs d'ordre
fractionnaire25
1.9.1 Intégration fractionnaire
1.9.2 Dérivation fractionnaire26
1.10 Equations différentielles fractionnaires
1.10.1 Equation différentielle à un seul terme27
1.10.2 Equation différentielle à deux termes
1.10.3 Equation différentielle à trois termes
1.10.4 Equation différentielle générale
1.11 Résolution numérique des équations différentielles fractionnaires
1.11.1 La méthode d'approximation d'Adams–Bashforth-Moulton
1.11.2 La méthode d'approximation décompositionnelle d'Adomian
1.11.3 La méthode d'approximation des différences fractionnaires de Gunwald-letnik33
1.12 Système d'ordre fractionnaire
1.12.1 Représentation d'état d'un système linéaire fractionnaire
1.12.2 Commandabilité, observabilité et stabilité d'un système linéaire fractionnaire351.12.3 Système non-linéaire fractionnaire
1.12.4 Méthode directe de Lyapunov (extension au cas fractionnaire)
1.13 Système chaotique d'ordre fractionnaire à retard
1.14 Conclusion
Bibliographie43
2. Synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre entier et fractionnaire à retard48
2.1 Introduction

2.2 Synchronisation chaotique	
2.2.1 Synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre entier	50
2.2.1.1 Synchronisation par partition du système	50
2.2.1.2 Synchronisation identique	
2.2.1.3 Synchronisation projective	
2.2.1.4 Synchronisation de phase	
2.2.1.5 Synchronisation par boucle fermée	53
2.2.1.6 Synchronisation retardée	54
2.2.1.7 Synchronisation à base d'observateur	54
2.2.2 Synchronisation des systèmes d'ordre fractionnaire	
2.2.2.1 Synchronisation par partition du système	55
2.2.2.2 Synchronisation identique	56
2.2.2.3 Synchronisation projective	57
2.2.2.4 Synchronisation par contrôle actif	57
2.2.2.5 Synchronisation par commande adaptative	57
2.2.2.6 Synchronisation à base d'observateurs	58
2.2.3 Synchronisation des systèmes d'ordre fractionnaire à retard	58
2.3 Chiffrement basé sur le chaos	
2.3.1 Cryptage par addition	59
2.3.2 Cryptage par inclusion	60
2.3.3 Cryptage par modulation paramétrique	60
2.3.4 Cryptage combiné	61
2.3.5 Cryptage par décalage	61
2.4 Conclusion	62
Bibliographie	64

3. Contrôle et synchronisation des systèmes fractionnaires chaotiques à retard à base d	le
la commande prédictive	71
3.1 Introduction7	1
3.2 Principe de la commande prédictive	'2
3.2.2 Contrôle prédictif des systèmes continus	72
3.2.2.1 Principe de la méthode	72
3.2.2.2 Exemple d'un système chaotique d'ordre entier	74
3.2.3 Contrôle prédictif des systèmes fractionnaires chaotiques à retard	76
3.2.3.1 L'approche proposée	76
3.2.3.2 Démonstration	77
3.2.3.3 Exemple d'un système fractionnaire chaotique à retard	79
3.3 Synchronisation prédictive des systèmes fractionnaires chaotiques à retard	81
3.3.1 L'approche proposée	31
3.3.2 Démonstration	33
3.3.3 Exemple	34
3.4 Réalisation des fonctions électroniques de base	36
3.4.1 Montage additionneur amplificateur inverseur	36
3.4.2 Montage amplificateur soustracteur	37
3.4.3 Montage amplificateur inverseur	37
3.4.4 Montage intégrateur inverseur	38
3.4.5 Montage dérivateur inverseur	39
3.5 Réalisation du circuit du système fractionnaire chaotique à retard de Lorenz contrôlé	91
3.5.1 Réalisation du circuit du système fractionnaire chaotique à retard de Lorenz	91
3.5.2 Le contrôleur du circuit réalisé) 3
3.5.3 Génération d'un retard de 410 ms	94
3.5.4 Résultats de la simulation	94
3.6 Conclusion	96

Bibliographie	97
4. Nouveau système de communication sécurisée à base des systèmes fractionnai	ires
chaotiques à retard : théorie et réalisation	100
4.1 Introduction	100
4.2 Conception du système de communication sécurisée	101
4.2.1 Conception de l'émetteur	101
4.2.2 Conception du récepteur	102
4.3 Synchronisation par la méthode H-infini	103
4.3.1 L'approche proposée	103
4.3.2 Résultats de simulations	108
4.4 Réalisation du circuit du nouveau système de communication sécurisée à base du	ı système
fractionnaire chaotique à retard de Chen	111
4.4.1 Réalisation de l'émetteur	111
4.4.2 Réalisation du récepteur	116
4.4.3 Réalisation du circuit de la reconstitution du message transmis	117
4.4.4 Résultats de simulations	118
4.5 Conclusion	119
Bibliographie	120
Conclusion générale	123

Liste des figures

Figure 1.1 : Sensibilité aux conditions initiales de l'état x du système de Lorenz	12
Figure 1.2 : Evolution dans le temps d'un état du système chaotique de Lorenz	. 13
Figure 1.3 : Evolution dans le temps d'un système sinusoïde	. 14
Figure 1.4 : Attracteur chaotique de Lorenz	. 15
Figure 1.5 : Attracteur chaotique de Rössler	. 16
Figure 1.6 : Attracteur chaotique de Hénon.	. 17
Figure 1.7 : Réseau analogique équivalent d'intégrateur d'ordre fractionnaire	. 26
Figure 1.8 : Réseau analogique équivalent du dérivateur d'ordre fractionnaire	. 27
Figure 1.9 : Zones de stabilité et instabilité des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire ρ	
avec $0\langle \rho \langle 1 \dots$. 36
Figure 1.10: Attracteur chaotique d'ordre fractionnaire du système de LIU	. 38
Figure 1.11: L'évolution au cours du temps des états x, y et z du système chaotique	20
fractionnaire a retard de Chen	. 39
Figure 1.12: Attracteur chaotique d'ordre fractionnaire du système de Chen à retard	. 40
Figure 1.13 : L'évolution au cours du temps des états x, y et z du système chaotique	
fractionnaire à retard de LÜ	. 41
Figure 1.14 : Attracteur chaotique d'ordre fractionnaire du système de LÜ à retard	. 41
Figure 2.1 : Couplage unidirectionnel	. 49
Figure 2.2: Couplage bidirectionnel	. 50
Figure 2.3 : Principe de synchronisation par partition du système	. 51
Figure 2.4 : Principe de synchronisation en boucle fermée	. 54
Figure 2.5 : Principe de synchronisation à base d'observateurs	. 55

Figure 2.6 : Cryptage par addition 60
Figure 2.7 : Cryptage par inclusion 60
Figure 2.8 : Cryptage par modulation-paramétrique61
Figure 2.9 : Cryptage combiné
Figure 2.11 : Cryptage par décalage 62
Figure 3.1 : Contrôle prédictif à retour d'état72
Figure 3.2 : Système de LU sous contrôle prédictif .stabilisation sur x_{f1}
Figure 3.3 : Attracteur du système fractionnaire à retard de Lorenz sur les plans x-y,y-z,x-z et ces trajectoires d'états
Figure 3.4 : Système de Lorenz sous contrôle prédictif .stabilisation sur x_{f1}
Figure 3.5 : Erreurs de synchronization
Figure 3.6 : Montage d'un additionneur amplificateur inverseur
Figure 3.7 : Montage d'un amplificateur soustracteur
Figure 3.8 : Montage d'un amplificateur inverseur
Figure 3.9 : Montage d'un intégrateur inverseur
Figure 3.10 : Montage d'un dérivateur inverseur
Figure 3.11 : Un montage possible pour la réalisation d'un filtre passe tout du 1er ordre 90
Figure 3.12 : Circuit électronique du système fractionnaire chaotique à retard de Lorenz 92
Figure 3.13 : Bloc fractionnaire d'ordre 0.95 93
Figure 3.14 : Circuit électronique du contrôleur93
Figure 3.15 : Circuit électronique réalisant un retard de 410 ms
Figure 3.16 : Résultat de la simulation de x avec le logiciel Multisim

Figure 3.17 : Résultat de la simulation de y avec le logiciel Multisim
Figure 3.18 : Résultat de la simulation de z avec le logiciel Multisim
Figure 4.1 : Schéma du système de communication sécurisée proposé 101
Figure 4.2 : Les trajectoires d'état d'émetteur 102
Figure 4.3 : Portrait de phase du système fractionnaire de Chen avec $\tau = 0.2s$ dans le plan x-z
Figure 4.4 : Synchronisation des séries temporelles de $x_m - x_s$
Figure 4.5 : Synchronisation des séries temporelles de $y_m - y_s$
Figure 4.6 : Synchronisation des séries temporelles de $z_m - z_s$
Figure 4.7 : Erreurs de synchronisation 110
Figure 4.8 : Le message transmis et le message reconstitué 110
Figure 4.9 : Circuit électronique du système fractionnaire chaotique à retard de Chen 112
Figure 4.10 : Bloc fractionnaire d'ordre 0.98 113
Figure 4.11 : Circuit électronique de l'émetteur 114
Figure 4.12 : Circuit électronique réalisant un retard de 200 ms 115
Figure 4.13 : Circuit électronique du récepteur116
Figure 4.14 : Allure du bruit blanc gaussien généré 117
Figure 4.15 : Circuit électronique du signal reconstitué 117
Figure 4.16 : Résultats de la simulation sous le logiciel Multisim

Introduction Générale

La cryptographie est l'un des outils les plus importants pour assurer la sécurité des informations. Les techniques de cryptage assurent la protection des données lors des communications qu'on veut sécurisées [1]. La technique de sécurisation la plus répondue est basée sur le cryptage par des moyens logiciels. Cependant, cette technique pose plusieurs problèmes au niveau de la confidentialité, étant donné que la vitesse de codage est limitée par le temps du calcul requis par les algorithmes de cryptage [2]. Des solutions sont proposées afin d'améliorer le cryptage contre les différentes attaques. Récemment, de nouvelles techniques cryptographiques basées sur la théorie du chaos ont été développées [3-5]. En 1996, Baptista a publié son article intitulé "Cryptography with Chaos" dans lequel il a proposé un schéma de chiffrement de fonction, basé sur une fonction de chaos [6]. Cet article était l'un des premiers ayant présenté des cas concrets et fonctionnels de cryptographie chaotique.

Par ailleurs, la théorie du chaos est une théorie mathématique, déjà entrevue par Jacques Hadamard et Henri Poincaré au début du XIXe siècle [7]. En 1961 Lorenz a observé le phénomène du chaos lorsqu'il a impliqué trois équations différentielles pour modéliser quelques composants météorologiques [8].

Les propriétés déterminantes d'une dynamique chaotique, telles que la sensibilité aux conditions initiales, l'imprévisibilité, sont en fait des caractéristiques clés contribuant à la construction de schémas de communications sécurisés basés sur le chaos.

Le calcul fractionnaire est un sujet mathématique datant de plus de 300 ans. Il a été introduit le 30 septembre 1695 [9], ce jour-là, Gottfried Wilhelm Leibniz a écrit une lettre à Guillaume François Antoine, marquis de L'Hôpital, évoquant la possibilité de généraliser le sens des dérivées, de dérivée d'ordre entier à dérivée d'ordre non entier. De l'Hôpital voulait connaître le résultat pour la dérivée d'ordre n = 1/2. Leibniz a répondu «un jour, des conséquences utiles seront tirées» et, en fait, sa vision est devenue réalité [10]. Nous retrouvons les contributions de grands mathématiciens tels qu'Euler ou Lagrange au seizième siècle, Laplace, Fourier, Liouville (1832 ; 1837) ou Riemann (1847) au dix-neuvième siècle, ainsi qu'à Grünwald (1867) et Letnikov (1868) dans la seconde moitié du même siècle [11].Un intérêt considérable a été porté au calcul fractionnaire par l'application de ces concepts dans différents domaines de la physique et de l'ingénierie [12], le traitement du signal, [13], le traitement d'image, [14] la commande automatique [15] et la robotique [16,17].

Récemment, l'étude des systèmes différentiels d'ordre fractionnaire est devenue un domaine de recherche actif. Beaucoup de chercheurs ont remarqué que plusieurs systèmes fractionnaires non linéaires peuvent générer des comportements chaotiques. Par exemple le circuit de Chua d'ordre fractionnaire [18], le système fractionnaire de Lorenz [19], le système de Chen d'ordre fractionnaire [20], le système de Rössler d'ordre fractionnaire [21].

Depuis le début des années 1990, les chercheurs ont pu prouver que les systèmes chaotiques peuvent être synchronisés, et ce par diverses méthodes. Parmi ces méthodes, on retrouve la synchronisation à base du contrôle H-infini. Cette approche de synchronisation présente plusieurs avantages tels que l'atténuation du bruit et les perturbations.

La robustification des systèmes non-linéaires était souvent étudié par la technique $H\infty$. Un critère reliant la norme d'erreur de poursuite et le niveau souhaité d'atténuation des perturbations permet d'exprimer les performances de poursuite désirée dans le système. Dans l'espace d'état, ce critère est traduit par une matrice définie positive avec une solution unique de l'équation de Riccati [22].

La synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire commence à attirer une attention croissante en raison de son potentielle d'application en communication et en contrôle sécurisé [23-27].

Le retard est un phénomène très familier dans la transition du signal, en raison de la rapidité de transmission et de la vitesse, ainsi que des congestions [28], est une source d'instabilité et de performances médiocres. En 1977, Mackay et Glass [29] ont déterminé le premier modèle mathématique du système chaotique à retard, après ce domaine a été largement étudié par plusieurs chercheurs dans plusieurs domaines tels que la dynamique des populations, la biologie, l'économie, etc. [30].

Dans l'ensemble, on peut dire que la recherche dans le domaine des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire, en particulier les systèmes fractionnaires chaotiques à retard, est encore à ses débuts, vu que l'analyse de la stabilité de ces systèmes est très difficile au point de concevoir un contrôleur pour contrôler un système fractionnaire chaotique à retard.

Objectifs de la thèse

Dans cette thèse, deux objectifs sont fixés : le premier consiste à une contribution au contrôle d'un système fractionnaire chaotique à retard en se basant sur la commande prédictive et quelques propriétés du calcul fractionnaire avec la réalisation électronique du système contrôlé sous Multisim pour valider la théorie; Tandis que le deuxième consiste au développent d'un nouveau système de communication sécurisée, robuste aux perturbations basé sur les systèmes fractionnaires chaotiques à retard ,Pour montrer l'efficacité de cette approche, des simulations sous Simulink, et une réalisation électronique sous Multisim ont été mises en œuvre.

Structure de la thèse

Ce manuscrit de thèse est organisé comme suit :

Dans le chapitre 1, nous présentons les systèmes fractionnaires chaotiques à retard. Pour se faire, et dans un premier temps, nous faisons un rappel de la théorie du chaos et les outils mathématiques de base du calcul fractionnaire, ainsi que l'approximation de l'opérateur fractionnaire dans le domaine fréquentiel et temporel. Après, nous présentons les équations différentielles fractionnaires et les différentes méthodes permettant leur résolution numérique. Nous consacrons la dernière partie aux systèmes fractionnaires linéaires et non-linéaires et aux systèmes fractionnaires chaotiques à retard.

Au début du chapitre 2, nous rappelons les deux modes de couplage de la synchronisation avec des schémas illustratifs. Ensuite, nous aborderons les différentes méthodes de synchronisation pour les systèmes chaotiques d'ordre entier, et ce afin de les généraliser aux cas des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire. Après, nous présenterons des exemples de synchronisations effectués dans le cas ou le système chaotique d'ordre fractionnaire à retard. Le reste du chapitre est consacré aux différentes techniques de chiffrements chaotiques.

Dans le chapitre 3, nous proposons un nouveau théorème qui garanti la stabilité des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire à retard autours du point d'équilibre. Pour cela, nous commencerons par une présentation de la commande prédictive dans le cas des systèmes chaotiques d'ordre entier, puis nous détaillerons l'approche proposée pour le contrôle des systèmes fractionnaires chaotiques à retard, et qui ce base sur la commande prédictive et quelques propriétés du calcul fractionnaire. Nous utilisons cette approche pour la synchronisation de deux systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire à retard. Nous terminerons le chapitre par une schématisation électronique du système contrôlé sous le logiciel Multisim.

Le chapitre 4 est consacré à la présentation d'un nouveau système de communication sécurisée à base des systèmes fractionnaires chaotiques à retard. On commencera par décrire l'émetteur et le récepteur du système afin de présenter notre contribution qui se base sur le contrôle H-infini et une synthèse qui se repose sur le LMI. Nous montrons comment la synchronisation entre l'émetteur et un récepteur bruité est assurée et ce afin de reconstruire le message transmis par un algorithme de démodulation, où nous schématiserons un crypto système basé sur le système fractionnaire chaotique à retard de Chen. Différentes simulations sont présentées sous le logiciel Multisim.

Enfin, nous clôturons ce manuscrit par une conclusion générale dans laquelle nous revenons sur ce qui a été réalisé le long de cette thèse, et nous présentons les principaux résultats obtenus. Nous soulignons à la fin de cette conclusion les perspectives de ce travail, et qui peuvent faire l'objet de travaux futurs.

Bibliographie

- M. Obaida, A. H. Awad, "A New Approach for Complex Encrypting and Decrypting Data", International Journal of Computer Networks & Communications (IJCNC) Vol.5, No.2, 2013.
- [2] L. Larger, "Chaos cryptography using nonlinear delay dynamics", 2002.
- [3] M. S. Baptista, "Cryptography with chaos, Physics Letters A, 240, pp. 50-54, 1998.
- [4] G. Jakimoski, L. Kocarev, "Chaos and cryptography : block encryption ciphers based on chaotic maps", Circuits and systems I : Fundamental Theory and Application, IEEE Transactions on, 48(2), pp. 163-169, 2001.
- [5] G. Alvarez and S. Li, "Some Basic Cryptographic requirements for chaos-based cryptosystems", International Journal of Bifurcation and Chaos, 16, pp. 2129- 2151, 2006.
- [6] S. M. Baptista, "Cryptography with chaos", Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics, 240(1–2), 50–54,1998.
- [7] A. M. Hamed, & A. Belghoraf, "Chaos Crypto-Système basé sur l'Attracteur de Hénon-Lozi", January, 2009.
- [8] M. Boudiaf, "Tests de validation pour les crypto-systèmes chaotiques", 2014.
- [9] D. del-Castillo-Negrete, "Fractional calculus: basic theory and applications", in: Lectures Presented at the Institute of Mathematics UNAM, Mexico, August 2005.
- [10] R. Almeida, S. Pooseh, & D. F. M. Torres, "Computational Methods in the Fractional Calculus of Variations", 7–22, 2015.
- [11] K. Khettab, "Techniques avancées pour la synthèse et l'amélioration des performances des systèmes de commande adaptative d'ordre fractionnaire pour les processus incertains", Thèse du Doctorat en Sciences Thème, 2016.
- [12] R. Hilfer, "Applications of fractional calculus in physics", World Scientific, Singapore City, 2000.
- [13] B. Mandelbrot, and J. W. Van Ness, "Fractional Brownian Motions", Fractional Noises and Applications. SIAM Review, 10, 422-437, 1968.
- [14] A. Oustaloup, "La Derivation Non Entiere: Theorie, Synthase et Applications", Editions, Hermes Paris: France, 1995.

- [15] I. Podlubny, "Fractional-order systems and $PI^{\lambda}D^{\mu}$ -controllers", IEEE Trans. Automat, Control 44 (1) 208–214, 1999.
- [16] H. Linares, Ch. Baillot, A. Oustaloup, Ch. Ceyral, "Generation of a fractal ground: Application in robotics", in: International Congress in IEEE-SMC CESA'96 IMACS Multiconf, Lille, July 1996.
- [17] F. B. M. Duarte, J. A. T. Macado, "Chaotic phenomena and fractional dynamics in the trajectory control of redundant manipulators", Nolinear Dyn. 29, 315–342, 2002.
- [18] T. T. Hartley, C. F. Lorenzo, and H. K. Qammer, "Chaos in a fractional order Chua's system", IEEE Trans. Circuits Syst, I:Fundam, Theory Appl, 42(8): 485–490, 1995.
- [19] I. Grigorenko, E. Grigorenko, "Chaotic dynamics of the fractional Lorenz system", Phys. Rev. Lett, 91(3): 034101, 2003.
- [20] C. G. Li, G. R. Chen, "Chaos in the fractional order Chen system and its control", Chaos Solitons Fractals, 22(3): 549–554, 2004.
- [21] C. G. Li, G. R. Chen, "Chaos and hyperchaos in fractional order Rössler equations", Physica A, 341: 55–61, 2004.
- [22] A. Isidori, "Nonlinear Control System", Springer-Verlag Berlin, Benlin, 1995.
- [23] Y. Xu, & H. Wang, "Synchronization of fractional-order chaotic systems with gaussian fluctuation by sliding mode control", Abstract and Applied Analysis, *2013*.
- [24] J. L. Sheu, C. W. Chen, C. Y. Chen, & T. W. Weng, "A Two-Channel Secure Communication Using Fractional Chaotic Systems", Engineering and Technology, (2), 1057–1061, 2010.
- [25] M. Bettayeb, M. U. Al–Saggaf, S. Djennoune, "Single channel secure communication scheme based on synchronization of fractional-order chaotic Chua's systems", Transactions of the Institute of Measurement and Control, 40(13), 3651–3664, 2018.
- [26] V. Vafaei, H. Kheiri, & A. J. Akbarfam, "Synchronization of Different Dimensions Fractional-Order Chaotic Systems with Uncertain Parameters and Secure Communication", 0(0000), 1–16.
- [27] A. O. Debbouche, X. Wang, V-T. Pham, & O. Zehrour, "Secure Multiple-Input Multiple-Output Communications Based on F–M Synchronization of Fractional-Order

Chaotic Systems with Non-Identical Dimensions and Orders", *Applied Sciences*, 8(10), 1746, 2018.

- [28] J. Cao, D. W. C. Ho, et Y. Yang, "Projective synchronization of a class of delayed chaotic systems via impulsive control", Physics Letters A, vol. 373, no 35, p. 3128-3133, 2009.
- [29] C. M. Mackey, et L. Glass, "Oscillation and chaos in physio-logical control systems", Science, vol. 197, no 4300, p. 287-289, 1977.
- [30] J. H. Park, et M.O. Kwon, "A novel criterion for delayed feedback control of timedelay chaotic systems", Chaos, Solitons, Fractals, vol.23, no 2, p. 495-501, 2005.

Chapitre 1 : Les systèmes fractionnaires chaotiques à retard

1.1	Introduction	10
1.2	La théorie du chaos	11
1.	2.1 Le chaos	11
1.	2.2 Propriétés du chaos	12
1.	2.3 Routes vers le chaos	14
1.	2.4 Exemples des systèmes chaotiques	15
1.3	Fonctions spécifiques pour le calcul fractionnaire	18
1.	3.1 La fonction Gamma	18
1.	3.2 La fonction de Mittag-Leffler	18
1.4]	Intégration fractionnaire	19
1.5 1	Dérivation fractionnaire	20
1.	5.1 Définition de Riemann-Liouville (R-L)	20
1.	5.2 Définition de Caputo	20
1.	5.3 Définition de Grunwald-Letnikov(G-L)	21
1.6 1	Propriétés des opérateurs fractionnaires	21
1.7	Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire	22
1.	7.1 Eléments de base de la transformée de Laplace	22
1.	7.2 Transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire	22
1.	7.3 Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire	22
1.8	Approximation des opérateurs fractionnaires	23
1.	8.1 Approximation d'intégrateur fractionnaire	23
1.	8.2 Approximation du dérivateur d'ordre fractionnaire	24
1.9	Implémentation par des circuits électriques analogiques des opérateurs d'ordre	
fract	tionnaire	25
1.	9.1 Intégration fractionnaire	25
1.	9.2 Dérivation fractionnaire	26
1.10	Equations différentielles fractionnaires	27
1.	10.1 Equation différentielle à un seul terme	27
1.	10.2 Equation différentielle à deux termes	28
1.	10.3 Equation différentielle à trois termes	29

Chapitre 1 : Les systèmes fractionnaires chaotiques à retard

1.10.4 Equation différentielle générale	30
1.11 Résolution numérique des équations différentielles fractionnaires	31
1.11.1 La méthode d'approximation d'Adams-Bashforth-Moulton	31
1.11.2 La méthode d'approximation décompositionnelle d'Adomian	33
1.11.3 La méthode d'approximation des différences fractionnaires de Gunwald-letnikov	33
1.12 Système d'ordre fractionnaire	34
1.12.1 Représentation d'état d'un système linéaire fractionnaire	34
1.12.2 Commandabilité, observabilité et stabilité d'un système linéaire fractionnaire :	35
1.12.3 Système non-linéaire fractionnaire	36
1.12.4 Méthode directe de Lyapunov (extension au cas fractionnaire)	36
1.13 Système chaotique d'ordre fractionnaire à retard	37
1.13.1 Exemples des systèmes fractionnaires chaotiques à retard	38
1.14 Conclusion	42

Chapitre 1 :

Les systèmes fractionnaires chaotiques à retard

1.1 Introduction

Le chaos est l'un des phénomènes les plus intéressants du XIXe siècle, il s'agit d'un concept mathématique caractérisé par l'instabilité et la non-linéarité. L'instabilité est exprimée par la sensibilité aux conditions initiales. Une petite modification des conditions initiales peut conduire à des résultats imprévisibles. En 1963 [1], Lorenz a découvert le premier attracteur qui décrit le comportement chaotique, de nombreuses applications dans divers domaines se trouvent dans la littérature telle que l'ingénierie, la biologie [2], la médecine [3], la physique [4], et la chimie [5].

