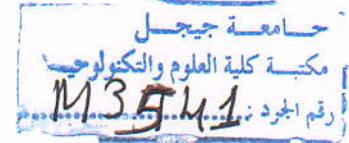




M/ELE, SC  
2017/07



**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**  
**Université Mohamed Seddik BEN YAHIA de Jijel**  
**Faculté des Sciences & de la Technologie**  
**Département d'Electronique**



**Mémoire de fin d'Etudes Pour l'Obtention du Diplôme de**  
**Master en Electronique**  
**Option : Electronique et Systèmes de Communication**

**Thème**



**Conception et Simulation d'un système de  
synchronisation d'ordre fractionnaire**

**Encadré par :**

**M. Karim KEMIH**

**Réalisé par :**

**Mlle. Halima BOURENANE**

**M. Ismail ZAROOUR**

**Promotion 2017**

# *Dédicaces*

*A ma très chère mère qu'Allah la protège, la mémoire de  
mon père qu'Allah lui accorde ses miséricordes et son vaste  
paradis.*

*Je remercie vivement mes frères sœurs, mes beaux frères et  
mes belles sœurs pour leurs soutiens.*

*À celui qui m'a indiqué la bonne voie en me rappelant que  
la volonté fait toujours les grandes femmes...*

*Merci Hocine KOURAS*

*Finalement, je remercie tous ceux qui ont participé de près  
ou de loin dans l'élaboration de ce travail avec un conseil ou  
même un mot d'encouragement parmi mes camarades de  
classe, mes amis.....*

*Et la liste continue.*

*Halima BOURENANE*

## *Dédicace*

*Je dédie ce travail à ma mère mon père et à toute ma  
grande famille ainsi que*

*Tous ceux et celles qui m'ont soutenu et encouragé tout au  
long de mes études.*

*Ismail ZAROUR*

# Sommaire

Introduction générale .....	1
Références bibliographiques .....	3
Chapitre 1 : Etat de l'art sur les systèmes chaotique et fractionnaires .....	4
1.1 Introduction sur les systèmes chaotiques: .....	5
1.2 Systèmes dynamiques:.....	6
1.3 Systèmes dynamiques Chaotiques: .....	6
1.4 Techniques de caractérisation du comportement chaotiques: .....	7
1.4.1 Espace de phases:.....	7
1.4.2 Notion d'attracteur: .....	7
1.4.3 L'exposant de Lypunov: .....	8
1.5 Introduction sur les systèmes fractionnaires: .....	11
1.6 Représentation de la dérivée fractionnaire: .....	13
1.7 Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire: .....	14
La fonction gamma: .....	14
La fonction beta : .....	14
La fonction Mittag-Leffler .....	14
1.8 Opérateur de dérivations fractionnaires, Définitions et propriétés:.....	15
1.8.1 Dérivée de Grünwald-Letnikov :.....	15
1.8.2 Dérivée de Riemann-Liouville :.....	17
1.8.3 Dérivée de Caputo: .....	19
1.8.4 Propriétés : .....	20
1.9 Conclusion: .....	20
Références bibliographiques .....	22
Chapitre 2 : Etat de l'art sur la synchronisation des systèmes chaotiques fractionnaires ....	24

2.1 Introduction .....	25
2.2 Concept et méthodes de synchronisation.....	26
2.2.1 Synchronisation par couplage bidirectionnel .....	27
2.2.2 Synchronisation par couplage unidirectionnel.....	27
2.3 Méthodes de synchronisation .....	28
2.3.1 Synchronisation par décomposition du système.....	29
2.3.2 Synchronisation par le contrôle actif .....	30
2.3.3 Synchronisation par la méthode du Backstepping .....	31
2.4 Type de la synchronisation.....	33
2.4.1 La synchronisation identiques (PC) .....	33
2.4.2 La synchronisation complète (CS) .....	35
2.4.3 La synchronisation généralisée (GS) .....	36
2.4.4 La synchronisation Lag .....	36
2.4.5 La synchronisation anticipée .....	36
2.4.6 La synchronisation de phase (PS) .....	36
2.4.7 L'anti-synchronisation .....	37
2.5 Conclusion.....	37
Références bibliographiques .....	38
<b>Chapitre 3 : Conception et réalisation d'un système de synchronisations d'ordre fractionnaire.....</b>	<b>40</b>
3.1 Introduction.....	41
3.2 Présentation de la commande passive.....	41
3.3 Présentation du système chaotique fractionnaire de Liu.....	43
3.4 Application de la commande passive pour la synchronisation du système de Liu.....	44
3.5. Simulation du circuit électronique transmission sous MULTISIM .....	50

3.5.1. La réalisation du circuit d'alpha ou bien le calcul d'alpha.....	50
3.5.2. Schématisation de l'émetteur .....	51
3.5.3. Schématisation du récepteur .....	52
3.5.4. Schématisation de la commande passive .....	53
3.5.5. Schématisation de l'erreur .....	53
3.5.6. Simulation de la synchronisation du système .....	54
3.6. Conclusion.....	58
Références bibliographiques .....	59
Conclusion générale.....	60

## Table des figures

<b>Figure 1.1:</b> Attracteur de Lorenz.....	8
<b>Figure 1.2 :</b> Divergence de deux trajectoires dans le plan de phase .....	9
<b>Figure 2.1 :</b> Schémas de couplage : (a) unidirectionnel, (b) bidirectionnel .....	28
<b>Figure 2.2 :</b> Structure de synchronisation par décomposition en sous-système proposée par Pecora et Carroll.....	34
<b>Figure 2.3 :</b> Synchronisation maître esclave P-C du système de Lorenz.....	35
<b>Figure 3.1 :</b> L'attracteur du système fractionnaire de Liu .....	44
<b>Figure 3.2 :</b> Schéma de la simulation de synchronisation sous Simulink.....	48
<b>Figure 3.3 :</b> synchronisation de deux systèmes chaotiques fractionnaires sans commande	49
<b>Figure 3.4 :</b> synchronisation de deux systèmes chaotiques fractionnaires avec commande	49
<b>Figure 3.5 :</b> L'unité de forme de chaîne de (a)= $\frac{1}{s^{0.98}}$ , (b)= $\frac{1}{s^{0.9}}$ .....	51
<b>Figure 3.6.</b> Schéma électronique de l'émetteur.....	51
<b>Figure 3.7</b> Schéma électronique du récepteur .....	52
<b>Figure 3.8 :</b> Schéma électronique de la commande passive.....	53
<b>Figure 3.9 :</b> Schéma électronique de l'erreur.....	53
<b>Figure 3.10 :</b> Schéma électronique Simulation de la synchronisation du système.....	54
<b>Figure 3.11 :</b> L'allure du signal chaotique de l'émetteur et le récepteur sans commande (Xm,Xs).....	55
<b>Figure 3.12 :</b> L'allure du signal chaotique de l'émetteur et le récepteur sans commande (Ym,Ys).....	55
<b>Figure 3.13 :</b> L'allure du signal chaotique de l'émetteur et le récepteur sans commande (Zm,Zs) .....	56
<b>Figure 3.14 :</b> L'allure du signal chaotique de l'émetteur et le récepteur avec commande (Xm,Xs).....	56
<b>Figure 3.15 :</b> L'allure du signal chaotique de l'émetteur et le récepteur avec commande (Ym,Ys).....	57
<b>Figure 3.16 :</b> L'allure du signal chaotique de l'émetteur et le récepteur avec commande (Zm,Zs).....	57

# Introduction générale

Les systèmes dynamiques non linéaires à dynamique complexe ont tardivement fait l'objet d'intenses recherches et explorations donnant naissance à la fameuse théorie du chaos [1]. Le développement important des travaux sur les systèmes non linéaires et a conduit à la découverte de la dynamique chaotique, par Lorenz en 1963 [2]. Ce dernier a été le premier à mettre en évidence l'extrême sensibilité aux perturbations d'un simple modèle de calcul de la convection atmosphérique. Le travail de Lorenz n'a eu que peu d'impact à ce moment-là et ce n'est qu'au début des années 1970, que les recherches sur le chaos ont véritablement démarré. Li et York ont été les premiers à utiliser le terme "chaos" pour exprimer un comportement plus compliqué que l'équilibre, le périodique et le quasi-périodique [3].

« This is an apparent paradox from which, one day, useful consequences will be drawn. » ce qui se traduit par « C'est un paradoxe apparent à partir duquel, un jour, les conséquences utiles en seront tirées ». Ces mots sont la réponse de Leibniz à la lettre de L'Hopital dans laquelle on lui posé la question suivante « Que faire si l'ordre sera de  $1/2$  ? » ». Plusieurs auteurs considèrent cette lettre datée en 30 septembre 1695 [4], comme heure de naissance du calcul fractionnaire. Donc le calcul fractionnaire est un sujet mathématique datant de plus de 300 ans. Ce sujet peut être considéré comme un vieux roman et encore nouveau sujet. Il est un vieux sujet, à partir de certaines spéculations de G.W. Leibniz (1695, 1697) et L. Euler (1730), il a été développé jusqu'à nos jours [5].

En 1990, Pecora et Carroll ont présenté le concept de "synchronisation du chaos" pour la première fois [6] et introduit une méthode pour synchroniser deux systèmes chaotiques identiques avec des conditions initiales différentes. A partir de cette date, la synchronisation des systèmes chaotiques est devenue de plus en plus intéressante aux chercheurs dans des champs différents. Le problème de concevoir un système imitateur du comportement d'un autre système chaotique, est appelé la synchronisation. Les deux systèmes chaotiques sont généralement appelés respectivement, système maître (drive) et système esclave (slave) [5].

L'objectif principal de notre travail dans ce mémoire de fin d'études est d'étudier le phénomène de la synchronisation d'un système chaotique d'ordre fractionnaire par la méthode de commande passive et de concevoir le circuit de synchronisation.

Afin de bien présenter notre travail, nous avons organisé de la façon suivante :

**Le premier chapitre :** Dans la première partie nous évoquerons brièvement les notions de base sur les systèmes dynamiques ainsi que les systèmes dynamiques chaotiques où nous introduirons une série de définitions qui nous permettront de donner des définitions assez claires sur le phénomène du chaos, les caractéristiques du chaos seront aussi présentées. La deuxième partie sera consacrée aux éléments de base du calcul fractionnaire, un rappel historique et quelques concepts préliminaires seront introduits comme la transformée de Laplace, la fonction gamma et la fonction de Mittag-Leffler qui joue un rôle important dans la théorie des équations différentielles fractionnaires. Trois approches (Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville et Caputo) à la généralisation des notions de dérivation seront ensuite considérées.

**Le deuxième chapitre :** Il est dédié à la synchronisation des systèmes chaotiques fractionnaires. Nous avons introduit la notion de synchronisation et les différentes méthodes et types de la synchronisation des systèmes chaotiques fractionnaires tout ça après un historique de ce phénomène.

**Le troisième chapitre :** il est consacré à la présentation de la commande passive, puis, à l'application de cette commande pour synchroniser deux systèmes chaotiques fractionnaires. A la fin de ce chapitre, le circuit de synchronisation sous Multisim est développé.

Une conclusion générale et quelques perspectives sont données à la fin de ce mémoire.

## *Références bibliographiques*

- [1] ABDUL RAHUMAN AHMED, *Analyse des Systèmes Non-linéaires à Dynamiques Complexes*. Mémoire Magister. L'université ABOU BEKR BELKAID. (2009).
- [2] HAMAIZIA Tyeb, *Systemes dynamiques et chaos, these de doctorat*, université Constantine-1-, (2013).
- [3] GOUMIDI Djamel Eddine, *Fonction logistique et standard chaotique pour le chiffrement des images satellitaires*, Mémoire de magister, Université Mentouri de Constantine. (2010).
- [4] D. del-Castillo-Negrete, *Fractional calculus: basic theory and applications*, in: *Lectures Presented at the Institute of Mathematics UNAM, Mexico, August (2005)*.
- [5] MENACER Tidjani. « *Dynamique chaotique à derive fractionnaire* ». Mémoire de magistère. Université Mentouri Constantine, (2011).
- [6] L.M. Pecora et T.L. Carroll. "Synchronization in chaotic systems" *Physical Review Letters*, vol. 64, no. 8, pages 821–824, (1990).

# Chapitre 1

## *Etat de l'art sur les systèmes chaotiques et fractionnaires*

---

*Dans ce chapitre, après un rappel sur les systèmes dynamiques et les systèmes chaotiques et leurs propriétés générales, nous présentons les différents outils mathématiques qui nous servent à caractériser le comportement chaotique. Ensuite nous rappelle récapitulatif sur le calcul des dérivées fractionnaires.*

---

## 1.1 Introduction sur les systèmes chaotiques

Le mot chaos prend son origine du terme «  $\chi\alpha\omicron\sigma$  », utilisé par les Grecs pour décrire l'espace vide infini dont ils ont supposé l'existence avant l'émergence de toutes choses. Les Romains ont repris le terme et interprété l'idée sous-jacente pour concevoir quelque chose d'informe, dans lequel – croient-ils — l'architecte du monde a introduit l'ordre et l'harmonie [1]

En 1892, le mathématicien Henri Poincaré a démontré que certains systèmes mécaniques, dont l'évolution temporelle est gouvernée par des équations Hamiltoniennes, peuvent exhiber un mouvement chaotique [1].

En 1963, le météorologue E.N. Lorenz découvre que même un simple ensemble de trois équations (non linéaires couplées de premier ordre) peut donner lieu à des trajectoires complètement chaotiques. Ainsi, Lorenz a mis en évidence un des premiers exemples de chaos déterministe dans les systèmes dissipatifs [3].

En 1975, les mathématiciens Tien- Yien Li et James A. Yorke ont trouvés le nom du chaos [2].

Cependant les travaux de certains scientifiques bien avant cette découverte vont permettre de comprendre la dynamique chaotique, comme ceux d'Henri Poincaré et Alexandre Lyapounov.

Il existe plusieurs définitions possibles du chaos. Ces définitions ne sont pas toutes équivalentes, mais elles convergent vers certains points communs caractérisant ainsi le chaos. Ci-dessous, nous présentons d'une manière succincte quelques caractéristiques qui permettent de comprendre les points marquants d'un système chaotique [4].

Le concept moderne du chaos déterministe est de plus en plus utilisé dans des contextes scientifiques, on peut ainsi trouver le chaos dans plusieurs domaines d'application comme les mathématiques, la physique, la chimie, la biologie ou encore l'économie.

## **1.2 Systèmes dynamiques**

Un système dynamique est une structure qui évolue au cours du temps de façon à la fois [5]:

- **Causale** : Où son avenir ne dépend que de phénomènes du passé ou du présent
- **Déterministe** : C'est-à-dire qu'à partir d'une condition initiale donnée à l'instant présent va correspondre à chaque instant ultérieur un et un seul état futur possible.

L'évolution déterministe du système dynamique peut alors se modéliser de deux façons distinctes :

- **Une évolution continue dans le temps** : Représentée par une équation différentielle ordinaire.
- **Une évolution discrète dans le temps** : L'étude théorique de ces modèles discrets est fondamentale, car elle permet de mettre en évidence des résultats importants, qui se généralisent souvent aux évolutions dynamiques continues. Elle est représentée par le modèle général des équations aux différences finie.

## **1.3 Systèmes dynamiques chaotiques**

La définition qu'on peut donner au chaos est que c'est un phénomène qui peut apparaître dans les systèmes dynamiques déterministes non linéaires. Il présente un aspect fondamental d'instabilité appelé aux conditions initiales, ce qui le rend imprédictible en pratique à long terme. Une autre caractéristique du système chaotique est son évolution qui semble aléatoire [6].

Nous présentons quelques caractéristiques qui permettent de comprendre les points marquants d'un système chaotique [2].

- **Déterministe** : Un système chaotique a des règles fondamentales déterministes et non probabilistes. Le déterminisme est la capacité à « prédire » le futur d'un phénomène à partir d'un événement passé ou présent. L'évolution irrégulière du comportement d'un système chaotique est due aux non linéarités.
- **L'imprévisible** : En raison de la sensibilité aux conditions initiales, qui peuvent être connues seulement à un degré fini de précision.

- **L'irrégularité** : Ordre caché comprenant un nombre infini de modèles périodiques instables (ou mouvements). Cet ordre caché forme l'infrastructure des systèmes chaotiques.
- **Trois degrés de liberté** : Sont suffisants pour donner naissance au chaos. Un système continu de moins de trois degrés de liberté ne peut être chaotique.
- **La non-linéarité** : Un système chaotique est un système dynamique non linéaire. Un système linéaire, ne peut pas être chaotique.
- **La sensibilité aux conditions initiales** : De très petits changements sur l'état Initial peuvent mener à des comportements radicalement différents dans son état final.
- **L'aspect aléatoire** : Tous les états d'un système chaotique présentent des aspects aléatoires.

