

République Algérienne Démocratique et Populaire
 Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
 Université de Jijel
 Faculté des Sciences & de la Technologie
 Département d'Électronique



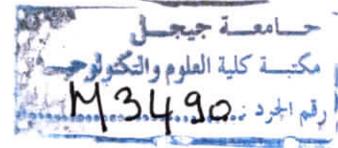
Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de

Master en Electronique

M/ELE.AS

2017/08



Option : Electronique et Analyse des Systèmes

Thème



**Application de la méthode des éléments finis
 au contrôle non destructif**

Présenté Par :

Boumekik Ismail

Belemrabet Nouredine

Encadré par :

M^{elle} Kemiha Fatima

Juin 2017

Dédicace

Je dédie ce travail

A mes très chers parents

*Toutes les lettres ne sauraient trouver les mots qu'il Faut...
Tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude, l'amour Le
respect, la reconnaissance... Aussi, c'est tout simplement que Je
souhaite que Dieu vous préserve une longue vie.*

A ma Mère

A Mon père

A mes sœurs et mes frères

A eux tous, je souhaite un avenir plein de joie et de bonheur

A tous les membres de ma famille

A toute la promotion Master De l'année 2017.

A mes très chers amis.

ISMAIL

Dédicace

Je dédie ce travail

A mes très chers parents

*Toutes les lettres ne sauraient trouver les mots qu'il Faut...
Tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude, l'amour Le
respect, la reconnaissance... Aussi, c'est tout simplement que Je
souhaite que Dieu vous préserve une longue vie.*

A ma Mère

A Mon père

A mes sœurs et mes frères

A eux tous, je souhaite un avenir plein de joie et de bonheur

A tous les membres de ma famille

A toute la promotion Master De l'année 2017.

A mes très chers amis.

NOUREDDINE

Table des matières	I
Table des figures	V
Liste des tableaux	VI
Introduction générale	1

Chapitre I : Généralité sur le contrôle non destructif.

I.1 Introduction.....	3
I.2 Généralité sur le contrôle non destructif.....	3
I.2.1 Domaine d'application du contrôle non destructif.....	4
I.2.2 Classement des défauts détectés en CND.....	5
I.2.2.1 Les défauts de surface.....	5
I.2.2.2 Les défauts internes.....	5
I.3 Techniques de contrôle non destructif.....	5
I.3.1 Examen visuel.....	6
I.3.2 Examen par ressuage.....	7
I.3.3 Contrôle par Magnétoscopie.....	8
I.3.4 Contrôle par Courant de Foucault.....	9
I.3.5 Contrôle par radiographie.....	11
I.3.6 Contrôle par Thermographie.....	12
I.4 Contrôle non destructif par Ultrasons.....	14
I.4.1 Propagation des ondes ultrasons.....	15
I.4.2 Caractéristiques générales des ondes ultrasonores.....	17
I.4.3 Changement de milieu de propagation.....	20
I.5 Conclusion.....	21

Chapitre II : Théorie des éléments finis.

II.1 Introduction.....	23
II.2 Historique.....	23
II.3 Principes généraux des méthodes numériques sur ordinateur.....	26

II.3.1	Différences finies.....	26
II.3.2	Éléments finis.....	27
II.3.3	Volumes finis.....	27
II.4	Définition de la méthode des éléments finis.....	28
II.4.1	Etapas d'analyse par la MEF.....	29
II.4.2	Discretisation géométrique.....	29
II.4.3	Nouds et éléments.....	30
II.4.4	Comment fonctionne la méthode des éléments finis.....	31
II.5	Algorithmes de la méthode des éléments finis (la méthode de Ritz)	33
II.5.1	Exemple de la méthode de Ritz.....	34
II.6	Les différents types de maillages.....	36
II.6.1	Choix du type de maillage.....	37
II.6.2	Propriétés de l'élément.....	37
II.6.2.1	Maillage hexaédriques.....	38
II.6.2.2	Le maillage tétraédrique.....	40
II.7	Avantage et désavantages de la méthode des éléments finis.....	41
II.8	Domain d'application.....	42
II.9	Conclusion.....	42
 Chapitre III : Simulation du CND par élément finis.		
III.1	Introduction.....	43
III.2	Exemple pratique du contrôle non destructif.....	43
III.2.1	Méthode par immersion	44
III.2.2	Méthode par contact.....	46
III.2.3	Interprétation des résultats d'expérience.....	47
III.3	Problème rencontré durant la pratique.....	48
III.4	Simulation du contrôle non destructif par éléments finis.....	49
III.4.1	Démarche EF.....	50

III.4.2	Utilisation d'un logiciel d'éléments finis.....	51
III.4.2.1	Définition de logiciel RDM6.....	51
III.4.2.2	Exemple d'application par logiciel RDM6.....	52
III.5	simulation des plaques carrée et ronde des différents matériaux.....	56
III.5.1	Simulation de la plaque ronde.....	56
III.5.1.1	Ronde en acier.....	56
III.5.1.2	Ronde en verre.....	62
III.5.2	simulation de la plaque carrée.....	64
III.5.2.1	Plaque carré en verre.....	64
III.5.2.2	plaque carré en matériau acier.....	69
III.5.2.3	Interprétation des résultats de simulation des plaques.....	72
III.6	Avantage et désavantage de cette simulation.....	72
III.7	Conclusion	73
	Conclusion générale.....	74

Figure I.1 - Système de Contrôle Non Destructif.....	4
Figure I.2 – Principe du ressuage.....	7
Figure I.3 - Le contrôle magnétique.....	8
Figure I.4 - Principe du CND par courants de Foucault	10
Figure I.5 - Principe de la radiographie.....	11
Figure I.6 - Principe de la tomographie X.....	13
Figure I.7 - Principe des ultrasons.....	14
Figure I.8 - Natures des ondes.....	16
Figure I.9 - Les différents types de sons suivant une fréquence.....	17
Figure I.10 - Réflexion et réfraction des ondes.....	21
Figure II. 1 - Maillage.....	25
Figure II.2 - Erreur de discrétisation géométrique.....	30
Figure II.3 - Discrétisation d'une structure en nœuds et éléments (dent d'une roue Dentée)	30
Figure II.4 - Exemples des types de maillage.....	36
Figure II.5 – Maillage hexaédrique.....	49
Figure II.6 - Le maillage tétraédrique.....	41
Figure III.1 - Expérience du contrôle non destructif par ultrason à immersion.....	44
Figure III.2 – Resultat des signaux ultrasonors par immersion (a) : Aluminium, (b) Cylindre béton,(c): Cube béton , (d) : Parallilipède béton.....	45
Figure III.3 – Expérience de control non destructif par ultrason à contact.....	46
Figure III.4 – Résultat des signaux ultrasonors par contact (a) : Aluminium, (b) :Cylindrebéton, (c) : Cube béton, (d) : Parallilipède béton.....	47
Figure III.5 – Les information extrait de cas d'échantillon cylindre béton par contact.	48
Figure III.6 - Un exemple de champ de contraintes calculé dans une simulation par éléments finis.....	49
Figure III.7 – (a) : Plaque à étudier , (b) : Maillage de plaque, (c) : Elasticité thermique (d) : Paramètre de maillage.....	53
Figure III.8 - (a) : Définie l'épaisseur, (b) : Nombre d'épaisseur, (c) : Définie le Matériau (d) : Cas de charge.....	54
Figure III.9 - (a) : Déformation de la plaque, (b) : Résultat obtenue.....	55
Figure III.10 – (a) : Mailler la plaque, (b) : Déffinire le matériaux.....	56
Figure III.11 - (a) : La forme des apuis (b) : La forme de charge.....	57

Figure III.12 – Déformation de la plaque.....	57
Figure III.13 - (a) : Déplacement ver x, (b) : Déplacement ver y.....	58
Figure III.14 – La densité de flux.....	58
Figure III.15 - (a) : Densité flux suivant x, (b) : Densité flux suivant y.....	59
Figure III.16 - (a) Nouveaux maillage , (b) Cas de charge appliquée.....	59
Figure III.17 – Nouveaux resultats avec une charge mécanique, (a) : Déformation de plaque ,(b) : Déplaseement ver x, (c) : Déplaseement ver y.....	60
Figure III.18 – Nouveaux résultat avec une charge thermique, (a) : Densité flux, (b) Densité de flux suivant x, (c) : Densité de flux suivant y.....	61
Figure III.19 – (a) : Déplacement sur x, (b) : Déplacement sur y.....	62
Figure III.20 – Résultat pour matériaux verre, (a) : Densité flux, (b) : Densité de flux Sur x (c) : Densité de flux sur y.....	63
Figure III.21 - (a) : Maillier la plaque (carrée), (b) : Déffinire le matériaux (carrée) (c) : La forme des apuis, (d) : La forme de charge.....	64
Figure III.22 - Résultat de cas de charge mécanique, (a) : Déformation de la plaque, (b) : Déplacement sur x, (c) : Déplacement sur y.....	65
Figure III.23 – Résultat pour charge thermique, (a) : Densité flux, (b) : Densité de flux Sur x, (d) : Densité de flux sur y.....	66
Figure III.24 – (a) : Maillage triangulaire, (b) : Cas de charge.....	67
Figure III.25 – déformation de la plaque.....	67
Figure III.26 – Nouveaux résultats pour charge mécanique, (a) : Déplacement sur x, (b) : Déplacement sur y.....	68
Figure III.27 – densité de flux.....	68
Figure III.28 - (a) : Densité de flux Sur x, (d) : Densité de flux sur y.....	69
Figure III.29 – (a) : Déformation de plaque, (b) : Déplacement sur x, (c) : Déplacement Sur y.....	70
Figure 3.30 – (a) : Densité flux, (b) : Densité de flux suivant x, (c) : Densité de flux suivant y.....	71

Tableau I.1 - Vitesse de propagation..... 16

Abréviations

C

CND	Contrôle Non Destructif
CAO	Conception Assistée par Ordinateur

E

EDP	Equation aux Dérivé Partielle
-----	-------------------------------

F

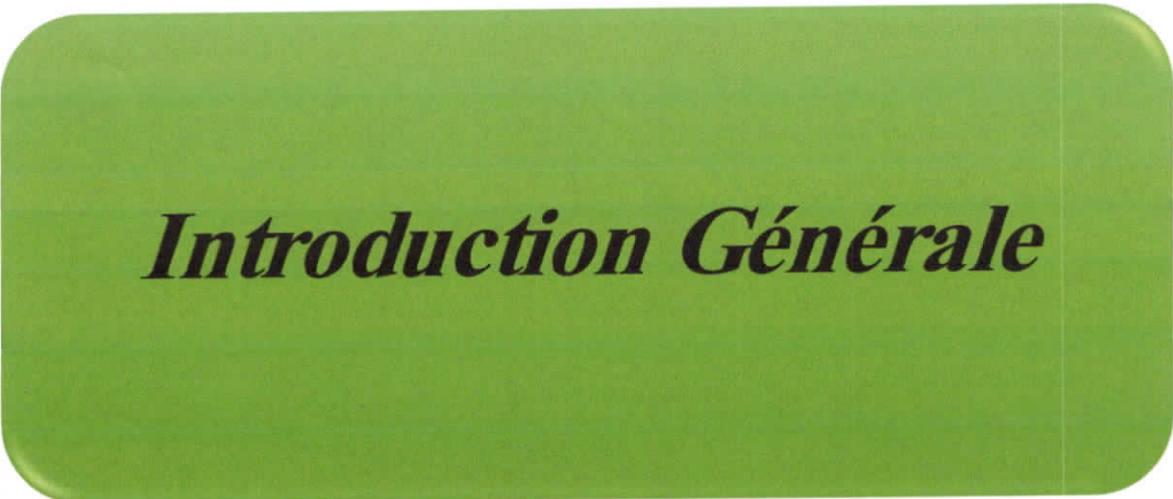
FEA	Finite Eliment Analysis
-----	-------------------------

M

MEF	Méthode des Eléments Finis
MVF	Méthode des Volumes Finis

R

RDM	Résistance Des Matériaux
-----	--------------------------

A green rounded rectangular box with a slight shadow, containing the text 'Introduction Générale'.

Introduction Générale

Il existe plusieurs techniques permettent de résoudre les équations aux dérivées partielles. On pense par exemple aux méthodes de différence finies, de volume finis, aux méthodes spectrales, etc. On peut sans aucun doute affirmer que la plus largement répandue est la méthode des éléments finis. Cette popularité n'est pas sans fondement. La méthode des éléments finis est très générale et possède une base mathématique rigoureuse qu'est fort utile, même sur le plan très pratique. En effet, cette basse mathématique permet de prévoir jusqu'à un certain point la précision de notre approximation et même d'améliorer cette précision, via les méthodes adaptatives.

Le contrôle non destructif (CND) étant un moyen d'évaluer un aspect de la qualité des matériaux, est donc plus largement utilisés et voient ainsi leurs performances à l'épreuve d'une grande variété de problème. En ingénierie, les données expérimentales, à elles seules, ne permettent pas d'accéder dans certains cas, à toutes les informations dont on a besoin. On a alors recours à des méthodes numériques permettent d'exploiter les mesures expérimentales. Il est nécessaire d'introduire des techniques numériques de résolution.

Par ailleurs, la simulation numérique par éléments finis d'un problème de CND nécessite un bon maillage. Un tel maillage doit d'une part bien décrire la géométrie du domaine d'étude et d'autre part être bien adapté aux phénomènes physiques qu'il doit décrire (variation du champ au voisinage du défaut, dans l'épaisseur de peau, . . .). L'obtention d'un tel maillage en 2D nécessite souvent un investissement personnel important de la part de l'utilisateur du logiciel de simulation. Des procédures de maillage adaptatif peuvent alors être utilisées pour réduire de manière significative l'intervention humaine.

Nous intéressons dans notre projet à l'application de la méthode des éléments finis au contrôle non destructif. Elle est utilisée pour la détermination des caractéristiques des matériaux et la détection des défauts ou pour localiser des chargements de la propriété de ces matériaux. Toutefois, si la méthode des éléments finis est appréciable pour sa souplesse, elle peut demander un temps de préparation (essentiellement : le maillage) et de calcul conséquent et faire appel à un niveau de compétence important de la part de l'opérateur. Dans ce contexte, nous avons étudié différents moyens permettant de simplifier le traitement par la MEF d'un problème de CND. Ces travaux portent principalement sur la prise en compte simplifiée d'un défaut fin et l'adaptation de maillage.

Notre objectif principal est l'application de la méthode des éléments finis ou contrôle non destructif.

Pour cela nous avons organisé notre mémoire en trois chapitre :

Au premier chapitre, Le premier chapitre présente des généralités sur le CND. Les principales méthodes de CND sont rappelées, leur avantage, leur inconvénient, et leur domaine d'application.

Le second chapitre est comprendre bref historique de la MEF et les principes généraux des méthodes numérique sur ordinateur, les étapes d'analyse par la méthode des éléments finis, Les différents types et le choix de maillages et avantage, désavantage, domaine d'application.

Le troisième chapitre consacré a l'expérience de contrôle non destructif (contrôle par ultrason par immersion et par contact), et la simulation des plaque carrée et ronde des différents matériaux par logiciel de simulation RDM6.

Enfin, nous tirons les principales conclusions qu'occasionne ce travail.

Chapitre I

*Généralité sur le contrôle
non destructif*

I.1 Introduction

Le Contrôle Non Destructif (CND) a pour objectif de vérifier l'intégrité d'une pièce ou d'un matériau sans l'endommager en détectant d'éventuels défauts présents dans celui-ci. Dans différents secteurs industriels (aéronautique, nucléaire, automobile, métallurgie...), le CND est primordial afin de garantir la sûreté de fonctionnement des systèmes critiques. Une grande variété de méthodes existe et permettent de détecter des anomalies internes ou de surface, de déterminer la composition ou la structure des matériaux. Le CND peut être utilisé en production, lors de la mise en service ou lors d'opérations de maintenance.