Le calcul fractionnaire, a été introduit en 1695, il a été considéré, comme une généralisation du calcul d'ordre entier avec plus de 300 ans d'histoire. Mais son application dans les domaines interdisciplinaires est récente [6,7].

Le système chaotique d'ordre fractionnaire est considéré comme une nouvelle alternative aux communications sécurisées de signaux analogiques et numériques, pour développer des systèmes cryptographiques sûrs et fiables [8].

Dans ce chapitre, nous nous intéressons principalement aux systèmes fractionnaires chaotiques, l'objectif dans un premier temps, est de présenter la théorie du chaos et les outils mathématiques de base du calcul fractionnaire, ainsi quelques méthodes d'approximations et une implémentation par des circuits électriques analogiques des opérateurs fractionnaires. Ensuite nous abordons dans la deuxième partie les équations différentielles fractionnaires et les différentes méthodes de résolution numérique. Ce chapitre se termine par une partie réservée aux systèmes fractionnaires linéaires et non-linéaires et aux systèmes fractionnaires chaotiques à retard, et ce dans le but de présenter la classe du système utilisée dans la suite de ce travail.

1.2 La théorie du chaos

1.2.1 Le chaos

En général, il n'y a pas une définition standard du chaos. En effet, plusieurs définitions ont été rapportées dans la littérature pour définir le chaos. Deux définitions intéressantes de Li-Yorke [9] et celle de Devaney [10] ont été distinguées pour expliquer le comportement chaotique.

• Définition de Li-York :

Si $f: X \to X$ est une application continue, le système (X, f) est dit chaotique au sens de Li-York s'il contient un ensemble brouillé non dénombrable. Selon Li-York, un ensemble brouillé $Y \subset X$, tel que tout couple de points distincts de Y est un couple

Selon Li-York, $f: X \to X$ est un système topologique dynamique, si $x, y \in X$, dans ce cas (x, y) est un couple si et seulement si :

$$\lim_{n \to +\infty} \sup d\left(f^{n}(x), f^{n}(y)\right) \geq 0 \text{ Et } \liminf_{n \to +\infty} d\left(f^{n}(x), f^{n}(y)\right) = 0$$
1.1

• Définition de Devaney :

Selon Devaney, $f : X \to X$ est une fonction chaotique si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- La fonction f est sensible aux conditions initiales, pour tout $x \in X$ et au voisinage de x dans X, il existe un σ >0 tel que

$$\left|f^{n}(x)-f^{n}(y)\right\rangle 0$$

Pour un point $y \in X$ et pour n > 0

-l'ensemble des orbites périodiques de la fonction f , est dense dans X .

-La fonction f est topologiquement transitive, s'il existe un nombre entier n>0 tel que :

$$f^n(Y) \cap Z \neq \phi \tag{1.2}$$

D'où Y représente le sous ensemble ouvert et $Z \subset X$.

1.2.2 Propriétés du chaos

Nous présentons dans cette partie quelques caractéristiques d'un système chaotique :

Sensibilité aux conditions initiales :

Les systèmes chaotiques sont connus par leurs sensibilités aux perturbations. L'évolution du comportement du système chaotique est imprédictible dans le sens qu'il est sensible aux conditions initiales, une faible erreur sur la connaissance de l'état initial dans l'espace de phases risque d'amplifier cette erreur d'une manière considérable.

La figure (1.1) présente l'évolution au cours du temps d'un premier état d'un système chaotique de Lorenz, avec deux conditions initiales très proches (une variation de 0.001), on remarque qu'à partir de la 15 seconde leurs comportements deviennent différents.



Figure 1.1 : Sensibilité aux conditions initiales de l'état *x* du système de Lorenz.

Attracteur étrange :

Les systèmes chaotiques possèdent une structure géométrique particulière appelée l'attracteur étrange, ce dernier est caractérisé par :

- ✤ Un volume nul.
- Une dimension souvent fractale (non entière).
- Une séparation exponentiellement rapide de trajectoires initialement proches.

Exposants de Lyapunov :

C'est une mesure quantitative qui a été développée par Alexander Lyapunov. Cette dernière sert à calculer le taux de divergence entre l'évolution de trajectoires issues des conditions initiales proches. Sa formule est donnée par la relation suivante :

$$\lambda = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln \left| \left(f'(x_{i-1}) \right) \right|$$
 1.3

- Si $\lambda < 0$, l'orbite est attractive vers un point fixe ou une orbite périodique stable.
- Si $\lambda = 0$, dans ce cas l'orbite est un point fixe neutre, d'où la distance constante entre les orbites.
- Si $\lambda > 0$, l'orbite est instable et chaotique, dans le cas d'un système continu, l'espace de phase est un ensemble de lignes croisées contrairement aux points du système discret qui n'ont aucun rapport de liaison.

Aspect aléatoire

L'aspect aléatoire signifie que chaque système chaotique évolue d'une manière non périodique et non prédictible. La figure (1.2) illustre l'évolution du troisième état du système chaotique de Lorenz, et la figure (1.3) illustre l'évolution d'un signal sinusoïdal périodique.



Figure 1.2 : Évolution dans le temps d'un état du système chaotique de Lorenz.



Figure 1.3 : Évolution dans le temps d'un système sinusoïde.

1.2.3 Routes vers le chaos

Doublement de période : ce scénario a été découvert par Mitchel Feigenbaum et aussi par deux chercheurs français Coullet et Charles Tresser. Pour les systèmes périodiques, l'augmentation de la contrainte provoque l'apparition d'un doublement de période. Cette dernière est ensuite multipliée par 4, puis 8, etc. Ce processus de doublement continue jusqu'à un certain moment où la période devient infinie, dans ce cas le système peut être considéré comme un système chaotique [11,12].

Intermittence : ce scénario a été décrit par Yves-Pomeau[13]comme étant un mouvement périodique stable entrecoupé par des bouffées de turbulence. À l'augmentation du paramètre, les bouffés deviennent plus en plus fréquents, ensuite le chaos domine le comportement du système.

La quasi-périodicité : ce scénario a été considéré pour la première fois par David Ruelle et Floris Takens[14] pour un système dynamique périodique. Lorsqu'on change le paramètre, cela produit l'apparition d'une deuxième période si le rapport avec la première période n'est pas rationnel. Le comportement dans ce cas est quasi périodique. En outre, changer le paramètre provoque l'apparition d'une troisième fréquence, et ainsi de suite jusqu'à l'obtention du comportement chaotique.

1.2.4 Exemples des systèmes chaotiques

Dans cette partie nous allons présenter deux systèmes chaotiques à temps continu : le système de Lorenz et le système de Rössler. Nous allons également présenter deux autres systèmes chaotiques à temps discret : Récurrence de Hénon et une suite logistique.

- Système chaotique de Lorenz

En 1963, Edward Norton Lorenz a introduit le premier modèle mathématique du chaos, il s'agit d'un système de 3 dimensions en temps continu qui représente une convection thermique, dont la représentation du système est la suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a(y(t) - x(t)) \\ \dot{y}(t) = bx(t) - y(t) - x(t)z(t) \\ \dot{z}(t) = x(t)y(t) - cz(t) \end{cases}$$
1.4

Où *a,b,c* représentent les paramètres du système.

Pour $a = 10, b = 28, c = \frac{8}{3}$ et avec des conditions initiales x(0) = 1, y(0) = 2 et z(0) = 3l'attracteur de Lorenz est représenté dans la figure (1.4).



Figure 1.4 : Attracteur chaotique de Lorenz.

- Système chaotique de Rössler

Le système de Rössler a été introduit en 1976 par Otto Rössler. Il s'agit d'un système de 3 dimensions en temps continu, ces équations plus utiles dans la modélisation de l'équilibre dans les réactions chimiques, dont la représentation du système est la suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (-y(t) - z(t)) \\ \dot{y}(t) = x(t) + ay(t) \\ \dot{z}(t) = b + z(t)x(t) - cz(t) \end{cases}$$
1.5

Où *a,b,c* représentent les paramètres du système.

Pour a = 0.398, b = 2, c = 4 et avec des conditions initiales x(0) = 1, y(0) = 2 et z(0) = 3l'attracteur de Rössler est représenté dans la figure (1.5).



Figure 1.5 : Attracteur chaotique de Rössler.

Récurrence de Hénon

En 1976, Michel Hénon a réalisé un système dynamique à temps discret à 2 dimensions présenté comme suit :

$$\begin{cases} x(n+1) = 1 - ax^{2}(n) + y(n) \\ y(n+1) = bx(n) \end{cases}$$
1.6

Où *a* et *b* sont deux paramètres du système.

Pour a = 1.4, b = 0.3 et x(0) = 0.1, y(0) = 0.1 comme conditions initiales, l'attracteur de Hénon est représenté dans la figure (1.6).



Figure 1.6 : Attracteur chaotique de Hénon.

- Suite logistique

Cette suite a été introduite par le biologiste Robert May. Elle décrit l'évolution de la population d'une espèce [15]. Sa formule est donnée par l'équation suivante :

$$x_{k+1} = rx_k \left(1 - x_k\right) \tag{1.7}$$

Avec

 $x(k) \in [0,1]$ représente le vecteur d'état de l'année k de la population.

 $0 \le r \le 4$ le paramètre de croissance de la population, pour r = 4, le système a un comportement chaotique [16].

1.3 Fonctions spécifiques pour le calcul fractionnaire

1.3.1 La fonction Gamma

L'une des fonctions utilisées dans le calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(Z)$ Cette fonction prolonge la factorielle aux valeurs réelles [17], et elle est définie par l'intégrale suivante [18]:

$$\Gamma(Z) = \int_{0}^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, Z \rangle 0$$
 1.8

D'où $\Gamma(1) = 1, \Gamma(0_+) = +\infty$

Deux propriétés principales caractérisent la fonction Gamma :

• Une intégration par partie de sa formule conduit à une relation de récurrence donnée comme suit :

$$\Gamma(Z+1) = Z\Gamma(Z)$$

 Elle possède des pôles simples pour Z = 0, -1, -2, -3 où sa formule est donnée comme suit:

$$\Gamma(Z) = \varphi(Z) + \frac{(-1)^0}{0!} \frac{1}{0+Z} + \frac{(-1)^1}{1!} \frac{1}{1+Z} + \frac{(-1)^2}{2!} \frac{1}{2+Z} + \cdots$$

Avec :

$$\varphi(\mathbf{Z}) = \int_{1}^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

Cette propriété montre que la fonction Gamma tend asymptotiquement vers l'infinie pour des valeurs entières négatives.

1.3.2 La fonction de Mittag-Leffler

La fonction de Mittag-Leffler joue le même rôle que la fonction exponentielle dans le calcul entier. Sa formule a été introduite par G.M.Mittag-Leffler [19,20], et elle est exprimée par la fonction suivante [21,22] :

$$E_{\alpha}(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Z^{k}}{\Gamma(\alpha k+1)} (\alpha \rangle 0)$$
 1.9

Agarwal [23] a introduit une nouvelle formule à deux paramètres α, β définie par le développement en série suivant [21,22] :

$$E_{\alpha,\beta}(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Z^{k}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} (\alpha \rangle 0, \beta \rangle 0)$$
1.10

A partir de la relation précédente, on peut montrer que :

$$E_{1,1}(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Z^k}{n!} = e^z$$
 1.11

1.4 Intégration fractionnaire

Soit f une fonction continue de $[t_0, t]$ dans R, on a :

$$\left(If\left(t\right)\right) = \int_{t_0}^{t} f\left(\tau\right) d\tau$$
 1.12

Pour une primitive d'ordre n fois, on obtient la relation suivante :

$$\left(I^{n}f\left(t\right)\right) = \frac{1}{\left(n-1\right)!} \int_{t_{0}}^{t} \left(t-\tau\right)^{n-1} f\left(\tau\right) d\tau \qquad 1.13$$

En utilisant la fonction Gamma d'Euler (1.8), on aura la définition suivante :

Définition : Soit f une fonction intégrable définie sur $[t_0,\infty)$ et ρ $\rangle 0$. L'intégrale d'ordre ρ de la fonction f de borne inférieure t_0 définie par :

$$\left({}_{t_0}I_t^{\rho}f(t)\right) = \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{\rho-1} f(\tau) d\tau \qquad 1.14$$

Est appelée intégrale d'ordre non entier de Riemann-Liouville (R-L).

1.5 Dérivation fractionnaire

1.5.1 Définition de Riemann-Liouville (R-L)

Soit *f* une fonction localement intégrable définie sur $[t_0, +\infty)$ *n* entier positif, $\rho \in R^+$ et avec $R(\rho)$ 0. La dérivée d'ordre ρ de *f* de borne inferieure t_0 est définie comme suit [24]:

$${}^{RL}_{t_0} D^{\rho}_{t} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \Big(I^{(n-\rho)}_{t_0} f(t) \Big) = \frac{1}{\Gamma(n-\rho)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-\rho-1} f(\tau) d\tau$$
 1.15

D'où : $(n-1)\langle \rho \langle n \rangle$

 $\Gamma(\cdot)$: est la fonction Gamma d'Euler.

 $_{t_0}^{RL} D_t^{\rho} f(t)$: signifie la dérivée d'ordre non entier ρ de la fonction f(t) entre t_0 et t selon la définition de Riemann-Liouville.

1.5.2 Définition de Caputo

Caputo a introduit une nouvelle définition de la dérivée d'ordre fractionnaire donnée par la formule suivante [25]:

$${}_{t_{0}}^{C}D_{t}^{\rho}f(t) \triangleq I^{n-\rho}D^{n}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\rho)} \int_{t_{0}}^{t} \frac{f^{n}(\tau)}{(t-\tau)^{\rho-n+1}} d\tau$$
 1.16

Avec :

n : un entier vérifiant l'inégalité $(n-1)\langle \rho \langle n \rangle$

 $f^{n}(\tau)$: une dérivée d'ordre *n* par rapport à τ

 $_{t_0}^{C} D_t^{\rho} f(t)$: désigne la dérivée d'ordre non entier ρ de la fonction f(t) entre t_0 et t selon la définition de Caputo.

Remarque

La formule de Caputo peut être reformulée en fonction de la formule de Riemann-Liouville comme suit :

$${}^{RL}_{t_0} D^{\rho}_t f(t) = {}^{C}_{t_0} D^{\rho}_t f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\rho}}{\Gamma(k-\rho+1)}$$
 1.17

Ou bien :

$${}_{t_0}^{C} D_t^{\rho} f(t) = {}_{t_0}^{RL} D_t^{\rho} \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)} \left(0^+ \right) \frac{t^k}{k!} \right)$$
 1.18

1.5.3 Définition de Grunwald-Letnikov(G-L)

Grunwald a basé sur la généralisation de la dérivée classique d'une fonction f(t) d'ordre ρ pour arriver à la formule suivante [26] :

$${}_{t_0}^{GL} D_t^{\rho} f(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{\rho}} \sum_{j=0}^{\left(\frac{t-t_0}{h}\right)} (-1)^j {\rho \choose j} f(t-jh)$$
1.19

Où : $\left[\frac{t-a}{h}\right] = \left(\frac{t-t_0}{h}\right)$ dénote la partie entière et $\binom{\rho}{j} = \frac{\Gamma(\rho+1)}{j!\Gamma(\rho-j+1)}$ sont des coefficients

binomiaux de newton.

1.6 Propriétés des opérateurs fractionnaires

Voici quelques propriétés principales des dérivées non entières fractionnaires selon [27] et [28]:

- 1. Si f(t) est une fonction analytique de t, alors sa dérivée d'ordre fractionnaire _{to} D_t^{ρ} est une fonction analytique de t et ρ
- 2. pour $\rho = n$, où *n* est un entier, l'opérateur $_{t_0}D_t^{\rho}$ donne le même résultat que la différentiation classique d'ordre entier *n*.
- 3. Pour $\rho = 0$, l'opérateur $_{t_0} D_t^{\rho}$ est l'opérateur identité :

$$_{t_0}D_t^0f(t)=f(t)$$

4. La différentiation et l'intégration d'ordre fractionnaire sont des opérations linéaires :

$$_{t_{0}}D_{t}^{\rho}\left\{af\left(t\right)+bg\left(t\right)\right\}=a_{t_{0}}D_{t}^{\rho}f\left(t\right)+b_{t_{0}}D_{t}^{\rho}g\left(t\right)$$

5. Une loi additive d'index :

$$_{t_{0}}D_{t}^{\rho}\cdot_{t_{0}}D_{t}^{\sigma}f(t) =_{t_{0}}D_{t}^{\sigma}D_{t}^{\rho}f(t) =_{t_{0}}D_{t}^{\sigma+\rho}f(t)$$

1.7 Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire

1.7.1 Eléments de base de la transformée de Laplace

La transformée de Laplace F(s) d'une fonction f(t) est définie par :

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t), s) = \int_{0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt \qquad 1.20$$

Où f(t) est appelée la fonction originale qui peut être retrouvée à partir de la transformée inverse de Laplace de F(s)

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s);t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds , c = Re(s) \rangle 0$$
 1.21

f(t) et g(t) deux fonctions nulles pour $t\langle 0, F(s)$ et G(s) leurs transformées de Laplace respectivement , la transformée de Laplace de la convolution de deux fonctions est donnée par la relation suivante :

$$\mathcal{L}\left\{f\left(t\right)^{*}g\left(t\right);s\right\} = F\left(s\right)G\left(s\right)$$
 1.22

f(t) une fonction originale avec *n* un ordre entier de cette fonction. La transformée de Laplace de cette dernière est donnée par la relation suivante :

$$\mathcal{L}\left\{f^{\rho}(t);s\right\} = s^{\rho}F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{(\rho-k-1)} = s^{\rho}F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{k}f^{(n-k-1)}$$
 1.23

1.7.2 Transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire

La transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre non entier de l'équation (1.12) est donnée par la relation suivante [29] :

$$\mathcal{L}\left\{I_{t}^{\rho}f\left(t\right)\right\} = s^{-\rho}F\left(s\right)$$
 1.24

1.7.3 Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire

Dérivée de Riemann-Liouville (R-L)

La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire ρ , selon la définition de Riemann-Liouville est donnée par [28] :

$$\mathcal{L}\left\{{}^{RL}_{0}D^{\rho}_{t}f\left(t\right)\right\} = s^{\rho}F\left(s\right) - \sum_{k=0}^{n-1}s^{k}\left[{}^{RL}_{0}D^{\rho-k-1}f\left(t\right)\right]_{t=0}$$
1.25

Avec $(n-1)\langle \rho \langle n \rangle$

Dérivée de Caputo

La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire ρ de Caputo est donnée par [28] :

$$\mathcal{L}\left\{{}_{0}^{C}D_{t}^{\rho}f(t)\right\} = s^{\rho}F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\rho-k-1}f^{(k)}(0)$$
 1.26

> Dérivée de Grunwald-Letnikov(G-L)

Selon la définition de Grunwald-Letnikov, la transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire ρ est donnée par [28] :

$$\mathcal{L}\left\{{}^{GL}_{0}D^{\rho}_{t}f\left(t\right)\right\} = s^{\rho}F\left(s\right)$$
 1.27

1.8 Approximation des opérateurs fractionnaires

1.8.1 Approximation d'intégrateur fractionnaire

La fonction de transfert de l'intégrale d'ordre fractionnaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante :

$$G_{I}(s) = \frac{1}{s^{\rho}}, \ 0 \langle \rho \langle 1$$
 1.28

Où :

s = jw représente la fréquence complexe.

 ρ : un nombre réel positif tel que $0\langle \rho \langle 1 \rangle$

Dans une bande de fréquence donnée $[w_h, w_b]$, cet opérateur fractionnaire peut être modélisé par un pôle de puissance fractionnaire (PPF) dont la fonction de transfert est donnée par [30] :

$$H_{I}(s) = \frac{K_{I}}{\left(1 + \left(\frac{s}{w_{c}}\right)\right)^{\rho}} = \frac{1}{s^{\rho}}$$
1.29

Avec

 $K_I = \frac{1}{w_c^{\rho}}$, et w_c est la fréquence de coupure de PPF.

L'approximation du PPF par une fonction rationnelle est donnée par [31]:

$$H_{I}(s) = \frac{K_{I}}{\left(1 + \left(\frac{s}{w_{c}}\right)\right)^{\rho}} \cong \frac{K_{I} \prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{Z_{i}}\right)}{\prod_{i=0}^{N} \left(1 + \frac{s}{P_{i}}\right)}$$

$$1.30$$

Les Z_i sont les zéros de l'approximation et les P_i représentent les pôles de l'approximation Ces derniers peuvent être calculés par les relations suivantes :

$$Z_{i} = (ab)^{i} ap_{0} \text{ pour } i = 0, 1, ..., N - 1$$
$$P_{i} = (ab)^{i} p_{0} \text{ pour } i = 0, 1, ..., N$$
1.31

Avec $z_0 = ap_0$ et $p_0 = w_c \sqrt{b}$

et a, b représentent les rapports de position pour une erreur d'approximation y en dB, leurs formules est comme suit[31]:

$$a = 10^{\frac{y}{10(1-\rho)}}, b = 10^{\frac{y}{10\rho}}$$
 1.32

1.8.2 Approximation du dérivateur d'ordre fractionnaire

La fonction de transfert du dérivateur d'ordre fractionnaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante :

$$G_D(s) = s^{\rho} \tag{1.33}$$

Avec

s = jw représente la fréquence complexe, ρ : un nombre réel positif tel que $0\langle \rho \langle 1 \rangle$

Dans une bande de fréquence donnée $[w_h, w_b]$, cet opérateur fractionnaire peut être modélisé par un zéro de puissance fractionnaire(ZPF) dont la fonction de transfert est donnée par [30] :

$$G_D(s) = K_D \left(1 + \frac{s}{w_c}\right)^{\rho}$$
 1.34

Avec $K_D = w_c^{\rho}$ et w_c est la fréquence de coupure de ZPF. L'approximation du ZPF par une fonction rationnelle donnée par [31]:

$$H_{I}(s) = K_{D}\left(1 + \frac{s}{w_{c}}\right)^{\rho} \cong K_{D}\frac{\prod_{i=0}^{N}\left(1 + \frac{s}{Z_{i}}\right)}{\prod_{i=0}^{N}\left(1 + \frac{s}{P_{i}}\right)}$$
1.35

Les Z_i et les P_i représentent les zéros et les pôles respectivement de l'approximation. Ces derniers peuvent être calculés par les relations suivantes :

$$Z_{i} = (ab)^{i} z_{0} \text{ pour } i = 0, 1, ..., N$$
$$P_{i} = (ab)^{i} az_{0} \text{ pour } i = 0, 1, ..., N$$
1.36

Avec

$$z_0 = w_c \sqrt{b}$$
 et $p_0 = a z_0$

et a,b représentent les rapports de position pour une erreur d'approximation y en dB, leurs formules sont données comme suit[31] :

$$a = 10^{\frac{y}{10(1-\rho)}}, b = 10^{\frac{y}{10\rho}}$$
 1.37

1.9 Implémentation par des circuits électriques analogiques des opérateurs d'ordre fractionnaire

1.9.1 Intégration fractionnaire

La fonction rationnelle d'une approximation de l'opérateur d'intégrateur d'ordre fractionnaire est donnée par la formule suivante :

$$H_{I}(s) = \sum_{i=0}^{N} \frac{h_{i}}{1 + \frac{s}{p_{i}}}$$
 1.38

Où les coefficients h_i sont les résidus des pôles. Leurs valeurs sont déterminées par :

$$h_{i} = K_{I} \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left(1 - \frac{(ab)^{i} p_{0}}{(ab)^{j} a p_{0}} \right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^{N} \left(1 - \frac{(ab)^{i} p_{0}}{(ab)^{j} p_{0}} \right)} = K_{I} \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left(1 - \frac{(ab)^{i-j}}{a} \right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^{N} \left(1 - (ab)^{i-j} \right)}$$

$$1.39$$

La fonction rationnelle (1.38) représente une impédance d'un réseau RC de type Foster de la première forme schématisé comme suit [30] :


Figure 1.7 : Réseau analogique équivalent d'intégrateur d'ordre fractionnaire.

L'impédance de ce réseau est donnée par la formule suivante :

$$Z(s) = \sum_{i=0}^{N} \left(\frac{R_i}{1 + sR_iC_i} \right)$$
 1.40

À partir des deux équations (1.38) et (1.40), on peut écrire :

$$R_i = h_i$$
 et $C_i = \frac{1}{R_i h_i}$ pour $i = 0, 1, ..., N$ 1.41

1.9.2 Dérivation fractionnaire

La fonction rationnelle d'une approximation de l'opérateur d'une dérivée d'ordre fractionnaire est donnée par la forme suivante:

$$G_{D}(s) = G_{0} + \sum_{i=0}^{N} \frac{g_{i}s}{\left(1 + \frac{s}{p_{i}}\right)}$$
 1.42

Où

 $G_0 = K_D.$

Les coefficients g_i sont les résidus des pôles déterminés par :

$$g_{i} = K_{D} \frac{\prod_{j=0}^{N} \left(1 - a(ab)^{i-j}\right)}{\left(-az_{0}(ab)^{i}\right) \prod_{j=0, i \neq j}^{N} \left(1 - (ab)^{(i-j)}\right)}$$
 1.43

La fonction rationnelle (1.42) représente l'admittance d'un réseau RC de type Foster de la deuxième forme dont le schéma est représenté dans la figure (1.8) :



Figure 1.8 : Réseau analogique équivalent du dérivateur d'ordre fractionnaire.