#### **1.4 Techniques de caractérisation du comportement chaotiques**

L'identification des caractéristiques des systèmes non linéaires à partir d'observations peut se faire grâce à des outils issus du domaine des dynamiques non linéaires tels que [7] : l'espace des phases, les exposants de Lyapunov, la notion attractrice.

##### **1.4.1 Espace de phases**

Un système dynamique est caractérisé par un certain nombre de variables d'état, qui ont la propriété de définir complètement l'état du système à un instant donné. Le comportement dynamique du système est ainsi relié à l'évolution de chacune de ces variables d'état.

Cet espace est appelé l'espace de phase ou chaque point définit un état et le point associé à cet état décrit une trajectoire, appelé également une orbite [5].

##### **1.4.2 Notion d'attracteur**

L'étude du comportement asymptotique d'un système dynamique régi par un flot d'équations différentielles non linéaires révèle très souvent la notion d'attracteur, défini comme l'ensemble compact de l'espace des phases invariant par ce flot et vers lequel

convergent toutes les trajectoires du système. Il existe quatre cas de figures correspondants à des solutions différentes du flot, mettant en évidence des attracteurs différents [5]:

- **Le point attracteur** : correspondant à une solution stationnaire constante, donc de fréquence nulle.
- **Le cycle limite attracteur** : caractérisant un régime périodique, la solution possède une seule fréquence de base.
- **Le tore supra  $T_r$  ( $r \geq 2$ )** : cet attracteur correspond à un régime quasi-périodique ayant  $r$  fréquences de base indépendantes (cas le plus simple  $r=2$ , dynamique bi périodique).
- **L'attracteur étrange** : cet attracteur est associé à un comportement quasi-aléatoire dit chaotique, caractérisé par un spectre de puissance continue et une fonction d'autocorrélation s'annulant très rapidement.

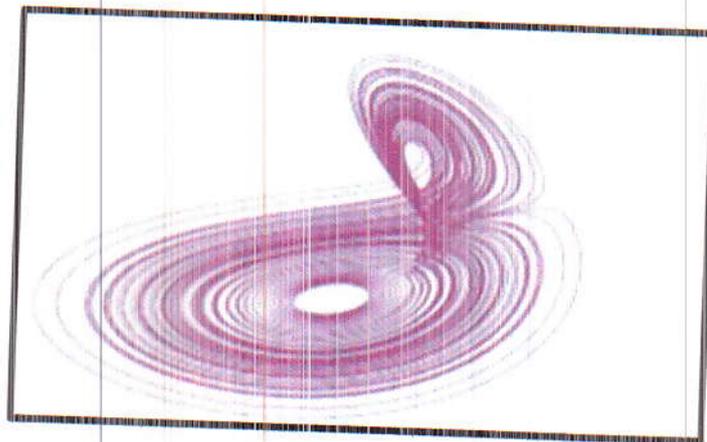


Figure 1.1: Attracteur de Lorentz

### 1.4.3 L'exposant de Lyapunov

Prédire l'évolution dans le temps d'un système chaotique est difficile à réaliser à cause de la divergence rapide de deux trajectoires démarrant de deux conditions initiales très proches. Pour cette raison on se tourne vers la mesure ou l'estimation de la vitesse de divergence ou de convergence, cette vitesse est donnée par les exposants de Lyapunov qui caractérisent le taux de séparation de deux trajectoires ayant des conditions initiales très proches [5].

Deux trajectoires dans le plan de phase initialement séparées par un taux  $z_1$  sont séparées, après un temps  $\Delta t = t_2 - t_1$ , par un taux  $z_2$  tel que :

$$|z_2| \approx e^{\lambda \Delta t} |z_1| \quad (1.1)$$

De ce fait, et en passant à la limite on obtient l'exposant de Lyapunov qui représente le logarithme moyen de l'accroissement :

$$\lambda \approx \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{|z_2|}{|z_1|} \quad (1.2)$$

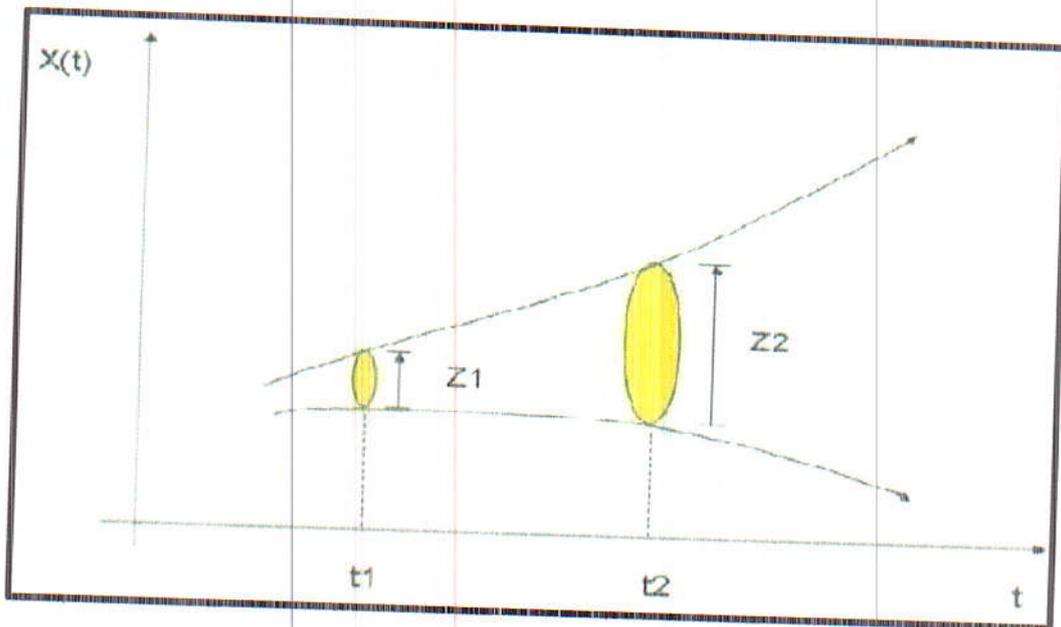


Figure 1.2 : Divergence de deux trajectoires dans le plan de phase

Pour un attracteur non chaotique, les exposants de Lyapunov sont tous inférieurs ou égaux à zéro et leur somme est négative. Un attracteur étrange possèdera toujours au moins trois exposants de Lyapunov, dont un au moins doit être positif (voir Tableau 1.1).

On constate donc que l'exposant de Lyapunov représente un outil très utile pour l'illustration de la dynamique d'un système (entre-autre pour déterminer si un système est chaotique ou pas).

Etat stable	Attracteur	Dimension	Exposants de Lyapunov
Point d'équilibre	Point	0	$\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1 \leq 0$
périodique	Cercle	1	$\lambda_1 = 0$ $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_2 \leq 0$
Période d'ordre 2	Tore	2	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_3 \leq 0$
Période d'ordre K	K-Tore	K	$\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_{k+1} \leq 0$
chaotique		Non entier	$\lambda_1 > 0$ $\sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$
Hyper chaotique		Non entier	$\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 > 0$ $\sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$

Tab 1.1 : Classification des systèmes dynamiques selon leurs exposants de Lyapunov

## 1.5 Introduction sur les systèmes fractionnaires

Le calcul fractionnaire a 300 ans d'existence mathématique. Tout au long de ces années, connaissait les contributions de nombreux mathématiciens qui ont donné plusieurs approches et définitions [8].

Nous présentons ici les principales étapes historiques de l'élaboration du calcul fractionnaire, jusqu'à son essor dans le développement d'applications dans les années 1970. Nous nous appuyons sur les ouvrages [9, 10] pour couvrir la période de 1695 à 1974.

En 1695; [13] L'histoire du calcul fractionnaire commença par une question clé de Leibniz Dans une lettre au Marquis de L'Hospital il propose de généraliser sa formule pour la dérivée  $n^{\text{ième}}$  d'un produit de deux fonctions à  $n > 0$  et introduit la notation  $d^{1/2}h$ . Il écrit notamment que " $d^{1/2}x = x\sqrt{dx:x}$ ".

En 1730 ; Euler est le second grand mathématicien à aborder la question. Dans son article [11] où il introduit sa célèbre fonction Gamma  $\Gamma$  qui généralise la factorielle ( $\Gamma(n+1) = n!$ ), Il conclut en proposant une définition pour la dérivée d'ordre  $\alpha > 0$  de  $x^\beta$ , avec  $\beta > 0$ .

En 1822 ; [13] Mentionnons ensuite le travail de Fourier qui, grâce à sa célèbre transformée, obtient une autre définition de la dérivée d'ordre réel. En composant la transformée de Fourier (réelle) d'une fonction  $f$  avec sa transformée inverse, Fourier retrouve l'identité :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) \cos(p(x-\alpha)) d\alpha dp. \quad (1.3)$$

Il remarque ensuite que la dérivée  $n^{\text{ième}}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) du terme en  $\cos$  peut s'écrire comme :

$$\frac{d^n}{dx^n} \cos(p(x-\alpha)) = p^n \cos\left[p(x-\alpha) + \frac{n\pi}{2}\right] \quad (1.4)$$

Le membre de droite garde un sens si on remplace  $n$  par  $u > 0$ , ce qui permet de définir la dérivée d'ordre  $u$  de  $\cos(p(x-\alpha))$ . En utilisant cette définition dans (1.3), Fourier obtient ainsi la dérivée d'ordre  $u > 0$  de  $f$ :

$$\frac{d^u}{dx^u} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) p^u \cos[p(x-\alpha) + \frac{u\pi}{2}] d\alpha dp \quad (1.5)$$

En 1823 ; [13] Abel utilise le calcul fractionnaire pour résoudre le problème du tautochrone généralisé.

Entre 1832-1837 ; Liouville est le premier à étudier en détail le calcul fractionnaire, comme semblent l'attester les huit articles qu'il publia entre 1832 et 1837 [13].

Entre 1867-1868; Grünwald puis Letnikov proposent de définir une dérivée fractionnaire comme limite de différences finies, par analogie avec la dérivée usuelle qui est la limite de la différence finie (opposée à infinitésimale) entre  $f(x+h)$  et  $f(x)$  divisé par  $h$ .

En 1892 ; [13] Heaviside fournit cette année-là la première application concrète du calcul fractionnaire (le tautochrone d'Abel relevant davantage du cas d'école) pour la résolution de l'équation de la chaleur unidimensionnelle :

$$\frac{\delta}{\delta t} T(x,t) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x,t). \quad (1.6)$$

La démarche d'Heaviside est loin d'être rigoureuse (elle ne sera justifiée qu'en 1919), mais fournit toutefois la bonne solution, il trouve que

$$T(x,t) = T_0 \exp(-axp^{1/2})$$

Il suppose ensuite que  $p^{1/2} T_0 = T_0 / \sqrt{\pi t} \dots$  ce qui correspond en fait à la dérivée d'ordre 1/2 de  $T_0$  ! En développant la solution en série entière, il obtient finalement la solution exacte de (1.6).

En 1927 ; il introduit une nouvelle définition de la dérivée fractionnaire :

$$D_+^\alpha f(x) = c \int_0^\infty \frac{\Delta_t^l f(x)}{t^{1+\alpha}} dt, \quad (1.7)$$

Ou,  $\alpha > 0$ ,  $l \in \mathbb{N}$  avec  $l > \alpha$  et  $c$  est une constante de normalisation. L'opérateur  $\Delta_t^l$  est une différence finie d'ordre  $l$ , (par exemple,  $\Delta_t^1 f(x) = f(x) - f(x-t)$ ) L'avantage d'une telle définition par rapport aux autres est qu'elle est moins restrictive quant à la régularité de  $f$ .

En 1970 ; Dans [12] Oldham et Spanier traitent le problème du flux de chaleur à la surface d'un conducteur thermique. Ils montrent que lors d'un phénomène de diffusion, le flux de diffusion est proportionnel à la dérivée  $1/2$  du paramètre physique (température, concentration d'espèces chimique, potentiel électrique, etc). D'après l'historique de Ross reproduit dans [9], ce problème semble être à l'origine de l'extension du calcul fractionnaire hors du champ des mathématiques.

En 1974 ; Cette année-là se tient à l'Université de New Haven (Connecticut) la première conférence sur le calcul fractionnaire organisée par Ross.

Ce chapitre constitue une partie préliminaire dans laquelle on rappelle des notions et des résultats fondamentaux de la théorie de l'analyse fonctionnelle qui représentent un outil indispensable dans notre étude.

## 1.6 Représentation de la dérivée fractionnaire

On peut généraliser l'opérateur de différentiation dans une seule opération fondamentale  ${}_a D_t^\alpha$  où  $a$  et  $t$  sont les limites de l'opération [14.15] L'opération est définie comme suit:

$${}_a D_t^q = \begin{cases} \frac{d^q}{dt^q} & q > 0 \\ 1 & q = 0 \\ \int_a^t (d\tau)^{-q} & q < 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

## 1.7 Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire

- **La fonction gamma** : L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler  $\Gamma(z)$ . Elle est définie par l'intégrale suivante [16] :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (1.9)$$

Avec :  $\Gamma(1)=1, \Gamma(0_+) = +\infty, \Gamma(z)$  est une fonction monotone et strictement décroissante pour  $0 < z \leq 1$ . Une propriété importante de la fonction Gamma  $\Gamma(z)$  est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \quad (1.10)$$

Qu'en peut démontrer par une intégration par parties :

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = \left[ -e^{-t} t^z \right]_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z).$$

La fonction Gamma d'Euler généralise la factorielle car  $\Gamma(n+1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}$ .

- **La fonction beta** : la fonction Bêta (qui est un type d'intégrale d'Euler, au même titre que la fonction gamma) est une fonction remarquable définie par [8] :

$$B(p, q) = \int_0^1 \tau^{p-1} (1-\tau)^{q-1} d\tau \quad (1.11)$$

Qui peut être liée avec la fonction gamma  $\Gamma(z)$  par la relation suivante :

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (1.12)$$

Avec:  $\text{Re}(p) > 0$  et  $\text{Re}(q) > 0$

- **La fonction Mittag-Leffler [16]** : La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres joue également un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Cette

dernière a été introduite par Humbert et Agrawal en 1953 et elle est définie par le développement en série suivant :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \alpha > 0, \beta > 0 \quad (1.13)$$

Pour  $\beta = 1$ , nous obtenons la fonction suivante :

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_{\alpha}(z) \quad (1.14)$$

A partir de la relation (1.13) on montre que :

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \quad (1.15)$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{e^z - 1}{z} \quad (1.16)$$

## 1.8 Opérateur de dérivations fractionnaires, Définitions et propriétés

Nombreuses sont les définitions des dérivées fractionnaires. Nous présentons dans cette partie celles qui sont les plus populaires et les plus utilisées.

### 1.8.1 Dérivée de Grünwald-Letnikov

Cette définition se base sur l'obtention de dérivées par différences finies. Nous reprenons ici la présentation de [13].

Soit  $f : \square \rightarrow \square^N$ . Pour  $h > 0$ , notons  $\tau_h$  l'opérateur de la translation à gauche :

$$\tau_h f(t) = f(t-h).$$

On a ainsi :

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(t) - f(t-h)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (id - \tau_h) f(t). \quad (1.17)$$

En notons :  $\tau_h^2 = \tau_h \circ \tau_h$ , on a :  $\tau_h^2 f(t) = f(t - 2h)$ .

Concernant la dérivée seconde,

$$\begin{aligned} f''(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{h} (id - \tau_h) \right)^2 f(t), \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} (id - 2\tau_h + \tau_h^2) f(t), \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} (f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)). \end{aligned} \tag{1.18}$$

Plus généralement, la dérivée  $n^{ieme}$  de  $f$  est donnée par :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} (id - \tau_h)^n f(t), \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} id^{n-k} (-\tau_h)^k f(t), \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh), \end{aligned} \tag{1.19}$$

Ou ;

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

Il est possible d'étendre  $\binom{n}{k}$  à  $k > n$ , en posant  $\binom{n}{k} = 0$ . La formule (1.16) devient alors :

$$f^{(n)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh). \tag{1.20}$$

Là encore, on peut généraliser le terme de droite grâce à la fonction Gamma, en posant pour

$\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$  Et  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)}$ . Notons cette fois que  $\binom{\alpha}{k} \neq 0$  même si  $k > \alpha$ .

➤ **Définition 1.1 :** Soit  $\alpha > 0$ . La dérivée de Grünwald-letnikov à gauche d'ordre  $\alpha$  est définie par :

$$\forall t \in \square, {}^{GL}D_+^\alpha = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh). \tag{1.21}$$

En remarquant que  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} (id - \tau(-h)) f(t) = -f'(t)$  on obtient la dérivée de Grünwald

Letnikov à droite.