Le contrôle par ultrasons est une méthode d'examen relativement récente dont les premières applications industrielles ont été réalisées, à titre expérimental, à la veille de la seconde guerre mondiale soit vers 1935. En raison de la lente évolution du matériel de contrôle tributaire des progrès de l'électronique, l'essor du contrôle par ultrasons n'apparut qu'à partir de 1955 environ.

Depuis, cette méthode de contrôle constitue un puissant outil d'investigation. Elle présente à l'heure actuelle un vaste champ d'application qui s'étend aux matériaux métalliques, plastiques ou composites et aux milieux à structure hétérogène tels les bétons.

Dans la suite de ce chapitre, nous allons présenter quelques notions sur les ultrasons, qu'il est nécessaire de rappeler tels que la génération de l'onde et sa propagation, les phénomènes qui peuvent apparaître à la rencontre d'une interface entre deux milieux différents, ainsi que les différentes techniques utilisées par le contrôle non destructif.

I.2 Généralités sur le contrôle non destructif

Le contrôle non destructif est un ensemble de méthodes d'investigation qui permet d'examiner l'état des pièces mécaniques sans les détruire, ainsi, il permet de savoir leur aptitude à remplir la fonction à laquelle elles sont destinées.

Quelle que soit la méthode adoptée, on peut représenter la mise en œuvre d'un système CND suivant le synoptique de la figure I.1.

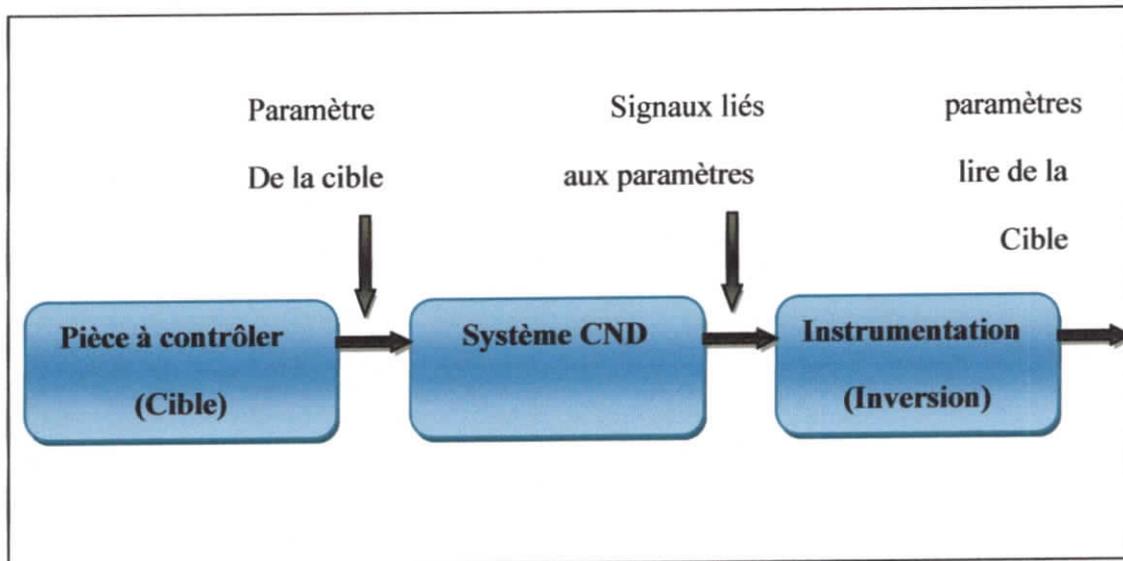


Figure I.1 - Système de Contrôle Non Destructif.

La cible se caractérise par un ensemble de paramètres que l'on va chercher à estimer afin de former un diagnostic d'intégrité. La mise en œuvre d'un système CND adéquat va permettre de produire un certain nombre de signaux qui sont fonction des paramètres recherchés. Une étape <<d'inversion>>, plus ou moins compliquée, est bien souvent nécessaire afin de retrouver les paramètres initiaux de la pièce [1].

I.2.1 Domaine d'application du contrôle non destructif

Le contrôle non destructif est très utilisé dans :

- L'industrie automobile (contrôle des blocs moteurs).
- L'industrie navale (contrôle des coques).
- L'aéronautique et l'aérospatiale (poutres, ailes d'avion, nombreuses pièces moteurs, trains d'atterrissage).
- L'industrie de l'énergie (réacteurs, chaudières, tuyauterie, turbines).
- Le ferroviaire en fabrication et en maintenance notamment pour les organes de sécurité (essieux, roues).
- Autres (fabrication de mousquetons d'escalade, ouvrages d'art...).

Et en règle générale dans tous les secteurs produisant :

- Des pièces à cout de production élevé en quantité faible (nucléaire, pétrochimique...)
- Des pièces dont la fiabilité de fonctionnement est critique (BTP, nucléaire, canalisation de gaz...) [2].

I.2.2 Classement des défauts détectés en CND

Le terme défaut est ambigu, relative et peu précis, mais sa connotation négative évoque bien le rôle que joue le contrôle non destructif dans la recherche de la qualité. En fait, détecter un défaut dans une pièce, c'est physiquement, mettre en évidence une hétérogénéité de matière, une variation locale de propriété physique ou chimique préjudiciable au bon emploi de celle-ci. Les défauts peuvent être classés en deux grandes catégories liées à leur emplacement : les défauts de surface, les défauts internes [3].

I.2.2.1 Les défauts de surface

Ces défauts sont accessibles à l'observation directe mais pas toujours visibles à l'œil nu, l'anomalie est localisée en surface externe de la pièce à contrôler. Les techniques non magnétoscopie et les courants de Foucault [3 4].

I.2.2.2 Les défauts internes

Ce sont des hétérogénéités de natures, de formes, de dimensions extrêmement variées, l'anomalie est localisée dans le volume de la pièce à contrôler. Les techniques non destructives sensibles et appropriée pour détecter ce type de défaut, telles que les radiographies, les ultrasons [3 4].

I.3 Techniques de contrôle non destructif

Il existe plusieurs techniques basées surtout sur le traitement des signaux et les données recueillies par les capteurs, chacune présente certains avantages et inconvénients :

I.3.1 Examen visuel

Le contrôle visuel est une technique essentielle et la plus ancienne procédure lors du contrôle non destructif.

L'examen visuel nécessite un bon éclairage localisé sur les régions suspectes. Les résultats prospères dépendent de la compétence de l'opérateur, du bon nettoyage, illumination adéquate de la zone inspectée ainsi la qualité de l'instrument optique. Ces facteurs sont encore importants aujourd'hui mais le matériel est devenu beaucoup plus sophistiqué. Habituellement, l'inspection visuelle ne peut pas être utilisée pour vérifier des résultats de test ni peut être utilisé pour remplacer d'autres méthodes de CND. Cependant quand l'examen visuel direct ne peut pas être fait, les instruments optiques sophistiqués peuvent être utilisés pour fournir une inspection éloignée de régions critiques [5].

a. Avantages

- Examen simple, rapide et pas coûteux.
- Souplesse d'inspection.

b. Inconvénients

- Détection limitée aux défauts superficiels.
- La surface doit être propre.
- Pas d'interruption des parcours optiques entre l'œil et la pièce examinée.

c. Domaine d'application

Le contrôle visuel est une méthode largement utilisée dans tous les secteurs de l'industrie, essentiellement en contrôle de procédé ou en complément d'autres méthodes du CND. Il permet la détection et surtout la caractérisation de tous types de défauts présents en surface d'une pièce, à la condition que le matériel d'inspection mis en œuvre ait des caractéristiques compatibles avec l'application (sensibilité, profondeur de champ, précision de positionnement en particulier). Il est utilisable sur tous types de matériaux, tant en fabrication qu'en maintenance.

I.3.2 Examen par ressuage

Cet essai permet de déceler les défauts qui apparaissent à la surface. Il est appliqué dans le cas des matériaux non magnétiques (alliages à base d'Al. De Cu. De Ti, aciers inoxydables, etc.). Son mode d'emploi est très simple. La pièce à examiner est badigeonnée de pétrole léger, coloré ou contenant une poudre fluorescente. Au lieu du pétrole léger tout autre liquide pénétrant, c.-à-d. de faible tension superficielle, peut aussi rendre le même service.

Après pénétration capillaire, la surface est essuyée. Pour le cas d'un liquide fluorescent la résurgence du liquide partir des fissures et des porosités est rendu visible par un éclairage aux rayons ultraviolets. Les fissures contenant du liquide coloré sont rendues visibles par une couche de talc, qu'on applique sur la pièce l'aide d'un spray, qui ensuite absorbe le liquide coloré en se teignant. L'observation, dans ce cas, se fait à l'œil nu. Les traces colorées indiquent les endroits où il y a des fissures [1].

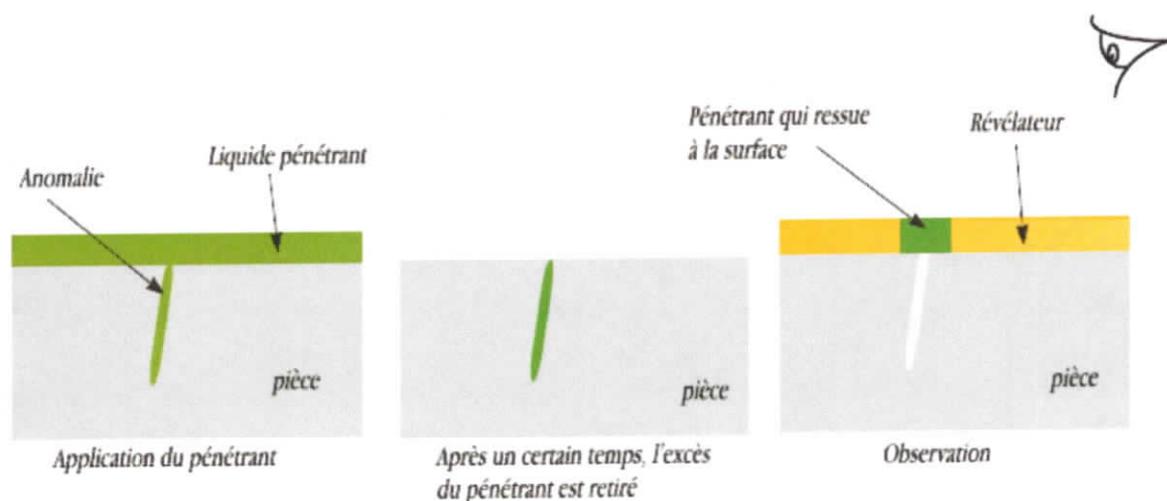


Figure I.2 – Principe du ressuage.

a. Avantages

Les avantages majeurs de contrôle par ressuage sont :

- Simple à mettre en œuvre et relativement sensible aux fissures ouvertes (et en surface).
- Peut être effectué sur toutes sortes de matériaux non poreux et non rugueux géométrie et dimensions quelconques, à condition toutefois qu'ils ne réagissent pas chimiquement ou physiquement (absorption) avec le pénétrant.
- Facilité de mise en œuvre (pour pénétration pré émulsionnée).

b. Inconvénients

- Il est nécessaire de faire un décapage et un dégraissage soigné avant l'inspection
- L'interprétation des résultats est subjective : Il est impossible de déterminer les dimensions exactes des défauts.
- Danger des solvants toxiques, corrosifs et inflammable [3 6].

c. Domaine d'application

Le domaine d'application du ressuage est très vaste, car le procédé est simple d'emploi et permet de détecter la plupart des défauts débouchant en surface sur les matériaux métalliques non poreux, ainsi que les autres matériaux, à condition toutefois qu'ils ne réagissent pas chimiquement ou physiquement avec le pénétrant [4].

I.3.3 Contrôle par Magnétoscopie

Cette technique de contrôle non destructif n'est utilisable que pour les matériaux ferromagnétiques. Elle consiste à soumettre la pièce à un courant électrique créé par un flux magnétique (continu ou alternatif) de valeur définie en fonction de la pièce (les champs doivent être assez suffisants pour saturer le voisinage du défaut). Lors de la présence d'un défaut sur son chemin, le flux magnétique est dévié et crée une fuite. Us sont ensuite généralement visualisés à l'aide d'un produit indicateur porteur de limaille de fer. Figure I.3 [1].

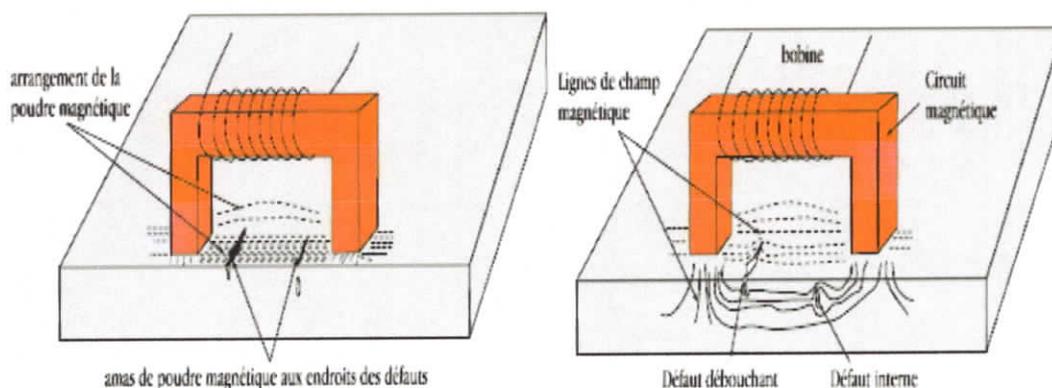


Figure I.3 - Le contrôle magnétique.

a. Avantages

- Simple, peu coûteux et rapide.
- Facilité à mettre en œuvre manuellement.
- Économique.
- Détection des défauts débouchant et sous-jacents [7].

b. Inconvénients

Cette méthode à champ magnétique continu ne s'applique qu'à des matériaux ferromagnétiques.

- La sensibilité de détection des défauts dépend en effet de la nature, de la direction et de l'intensité de la magnétisation de la pièce.

c. Domaine d'application

La magnétoscopie permet de détecter les défauts de densité débouchant en surface sur des matériaux ferromagnétiques tels que les aciers ordinaires au carbone, aciers ferriques ordinaires et au chrome (13% de chrome), fontes, nickel, cobalt [8].

La magnétoscopie est utilisée pour le contrôle :

- Des pièces moulées : Criques situés entre les raccordements, réseaux de fissures superficielles.
- Des pièces forgées : Criques correspondant à des déchirures superficielles, tapures ou fissures survenant au refroidissement.
- Les fissures de fatigue peuvent être détectées si les conditions sont favorables. Les fissures de corrosion sous tension sont généralement bien décelées ainsi que les fissures d'origine thermique des soudures.

I.3.4 Contrôle par Courant de Foucault

Le contrôle par courant de Foucault est appliqué sur les matériaux métalliques conducteurs, est basé sur le fait que si une bobine est alimentée par un courant variable et apportée à proximité d'une cible conductrice, génère de tels courants induits qui, créant eux-mêmes un flux magnétique qui s'oppose au flux générateur, modifient ainsi l'impédance de cette bobine.

La présence d'une anomalie dans la pièce contrôlée perturbe la circulation des courants de Foucault, entraînant une variation de l'impédance apparente du capteur, c'est de cette dernière que découle le principe même du contrôle [3].