La valeur d'admittance est donnée par la relation suivante :

$$Y(s) = \frac{1}{R_p} + \sum_{i=0}^{N} \left(\frac{sC_i}{1 + sR_iC_i} \right)$$
 1.44

À partir de deux équations (1.42) et (1.44) on peut écrire :

$$R_{p} = \frac{1}{G_{0}}, C_{i} = g_{i}, R_{i} = \frac{1}{g_{i}p_{i}}$$
1.45

1.10 Equations différentielles fractionnaires

1.10.1 Equation différentielle à un seul terme

Soit un système décrit par une équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire à coefficient constant comme suit :

$$a_{t_0} D_t^{\rho} y(t) = f(t)$$
 1.46

Avec ρ réel et positif.

La transformée de la place de l'équation (1.46) est :

$$as^{\rho}Y(s) = F(s)$$
1.47

Avec

$$Y(s) = \frac{1}{as^{\rho}} F(s)$$
 1.48

Soit $g_1(t)$ une fonction appelée la fonction de Green à un seul terme [28]. Elle est définie par :

$$g_{I}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{as^{\rho}}\right\} = \frac{1}{a} \frac{t^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)}$$
 1.49

La solution y(t) de l'équation (1.46) est obtenue par la convolution suivante :

$$y(t) = \int_{0}^{t} g_{I}(t-\tau) f(\tau) d\tau = \frac{1}{a\Gamma(\rho)} \int_{0}^{t} (t-\tau)^{\rho-I} f(\tau) d\tau$$
 1.50

$$y(t) = \frac{1}{a} {}_{o} D_{t}^{-\rho} f(t)$$
 1.51

1.10.2 Equation différentielle à deux termes

Soit un système décrit par une équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire à coefficients constants comme suit :

$$a_{t_0} D^{\rho}_{t} y(t) + by(t) = f(t)$$
 1.52

Avec ρ réel et positif.

La transformée de la place de l'équation (1.52) est :

$$as^{\rho}Y(s) + bY(s) = F(s)$$
 1.53

Avec

$$Y(s) = \frac{1}{a} \frac{1}{s^{\rho} + \frac{b}{a}} F(s)$$
 1.54

Soit $g_2(t)$ une fonction appelée la fonction de Green à deux termes [28] définie par :

$$g_{2}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{a}\frac{1}{s^{\rho} + b/a}\right\} = \frac{1}{a}t^{\rho-1}E_{\rho,\rho}\left(\frac{-b}{a}t^{\rho}\right)$$
1.55

Où $E_{\rho,\rho}(.)$ est la fonction de Mittag–Leffler.

La solution y(t) de l'équation (152) est obtenue par la convolution suivante :

$$y(t) = \int_{0}^{t} g_{2}(t-\tau) f(\tau) d\tau \qquad 1.56$$

1.10.3 Equation différentielle à trois termes

Soit un système décrit par une équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire à coefficients constants comme suit:

$$a_{t_0} D^{\rho}_{t} y(t) + b_{t_0} D^{\beta}_{t} y(t) + c y(t) = f(t)$$
 1.57

Avec $\rho \, \text{et} \, \beta$ des réels positifs.

La transformée de la place de l'équation (1.57) est :

$$as^{\rho}Y(s) + bs^{\beta}Y(s) + cY(s) = F(s)$$
 1.58

Avec

$$Y(s) = \frac{1}{as^{\rho} + bs^{\beta} + c} F(s)$$
 1.59

En considérant que :

$$g_{\beta}(s) = \frac{1}{as^{\rho} + bs^{\beta} + c}$$
 1.60

On peut réécrire $g_3(s)$ sous la forme suivante :

$$g_{3}(s) = \frac{1}{c} \frac{cs^{-\beta}}{as^{\rho-\beta} + b} \frac{1}{1 + \frac{cs^{-\beta}}{as^{\rho-\beta}}}$$
 1.61

$$g_{3}(s) = \frac{1}{c} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-I\right)^{k} \left(\frac{c}{a}\right)^{k+1} \frac{s^{-(\beta k+\beta)}}{\left(s^{\rho-\beta} + \frac{b}{a}\right)^{k+1}}$$
 1.62

La transformée de la place inverse de $g_3(s)$ est donnée par :

$$G_{3}(t) = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{k!} \left(\frac{c}{a}\right)^{k} t^{\rho(k+1)-1} E^{(k)}{}_{\rho-\beta,\rho+\beta k} \left(-\frac{b}{a} t^{\rho-\beta}\right)$$
 1.63

Où $E_{\rho-\beta,\rho+\beta k}$ (.) est la fonction de Mittag-leffler à deux paramètres.

La solution y(t) de l'équation (1.57) est obtenue par la convolution suivante :

$$y(t) = \int_{0}^{t} G_{3}(t-\tau) f(\tau) d\tau \qquad 1.64$$

1.10.4 Equation différentielle générale

Soit un système décrit par une équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire à coefficients constants à n-termes suivante :

$$a_{n t_0} D^{\rho_n}_{t} y(t) + a_{n-1 t_0} D^{\rho_{n-1}}_{t} y(t) + \dots + a_{1 t_0} D^{\rho_1}_{t} y(t) + a_{0 t_0} D^{\rho_0}_{t} y(t) = f(t)$$
 1.65

Avec $\rho_n, \rho_{n-1}, \dots, \rho_l, \rho_0$ des réels positifs.

La transformée de la place de l'équation (1.65) est :

$$a_{n}s^{\rho_{n}}Y(s) + a_{n-1}s^{\rho_{n-1}}Y(s) + \dots + a_{1}s^{\rho_{1}}Y(s) + a_{0}s^{\rho_{0}}Y(s) = F(s)$$
 1.66

Avec

$$Y(s) = \frac{1}{a_n s^{\rho_n} + a_{n-1} s^{\rho_{n-1}} + \dots + a_1 s^{\rho_1} + a_0 s^{\rho_0}} F(s)$$
 1.67

Considérons que :

$$g_n(s) = \frac{1}{a_n s^{\rho_n} + a_{n-1} s^{\rho_{n-1}} + \dots + a_1 s^{\rho_1} + a_0 s^{\rho_0}}$$
 1.68

Dans ce cas, on peut réécrire $g_n(s)$ sous la forme suivante :

$$g_{n}(s) = \frac{1}{a_{n}s^{\rho_{n}} + a_{n-l}s^{\rho_{n-l}}} \frac{1}{1 + \left(\sum_{k=0}^{n-2} a_{k}s^{\rho_{k}} / a_{n}s^{\rho_{n}} + a_{n-l}s^{\rho_{n-l}}\right)}$$
 1.69

$$g_{n}(s) = \frac{a_{n}^{-l} s^{-\rho_{n-l}}}{s^{\rho_{n}-\rho_{n-l}} + \frac{a_{n-l}}{a_{n}}} \frac{1}{1 + \left(a_{n}^{-l} s^{-\rho_{n-l}} \sum_{k=0}^{n-2} a_{k} s^{\rho_{k}} / s^{\rho_{n}-\rho_{n-l}} + \frac{a_{n-l}}{a_{n}}\right)}$$
1.70

$$g_{n}(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(-I\right)^{j} a_{n}^{-l} s^{-\rho_{n-l}}}{\left(s^{\rho_{n}-\rho_{n-l}} + \frac{a_{n-l}}{a_{n}}\right)^{j+l}} \left(\sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{a_{k}}{a_{n}}\right) s^{\rho_{k}-\rho_{n-l}}\right)^{j}$$
 1.71

$$g_{n}(s) = \frac{1}{a_{n}} \sum_{j=0}^{\infty} (-I)^{j} \sum_{\substack{k_{0}+k_{1}+\cdots+k_{n-2}=j\\k_{0}\geq0;\cdots,k_{n-2}\geq0}} (j;k_{0},k_{1},\cdots,k_{n-2}) \prod_{i=0}^{n-2} \left(\frac{a_{i}}{a_{n}}\right)^{k_{i}} s^{(\rho_{i}-\rho_{i-1})k_{i}}$$
1.72

Avec j et $(k_0, k_1, \dots, k_{n-2})$ des coefficients [24]

L'application de la transformée de Laplace de l'équation (1.72), terme par terme est donnée par la relation suivante :

$$G_{n}(t) = \frac{1}{a_{n}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j}}{j!} \sum_{\substack{k_{0}+k_{1}+\cdots+k_{n-2}=j\\k_{0}\geq0;\cdots,k_{n-2}\geq0}} (j;k_{0},k_{1},\cdots,k_{n-2}) + \prod_{i=0}^{n-2} \left(\frac{a_{i}}{a_{n}}\right)^{k_{i}} t^{(\rho_{n}-\rho_{n-1})j+\rho_{n}+\sum_{l=0}^{n-2}(\rho_{n}-\rho_{l})k_{l-l}} \times E_{\rho_{n}-\rho_{n-1},\rho_{n}} + \sum_{l=0}^{n-2} (\rho_{n-l}-\rho_{l})k_{l} \left(\frac{-a_{n-l}}{a_{n}}t^{\rho_{n}-\rho_{n-l}}\right)$$

$$1.73$$

La solution y(t) de l'équation (1.66) est obtenue par la convolution suivante :

$$y(t) = \int_{0}^{t} G_{n}(t-\tau) f(\tau) d\tau \qquad 1.74$$

1.11 Résolution numérique des équations différentielles fractionnaires

1.11.1 La méthode d'approximation d'Adams-Bashforth-Moulton

Soit l'équation différentielle de type Caputo présentée sous la forme suivante :

$$\begin{cases} {}^{c}D_{0}^{\rho}x(t) = g(t,x(t)) \\ D_{0}^{\rho}x(0) = x_{0}^{j}, j = 0, 1, ..., n-1 \end{cases}$$
1.75

La solution de l'équation (1.75) est équivalente à l'équation non linéaire de Volterra [32] qui est donnée par l'intégrale suivante :

$$x(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t^{j}}{j!} x^{j}(0) + \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_{0}^{t} (t-m)^{\rho-1} g(m, x(m)) dm$$
 1.76

L'approximation d'Adams est basée sur le principe de remplacer l'équation (1.75) par l'équation de Volterra, en utilisant la formule pour remplacer l'intégrale par les nœuds t_i , pour l = 0, 1, ..., n + 1[33]:

$$\int_{0}^{t_{n+l}} (t_{n+l} - r)^{\rho - l} f(r) dr \simeq \int_{0}^{t_{n+l}} (t_{n+l} - r)^{\rho - l} f_{n+l}(r) dr = \frac{h^{\rho}}{\rho(\rho + l)} \sum_{l=0}^{n+l} a_{l,n+l} g(t_l)$$
 1.77

Avec

$$a_{l,n+1} = \begin{cases} n^{\rho+1} - (n-\rho)(n+1)^{\rho} \\ (n-l+2)^{\rho+1} + (n-l)^{\rho+1} - 2(n-l+1)^{\rho+1} & l \le \rho \le n \\ 1 & l = n+1 \end{cases}$$
1.78

On obtient ainsi la formule de correction [33] :

$$x_{h}(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{(\rho)-1} x_{0}^{k} \frac{t_{n+1}^{j}}{j!} + \frac{h^{\rho}}{\Gamma(\rho+2)} g(t_{n+1}) x_{h}^{pr}(t_{n+1}) + \frac{h^{\rho}}{\Gamma(\rho+2)} \sum_{\rho=0}^{n} a_{l,n+1} g(t_{l}, y_{l})$$

$$1.79$$

En se basant sur la méthode des rectangles, l'intégrale sera remplacée de la même manière précédemment pour pouvoir déterminer la formule de prédiction :

$$\int_{0}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - z) f(z) dz \approx \sum_{l=0}^{n} b_{l,n+1} f(t_l)$$
 1.80

Avec :

$$b_{l,n+l} = \frac{h^{\rho}}{\rho} \left(\left(n - l + l \right)^{\rho} \left(n - l \right)^{\rho} \right)$$
 1.81

Par conséquent, on obtient la valeur prédicateur déterminée par la méthode explicite d'Adams-Bahforth[33] :

$$x_{h}^{pr}(t_{n+1}) = \sum_{l=0}^{(\rho)-l} x_{0}^{(l)} \frac{t_{n+1}^{l}}{l!} + \frac{1}{\Gamma(\rho)} \sum_{l=0}^{n} b_{l,n+1} g(t_{l}, x_{l})$$
 1.82

L'erreur estimée est déterminée par la formule suivante :

$$Max_{l=0,1,..,N} |x(t_{l}) - x_{h}(t_{l})| = S(h^{pr})$$
1.83

Où

 $pr = min(2, l + \rho)$

1.11.2 La méthode d'approximation décompositionnelle d'Adomian

Le principe de la méthode décompositionnelle d'Adomian est de construire une solution de l'équation d'intégrale de Volterra (1.76) sous forme d'une série [34,35] avec $x_i(t)$ où $i = 0, 1, ..., \infty$ comme solution de base, comme suit :

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t) = f(t) + \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_0^t (t-m)^{\rho-1} \sum_{i=0}^{\infty} A_i(m) dm$$
 1.84

Avec :

$$f(t) = \sum_{g=0}^{n-1} \frac{t^{j}}{j!} b_{j}$$
 1.85

Et $A_i(m)$ représentent les polynômes d'Adomian dont les expressions sont les suivantes:

$${}_{g}A_{i}(m) = \left[\frac{1}{i!}\frac{d^{i}}{d\gamma^{i}}g\left(t,\sum_{k=0}^{i}\gamma^{i}x_{n}\right)\right]_{\gamma=0}$$
1.86

Où: γ est un paramètre.

Cette approximation est définie par :

$$\begin{cases} x_{0}(t) = f(t) \\ x_{i+1}(t) = \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_{0}^{t} (t-m)^{\rho-1} {}_{g} A_{i}(m) dm \end{cases}$$
1.87

Les preuves de convergence ont été étudiées par la méthode du point fixe par Yves Cherruault [36,37].

1.11.3 La méthode d'approximation des différences fractionnaires de Gunwald-letnikov

Soit l'équation différentielle de type Gunwald-letnikov présentée comme suit :

$$\begin{cases} {}^{GL}D^{\rho}x(t) = f(t,x(t)) \\ D_0^{\rho}x(0) = 0 \end{cases} \quad pour \quad 0 \prec \rho \prec 1$$
1.88

Avec

 $^{GL}D^{\rho}$ est l'opérateur différentiel de Gunwald-Letnikov.

D'après la définition de la dérivée de Gunwald-Letnikov la discrétisation de l'équation (1.88) [38,39]:

$$D_{t}^{\rho}g(t) = \frac{\Delta_{h}^{\rho}f(t_{k})}{h^{\rho}} = h^{-\rho} \sum_{j=0}^{-\rho} \left(-I\right)^{j} {\rho \choose j} g_{k-j} \text{ avec } j = 0, 1, \dots$$
 1.89

$$D_{t}^{\rho}g(t) \equiv \frac{\Delta_{h}^{\rho}f(t_{k})}{h^{\rho}} = h^{-\rho}\sum_{j=0}^{k} (c_{j}^{\rho})g_{k-j}$$
 1.90

Où:

 $c_j^{\rho} = (-I)^j {\rho \choose j}$ sont des coefficients binomiaux, sont donnés par la relation suivante [38,39]:

$$c_0^{\rho} = 1$$
, $c_j^{\rho} = \left(1 - \frac{1 + \rho}{j}\right) c_{j-1}^{\rho}$ 1.91

Cette méthode est connue par le développement en série entière d'une fonction génératrice. Elle nécessite les conditions initiales, pour cela elle est bien adaptée aux problèmes physiques [40].

1.12 Système d'ordre fractionnaire

1.12.1 Représentation d'état d'un système linéaire fractionnaire

La représentation d'état d'un système linéaire continu à temps invariant et d'ordre fractionnaire est comme suit [41] :

$$\begin{cases} D^{\rho} x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$
1.92

Où

x(t) est le vecteur d'état,

u(t) est le vecteur d'entrée du système,

y(t) le vecteur de sortie du système,

A, B, C, D sont des matrices de dimensions appropriées,

 ρ l'ordre de dérivation tel que $0 \langle \rho \langle l$

1.12.2 Commandabilité, observabilité et stabilité d'un système linéaire fractionnaire :

La commandabilité

Le système d'ordre fractionnaire présenté par l'équation (1.92) est commandable si et seulement si la matrice C est de rang plein [41], d'où la matrice C est présentée comme suit :

$$C = \begin{bmatrix} B, AB, A^2B, \cdots, A^{n-1}B \end{bmatrix}$$
 1.93

L'observabilité

Le système d'ordre fractionnaire présenté par l'équation (1.92) est observable si et seulement si la matrice O est de rang plein [41], d'où la matrice O est présentée comme suit :

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$
1.94

n: le nombre des états.

La Stabilité

Contrairement aux systèmes d'ordre entier, les systèmes linéaires d'ordre fractionnaire peuvent avoir des racines dans la moitié droite du plan complexe et être stables. Le système présenté dans la relation (1.92) est asymptotiquement stable, si et seulement si [42]

$$\left| \arg\left(\lambda_{i}\right) \right| > \rho \frac{\pi}{2} \operatorname{pour}\left(l \le i \le n\right)$$
 1.95

 λ_i :sont les valeurs propres de la matrice A

Le système (1.92) est stable, si et seulement si

$$\left| \arg\left(\lambda_{i}\right) \right| \ge \rho \frac{\pi}{2} \operatorname{pour}\left(l \le i \le n\right)$$
 1.96



Figure 1.9: Zones de stabilité et d'instabilité des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire ρ avec $0\langle \rho \langle l$

1.12.3 Système non-linéaire fractionnaire

Considérons le système non-linéaire d'ordre fractionnaire suivant [43] :

$$D^{\rho}x = f(x,t;g), t \in [t_0,\infty)$$
1.97

Avec $\rho = [\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n]$, pour $0 \prec \rho_i \prec 1$, (i = 1, 2, ..., n) pour le vecteur d'état du système appartenant à la région $\Psi \subset \mathbb{R}^n$, g est un vecteur de paramètre du système qui peut varier dans l'intervalle $I^n \subset \mathbb{R}^m$ avec $m \le n$, et f(...) une fonction non linéaire.

1.12.4 Méthode directe de Lyapunov (extension au cas fractionnaire)

Dans cette section, nous discutons l'extension de la méthode directe de Lyapunov pour les systèmes non-linéaires d'ordre fractionnaire qui conduit à la stabilité au sens de Mittag-Leffler [44, 45].

Soit l'équation différentielle non linéaire fractionnaire d'ordre ρ définit par l'équation (1.97) avec D^{ρ} désigne l'opérateur fractionnaire au sens de Rieman Liouville ou Caputo à la fois.

Définition 1.1: [42] la solution de l'équation(1.97) est dite Mittag-Leffler stable si :

$$\|x(t)\| \le \left\{ mx(t_0)(t-t_0)^{-\gamma} E_{\rho,l}(-\lambda(t-t_0)^{\gamma}) \right\}^b$$
 1.98

Où
$$0 \prec \rho \prec 1, \gamma \in [0, 1 - \rho], \lambda \ge 0, b \succ 0, m(0) = 0, m(x) \ge 0$$
 et $m(x)$ est localement
Lipschitizienne sur $t \in \beta \subset \mathbb{R}^n$ avec m_0 comme constante de Lipschitz.

Théorème 1.1: soit x = 0 un point d'équilibre du système (1.97) et $D \in \mathbb{R}^N$ un domaine contenant l'origine.Soit $V(t, x(t)): [0, \infty) \times D \to \mathbb{R}$ une fonction continument dérivable et localement Lipschitizienne par rapport à x telle que :

$$\rho_{I} \left\| x(t) \right\|^{a} \leq V(t, x(t)) \leq \rho_{2} \left\| x(t) \right\|^{ab}$$

$$1.99$$

$$D^{\beta}V(t,x(t)) \leq -\rho_{3} \left\| x(t) \right\|^{ab}$$
1.100

Où $t \ge 0, x \in D, \beta \in (0,1), \rho_1, \rho_2, \rho_3, a$ et b sont des constantes positives. Alors x = 0 est Mittag-Leffler stable.

Théorème 1.2: soit x = 0 un point d'équilibre du système (1.97) et $D \in \mathbb{R}^N$ un domaine contenant l'origine .soit $V(t, x(t)) : [0, \infty) \times D \to \mathbb{R}$ une fonction continument dérivable et localement Lipschitizienne par rapport à x telle que :

$$\rho_{I} \| x(t) \|^{a} \leq V(t, x(t)) \leq \rho_{2} D^{-\eta} \| x(t) \|^{ab}$$
 1.101

$$D^{\beta}V(t,x(t)) \leq -\rho_{3} \left\| x(t) \right\|^{ab}$$
 1.102

Où $t \ge 0, x \in D, \beta \in (0,1), \eta \ne \beta, \eta \succ 0, |\beta - \eta| \prec 1, \rho_1, \rho_2, \rho_3, a$ et *b* sont des constantes positives. Alors x = 0 est asymptotiquement stable.

1.13 Système chaotique d'ordre fractionnaire à retard

Le retard temporel est un phénomène très familier dans la transition du signal, en raison de la rapidité de la transmission, ainsi que des congestions [46]. En 1977, Mackay et Glass [47] ont déterminé le premier modèle mathématique du système chaotique à retard. Ce domaine a été largement étudié par plusieurs chercheurs dans plusieurs domaines.

Récemment, les systèmes fractionnaires chaotiques à retard commencent à recevoir un intérêt considérable spécialement dans les communications sécurisées, grâce a leur ordre fractionnaire qui est utilisée comme clé secrète, et l'instabilité induite par le retard ce qui

entraine une sécurité renforcée. On peut décrire ce type de système par l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} D^{\alpha} x(t) = Ax(t) + A_{\tau} x(t-\tau) + Bf(t) \\ x(t) = \Phi(t) \quad pour \quad t \in [0, \tau] \end{cases}$$
1.103

Avec

 $\Phi(t): R \to R^n$ fonction vectorielle.

 τ un retard positif.

1.13.1 Exemples des systèmes fractionnaires chaotiques à retard

Dans cette partie, on présente quelques systèmes fractionnaires chaotiques à retard, présentés par Jianeng Tang dans [48].

• Système fractionnaire chaotique à retard de LIU

Le modèle chaotique de LIU a été inventé par LIU et AL en 2009[49]. Daftardar-Gejji et Bhalekar[50] ont étudié, par la suite, sa version fractionnaire. Le système fractionnaire à retard de LIU est défini comme suit [48] :

$$\begin{cases} D^{\alpha} x(t) = -ax(t) - ey^{2}(t) \\ D^{\alpha} y(t) = bx(t) - kx(t)z(t) \\ D^{\alpha} z(t) = mx(t)y(t) - cz(t - \tau) \end{cases}$$
1.104

a = 1, b = 2.5, c = 5, e = 1, m = 5, k = 4 avec $\tau = 0.02$ et $\alpha = 0.985$

La figure (1.10) montre l'attracteur de LIU en trois dimensions x(t), y(t) et z(t)





• Système fractionnaire chaotique à retard de Chen

Le système chaotique de Chen a été introduit en 1999 par Chen et Ueta [51]. Il est défini comme suit [48] :

$$\begin{cases} D^{\alpha} x(t) = a(y(t) - x(t)) \\ D^{\alpha} y(t) = (c - a) x(t) + c y(t) - x(t) z(t) \\ D^{\alpha} z(t) = x(t) y(t) - b z(t - \tau) \end{cases}$$
1.105

a = 35, b = 3, c = 28 avec $\tau = 0.2$ et $\alpha = 0.98$

Les figures ci-après (figure (1.11), figure (1.12)) démontrent le comportement chaotique du système (1.105).



Figure 1.11: L'évolution au cours du temps des états x, y et z du système chaotique fractionnaire à retard de Chen.



Figure 1.12: Attracteur chaotique d'ordre fractionnaire du système de Chen à retard.

• Système fractionnaire chaotique à retard de LÜ

En 2014 Jianeng Tanga a ajouté le terme du retard au système fractionnaire chaotique de LÜ, d'où le système est devenu comme suit :

$$\begin{cases} D^{\alpha} x(t) = a(y(t) - x(t)) \\ D^{\alpha} y(t) = cx(t) - x(t)z(t) \\ D^{\alpha} z(t) = x(t)y(t) - bz(t - \tau) \end{cases}$$
1.106

$$a = 35, b = 3, c = 28$$
 avec $\tau = 1$ et $\alpha = 0.78$

Les figures ci-après (figure (1.13), figure (1.14)) démontrent le comportement chaotique du système (1.106).





Figure 1.13 : L'évolution au cours du temps des états x, y et z du système chaotique fractionnaire à retard de LÜ.



Figure 1.14 : Attracteur chaotique d'ordre fractionnaire du système de LÜ à retard.

1.14 Conclusion

Ce chapitre est consacré aux systèmes fractionnaires chaotiques à retard .Pour cela, dans la première partie, nous avons abordé les différentes définitions du chaos, avec ses principales caractéristiques. Dans la deuxième partie, nous avons rappelé les fonctions utiles dans le calcul fractionnaire, ainsi que les différentes définitions d'intégration et de dérivation fractionnaire avec leurs transformées de Laplace. Nous avons également abordé aussi les outils nécessaires pour l'implémentation et la résolution des opérateurs d'ordre fractionnaire. Finalement, nous avons mis en évidence les systèmes fractionnaires non-linéaires à retard et nous avons présenté quelques modèles de ce type de système.