➤ **Définition 1.2 :** Soit  $\alpha > 0$ . La dérivée de Grünwald-letnikov à droite d'ordres  $\alpha$  est définie par :

$${}^{GL}D_-^\alpha = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t + kh). \tag{1.22}$$

La dérivée de Grünwald-Letnikov présente un intérêt numérique évident. Si  $h$  est assez petit, l'évaluation discrète de  $\frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t + kh)$ . permet d'approximer la dérivée fractionnaire sur  $\square$  (de Liouville).

### 1.8.2 Dérivée de Riemann-Liouville

Riemann réalise le lien entre l'intégrale fractionnaire et la dérivée fractionnaire à partir de la solution de l'équation intégrale d'Abel [8] pour tout  $\alpha \in ]0, 1[$ .

Soit l'équation :

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt \dots \dots \dots x > 0 \tag{1.23}$$

Formellement l'équation (1.20) peut être résolue en changeant  $x$  par  $t$  et  $t$  par  $s$  et on multiplie l'équation par  $(x-t)^{-\alpha}$  et en l'intégrant donc (1.20) devient :

$$\int_a^x (x-t)^{-\alpha} dt \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \varphi(s) ds = \Gamma(\alpha) \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt \quad (1.24)$$

En appliquant le théorème de FUBINI :

$$\int_a^x \varphi(s) ds \int_a^x (x-t)^{-\alpha} (t-s)^{\alpha-1} dt = \Gamma(\alpha) \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt \quad (1.25)$$

Avec le changement de variable  $t = s + \tau(x-s)$  et la fonction Beta on trouve :

$$\int_a^x \varphi(s) ds = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt \quad (1.26)$$

Après la différentiation on arrive finalement à l'expression :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt \quad (1.27)$$

➤ **Définition 1.3 :** Pour  $\alpha \in ]0,1[$  et  $a < x < b$  on a l'expression suivante :

$$D_{a+}^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt \quad (1.28)$$

Est appelée la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville (à gauche).

Prenons maintenant le cas général tel que  $n-1 \leq \alpha \leq n$ , donc  $\alpha = (n-1) + \beta$  tel que  $0 < \beta < 1$  c'est-à-dire est la partie entière de  $\alpha$  et  $\beta$  son reste.

➤ **Définition 1.4 :** si  $\alpha > 0$  n'est pas un entier, alors nous définissons

$$D_{a+}^{\alpha} f(x) = D_{a+}^{(n-1)+\beta} f(x) = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [D_a^{\beta} f(x)]$$

$$= \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left[ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt \right]$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-1-\alpha} f(t) dt$$

Alors :

$$D_{a+}^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-1-\alpha} f(t) dt \quad (1.29)$$

### 1.8.3 Dérivée de Caputo

Bien que la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville a joué un rôle important dans le développement du calcul fractionnaire, plusieurs auteurs y compris Caputo (1967-1969) ont rendu compte que cette définition doit être révisé, car les problèmes appliqués en viscoélasticité, mécanique des solides et en rhéologie, exigent des conditions initiales physiquement interprétables par des dérivées classiques, ce qui n'est pas le cas dans la modélisation par l'approche de Riemann-Liouville qui exige la connaissance des conditions initiales des dérivées fractionnaires.

➤ **Définition 1.5** [8]: soient  $(D_{a+}^{\alpha} f)(x)$  et  $(D_{b-}^{\alpha} f)(x)$  les deux dérivées qui sont définis précédemment On définit la dérivée fractionnaire de Caputo qu'on la note par :  $({}^c D_{a+}^{\alpha} f)(x)$  et  $({}^c D_{b-}^{\alpha} f)(x)$  respectivement, comme suite :

$$\text{Dérivée gauche : } ({}^c D_{a+}^{\alpha} f)(x) = \left( D_{a+}^{\alpha} \left[ f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} \right] \right) (x) \quad (1.30)$$

$$\text{Dérivée droite : } ({}^c D_{b-}^{\alpha} f)(x) = \left( D_{b-}^{\alpha} \left[ f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)(x-b)^k}{k!} \right] \right) (x) \quad (1.31)$$

Ou  $n = [\alpha] + 1$  pour  $\alpha \notin \mathbb{Z}$  ;  $n = \alpha$  pour  $\alpha \in \mathbb{Z}$  tels que  $[\alpha]$  est la partie entière de  $\alpha$ . En particulier si  $0 < \alpha < 1$

$$\begin{aligned}
({}^c D_{a+}^\alpha f)(x) &= (D_{a+}^\alpha [f(x) - f(a)])(x) \\
&= (D_{a+}^\alpha f)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-a+1)} (x-a)^{k-a}
\end{aligned} \tag{1.32}$$

$$\begin{aligned}
({}^c D_{b-}^\alpha f)(x) &= (D_{b-}^\alpha [f(x) - f(b)])(x) \\
&= (D_{b-}^\alpha f)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{\Gamma(k-b+1)} (x-b)^{k-b}
\end{aligned} \tag{1.33}$$

➤ **Définition 1.6** [8]: Cas général soient  $\alpha \in \mathbb{R}$  avec  $R(\alpha) > 0$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n-1 < R(\alpha) < n$  et  $f \in C^n([a, b])$ . La dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$  au sens de Caputo de la fonction  $f$  notée  ${}^c D_a^\alpha f$  est définie par :

$${}^c D_a^\alpha f(x) = I^{(n-\alpha)} D^{(n)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x f^{(n)}(t) (x-t)^{n-\alpha-1} dt \tag{1.34}$$

### 1.8.4 Propriétés

Les principales propriétés des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire sont les suivantes [17]:

$$\begin{aligned}
D^\alpha D^\beta f(t) &= D^{\alpha+\beta} f(t) \\
D^\alpha D^{-\alpha} f(t) &= D^0 f(t) = f(t) \\
D^\alpha [af(t) + bg(t)] &= aD^\alpha f(t) + bD^\alpha g(t)
\end{aligned} \tag{1.35}$$

### 1.9 Conclusion

Dans ce chapitre, on a donné les notions de base de systèmes dynamiques et les systèmes dynamiques chaotiques qui sont caractérisés par la sensibilité aux conditions initiales, telles que les techniques de caractérisation du comportement chaotiques: espace de phase, La notion d'attracteur et L'exposant de Lyapunov.

La dernière section du chapitre est consacrée à la théorie du calcul fractionnaire. On a introduit les fonctions spécifiques pour la dérivation non entière, puis nous avons

essayé de donner trois approches des dérivées fractionnaires (l'approche de Grunwald Letnikov, de Riemann Liouville et celle de Caputo) ainsi que leurs propriétés.

## Références bibliographiques

- [1] ABDUL RAHUMAN Ahmed, *Analyse des Systèmes Non-linéaires à Dynamiques Complexes*. Mémoire Magister. L'université ABOU BEKR BELKAID. (2009).
- [2] GOUMIDI Djamel Eddine, *Fonction logistique et standard chaotique pour le Chiffrement des images satellitaires*, Mémoire de magister, Université Mentouri de Constantine. (2010).
- [3] HAMAIZIA Tyeb, *Systemes dynamiques et chaos, these de doctorat*, Université Constantine-1-. (2013).
- [4] ALI-PACHA, A., HADJ-SAID, N., M'HAMED, A., *et al.* Chaos Crypto-Système basé sur l'Attracteur de Hénon-Lozi. *Chaos*, vol. 5, no 6, p. 7. (2009).
- [5] BENHABIB Chouaib, *Etude d'un système chaotique pour la securisation des communications optiques*, mémoire master. Université de Tlemcen. (2014).
- [6] KIHAL Ahmed Ridha, *Systèmes chaotiques pour la transmission sécurisée de donnée*, thèse de magister, Université de Mohamed Khider – Biskra. (2013).
- [7] IKHLEF Ameer, *Synchronisation, Chaotification et Hyperchaotification des Systèmes Nonlinéaires : Méthodes et Applications*. Université de Constantine -1-(2011).
- [8] MANCER Tidjanie, *Synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques à dérivées fractionnaires*, Thèse de doctorat, Université Constantine1. (2014).
- [9] K.B. Oldham and J. Spanier. *The Fractional Calculus*. Academic Press, York and London. (1974).
- [10] R. Hilfer. *Threefold introduction to fractional derivatives*. In G. Radons R. Klages and I.M. Sokolov, editors, *Anomalous Transport : Foundations and Applications*. Wiley-VCH (2008).
- [11] L. Euler. *De progressionibus transcendentibus, sev quarum termini algebraice dari nequeunt*. *Comment. Acad. Sci. Imperialis Petropolitanae* **5**, 36–57. (1738).

- [12] K.B. Oldham and J. Spanier. The replacement of fick's laws by a formulation involving semidifferentiation. *J. Electroanal. Chem.* **26**, 331–341 (1970).
- [13] HOUMOR Tarek. *Analyse du Chaos dans un Système d'Équations Différentielles Fractionnaires*. Mémoire Doctorat. L'UNIVERSITÉ CONSTANTINE 1. (2014).
- [14] Petráš. I, « *Fractional Derivatives, Fractional Integrals, and Fractional Differential Equations in Matlab* », Published by InTech, Assi, Janeza Trdine 9, 51000 Rijeka, Croatia, (2011).
- [15] Petráš. I, and Bednarova D, « *Fractional - Order Chaotic Systems* » EEE Conference on Emerging Technologies & Factory Automation, ETFA, September 22–25, Palma de Mallorca, Spain (2009).
- [16] F. Dubois, A. C. Galucio, and N. Point. Introduction à la dérivation fractionnaire, théorie et applications. *Techniques de l'Ingénieur AF510* (2010).
- [17] Qiao Wang et Donglian Qi, *Passivity-Based Control for Fractional Order Unified Chaotic System*. Zhejiang University, Hangzhou China. (2014).

## Chapitre 2

### *Etat de l'art sur la synchronisation des systèmes chaotiques fractionnaires*

---

*Dans ce chapitre nous présentons une étude sur la synchronisation des systèmes chaotiques fractionnaires. La 1<sup>ère</sup> section de ce chapitre, nous allons présenter quelques brèves notions sur l'histoire de la synchronisation. La section 2.2 consacrée sur Concept et méthodes de synchronisation. Dans la section 2.3 nous présenterons les principales méthodes de synchronisations des systèmes chaotiques. Enfin dans la dernière section, nous donnerons de notion de base sur les différents types de la synchronisation.*

---

## 2.1 Introduction

Le mot "synchronisation" vient du grec "συν" (syn) qui veut dire "ensemble" et "χρονος" (chronos) qui veut dire "temps". De plus le dictionnaire la définit en tant qu'action de faire se produire ou s'accomplir simultanément (plusieurs faits, plusieurs actions appartenant à des séries différentes) [1].

L'histoire de la synchronisation revient au 17ème siècle quand le célèbre scientifique hollandais Christian Huygens a rapporté son observation, que deux horloges à pendule supportées par une même planche en bois, finissaient par avoir les mêmes oscillations périodiques (même phase et même fréquence). En outre, il a remarqué que si l'oscillation d'une des pendules était perturbée par une force externe, elle reviendrait à son état initial.

C'était la première découverte de la synchronisation. La conclusion de Huygens sur la cause de cette synchronisation est le mouvement de la planche en bois, malgré qu'il soit à peine perceptible [2]. Ce mouvement représente donc un faible accouplement des deux horloges. Par conséquent, dans le contexte classique la synchronisation n'est réservée qu'aux mouvements périodiques. Par ailleurs le concept moderne couvre également les systèmes chaotiques.

En résumé la synchronisation est le changement du rythme des oscillateurs (périodique ou non) dûs aux interactions faibles. Selon Pikovsky [2], il y a trois conditions qui doivent être rassemblées pour qu'un phénomène soit considéré synchrone [1] :

- Les systèmes oscillent indépendamment.
- Le changement du comportement est dû à un accouplement faible.
- Le changement du comportement se produit dans une certaine gamme de disparité.

Si un oscillateur change lentement, le second devrait suivre cette variation.

En 1983; Chua a abordé la question de synchronisation en utilisant des circuits électroniques linéaires par morceaux [3].

En 1983; Fujisaka et al ont été proposés l'hypothèse suivante : l'aspect pseudo aléatoire du chaos nous amène à penser qu'il est impossible de le synchroniser [4]

En 1990 ; les deux chercheurs Pecora et Carroll [5] ont montré, que deux systèmes chaotiques identiques peuvent se synchroniser. Cette découverte a ouvert la voie pour des

applications du chaos aux télécommunications et encore d'autres méthodes pour synchroniser le chaos.

Depuis les années 90, de nombreux ouvrages ont été publiés au sujet de la synchronisation chaotique. Une raison importante de l'attraction des chercheurs vers la synchronisation des systèmes chaotiques est son application à la communication sécurisée. Les travaux de Pecora et Carroll ont permis de suggérer que les systèmes chaotiques pourraient être utilisés dans la communication, ou leur nature semblable aux bruits améliorerait la sécurité et le rejet des perturbations. En effet, une fois la synchronisation entre l'émetteur et le récepteur atteinte, il est possible de récupérer un message masqué par l'émetteur chaotique.

En 1990; Parlitz proposa le couplage de deux attracteurs étranges identiques, dans le but de camoufler un message confidentiel en le superposant à un signal chaotique, et le restaurant à la réception [3].

En 1992; les ingénieurs ont réalisé des systèmes de communication chaotique sécurisée [6.7].

Après la méthode de Pecora et Carroll d'autres propositions pour synchroniser le chaos ont été proposées, comme la méthode de synchronisation généralisée dont Rulkov et al ont posé les bases [8] et la synchronisation impulsive [9]. Dans [10], Oppenheim et al ont proposé des méthodes qu'ils ont appelées commutation chaotique ou modulation et masquage chaotique. Koracev et al dans [11] proposent de noyer le message dans le système chaotique et d'utiliser le concept de synchronisation afin d'augmenter la sécurité de la communication.

Dans ce chapitre nous présentons une étude globale sur la synchronisation des systèmes chaotiques fractionnaires

## **2.2 Concept et méthodes de synchronisation**

Le concept de synchronisation repose sur le constat qu'un système chaotique est déterministe et possède un ou plusieurs exposants de Lyapunov positifs et qu'il est instable. Il est donc possible de construire une réplique identique à ce système et d'essayer

## Chapitre 2 Etat de l'art sur la synchronisation des systèmes chaotiques fractionnaires

de synchroniser de façon que les deux signaux chaotiques issus des deux exemplaires soient identiques [12].

Il existe deux classes de synchronisation suivant la manière avec laquelle les deux systèmes chaotiques sont couplés ; on distingue la synchronisation unidirectionnelle et la synchronisation bidirectionnelle.

### 2.2.1 Synchronisation par couplage bidirectionnel

Pour expliquer la synchronisation bidirectionnelle (mutuelle) de deux systèmes chaotiques fractionnaires, on considère les deux systèmes donnés ci-dessous [3]:

$$\begin{aligned} D^\alpha x &= f(x) + \lambda(z - x) \\ D^\alpha y &= g(z) + \mu(x - z) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Où  $x, z \in \mathbb{R}^n$  et  $\lambda, \mu$  sont des matrices diagonales  $n \times n$ ;  $\lambda = \text{diag}[\lambda_i], \mu = \text{diag}[\mu_i], i = 1, \dots, n$ .

On suppose que  $f(0) = g(0) = 0$ .

Du point de vue de l'ingénierie électronique, ce type de synchronisation définit l'évolution temporelle de deux circuits électroniques couplés à l'aide d'une résistance.

Le problème de synchronisation consiste alors à trouver  $\lambda$  et  $\mu$  à coefficients arbitraires de telle manière que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - x(t)\| = 0$ .

### 2.2.2 Synchronisation par couplage unidirectionnel

La synchronisation unidirectionnelle des systèmes chaotiques est basée sur l'injection d'une partie du signal d'erreur dans le système esclave (celui qui doit se synchroniser avec l'autre).

L'énergie est transférée d'un système à l'autre, à l'aide d'un élément de couplage fonctionnant dans un seul sens comme par exemple un suiveur [3].

Mathématiquement parlant, on peut considérer les deux systèmes donnés ci-dessous :

$$\begin{aligned} D^\alpha x &= f_1(x) \\ D^\alpha y &= f_2(z) + \alpha(x - z) \end{aligned} \quad (2.2)$$

L'objectif est de calculer une loi de commande  $u$  qui assure la convergence du système  $e_i$  ( $i=1,2,\dots, n$ ) vers l'origine en utilisant l'algorithme backstepping. Pour cela, le système d'erreur (2.18) doit être décomposé en sous-système :

$$e_1, (e_1, e_2), (e_1, e_2, e_3), \dots, (e_1, e_2, e_3, \dots, e_n) \quad (2.19)$$

Et pour chaque sous-système on définit une fonction de Lyapunov  $v$  positive:

$$v_j = h_j(e, x, y, u_j, \alpha_j) \quad (2.20)$$

$j$  : l'ordre du sous-système.