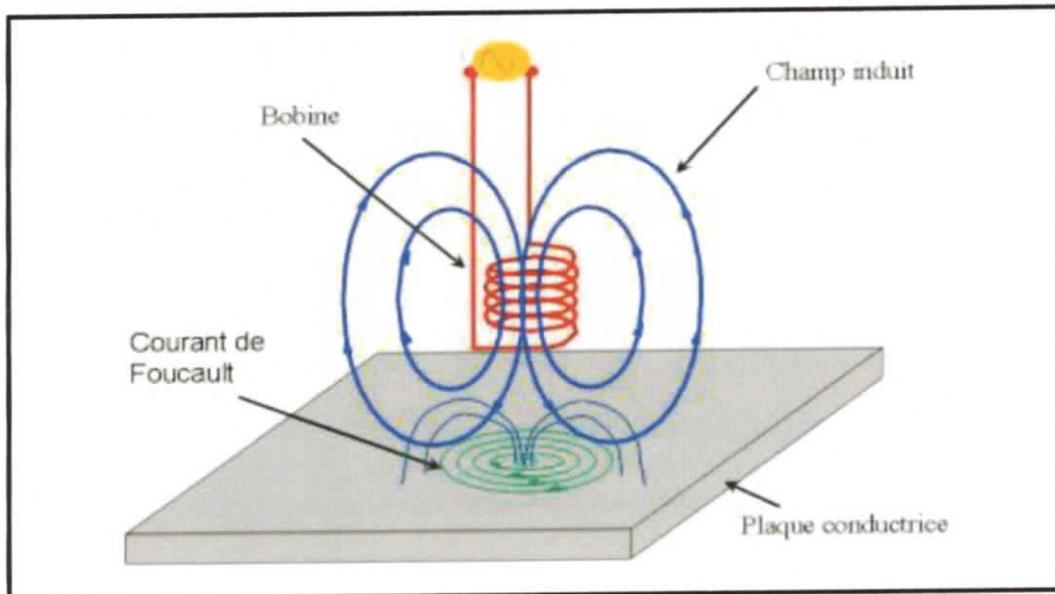


Figure I.4 - Principe du CND par courants de Foucault.

a. Avantages

Les avantages majeurs de cette technique sont : [9]

- Cout faible, Portable.
- Sensibilité aux petites Fissures ou autres défauts de surface.
- L'investigation donne des résultats immédiats et ne nécessite pas de corrélation.
- Possibilité de contrôle des pièces longues et profilées.
- Pas des conditions de sécurité ni pour l'opérateur ni pour l'environnement.
- Cette technique se différencie par rapport aux autres par le fait qu'elle ne nécessite pas de contact direct avec la surface de la cible. Cette caractéristique constitue un avantage important pour le domaine du contrôle non destructif.

b. Inconvénients

- Méthode utile que pour les défauts externes seulement.
- Limité aux matériaux conducteurs d'électricité.
- Sensible à de nombreux paramètres dont il faut maîtriser la variation [3].

c. Domaine d'application

Les techniques de contrôle utilisant les courants de Foucault sont utilisés pour les opérations suivantes [8] :

- ❖ Détection des effets de la chaleur sur alliages d'aluminium comme par exemple la surchauffe de composants aéronautiques.
- ❖ Vérification qu'un traitement thermique est effective par émission de la dureté du matériau.

I.3.5 Contrôle par radiographie

Le principe de la radiographie est le même que pour le domaine médical. La méthode met à profit l'absorption par la matière des rayonnements électromagnétiques ionisants. L'examen de la structure ou de l'état interne d'un objet par radiographie consiste à le faire traverser par un rayonnement électromagnétique de très courte longueur d'onde (rayon X, ou γ) et à recueillir le rayonnement résiduel non absorbé sur un récepteur approprié, un film dans la plupart des cas [9].

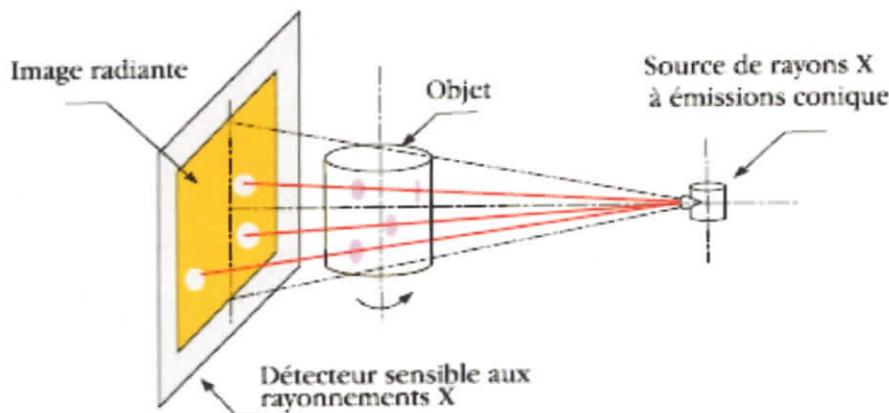


Figure I.5 - Principe de la radiographie.

De par son principe, la radiographie ne permet pas d'avoir l'information sur la localisation du défaut en profondeur dans la pièce examinée. Il faut pour cela réaliser plusieurs clichés sous des angles de tir différents, ce qui n'est pas toujours possible. Un autre moyen est la tomographie industrielle. Elle a le même principe que le scanner médical. Elle consiste à reconstruire une coupe de la pièce par des Algorithmes complexes à partir d'une succession d'acquisitions suivant des angles différents. La répétition de ce

processus selon différentes hauteurs de tir permet d'obtenir une image 3D virtuelle complète de l'objet.

L'essor de cette méthode est essentiellement dû aux progrès de l'informatique et à l'augmentation des capacités de traitement, que ce soit dans le domaine médical ou industriel.

Le champ d'application de la radiographie est très vaste ; c'est en effet la technique retenue lorsqu'il s'agit de mettre clairement en évidence et de dimensionner des hétérogénéités à l'intérieur des objets de toute nature, aussi bien au stade de la fabrication qu'à celui des contrôles de maintenance.

a. Avantages

Les avantages majeurs des techniques radiographiques X et γ , sont [1].

- Contrôle des objets de forme compliquée.
- Garantir, dans une certaine mesure, la fiabilité de l'examen et le respect des procédures.
- Facile à transporter (générateurs de rayons X de faibles énergies, appareils de radioactive portatifs).

b. Inconvénient

- Coût de mise en œuvre des dispositifs et procédures de protection du personnel.
- Réglementation souvent très contraignante (transport et stockage des sources radioactives,).

c. Domaine d'application

Le domaine d'application de la radiographie industrielle est très vaste, c'est en effet souvent la technique retenue lorsqu'il s'agit de mettre clairement en évidence et de au stade de la fabrication qu'à celui des contrôles de maintenance.

I.3.6 Contrôle par Thermographie

La thermographie repose sur l'étude de la diffusion de la chaleur dans la cible à contrôler. Une quantité de chaleur est une quantité d'énergie stockée dans la matière et la température en est un indicateur mesurable. La thermographie consiste en l'interprétation des cartes thermiques (thermo grammes) des surfaces observées. Une distinction est faite

entre la thermographie passive qui résulte de la simple observation des gradients thermiques sur une pièce, et la thermographie active lorsqu'une perturbation thermique a été volontairement générée pour le contrôle (par une source laser par exemple). Les discontinuités dans la pièce se traduisent par des différences de température sur l'image. L'acquisition des images thermiques s'obtient alors à l'aide d'une caméra thermographique [9 4].

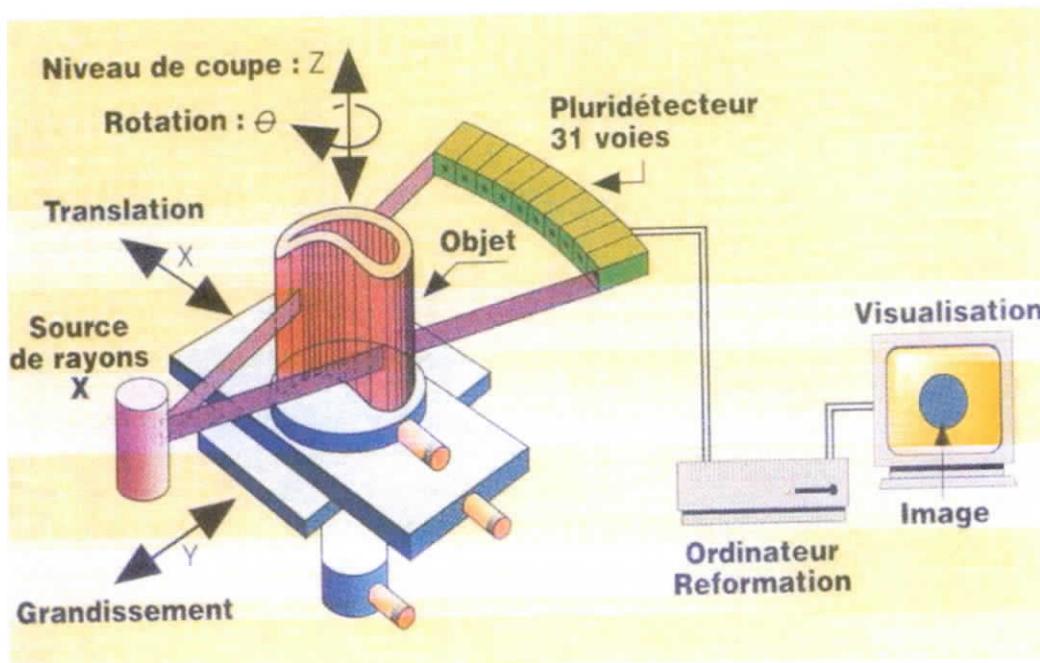


Figure I.6 - Principe de la tomographie.

a. Avantages

- Méthode relativement rapide et sans contact.
- Grande sensibilité de l'analyse de l'image.
- Image instantanée.

b. Inconvénients

- Méthode coûteuse en investissement.
- Méthode limitée dans ses applications.
- L'interprétation des mesures pas toujours facile, surtout pour identifier la nature des défauts.

c. Domaine d'application

La thermographie infrarouge permet de réaliser de nombreuses applications dans les secteurs suivants en entreprises et industries :

- Installations électriques.
- Enveloppe des bâtiments.
- Visualisation des canalisations.
- Contrôle des machines mécaniques.
- Détection de fuites.
- Contrôle thermique des installations de chauffage et de vapeur [7].

I.4 Contrôle non destructif par Ultrasons

Les ultrasons sont des vibrations mécaniques qui se propagent dans la matière. Le principe consiste à émettre une onde ultrasonore (par un transducteur) qui se propage dans la pièce à contrôler et se réfléchit, à la manière d'un écho, sur les obstacles qu'elle rencontre (défauts, limites de la pièce). Les échos sont analysés sur un écran ou traités dans une chaîne de mesure. Le signal est maximal lorsque le défaut est perpendiculaire aux ondes émises (figure I.7).

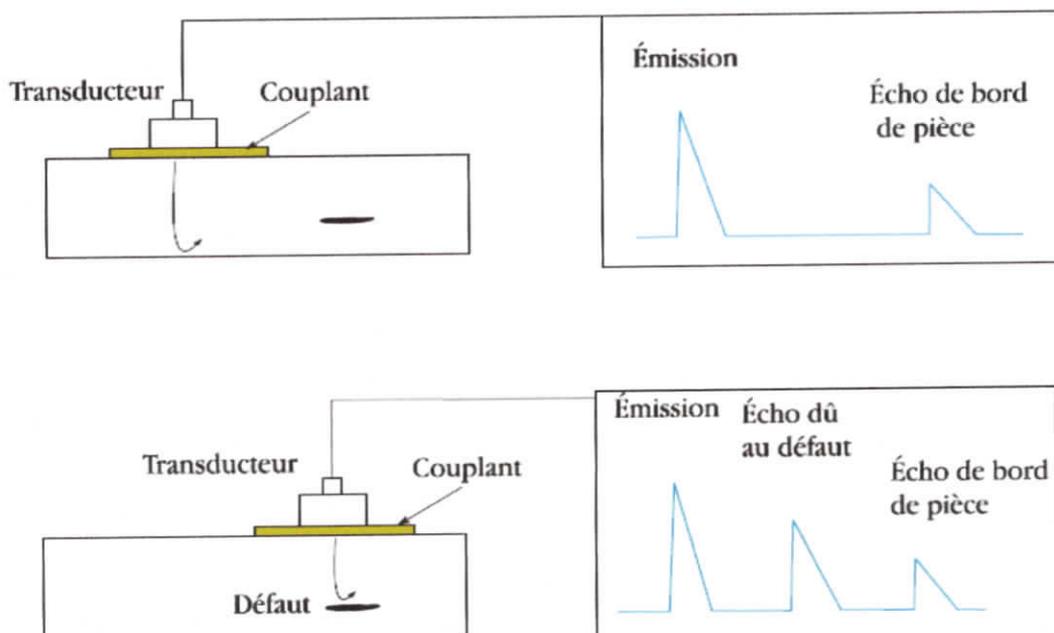


Figure I.7 - Principe des ultrasons.

Le contact entre le transducteur et la cible n'est jamais parfait ; il existe une couche d'air les séparant. La quasi-totalité de l'énergie émise par le transducteur à l'interface air-matériau ne pénètre pas à l'intérieur du matériau. Il y a ainsi nécessité de déposer un couplant (eau, huile par exemple) entre le transducteur et le matériau [7].

I.4.1 Propagation des ondes ultrasons

L'onde ultrasonore déformation produit en un point d'un milieu, élastique, homogène et isotrope, se transmet de proche en proche dans ce milieu à une vitesse finie. Ce mouvement ondulatoire est régi par une équation aux dérivées partielles qui s'écrit dans le cas d'une onde plane se propageant suivant axe des X sous la forme :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \quad (I.1)$$

Où :

V : la vitesse de propagation de l'onde.

U : l'amplitude d'onde.

Le point essentiel de la propagation ultrasonore est l'existence de deux modes de vibrations qui se propagent à des vitesses différentes : vibration longitudinale et vibration transversale. [1]

- Les ondes longitudinales (ou de compression) pour lesquelles la vibration mécanique des particules est parallèle à la direction de propagation de l'onde.
- Les ondes transversales (ou de cisaillement) pour lesquelles la vibration mécanique des particules est perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde (uniquement dans les solides ou matériaux très visqueux). [7]

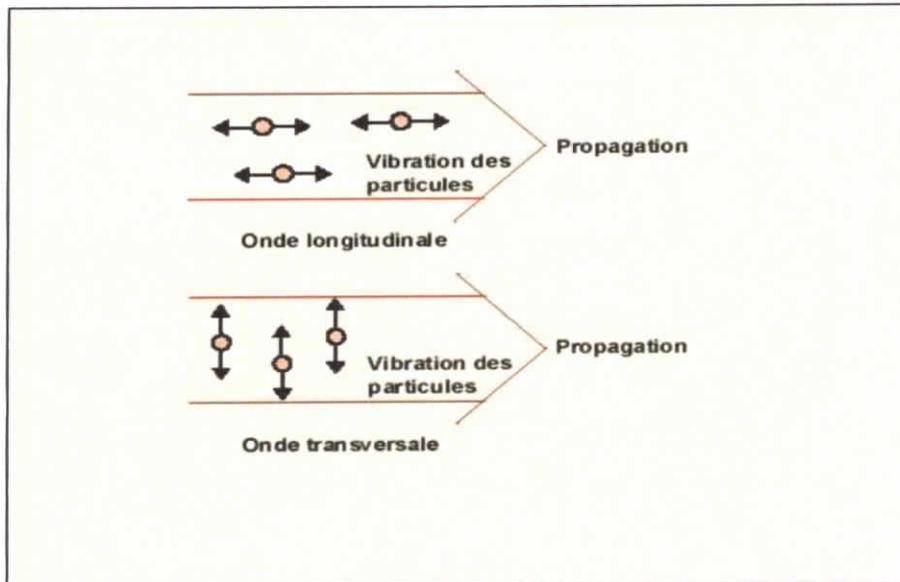


Figure I.8 - Natures des ondes.