Le prochain chapitre sera consacré à l'étude de différents principes de synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre entier et d'ordre fractionnaire, ainsi les travaux proposés afin de synchroniser les systèmes fractionnaires chaotiques à retard.

Bibliographie

- L. Norton, "Deterministic nonperiodic flow", Journal of the atmospheric sciences, vol. 20, no 2, p. 130-141, 1963
- [2] D. Hans, Holden, V. Arunn, et Olsen, Lars. Folke, "Chaos in biological systems", Springer Science, Business Media, 2013.
- [3] Ditto, W.L, "Applications of chaos in biology and medicine", Chaos Chang.Nat. Sci. Med. 376, 175-202, 1996.
- [4] W.Lauterborn, et U.Parlitz, "Methods of chaos physics and their application to acoustics". The Journal of the Acoustical Society of America vol. 84, no 6, p. 1975-1993, 1988.
- [5] H. Steven. Strogatz, "Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering", Hachette UK, 2014.
- [6] X. Yang, X. Liu, H. Dang, W. He, "The dynamics and synchronization of a fractionalorder system with complex variables", In : Abstract and Applied Analysis, Hindawi, 2014.
- Y. YAN, "Synchronization for a class of uncertain fractional order chaotic systems with unknown parameters using a robust adaptive sliding mode controller", Mathematical problems in engineering, Hindawi, 2016.
- [8] K. A. Singh, K. V. Yadav, et S. Das, "Synchronization between fractional order complex chaotic systems with uncertainty", Optik-International Journal for Light and Electron Optics, vol. 133, p. 98-107, 2017.
- [9] T.Y. Li, & J.A. Jorke, "Period three implies chaos", American Mathematical Monthly, 82, pp. 481—485, 1975.
- [10] R.L. Devaney, "An Introduction to Chaotic Dynamical Systems", Addison-Wesley, New York, 1987.
- [11] D. Kaplan, L. Glass, "Finite-difference equations", Understanding nonlinear dynamics, New-York: Springer-Verlag, 1-53, 1953.
- [12] R. Hilborn, "Chaos and Nonlinear Dynamics an Introduction for Scientists and Engineers", Oxford Student Edition, 1994.
- [13] P. Bergé, Y. Pomeau, and C. Vidal, "L'ordre dans le chaos", Collection Enseignement des Sciences, Hermann édition, 1988.
- [14] D. Ruelle, F. Takens, "On the nature of turbulence", Commun. Math. Phys. 20 :67-192, 1971.

- [15] R. May, "Simple mathematical models with very complicated dynamics", Nature, 261, pp. 459-467, 1976.
- [16] F. Anstett, "Les systèmes dynamiques chaotiques pour le chiffrement : Synthèse et cryptanalyse", Thèse de Doctorat. Université Henri Poincaré Nancy 1, 2006.
- [17] E. Artin, "Einfuhrung in die Theorie der Gammafunktion", Hamburger Math, Einzelschr, Heft 1, B.G. Teubner, Leipzig/Berlin, 1931, English translation: "The Gamma Function", Holt, Rinehart and Winston, New York, 1964.
- [18] "Functional fractional calculus for system identification and control", springer verlag Berlin, 2008.
- [19] G.M. Mittag-Leffler, "sur la nouvelle fonction $E_{\alpha}(x)$ ", C.R.Académie des sciences, 137, 554-558, 1903.
- [20] G.M. Mittag-Leffler, "sur la representation analytique d'une Brance uniforme d'une fonction homogéne", Acta Mathematica 29,101-182, 1905.
- [21] A. Erdelyi, "Higher Transcendental Functions", volume 1 .Mc Graw-Hill, New Yark, 1955.
- [22] A. Erdelyi ,"Higher Transcendental Functions",volume 2 ,Mc Graw-Hill ,New Yark ,1955.
- [23] R.P. Agarwal, "Apropos d'une note de M.Poire Hunbert", C.A.Academie des sciences, 236,2031-2032,1953.
- [24] S.G.Samko,A.A.kilbas etO.I.Marichav, "Fractional Integrals and Derivatives :theory and applications", Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1993.
- [25] M. Caputo, "Linear models of dissipation whose q is almost frequency independent", Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 2(13) : 529-539, 1967.
- [26] K.S. Miller, B.Ross, "An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations", John Wiley and Sons 1993.
- [27] Functional fractional calculus for system identification and control", springer –verlag ,Berlin, 2008.
- [28] I. Podlubny, "Fractional Diffrential equations", Academic Press, SanDiego, 1999.
- [29] A. Monge , Y.Q. Chen, B.M. Vinagre, D. Xue, V. Feliu, "Fractional-order Systems and Controls", Fundamentals and Applications, Springer-verlag, London, 2010.
- [30] A. Charef, "Analogue realization of fractional order integrator, differentiator and fractional $PI^{\lambda}D^{\mu}$ controller", IEE Proceedings of Control Theory and Applications, vol. 153, no. 6, pp. 714-720, 2006.

- [31] I. Pan and S. Das, "Intelligent Fractional Order Systems and Control", Berlin, Germany: Springer, 2013.
- [32] K. Diethelm and N. J. Ford, "Numerical solution of the bagley-torvik equation", BIT 42(3), 490–507, 2002.
- [33] K. Diethelm, N. J. Ford, and A. D. Freed, "A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations", Nonlinear Dynamics, 29:322, 2002.
- [34] G. Adomian, "A review of the decomposition method in applied mathematics", J. Math.Anal.Appl. 44, 135–501, 1988.
- [35] G. Adomian, "Solving Frontier problems of physics : the decomposition method", Boston :Kluwer Academic Publishers ,1994.
- [36] Y. Cherruault, "Optimisation: Méthodes locales et globales", Presses Universitaires de France (P.U.F), 1999.
- [37] Y. Cherruault, "Modèles et méthodes mathématiques pour les sciences du vivant", Presses Universitaires de France (P.U.F) ,1998.
- [38] I. Podlubny. "Fractional-order system and fractional-order controllers", Technical Report UEF-03-94, Institute of Experimental Physics, Academy of Sciences, Slovakia, 1994.
- [39] N. Ibrahima," Généralisation du lemme deGronwall-Bellman pour la stabilisationdes systèmes fractionnaires", PhD thesis, Ecole doctorale IAEM Lorraine, Maroc, 2011.
- [40] A. Monge, Y.Q. Chen, B.M. Vinagre, D. Xue, V. Feliu, "Fractional-Order Systems and Controls Fundamentals and Applications", Springer-Verlag, England, UK, 2010.
- [41] D. Matignon, "Stability results for fractional differential equation with application to control processing", Proc. CESA'96, Symp. On Control, Optimisation and Supervision, pp. 963-968, Lille, France, 1996.
- [42] T. Houmor, "Analyse du chaos dans un Système d'équations différentielles fractionnaires", PhD thesis, Université de Constantine 1, Algérie, 2014.
- [43] E. Z. Serrano, "Fractional Order Chaotic Systems", PhD thesis 2017.
- [44] H. Delavari, D. Baleanu, and J. Sadati, "Stability analysis of caputo fractional-order nonlinear systems revisited", Nonlinear Dyn, 67:2433-2439, 2012.
- [45] Y. Li, Y. Q. Chen, and I. Podlubny, "Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized mittag-leer stability", Computers and Mathematics with Applications, 59:1810-1821, 2010.

- [46] CAO, Jinde, HO, Daniel WC, et Yang, Yong qing, "Projective synchronization of a class of delayed chaotic systems via impulsive control", Physics Letters A, vol 373, no 35, p. 3128-3133, 2009.
- [47] Mackey, Michael C. et Glass, Leon, "Oscillation and chaos in physio-logical control systems", Science, vol. 197, no 4300, p. 287-289, 1997.
- [48] J. Tang, "Synchronization of different fractional order time-delay chaotic systems using active control", Math. Probl.Eng, vol. 2014, 2014.
- [49] C. Liu, L. Liu, and T. Liu, "A novel three-dimensional autonomous chaos system", Chaos, Solitons and Fractals, vol.39, no.4, pp.1950–1958, 2009.
- [50] V. Daftardar-Gejji and S. Bhalekar, "Chaos in fractional ordered Liu system", Computers & Mathematics with Applications, vol.59, no. 3, pp. 1117–1127, 2010.
- [51] G. Chen and T. Ueta, "Yet another chaotic attractor", International Journal of Bifurcation and Chaos, vol.9, no.7, pp.1465–1466, 1999.

2.1 Introduction	48
2.2 Synchronisation chaotique	49
2.2.1 Synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre entier	50
2.2.1.1 Synchronisation par partition du système	50
2.2.1.2 Synchronisation identique	51
2.2.1.3 Synchronisation projective	52
2.2.1.4 Synchronisation de phase	52
2.2.1.5 Synchronisation par boucle fermée	53
2.2.1.6 Synchronisation retardée	54
2.2.1.7 Synchronisation à base d'observateur	54
2.2.2 Synchronisation des systèmes d'ordre fractionnaire	55
2.2.2.1 Synchronisation par partition du système	55
2.2.2.2 Synchronisation identique	56
2.2.2.3 Synchronisation projective	57
2.2.2.4 Synchronisation par contrôle actif	57
2.2.2.5 Synchronisation par commande adaptative	58
2.2.2.6 Synchronisation à base d'observateurs	58
2.2.3 Synchronisation des systèmes d'ordre fractionnaire à retard	58
2.3 Chiffrement basé sur le chaos	59
2.3.1 Cryptage par addition	59
2.3.2 Cryptage par inclusion	60
2.3.3 Cryptage par modulation paramétrique	60
2.3.4 Cryptage combiné	61
2.3.5 Cryptage par décalage	61
2.4 Conclusion	63

Chapitre 2 :

Synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre entier et fractionnaire à retard

2.1 Introduction

L'histoire de la synchronisation revient au dix-septième siècle, précisément en 1658 [1], quand le chercheur Christian Huygens a observé le phénomène de la synchronisation pour deux horloges à balancier. Ces deux dernières se synchronisent parfaitement même en présence de perturbations, c'est-à-dire elles ont le même mouvement en phase et en fréquence.

La synchronisation du chaos a reçu une attention considérable en raison de ses applications potentielles dans la communication sécurisée, depuis les travaux de Pecora et Carroll [2]. Ils ont prouvé qu'on peut synchroniser le chaos par l'approche maitre-esclave. Leur contribution a ouvert la voie pour développer de nombreuses méthodes et techniques pour la synchronisation des systèmes chaotiques.

Récemment, avec l'étude des systèmes différentiels d'ordre fractionnaire, la synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire est devenue un domaine de recherche actif, et il commence à susciter de plus en plus d'intérêt, en raison de son défi théorique et son potentiel étendu d'applications dans les systèmes physiques, et la communication sécurisée.

Les retards sont toujours présents dans la nature et ils se produisent dans de nombreux systèmes physiques, biologiques et techniques en raison de la propagation des signaux finis et des vitesses de traitement, où ils sont introduits délibérément via des boucles de contrôle externe [3].

Du point de vue mathématique, le terme du délai rend un système dimensionnel infini contrairement au système sans retard. Le comportement des systèmes à retard dépend non seulement des états présents, mais également des états antérieurs. La présence du retard peut provoquer des comportements d'oscillation et d'instabilité [4].

La synchronisation des systèmes fractionnaires chaotiques à retard est un sujet d'actualité. En effet, très peu d'approches ont été proposées pour synchroniser les systèmes fractionnaires chaotiques à retard.

Dans ce chapitre, nous présentons les deux types de couplage de synchronisation, ensuite nous rappelons les différentes méthodes de synchronisation qui existent pour les systèmes chaotiques, afin de généraliser au cas des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire. Par la suite, nous donnons quelques exemples de recherches effectuées dans le cas des systèmes fractionnaires chaotiques à retard. Nous terminons le chapitre par une présentation de différents types de chiffrage chaotique avec schématisation de leurs principes.

2.2 Synchronisation chaotique

Dans le cas des systèmes périodiques, ont dit que deux systèmes sont synchronisés lorsqu'ils sont en phase. Dans le contexte de la cryptographie chaotique, deux systèmes chaotiques se synchronisent lorsque les deux trajectoires de deux systèmes convergent vers le même point. Tous les types de synchronisation qu'on va voir dans le chapitre sont regroupés selon deux modes de couplage : couplage unidirectionnel et couplage bidirectionnel.

• Synchronisation unidirectionnelle

La synchronisation est réalisée en un seul sens, c'est-à-dire le système chaotique (maitre) a une action sur le deuxième système chaotique (esclave), mais le contraire est faux. Ce couplage est fait à l'aide d'un élément qui fonctionne dans un seul sens.

La figure (2.1) illustre le principe du couplage unidirectionnel.



Figure 2.1 : Couplage unidirectionnel.

• Synchronisation bidirectionnelle

Contrairement à la synchronisation unidirectionnelle, ici la synchronisation se fait en deux sens.

Prenant un exemple de deux systèmes, donnés sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = F_1(X(t)) + P_1(Y(t) - X(t)) \\ \dot{Y}(t) = F_2(Y(t)) + P_2(X(t) - Y(t)) \end{cases}$$
2.1

D'où $X, Y \in \mathbb{R}^n$ représentent les états de deux systèmes, $F_1, F_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, P_1, P_2$ deux matrices diagonales.

La synchronisation consiste à trouver les deux matrices de telle sorte que :

$$\lim_{t \to \infty} Y(t) - X(t) = 0$$
 2.2

La figure (2.2) illustre le principe du couplage bidirectionnel.



Figure 2.2 : Couplage bidirectionnel.

2.2.1 Synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre entier

Dans cette section, nous définirons et nous donnerons le principe de chaque type de synchronisation pour les systèmes chaotiques d'ordre entier.

2.2.1.1 Synchronisation par partition du système

Cette approche a été proposée par Pecora et carrol [2]. Son principe est basé sur la décomposition du système en deux sous-systèmes : l'un maitre et l'autre esclave. Ces derniers peuvent se synchroniser sous l'effet d'un couplage avec un signal commun.

Considérons le système chaotique suivant :

$$\dot{x}(t) = f\left(x(t)\right) \tag{2.3}$$

Et une sortie scalaire définit par :

$$y = h(x) \tag{2.4}$$

Le système (2.3) est décomposé en deux autres systèmes comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_{1}(t) = f_{1}(x_{1}(t), x_{2}(t)) \\ \dot{x}_{2}(t) = f_{2}(x_{1}(t), x_{y}(t)) \end{cases}$$
2.5

D'où

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t)]^T$$

Le système est partitionné de façon à ce que les exposants de Lyapunov conditionnels [2] du sous-système (2.4) soient négatifs.

Qualitativement, les exposants de Lyapunov conditionnels caractérisent la stabilité de (2.3). Si tous les exposants de Lyapunov conditionnels sont négatifs, alors la trajectoire $x_2(t)$ est asymptotiquement stable [2].

La figure (2.3) illustre le principe de la synchronisation par partition du système.



Figure 2.3 : Principe de synchronisation par partition du système.

2.2.1.2 Synchronisation identique

La synchronisation identique ou complète est utilisée dans le cas des systèmes identiques. Si ces systèmes sont totalement différents, on parle alors de la synchronisation généralisée [5,6].

Prenons deux systèmes identiques, représentés par les équations suivantes :

$$\dot{x}(t) = f_1(x(t),t)$$
2.6

$$\dot{y}(t) = f_2(x(t), y(t), t)$$
 2.7

On dit qu'il ya une synchronisation entre les deux systèmes si la condition suivante est vérifiée :

$$\lim_{t \to \infty} \left| y(t) - x(t) \right| = 0 \tag{2.8}$$

2.2.1.3 Synchronisation projective

La synchronisation projective a été rapportée la première fois par Mainieri et Rehacek [7] pour les systèmes chaotiques d'ordre entier .On a une synchronisation projective [8,9] si la condition suivante est vérifiée :

$$\exists \alpha_i \quad tel \, que, \lim_{k \to \infty} x_{si}(k) - \alpha_i x_{mi}(k-j) = 0, \forall x_s(0), x_m(0), \forall i = 1, \dots, n$$

 x_m, x_s : sont des vecteurs d'état de dimension n.

C'est-à-dire les variables d'états du système chaotique esclave se synchronisent avec une constante multiple de l'état du système chaotique maitre. On a une synchronisation complète lorsque les α_i sont égaux, cette approche est récemment utilisée pour synchroniser un système fractionnaire [10].

2.2.1.4 Synchronisation de phase

L'utilisation de ce type de synchronisation nous conduit tous d'abord à calculer les phases des systèmes périodiques $\theta_1 et \theta_2$, on utilisant l'approche analytique [11] tel que :

$$\left|n\theta_1 - m\theta_2\right| < c \tag{2.10}$$

Où

m, n: deux entiers naturels, et c: une constante positive.

Pour étudier la synchronisation de phase entre deux systèmes, il est nécessaire de déterminer l'amplitude et la phase d'un signal analytique d'un système chaotique.

Voici un signal analytique représenté sous la forme suivante :

$$\mathcal{G}(t) = h(t) + j\tilde{h}(t)$$
 2.11

Avec

h(t): transformée de Hilbert de la série temporel h(t), son expression est donnée par la relation suivante :

$$\tilde{h}(t) = \frac{1}{\pi} V P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(\tau)}{t - \tau} d\tau$$
2.12

Avec

VP :la valeur principale de Cauchy de l'intégrale.

Le signal analytique $\mathcal{G}(t)$ peut-être réécrit comme suit :

$$\vartheta(t) = A(t)e^{j\theta(t)}$$
 2.13

A : l'amplitude du signal $\mathcal{G}(t)$

 $\theta(t)$: la phase du signal $\vartheta(t)$

2.2.1.5 Synchronisation par boucle fermée

Les méthodes précédentes sont sensibles aux bruits et aux variations paramétriques, Prenant l'émetteur qui s'écrit sous la forme suivante :

 $\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ \dot{y}(t) = g(x(t)) \end{cases}$ 2.14

Et le récepteur qui peut être d'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \hat{x}(t) = f\left(\hat{x}(t)\right) + e\left(y(t) - \hat{y}(t)\right) \\ \hat{y}(t) = g\left(\hat{x}(t)\right) \end{cases}$$
2.15

e : est une fonction d'erreur entre l'émetteur et le récepteur. Elle est calculée d'une manière d'assurer la synchronisation, et est injectée en contre-réaction. Cette technique a été utilisée pour synchroniser un système WINDMI fractionnaire [12].



Figure 2.4 : Principe de synchronisation en boucle fermée.

2.2.1.6 Synchronisation retardée

Ce type de synchronisation apparait dans le cas des systèmes chaotiques non identiques. Dans [13] l'auteur a démontré qu'il avait un phénomène de synchronisation retardée, où le système esclave converge vers le système maitre. On a une synchronisation retardée si la condition suivante est vérifiée :

$$\lim_{t\to\infty} x_s(t) x_m(t-\tau) = 0 \qquad 2.16$$

Avec

 $x_s(t)$: l'état du système maitre

 $x_m(t)$:l'état du système esclave

 τ : un retard positif.

2.2.1.7 Synchronisation à base d'observateur

Ce type de synchronisation est fréquemment utilisé en littérature. Son principe se base sur l'application d'un observateur au niveau du récepteur pour pouvoir estimer les états inconnus du système dynamique. Pour cela, une condition nécessaire doit être vérifiée et que le système

défini au niveau du récepteur $\dot{\hat{x}} = \hat{f}(\hat{x}, u)$ est un observateur converge pour le système défini au niveau d'émetteur $\dot{x} = f(x, u)$.

C'est à dire, il faut déterminer une fonction f telle que :

$$\lim_{t \to \infty} x(t) - \hat{x}(t) = 0$$
 2.17

On trouve dans la littérature plusieurs travaux sur la synchronisation à base d'observateurs:

- Observateur à mode glissant : ce type d'observateur est utilisé beaucoup récemment, parmi les nombreuses références on peut citer : [14-18].
- Observateurs à grand gain : on trouve comme références par exemple [19-22].
- Observateur d'ordre réduit, qui se base sur la méthode LMI pour la synthèse d'observateur on les trouve dans [23-26].

La figure (2.5) illustre le principe de synchronisation à base d'observateurs.



Figure 2.5 : Principe de synchronisation à base d'observateurs.

2.2.2 Synchronisation des systèmes d'ordre fractionnaire

Beaucoup de chercheurs ont étudié la possibilité d'étendre les méthodes et les techniques de synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre entier aux cas des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire. Pour cela, on va présenter quelques méthodes, souvent utilisées et quelques techniques, avec des travaux effectués dans ce contexte pour chaque méthode.

2.2.2.1 Synchronisation par partition du système

La définition précédente de la synchronisation par partition du système pour les systèmes chaotiques d'ordre entier reste valable pour les systèmes d'ordre fractionnaire.

Supposons les deux systèmes suivants :

$$\begin{cases} \frac{dx^{\alpha}}{dt} = f(x(t)) \\ \frac{dy^{\alpha}}{dt} = f(y(t)) \end{cases}$$
2.18

Dans ce cas, le système (2.18) devient :

$$\begin{cases} \frac{dx_{1}^{\alpha}}{dt} = f_{1}(x_{1}(t), x_{2}(t)) \\ \frac{dx_{2}^{\alpha}}{dt} = f_{2}(x_{1}(t), x_{2}(t)) \end{cases}$$
2.19

Où

 α : L'ordre fractionnaire de deux systèmes maitre, et esclave et $x(t) = [x_1(t), x_2(t)]^T$

Le système esclave devient :

$$\frac{dy^{\alpha}}{dt} = f_2\left(x_1(t), y(t)\right)$$
 2.20

2.2.2.2 Synchronisation identique

Supposons deux systèmes fractionnaires liés par un accouplement unidirectionnel donné par les équations suivantes :

$$\frac{dx^{\alpha}(t)}{dt} = f_1(x(t), t)$$
2.21

$$\frac{dy^{\alpha}(t)}{dt} = f_2(x(t), y(t), t)$$
 2.22

Il existe une synchronisation entre les deux systèmes (2.21) et (2.22) si :

$$\lim_{t \to \infty} \left| y(t) - x(t) \right| = 0 \tag{2.23}$$

C'est-à-dire, le problème devient l'étude de la synchronisation du système d'erreur qui est défini par :

$$\frac{de^{\alpha}(t)}{dt} = f_2(x(t), y(t)) - f_1(x(t))$$
2.24

On se basant sur le développement de Taylor généralisé au point zéro, le système (2.24) devient :

$$\frac{de^{\alpha}(t)}{dt} = J(x(t)).e(t)$$
2.25

J(x(t)): une matrice jacobienne associée, elle est définie comme suit :

$$J(x(t)) = \left(\frac{\partial f_2(x(t), y(t))}{\partial y(t)}\right)_{x=y}$$
 2.26

Pour étudier la stabilité du système d'erreur, on peut appliquer la méthode de Lyapunov directe (voir chapitre 1).

2.2.2.3 Synchronisation projective

La synchronisation projective est une méthode robuste, qui fait partie des méthodes les plus utilisées pour synchroniser les systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire. On peut citer quelques travaux ayant utilisée une synchronisation projective: Dans [27], les auteurs ont proposé une nouvelle approche pour la construction de la synchronisation projective d'un système unifié d'ordre fractionnaire. La méthode générale pour atteindre la synchronisation projective est basée sur quelques propriétés essentielles sur le calcul fractionnaire et le théorème de stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire développé en [28]. De plus, une fonction projective est proposée afin d'assurer la synchronisation entre les différents ordres fractionnaires du système chaotique de Lorenz et celui de Chen dans [29].

2.2.2.4 Synchronisation par contrôle actif

Une autre technique de synchronisation, la synchronisation à base du contrôle actif, est une technique puissante. On trouve de nombreuses références disponibles en littératures :

Dans [30], les auteurs ont utilisé la méthode du contrôle actif pour la synchronisation de deux paires différentes de systèmes d'ordre fractionnaire: les systèmes de Newton – Leipnik et Lorenz en tant que systèmes esclaves séparément, avec le système chaotique Lotka-Volterra en tant que système maître. Par la suite, Behinfaraz et badamchizadeh [31] ont proposé une nouvelle méthode permettant de réaliser la synchronisation entre deux systèmes d'ordre fractionnaire. Pour la synchronisation, un contrôle de retour non linéaire est proposé sur la base du concept de technique de contrôle actif.

2.2.2.5 Synchronisation par commande adaptative

La synchronisation par la commande adaptative pour les systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire est un nouveau sujet. En référence [32],Yuan et Shi ont développé une technique de contrôle en mode glissant adaptatif pour stabiliser les systèmes chaotiques en présence d'incertitudes et de perturbations externes, dont les limites sont inconnues. Par la suite Li [33] a proposé un contrôleur simple et général est conçu pour réaliser le contrôle d'un système chaotique d'ordre fractionnaire avec un paramètre d'incertitude et perturbation externe, par une nouvelle technique de contrôle adaptatif. Par ailleurs, des schémas adaptatifs sont proposés pour le contrôle et la synchronisation du système chaotique d'ordre fractionnaire das la référence [34].

2.2.2.6 Synchronisation à base d'observateurs

La plupart des recherches effectuées dans le contexte de synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire, se reposent sur l'estimation des états des systèmes à base d'observateurs, tel que les observateurs par mode glissant [35-39]. Ce type d'observateur est robuste face aux incertitudes et perturbations externes. On trouve aussi les observateurs LMI réduits [40-43]. Ces observateurs sont largement utilisés dans la synchronisation des systèmes fractionnaires chaotiques. Le filtre de Kalman étendu [44,45] est souvent utilisé dans la communication sécurisée.