$u_j, \alpha_j$ : représentent respectivement la loi de commande et le contrôleur virtuel du sous-système d'ordre  $j$ .

Les lois de commandes et les contrôleurs virtuels sont calculés à chaque fois de tel sorte que la dérivée de la fonction de Lyapunov soit strictement négative  $\dot{v}_j < 0$ .

## 2.4 Type de la synchronisation

Parallèlement au développement des méthodes, différents types de synchronisation ont été proposés : la synchronisation en phase (PS), la synchronisation Lag, la synchronisation généralisée (GS), la synchronisation complète (CS)... etc.

### 2.4.1 La synchronisation identique (PC) [13]

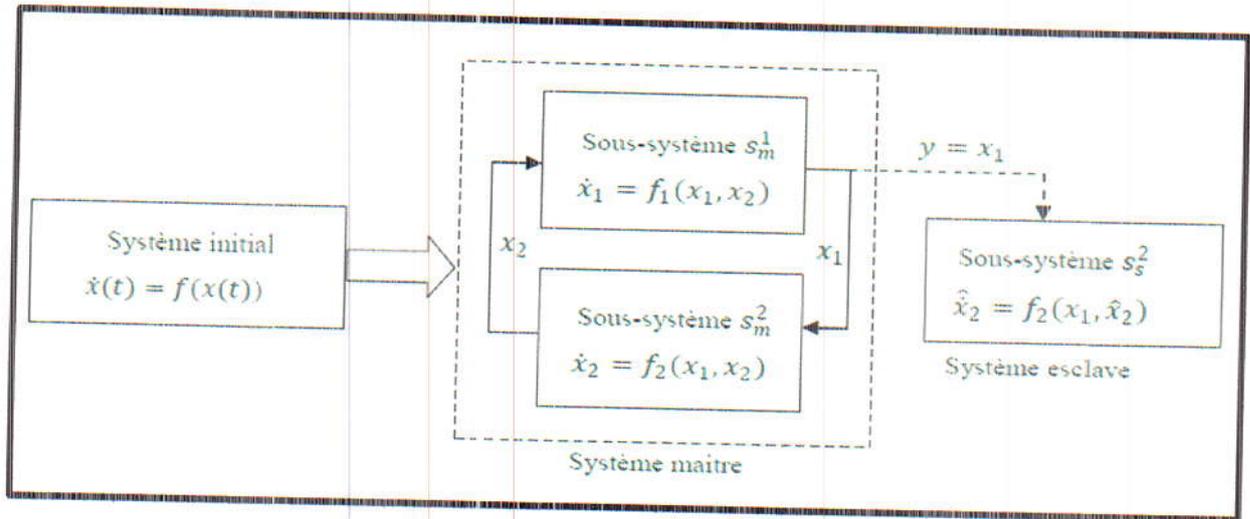
La synchronisation identique a été proposée par Pecora et Carroll. Elle a l'avantage de représenter une solution de synchronisation simple et performante. Elle permet à l'esclave de reproduire le plus fidèlement possible l'état du maître, après un régime transitoire. L'idée de la synchronisation identique est de diviser le système initial en deux sous-systèmes. Cette opération peut être réalisée d'une manière arbitraire.

La figure suivante représente le processus de décomposition en sous-systèmes.  $y$  représente la variable d'état qui commande le sous-système esclave  $s_2^2$

Le sous-système réplique  $s_2^2$  est un candidat susceptible de se synchroniser avec la dynamique complète initiale. Pecora et Carroll ont démontré que la condition nécessaire et suffisante pour que cette proposition soit vraie est que le sous-système  $s_2^2$  soit stable ; cette

hypothèse est équivalente avec la condition qui dit que l'ensemble des coefficients de Lyapunov du sous-système  $s_s^2$  soient négatifs. Une synchronisation parfaite peut alors être obtenue puisque les trajectoires sont asymptotiquement convergentes :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \hat{x}_2(t) - x_2(t) \right\| = 0 \quad (2.21)$$



**Figure 2.2 :** Structure de synchronisation par décomposition en sous-système proposée par Pecora et Carroll

Pour illustrer ce mécanisme de synchronisation on considère comme exemple le système de Lorenz défini par l'équation suivante :

$$D^\alpha x = \sigma(y - x),$$

$$D^\alpha y = (r - z)x - y,$$

$$D^\alpha z = xy - bz,$$

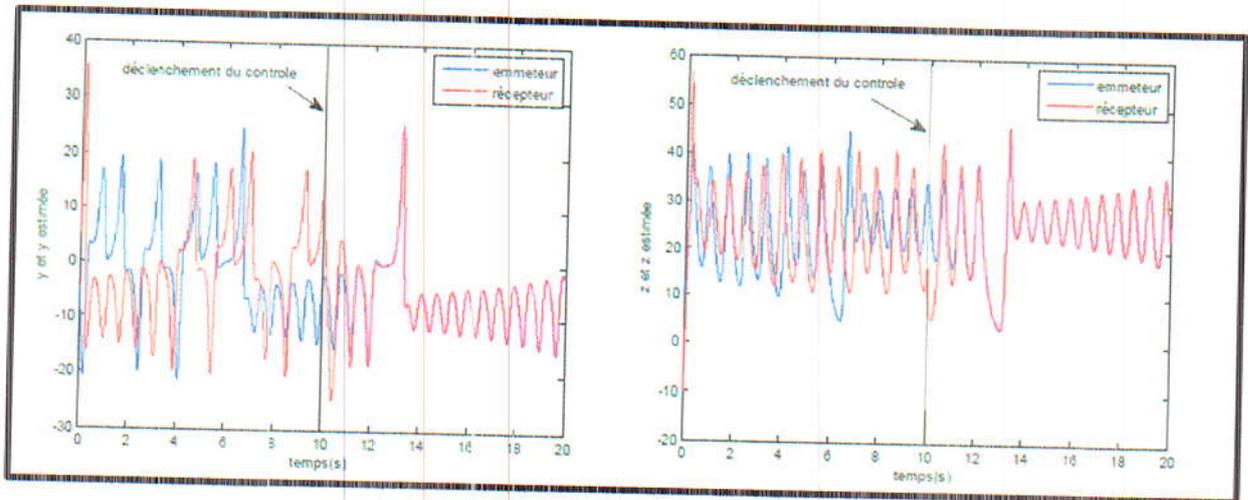
avec :  $a = 10, b = 8/3, r = 28$



Le maître et l'esclave sont initialisés séparément avec des conditions initiales très proches. Pour une durée de 10 secondes on les laisse fonctionner indépendamment, les trajectoires des deux systèmes deviennent alors assez vite divergentes.

A l'instant  $t = 10s$ , on supprime la dimension  $x$  du système esclave et on le remplace par l'état correspondant côté maître ; Cette opération va forcer les états  $y$  et  $z$  du système esclave à converger asymptotiquement vers les états correspondants du système maître. La garantie de cette convergence est donnée par les valeurs négatives  $\lambda_2, \lambda_3 \leq 0$  des exposants de

Lyapunov associés au système esclave. La figure suivante montre qu'après une période de transition, le système esclave converge asymptotiquement vers l'état du maître, et les deux se retrouvent parfaitement synchronisés.



**Figure 2.3 :** Synchronisation maître esclave P-C du système de Lorenz

Bien que les deux systèmes aient été initialisés différemment, ils ont fini par se rattraper et avoir la même trajectoire. Ce type de synchronisation est dite unidirectionnel, car le système maître représente la source et le système esclave le destinataire .

#### 2.4.2 La synchronisation complète (CS) [15]

On considère un système maître représenté par les équations suivantes :

$$D^\alpha x = f(t, x), \quad D^\alpha y = h(x) \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (2.23)$$

Et un système esclave donné par :

$$D^\alpha \hat{x} = \hat{f}(t, \hat{x}, \hat{y}), \quad D^\alpha \hat{y} = \hat{h}(\hat{x}) \quad \hat{x} \in \mathbb{R}^p, \quad \hat{h}: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q \quad (2.24)$$

Où  $(x, \hat{x})$  sont les états des systèmes et  $(y, \hat{y})$  sont les sorties.

Soit  $\varphi$  une fonction continue, qui décrit la relation entre le maître et l'esclave lors de la synchronisation :

$$\hat{y} = \varphi(y), \quad \varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^q \quad (2.25)$$

La synchronisation est dite complète si  $\hat{x}(t) = x(t)$ .

Ce qui implique que ;  $m = q$  et  $\varphi$  est une identité.

Si  $\hat{f} = f$ , la relation devient une synchronisation complète identique.

Si  $\hat{f} \neq f$ , c'est une synchronisation complète non identique.

La synchronisation complète est donc une coïncidence complète entre les variables d'état des deux systèmes synchronisés. Les méthodes de synchronisation complète sont typiquement associées avec la synchronisation des systèmes identiques. La majorité des concepts de synchronisation complète utilise un schéma de rétroaction et sont considérées comme étant bidirectionnels, car les deux systèmes sont à la fois source et destination.

#### **2.4.3 La synchronisation généralisée (GS) [15]**

La synchronisation généralisée est considérée comme une généralisation de la synchronisation complète pour synchroniser des systèmes chaotiques de modèle différent. Elle se manifeste par une relation fonctionnelle entre deux systèmes chaotiques couplés.

#### **2.4.4 La synchronisation Lag [13]**

Elle est définie pour le cas où  $\hat{x}(t) \approx x(t-\tau)$ , avec  $\tau$  est un nombre positif très petit.

#### **2.4.5 La synchronisation anticipée [13]**

Comme dans le cas de la synchronisation Lag, la relation entre les variable d'état des systèmes maître et esclave est donnée par :

$$\hat{x}(t) \approx x(t+\tau), \tau > 0. \quad (2.26)$$

#### **2.4.6 La synchronisation de phase (PS) [14]**

Soit  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  les phases des systèmes maître et esclave respectivement. La synchronisation de phase est réalisée si pour deux nombres entiers  $m$  et  $n$ , il existe un nombre positive très petit  $\varepsilon$  tel que :

$$|m\varphi_1 - n\varphi_2| < \varepsilon \quad (2.27)$$

Le phénomène de synchronisation de phase est totalement différent de ceux présentés précédemment. Généralement, lorsque la synchronisation chaotique est obtenue, les exposants de Lyapunov du système esclave sont tous négatifs. Donc le système esclave est un système non chaotique avec une sortie chaotique. Cependant, dans le cas de la

synchronisation de phase, les exposants de Lyapunov peuvent prendre des valeurs positives [14].

#### 2.4.7 L'anti-synchronisation [16]

Théoriquement, deux systèmes sont anti-synchronisés si d'une part, le système maître et le système esclave ont des vecteurs d'état identiques en valeur absolue mais avec des signes opposés et que d'autre part, la somme des vecteurs d'état des deux systèmes tend vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini [16]. L'erreur d'anti-synchronisation peut donc être définie comme suit :

$$e_i = (xm_i + xs_i), i=1, \dots, n \quad (2.28)$$

$xm_i, xs_i$  : L'état du système maître et esclave respectivement.

$n$ : la dimension de systèmes.

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons expliqué le concept de synchronisation des systèmes chaotiques ainsi que les différentes méthodes et types de synchronisation. Cette démarche nous sera très utile pour notre système de transmission.

Dans le chapitre qui suit nous nous intéresserons à la synchronisation des systèmes chaotiques fractionnaires par la commande passive. Les concepts de base y seront énoncés et la façon de l'appliquer dans ce travail de mémoire sera développée avec plus de détails.

## Références bibliographiques

- [1] Kihel hamid. *systèmes chaotiques pour la transmission sécurisée de données*. Université Mohamed Khider – Biskra. (2013)
- [2] A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths .*Synchronization: A universal concept in nonlinear Sciences*. Cambridge University Press, England, (2003).
- [3] HAMICHE Hamid, *Inversion à gauche des systèmes dynamiques Hybride Chaotiques. Application à la transmission Sécurisée de Données*, mémoire de doctorat. Université- MOULOU D MAMMERI-Tizi-Ouzou, (2011).
- [4] H. Fujisaka et T. Yamada "Stability theory of synchronized motion in coupled oscillator systems" *Prog. Theor. Phys*, vol. 69, pp 32–47, (1983).
- [5] L.M. Pecora et T.L. Carroll. "Synchronization in chaotic systems" *Physical Review Letters*, vol. 64, no. 8, pages 821–824, (1990).
- [6] K.M. Cuomo and A. V. Oppenheim, *Circuit implementation of synchronized chaos with application to communication*, IEEE Transactions on circuit and systems, vol. 40, PP. 626-633, (1993)
- [7] K.M. Cuomo, A.V. Oppenheim and S. H. Strogatz, *Synchronization of Lorenz based chaotic circuits with application to communication*, Physics, review and Letters, vol. 71, PP. 65-68, (1993).
- [8] N.F. Rulkov, M.M.Sushchik, L.S.Tsimring et H.D.I. Abarbanel "Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems " *Physical Review E*, vol. 51, pp 980–994, (1995).
- [9] T. Yang. "A survey of chaotic secure communication systems" *Int. J. of Comput. Cognition*, vol. 11, pp 81–130, (2004).
- [10] A. V. Oppenheim, G. W. Wornelli, S. H. Isabelle and K. M. Cuomo, *Signal processing in the context of chaotic signals*, IEEE This paper appears in: International Conference of Acoustics, Speech, and Signal Processing ICASSP' 92, San Francisco, USA, pp. 117-120, (1992).

Chapitre 2 Etat de l'art sur la synchronisation des systèmes chaotiques fractionnaires

- [11] L. Koracev, Chaos- based cryptography: a brief overview, IEE Transactions on Circuits and Systems, PP. 6-21, July (2001).
- [12] MEGHERBI Ouardia, *Etude et réalisation d'un système sécurisé à base de systèmes chaotique*, Université-MOULOUD MAMMERI-Tizi-Ouzou, (2013).
- [13] IKHLEF Ameer, *Synchronisation, Chaotification et Hyperchaotification des Systèmes Nonlinéaires : Méthodes et Applications*, Université de Constantine -1-, (2011).
- [14] S. Guan and C.H. Lai, "Phase synchronization between two essentially different chaotic systems," *Phys. Rev.* Vol. 72, Iss. 1, pp. 6205 –6212, (2005).
- [15] G. Shuguang, L. Kun and C. Lai, "Chaotic synchronization through coupling strategies," *Chaos*, Vol. 16, Iss. 2, pp. 023107-023109, (2006).
- [16] A. Ikhlef et N. Mansouri, "Synchronisation et anti-synchronisation des systèmes chaotiques par le contrôle actif et l'algorithme backstepping, " Proc. Conférence Internationale en Génie Electrique (CIGET), Tebessa, Algérie, (2009).

## **Chapitre 3**

### ***Conception et réalisation d'un système de synchronisation d'ordre fractionnaire***

---

*L'objectif principal de ce chapitre est de présenter une approche pour synchroniser deux systèmes chaotiques fractionnaires à base de la commande passive avec présentation du circuit de synchronisation pour montrer la faisabilité de l'approche proposée.*

---

### **3.1 Introduction**

Ces dernières années, la synchronisation des systèmes chaotiques fractionnaires a commencé à attirer une attention croissante en raison de ses applications potentielles dans le traitement sécurisé de la communication et du contrôle. On a constaté que certains systèmes différentiels fractionnaires avec un ordre inférieur à 1 peuvent se comporter de façon chaotique, de manière similaire à leurs homologues d'ordre entier, dans lesquels le chaos peut également être synchronisé [1].

Plusieurs méthodes et techniques efficaces pour synchroniser deux copies d'un même système ont vu le jour parmi ces méthodes de synchronisation on trouve : le contrôle actif, le contrôle passive, la méthode «  $H_\infty$  », la méthode du mode glissant ainsi que la synchronisation basée sur les observateurs non linéaires [2-3].

Sachant que nous allons nous intéresser à la synchronisation des systèmes chaotiques fractionnaire, et au vu des multiples avantages que nous offre la commande passive, il est clair que la synchronisation par la commande passive est l'outil idéal pour notre travail. Au cours de ce chapitre nous allons d'abord présenter la commande passive, puis, nous allons appliquer cette commande pour synchroniser deux systèmes chaotiques fractionnaire, à la fin de ce chapitre on va présenter le circuit de synchronisation.

### **3.2 Présentation de la commande passive**

L'idée de base de la passivité consiste à façonner l'énergie totale du système puis à ajouter un terme d'amortissement. Les équations d'Euler-Lagrange (EL) permettent d'obtenir aisément cette formulation. En plus, si cette commande est capable d'injecter un terme dissipatif additif au système, alors la convergence à l'état désiré peut être améliorée par rapport à celle atteinte avec dissipation fournie par le système [4].