D'autres types d'ondes sont parfois utilisés. On peut citer :

- Les ondes de surfaces qui se propagent à la surface des pièces sur une épaisseur correspondante approximativement à une longueur d'onde. Le mouvement des particules est très complexe. Les ondes de Rayleigh sont un cas particulier (les particules ont un mouvement elliptique).
- Les ondes de plaques ou ondes de Lamb qui se développent dans un matériau de faible épaisseur (Quelques longueurs d'onde).

Ces ondes se propagent à des vitesses différentes en fonction des matériaux (tableau I.1).

	c_L [m/s] (ondes longitudinales)	c_T [m/s] (ondes transversales)
Air	340	non transmise en raison de l'absorption excessive
Eau	1480	
Aluminium	6300	3080
Fe et aciers	5900	3220
Laiton	4400	2120

Tableau I.1 - Vitesse de propagation de différents matériaux.

I.4.2 Caractéristiques générales des ondes ultrasonores

Ce mode de contrôle utilise des ondes acoustiques de fréquence comprise entre 0,5 MHz et 10 à 12 MHz pour les contrôles "classiques". Des fréquences plus élevées (jusqu'à 200 MHz) sont employées pour des contrôles "spécifiques".



Figure I.9 - Les différents types de sons suivant une fréquence.

- **La longueur d'onde**

La longueur d'onde est la distance séparant deux molécules successives dans le même état vibratoire (même pression et vitesse acoustique) ou encore la distance parcourue par l'onde pendant une période [1].

Dans un milieu donné, la fréquence et la longueur d'onde sont liées par la formule suivante :

$$\lambda = c/f = f.T \quad (1.2)$$

Avec :

c : est la célérité de propagation de l'onde en mètre par seconde ($m.s^{-1}$).

f : fréquence.

λ : longueur d'onde.

- **L'impédance acoustique**

Chaque milieu est caractérisé par une résistance au passage du son appelée impédance acoustique. Dans le cas général, elle correspond au rapport entre la pression acoustique en un point donnée et la vitesse de vibration des molécules en ce point (il ne s'agit pas de la célérité du son).

Dans le cas d'une onde plane, il est possible d'estimer une valeur de l'impédance acoustique par la formule :

$$Z = \sqrt{\frac{\rho}{x}} = \rho \cdot c \quad (1.3)$$

Où :

Z : est l'impédance acoustique caractéristique du milieu ($\text{kg.m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$).

ρ : la masse volumique du milieu (kg.m^{-3}).

c : la célérité du son (m.s^{-1}).

- **Puissance acoustique**

La puissance acoustique est l'énergie délivrée par une source sonore pendant un intervalle de temps donné, exprimée en watt. Elle est définie par la formule :

$$P = E / \Delta t \quad (1.4)$$

Où :

E : l'énergie acoustique en joules (J).

Δt : un intervalle de temps (s).

- **Intensité acoustique (ou puissance surfacique)**

L'intensité acoustique correspond à l'énergie qui traverse chaque seconde une surface unitaire perpendiculaire à la direction des ondes sonores. Dans le cas d'une source d'ondes sphériques exprimée en Watt par mètre carré. Dans le cas d'une source d'ondes sphériques, elle est liée à la puissance par la formule :

$$I = \frac{W}{4\pi r^2} \quad (1.5)$$

Où :

W : la puissance acoustique (W).

r : la distance entre la source et un point de mesure (m).

- **Pression acoustique**

La pression p exprimée en Pascal (Pa) est une contrainte appliquée à la surface d'un corps. Elle correspond à une force par unité de surface. Au repos, les molécules sont sou

Mises à la pression atmosphérique. Lorsque le milieu est perturbé, le mouvement des molécules engendre des variations locales de la pression ; c'est la pression acoustique. La pression et l'intensité acoustique sont liées par la formule :

$$I = \frac{p^2}{\rho c} \quad (1.6)$$

Où :

P = pression acoustique.

L'intensité (I) s'exprime en w/cm^2

- **Vitesse de propagation de l'onde (la célérité)**

Les réactions d'un milieu soumis à des pressions et des dilatations sont étroitement dépendantes des états du milieu et de ses propriétés élastiques. L'onde acoustique se propage donc à des vitesses différentes en fonction de certaines caractéristiques intrinsèques du milieu qu'elle traverse : la compressibilité (c'est-à-dire l'aptitude à reprendre la forme originale après déformation) et la masse volumique. Ces deux composantes sont influencées par plusieurs paramètres tels que la température, la pression et d'éventuelles modifications du milieu. Plus ces deux composantes seront faibles, plus la vitesse de propagation de l'onde qu'on appelle célérité sera importante. Cette dernière est donnée par la formule suivante :

$$c = Z/\rho \quad (1.7)$$

I.4.3 Changement du milieu de propagation

Les ondes ultrasonores se propagent en ligne droite. Lorsqu'il y a un changement de milieu de propagation, on observe, comme en optique, des phénomènes de réfraction et de réflexion [7].

Caractérisation des milieux acoustiques :

On caractérise les milieux traversés par leur impédance acoustique Z qui est égale au produit de leur masse volumique ρ par la vitesse de l'onde utilisée v .

Par exemple pour l'acier une onde longitudinale :

$$\rho = 7830 \text{ kg/m}^3$$

$$v = 5920 \text{ m/s}$$

$$Z = 46472000 \text{ kg/m}^2\text{s}$$

a) Cas de l'incidence normale

On constate une division de l'onde incidente en une onde réfléchie et une onde transmise.

On définit le coefficient de transmission α_t et le coefficient de réflexion α_r par :

$$t = \frac{\text{nergie.transmise}}{\text{nergie.incident}} = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

$$r = \frac{\text{nergie.reflichie}}{\text{nergie.incident}} = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2$$

Avec :

Z_1 Impédance du matériau 1

Z_2 Impédance du matériau 2

b) Cas de l'incidence oblique :

Dans ce cas, les ondes restent dans le plan défini par la normale à l'interface et l'onde incidente. Il faut noter qu'à l'interface les ondes changent de type (Une onde longitudinale pouvant donner naissance à une onde transversale). La direction des ondes réfléchies et transmises est donnée par la loi de Snell.

$$\frac{\sin i}{v_i} = \frac{\sin \alpha_{l1}}{v_{l1}} = \frac{\sin \alpha_{t1}}{v_{t1}} = \frac{\sin \beta_{l2}}{v_{l2}} = \frac{\sin \beta_{t2}}{v_{t2}}$$

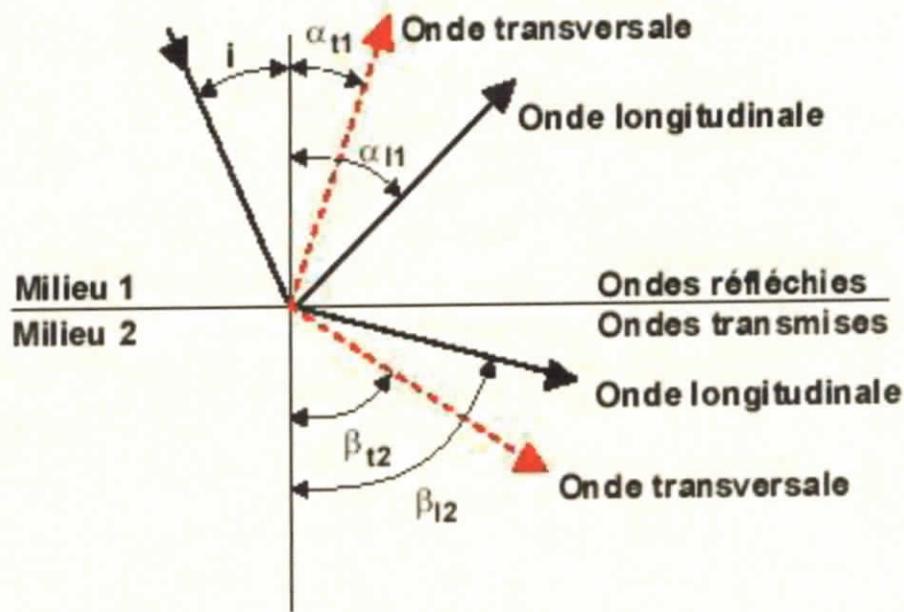


Figure I.10 - Réflexion et réfraction des ondes.

a. Avantages

- Détection précise de la position des défauts dans le volume de la pièce.
- Grande sensibilité surtout pour les défauts plans correctement orientés.
- Souplesse d'utilisation (Utilisation sur chantier aussi bien qu'en contrôle automatisé).

b. Inconvénients

- Nécessité d'utiliser un milieu de couplage entre le palpeur et la pièce.
- Interprétation de la nature des défauts et de leur dimension délicate nécessitant un Personnel qualifié.
- Mise en œuvre difficile sur certains matériaux (Fonte par exemple).
- Sensibilité fortement fonction de l'orientation du défaut vis à vis de la direction. [7]

I.5 Conclusion

Après avoir rappelé brièvement la nature, la mise en œuvre et les domaines d'application du contrôle non destructif, nous avons évoqué les techniques principales les plus utilisées de détection des défauts suivies par leurs avantages et inconvénients.

Grace aux caractéristique des ultrasons, on peut avoir beaucoup d'information sur les propriétés des matériaux, ainsi les ultrasons sont très utilisés dans le domaine de contrôle non destructif (CND) où il y a plusieurs techniques à base des ultrasons.

Dans le deuxième chapitre nous allons étudier les différents moyens permettant le traitement par la méthode des éléments finis d'un problème de contrôle non destructif.



Chapitre II

Théorie des éléments finis

II.1 Introduction

Les codes éléments finis font maintenant partie des outils couramment utilisés lors de la conception et à l'analyse des produits industriels. Les outils d'aide à la modélisation devenant de plus en plus perfectionnés, l'utilisation de la méthode des éléments finis s'est largement développée et peut sembler de moins en moins une affaire de spécialistes. Si l'utilisation de la méthode se démocratise de par la simplicité croissante de mise en œuvre, la fiabilité des algorithmes et la robustesse de la méthode, il reste néanmoins des questions essentielles auxquelles l'ingénieur devra répondre s'il veut effectuer une analyse par éléments finis dans de bonnes conditions. Il lui faudra :

- Formaliser les non-dits et les réflexions qui justifient les choix explicites ou implicites de son analyse du problème.
- Évaluer la confiance qu'il accorde aux résultats produits.
- Analyser les conséquences de ces résultats par rapport aux objectifs visés.
- L'objectif de ce chapitre est de présenter les principes de base de la méthode des éléments finis en insistant sur les différents types et le choix de maillage.

II.2 Historique

L'idée fondamentale derrière la méthode des éléments finis remonte loin en arrière. Les grecs par exemple avaient reconnu que l'on peut approcher la solution d'un problème complexe en le divisant en problèmes plus simples. On peut par exemple approcher le périmètre d'un cercle en calculant le périmètre d'un polygone à n côtés, pourvu que n soit suffisamment grand. Il suffit alors de connaître la longueur d'un segment de droite, problème beaucoup plus simple que celui de la longueur d'un arc de cercle. [10]

En 1909, Ritz a développé une méthode efficace pour la solution approximative des problèmes dans la mécanique des solides déformables. Il comprend une approximation de l'énergie fonctionnelle par les fonctions connues avec des coefficients inconnus. La minimisation de la fonction par rapport à chaque inconnu conduit au système d'équations à partir duquel les coefficients inconnus peuvent être déterminés. L'une des principales restrictions dans la méthode Ritz est que les fonctions utilisées doivent satisfaire aux conditions limites du problème.

En 1943, Courant a considérablement augmenté les possibilités de la méthode Ritz en introduisant les fonctions linéaires spéciales définies sur les régions triangulaires et appliqué

la méthode de solution des problèmes de torsion. Comme inconnues, les valeurs des fonctions dans les points de nœud des régions triangulaires ont été choisies. Ainsi, la principale restriction des fonctions de Ritz - une satisfaction des conditions aux limites a été éliminée. La méthode de Ritz conjointement avec la modification de Courant est similaire avec MEF proposée de manière indépendante par Clough plusieurs années plus tard, présentant pour la première fois en 1960 le terme "élément fini" dans le document "La méthode des éléments finis dans l'analyse du stress plan". La principale raison de la large diffusion de MEF en 1960 est la possibilité d'utiliser les ordinateurs pour le grand volume de calcul requis par MEF. Cependant, Courant n'avait pas cette possibilité en 1943.

Une contribution importante a été apportée au développement de la MEF par les journaux d'Argyris, Turner, Martin, Hrennikov et beaucoup d'autres. Le premier livre sur MEF, qui peut être examiné en tant que manuel, a été publié en 1967 par Zienkiewicz et Cheung et appelé: « La méthode des éléments finis dans la mécanique des structures et des continus ». Ce livre présente l'interprétation large de la méthode et son applicabilité à tous les problèmes de terrain généraux. Bien que la méthode ait été largement utilisée précédemment dans le domaine de la mécanique des structures, elle a été appliquée avec succès maintenant pour la solution de plusieurs autres types de problèmes d'ingénierie, comme la conduction de la chaleur, la dynamique des fluides, les champs électriques et magnétiques et d'autres [11].

Pour la méthode de Ritz, on part d'un problème posé dans un espace de dimension infinie.

On approche ensuite la solution du problème initial en cherchant une solution dans une suite Croissante de sous-espaces de dimension finie. Ces problèmes approchés sont en général beaucoup plus facile à résoudre. On peut de plus espérer que la solution du problème en dimension infinie peut être obtenue par un passage à la limite. Le choix des fonctions de base constituant ces espaces de dimension finie est délicat et initialement on les construisait globalement sur le domaine. C'est Courant qui eut l'idée d'introduire des fonctions à support local qui simplifient grandement leur construction.

La théorie derrière la méthode des éléments finis a pris une forme plus rigoureuse avec les Travaux de Strange et Fix.

La méthode des éléments finis est maintenant reconnue comme l'une des principales méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles (EDP) dans des géométries

quelconques, que ce soit en dimension un, deux ou trois. On trouve même des méthodes d'éléments finis en dimension 4, soit en espace-temps...

La méthode des éléments-finis (MEF) est une méthode d'approximation numérique de solutions de problèmes aux limites statiques ou dynamiques tels que :

- Diffusion thermique.
- Mécanique des milieux continus (solides et fluides).
- Électromagnétisme.

Mais en fait, absolument tous les problèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP) aux limites. Il s'agit, comme dans toutes les méthodes numériques, de trouver une approximation discrète. Pour faire bref, d'un problème différentiel aux limites linéaire, on trouve une formulation variationnelle associée équivalente, dont on calcule une approximation de la solution en projetant sur un espace de dimension finie, ce qui revient à résoudre au final un système linéaire.

L'appellation éléments finis vient de la décomposition du domaine d'étude en éléments ils sont souvent représentés par un maillage. (Voire figure II.1).

Historiquement, l'origine de la méthode peut se trouver dans les travaux de Fermat et Bernoulli (1743) avec le calcul des variations, puis il faut attendre le début du XXème siècle avec les progrès en analyse avec la méthode de Galerkin se basant sur des théorèmes de projection dans les espaces de Hilbert.

En 1943 Robert Courant introduit le principe vibrationnel avec des fonctions de base à support locaux ouvrant la voie à une division d'un domaine considéré en éléments.

Cependant ce n'est qu'avec le développement des ordinateurs que ces travaux trouvent leurs applications avec les travaux pionniers de Zienkiewicz et Argyris qui définirent la méthode en 1960.



Figure II.1 - Maillage.

Ce qui amène le succès de la méthode et sa puissance est l'apport du calcul matriciel, introduit par un ingénieur civil anonyme. La méthode connaît alors un développement fulgurant accompagné par les progrès de l'informatique.