2.2.3 Synchronisation des systèmes d'ordre fractionnaire à retard

Les études et les travaux sur la synchronisation des systèmes fractionnaires chaotiques à retard sont limités. En effet, très peu d'approches ont été proposées pour synchroniser les systèmes fractionnaires chaotiques à retard.

Pour cette raison, nous présentons les recherches effectuées dans ce contexte.

Dans leur contribution Haorui et Juan ont appliqué le critère de stabilité de Lyapunov pour la synthèse d'une commande à mode glissant adaptatif et la synchronisation de deux systèmes fractionnaires chaotiques à retard [46]. Dans [47], Çetintas et Çelik ont conçu un contrôleur proportionnel en utilisant la méthode de contrôle actif. Ce dernier a été testé pour assurer une synchronisation entre deux systèmes identiques fractionnaires chaotiques à retard. Sur la base de la théorie de la stabilité de Lyapunov et le lemme de Barbalat généralisé, de nouvelles conditions suffisantes sont dérivées pour garantir la stabilité asymptotique du système d'erreur

de synchronisation impulsive adaptative pour une classe de système chaotique d'ordre fractionnaire à retard [48]. Une nouvelle approche a été proposée pour la conception d'un contrôleur et une règle de mise à jour des paramètres inconnus pour la synchronisation du système d'ordre fractionnaire avec plusieurs retards et prouver à l'aide du théorème fractionnaire de Lyapunov. Sur la base de l'approche proposée, la synchronisation d'un système fractionnaire chaotique retardé avec et sans paramètres inconnus est réalisé [49]. Tsung a proposé dans son article un contrôleur en mode glissent flou adaptatif pour synchroniser deux types de systèmes chaotiques à retard d'ordre fractionnaire en présence d'incertitudes [50]. Dans [51], l'auteur a décrit un modèle numérique et un modèle du circuit pour les systèmes fractionnaires chaotiques à retard. La stabilité pour la synchronisation est définie selon une fonction de critère de stabilité de Lyapunov. On peut citer aussi [52,53] dans le cas de la synchronisation projective.

2.3 Chiffrement basé sur le chaos

Le chiffrement d'une information dans le chaos s'effectue en mélangeant l'information à un signal chaotique, issue d'un émetteur décrit généralement par un vecteur d'état. La sortie de l'émetteur est envoyée au récepteur, qui a le rôle d'extraire l'information à partir du signal reçu. La restitution de l'information est basée essentiellement sur la synchronisation entre l'émetteur et le récepteur.

Il existe plusieurs méthodes d'injection de l'information dans le système chaotique (émetteur). Une seule configuration est utilisée dans ces différentes méthodes celle du Maitreesclave d'où l'émetteur représente le maitre et le récepteur représente l'esclave.

Dans la référence [54], on trouve les différentes techniques de cryptage bien détaillées. Parmi lesquelles on peut citer : cryptage par addition, cryptage par inclusion, cryptage par modulation paramétrique, cryptage combiné, et cryptage par décalage.

2.3.1 Cryptage par addition

Dans ce type de cryptage, l'information confidentielle s(t) est additionnée au signal chaotique y(t) de l'émetteur. Le signal résultant m(t) sera transmis par un canal de transmission au récepteur, avec une synchronisation appliquée à l'ensemble du système

(émetteur-récepteur). L'information $\hat{m}(t)$ peut être récupérée par une petite opération de soustraction [55,56].

La figure (2.6) illustre le principe de cette technique de cryptage.



Figure 2.6 : Cryptage par addition.

2.3.2 Cryptage par inclusion

Dans cette méthode l'information est injectée à la dynamique du système chaotique émetteur. Après, il y aura une synchronisation avec le récepteur. Deux méthodes en littérature sont appliquées pour la récupération de l'information: la première consiste à l'utilisation des observateurs comme par exemple dans [57] un observateur à entré inconnu est utilisé, et dans [58] l'observateur est à mode glissant.

La deuxième méthode pour le décryptage est la technique par inversion du système. Ici, le modèle d'émetteur doit être inversé dans le récepteur pour restituer l'information [59].

La figure (2.7) présente un schéma qui illustre cette méthode de cryptage.



Figure 2.7 : Cryptage par inclusion.

2.3.3 Cryptage par modulation paramétrique

Dans cette technique, l'information est utilisée pour moduler un ou plusieurs paramètres du système chaotique de l'émetteur [60-62].

Dans ce cas, le signal transmis au récepteur est plus complexe qu'un signal chaotique normal, car la modulation qui se fait dans l'émetteur provoque un changement d'attracteur. Pour obtenir une synchronisation avec le récepteur, une loi d'adaptation est nécessaire. La figure (2.8) présente un schéma de cette méthode.



Figure 2.8 : Cryptage par modulation paramétrique.

2.3.4 Cryptage combiné

C'est une nouvelle technique qui repose sur la combinaison entre les systèmes cryptographiques classiques et les systèmes qui se basent sur la synchronisation chaotique. Le principe de cette méthode repose sur la réinjection du signal crypté c(t) dans la dynamique du système chaotique (émetteur) x(t) pour augmenter le degré de sa complexité. Le signal est transmis de l'émetteur vers le récepteur pour assurer la synchronisation y(t). Après, la clé sera restaurée $\hat{c}(t)$ et par conséquent le message sera décodé $\hat{m}(t)$.

La figure (2.9) illustre cette méthode de cryptage.

2.3.5 Cryptage par décalage

Il est connu par CSK(Chaos Shift Keying). Cette méthode est réservée aux messages numériques. La partie émetteur est constituée de deux systèmes chaotiques et chaque système est relié à un niveau binaire du message (0 et 1) respectivement. Du côté récepteur on utilise un filtre passe-bas, et avec une application de seuillage à l'erreur de synchronisation, le signal peut être facilement restitué. Cette technique est appliquée sur les systèmes cryptographiques
électroniques de faible dimension, où on trouve de bons résultats de ce type de masquage en [63-64]. La figure (2.10) illustre cette méthode de cryptage.



Figure 2.9 : Cryptage combiné.



Figure 2.10 : Cryptage par décalage.

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons expliqué le principe de la synchronisation unidirectionnelle et bidirectionnelle, puis nous avons effectué une étude sur la synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre entier, par la suite nous avons abordé le cas de la synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire, nous avons cité les différents travaux effectué dans le cas de la synchronisation des systèmes fractionnaires chaotiques à retard

Nous avons clos le chapitre par une présentation de quelques schémas de chiffrement chaotiques les plus cités dans la littérature.

Le chapitre 3 sera consacré au contrôle et la synchronisation d'un système fractionnaire chaotique à retard, à base de la commande prédictive et quelques propriétés du calcul fractionnaire.

Bibliographie

- [1] C. Huyghens. "Horologium oscillatorium", 1673.
- [2] L. M. Pecora and T. L. Carroll, "Synchronization in chaotic systems", Phys. Rev. Lett, 64(8) :821–824, 1990.
- [3] G. Velmurugan, & R. Rakkiyappan, "Hybrid Projective Synchronization of Fractional-Order Chaotic Complex Nonlinear Systems With Time Delays", Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, 11(3), 31016, 2015.
- [4] W. Zhang, J. Cao, R. Wu, F. E. Alsaadi, & A. Alsaedi, "Lag projective synchronization of fractional-order delayed chaotic systems", Journal of the Franklin Institute, 2018.
- [5] L. Kocarev and U. Parlitz, "Generalized synchronization, predictability, and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems", Phys. Rev. Lett., 76, pp. 1816-1819, 1996.
- [6] N. F. Rulkov, M.M. Sushchik, L.S. Trimring, H.D.I. Abarbanel, "Generalized synchronization of chaos in biderctionally coupled chaotic systems", Phys. Rev. E, 51(2), pp. 980-993, 1995.
- [7] J. B. Cueno, P. Levy ,L. Larger, and J. P. Goedgebuer, "transmission de signaux par chaos sur fibre optique", 19éme JNOG, Limoges, Decembre1999.
- [8] R. Mainieri, J. Rehacek, "Projective synchronization in three chaotic systems", Physical Review Letters, 82(15), pp. 3042-3045, 1999.
- [9] Z. Li, D. Xu, "A secure communication scheme using projective chaos synchronization", Chaos, Solitons and Fractals, 22, pp. 477-481, 2004.
- [10] C. Yang, P. Zhou, H. Cai, "Compound Generalized Function Projective Synchronization for Fractional-Order Chaotic Systems", Discrete dynamics in nature and society, Hindawi, 2016.
- [11] M. Rosenblum A. Pikovsky, et J. Kvrths, "phase synchronization al chaotic oscillators", PhysicalReview letters ,76(11) :1804-1807.57, 1996.
- [12] B. Xin, T. Chen, & Y. Liu, "Synchronization of Chaotic Fractional-Order WINDMI Systems via Linear State Error Feedback Control", Mathematical Problems in Engineering, 1–10, 2010.

- [13] H. U. Voss, "Anticipating chaotic synchronization", Phys. Rev. E, 61, pp. 5115-5119, 2000.
- [14] P. Q. Li, & L.W. Li, "Anti-Synchronization of Chaotic System by Sliding Mode Control and Observer", Key Engineering Materials, 439–440, 1247–1252, 2010.
- [15] L. Boutat-Baddas, J.P. Barbot, D. Boutat, & R. Tauleigne, "Sliding mode observers and observability singularity in chaotic synchronization", Mathematical Problems in Engineering, 2004(1), 11–31, 2004.
- [16] Y. Feng, J. Zheng, & L. Sun, "Chaos synchronization based on sliding mode observer", International Symposium on Systems and Control in Aerospace and Astronautics, 2006.
- [17] X. Xi, S. Mobayen, H. Ren, & S. Jafari, "Robust finite-time synchronization of a class of chaotic systems via adaptive global sliding mode control", JVC/Journal of Vibration and Control, 24(17), 3842–3854, 2018.
- [18] Y. Li, & B. Hou, "Observer-based sliding mode synchronization for a class of fractional-order chaotic neural networks", Advances in Difference Equations, 2018(1), 2018.
- [19] T. L. Liao, N. S. Huang, "An observer-based approach for chaotic synchronization with applications to secure communications", IEEE Transactions on Circuits and Systems I, vol. 46, no. 9, pages 1144–1150, 1999.
- [20] G. P. Jiang, G. Chen, W.K. S. Tang, "A new criterion for chaos synchronization using linear state feedback control", International Journal of Bifurcation and Chaos, vol. 13, no. 8, pages 2343–2351, 2003.
- [21] M. Feki, "Observer-based chaotic synchronization in the presence of unknown inputs", Chaos, Solitons and Fractals, vol. 15, pages 831–840, 2003.
- [22] J. Alvarez-Ramirez, H. Puebla, I. Cervantes, "Convergence rate of observer-based approach for chaotic synchronization", Physics Letters A, vol. 289, pages 193–198, 2001.
- [23] A. Zemouche, "Observer based synchronization for a class of chaotic time-delay systems", IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline) (Vol. 2). IFAC, 2009.
- [24] A. Zemouche, M. Boutayeb, & C. I. France, "Nonlinear Observers Design for Synchronization and Information Recovery in Communication Systems, 3–6.

- [25] Y. K. Lian, S.C. Chiu, S.T. Chiang, & P. Liu, "LMI-based fuzzy chaotic synchronization and communications", IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 9(4), 539–553, 2001.
- [26] A. Zemouche, & M. Boutayeb, "Nonlinear-Observer-Based Unknown Input Recovery, 56(8), 1720–1731, 2009.
- [27] Y. X. Wang, & Y. He, "Projective synchronization of fractional order chaotic system based on linear separation", Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics, 372(4), 435–441, 2008.
- [28] G. Si, Z. Sun, Y. Zhang, & W. Chen, "Projective synchronization of different fractional-order chaotic systems with non-identical orders", Nonlinear Analysis: Real World Applications, 13(4), 1761–1771, 2012.
- [29] P. Zhou, & W. Zhu, "Function projective synchronization for fractional-order chaotic systems", Nonlinear Analysis: Real World Applications, 12(2), 811–816, 2011.
- [30] K. S. Agrawal, M. Srivastava, & S. Das, "Synchronization of fractional order chaotic systems using active control method", Chaos, Solitons and Fractals, 45(6), 737–752, 2012.
- [31] R. Behinfaraz, & A. M. Badamchizadeh, "Synchronization of different fractionalordered chaotic systems using optimized active control", 6th International Conference on Modeling, Simulation, and Applied Optimization, ICMSAO 2015 - Dedicated to the Memory of Late Ibrahim El-Sadek, 2015.
- [32] J. Yuan, B. Shi, & W. Ji, "Adaptive sliding mode control of a novel class of fractional chaotic systems", Advances in Mathematical Physics, 2013.
- [33] R. Li, "Adaptive track control for fractional-order chaotic systems with or without uncertainty", Optik, 127(23), 11263–11276, 2016.
- [34] K. Rabah, & S. Ladaci, "Fractional adaptive sliding mode control laws for fractional order chaotic systems synchronization",2016 17th International Conference on Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering, STA 2016 Proceedings, 0(2), 293–302, 2017.

- [35] J. P. Barbot, I. Boulmouhoub and L. Boutat-Baddas, "Observability bifurcations : Application to Cryptography, In chaos in Automatic Control", Taylor and Francis, 2005.
- [36] M. R. Dastranj, A. Riahi, and M. Moghaddas, "Synchronization of Chaotic Fractional-Order Lu-Lu Systems with Active Sliding Mode Control", vol. 7, no. 9, pp. 131–138, 2014.
- [37] L. Gao, Z. Wang, K. Zhou, W. Zhu, Z. Wu, and T. Ma, "sliding mode synchronization of typical three-dimensional fractional-order", Neurocomputing, 2015.
- [38] M. R. Dastranj, A. Riahi, and M. Moghaddas, "Synchronization of Chaotic Fractional-Order Lu-Lu Systems with Active Sliding Mode Control", vol. 7, no. 9, pp. 131–138, 2014.
- [39] C. Yin, S. ming Zhong, & W. fan. Chen, "Design of sliding mode controller for a class of fractional-order chaotic systems", Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 17(1), 356–366, 2012.
- [40] M. Pourgholi and E. Amini, "An Iterative LMI-Based Reduced-Order Observer Design for Fractional-Order Chaos Synchronization", Circuits, Syst. Signal Process, 2016.
- [41] I. N. Doye, H. Voos, and M. Darouach, "Observer-Based Approach for Fractional-Order Chaotic Synchronization and Secure Communication", pp. 1–9, 2013.
- [42] E. A. Boroujeni, H. R. Momeni, "Observer based control of a class of nonlinear fractional order systems using LMI", Int. J. Sci. Eng. Investig. 1, 48–52 2012.
- [43] S. Ibrir and M. Bettayeb, "Observer-based control of fractional-order linear systems with norm-bounded uncertainties : New convex-optimization conditions *," pp. 2903– 2908, 2014.
- [44] A. Kiani-B, K. Fallahi, N. Pariz, H. Leung, "A chaotic secure communication scheme using fractional chaotic systems based on an extended fractional Kalman filter", Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 14, pp. 863-879, 2009.
- [45] GH. Sun, M. Wang and LG. Wu, "Unexpected results of extended fractional Kalman filter for parameter identification in fractional order chaotic systems", International Journal of Innovative Computing, Information and Control 7(9): 5341–5352, 2011.

- [46] H. Liu, & J. Yang, "Sliding-mode synchronization control for uncertain fractionalorder chaotic systems with time delay", Entropy, 17(6), 4202–4214, 2015.
- [47] G. Çetintas, & V. Çelik, "Chaos synchronization of the fractional order time delay system", ELECO 2015 - 9th International Conference on Electrical and Electronics Engineering, (1), 932–935, 2016.
- [48] H. Xi, S. Yu, R. Zhang, & L. Xu, "Adaptive impulsive synchronization for a class of fractional-order chaotic and hyperchaotic systems", Optik, 125(9), 2036–2040, 2014.
- [49] J. Hu, H. Wei, & L. Zhao, "Synchronization of fractional-order chaotic systems with multiple delays by a new approach", Kybernetika, 51(6), 1068–1083, 2015.
- [50] C. T. Lin, & Y. T. Lee, "Chaos Synchronization of Uncertain Fractional-Order Chaotic Systems With Time Delay Based on Adaptive Fuzzy Sliding Mode Control", {IEEE} Trans. Fuzzy Systems, 19(4), 623–635, 2011.
- [51] Ö. Atan, "Synchronisation and Circuit Model of Fractional-Order Chaotic Systems with Time-Delay", IFAC-PapersOnLine, 49(29), 68–72, 2016.
- [52] W. Zhang, J. Cao, R. Wu, E. F. Alsaadi, & A. Alsaedi, "Lag projective synchronization of fractional-order delayed chaotic systems", Journal of the Franklin Institute, 2018.
- [53] G. Velmurugan, & R. Rakkiyappan, "Hybrid Projective Synchronization of Fractional-Order Chaotic Complex Nonlinear Systems With Time Delays", Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, 11(3), 31016, 2015.
- [54] Y. Tao, "A survey of chaotic secure communication systems", International Journal of Computational Cognition, vol. 2, no. 2, pp. 81–130, 2004.
- [55] K. M. Cuomo, A. V. Oppenheim, and S. H. Strogatz. "Synchronization of lorenzbased chaotic circuits with applications to communications", IEEE Trans. Circuits Syst. II, 40(10) :626–633, 1993.
- [56] L. Koracev, "chaos-based cryptography :a brief overview", IEEE transactions on Circuits and systems, PP.6-21, july 2001.
- [57] M. Boutayeb, M. Darouach, and H. Rafaralahy, "Generalized state-space observers for chaotic synchronization and secure communications", IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, 49(3):345-349, 2002.

- [58] L. Boutat-Baddas, J. P. Barbot, D. Boutat, and R. Tauleigne, "Sliding mode observers and observability singularity in chaotic synchronization", Mathematical Problems in Engineering, 1 :11-31, 2004.
- [59] U. Feldmann, M. Hasler, and W. Schwarz, "Communication by chaotic signals :the inverse system approach", International Journal of Circuit Theory and Applications, 24: 551-579, 1996.
- [60] A. V. Oppenheim, K. M. Cuomo, and S. H. Strogatz, "Synchronization of lorenzbased chaotic circuits with applications to communications", IEEE Trans. on Circ. Syst. II, 40(10) :626–633, 1993.
- [61] M. Feki, "An adaptive chaos synchronization scheme applied to secure communication", Chaos, Solitons and Fractals, 18:141–148, 2003.
- [62] T. Yang, L. O. Chua, "Secure Communication via parameter modulation", IEEE Transaction on Circuit and Systems-I: Fundamental Theory And Applications, 43, pp. 817-819, 1996.
- [63] B. Cuenot, L. langer, J. P. Goedgebuer, and W. T. Rhodes, "chaos shift Keying with an optoelectronic encryption System using chaos in wavelength", IEEE journal of Quantum Electronics ,vol .37,n°7, pp.849-855, july2001.
- [64] J. B. Cueno, P. Levy, L. larger and J. P. Goedgebuer, "transmission de signaux par chaos sur fibre optique", 19éme JNOG, Limoges, Decembre1999.

3.1 Introduction
3.2 Principe de la commande prédictive72
3.2.2 Contrôle prédictif des systèmes continus72
3.2.2.1 Principe de la méthode72
3.2.2.2 Exemple d'un système chaotique d'ordre entier74
3.2.3 Contrôle prédictif des systèmes fractionnaires chaotiques à retard76
3.2.3.1 L'approche proposée76
3.2.3.2 Démonstration
3.2.3.3 Exemple d'un système fractionnaire chaotique à retard
3.3 Synchronisation prédictive des systèmes fractionnaires chaotiques à retard
3.3.1 L'approche proposée81
3.3.2 Démonstration
3.3.3 Exemple
3.4 Réalisation des fonctions électroniques de base
3.4.1 Montage additionneur amplificateur inverseur
3.4.2 Montage amplificateur soustracteur
3.4.3 Montage amplificateur inverseur
3.4.4 Montage intégrateur inverseur
3.4.5 Montage dérivateur inverseur
3.5 Réalisation du circuit du système fractionnaire chaotique à retard de Lorenz contrôlé91
3.5.1 Réalisation du circuit du système fractionnaire chaotique à retard de Lorenz91
3.5.2 Le contrôleur du circuit réalisé93
3.5.3 Génération d'un retard de 410 ms :94
3.5.4 Résultats de la simulation94
3.6 Conclusion

Chapitre 3 :

Contrôle et synchronisation des systèmes fractionnaires chaotiques à retard à base de la commande prédictive

3.1 Introduction

L'approche du contrôle prédictif pour le contrôle des systèmes chaotiques a été proposée par Boukabou et al. [1], c'est une approche du contrôle simple et souple qui consiste à contrôler le système à retour d'état à partir de l'état prédit du système chaotique non contrôlé, et le courant état.

Cette approche a été largement utilisée dans divers domaines tels que: le domaine spatial pour le contrôle d'attitude des satellites [2,3], énergie renouvelable pour le contrôle de PMSM [4], et la communication sécurisée [5].

Récemment, le contrôle prédictif a attiré l'attention sur le contrôle des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire .On peut citer quelques travaux qui existent :

Dans [6], les auteurs proposent une méthode de rétroaction basée sur la prédiction, appliquée à un système chaotique d'ordre fractionnaire. Dans [7], une nouvelle prédiction d'ordre fractionnaire basée sur le contrôle de rétroaction est proposée pour stabiliser le point d'équilibre instable du système chaotique d'ordre fractionnaire. Les auteurs dans [8], ont proposé un contrôleur prédictif à un seul état pour stabiliser le générateur synchrone à aimants permanents chaotiques d'ordre fractionnaire.

Cependant, jusqu'à présent, peu de résultats satisfaisants ont été obtenus concernant le contrôle des systèmes chaotiques à retard d'ordre fractionnaire. Pour cela nous allons présenter dans ce chapitre nos contributions relatives au traitement de ce problème.

Avant de présenter en détail nos réalisations, nous commençons ce chapitre par une présentation de la commande prédictive pour le contrôle des systèmes chaotiques. Ensuite nous montrons comment nous utilisons cette méthode en associant quelques propriétés du calcul fractionnaire, pour poser un théorème qui démontre la stabilité des systèmes fractionnaires chaotiques à retard, nous présentons aussi une nouvelle approche permettant d'assurer la synchronisation entre deux systèmes chaotiques à retard d'ordre fractionnaire, tout

en présentant un exemple illustratif, nous terminons le chapitre par une schématisation électronique du système fractionnaire chaotique à retard de Lorenz à l'aide du logiciel Multisim de National instrument avec une simulation électronique.

3.2 Principe de la commande prédictive

Un schéma illustratif démontre le contrôle prédictif à retour d'état est représenté dans la figure suivante [9] :



Figure 3.1 : Contrôle prédictif à retour d'état.

D'où x l'état actuel du système chaotique et x_p l'état prédit.

3.2.2 Contrôle prédictif des systèmes continus

3.2.2.1 Principe de la méthode

Considérons le système non linéaire, défini par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t)) + u(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$
 3.1

Avec:

- x(t): l'état présent du système.
- u(t) : La commande.
- f(x(t)): Une fonction non linéaire.

 $A \in \mathbb{R}^{n^{*n}}$ une matrice jacobienne définie par :

$$A = \frac{\dot{\partial} x(t)}{\partial x(t)} \bigg|_{x_t}$$
 3.2

Et la commande est définie comme suit :

$$u(t) = k(x_p - x(t))$$
3.3

k est le gain de la commande et x_n l'état prédit du système incontrôlé.

En utilisant la prédiction d'un pas en avant, l'équation (3.3) devient :

$$u(t) = k\left(\dot{x}(t) - x(t)\right)$$
3.4

En remplaçant l'équation (3.4) dans l'équation (3.1) le système devient :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t)) + k(\dot{x}(t) - x(t))$$
3.5

On peut utiliser l'approximation linéaire qui est définie par :

$$\delta x(t) = x(t) - x_f \tag{3.6}$$

Le système contrôlé est linéarisé autour de son point d'équilibre x_f :

$$\begin{cases} \delta \dot{x}(t) = A\delta x(t) + k \left(\delta \dot{x}(t) - \delta x(t) \right) \\ \delta \dot{x}(t) = A\delta x(t) + k \left(A\delta x(t) - \delta x(t) \right) \\ \delta \dot{x}(t) = A\delta x(t) + kA\delta x(t) - k\delta x(t) \\ \delta \dot{x}(t) = (A + k (A - I))\delta x(t) \end{cases}$$
3.7

Le système est asymptotiquement stable si la condition suivante est vérifiée :

$$\left|A+k\left(A-I\right)\right|\prec I \tag{3.8}$$

I : la matrice identité.

À partir de la relation (3.8) la valeur de k peut être retiré.

Finalement nous obtenons le système contrôlé suivant :

Avec |x(t)-x(t-1)| zone du contrôle et ε un nombre positif.

3.2.2.2 Exemple d'un système chaotique d'ordre entier

On va appliquer la méthode précédente sur le système chaotique de LU qui est défini comme suit [10] :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a(y(t) - x(t)) \\ \dot{y}(t) = -x(t)z(t) + by(t) \\ \dot{z}(t) = x(t)y(t) - cz(t) \end{cases}$$
3.10

Où

a = 36, b = 20, c = 3 sont les paramètres du système chaotique.