Le contrôle basé sur la passivité étudie les systèmes dynamiques sous la forme du système entrée, sortie et énergie, grâce à la théorie de contrôle non linéaire géométrique pour la conception de systèmes de rétroaction non linéaire. Si l'approvisionnement d'une source externe ne peut pas Satisfaire l'énergie interne perdue, alors l'énergie du système diminuera peu à peu et alors le système atteindra éventuellement une stabilité asymptotique.

Considérant un système non linéaire décrit par l'équation de la forme suivant [5]:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (3.1)$$

Où  $x$  l'espace d'état  $x = \mathbb{R}^n$ , l'entrée du système  $u = \mathbb{R}^m$  et la sortie du système  $y = \mathbb{R}^m$ ,  $f(x)$ ,  $g(x)$  et  $h(x)$  sont des mappages lisses.

On peut désigner une fonction non négatif  $V(x): X \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction de stockage du système (3.1).

De plus, nous appelons une fonction à valeur réelle  $s(y, u) = \langle y, u \rangle = y^T u$  Le taux d'approvisionnement, tel que

$$\int_0^t s(\tau) d\tau < \infty \forall t \geq 0 \quad (3.2)$$

➤ **Définition 3.1** : le système (3.1) est dit passif avec la fonction de stockage  $V$  et taux d'approvisionnement  $W$ , si l'inégalité suivante existe :

$$V(x) - V(x_0) \leq \int_0^t y^T(\tau) u(\tau) d\tau \quad (3.3)$$

Et il est équivalent dire que: le système est passif s'il existe des constantes réelles  $\beta$  et  $\rho > 0$  tel que :

$$\int_0^t y^T(\tau) u(\tau) d\tau + \beta \geq \int_0^t \rho y^T(\tau) y(\tau) d\tau \quad (3.4)$$

En outre, le système (3.1) peut être représenté par son expression équivalente appelé la forme normale dans une nouvelle coordonnée  $(z, y)$ , où

$$\begin{aligned} \dot{z} &= f_0(z) + p(z, y)y \\ \dot{y} &= b(z, y) + a(z, y)u \end{aligned} \quad (3.5)$$

➤ **Définition 3.2** : [6] Le système (3.1) est un système de phase minimum si  $L_g h(0)$  est non singulier et la dynamique des zéros est asymptotique stable au point d'équilibre.

➤ **Définition 3.3** [6] Le système (3.1) est passif Pour tout  $t \geq 0$ , il existe une valeur réelle  $\beta$  qui satisfait l'inégalité suivante :

### 3.3 Présentation du système chaotique fractionnaire de Liu

Le système autonome de Liu à ordre fractionnaire est décrit par les équations différentielles non linéaires suivantes [7]:

$$\begin{cases} D^\alpha x = -ax - ey^2 \\ D^\alpha y = by - kxz \\ D^\alpha z = -cz + mxy \end{cases} \quad (3.11)$$

Où  $a = e = 1$ ,  $b = 2.5$ ,  $k = m = 4$ ,  $c = 5$ ,  $\alpha = 0.90$  et conditions initiales  $(0.2, 0, 0.5)$

Le système (3.11) comporte cinq points d'équilibre. Deux complexes et trois points d'équilibre réels  $E_1 = (0; 0; 0)$ ,  $E_2 = (-0.88388; -0.940150; 0.664786)$

et  $E_3 = (-0.88388; 0.940150; -0.664786)$ .

Les racines de l'équation caractéristique évaluée à l'équilibre  $E_1$  sont  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_1 = -5$ , et  $\lambda_1 = 2.5$ . Et les valeurs propres de la matrice jacobienne Évalués aux points d'équilibre  $E_2$  et  $E_3$  sont  $\lambda_1 \approx -4.387767$ , et  $\lambda_{2,3} \approx 0.4438837 \pm 3.346383j$ .

L'attracteur du système de Liu est représenté sur la figure 3.1.

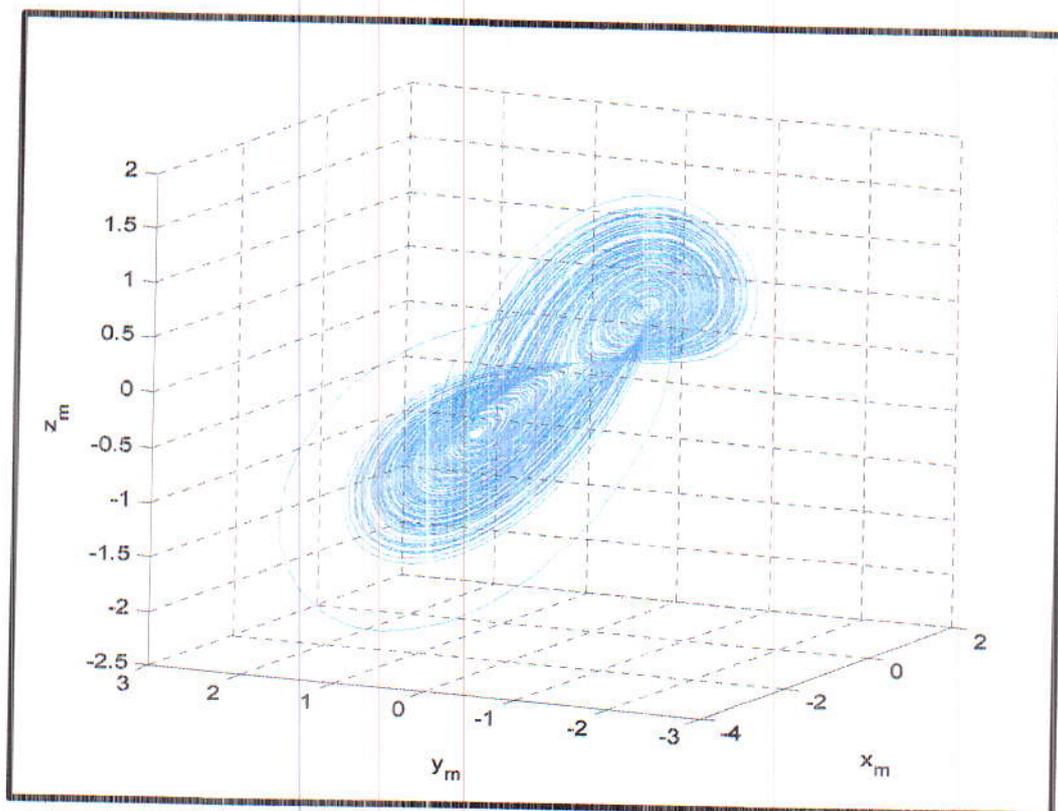


Figure 3.1. L'attracteur du système fractionnaire de Liu

### 3.4 Application de la commande passive pour la synchronisation du système de Liu

Considère le système chaotique fractionnaire de Liu suivant :

$$\begin{cases} D^\alpha x = -ax - ey^2 \\ D^\alpha y = by - kxz \\ D^\alpha z = -cz + mxy \end{cases} \quad (3.12)$$

Où  $a = e = 1, b = 2.5, k = m = 4, c = 5, \alpha = 0.90$

La partie émetteur est définie par l'équation suivante :

$$\begin{cases} D^\alpha x_m = -ax_m - ey_m^2 \\ D^\alpha y_m = by_m - kx_m z_m \\ D^\alpha z_m = -cz_m + mx_m y_m \end{cases} \quad (3.13)$$

Et le récepteur par l'équation :

$$\begin{cases} D^\alpha x_s = -ax_s - ey_s^2 \\ D^\alpha y_s = by_s - kx_s z_s \\ D^\alpha z_s = -cz_s + mx_s y_s \end{cases} \quad (3.14)$$

A partir de l'émetteur et le récepteur on peut calculer l'erreur de synchronisation :

$$|e| = \begin{vmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_s - x_m \\ y_s - y_m \\ z_s - z_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 \\ y \\ z_2 \end{vmatrix} \quad (3.15)$$

$$\begin{cases} D^\alpha e_1 = -a(x_s - x_m) - e(y_s^2 - y_m^2) \\ D^\alpha e_2 = b(y_s - y_m) - k(x_s z_s - x_m z_m) \\ D^\alpha e_3 = -c(z_s - z_m) + m(x_s y_s - x_m y_m) \end{cases} \quad (3.16)$$

On ajoute la commande  $u$  dans le deuxième état dans le système (3.16)

$$\begin{cases} D^\alpha e_1 = -ae_1 - e(y_s^2 - y_m^2) \\ D^\alpha e_2 = be_2 - k(x_s z_s - x_m z_m) + u \\ D^\alpha e_3 = -ce_3 + m(x_s y_s - x_m y_m) \end{cases} \quad (3.17)$$

En changement de variable où  $e_1 = z_1, e_2 = y = y_s - y_m$  et  $e_3 = z_2$

$$\begin{cases} D^\alpha z_1 = -az_1 - e(y_s^2 - y_m^2) \\ D^\alpha y = by - k(x_s z_s - x_m z_m) + u \\ D^\alpha z_2 = -cz_2 + m(x_s y_s - x_m y_m) \end{cases} \quad (3.18)$$

On a:  $y = e_2 = y_s - y_m \Rightarrow y_s = y + y_m$

Donc :  $y_s^2 = (y + y_m)^2 = y^2 + y_m^2 + 2yy_m$

$$\begin{cases} D^\alpha z_1 = -az_1 - [ey^2 + ey_m^2 + 2eyy_m - ey_m^2] \\ D^\alpha y = by - k(x_s z_s - x_m z_m) + u \\ D^\alpha z_2 = -cz_2 + m[x_s(y + y_m) - x_m y_m] \end{cases} \quad (3.19)$$

On aura :

$$\begin{cases} D^\alpha z_1 = -az_1 - ey^2 - 2eyy_m \\ D^\alpha y = by - kx_s z_s + kx_m z_m + u \\ D^\alpha z_2 = -cz_2 + mx_s y + m x_s y_m - mx_m y_m \end{cases} \quad (3.20)$$

En réécrivant le système (3.20) sous la forme de (3.21)

$$\begin{cases} \dot{z} = f_0(z) + p(z, y)y \\ \dot{y} = b(z, y) + a(z, y)u \end{cases} \quad (3.21)$$

$$f_0(z) = \begin{bmatrix} -az_1 \\ -cz_2 + m x_s y_m - mx_m y_m \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$p(z, y) = \begin{bmatrix} -2ey_m \\ mx_s \end{bmatrix} \cdot y$$

$$\begin{cases} a(z, y) = 1 \\ b(z, y) = by - k(x_s z_s - x_m z_m) \end{cases} \quad (3.23)$$

Tout d'abord, commence par prouver que le système est minimum de phase (définition 3.2) ;

On suppose que la fonction de Lyapunov est comme suit :

$$W(z) = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2$$

La dérivée de cette fonction :

$$\dot{W}(z) = \dot{z}_1 z_1 + \dot{z}_2 z_2 = [z_1 \quad z_2] \begin{bmatrix} -az_1 \\ -cz_2 + mx_s y_m - mx_m y_m \end{bmatrix} = -az_1^2 - c z_2^2 - z_2 (mx_s y_m - mx_m y_m) \leq 0$$

Puisque  $\dot{w}(z) \leq 0$  alors, Le système (3.12) est minimum de phase.

➤ **Théorème 3.1 [5]** : Le système (3.12) est passif en appliquant la commande suivante :

$$u_p = a^{-1}(z, y)[-b^T(z, y) - \frac{\partial W(z)}{\partial z} p(z, y) - ky + v]$$

Où ;  $k > 0$  et  $v$  est une entrée externe.

➤ **Démonstration du théorème** : on choisit la fonction de stockage :

$$v(z, y) = w(z) + \frac{1}{2} y^2 ;$$

On dérivant cette fonction de stockage, on obtient :

$$\dot{v} = \frac{dw}{dz} \dot{z} + y\dot{y}$$

$$\dot{v} = \frac{dw}{dz} [f_0(z) + p(z, y)y + [b(z, y) + a(z, y)u_p]y]$$

$$\dot{v} = \frac{dw}{dz} f_0(z) + \frac{dw}{dz} p(z, y)y + [b(z, y) + a(z, y)u_p]y$$

Vu que le système est on phase minimum, donc ;

$$\frac{dw}{dz} f_0(z) \leq 0$$

Alors,

$$\dot{v} \leq \frac{dw}{dz} p(z, y)y + [b(z, y) + a(z, y)u_p]y$$

$$\dot{v} \leq \frac{dw}{dz} [-2y_m e + mx_s]y + [(by - k(x_s z_s - x_m z_m)) + u_p]y$$

Si on choisit le contrôleur sous la forme :

$$u_p = a^{-1}(z, y)[-b^T(z, y) - \frac{\partial W(z)}{\partial z} p(z, y) - ky + v]$$

Telle que :

$$u_p = -by + kx_s z_s - kx_m z_m + 2ey_m \dot{z}_1 - mx_s \dot{z}_2 - ky$$

Alors :

$$\dot{v} \leq -ky^2 + vy$$

En intégrant l'équation précédente, on obtient :

$$v(z, y) + \int_0^t ky^2(\tau) d(\tau) \leq \int_0^t v(\tau)y(\tau) d(\tau) + \beta$$

Où  $\beta = v(z_0, y_0)$  comme la fonction de stockage  $v(z, y) \geq 0$ , on obtient ;

$$\int_0^t y(\tau)v(\tau)d\tau + \beta \geq \int_0^t ky^2(\tau)d\tau$$

Selon la définition 3.3, le (3.21) système est passif et ce qui confirme le théorème.

La figure 3.2 représente le schéma simulink du circuit de synchronisation (émetteur-récepteur et commande).

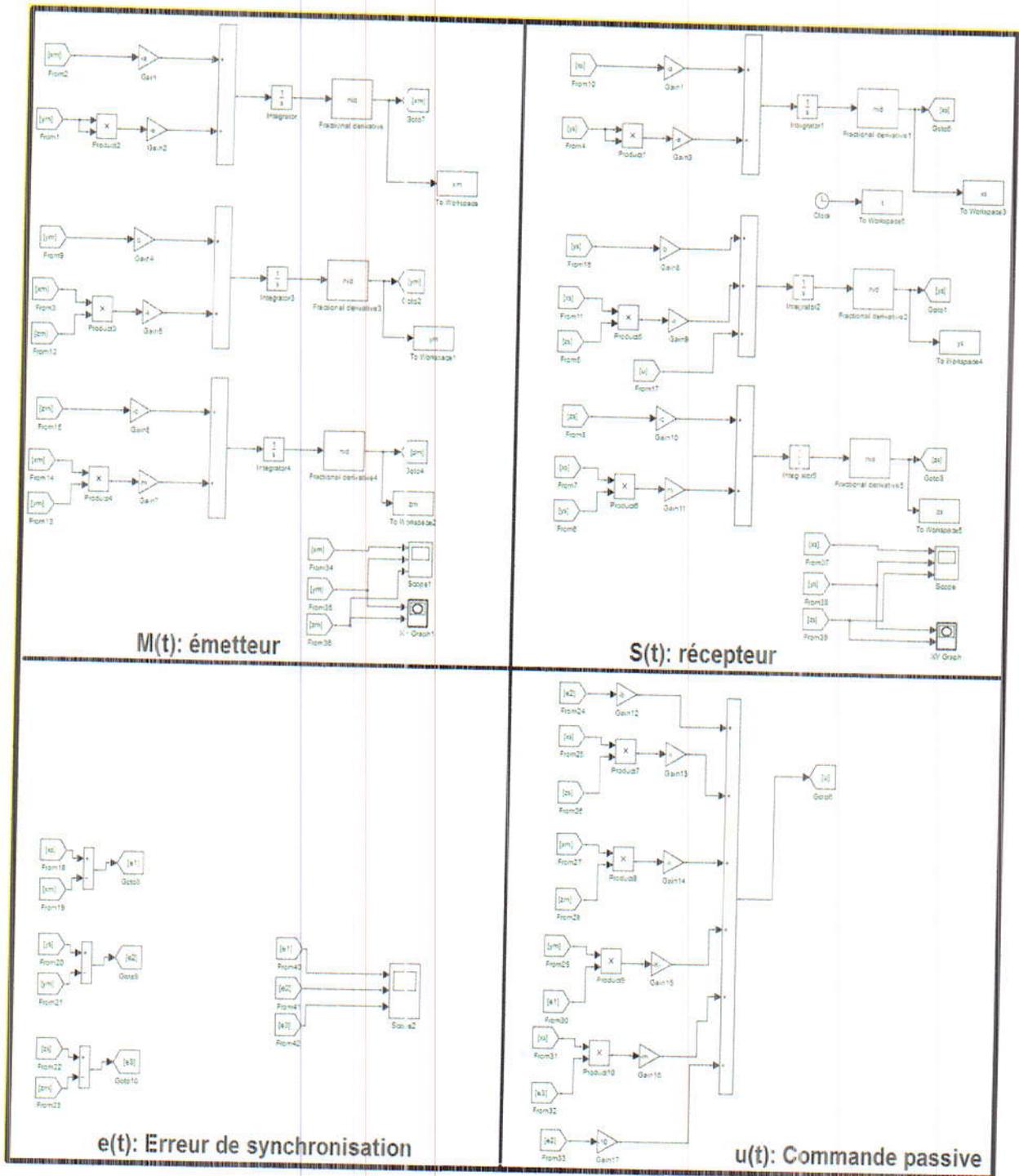


Figure 3.2 : Schéma de la simulation de synchronisation sous Simulink

Les figures 3.3 et 3.4 représentent les résultats de synchronisation sans commande et avec commande respectivement. Comme on peut le voir, avec la commande passive les deux systèmes fractionnaire ce synchronise au bout de 0,9s.