La méthode des éléments-finis est une méthode puissante basée sur une théorie mathématique rigoureuse.

Aujourd'hui, les éléments-finis sont un outil majeur, incontournable en mécanique (fluides et solides, interactions, structures), et applicable dans de nombreux domaines impliquant des Problèmes d'EDP aux limites comme par exemple en mathématiques financières ou l'électromagnétisme.

De nombreux codes industriels (solveurs) existent et sont généralement couplés à un logiciel de CAO ou Computer Aided Design (CAD) en Anglais. Citons Ansys, Abaqus, Robot, LS-dyna, Feap, Code-Aster, Cast3M et bien d'autres [12].

II.3 Principes généraux des méthodes numériques sur ordinateur

Les mathématiciens utilisent couramment les notions d'infini et de continu. La solution exacte d'un problème d'équations différentielles ou aux dérivées partielles est une fonction continue. Les ordinateurs ne connaissent que le fini et le discret. Les solutions approchées seront calculées en définitive comme des collections de valeurs discrètes sous la forme de composantes d'un vecteur solution d'un problème matriciel.

En vue du passage d'un problème exact (continu) au problème approché (discret), on dispose de plusieurs techniques concurrentes : les différences finies, les éléments finis et les volumes finis. Chacune de ces trois méthodes correspond à une formulation différente des équations de la physique :

- Équilibre des forces en chaque point pour les différences finies.
- Minimisation de l'énergie ou principe des travaux virtuels pour les éléments finis.
- Loi de conservation et calcul des flux pour la méthode des volumes finis.

Examinons rapidement les avantages et les inconvénients de chacune de ces trois méthodes.

II.3.1 Différences finies

La méthode des différences finies consiste à remplacer les dérivées apparaissant dans le problème continu par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou nœuds du maillage.

a. Avantages

- Grande simplicité d'écriture et faible coût de calcul.

b. Inconvénients

- Limitation de la géométrie des domaines de calculs, difficultés de prise en compte des conditions aux limites et en général absence de résultats de majoration d'erreurs.

II.3.2 Éléments finis

La méthode des éléments finis consiste à approcher, dans un sous-espace de dimension finie, un problème écrit sous forme vibrationnelle (comme minimisation de l'énergie, en général) dans un espace de dimension infinie. La solution approchée est dans ce cas une fonction déterminée par un nombre fini de paramètres comme, par exemple, ses valeurs en certains points (les nœuds du maillage) [13].

a. Avantages

- Traitement possible de géométries complexes, détermination plus naturelle des conditions aux limites, possibilité de démonstrations mathématiques de convergence et de majoration d'erreurs.

b. Inconvénients

- Complexité de mise en œuvre et coût en temps de calcul et en mémoire.

II.3.3 Volumes finis

La méthode des volumes finis intègre, sur des volumes élémentaires de forme simple, les équations écrites sous forme de loi de conservation. Elle fournit ainsi de manière naturelle des formulations discrètes conservatives et est donc particulièrement adaptée aux équations de la mécanique des fluides : équation de conservation de la masse, équation de conservation de la quantité de mouvement, équation de conservation de l'énergie [13].

Sa mise en œuvre est simple si les volumes élémentaires sont des rectangles (ou des parallélépipèdes rectangles en dimension 3). Cependant la méthode des volumes finis permet d'utiliser des volumes élémentaires de forme quelconque, donc de traiter des géométries complexes, ce qui est un avantage sur les différences finies.

Il existe une grande variété de méthodes selon le choix de la géométrie des volumes élémentaires et des formules de calcul des flux. Par contre, on dispose de peu de résultats théoriques de convergence [13].

II.4 Définition de la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis (MEF) est une technique numérique pour résoudre les problèmes décrits par des équations différentielles partielles ou peuvent être formulées comme minimisation fonctionnelle. Un domaine d'intérêt est représenté comme un assemblage d'éléments finis. Les fonctions approximatives des éléments finis sont déterminées en termes de valeurs nodales d'un champ physique recherché.

Un problème physique continu est transformé en un problème d'élément fini discrétisé avec des valeurs nodales inconnues. Pour un problème linéaire un système d'équations algébriques linéaires devrait être résolu. Les valeurs à l'intérieur des éléments finis peuvent être récupérées en utilisant des valeurs nodales [14].

Cette méthode a été appliquée pour la première fois dans des problèmes liés à l'analyse des contraintes et depuis, elle a été étendue dans d'autres problèmes liés au milieu continu.

La méthode des éléments finis (abrégée MEF) représente une modalité d'obtenir une solution numérique correspondant à un problème spécifique. Cette méthode n'offre pas une formule pour une certaine solution et ne résout pas une classe de problèmes. La MEF est une méthode approximative à moins qu'un certain problème pourrait être extrêmement simple Conduisant ainsi à une formule exacte toujours valable.

Deux caractéristiques de la MEF méritent d'être mentionnées :

- ❖ L'approximation en partie des champs physiques sur les éléments finis fournit une bonne précision même avec des fonctions d'approximation simples (en augmentant le nombre d'éléments, nous pouvons obtenir toute précision).
- ❖ La localisation de l'approximation conduit à des systèmes d'équations éparses pour un problème discrétisé. Cela aide à résoudre des problèmes avec un très grand nombre d'inconnues nodales.

La méthode des éléments finis fait partie des outils de mathématiques appliquées. Il s'agit de mettre en place, à l'aide des principes hérités de la formulation

variationnelle ou formulation faible, un algorithme discret mathématique permettant de rechercher une solution approchée d'une équation aux dérivées partielles (ou ÉDP) sur un domaine compact avec conditions aux bords et/ou dans l'intérieur du compact. On parle couramment de conditions de type Dirichlet (valeurs aux bords) ou Neumann (gradients aux bords) ou de Robin (relation gradient/valeurs sur le bord).

Il s'agit donc avant tout de la résolution approchée d'un problème, où, grâce à la formulation variationnelle, les solutions du problème vérifient des conditions d'existence plus faibles que celles des solutions du problème de départ et où une discrétisation permet de trouver une solution approchée. Comme de nombreuses autres méthodes numériques, outre l'algorithme de résolution en soi, se posent les questions de qualité de la discrétisation :

- existence de solutions.
- unicité de la solution.
- stabilité.
- convergence [15].

II.4.1 Etapes d'analyse par la MEF

Les principales étapes de construction d'un modèle éléments finis sont les suivants [16] :

- Discrétisation du milieu continu en sous domaines.
- Construction de l'approximation nodale par sous domaine.
- Calcul des matrices élémentaires correspondant à la forme intégrale du problème.
- Assemblage des matrices élémentaires - Prise en compte des conditions aux limites.
- Résolution du système d'équation.

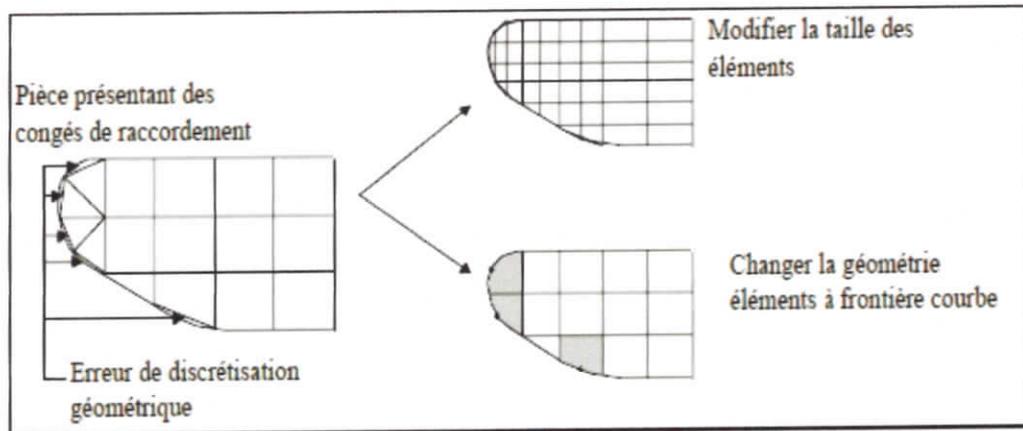
II.4.2 Discrétisation géométrique

Cette opération consiste à procéder à un découpage du domaine continu en sous domaines :

$$D = \sum_{e=1}^{ne} D_e \quad \text{telle que : } \lim_{\text{taille des } e \rightarrow 0} \left(\bigcup_e D_e \right) = D \quad (\text{II.1})$$

Il faut donc pouvoir représenter au mieux la géométrie souvent complexe du domaine étudié par des éléments de forme géométrique simple. Il ne doit y avoir ni recouvrement ni trou entre deux éléments ayant une frontière commune.

Lorsque la frontière du domaine est complexe, une erreur de discrétisation géométrique est Inévitable. Cette erreur doit être estimée, et éventuellement réduite en modifiant la forme ou en diminuant la taille des éléments concernés (figureII.2) [16].



FigureII.2 - Erreur de discrétisation géométrique.

II.4.3 Nœuds et éléments

Une description non-sophistiquée de la MEF pourrait être définie sous la forme suivante : la structure à analyser est divisée en plusieurs éléments (petites pièces comme celles qui forment un puzzle). Ces éléments sont ensuite reconnectés par l'intermédiaire des nœuds (Figure II.3). Ces nœuds sont « des punaises » ou « des points de colle » qui maintiennent les éléments dans un ensemble unitaire.[15]

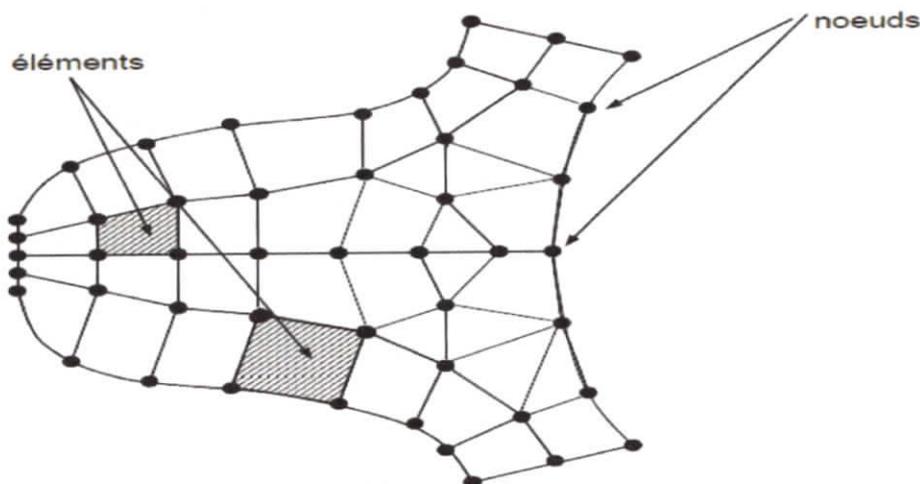


Figure II.3 - Discrétisation d'une structure en nœuds et éléments (dent d'une roue dentée).

Le comportement de chaque élément est décrit par un set d'équations algébriques. Dans l'analyse des contraintes ces équations sont des équations d'équilibre des nœuds. Du fait que le nombre de ces équations est très grand (centaines ou milliers), l'utilisation d'un ordinateur est absolument obligatoire.

Autrement dit, dans un élément, une quantité de champ (ex. le champ de déplacement) est Interpolé à partir des valeurs existantes dans les nœuds. En connectant les éléments ensemble, la quantité de champ devient interpolée sur l'entier de la structure. Les meilleures valeurs de la quantité de champ dans les nœuds sont celles qui minimisent certaines fonctions (telle que l'énergie totale). Le processus de minimisation génère un set d'équations algébriques simultanées pour les différentes valeurs de la quantité de champ dans les nœuds. Ce set d'équations est décrit sous forme matricielle par :

$$\{F\} = [K] \times \{d\}$$

Où :

$\{d\}$: vecteur d'inconnues (valeurs de la quantité de champ dans les nœuds – ex : vecteur des Déplacements) .

$[K]$: matrice des constantes (connue – ex : matrice de rigidité).

$\{F\}$: vecteur des chargements (connu – ex : matrice des forces nodales) [15].

II.4.4 Comment fonctionne la méthode des éléments finis

Considérons un domaine Ω (typiquement une portion de l'espace) dont la frontière est notée $\delta\Omega$ ou Σ . Nous cherchons à déterminer une fonction u définie sur Ω , qui est une solution d'une équation aux dérivées partielles (EDP) pour des conditions aux limites données. L'EDP décrit le comportement physique du système, il s'agit par exemple des lois de l'élasticité pour un problème de résistance des matériaux ou des équations de Maxwell pour les problèmes d'électromagnétisme. Les conditions aux limites sont les contraintes s'exerçant sur le système. Par exemple, pour un problème de résistance des matériaux, on impose le déplacement de certaines parties du système, par exemple, on impose qu'une zone d'appui soit immobile, et on impose des efforts sur d'autres zones (poids, Pression de contact...) [14].

La méthode des éléments finis (MEF) permet de résoudre de manière discrète et approchée ce problème ; on cherche une solution approchée « suffisamment » fiable.

La discrétisation consiste à « découper » le domaine Ω , c'est-à-dire à chercher une solution du problème sur un domaine polygonal ou polyédrique par morceaux ; il y a donc une redéfinition de la géométrie. Une fois la géométrie approchée, il faut choisir un espace d'approximation de la solution du problème, dans la MEF, cet espace est défini à l'aide du maillage du domaine (ce qui explique aussi pourquoi il est nécessaire d'approcher la géométrie). Le maillage du domaine permet d'en définir un pavage dont les pavés sont les éléments finis.

Sur chacun des éléments finis, il est possible de linéariser l'EDP, c'est-à-dire de remplacer l'équation aux dérivées partielles par un système d'équations linéaires, par approximation. Ce système d'équations linéaires peut se décrire par une matrice ; il y a donc une matrice par élément fini. Cependant, les conditions aux frontières sont définies sur les frontières du système global et pas sur les frontières de chaque élément fini ; il est donc impossible de résoudre indépendamment chaque système. Les matrices sont donc réunies au sein d'une matrice globale. Le système d'équations linéaires global est résolu par l'ordinateur (des systèmes simples peuvent être résolus à la main et constituent en général des exercices d'apprentissage) [14].

L'EDP est résolue aux nœuds du maillage, c'est-à-dire que la solution est calculée en des points donnés (résolution discrète) et non en chaque point du domaine Ω . Cela nécessite de pouvoir interpoler, c'est-à-dire déterminer les valeurs en tout point à partir des valeurs connues en certains points. On utilise en général des fonctions polynomiales.

Un élément fini est la donnée d'une cellule élémentaire et de fonctions de base de l'espace d'approximation dont le support est l'élément, et définies de manière à être interpolantes. Nous voyons ici poindre trois sources d'erreur, c'est-à-dire d'écart entre la solution calculée et les valeurs réelles :

- La modélisation de la réalité : le domaine Ω correspond en général à des pièces matérielles, le calcul se fonde sur des versions idéales (sans défaut) des pièces, de la matière et des conditions aux limites ; cette source d'erreur n'est pas spécifique à la méthode des éléments finis, et peut être prise en compte par la méthode contrainte-résistance.
- La géométrie idéale et continue est remplacée par une géométrie discrète, et les valeurs sont interpolées entre des points ; plus les points sont espacés, plus la fonction d'interpolation risque de s'écarter de la réalité, mais à l'inverse, un maillage trop fin

conduit à des temps de calculs extrêmement longs et nécessite des ressources informatiques (en particulier mémoire vive) importante, il faut donc trouver un compromis entre coût du calcul et précision des résultats.