Les points d'équilibres du système de LU sont :

$$x_{f1} = (0,0,0)$$

$$x_{f2} = (\sqrt{60}, \sqrt{60}, 20)$$

$$3.11$$

$$x_{f3} = (-\sqrt{60}, -\sqrt{60}, 20)$$

La commande est choisie comme suit :

$$u(t) = \begin{pmatrix} 0\\ k_2(y-y)\\ 0 \end{pmatrix}$$
 3.12

Le système de LU commandé sera défini comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a(y(t) - x(t)) \\ \dot{y}(t) = -x(t)z(t) + by(t) + k_2(\dot{y}(t) - y(t)) \\ \dot{z}(t) = x(t)y(t) - cz(t) \end{cases}$$
3.13

Le système est linéarisé autour de ces points fixes par :

$$\delta y(t) = (b + k_2(b-1))\delta y(t)$$
3.14

 k_2 doit satisfaire la condition suivante :

$$\left|20+19k_{2}\right| \prec 1 \tag{3.15}$$

Dans ce cas, la valeur k_2 sera choisie dans l'intervalle :

$$-1.10 \prec k_2 \prec -1 \tag{3.16}$$

Choisissons $k_2 = -1.09$





Figure 3.2 : Système de LU sous contrôle prédictif .stabilisation sur x_{f1} .

3.2.3 Contrôle prédictif des systèmes fractionnaires chaotiques à retard

3.2.3.1 L'approche proposée

Considérons le système fractionnaire chaotique à retard suivant :

$$D^{\alpha}x(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau) + f(x(t), x(t-\tau)) + U$$
3.17

Inspiré du travail présenté dans l'article [11], on a $U = [U_{x1}, U_{x2}, U_{x3}, ..., U_{xn}]^T$

$$U_{x} = (D^{\alpha-1}-1)(A_{1}x_{1}(t) + B_{1}x_{1}(t-\tau) + f_{1}(x(t), x(t-\tau))) + U_{1}$$

$$U_{x2} = (D^{\alpha-1}-1)(A_{2}x_{2}(t) + B_{2}x_{2}(t-\tau) + f_{2}(x(t), x(t-\tau))) + U_{2}$$

$$U_{x3} = (D^{\alpha-1}-1)(A_{3}x_{3}(t) + B_{3}x_{3}(t-\tau) + f_{3}(x(t), x(t-\tau))) + U_{3}$$

$$\vdots = \vdots \qquad \vdots$$

$$U_{xn} = (D^{\alpha-1}-1)(A_{n}x_{n}(t) + B_{n}x_{n}(t-\tau) + f_{n}(x(t), x(t-\tau))) + U_{n}$$
3.18

Appliquons (3.18) dans (3.17) nous obtenons :

$$D^{\alpha}x(t) = (Ax(t) + Bx(t-\tau) + f(x(t), x(t-\tau)))$$

+ $(D^{\alpha-1} - 1)(Ax(t) + Bx(t-\tau) + f(x(t), x(t-\tau))) + U$
= $D^{\alpha-1}(Ax(t) + Bx(t-\tau) + f(x(t), x(t-\tau))) + U$
3.19

Prenant la dérivée fractionnaire $D^{1-\alpha}$ sur les deux membres de l'équation (3.19), nous obtenons l'équation suivante:

$$D^{1-\alpha}D^{\alpha}x(t) = D^{1-\alpha}D^{\alpha-1}(Ax(t) + Bx(t-\tau) + f(x(t), x(t-\tau))) + D^{1-\alpha}U$$
3.20

Ainsi, nous aurons :

$$x(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau) + f(x(t), x(t-\tau)) + D^{1-\alpha}U$$
3.21

Nous concevons un nouveau contrôleur prédictif tel que $U_p = D^{1-\alpha}U$, donc nous aurons :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau) + f(x(t), x(t-\tau)) + U_p \qquad 3.22$$

Dans cette approche, le contrôle prédictif proposé par [1] est utilisé pour contrôler le système chaotique à retard, où le contrôleur du retour U_p est choisi comme suit:

$$U_p = K(x_p(t) - x(t))$$
 3.23

Avec *K* matrice de gain, x_p l'état futur prédit du système chaotique à retard incontrôlé et

x(t) L'état présent. Lorsque la prédiction d'un pas en avant est utilisée, le contrôleur prédictif devient:

$$U_p = K(Dx(t) - x(t))$$
3.24

L'approximation linéaire du système (3.22) sans contrôleur près, du point fixe est donnée par:

$$\delta \dot{x}(t) = Jx(t) + J_{\tau} \delta x(t-\tau)$$
3.25

Avec x(t) et $x(t-\tau)$ sont des vecteurs de colonne à t et $t-\tau$

Et J, J_{τ} deux matrices Jacobiennes associé à x et x_{τ} respectivement

$$J = \frac{\partial x(t)}{x(t)} \bigg|_{x_{f}} J_{\tau} = \frac{\partial x(t)}{x(t-\tau)} \bigg|_{x_{f}}$$
3.26

Le système contrôlé devient comme suit:

$$\delta x(t) = J \delta x(t) + J_{\tau} \delta x(t-\tau) + K \left(J \delta x(t) + J_{\tau} \delta x(t-\tau) - \delta x(t) \right)$$

$$3.27$$

$$\delta x(t) = (J + KJ - K)\delta x(t) + (J_{\tau} + KJ_{\tau})\delta x(t - \tau)$$
3.28

Théorème 3.1

Le système est asymptotiquement stable s'il existe des matrices symétriques définies positive $P = P^t > 0, Q > 0$ et *K* doit vérifier les conditions suivantes:

$$(J + KJ - K)^{t} P + P(J + KJ - K) = -2Q$$
 3.29

Et

$$-Q + P(J_{\tau} + KJ_{\tau})Q^{-1}(J_{\tau} + KJ_{\tau})^{t}P \leq 0$$

$$3.30$$

3.2.3.2 Démonstration

Nous considérons la fonction de Lyapunov suivante:

$$V(t) = \delta x^{t}(t) P \delta x(t) + \int_{t-\tau}^{t} \delta x^{t}(B) Q \delta x(B)$$
3.31

La dérivée de V(t) peut-être définie comme suit :

$$\dot{V}(t) = \delta \dot{x}^{t}(t) P \delta x(t) + \delta x^{t}(t) P \delta \dot{x}(t) + \delta x^{t}(t) Q \delta x(t) - \delta x^{t}(t-\tau) Q \delta x(t-\tau) \quad 3.32$$

Après simplification on aura :

$$\dot{V}(t) = \left(\delta x^{t}(t)(J + KJ - K)^{t} + \delta x^{t}(t - \tau)(J_{\tau} + KJ_{\tau})^{t}\right)P\delta x(t) + \delta x^{t}(t)P\left((J + KJ - K)\delta x(t) + (J_{\tau} + KJ_{\tau})\delta x(t - \tau)\right) + \delta x^{t}(t)Q\delta x(t) - \delta x^{t}(t - \tau)Q\delta x(t - \tau)$$

$$3.33$$

Et aussi :

$$\dot{V}(t) = \delta x^{t}(t) \Big[(J + KJ - K)^{t} P + P(J + KJ - K) \Big] \delta x(t) + \delta x^{t}(t) Q x(t) + \delta x^{t}(t - \tau) (J_{\tau} + KJ_{\tau})^{t} P \delta x(t) + \delta x^{t}(t) P(J_{\tau} + KJ_{\tau}) \delta x(t - \tau)$$

$$-\delta x^{t}(t - \tau) Q \delta x(t - \tau)$$
3.34

Nous posons :

$$(J + KJ - K)^{t} P + P(J + KJ - K) = -2Q$$
 3.35

L'équation (3.34) devient :

$$\dot{V} = -2\delta x^{t}(t)Q\delta x(t) + \delta x^{t}(t)Q\delta x(t) + \delta x^{t}(t-\tau)(J_{\tau} + KJ_{\tau})^{t}P\delta x(t) +\delta x^{t}(t)(J_{\tau} + KJ_{\tau})\delta x(t-\tau) - \delta x^{t}(t-\tau)Q\delta x(t-\tau)$$
3.36

Lemme 3.1

X, Y deux matrices $\in \mathbb{R}^{n,m}$, pour $\varepsilon = \varepsilon^t \succ 0$ avec $\varepsilon \in \mathbb{R}^{n^{*n}}$ l'inégalité suivante se maintient [12]:

$$x^{t}y + y^{t}x \le \varepsilon x^{t}x + \frac{1}{\varepsilon}y^{t}y$$
3.37

En utilisant le lemme (3.1) nous obtenons :

$$\delta x^{t} (t-\tau) (J_{\tau} + KJ_{\tau})^{t} P \delta x(t) + \delta x^{t} (t) (J_{\tau} + KJ_{\tau}) \delta x^{t} (t-\tau) \leq \delta x^{t} (t-\tau) Q \delta x(t-\tau) 3.38$$
$$+ \delta x^{t} (t) P (J_{\tau} + KJ_{\tau}) Q^{-1} (J_{\tau} + KJ_{\tau})^{t} P \delta x(t)$$

En remplaçant dans l'équation (3.36), nous obtenons:

$$\dot{V}(t) \leq -\delta x^{t}(t)Qx(t) + \delta x^{t}(t-\tau)Q\delta x(t-\tau) + \delta x^{t}(t)P(J_{\tau} + KJ_{\tau})Q^{-1}(J_{\tau} + KJ_{\tau})^{t}P\delta x(t)$$

- $\delta x^{t}(t-\tau)Q\delta x(t-\tau)$ 3.39

Nous simplifions l'équation (3.39), nous aboutissons à :

$$\dot{V}(t) \le \delta x^{t}(t) \Big[-Q + P \big(J_{\tau} + K J_{\tau} \big) Q^{-1} \big(J_{\tau} + K J_{\tau} \big)^{t} P \Big] \delta x(t)$$

$$3.40$$

Nous montrons dans l'exemple suivant comment est appliquée la nouvelle approche proposée sur un système fractionnaire chaotique à retard, et ce afin de montrer l'efficacité de l'approche proposée.

3.2.3.3 Exemple d'un système fractionnaire chaotique à retard

Le système de Lorenz à retard d'ordre fractionnaire décrit par [13] :

$$\begin{cases} \frac{d^{\alpha}x}{dt^{\alpha}} = \sigma\left(y(t) - x(t)\right) \\ \frac{d^{\alpha}y}{dt^{\alpha}} = rx(t) - y(t) - x(t)z(t - \tau) \\ \frac{d^{\alpha}z}{dt^{\alpha}} = x(t)y(t) - \mu z(t) \end{cases}$$

$$3.41$$

Avec $\alpha = 0.95$ et $\sigma = 10$ r = 28, $\mu = \frac{8}{3}$, $\tau = 0.41s$, et x, y, z sont les états du système.

Le portrait de phase du système dans les différents plans et les trajectoires d'états sont représentés par la figure (3.3).



Figure 3.3 : Attracteur du système fractionnaire à retard de Lorenz sur les plans x-y, y-z, x-z et ces trajectoires d'états.

En utilisant le théorème 3.1, nous pouvons obtenir la valeur suivante de la matrice K

$$k = \begin{pmatrix} 3.7744 & 5.5145 & -5.0414 \\ 1.2952 & 0.9035 & -1.7832 \\ -0.2040 & 0.0107 & -0.8122 \end{pmatrix}$$

En utilisant Matlab\Simulink et à partir des conditions initiales (x(0), y(0), z(0)) = (1, 2, 3) et avec une commande appliquée à partir de 30s, nous obtenons les résultats présentés dans la figure (3.4).





Figure 3.4 : Système de Lorenz sous contrôle prédictif .stabilisation sur x_{f1}

D'après les trois graphes ci-dessus, nous remarquons que la trajectoire du système est stabilisée autour de son point d'équilibre instable (0,0,0), à partir du temps de l'application de la commande.

3.3 Synchronisation prédictive des systèmes fractionnaires chaotiques à retard

3.3.1 L'approche proposée

Considérant les systèmes fractionnaires chaotiques à retard émetteur et récepteur décrits par les équations suivantes (3.42) et (3.43) respectivement:

$$D^{\alpha}x(t) = A_{m}x(t) + B_{m}x(t-\tau) + f_{m}(x(t), x(t-\tau))$$
3.42

$$D^{\alpha} y(t) = A_{s} y(t) + B_{s} y(t-\tau) + f_{s} (y(t), y(t-\tau))$$
3.43

D'où $x, y \in \mathbb{R}^n$ sont les états de l'émetteur et le récepteur respectivement, α est l'ordre fractionnaire et A_m, A_s sont les parties linéaires des systèmes, B_m, B_s les parties retardées et f_m, f_s sont les parties non linéaires.

Les états d'erreurs de synchronisation entre le système (3.42) et le système (3.43) sont les suivants:

_

$$e(t) = \begin{bmatrix} e_{1}(t) \\ e_{2}(t) \\ e_{3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{1}(t) - x_{1}(t) \\ y_{2}(t) - x_{2}(t) \\ y_{3}(t) - x_{3}(t) \end{bmatrix}$$
3.44

Avec :

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t)]^T$$
 $y(t) = [y_1(t), y_2(t), y_3(t)]^T$

Nous pouvons présenter l'équation (3.44) comme suit:

$$D^{\alpha}e(t) = A_{s,m}e(t) + B_{s,m}e(t-\tau) + f_{s,m}(e(t), e(t-\tau)) + U$$
3.45

Avec

$$U = (U_{e1}, U_{e2}, \dots, U_{en})^{T}$$

$$U_{e1} = (D^{\alpha - 1} - 1)(A_{1}e_{1}(t) + B_{1}e_{1}(t - \tau) + f_{(s,m)_{1}}(e(t), e(t - \tau))) + U_{1}$$

$$U_{e2} = (D^{\alpha - 1} - 1)(A_{2}e_{2}(t) + B_{2}e_{2}(t - \tau) + f_{(s,m)_{2}}(e(t), e(t - \tau))) + U_{2}$$

$$.$$

$$U_{en} = (D^{\alpha - 1} - 1)(A_{n}e_{n}(t) + B_{n}e_{n}(t - \tau) + f_{(s,m)_{n}}(e(t), e(t - \tau))) + U_{n}$$
3.46

En utilisant (3.46) dans (3.45) et en prenant la dérivée fractionnaire $D^{1-\alpha}$ sur les deux membres de l'équation, nous obtenons la fonction suivante:

$$\dot{e}(t) = A_{s,m}e(t) + B_{s,m}e(t-\tau) + f_{s,m}(e(t), e(t-\tau)) + U_{pr}$$
3.47

Avec

$$U_{pr} = K\left(\frac{1}{e}(t) - e(t)\right)$$
3.48

L'approximation linéaire du système d'erreur sans contrôleur près du point fixe est donnée par:

$$\dot{e}(t) = Qe(t) + Te(t-\tau)$$
3.49

Avec e(t) et $e(t-\tau)$ sont des vecteurs de colonne $(e_1, e_2, e_3, ..., e_n)$ a t et $t-\tau, Q, T$ deux matrices Jacobiennes associées à e et e_{τ} respectivement D'où

$$Q = \frac{\partial e(t)}{\mathbf{e}(t)} \bigg|_{x_f} T = \frac{\partial e(t)}{\mathbf{e}(t-\tau)} \bigg|_{x_f}$$
3.50

Le système d'erreur contrôlé devient:

$$\dot{\delta e}(t) = Q\delta e(t) + T\delta e(t-\tau) + K(Q\delta e(t) + T\delta e(t-\tau) - \delta e(t))$$

$$3.51$$

$$\dot{\delta e}(t) = (Q + KQ - K)\delta e(t) + (T + KT)\delta e(t - \tau)$$
3.52

Théorème 3.2

Le système est asymptotiquement stable s'il existe des matrices symétriques définies positive $P = P^t > 0, G > 0$ et K doit vérifier les conditions suivantes:

$$(J + KQ - K)^{t} P + P(Q + KQ - K) + 2G = 0$$
 3.53

$$-G + P(T + KT)Q^{-1}(T + KT)^{t}P \le 0$$
3.54

3.3.2 Démonstration

Nous considérons la fonction de Lyapunov suivante:

$$V(t) = \delta e^{t}(t) P \delta e(t) + \int_{t-\tau}^{t} \delta e(B)^{t} G \delta e(t)$$
3.55

La dérivée de V(t) peut-être définit comme suit :

$$V(t) = \delta e^{t}(t) P \delta e(t) + \delta e^{t}(t) P \delta e + \delta e^{t}(t) G \delta e(t) - \delta e^{t}(t-\tau) G \delta e(t-\tau)$$

$$3.56$$

$$\dot{V}(t) = \left(\delta e^{t}(t)(Q + KQ - K)^{t} + \delta e^{t}(t - \tau)(T + KT)^{t}\right)P\delta e(t)$$

+ $\delta e^{t}(t)P\left((Q + KQ - K)\delta e(t) + (T + KT)\delta e(t - \tau)\right)$
+ $\delta e^{t}(t)Ge(t) - \delta e^{t}(t - \tau)G\delta e(t - \tau)$
3.57

Nous simplifions l'équation (3.57), nous obtenons:

$$V(t) = \delta e^{t} (t) \Big[(Q + KQ - K)^{t} P + P(Q + KQ - K) \Big] \delta e(t) + \delta e^{t} (t) G e(t) + \delta e^{t} (t - \tau) (T + KT)^{t} P \delta e(t) + \delta e^{t} (t) P(T + KT) \delta e(t - \tau) - \delta e^{t} (t - \tau) G \delta e(t - \tau) \Big] 3.58$$

Nous posons :

$$(Q+KQ-K)^{t}P+P(Q+KQ-K)+2G=0$$
 3.59

L'équation (3.58) devient

$$V = -2\delta e^{t}(t)G\delta e(t) + \delta e^{t}(t)G\delta e(t) + \delta e^{t}(t-\tau)(T+KT)^{t}P\delta e(t) + \delta e^{t}(t)P(T+KT)\delta e(t-\tau) - \delta e^{t}(t-\tau)G\delta e(t-\tau)$$
3.60

Utilisant le lemme 3.1

$$\delta e^{t} (t-\tau) (T+KT)^{t} P \delta e(t) + \delta e^{t} (t) (T+KT) \delta e^{t} (t-\tau) \leq \delta e^{t} (t-\tau) G \delta e(t-\tau) + \delta e^{t} (t) P (T+KT) Q^{-1} (T+KT)^{t} P \delta e(t)$$
3.61

Nous obtenons :

$$\dot{V}(t) \leq -\delta e^{t}(t)Gx(t) + \delta e^{t}(t-\tau)G\delta e(t-\tau) + \delta e^{t}(t)P(T+KT)Q^{-1}(T+KT)^{t}P\delta e(t) -\delta e^{t}(t-\tau)G\delta e(t-\tau)$$

Finalement nous aurons:

$$\dot{V}(t) \le \delta e^{t}(t) \left[-G + P(T + KT)Q^{-1}(T + KT)^{t}P \right] \delta e(t)$$

$$3.63$$

3.62

Dans la suite de cette section, nous allons présenter un exemple illustratif pour montrer l'efficacité de l'approche proposée.

3.3.3 Exemple

Nous utilisons le système fractionnaire à retard de Lorenz décrit par [13]:

$$\begin{cases} \frac{d^{\alpha} x_{1}}{dt^{\alpha}} = \sigma \left(x_{2}(t) - x_{1}(t) \right) \\ \frac{d^{\alpha} x_{2}}{dt^{\alpha}} = r x_{1}(t) - x_{2}(t) - x_{1}(t) x_{3}(t) \\ \frac{d^{\alpha} x_{3}}{dt^{\alpha}} = x_{1}(t) x_{2}(t) - \mu x_{3}(t - \tau) \end{cases}$$
3.64

Les paramètres du système fractionnaire à retard de Lorenz sont : $\alpha = 0.95$ et $\sigma = 10, r = 28, \mu = 8/3$

Le même système est appliqué comme un système de repense et qui est défini par:

$$\begin{cases} \frac{d^{\alpha} y_{1}}{dt^{\alpha}} = \sigma \left(y_{2}(t) - y_{1}(t) \right) \\ \frac{d^{\alpha} y_{2}}{dt^{\alpha}} = ry_{1}(t) - y_{2}(t) - y_{1}(t) y_{3}(t) \\ \frac{d^{\alpha} y_{3}}{dt^{\alpha}} = y_{1}(t) y_{2}(t) - \mu y_{3}(t - \tau) \end{cases}$$
3.65

Le système d'erreur dynamique est défini par:

$$\begin{cases} \frac{d^{\alpha}e_{1}}{dt^{\alpha}} = \sigma(e_{2}(t) - e_{1}(t)) + U_{1} \\ \frac{d^{\alpha}e_{2}}{dt^{\alpha}} = re_{1}(t) - e_{2}(t) - e_{1}(t)e_{3}(t) + U_{2} \\ \frac{d^{\alpha}e_{3}}{dt^{\alpha}} = e_{1}(t)e_{2}(t) - \mu e_{3}(t - \tau) + U_{3} \end{cases}$$
3.66

D'où la commande est représentée comme suit:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.77 & 5.51 & -5.04 \\ 1.29 & 0.90 & -1.78 \\ -0.02 & 0.010 & -0.81 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^{\alpha}e_1 - e_1 \\ D^{\alpha}e_2 - e_2 \\ D^{\alpha}e_3 - e_3 \end{pmatrix}$$
 3.67

Les conditions initiales de l'émetteur et le récepteur sont respectivement (1,2,3), (1.5,2.9,0.5)



Figure 3.5 : Erreurs de synchronisation.

Selon le graphique des erreurs de la synchronisation présentée dans la figure (3.5), le récepteur suit l'émetteur avec succès et les erreurs tendent vers le zéro à partir de la 5éme seconde.

3.4 Réalisation des fonctions électroniques de base

Afin de réaliser les différents circuits de la commande des systèmes fractionnaires chaotiques à retard, nous allons présenter quelques montages de base nécessaires

3.4.1 Montage additionneur amplificateur inverseur

La figure (3.6) présente un schéma de base d'un additionneur amplificateur inverseur à base d'amplificateur opérationnel



Figure 3.6 : Montage d'un additionneur amplificateur inverseur.

La valeur de la tension de la sortie V_s de la figure (3.6) est donnée par la relation suivante :

$$V_{s} = -\left(V_{1}\frac{R_{3}}{R_{1}} + V_{2}\frac{R_{3}}{R_{2}}\right)$$
3.68

3.4.2 Montage amplificateur soustracteur

La figure (3.7) présente un schéma de base d'un amplificateur soustracteur à base d'amplificateur opérationnel



Figure 3.7 : Montage d'un amplificateur soustracteur.

La valeur de la tension de la sortie V_s de la figure (3.7) est donnée par la relation suivante :

$$V_s = \left(V_p - V_n\right) \frac{R_2}{R_1} \tag{3.69}$$

3.4.3 Montage amplificateur inverseur

La figure (3.8) présente un schéma de base d'un amplificateur inverseur à base d'amplificateur opérationnel



Figure 3.8 : Montage d'un amplificateur inverseur.

La valeur de la tension de la sortie V_s de la figure (3.8) est donnée par la relation suivante :

$$V_s = -V_e \frac{R_2}{R_1}$$
 3.70

3.4.4 Montage intégrateur inverseur

La figure (3.9) présente un schéma de base d'un intégrateur inverseur à base d'amplificateur opérationnel



Figure 3.9 : Montage d'un intégrateur inverseur.

La valeur de la tension de la sortie V_s de la figure (3.9) est donnée par la relation suivante :

$$V_s = -\frac{1}{RC} \int V_e dt$$
 3.71

3.4.5 Montage dérivateur inverseur

La figure (3.10) présente un schéma de base d'un dérivateur inverseur à base d'amplificateur opérationnel



Figure 3.10 : Montage d'un dérivateur inverseur.

La valeur de la tension de la sortie V_s de la figure (3.10) est donnée par la relation suivante :

$$V_s = -RC \frac{dV_e}{dt}$$
 3.72

La fonction de transfert d'un système idéal à retard est comme suit [14] :

$$g(s) = e^{-\tau s} \tag{3.73}$$

Avec

s = jw et τ un retard égal au retard de groupe généré par le système

$$\tau_{gn} = \tau \qquad \qquad 3.74$$

La caractéristique amplitude-fréquence du montage présenté par l'équation (3.73) est donnée par :

$$g(s) = 1 \tag{3.75}$$

Pour réaliser un montage électronique d'un retard, nous allons utiliser des filtres passe tout du premier ordre à base des amplificateurs opérationnels [15], un ensemble de filtres identiques seront mis en cascade, chaque filtre va générer un petit retard, le dernier filtre il sera ajusté pour obtenir la valeur désirée du retard, le schéma ci-dessous présente un filtre passe tout du premier ordre qui va être utilisé dans la suite du chapitre.



Figure 3.11 : Un montage possible pour la réalisation d'un filtre passe tout du ler ordre.

La fonction de transfert d'un filtre passe tout d'ordre j peut être représenté comme suit :

$$g_{j} = \frac{\sum_{k=0}^{j} (-1)^{k} d_{k} \left(\frac{1}{2}\tau s\right)^{k}}{\sum_{k=0}^{j} d_{k} \left(\frac{1}{2}\tau s\right)^{k}} = \frac{\sum_{k=0}^{j} M_{k} (\tau s)^{k}}{\sum_{k=0}^{j} N_{k} (\tau s)^{k}}$$
3.76

Avec

$$d_{k} = (2m-k)!/k!(m-k)!2^{m-k} \qquad 3.77$$

$$M_{k} = (-1)^{k} \left[(2m-k)! / (2m)! k! (m-k)! \right]$$
3.78

$$N_{k} = \left[(2m-k)!/(2m)!k!(m-k)! \right]$$
 3.79

L'équation du premier ordre d'un filtre passe tout est exprimé comme suit :

$$g_1(jw) = \frac{1 - jwRC}{1 + jwRC}$$

$$3.80$$

L'amplitude-fréquence de l'équation (3.80) est :

$$\left|g_{1}\left(jw\right)\right| = 1 \tag{3.81}$$

Le retard généré par un filtre passe tout du 1 er ordre est donné par la formule suivante :

$$\tau_{gn} = \tau - H(w) \tag{3.82}$$

D'où

$$\tau = 2.R.C \tag{3.83}$$

H(w): fonction de w, qui représente la plus grande fréquence angulaire du signal.