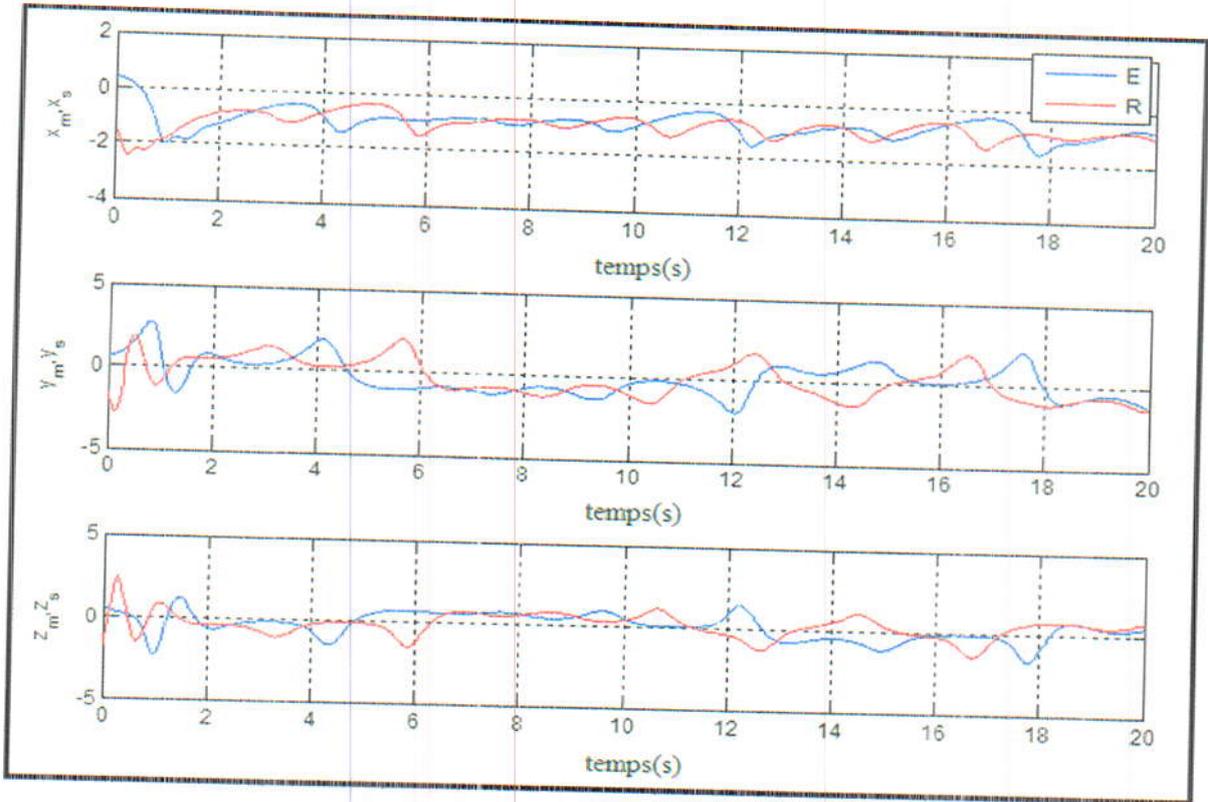


Figure 3.3 : synchronisation de deux systèmes chaotiques fractionnaires sans commande

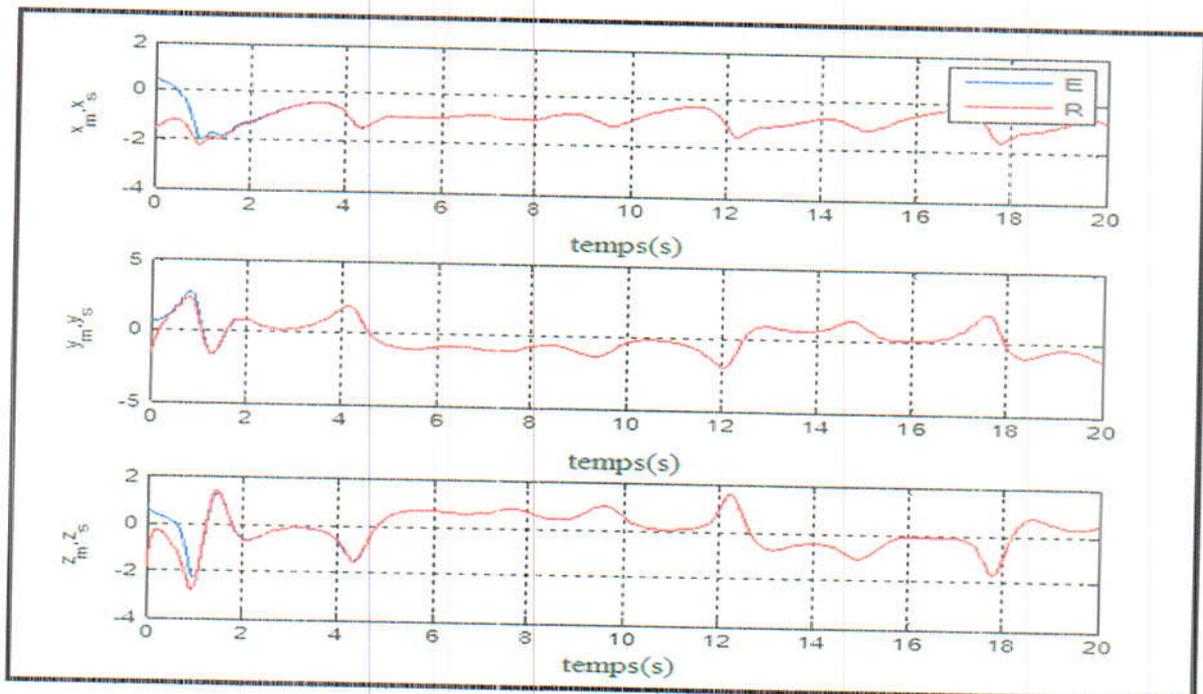


Figure 3.4 : synchronisation de deux systèmes chaotiques fractionnaires avec commande

### 3.5. Simulation du circuit électronique transmission sous MULTISIM

#### 3.5.1. La réalisation du circuit d'alpha ou bien le calcul d'alpha

La définition standard de fractionnement différentiel ne permet pas la mise en œuvre directe des opérateurs fractionnaires dans les simulations de domaine temporel. Pour étudier de tels systèmes, il est nécessaire de développer des approximations aux opérateurs fractionnaires en utilisant les opérateurs d'ordre entier standard [8]. Selon la théorie du circuit, la formulation d'approximation de, de 0.1 à 0.9, en référence [9], Diagramme d'approximation de trame forcé, peut être réalisé par le domaine de fréquence complexe de la chaîne. Forme un circuit équivalent. Quand  $\alpha = 0.98$ , on peut calculer que la formule d'approximation de  $\frac{1}{s^{0.98}}$ .

$$\frac{1}{s^{0.98}} = \frac{1.2974(s+1125)}{(s+1423)(s+0.01125)} \quad (3.24)$$

Dans la formule (3.24),  $s = j\omega$ . C'est une fréquence complexe et l'unité de circuit de forme de chaîne est décrite dans Figure 3.5(a), selon la référence [8]. La fonction de transfert entre A et B peut être obtenue comme suit :

$$H_{0.98}(s) = \frac{R_1}{sR_1C_1+1} + \frac{R_2}{sR_2C_2+1} = \frac{1}{C_0} \frac{\left(\frac{C_0+C_2}{C_1+C_2}\right) \left[s + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right]}{\left(s + \frac{1}{R_1C_1}\right) \left(s + \frac{1}{R_2C_2}\right)} \quad (3.25)$$

Prise  $C_0 = 1\mu F$ . Depuis  $H(s)C_0 = \frac{1}{s^{0.98}}$ , On peut atteindre ;

$$R_1 = 91.1873M\Omega, R_2 = 190.933\Omega, C_1 = 975.32nF \text{ et } C_2 = 3.6806\mu F. \quad (3.26)$$

De même, pour  $\alpha = 0.9$  On peut atteindre la formule d'approximation de  $\frac{1}{s^{0.9}}$  est :

$$\frac{1}{s^{0.9}} = \frac{2.2675(s+1.292)(s+215.4)}{(s+0.01292)(s+2.154)(s+359.4)} \quad (3.27)$$

L'unité de circuit de forme de chaîne pour ce cas est illustrée à la figure 3.5(b). La fonction de transfert entre A et B est :

$$H_{0.9}(s) = \frac{\frac{1}{C_1}}{s + \frac{1}{R_1C_1}} + \frac{\frac{1}{C_2}}{s + \frac{1}{R_2C_2}} + \frac{\frac{1}{C_3}}{s + \frac{1}{R_3C_3}} \quad (3.28)$$

On peut atteindre ;

$R_1 = 62.84M\Omega$ ,  $R_2 = 250k\Omega$ ,  $R_3 = 2.5k\Omega$ ,  $C_1 = 1.23\mu F$ ,  $C_2 = 1.83\mu F$  et  $C_3 = 1.1\mu F$ .

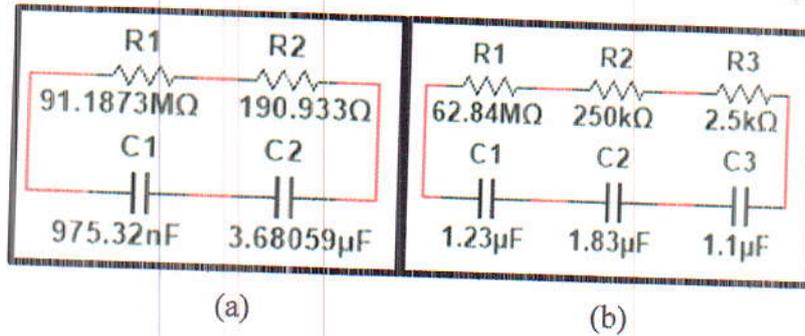


Figure 3.5 : L'unité de forme de chaîne de (a)  $= \frac{1}{s^{0.98}}$ , (b)  $= \frac{1}{s^{0.9}}$

### 3.5.2. Schématisation de l'émetteur

Le schéma électronique de l'émetteur est représenté dans la figure 3.6 ci-après :

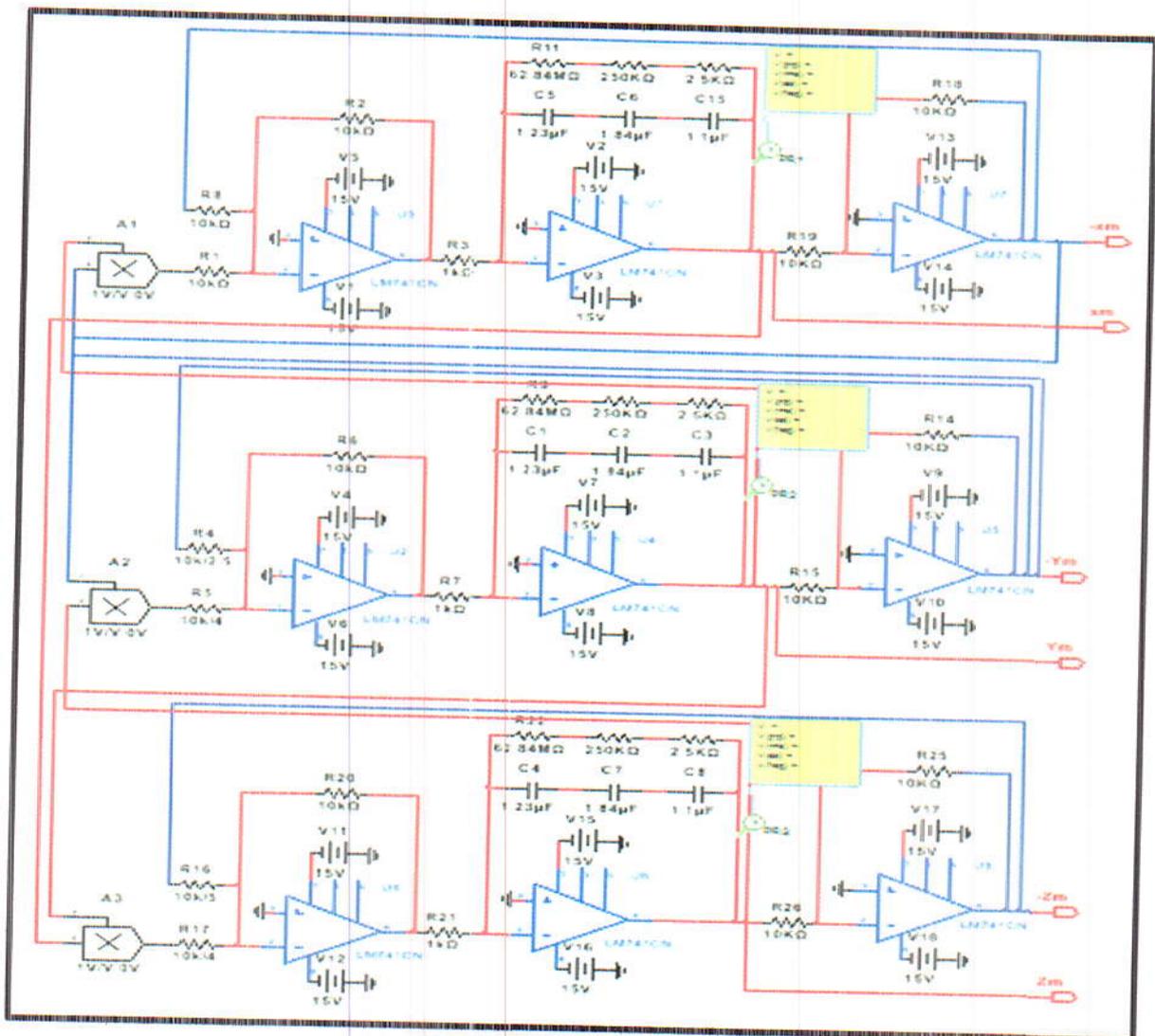


Figure 3.6. Schéma électronique de l'émetteur

3.5.3. Schématisation du récepteur

Le schéma électronique du récepteur est représenté dans la figure 3.7 ci-après :