- S'agissant de calcul numériques, il se produit inévitablement des erreurs d'arrondi, les nombres étant représentés par un nombre fini d'octets.
- Toute l'habileté de l'ingénieur consiste à maîtriser ces erreurs notamment :
- En simplifiant la géométrie (defeaturing), en enlevant des détails qui se situent loin des zones que l'on veut étudier et ayant une faible influence sur le résultat.
- En choisissant des maillages adaptés, par exemple, des maillages de type poutre pour des pièces élancées, ou de type coque pour des pièces fines, en découpant la pièce pour pouvoir faire des maillages réguliers sur certaines zones, en affinant le maillage dans les zones critiques...
- En ayant un regard critique sur le résultat.

Bien qu'il existe de nombreux logiciels exploitant cette méthode et permettant de « résoudre » des problèmes dans divers domaines, il est important que l'utilisateur ait une bonne idée de ce qu'il fait, notamment quant au choix du maillage et du type d'éléments qui doivent être adaptés au problème posé : aucun logiciel ne fait tout pour l'utilisateur, et il faut toujours garder un œil critique vis-à-vis de solutions approchées. Pour cela il existe des indicateurs d'erreur et des estimateurs d'erreur qui permettent d'ajuster les différents paramètres.

La solution trouvée, il reste cependant à déterminer les caractéristiques de la méthode ainsi développée, notamment l'unicité de l'éventuelle solution ou encore la stabilité numérique du schéma de résolution. Il est essentiel de trouver une estimation juste de l'erreur liée à la discrétisation et montrer que la méthode ainsi écrite converge, c'est-à-dire que l'erreur tend vers 0 si la finesse du maillage tend elle aussi vers 0.

Dans le cas d'une EDP linéaire avec opérateur symétrique (comme l'est l'opérateur laplacien), il s'agit finalement de résoudre une équation algébrique linéaire, inversible dans le meilleur des cas [14].

II.5 Algorithmes de la méthode des éléments finis (la méthode de Ritz)

Une fois le problème formulé sous forme variationnelle, il reste à le discrétiser c.-à-d. à le faire passer d'un problème de dimension finie à un problème approche de dimension

finie. Ce problème discrétisé sera ensuite résolu par les techniques d'algèbre linéaire classiques : résolution de systèmes algébriques linéaires ou non linéaires, de problèmes aux valeurs propres, etc [10].

La méthode de Ritz est une technique de discrétisation de problèmes variationnels et est en quelque sorte le précurseur de la méthode des éléments finis. Soit donc un problème variationnel vérifiant les hypothèses du théorème de Lax-Milgram :

Trouver $u \in V$ telle que :

$$a(u, \omega) = l(\omega) \forall \omega \in V \quad (\text{II.2})$$

Où la fonction u vérifie les conditions aux limites essentielles homogènes (le cas des conditions aux limites non homogènes nécessite la construction d'une fonction de relèvement mais ne pose pas de difficultés théoriques supplémentaires). On se donne maintenant N fonction appelées fonctions d'interpolation de Ritz ou plus simplement fonctions de Ritz vérifiant elles aussi les conditions essentielles homogènes, On suppose ensuite que l'on peut écrire :

$$u(x) \approx u^N(x) = \sum_{j=1}^N u_j \phi_j(x) \quad (\text{II.3})$$

Dans cette expression, les N coefficients u_j sont à déterminer et le problème est maintenant de dimension finie N .

L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires possibles des fonctions ϕ_j forme un sous-espace de dimension N de V noté V^N (toujours en supposant que les fonctions ϕ_j sont choisies dans V dès le départ et qu'elles sont linéairement indépendantes). On considère donc l'approximation suivante du problème variationnel :

Trouver $u \in V$ telle que :

$$a(u^N, \omega^N) = l(\omega^N) \forall \omega^N \in V^N \quad (\text{II.4})$$

II.5.1 Exemple de la méthode de Ritz

Nous avons un exemples d'applications de la méthode de Ritz. Nous en profiterons au passage pour mettre en évidence les forces et éventuellement les faiblesses de cette approche [10].

Considérons le problème en dimension 1 :

$$\begin{cases} -u''(x) = \ln(x) & \text{Dans }]0, 1[\\ u(0) = 0 \\ \frac{du}{dx}(1) = 1 \end{cases}$$

Puisque la seule condition essentielle (sur u) est nulle, le relèvement est inutile ($u_g = 0$) et on peut travailler directement avec u qui, dans ce cas, sera égal à δ_u . La formulation variationnelle correspondante (laissée en exercice) est [10] :

$$\text{Trouver } u \in V = \{ \omega \in H^1(]0,1[\mid \omega(0) = 0 \} \\ \int_0^1 u'(x) \omega'(x) dx = \omega(1) + \int_0^1 \ln(x) \omega(x) dx \quad \forall \omega \in V \quad (\text{II.5})$$

Les fonctions ϕ_j doivent appartenir à l'espace V et vérifier les conditions aux limites essentielles homogènes. Dans ce cas, il suffit d'avoir $\phi_j(0) = 0$. Cela mis à part, ce choix est arbitraire si on s'assure que $\phi_j \in V$.

On peut prendre par exemple :

$$\phi_j(x) = x^j \quad (\text{II.6})$$

Et on s'assure facilement que toutes les conditions sont bien remplies. Le coefficient général de la matrice A pour la méthode de Ritz est donc :

$$a_{ij} = \int_0^1 \phi_j'(x) \phi_i'(x) dx = \int_0^1 ij x^{j+j-2} dx = \frac{ij}{i+j-1} \quad (\text{II.7})$$

Tandis que le vecteur F a pour coefficients :

$$f_i = \phi_i(1) + \int_0^1 \ln(x) \phi_i(x) dx = 1 + \int_0^1 \ln(x) x^i dx = 1 - \frac{1}{(i+1)^2} \quad (\text{II.8})$$

On doit se rapprocher d'une éventuelle solution analytique. Dans cet exemple, cette solution est :

$$u(x) = \frac{3x^2}{4} - \frac{1}{2} x^2 \ln x \quad (\text{II.9})$$

Dont la dérivée est :

$$u'(x) = x - x \ln x \quad (\text{II.10})$$

En fin, il ne faut pas se leurrer sur la taille du système linéaire nécessaire pour obtenir une bonne approximation de $u(x)$. Dans cet exemple, une dimension de 5 semble sûre mais ce n'est certes pas toujours aussi facile...[10].

II.6 Les différents types de maillages

La méthode des éléments finis (MEF) est une méthode d'approximation numérique, qui étudie le comportement des structures complexes en la décomposant en pièces plus petites et plus simples.

Ces pièces plus petites sont appelées éléments finis. Les éléments sont connectés les uns aux autres aux nœuds. Ces éléments et nœuds sont également appelés maillages. L'assemblage des éléments et des nœuds s'appelle un modèle d'éléments finis [17].

Un maillage est la discrétisation spatiale d'un milieu continu, ou aussi, une modélisation géométrique d'un domaine par des éléments proportionnés finis et bien définis. L'objet d'un maillage est de procéder à une simplification d'un système par un modèle représentant ce système et, éventuellement, son environnement (le milieu), dans l'optique de simulations de calculs ou de représentations graphiques [14].

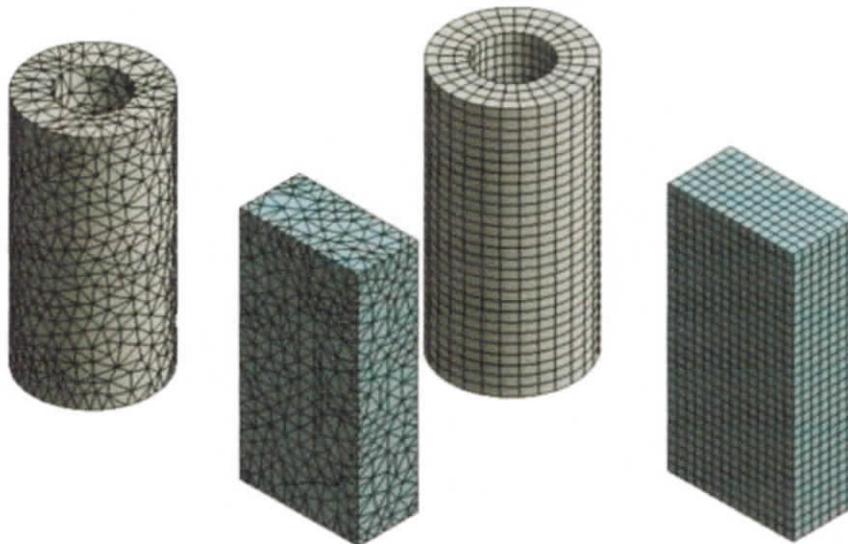


Figure II.4 - Exemples des types de maillage.

Un maillage est une partition de l'espace ou d'un domaine en cellules appelées éléments. Le meilleur prend en entrée la géométrie, c'est-à-dire le fichier produit par le modéleur géométrique, et fournit en sortie un maillage. Ceci comprend une information géométrique sur les sous-volumes et une information topologique sur la connectivité entre les éléments. Les maillages non structurés sont sous la forme d'une liste d'éléments interconnectés. Les formes sont souvent des triangles ou des quadrilatères en deux

dimensions, et des tétraèdres, des cubes ou des hexaèdres en trois dimensions. La connectivité d'un élément est la liste de ses voisins. Un élément possède un voisin par arête ou par face, selon que le maillage est bi- ou tridimensionnel. Dans le cas des maillages structurés, la connectivité est par définition implicite, et donc le maillage se résume à une simple liste de nœuds [14].

II.6.1 Choix du type de maillage

Un maillage est défini par :

- Son repère.
- Les points le constituant, caractérisés par leurs coordonnées.
- les cellules, constituant des polytopes reliant n de ces points.

Et peut-être caractérisé notamment par :

- sa dimension : typiquement 2D ou 3D .
- Son volume (dimension totale couverte).
- Sa finesse : surface ou volume moyen des cellules composant le maillage.
- La géométrie des cellules : triangle, quadrilatères (parallélogrammes, rectangles, carrée), polygones en 2D, tétraèdres, prismes, hexaèdres (parallélépipèdes, cubes), polyèdres en 3D.
- Le degré de l'élément : c'est le degré du polynôme servant à décrire les côtés ou arêtes des éléments, un élément de degré 1 a des côtés ou arêtes rectilignes ; dans le cas des éléments finis, c'est également le degré des polynômes d'interpolation.

II.6.2 Propriétés de l'élément

Le modèle FEA (finite element analysis) est toujours un modèle tridimensionnel, donc si 1D ou 2D Des éléments sont utilisés, 1 ou 2 dimensions doivent être définies dans Pour être analysé.

- **Propriétés de l'élément 1D**

Les éléments 1D sont utilisés lorsque la longueur de la structure est de 8 ~ 10 Fois plus grand que sa largeur et son épaisseur et lorsqu'il est externe Les charges ne sont appliquées qu'aux joints.

Il existe 3 types d'éléments 1D :

- Élément de tige : n'intervient que dans la compression
- Truss (bar) élément : entreprendre la tension et la compression
- Élément de faisceau : entreprendre une tension, une compression, un cisaillement
Et moment.

- **Propriétés de l'élément 2D**

Les éléments 2D sont utilisés lorsque la longueur et la largeur de la structure est significativement plus grand que son épaisseur.

Il existe différents types d'éléments 2D :

- Plaque : élément 2D en général.
- Membrane : pas de flexion.
- Surface : sans épaisseur.
- Souche plate : une contrainte normale à la surface est de 0.
- Composite Shell : 2d éléments de plaque avec des couches composites.

- **Propriétés de l'élément 3D**

Les propriétés des éléments 3D ne sont que présentes pour attribuer des matériaux et des systèmes de coordonnées matérielles aux maillages 3D [14].

II.6.2.1 Maillage hexaédriques

La plupart des méthodes numériques s'appuient sur des maillages tétraédriques ou hexaédriques pour discrétiser leur domaine d'étude. L'utilisation de maillages hexaédriques est préférée pour certaines méthodes, mais la génération de ces maillages est beaucoup plus complexe que celle des maillages tétraédriques [18].

Le critère de Delaunay assure l'existence et l'adaptation locale d'un maillage tétraédrique pour n'importe quel volume dont la frontière est discrétisée à l'aide d'une surface triangulaire. Un tel critère n'existe pas pour les maillages hexaédriques. Au contraire, ceux-ci sont pourvus d'une structure topologique globale qui complexifie grandement les traitements. Notre approche pour générer et modifier un maillage hexaédrique est donc de considérer initialement cette contrainte topologique tout en n'oubliant pas la géométrie du domaine d'étude.

Topologiquement, un hexaèdre est composé de 6 faces, 12 arêtes et 8 sommets. Ces faces peuvent être regroupées en 3 ensembles de 2 faces composés chacun de 2 faces opposées dans l'hexaèdre. Les arêtes n'appartenant pas à ces 2 faces peuvent alors être regroupées et considérées comme topologiquement « parallèle ». En se basant sur ces arêtes parallèles, on peut structurer, de proche en proche, l'ensemble d'un maillage hexaédrique en couches de mailles, ou feuillets. Il en résulte une structuration globale, définie comme un arrangement simple de surface dans le maillage dual ; l'ajout ou la suppression d'un hexaèdre se traduit alors généralement par l'ajout ou la suppression d'un feuillet complet. La plupart des algorithmes de génération de maillage repose sur des traitements locaux sans prendre en compte la structure topologique globale des maillages hexaédriques. C'est pourquoi ces algorithmes sont généralement limités à une catégorie spécifique de géométries.

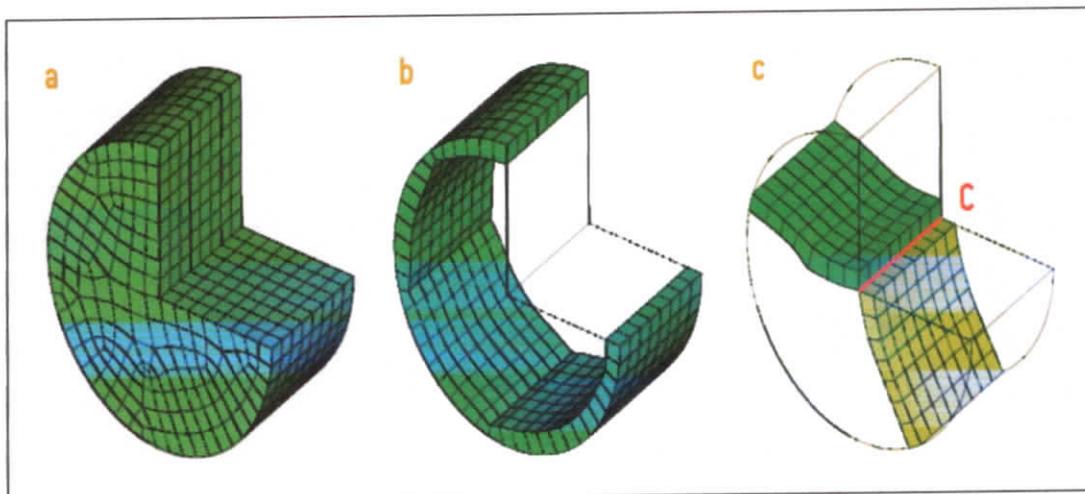


Figure II.5 – Exemple de maillage hexaédriques.

- (a) : Un maillage hexaédrique.
- (b) : Un feuillet fondamentale type 1 ou tous les hexaèdres sont situés Lelong de la même surface géométrique.
- (c) : Deux feuillets fondamentaux de type 3 qui capturent la courbe géométrique C.

a. Avantages

- Economique en nombre d'éléments, présente un nombre inférieur de mailles par Réduit les risques d'erreurs numériques dues à la diffusion numérique si l'écoulement est aligné avec le maillage.

b. Inconvénients

- Difficile à générer dans le cas d'une géométrie complexe.
- Difficile d'obtenir une bonne qualité de maillage pour certaines géométries complexes [18].