A partir de l'équation (3.80), nous présentons la fonction de transfert de n filtres passe tout du ler ordre mis en cascade :

$$g_1^n(s) = [(1 - sRC) / (1 + sRC)]^n$$
 3.84

Le retard généré par n filtre passe tout du 1 er ordre mis en cascade est donné par la formule suivante :

$$\tau_{gn}^{n} = n\tau_{gn} = n\left(\tau - H\left(w\right)\right)$$
3.85

3.5 Réalisation du circuit du système fractionnaire chaotique à retard de Lorenz contrôlé

3.5.1 Réalisation du circuit du système fractionnaire chaotique à retard de Lorenz

S'inspirant de la méthode de conception du circuit présenté dans le travail [16], nous concevons un circuit du système chaotique fractionnaire de Lorenz avec retard en utilisant le logiciel Multisim 14.0, comme illustré dans la Figure (3.12).



Chapitre 3 : Contrôle et synchronisation des systèmes fractionnaires chaotiques à retard à base de la commande prédictive

Figure 3.12 : Circuit électronique du système fractionnaire chaotique à retard de Lorenz.

Les amplificateurs opérationnels utilisés dans les schémas électroniques sont de type LM741, Les valeurs des résistances et des capacités du circuit sont comme suit :

$$\begin{split} R_{23} &= R_{26} = R_{29} = 0.326 M\Omega, \\ R_{24} = R_{27} = R_{30} = 62.82 \Omega M, \\ R_{25} = R_{28} = R_{31} = 694.6 M\Omega \\ R_{3} &= R_{10} = R_{18} = R_{19} = R_{22} = 100 K\Omega, \\ R_{1} &= R_{2} = R_{4} = R_{7} = R_{8} = R_{9} = 15 K\Omega, \\ R_{16} &= R_{17} = R_{29} = 10 K\Omega \\ R_{21} &= 10000 K\Omega, \\ R_{11} &= 40 K\Omega, \\ R_{12} &= 1428.57 K\Omega, \\ R_{13} &= R_{14} = 40000 K\Omega, \\ R_{5} &= R_{6} = 1000 K\Omega \\ R_{10} &= R_{10} = R_{1$$

Un bloc fractionnaire est utilisé d'ordre 0.95 est illustré dans la figure (3.13), les valeurs des résistances et capacités sont comme suit :

$$C_1 = C_6 = C_9 = 0.699 \mu F, C_4 = C_7 = C_{10} = 0.2133 \mu F, C_5 = C_8 = C_{11} = 0.77944 \mu F$$



Figure 3.13 : Bloc fractionnaire d'ordre 0.95.

3.5.2 Le contrôleur du circuit réalisé

Un schéma électronique du contrôleur est représenté dans la figure 3.14 ci-après :



Figure 3.14 : Circuit électronique du contrôleur.

Les valeurs des résistances et des capacités du circuit sont comme suit :

$$\begin{split} R_{1...12} et R_{14}, R_{20}, R_{25}, R_{32}, R_{33}, R_{84}, R_{85} = 10 K\Omega, R_{13} = 1.81 K\Omega, R_{15} = 2.649 K\Omega \\ R_{17} = 1.65 K\Omega R_{19} = 7.720 K\Omega, R_{21} = 11.068 K\Omega, R_{22} = 5.77 K\Omega, R_{24} = 49.01 K\Omega \\ R_{26} = 934.57 K\Omega, R_{27} = 12.31 K\Omega \end{split}$$

3.5.3 Génération d'un retard de 410 ms :

Pour réaliser un circuit électronique générant un retard de 410 ms, un ensemble de filtre passe tout serons fixe, et le dernier sera variable afin de compenser le terme H(w)de l'équation (3.85), ensuite nous générons un signal w égal a celle du signal à retarder, nous réglons alors les paramètres du R et C du dernier filtre jusqu'à l'obtention d'un retard de 410 ms.

$$10.\tau = 10.2.R.C = 410ms$$

 $RC = 20.5ms$

Les paramètres du dernier filtre sont choisis comme suit :

$$R = 100K\Omega$$

$$C = 100 nf$$



La figure (3.15) présente un circuit électronique générant un retard de 410 ms

Figure 3.15 : Circuit électronique réalisant un retard de 410 ms.

3.5.4 Résultats de la simulation

Les résultats affichés de l'oscilloscope du circuit proposé sont représentés dans les figures (3.16), (3.17) et (3.18).



Figure 3.16 : Résultat de la simulation de x avec le logiciel Multisim.



Figure 3.17 : Résultat de la simulation de y avec le logiciel Multisim.



Figure 3.18 : Résultat de la simulation de z avec le logiciel Multisim.

Les résultats de la simulation sous le logiciel Multisim, montrent que le système chaotique fractionnaire de Lorenz à retard se stabilise vers le point d'équilibre (0,0,0).

D'après les résultats présentés dans ce chapitre, nous remarquons un très bon accord qualitatif entre les simulations numériques avec Simulink / Matlab et les simulations du circuit avec le logiciel Multisim.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, un nouveau théorème est proposé, et qui garantit la convergence de la trajectoire chaotique vers le point d'équilibre d'un système chaotique fractionnaire à retard, en se basant sur la commande prédictive et quelques propriétés du calcul fractionnaire. Pour ce faire, nous avons commencé le chapitre par une présentation du principe de la commande prédictive et le contrôle des systèmes chaotiques avec l'introduction d'un exemple d'un système chaotique de LU. Ensuite, et dans la deuxième partie du chapitre, nous avons présenté une nouvelle approche en présentant son fondement théorique, suivi d'un exemple illustratif d'un système fractionnaire chaotique à retard, et avec quoi nous avons pu montrer l'efficacité de l'approche proposée. En troisième partie du chapitre, nous avons traité de la synchronisation prédictive des systèmes fractionnaires chaotiques à retard. Dans cette partie une nouvelle approche est présentée et démontrée. Un exemple illustratif du système chaotique fractionnaire de Lorenz retardé a été également présenté pour montrer l'efficacité de l'approche proposée, nous terminons le chapitre par une réalisation électronique d'un système chaotique fractionnaire à retard contrôlé. Le prochain chapitre sera consacré à l'implémentation d'un nouveau crypto-système basé sur un système fractionnaire chaotique à retard.

Bibliographie

- A. Boukabou, A. Chebbah, et N. Mansouri, "Predictive control of continuous chaotic systems", International Journal of Bifurcation and Chaos, vol. 18, no 02, p. 587-592, 2008.
- [2] D. Sadaoui, A. Boukabou, N. Merabtine, et al, "Predictive synchronization of chaotic satellites systems", Expert systems with applications, 2011, vol. 38, no 7, p. 9041-9045, 2011.
- [3] M. Baghri, et M. Yaghoobi, "Lorenz-Type Chaotic attitude control of satellite through predictive control", In : Computational Intelligence, Modelling and Simulation (CIMSiM), Third International Conference on. IEEE, p. 147-152, 2011.
- [4] M. Messadi, A. Mellit, K. Kemih, et al, "Predictive control of a chaotic permanent magnet synchronous generator in a wind turbine system", Chinese Physics B, vol. 24, no 1, p. 010502, 2015.
- [5] P. Muthukumar, P. Balasubramaniam, et K. TS. Ratnavelu, "fuzzy predictive control for fractional order dynamical systems and its applications", Nonlinear Dynamics, vol. 86, no 2, p. 751-763, 2016.
- [6] A. Soukkou, A. Boukabou, et S. Leulmi, "Prediction-based feedback control and synchronization algorithm of fractional-order chaotic systems", Nonlinear Dynamics, vol. 85, no 4, p. 2183-2206, 2016.
- [7] Y. Zheng, & Z. Ji, "Predictive control of fractional-order chaotic systems", Chaos, Solitons and Fractals, 87, 307–313, 2016.
- [8] M. Borah, et B. K. Roy, "Dynamics of the fractional-order chaotic PMSG, its stabilisation using predictive control and circuit validation", IET Electric Power Applications, vol. 11, no 5, p. 707-716, 2017.
- [9] T. Ushio and S. Yamamoto, "Prediction-based control of chaos", no. December, pp. 30–35, 1999.
- [10] H. N. Agiza, "Chaos synchronization of Lu dynamical system", vol. 58, pp. 11–20, 2004.
- [11] Q. Wang, et D. Qi, "Passivity-Based Control for Fractional Order Unified Chaotic System", In: International Conference on Life System Modeling and Simulation and
Chapitre 3 : Contrôle et synchronisation des systèmes fractionnaires chaotiques à retard à base de la commande prédictive

International Conference on Intelligent Computing for Sustainable Energy and Environment. Springer, Berlin, Heidelberg, p. 310-317, 2014.

- [12] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, et al, "Linear matrix inequalities in system and control theory", Siam, 1994.
- [13] J. Tang, "Synchronization of different fractional order time-delay chaotic systems using active control", Mathematical problems in Engineering, vol. 2014.
- [14] J. Chen, X. Zhang, et J. Peng, "Time-Delayed Chaotic Circuit Design Using All-Pass Filter", Circuits and Systems I: Regular Papers, IEEE Transactions on, vol. 61, no 10, p. 2897-2903, 2014.
- [15] D. Biswas, et T. Banerjee, "A simple chaotic and hyperchaotic time-delay system: design and electronic circuit implementation", Nonlinear Dynamics, p. 1-17, 2015.
- [16] L. Jun-Jie, et L. Chong-Xin, "Realization of fractional-order Liu chaotic system by circuit", Chinese Physics, vol. 16, no 6, p. 1586, 2007.

Chapitre 4: Nouveau système de communication sécurisée à base des systèmes fractionnaires chaotiques à retard : théorie et réalisation

4.1 Introduction	100
4.2 Conception du système de communication sécurisée	101
4.2.1 Conception de l'émetteur	101
4.2.2 Conception du récepteur	102
4.3 Synchronisation par la méthode H-infini	103
4.3.1 L'approche proposée	103
4.3.2 Résultats de simulations	108
4.4 Réalisation du circuit du nouveau système de communication sécurisée à base du système fractionnaire chaotique à retard de Chen	111
4.4.1 Réalisation de l'émetteur	111
4.4.2 Réalisation du récepteur	116
4.4.3 Réalisation du circuit de la reconstitution du message transmis	117
4 .4.4 Résultats de simulations	118
4.5 Conclusion	119

Chapitre 4 :

Nouveau système de communication sécurisée à base des systèmes fractionnaires chaotiques à retard : théorie et réalisation

4.1 Introduction

En 1990, Pecora et Carroll [1] ont introduit la première approche qui permet d'établir la synchronisation entre deux systèmes chaotiques. Cette étude a ouvert la porte à l'application du chaos dans la communication sécurisée. Plusieurs travaux ont abordé ce domaine. A titre non exhaustif, on peut citer:

Dans [2], les auteurs proposent un schéma de communication sécurisée à spectre étalé utilisant des modulations de multiplication, et un filtre de Kalman étendu. Dans [3], un contrôleur adaptatif en mode glissant d'ordre élevé est réalisé pour assurer la synchronisation entre l'émetteur et le récepteur et pour récupérer un message transmis. Dans [4], un schéma de synchronisation à couplage indirect, avec des signaux cryptés de forte puissance est présenté. Les auteurs dans [5], ont proposé une nouvelle implémentation permettant de synchroniser deux systèmes hyper-chaotiques à temps discret à l'aide de cartes arduino-uno.

Récemment, les systèmes fractionnaires chaotiques ont attiré l'attention dans la communication sécurisée, on trouve par exemple les travaux [6-11].

Ce chapitre présente une nouvelle approche pour la communication sécurisée en utilisant un système chaotique d'ordre fractionnaire à retard, avec simulation du circuit sous Mutisim.

Dans une première partie, nous décrivons le système proposé: émetteur/récepteur. La deuxième partie sera consacrée à la présentation du nouveau théorème pour le contrôle Hinfini avec LMI, afin d'établir la synchronisation entre l'émetteur et le récepteur bruité. Pour récupérer le message transmis, un algorithme de démodulation chaotique est utilisé où plusieurs simulations sous Simulink-Matlab sont présentés. Nous terminerons le chapitre par la présentation de la réalisation du circuit électronique avec une simulation en utilisant Multisim, et ce afin de prouver que l'approche proposée possède de bonnes performances.

4.2 Conception du système de communication sécurisée

Le système de communication sécurisée proposé est présenté dans la figure suivante :



Figure 4.1: Schéma du système de communication sécurisée proposé.

m(t): message transmis.

 $\widehat{m}(t)$: message reconstitué.

4.2.1 Conception de l'émetteur

Le système fractionnaire chaotique à retard de Chen [12], est utilisé comme émetteur:

$$\begin{cases} \frac{d^{\alpha} x_{m}}{dt^{\alpha}} = a(y_{m} - x_{m}) + \varsigma m(t) \\ \frac{d^{\alpha} y_{m}}{dt^{\alpha}} = by_{m} - x_{m} z_{m} + (b - a) x_{m} \\ \frac{d^{\alpha} z_{m}}{dt^{\alpha}} = x_{m} y_{m} - c z_{m} (t - \tau) \\ U_{m} = C x_{m} \end{cases}$$

$$4.1$$

Avec $x_m, y_m, z_m \in \mathbb{R}^n$ les états de l'émetteur, U_m la sortie de l'émetteur, les paramètres du système sont donnés comme suit: a = 35, b = 28, c = 3, m(t) le message transmis, $\varsigma > 0$ une constante, C une matrice avec des dimensions appropriées.

Nous considérons $\alpha = 0.98$ et $\tau = 0.2s$, $\zeta m(t)$ doit être choisi d'une manière pour permettre de garder le comportement chaotique du système.

À travers les figures (4.2) et (4.3) on peut constater le comportement chaotique du système (4.1)

Chapitre 4: Nouveau système de communication sécurisée à base des systèmes fractionnaires chaotiques à retard : théorie et réalisation



Figure 4.2:Les trajectoires d'état de l'émetteur.



Figure 4.3: Portrait de phase du système fractionnaire de Chen avec $\tau = 0.2s$ dans le plan x-z

4.2.2 Conception du récepteur

Inspiré par les travaux publiés en [13], [14] et [15], le récepteur est composé de deux systèmes : Le premier est représenté par l'équation (4.2), est utilisé pour établir la synchronisation entre l'émetteur et le récepteur en utilisant H-infini. Le second système,

représenté par l'équation (4.3), est utilisé pour récupérer le signal transmis en utilisant l'algorithme de démodulation chaotique.

$$\begin{cases} \frac{d^{\alpha} x_{s}}{dt^{\alpha}} = a(y_{s} - x_{s}) + d_{1}w(t) + L_{1}(Um - Us) \\ \frac{d^{\alpha} y_{s}}{dt^{\alpha}} = by_{s} - x_{s}z_{s} + (b - a)x_{s} + d_{2}w(t) + L_{2}(Um - Us) \\ \frac{d^{\alpha} z_{s}}{dt^{\alpha}} = x_{s}y_{s} - 3z_{s}(t - \tau) + d_{3}w(t) + L_{3}(Um - Us) \\ U_{s} = Cx_{s} \end{cases}$$

$$4.2$$

$$\begin{cases} \frac{d^{\alpha}Q}{dt^{\alpha}} = -\zeta K \left(a(y_s - U_m) + \zeta \hat{m}(t) \right) \\ \hat{m}(t) = \zeta K U_m(t) + Q \end{cases}$$

$$4.3$$

Avec $x_s, y_s, z_s \in \mathbb{R}^n$ les états du récepteur, U_s la sortie du récepteur, w(t) une perturbation externe, L_1, L_2 et L_3 sont les gains de retour qui doivent être calculés en utilisant H-infini, K une constante positive, et $\hat{m}(t)$ le signal reconstitué.

4.3 Synchronisation par la méthode H-infini

Dans la suite de ce chapitre, nous allons étudier les conditions de synchronisation par la méthode H-infini de deux systèmes chaotiques fractionnaires à retard.

Nous allons injecter un message dans la dynamique du système fractionnaire chaotique à retard de Chen, qui représente l'émetteur. Pour récupérer le message du récepteur perturbé, nous utilisons H-infini pour établir la synchronisation entre l'émetteur et le récepteur, afin de reconstituer le signal transmis.

4.3.1 L'approche proposée

L'équation de la dynamique d'erreur de la synchronisation entre l'émetteur et le récepteur [16] :

$$\begin{cases} \frac{d^{\alpha}e_{x}}{dt^{\alpha}} = a(e_{y} - e_{x}) - d_{1}w(t) - L_{1}(Um - Us) + \varsigma m(t) \\ \frac{d^{\alpha}e_{y}}{dt^{\alpha}} = be_{y} - x_{m}z_{m} + x_{s}z_{s} + (b - a)e_{x} - d_{2}w(t) - L_{2}(Um - Us) \\ \frac{d^{\alpha}e_{z}}{dt^{\alpha}} = x_{m}y_{m} - x_{s}y_{s} - ce_{z}(t - \tau) - d_{3}w(t) - L_{3}(Um - Us) \end{cases}$$

$$4.4$$

On peut représenter l'équation (4.4) par l'équation suivante:

$$D^{\alpha}e(t) = Ae(t) + A_{1}e(t-\tau) + B(g-f) - Dw(t) - L(U_{m}(t) - U_{s}(t)) + Hm(t)$$
4.5

Avec:

f

$$A = \begin{bmatrix} -35 & 35 & 0 \\ -7 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; A1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} ; g = \begin{bmatrix} 0 & -x_m z_m & x_m y_m \end{bmatrix}^T$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & -x_s z_s & x_s y_s \end{bmatrix}^T ; D = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}^T ; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T ; H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

On considère la fonction de Lyapunov suivante:

$$V(t) = e^{t}(t)pe(t) + e^{t}(t-\tau)Te(t-\tau)$$

$$4.6$$

On se basant sur l'équation (1.17) qui relie la dérivée au sens de Caputo par la dérivée au sens de Riemann-Liouville on peut calculer la dérivée fractionnaire de l'équation (4.6) Nous obtenons:

$${}_{C}^{\alpha}DV(t) = {}_{R}^{\alpha}D\left[e^{t}(t)Pe(t) + e^{t}(t-\tau)Te(t-\tau)\right] - \sum_{k=0}^{n}\left(\left(e^{t}(t)Pe(t) + e^{t}(t-\tau)Te(t-\tau)\right)^{k}\right)(0)\frac{t^{k}}{K!}$$

$$4.7$$

Par conséquent, on a :

$${}_{C}^{\alpha}DV(t) = {\binom{\alpha}{R}De(t)}^{t}Pe(t) + e(t)^{t}P\left({\binom{\alpha}{R}De(t)}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+K)\Gamma(1-K+\alpha)} {}_{k}^{R}De(t) {}_{k-1}^{R}De(t) - \frac{t^{-\alpha}P}{\Gamma(1+\alpha)} \left(e^{t}(0)e(0)\right) + \frac{\tau^{-\alpha}(t-\tau)}{\Gamma(1-\alpha)}e^{t}(t-\tau)Te(t-\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+K)\Gamma(1-K+\alpha)}$$

$${}_{k}^{R}De(t-\tau) {}_{k-1}^{R}De(t-\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} {\binom{\alpha}{K}} \frac{k!(t-\tau)}{\Gamma(k-\alpha+1)} {}_{m=1}^{k}e^{m}(t-\tau)\Sigma\prod \frac{1}{ar!} \left(\frac{(t-\tau)^{r}}{r!}\right)^{ar}$$

$$- \frac{t^{-\alpha}T}{\Gamma(1+\alpha)} \left(e^{t}(-\tau)e(-\tau)\right)$$

$$4.8$$

Avec

$$\frac{t^{-\alpha}P}{\Gamma(1+\alpha)} \left(e^t(0)e(0) \right) = \frac{t^{-\alpha}P}{\Gamma(1+\alpha)} \left\| e(0) \right\|^2$$

$$4.9$$

Et

$$\frac{t^{-\alpha}T}{\Gamma(1+\alpha)} \left(e^t \left(-\tau \right) e\left(-\tau \right) \right) = \frac{t^{-\alpha}T}{\Gamma(1+\alpha)} \left\| e(0) \right\|^2$$

$$4.10$$

Supposant que :

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+K)\Gamma(1-K+\alpha)} {}^{R}_{k} De(t) {}^{R}_{k-1} De(t)$$

$$4.11$$

$$\varphi \mathbf{1}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+K)\Gamma(1-K+\alpha)} {}^{R}_{k} De(t-\tau) {}^{R}_{k-1} De(t-\tau)$$

$$4.12$$

$$\varphi^2(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{K} \frac{k!(t-\tau)}{\Gamma(k-\alpha+1)} \sum_{m=1}^{k} e^m (t-\tau) \sum_{k=1} \prod \frac{1}{ar!} \left(\frac{(t-\tau)^r}{r!}\right)^{ar}$$

$$4.13$$

Prenant en compte la remarque suivante:

Soit f une fonction définie comme suit [17]:

$$f(x(t)) = x(t)^2$$

$$4.14$$

La dérivée fractionnaire de l'équation (4.14) est comme suit :

$$D_t^{\alpha} f(t) = x(t) D_t^{\alpha} x(t) + P_x$$

$$4.15$$

Avec

$$P_x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+K)\Gamma(1-K+\alpha)} {}^k_t D {}^{\alpha-k}_t Dx$$

$$4.16$$

On note que P_x vérifie la condition suivante [18] :

$$\left\|P_{x}\right\| \leq \beta \left\|x\right\|^{2} \tag{4.17}$$

Ce qui conduit à

$$\varphi(t) \le u \left\| e(t) \right\|^2 \tag{4.18}$$

$$\varphi \mathbf{1}(t) \le u_1 \left\| \boldsymbol{e}(t-\tau) \right\|^2 \tag{4.19}$$

$$\varphi 2(t) \le u_2 \left\| e \right\|^2 \tag{4.20}$$

u, u_1 , u_2 : trois valeurs positives.

En utilisant les équations (4.5), (4.11) et (4.12) (4.13) on trouve l'équation ci-dessous :

$${}_{C}^{\alpha}DV(t) = \left[e(t)^{t}A^{t} + e(t-\tau)^{t}A_{1}^{t} + (g-f)^{t}B^{t} - W(t)^{t}D^{t} - L^{t}(U_{m}(t) - U_{s}(t)) + m(t)^{t}H^{t} \right] Pe(t) + e(t)^{t}P\left[Ae(t) + A_{1}e(t-\tau) + B(g-f) - DW(t) - L(U_{m}(t) - U_{s}(t)) + Hm(t)\right] + \frac{\tau}{\Gamma(1-\alpha)}e(t-\tau)^{t}Te(t-\tau) + \varphi(t) + \varphi(t)1 + \varphi(t)$$

$$4.21$$

Suite à une simplification on trouve :

$${}^{\alpha}_{C}DV(t) = e(t)^{t} \Big[A^{t}P + PA - C^{t}L^{t}P - PLC + m(t)^{t}H^{t} \Big] e(t) + e(t)PA_{1}e(t-\tau) + e^{t}(t-\tau)A_{1}^{t}P - e(t)^{t}PDW(t) - W(t)^{t}D^{t}Pe(t) + (g-f)^{t}B^{t}Pe(t) + e(t)^{t}PB(g-f)$$

$$+ e(t)^{t}PHm(t) + \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}e^{t}(t-\tau)Te(t-\tau) + \varphi(t) + \varphi(t)$$

Lemme 4.1

X, Y deux matrices $\in \mathbb{R}^{n \times m}$ pour tout scalaire $\Lambda > 0$ on a l'inégalité suivante [19] :

$$X^{t}Y + Y^{t}X \le \Lambda X^{t}X + \Lambda^{-1}Y^{t}Y$$

$$4.23$$

En utilisant lemme (4.1), nous obtenons l'équation suivante:

$${}_{C}^{\alpha}DV(t) \leq e(t)^{t} \left[A^{t}P + PA - C^{t}L^{t}P - PLC \right] e(t) + 2e(t)^{t} PA_{I}e(t-\tau) - 2e(t)^{t} PDW(t) + \Lambda \left(g - f\right)^{t} \cdot \left(g - f\right) + \Lambda^{-1}ePBB^{t}Pe + \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}e(t-\tau)^{t} Te(t-\tau) + \varphi(t) + \varphi(t) + \varphi(t) + \Lambda m(t)^{t} H^{t}PPHm(t) + \Lambda^{-1}e^{t}(t)e(t)$$

$$4.24$$

Par la suite on a:

$$\|PHm(t)\|^2 > 0$$
 , $\|e(t)\|^2 > 0$ et $\Lambda > 0$ 4.25

Sachant que la fonction non linéaire satisfait la condition de Lipschitz, cela conduit à la relation suivante:

$$\left(g-f\right)^{t}\left(g-f\right) \le \lambda^{2} e\left(t\right)^{t} e\left(t\right)$$

$$4.26$$

D'après la relation (4.26), l'équation (4.24) devient :

$${}_{C}^{\alpha}DV(t) \leq e(t)^{t} \Big[A^{t}P + PA - C^{t}L^{t}P - PLC + \Lambda^{-1}PBB^{t}P + \Lambda\lambda^{2}I + u \Big] e(t) + 2e(t)^{t}PA_{l}e(t-\tau)$$

-2e(t)^t PDW + $\frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}e^{t}(t-\tau).Te(t-\tau) + u_{l}e(t-\tau)^{t}e(t-\tau) + u_{2}e^{t}e$
4.27

On définit la fonction R(e(t), w(t)) comme suit:

$$R(e(t), w(t)) = {}_{C}^{\alpha} DV(t) + e(t)^{t} e(t) - \sigma^{2} w(t)^{t} w(t)$$
4.28

Remplaçant (4.27) dans (4.28) :

$$R(e(t), w(t)) \le \Phi^{t} \Omega \Phi$$

$$4.29$$

Tel que

$$\Phi^{t} = \left[e^{t}\left(t\right), e^{t}\left(t-\tau\right), w^{t}\left(t\right)\right]$$

$$4.30$$

D'autre part on peut retirer la matrice suivante d'après une superposition entre les deux équations (4.28) et (4.29)

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & PA_1 & -PD \\ * & T \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + u_1 I & 0 \\ * & * & -\sigma^2 I \end{bmatrix} \langle 0$$
 4.31

Avec

$$\Omega_{11} = A^{t}P + PA - C^{t}L^{t}P - PLC + \Lambda^{-1}PBB^{t}P + \Lambda\lambda^{2}I + u + u_{2}$$
4.32

On pose : F = PL

Ce qui donne :

$$\Omega = \begin{bmatrix} \tilde{\Omega}_{11} & PA_1 & -PD \\ * & T \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + u_1 I & 0 \\ * & * & -\sigma^2 I \end{bmatrix} \langle 0$$
4.33

Avec

$$\tilde{\Omega}_{11} = A^t P + PA - C^t F^t - FC + \Lambda \lambda^2 I + \Lambda^{-1} PBB^t P + u + u2 + I$$

$$4.34$$

Finalement on trouve :

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & PA_1 & -PD & PB \\ * & T \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + u_1 I & 0 & 0 \\ * & * & -\sigma^2 I & 0 \\ * & * & * & -\Lambda^{-1} I \end{bmatrix} \langle 0$$
4.35

Avec

$$\Theta_{11} = A^{t}P + PA - C^{t}F^{t} - FC + \Lambda\lambda^{2}I + u + u_{2} + I$$
4.36

4.3.2 Résultats de simulations

Nous présentons dans cette section des simulations numériques du système de communication sécurisée proposé, on utilisant Simulink.