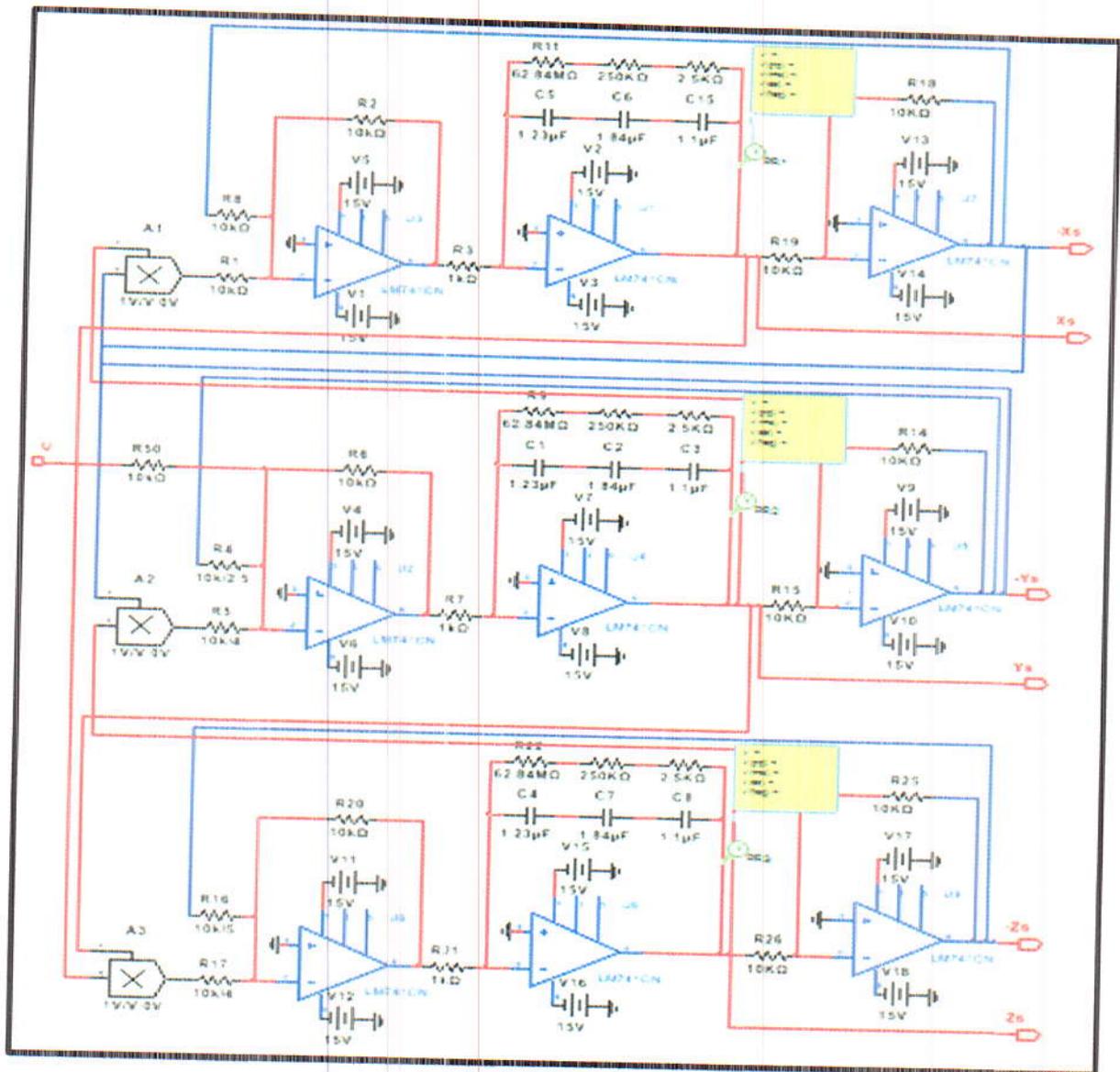


Figure 3.7 Schéma électronique du récepteur

3.5.4. Schématisation de la commande passive

Le schéma électronique de la commande passive est représenté dans la figure 3.8 ci-après :

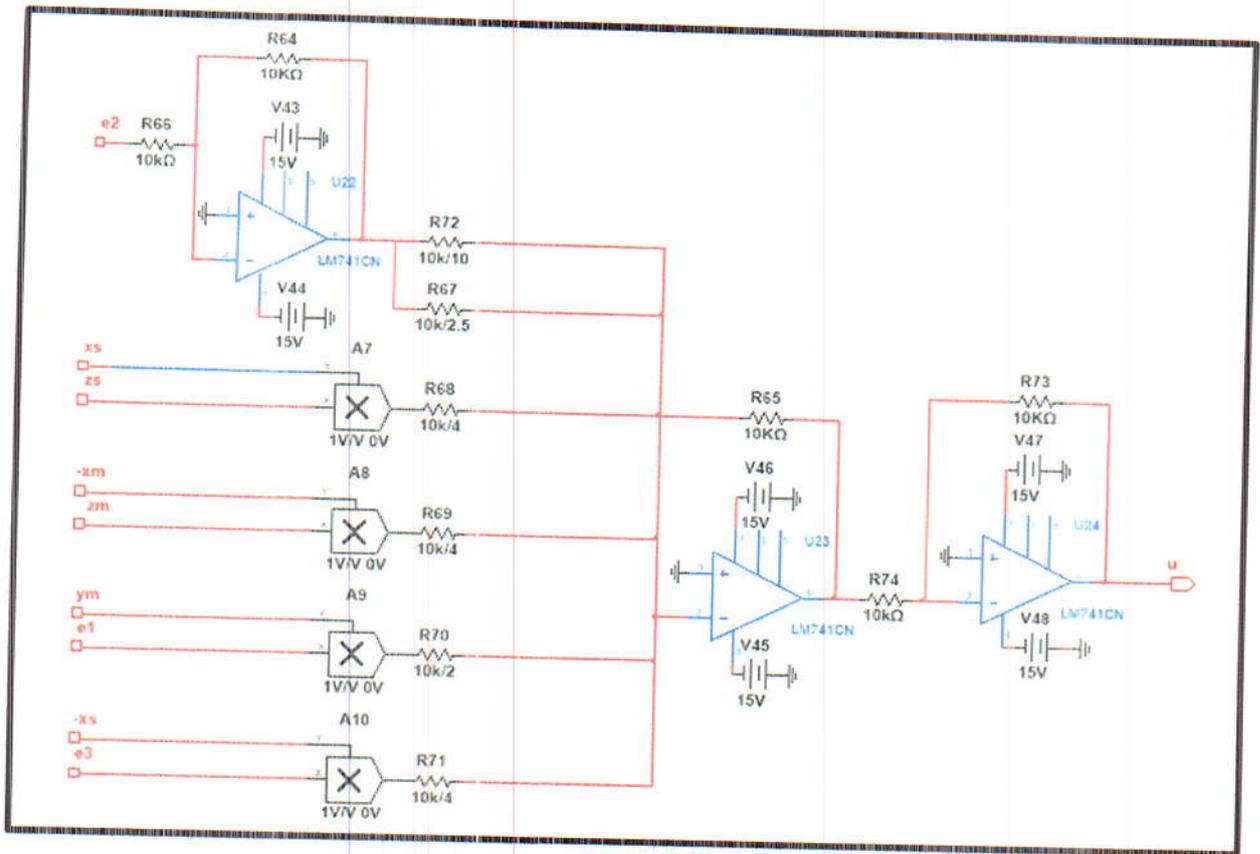


Figure 3.8 : Schéma électronique de la commande passive

3.5.5. Schématisation de l'erreur

Le schéma électronique de l'erreur est représenté dans la figure 3.9 ci-après :

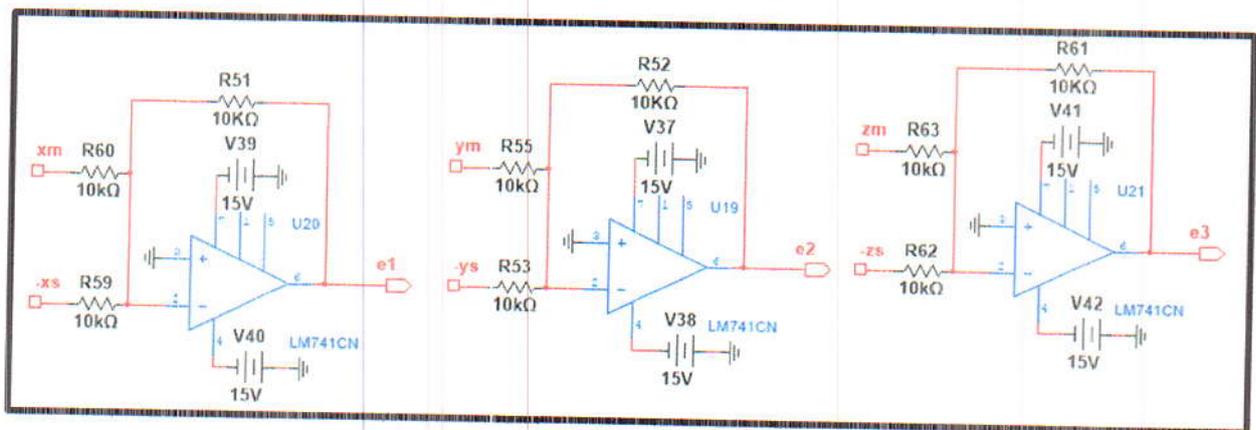


Figure 3.9 : Schéma électronique de l'erreur

### 3.5.6. Simulation de la synchronisation du système

La figure 3.10 ci-dessous représente la simulation de la synchronisation d'un système chaotique fractionnaire à partir de l'émetteur vers le récepteur ;

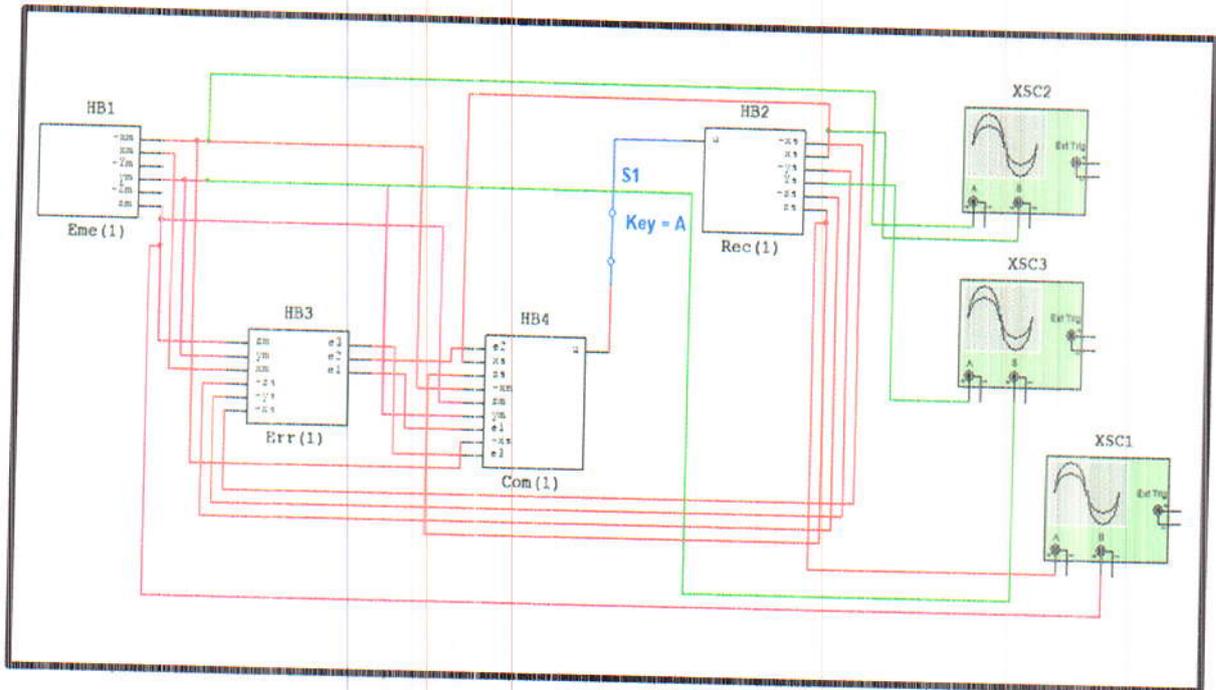
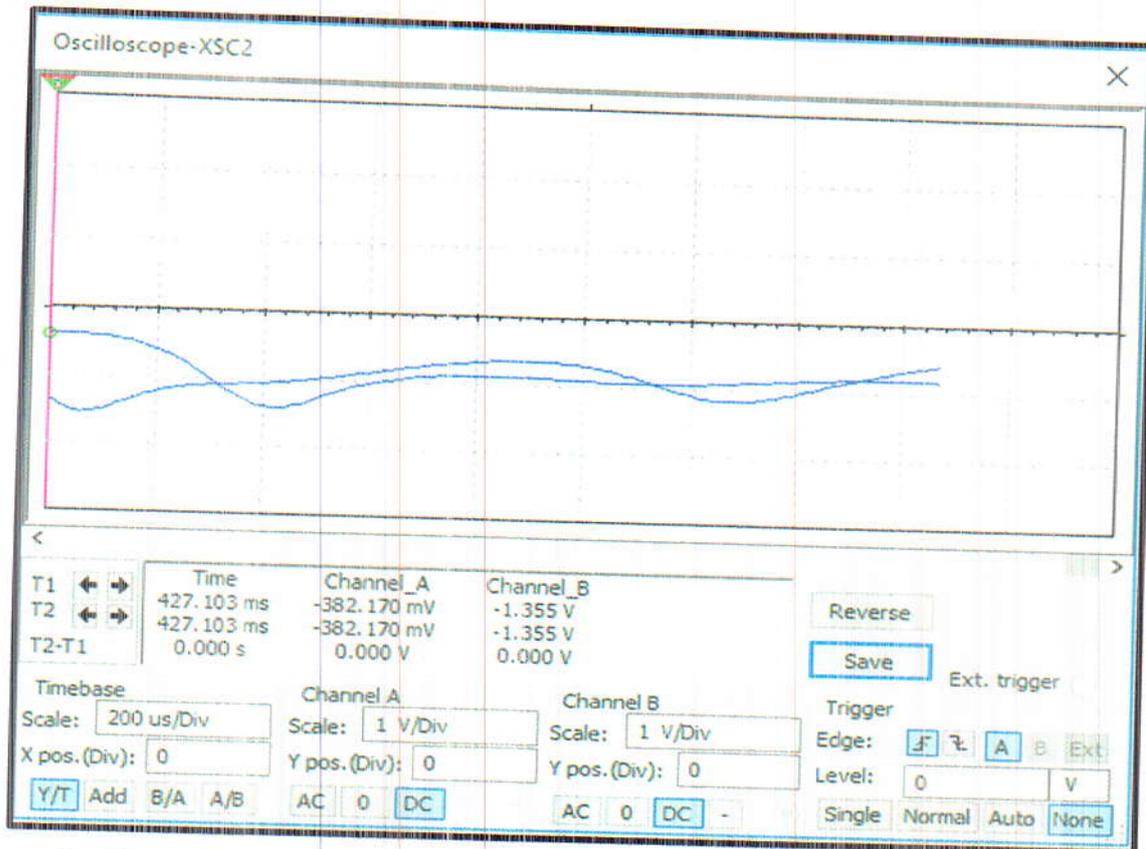
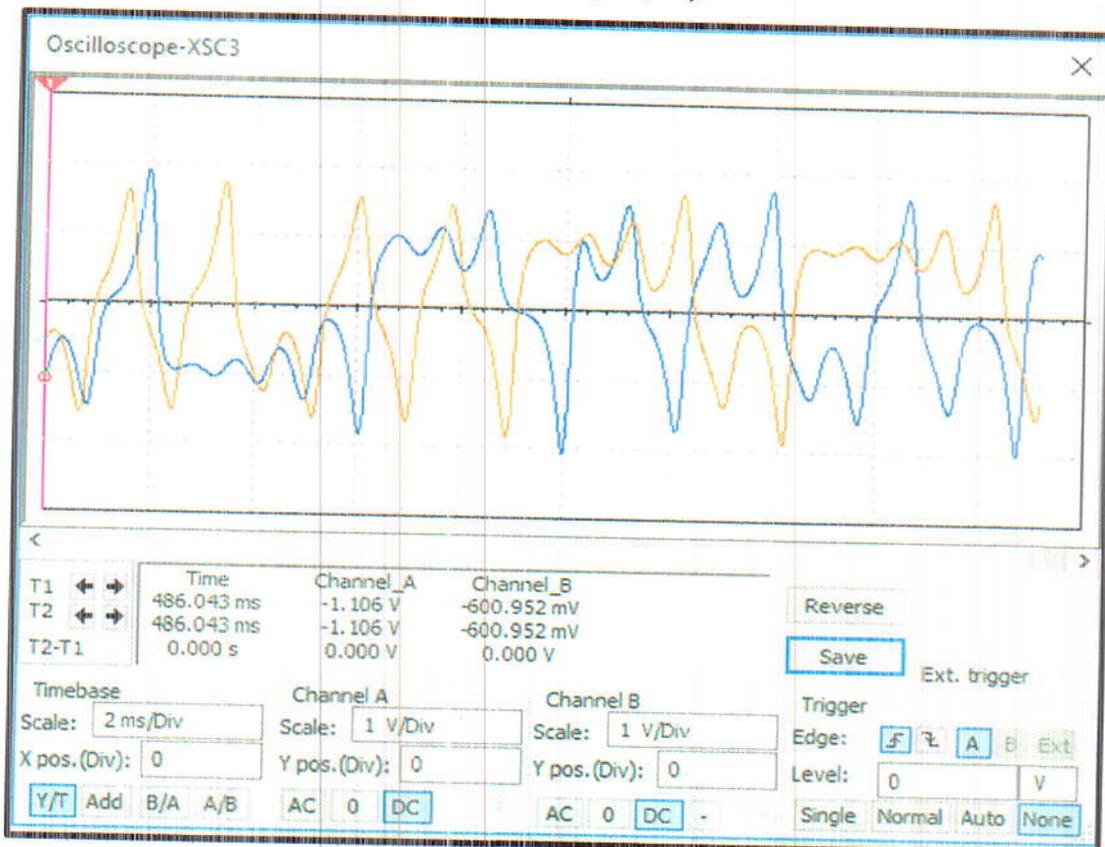