II.6.2.2 Le maillage tétraédrique

TetGen crée des mailles tétraédriques adaptées à la résolution d'un équations différentiel partiel par méthodes d'éléments finis (MEF) et méthodes de volume fini (MVF).

Le problème est de générer un maillage tétraédrique conforme à une donnée (Polyédrique ou linéaire par morceaux) avec certaines contraintes pour la taille et la forme des éléments de maille. C'est un problème typique de preuve bonne génération de maille ou génération de maille de qualité. Les techniques de qualité la génération de maillage fournit les garanties "forme" et "taille" sur les mailles :

Tous les éléments ont une certaine mesure de qualité délimitée, et le nombre d'éléments est dans un facteur constant du minimum nombre.

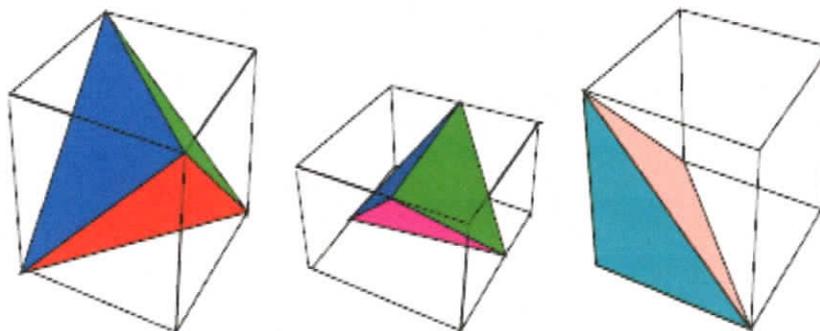


Figure II.6 - Exemples de maillage tétraédrique.

II.7 Avantages et désavantages de la méthode des éléments finis

Les avantages et les inconvénients de la méthode des éléments finis se mettre manifestent de façon particulièrement aigue dans le domaine du calcul des coques.

Intrinsèquement, la méthode présente les avantages suivants :

a. Avantages

- Au niveau des éléments finis, leur taille relativement petite et leur forme géométrique simple permettent aussi de choisir simplement et rationnellement les fonctions d'interpolation décrivant leur comportement.
- La méthode en soi a un caractère physique l'aryan.
- On peut estimer l'erreur commise en tous points, voire la maintenir inférieure à un certain de façon automatique.
- Prise en compte simple de la dépendance fréquentielle ou temporelle.
- Etude de structures très complexes et trouver une solution exacte aux nœuds du maillage.

D'un autre côté, la méthode présente aussi quelques points faibles, qu'il serait faux de sous-estimer :

b. Inconvénients

- Des difficultés de modélisation et discrétisation peuvent apparaître.
- Le volume et la vérification des données et des résultats peuvent devenir difficiles à maîtriser.
- La méthode ouvre la porte à la résolution de problèmes complexes qui peuvent échapper à la maîtrise de l'utilisateur, elle donne l'impression de pouvoir tout calculer, elle peut être source d'erreurs diverses et parfois graves, qu'il est souvent difficile de détecter.
- Un informatique puissant est nécessaire.
- Le développement et surtout la maintenance d'un programme performant et sûr requièrent énormément de travail [19].

II.8 Domaines d'application

- Analyse linéaire (statique et dynamique).
- Analyse non linéaire (grands déplacements, grandes déformations, contact et frottement, flambage, ...).
- Mise en forme des matériaux.
- Thermique (en régime permanent et transitoire, ...).
- Mécanique des fluides.
- Electromagnétisme.
- Dynamique rapide (choc, impact, crash).
- Optimisation des structures [20].

II.9 Conclusion

Dans ce chapitre, on a donné un aperçu sur les principes généraux de la méthode des éléments finis, son principe de fonctionnement, son avantages et inconvénients ainsi que le domaine d'application.

On parle aussi sur l'exemple de la méthode de Ritz comme un algorithme de la méthode des éléments finis.

Dans le troisième chapitre nous allons appliquer la méthode des éléments finis pour déterminer les caractéristiques des matériaux et détecter les défauts de ces matériaux par l'utilisation d'une expérience du contrôle non destructif par ultrason et une simulation de la méthode des éléments finis.

Chapitre III

Simulation du contrôle non destructif par éléments finis

III.1 Introduction

On retrouve les premières applications véritables de la méthode des éléments finis en 1956 en Mécanique des structures. Un groupe de chercheurs (Turner, Clough, Martin et Topp) de Boeing Utilisent cette méthode pour calculer la voilure d'un avion. À compléter Les logiciels de simulation par éléments finis sont de plus en plus utilisés dans l'enseignement des sciences de l'ingénieur, notamment au lycée. Cependant, ils font appel à des théories et des méthodes relativement sophistiquées, qui rendent l'interprétation de leurs résultats difficile à ce niveau.

Cette ressource, principalement destinée aux non-spécialistes, présente les différents concepts que doit connaître un enseignant pour comprendre les simulations par éléments finis et en interpréter les résultats.

Le contrôle non destructif (CND) rassemble les différents procédés industriels permettant de détecter et de caractériser d'éventuels défauts dans une pièce sans l'altérer. La modélisation de ce type de contrôle apporte une aide précieuse à la compréhension des phénomènes physiques, à la conception de nouveaux capteurs, à l'optimisation des procédures de contrôle et à la démonstration de leurs performances.

Dans ce chapitre, nous allons appliquer un exemple pratique du contrôle non destructif, on a choisi le contrôle par ultrason.

On va aussi dans ce chapitre simuler la résistance de différentes plaques sous charge thermique et mécanique en utilisant un logiciel de simulation par éléments finis RDM6.

III.2 Exemple pratique du contrôle non destructif

L'expérience présentée ici a été réalisée au laboratoire de contrôle non destructif des matériaux de l'université de Jijel. Elle est utilisée pour détecter les échos réfléchis des échantillons de différents matériaux. Les échos obtenus sont traités et analysés afin de déterminer les performances des échantillons (propriétés et présence de défaut).

III.2.1 Méthode par immersion

Le système réalisé est constitué essentiellement d'une cuvette comportant en son sein le support port-échantillon, un transducteur à émergence de 1MHz, il représente la source génératrice du faisceau d'onde ultrasonore. Il permet l'émission des impulsions nécessaire pour attaquer l'échantillon soumis au test, comme il joue le rôle du récepteur d'échos à leur retour après avoir traversé le liquide et le matériau, les impulsions émises (reçu) par le transducteur émetteur/récepteur relié avec un oscilloscope numérique (Tektronics TDS1002), pour visualiser les échos émis et réfléchies.

Pour l'acquisition des données sur ordinateur on utilise le logiciel wavestar [1].

- Avec des transducteurs piézoélectriques de 1MHz.
- En utilisant des ondes longitudinales.
- La technique de contrôle est par pulse-écho.
- Sa mise en œuvre est en immersion.
- Le mode d'excitation est impulsionnel.
- Avec un angle d'incidence normale.
- Echantillon de type béton et aluminium.



Figure III.1 - Expérience du contrôle non destructif par ultrason à immersion.

La figure III.2 indique les échos émis et réfléchi des échantillons utilisé en expérience par immersion.

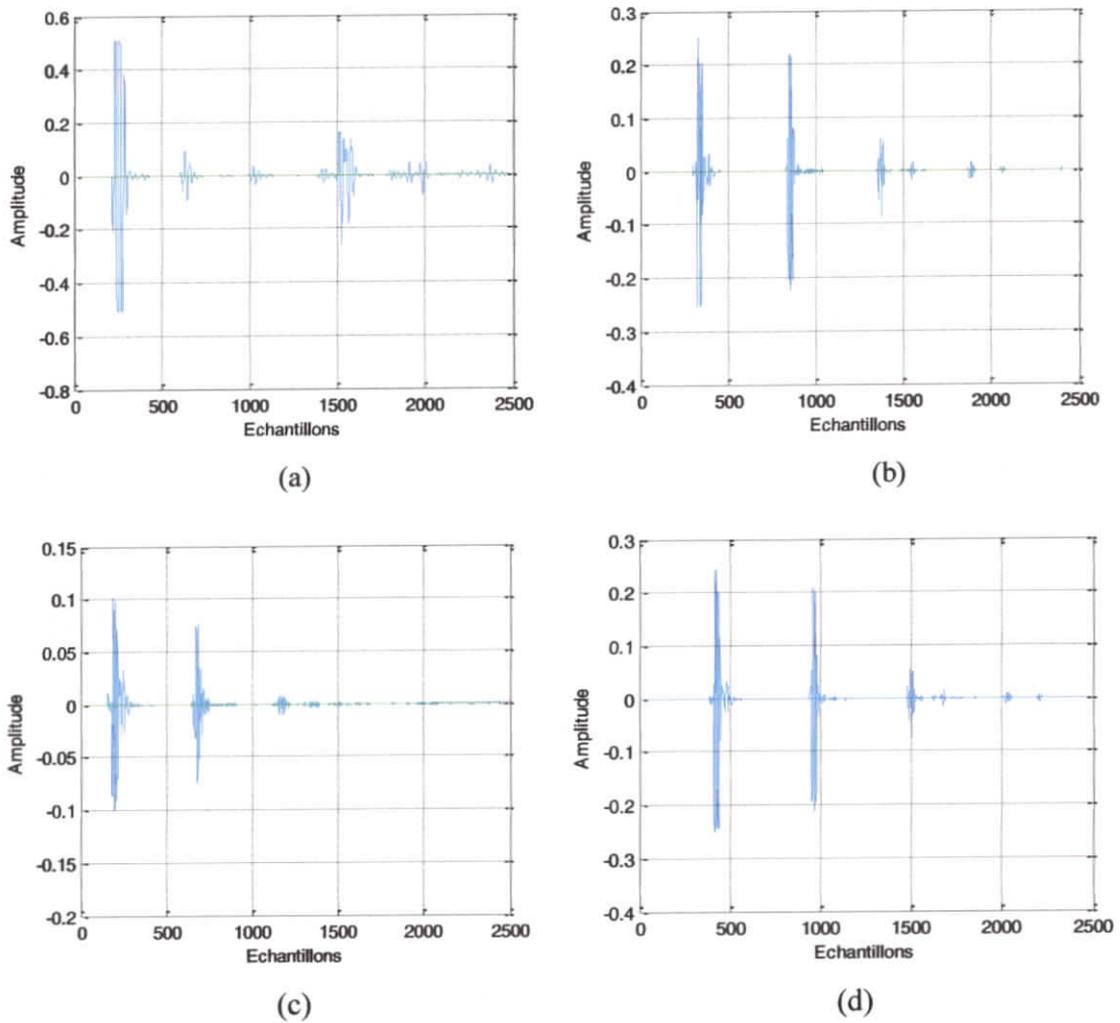


Figure III.2 – Resultat des signaux ultrasonors par immersion (a) : Aluminum, (b) : Cylindre béton,(c): Cube béton , (d) : Parallipède béton.

III.2.2 Méthode par contact

Le système réalisé est constitué essentiellement d'un transducteur émetteur/récepteur de 1MHz placé en contact avec l'échantillon traité au moyen d'un couplant (huile ou gel de type sofranal). On utilise toujours un oscilloscope et un logiciel "WAVESTAR" pour l'acquisition des données (figure III.3).

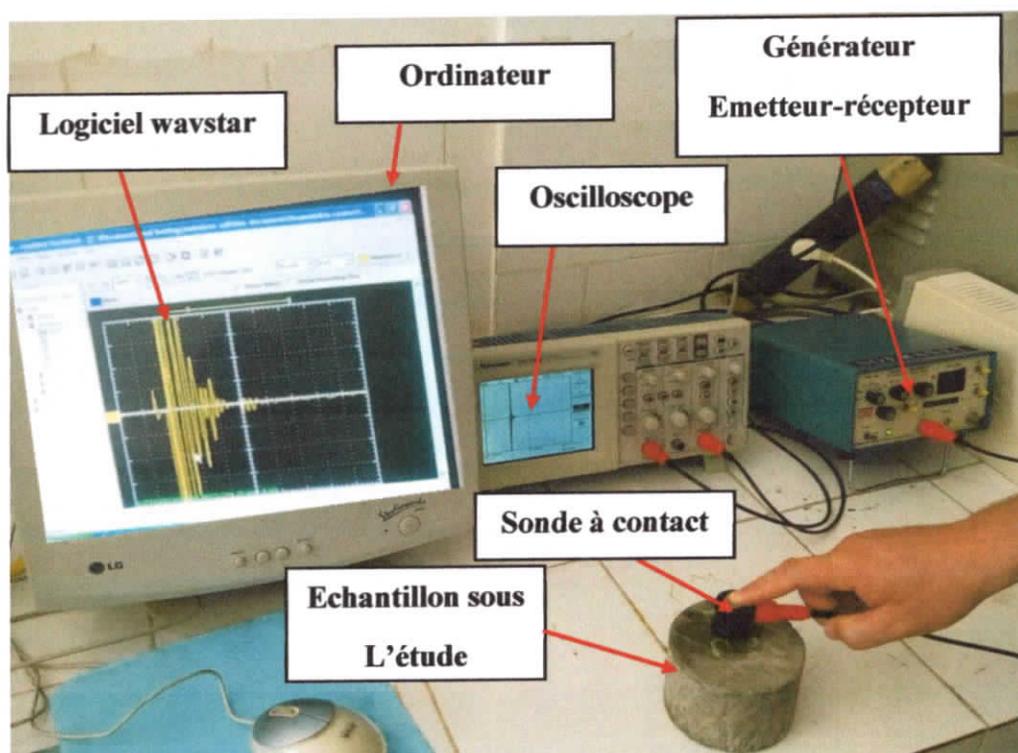


Figure III.3 – Expérience de contrôle non destructif par ultrason à contact.

Les courbes de la figure III.4 indiquent les échos ultrasonores émis et réfléchis sur les interfaces des échantillons sous test par contact.