Les conditions initiales de l'émetteur et du récepteur sont prises comme suit $(x_m(0), y_m(0), z_m(0)), (x_s(0), y_s(0), z_s(0)) = ((1,2,3), (-3,-2,-1))$, le facteur d'atténuation de perturbation $\sigma = 0.5$

Le message a transmettre représente un signal sinusoidal donné par la formule suivante:

$$m(t) = 0.1\cos(100t)$$

En résolvant le LMI (4.35) en utilisant MATLAB toolbox LMI, nous obtenons la matrice suivante:

$$L = 10^4 \begin{bmatrix} 0.2847\\ 2.1773\\ 0.5220 \end{bmatrix}$$

Chapitre 4: Nouveau système de communication sécurisée à base des systèmes fractionnaires chaotiques à retard : théorie et réalisation



Figure 4.6 : Synchronisation des séries temporelles de $z_m - z_s$.

Les résultats obtenus, montrent que le système se synchronise très rapidement même en cas de perturbation, ce qui montre l'efficacité de l'approche proposée.



Figure 4.7 : Erreurs de synchronisation.



Figure 4.8 : Le message transmis et le message reconstitué.

D'après la figure (4.8), on peut constater que même en présence de perturbations, le message est bien récupéré.

Nous avons calculé l'erreur quadratique moyenne (MSE) dans un intervalle de temps variant entre 0 et 10s. La valeur MSE obtenue est de 0,987%. C'est un faible taux d'erreur, ce qui permet de dire que le signal est très bien récupéré.

4.4 Réalisation du circuit du nouveau système de communication sécurisée à base du système fractionnaire chaotique à retard de Chen

4.4.1 Réalisation de l'émetteur

L'équation du circuit électronique du système fractionnaire chaotique à retard de Chen, peut être représentée dans le champ de Laplace [20] comme suit:

$$\begin{cases} \frac{x_m(s)}{H(s)} = \frac{R_1}{C_0 \cdot R_8} \left[\frac{y_m(s)}{R_3} - \frac{R_{12} x_m(s)}{R_{13} \cdot R_2} \right] \\ \frac{y_m(s)}{H(s)} = \frac{R_{14}}{C_0 \cdot R_{11}} \left[\frac{y_m(s)}{R_{17}} - \frac{V \cdot R_{26} \cdot x_m(s) \cdot z_m(s)}{R_{15} \cdot R_{27}} - \frac{x_m(s) R_{12}}{R_{11} \cdot R_6} \right] \\ \frac{z_m(s)}{H(s)} = \frac{R_{22} 22}{C_0 \cdot R_{21}} \left[\frac{V \cdot x_m(s) \cdot y_m(s)}{R_{23}} - \frac{R_{26} 26 \cdot z_m(s)}{R_{25} \cdot R_{27}} \right] \end{cases}$$

$$4.37$$

La figure (4.9) représente le circuit électronique du système (4.37).



Chapitre 4: Nouveau système de communication sécurisée à base des systèmes fractionnaires chaotiques à retard : théorie et réalisation

Figure 4.9 : Circuit électronique du système fractionnaire chaotique à retard de Chen. Les valeurs des résistances sont comme suit:

$$R_{1} = R_{2} = R_{12} = R_{22} = R_{26} = R_{27} = 10k\Omega, R_{8} = R_{11} = R_{21} = R_{23} = 100K\Omega;$$

$$R_{3} = R_{13} = 2.85K\Omega; R_{17} = 14.28K\Omega; R_{14} = 40K\Omega, R_{15} = 400k\Omega, R_{25} = 33.33K\Omega, R_{16} = 57.14k$$

L'ordre fractionnaire utilisé dans ce circuit est 0.98.

On se basant sur l'approximation de *q* de 0,1 à 0,9 dans [21], un graphique d'approximation de tracé de Bode peut être réalisé par le domaine fréquentiel complexe du circuit équivalent de forme de chaîne entre A et B sur la figure (4.10) lorsque $\alpha = 0.98$.

La formule d'approximation de $1 / s \wedge q = 1 / s \wedge 0.98$ est

$$\frac{1}{s^{0.98}} = \frac{1.2974(s+1125)}{(s+1423)(s+0.01125)}$$
4.38

Sur la base de la théorie des circuits dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert F(s) entre A et B peut être présentée comme suit:

$$F(S) = \frac{\frac{1}{C_1}}{S + \frac{1}{R_1C_1}} + \frac{\frac{1}{C_2}}{S + \frac{1}{R_2C_2}} = \frac{1}{C_0} \left[\frac{\left(\frac{C_0C_2 + C_0C_1}{C_1 \cdot C_2}\right) \left(S + \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1R_2}\right) / \left(C_1 + C_2\right)\right)}{\left(S + \frac{1}{R_1C_1}\right) \left(S + \frac{1}{R_2C_2}\right)} \right]$$

$$4.39$$

Avec

 $C_0 = 1\mu F$, et on a aussi :

$$H(s) = F(s).C_0 = \frac{1}{s^{0.98}}$$
 4.40

D'après l'équation (4.40), les valeurs des résistances et capacités sont comme suit :

 $R_1 = 91.187M\Omega$, $R_2 = 190.933\Omega$, $C_1 = 0.9753\mu F$, $C_2 = 3.6806\mu F$

Un bloc fractionnaire est utilisé d'ordre 0.98 est illustré dans la figure (4.10)



Figure 4.10 : Bloc fractionnaire d'ordre 0.98.

L'équation du circuit de l'information cryptée peut être représentée comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x_{m}(s)}{H(s)} = \frac{R_{5}}{C_{0}.R_{4}} \left[\frac{y_{m}(s)}{R_{9}} - \frac{x_{m}(s)R_{7}}{R_{8}.R_{6}} + \zeta \frac{m}{R_{26}} \right] \\ \frac{y_{m}(s)}{H(s)} = \frac{R_{14}}{C_{0}.R_{13}} \left[\frac{y_{m}(s)}{R_{16}} - \frac{V.R_{24}.x_{m}(s).z_{m}(s)}{R_{15}.R_{25}} - \frac{x_{m}(s)R_{7}}{R_{11}.R_{6}} \right] \\ \frac{z_{m}(s)}{H(s)} = \frac{R_{21}}{C_{0}.R_{20}} \left[\frac{V.x_{m}(s).y_{m}(s)}{R_{22}} - \frac{R_{26}.z_{m}(s)}{R_{25}.R_{23}} \right] \\ 4.40$$

La figure (4.11) représente le circuit électronique du système (4.1) qui représente l'émetteur



Figure 4.11 : Circuit électronique de l'émetteur.

Avec:

$$R_{5}, R_{6}, R_{7}, R_{21}, R_{24}, R_{25}, R_{26} = 10K\Omega, R_{4}, R_{13}, R_{20} 20et R_{22} = 100K\Omega, \zeta = 0.41, V = 1$$
$$R_{16} = 14.28K\Omega; R_{14} = 40K\Omega, R_{15} = 40K\Omega; R_{8}etR_{9} = 2.85K\Omega, R_{23} = 33.33K\Omega$$

Génération d'un retard de 200 ms :

Nous utilisant la même méthode appliquée dans le chapitre 3 dans la partie de la génération du retard de 410ms, nous avons :

$$10.\tau = 10.2.R.C = 200ms$$

 $R.C = 10ms$

Les paramètres du dernier filtre sont choisis comme suit :

$$R = 100K\Omega$$
$$C = 100nf$$

La figure (4.12) présente un circuit électronique générant un retard de 200 ms.



Figure 4.12 : Circuit électronique réalisant un retard de 200 ms.

4.4.2 Réalisation du récepteur

La figure (4.13) représente le circuit électronique du système (4.2), et pour générer le bruit nous avons utilisé le bruit XLV3 [22] présenté dans la figure (4.14).



Figure 4.13 : Circuit électronique du récepteur.

Chapitre 4: Nouveau système de communication sécurisée à base des systèmes fractionnaires chaotiques à retard : théorie et réalisation



Figure 4.14 : Allure du bruit blanc gaussien généré.

4.4.3 Réalisation du circuit de la reconstitution du message transmis

Le circuit électronique de l'information reconstituée fournie par le système (4.3), est présenté dans la figure (4.15).



Figure 4.15: Circuit électronique du signal reconstitué.

4 .4.4 Résultats de simulations

La figure (4.16) représente les différents résultats des simulations obtenues sous Multisim





 $y_m - y_s$





 $m_m - m_s$

Figure 4.16 : Résultats de simulations sous Multisim.

D'après la figure (4.16), nous observons que la synchronisation est établie entre l'émetteur et le récepteur, en conséquence, l'information cryptée est également bien reconstruite.

En comparant les figures (4.4), (4.5) et (4.6) à la figure (4.16), on observe un très bon accord qualitatif entre les simulations numériques avec Simulink / Matlab et les simulations du circuit avec Multisim.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé et présenté une nouvelle approche pour sécuriser un récepteur perturbé, qui est basé sur le système chaotique à retard d'ordre fractionnaire de Chen. L'efficacité et la performance de l'approche a été vérifiée à travers des simulations numériques sous Simulink\Matlab et une réalisation d'un circuit électronique simulé avec Multisim. Dans une première partie, un nouveau système de communication sécurisée proposé comprend trois étapes : la première étape consiste à injecter l'information dans la dynamique du système fractionnaire chaotique à retard de Chen (émetteur). La deuxième étape est réservée à la synchronisation du système perturbé d'ordre fractionnaire chaotique à retard de Chen (récepteur). La dernière étape une reconstitution de l'information par un algorithme de démodulation.

Dans une deuxième partie, nous avons présenté un nouveau théorème pour le contrôle Hinfini avec une démonstration détaillée, utilisant le LMI, afin d'établir la synchronisation entre l'émetteur et le récepteur bruité. Différentes simulations ont été faites avec objectif de montrer la robustesse de l'approche proposée.

Dans la dernière partie, nous avons schématisé électroniquement un crypto-système, basé sur un système fractionnaire chaotique à retard de Chen. Différentes simulations ont été effectuées afin de comparer les résultats numériques sous Simulink et les résultats sous Multisim, et prouver que le système de communication sécurisée proposé possède une bonne performance.

Bibliographie

- [1] L. M. Pecora, et L. T. Carroll, "Synchronization in chaotic systems. Physical review letters", vol. 64, no 8, p. 821, 1990.
- [2] K. Fallahi, et H. Leung, "A chaos secure communication scheme based on multiplication modulation", Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, vol. 15, no 2, p. 368-383, 2010.
- [3] J. L. Mata-Machuca, R. Martínez-Guerra, R. Aguilar-López, and C. Aguilar-Ibañez,
 "A chaotic system in synchronisation and secure communications", Commun.
 Nonlinear Sci. Numer. Simul, vol. 17, no. 4, pp. 1706–1713, 2012.
- [4] A. Senouci, A. Boukabou, K. Busawon, *et al.* "Robust chaotic communication based on indirect coupling synchronisation", Circuits, Systems, and Signal Processing, vol. 34, no 2, p. 393-418, 2015.
- [5] H. Hamiche, O. Megherbi, R. Kara, R. Saddaoui, M. Laghrouche, S. Djennoune, "A new implementation of an impulsive synchronization of two discrete-time hyperchaotic systems using Arduino-Uno boards", International Journal of Modeling, Identification and Control, , Volume 28, N° 02, Pages 177-186, 2017.
- [6] E. Zambrano-Serrano, J. M. Munoz-Pacheco, et E. Campos-Canton, "Chaos generation in fractional-order switched systems and its digital implementation", AEU-International Journal of Electronics and Communications, no. 79, p.43-52, 2017.
- [7] L. Chao, "Asynchronous error-correcting secure communication scheme based on fractional-order shifting chaotic system", International Journal of Modern Physics C, vol. 26, no 06, p. 1550065, 2015.
- [8] G. R. Li, & N. H. Wu, "Secure communication on fractional-order chaotic systems via adaptive sliding mode control with teaching learning feedback based optimization", Nonlinear Dynamics, 2018.
- [9] K. D. Shah, B. R. Chaurasya, A. V. Vyawahare, et al, "FPGA implementation of fractional-order chaotic systems", AEU-International Journal of Electronics and Communications, vol. 78, p. 245-257, 2017.

Chapitre 4: Nouveau système de communication sécurisée à base des systèmes fractionnaires chaotiques à retard : théorie et réalisation

- [10] H. Hamiche, S. Guermah, S. Kassim, et al, "Secure data transmission scheme based on fractional-order discrete chaotic system", In: Control, Engineering & Information Technology (CEIT), 3rd International Conference on. IEEE, 2015. p. 1-6, 2015.
- [11] O. Megherbi, H. Hamiche, S. Djennoune, M. Bettayeb, "A new contribution for the impulsive synchronization of fractional-order discrete-time chaotic systems", Nonlinear Dynamics, Volume 90, N° 3, pp 1519–1533, 2017.
- [12] J. Tang "Synchronization of different fractional order time-delay chaotic systems using active control", Mathematical problems in Engineering, vol 2014.
- [13] C. K. Cheng, H. H. Kuo, Y. Y. Hou, *et al*, "Robust chaos synchronization of noiseperturbed chaotic systems with multiple time-delays", Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, vol. 387, no 13, p. 3093-3102, 2008.
- [14] X. F. Wang, et Z. Q. Wang, "A robust demodulation approach to communications using chaotic signals", International Journal of Bifurcation and Chaos, vol. 13, no 01, p. 227-231, 2003.
- [15] Y. Boukal, M. Darouach, M. Zasadzinski, et al, "Design of functional fractional-order observers for linear time-delay fractional-order systems in the time domain", In : Fractional Differentiation and Its Applications (ICFDA), International Conference on. IEEE, p. 1-6, 2014.
- [16] F. Zouad, K. Kemih, & H. Hamiche, "A new secure communication scheme using fractional order delayed chaotic system: design and electronics circuit simulation", Analog Integrated Circuits and Signal Processing, 99(3), 619–632, 2019.
- [17] E.F.E, Mehmet Önder, "Fractional fuzzy adaptive sliding-mode control of a 2-DOF direct-drive robot arm", IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics), vol. 38, no 6, p. 1561-1570, 2008.
- [18] E. A. Eboroujeni, et H. R. Momeni, "Observer based control of a class of nonlinear fractional-order systems using LMI", International Journal of Science and Engineering Investigations, vol. 1, no 1, p. 48-52, 2012.
- [19] M. Pourgholi and V. J. Majd, "A nonlinear adaptive resilient observer design for a class of Lipschitz systems using LMI", Circuits, Systems, and Signal Processing, vol. 30, no. 6, pp. 1401-1415, 2011.

Chapitre 4: Nouveau système de communication sécurisée à base des systèmes fractionnaires chaotiques à retard : théorie et réalisation

- [20] L. Jun-Jie, Lu et L. Chong-Xin, "Realization of fractional-order Liu chaotic system by circuit", Chinese Physics, vol. 16, no 6, p. 1586, 2007.
- [21] C. X. Liu, "Fractional-order Chaotic Circuit Theory and Applications", 2011.
- [22] https://forums.ni.com/t5/Multisim-Custom-Simulation/Noise-Source-Generator/tap/3502584.

Conclusion générale

Nous nous sommes penchés dans ce travail de thèse sur le problème de synchronisation des systèmes fractionnaires chaotiques à retard, et nous nous sommes arrivés à une contribution principale qui consiste à la conception et la réalisation d'un nouveau système de communication sécurisée basé sur les systèmes fractionnaires chaotiques à retard. Notre deuxième contribution consistait au contrôle d'un système fractionnaire chaotique à retard, et ce à l'aide d'une nouvelle approche basée sur la commande prédictive en utilisant quelques propriétés du calcul fractionnaire.

Nous nous sommes intéressés dans le premier chapitre de ce manuscrit aux systèmes fractionnaires chaotiques à retard, en présentant d'abord le chaos, sa théorie, et des réalisations analogiques des opérateurs fractionnaires. Nous avons également présenté le long du chapitre 1 les équations différentielles fractionnaires et les différentes méthodes de résolution numérique qui leurs sont correspondantes. Nous avons touché dans ce même chapitre aux systèmes fractionnaires linéaires et non linéaires et aux systèmes fractionnaires chaotiques à retard.

Le deuxième chapitre, a été dédié à la théorie de la synchronisation, pour cela, nous avons présenté tout d'abord les deux types de couplage de synchronisation. Ensuite, nous avons survolé la synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre entier et sa généralisation au cas des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire (non entier). Nous avons également revu la littérature du domaine, et nous avons présenté quelques travaux connexes, avant de finir le chapitre par la présentation des différentes techniques de chiffrement.

Notre première contribution qui est présentée le long du chapitre 3 consiste au développement d'une nouvelle approche pour contrôler un système fractionnaire chaotique à retard. L'approche proposée est basée sur la commande prédictive et quelques propriétés du calcul fractionnaire. Pour pouvoir bien présenter notre contribution, nous avons commencé le chapitre par un rappel du principe de la commande prédictive pour les systèmes chaotiques d'ordre entier. Nous avons posé et démontré un théorème assurant la convergence du système fractionnaire chaotique à retard contrôlé. Nous avons appliqué l'approche développée pour assurer la synchronisation de deux systèmes fractionnaires chaotiques à retard. Nous avons réalisé en fin du chapitre le schéma d'un système contrôlé sous le logiciel Multisim afin de prouver que l'approche proposée est fiable.

En dernier chapitre, un système de communication sécurisée basé sur le système chaotique d'ordre fractionnaire à retard de Chen est présenté, avec sa réalisation en circuit électronique sous le logiciel Multisim. Nous avons commencé par présenter le système émetteur/récepteur. Ensuite, un deuxième théorème est proposé et démontré, et qui est basé sur le contrôle H-infini et une analyse avec LMI et ce afin d'établir la synchronisation entre l'émetteur et le récepteur bruité. Un algorithme de démodulation chaotique était utilisé pour reconstituer le message transmis. Nous avons terminé le chapitre par une réalisation du circuit électronique du crypto-système avec une simulation en utilisant Multisim.

Comme perspective de ce travail, nous proposons l'implémentation du schéma de transmission proposé sur une carte programmable tel que FPGA.

Résumé:

Les travaux présentés dans cette thèse s'articulent autour du cryptage d'informations par le chaos. Le premier objectif de cette thèse est le développement d'une nouvelle approche robuste pour le contrôle et la synchronisation des systèmes fractionnaires chaotiques à retard en se basant sur la théorie du contrôle prédictif non linéaire et les propriétés de base du calcul fractionnaire. Un nouveau théorème est proposé et démontré permettant de garantir la convergence de la trajectoire chaotique vers le point d'équilibre du système fractionnaire chaotique à retard. Une réalisation électronique sous Multisim, correspondant à cette première contribution, est effectuée. Et une synchronisation est assurée entre deux systèmes chaotiques fractionnaires à retard.

Le deuxième objectif consiste en la conception d'un nouveau système de communication sécurisée, basé sur un système fractionnaire chaotique à retard dans un canal bruité en faisant recours au contrôleur H^{∞} et à la théorie d'inégalité matricielle linéaire. L'ordre fractionnaire du système, et la présence du retard augmente la complexité et l'instabilité du système, ce qui conduit à l'amélioration de la sécurisation des communications. Afin de montrer la faisabilité du système de communication sécurisée proposé, une réalisation d'un circuit électronique en utilisant l'outil Multisim est effectué. Les différents résultats numériques sous Simulink\Matlab et les résultats des simulations électroniques sous Multisim montrent que le crypto-système proposé possède de bonnes performances.

Mots clés : système fractionnaire chaotique à retard, calcul fractionnaire, synchronisation, cryptage, contrôle H^{∞} , commande prédictive, décryptage, inégalité matricielle linéaire.

Abstract:

The work presented in this thesis focuses on the encryption of information by chaos. The first objective of this thesis is the development of a new robust approach for the control and synchronization of fractional order delayed chaotic system based on nonlinear predictive control theory and the basic properties of fractional calculus. A new theorem is proposed and demonstrated that guarantee the convergence of the chaotic trajectory towards the point of equilibrium of the fractional order delayed chaotic system. An electronic realization under Multisim, corresponding to this first contribution, is carried out. And a synchronization is ensured between two fractional order delayed chaotic systems.

The second objective is to design a new secure communication system, based on a fractional order delayed chaotic system in a noisy channel using the H^{∞} controller and the linear matrix inequality theory. The fractional order of the system and the presence of the delay increase the complexity and the instability of the system, which leads to the improvement of the security of the communications. In order to show the feasibility of the proposed secure communication system, an electronic circuit is performed using the Multisim tool. The different numerical results under Simulink \ Matlab and the results of the electronic simulations under Multisim show that the crypto-system proposed has good performances.

Key words: fractional order delayed chaotic system, fractional calculus, synchronization, encryption, H^{∞} control, preciditve control, decryption, linear matrix inequality.

ملخص:

يركز العمل المقدم في هذه الرسالة على تشفير المعلومات عن طريق الفوضى. الهدف الأول من هذه الأطروحة هو تطوير نهج قوي جديد للتحكم ومزامنة أنظمة التأخير الفوضوي الكسري بناءً على نظرية التحكم التنبؤية اللاخطية والخصائص الأساسية للحوسبة الكسرية. تم اقتراح وإثبات نظرية جديدة لضمان تقارب المسار الفوضوي إلى نقطة توازن نظام التأخر الفوضوي الكسري ، ويتم تصميم إلكتروني تحت ملتي سيم ، يتوافق مع هذه المساهمة الأولى. ويضمن التزامن بين نظامين فوضويين كسريين متاخرين .

الهدف الثاني هو تصميم نظام اتصال آمن جديد، يعتمد على نظام تأخير كسري فوضوي في قناة صاخبة باستخدام التحكم [∞]H ونظرية عدم المساواة في المصفوفة الخطية. الترتيب الكسري للنظام ، ووجود التأخير يزيد من تعقيد وعدم استقرار النظام ، مما يؤدي إلى تحسين أمن الاتصالات. لإظهار مدى قابلية نظام الاتصال الآمن المقترح ، يتم تنفيذ دائرة إلكترونية باستخدام أداة ملتي سيم ، النتائج العددية المختلفة تحت سميولينك/ماتلاب ونتائج عمليات المحاكاة الإلكترونية تحت ملتي مسيم توضع من من عمليات المحاكم عمليات المحاكم مسيم من يؤدي ألم يتعقبو من الاتصالات. يوضع من التقرار مدى قابلية نظام الاتصال الآمن المقترح ، يتم تنفيذ دائرة الكترونية بالمتخدام المعنو من من المحتلفة تحت من ما من الاتصال الأمن المحاكاة الإلكترونية تحت ملتي مسيم توضح أن نظام التشغير المقترح له أداء جيد.

ا**لكلمات المفتاحية :** نظام التأخير الفوضوي الكسري ، حساب كسري ، التزامن ، التشفير ، التحكم ⁶M، التحكم التنبئي ، فك التشفير ، عدم المساواة في المصفوفة الخطية.