Figure 3.10 : Schéma électronique Simulation de la synchronisation du système

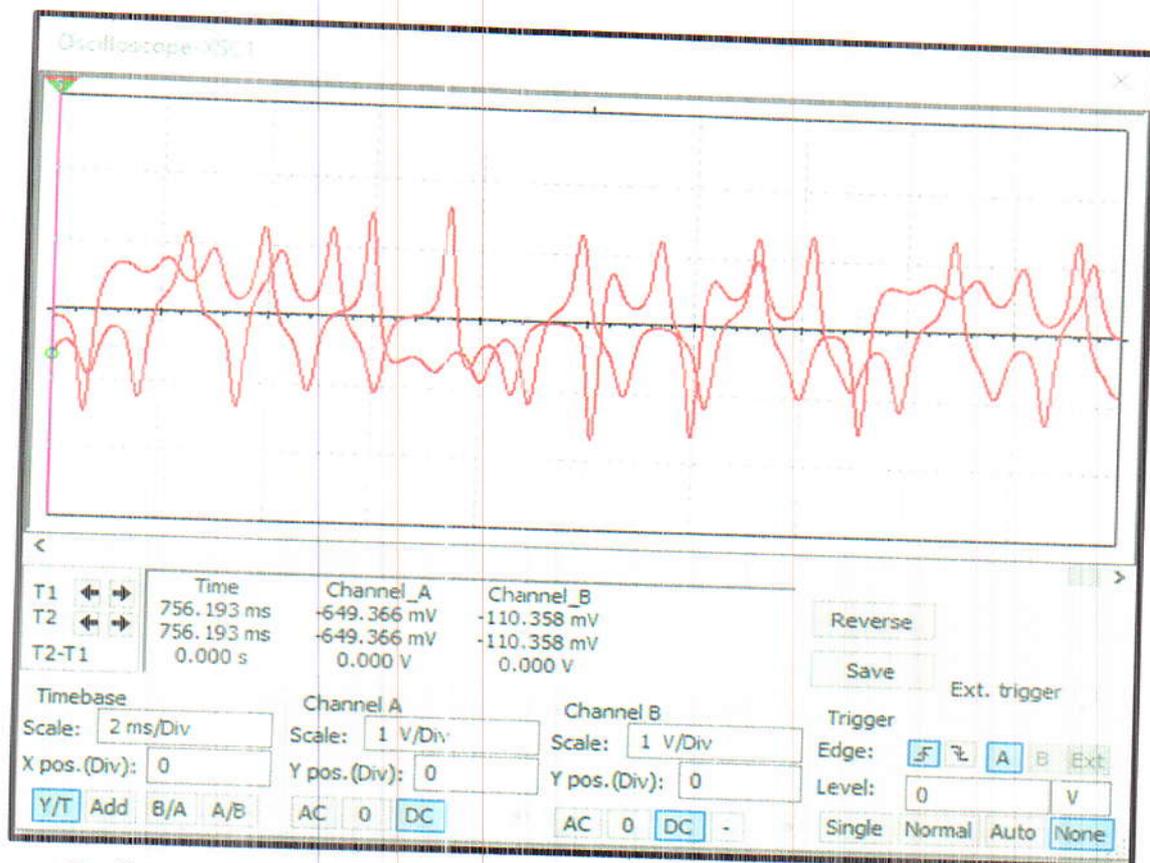
Les figures 3.11, 3.12, 3.13 représentent l'allure des signaux chaotiques de l'émetteur et le récepteur sans commande et les figures 3.14, 3.15, 3.16 représente l'allure des signaux chaotiques de l'émetteur et le récepteur avec commande. Comme on peut le voir clairement, on a obtenu les mêmes résultats que ceux obtenue théoriquement.



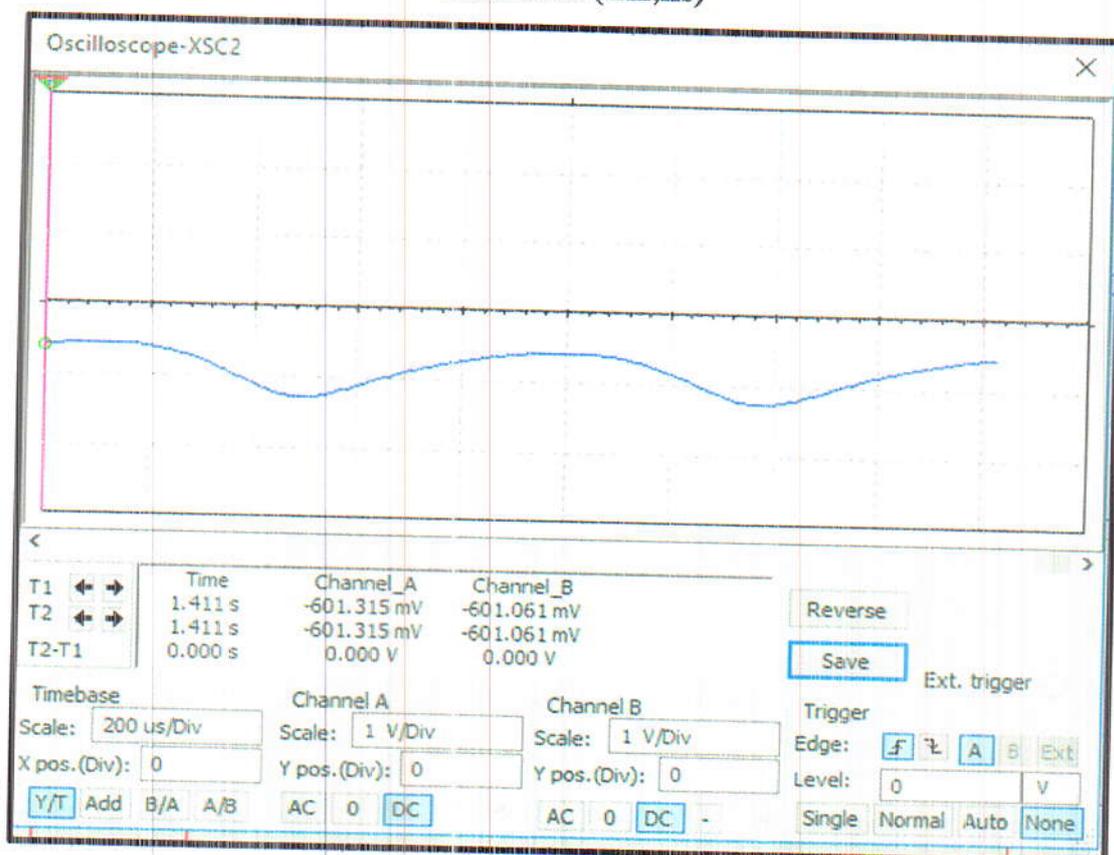
La figure 3.11 : L'allure du signal chaotique de l'émetteur et le récepteur sans commande ( $X_m, X_s$ )



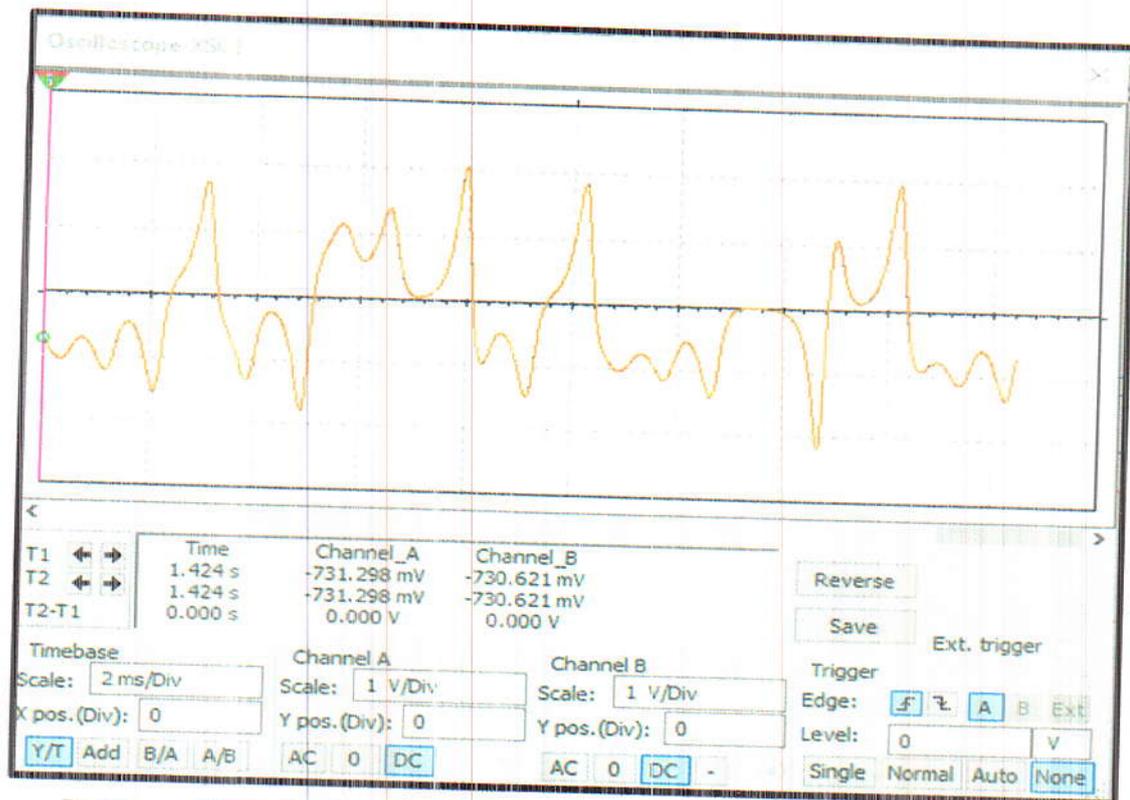
La figure 3.12 : L'allure du signal chaotique de l'émetteur et le récepteur sans commande ( $Y_m, Y_s$ )



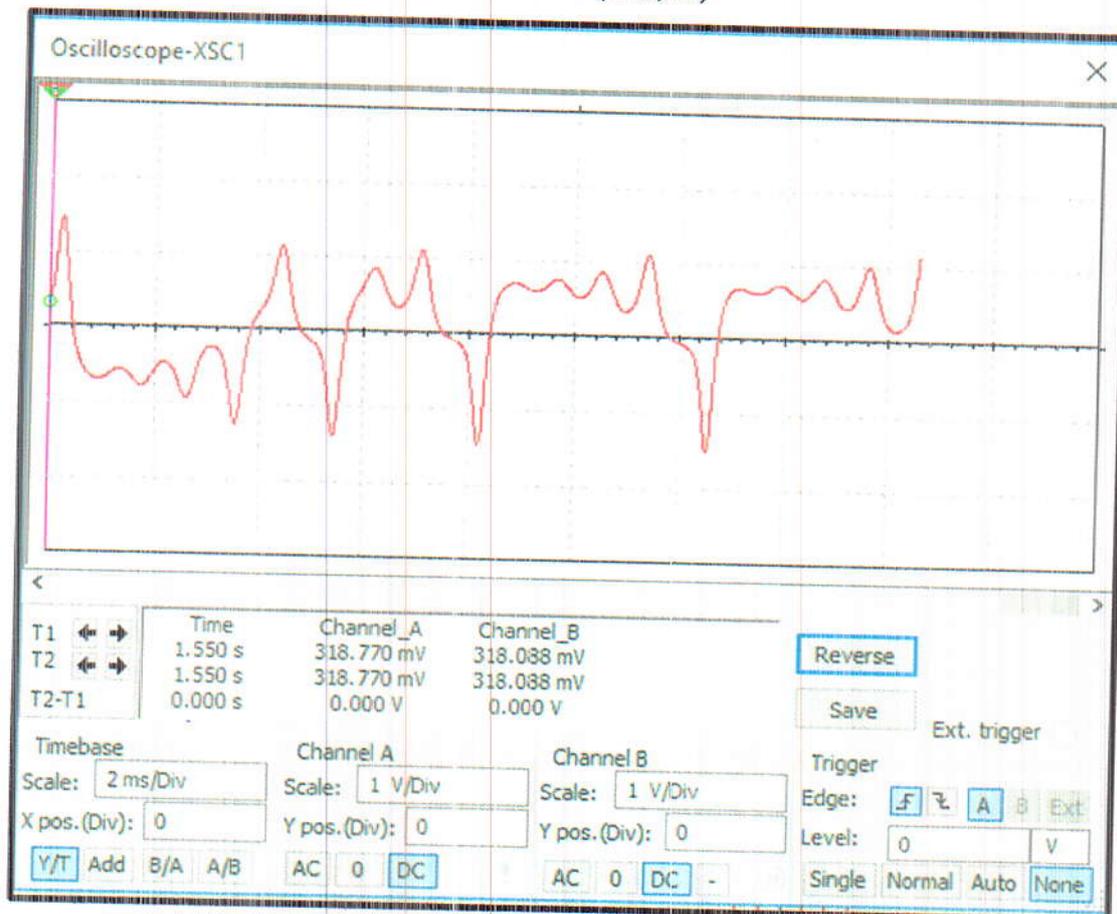
La figure 3.13 : L'allure du signal chaotique de l'émetteur et le récepteur sans commande ( $Z_m, Z_s$ )



La figure 3.14 : L'allure du signal chaotique de l'émetteur et le récepteur avec commande ( $X_m, X_s$ )



La figure 3.15 : L'allure du signal chaotique de l'émetteur et le récepteur avec commande ( $Y_m, Y_s$ )



La figure 3.16 : L'allure du signal chaotique de l'émetteur et le récepteur avec commande ( $Z_m, Z_s$ )

### **3.6 Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons traité le problème de synchronisations de deux systèmes chaotiques fractionnaires par la commande passive. Pour montrer la faisabilité de cette approche, nous avons fait la conception du circuit électronique sous Multisim.

## Références bibliographiques

- [1] Zhang F, Chen G, Li C, Kurths J. *Chaos synchronization in fractional differential systems*. Phil Trans R Soc A 371: 20120155.(2013).
- [2] Kenouni Hocine . *Synchronisation des systèmes Hyper-chaotiques à retard sous l'effet des perturbations : Application au chiffrement d'information*. Mémoire master. Université de jijel (2016) .
- [3] Menacer TIDJANI. *Synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques à dérivées fractionnaires*. THESE de MAGISTER. Univ. Constantine (2014).
- [4] BAGHDAD BELABBES, AHMED LARBAOUI .*commande passive associée à la commande par backstepping d'un moteur synchrone*. université Djillali Liabes, 22000 Sidi Bel Abbes- Algérie(2015).
- [5] Qiao Wang and Donglian Qi . *Passivity-Based Control for Fractional Order Unified Chaotic System* . Department of Electrical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China. {qiao,qidl}@zju.edu.cn.
- [6] Selçuk Emiroglu\* and Yilmaz Uyaroglu .*Control of Rabinovich chaotic system based on passive control*. Department of Electrical Electronics Engineering, Faculty of Engineering, Sakarya University, Turkey. Accepted 7 October, (2010).
- [7] Albert C.J. Luo . *Fractional-Order Nonlinear Systems Modeling, Analysis and Simulation* University Edwardsville ,IL 62026-1805, USA
- [8] Z.Hammouch \_ T.Mekkaoui, *Circuit design and simulation for the fractional-order chaotic behavior in a new dynamical system*,
- [9] C.X.Liu, *Fractional- order Chaotic Circuit Theory and Applications*, Xian: Xian Jiaotong University Press, (2011).

## **Conclusion générale**

Au cours de ce travail, nous nous sommes intéressés à la conception et réalisation d'un système de synchronisations d'ordre fractionnaire.

Le premier chapitre présente un état de l'art sur les systèmes chaotiques et fractionnaires, où les notions et définitions qui y ont été abordées nous ont permis de mieux comprendre ces systèmes, elles nous ont ainsi servi tout au long de notre travail.

Au cours du deuxième chapitre, nous avons étudié la synchronisation des systèmes chaotiques fractionnaires nous avons introduit la notion de synchronisation et ces différents méthodes et types de la synchronisation des systèmes fractionnaires.

Dans le troisième chapitre de ce travail, nous consacré ce chapitre pour la représentation de la commande passive puis, nous avons appliqués cette approche pour synchroniser deux systèmes chaotique fractionnaires. A la fin de ce chapitre nous avons réalisé le circuit de synchronisation sous Multisim pour assurer la faisabilité de cette approche.

Comme suite à ce travail, on propose l'utilisation de ce circuit de synchronisation pour le cryptage d'informations.