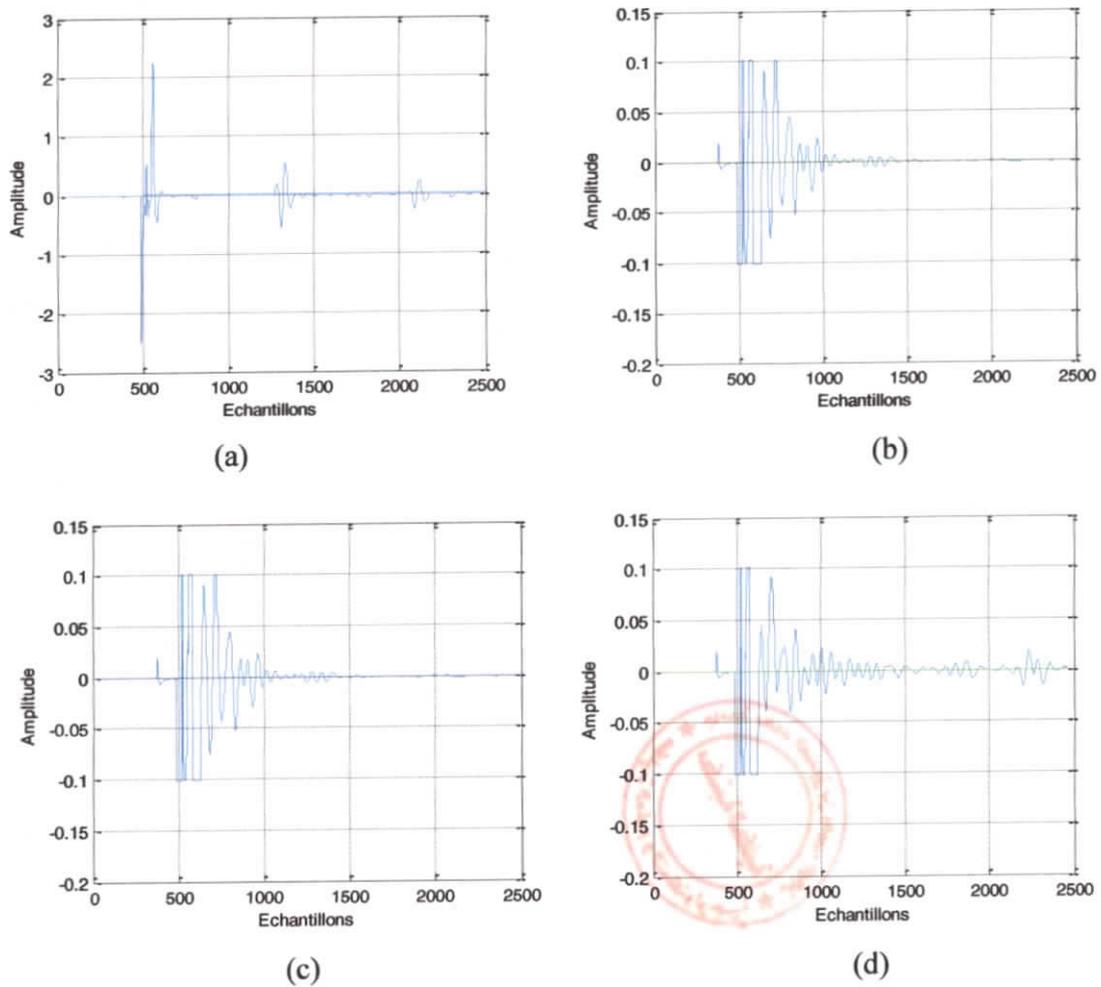


Figure III.4 – Résultat des signaux ultrasonores par contact (a) : Aluminium, (b) : Cylindre béton, (c) : Cube béton, (d) : Parallipède béton.

III.2.3 Interprétation des résultats d'expérience

A partir des données ultrasonores obtenues à contact et a immersion, on peut calculer le temps de vol et la vitesse de l'onde dans d'échantillon et par conséquent les propriétés de différents échantillons. On peut aussi détecter les défauts de structure de différents échantillons.

On prend par exemple la figure III.4 cas (b) : cylindre béton, pour présenter les différentes informations que l'on peut extraire d'un signal ultrasonore.

La figure III.5 indique un écho émis et deux échos réfléchis, le premier est l'écho de défaut est le deuxième c'est l'écho de fond.

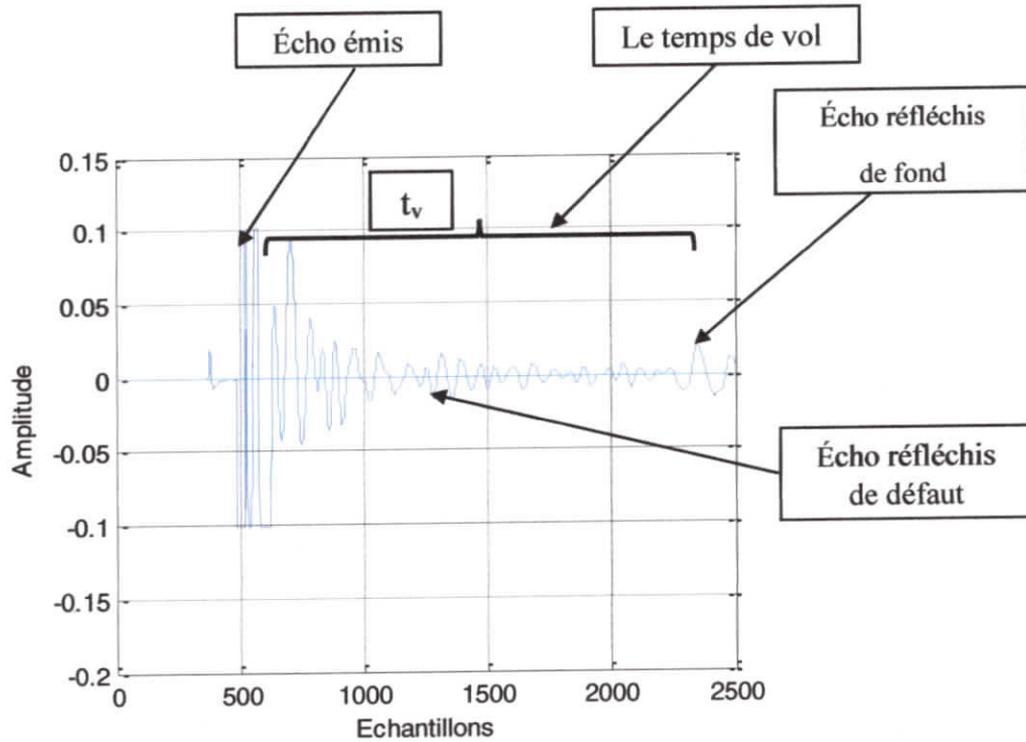


Figure III.5 – Les informations extrait de cas d'échantillon cylindre béton par contact.

En calculant le temps de vol de l'onde ultrasonore (t_v) dans l'échantillon, on peut calculer la vitesse de l'onde dans cet échantillon par la loi :

$$v = \frac{l}{t} \quad (\text{III.1})$$

Où :

l : épaisseur de l'échantillon.

t : $t_v/2$

La détermination de v nous permet de calculer les propriétés mécaniques de l'échantillon et par conséquent la qualité d'échantillon.

III.3 Problème rencontré durant la pratique

Lorsqu'on fait l'expérience, nous rencontrons plusieurs problèmes qui peuvent réduire la fiabilité et l'exactitude des résultats que nous obtenons, les plus connus sont :

- Erreur de mesure (appareil, humain).
- Problème de fixation des capteurs.
- Limitation de l'échelle de mesure.
- Bruit de structure.
- Problème d'orientation d'onde.
- Limitation d'appareil de mesure.
- Chevauchement des échos.

D'après les problèmes rencontrés durant l'expérience du contrôle non destructif par ultrasons, nous allons appliquer la simulation du contrôle non destructif par éléments finis pour trouver des résultats optimaux.

III.4 Simulation du contrôle non destructif par éléments finis

La simulation par éléments finis ou « méthode des éléments finis », au sens premier du terme, désigne un ensemble de techniques numériques permettant de résoudre approximativement une certaine classe de problèmes mathématiques, basés sur des équations aux dérivées partielles, dont on ne sait généralement pas trouver les solutions exactes. Il s'agit d'un outil mathématique qui possède de nombreuses applications, allant de la physique des milieux continus au calcul de probabilités.

Dans cette ressource, nous nous intéressons à son application la plus courante : la simulation du comportement des pièces mécaniques (ou structures) modélisées à l'aide de la mécanique des milieux continus solides, c'est-à-dire le calcul des déplacements, déformations, contraintes et efforts prédits par cette théorie (figure III.6). L'utilisation des éléments finis dans d'autres branches de la physique des milieux continus (comme la thermique) est toutefois assez similaire [22].

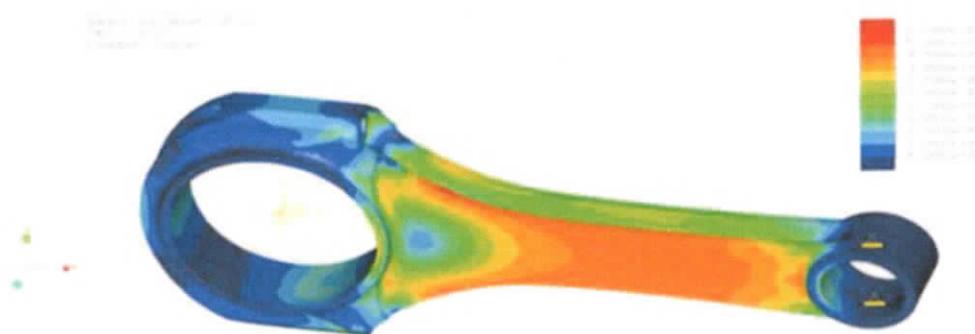
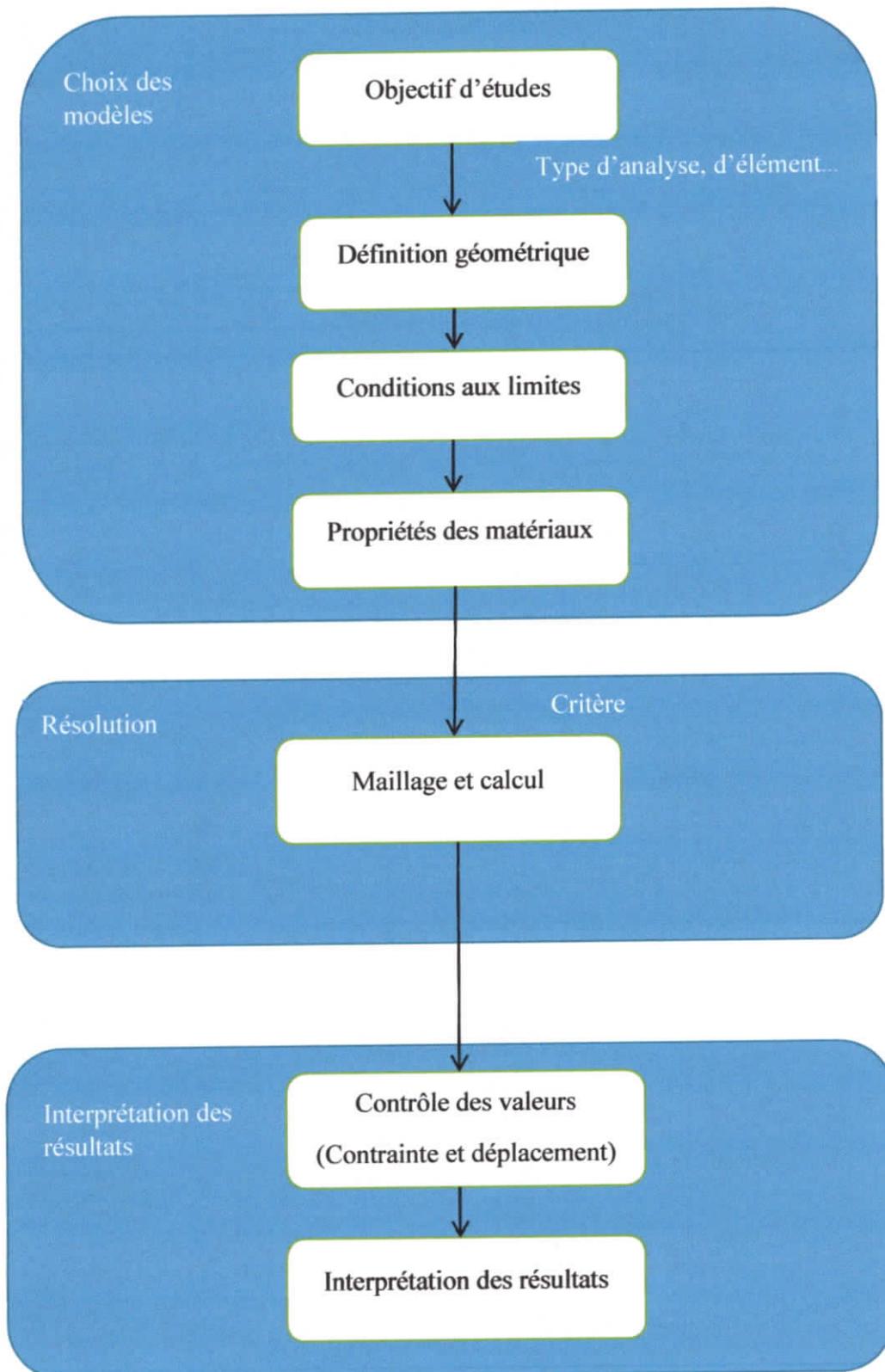


Figure III.6 - Exemple de champ de contraintes calculé dans une simulation par éléments finis.

III.4.1 Démarche EF

L'organigramme suivant indique les différentes étapes de simulation par élément finis.



III.4.2 Utilisation d'un logiciel d'éléments finis

Un programme général de type industriel doit être capable de résoudre des problèmes variés de grandes tailles (de mille à plusieurs centaines de milliers de variables). Ces programmes complexes nécessitent une bonne maîtrise, de l'analyse du problème et des résultats obtenus, avant d'espérer pouvoir modéliser un problème réel de façon correcte.

Citons à titre d'exemple quelques noms des logiciels de simulation par élément fini : NASTRAN, ADINA, RDM6, CASTEM 2000, CESAR, SAMCEF, etc.

Les possibilités offertes par de tels logiciels sont nombreuses :

- Analyse linéaire ou non d'un système physique continu.
- Analyse statique ou dynamique.
- Prise en compte de lois de comportement complexes.
- Prise en compte de phénomènes divers (élasticité, thermiques, électromagnétiques.
- De plasticité, d'écoulement, etc. ...) ceux-ci pouvant être couplés.
- Problèmes d'optimisation.
- etc.

L'utilisation de tels programmes nécessite une formation de base minimum, suivie d'applications pratiques sur des problèmes simples. Voyons tout d'abord comment se déroule une étude basée sur l'utilisation d'un logiciel éléments finis.

Pour réaliser une étude par éléments finis, il faut que les objectifs de l'étude soient bien définis (statique ou dynamique, élastique ou plastique, thermique, le type de matériaux, les charges appliquées ...). Le cadre de l'étude, c'est à dire le temps et les moyens disponibles, doit être compatible avec les objectifs et la précision cherchée [16].

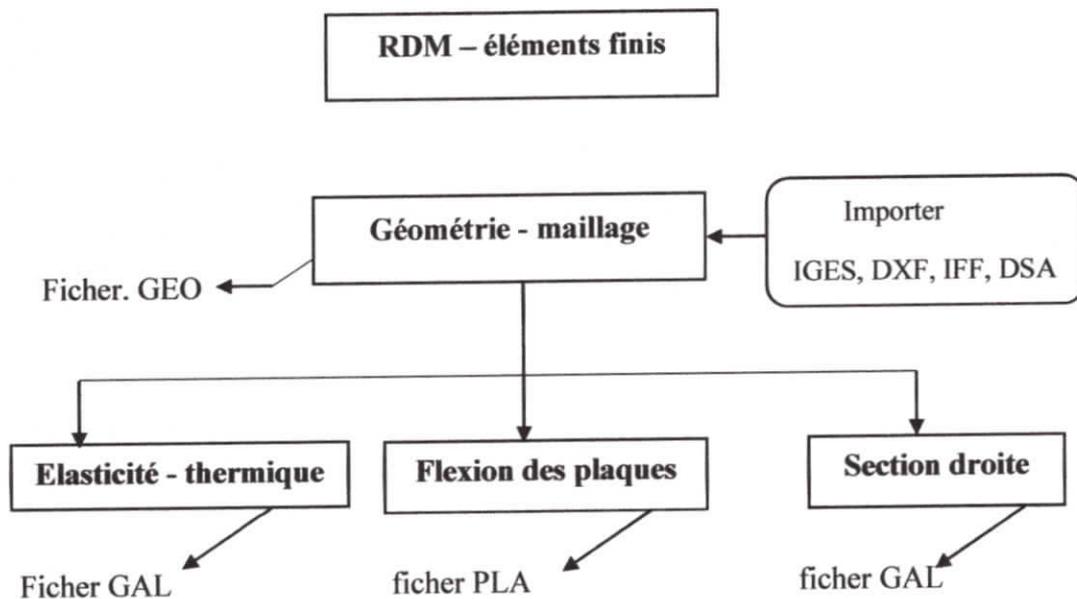
Parmi ces programmes, nous utilisons un logiciel RDM6 pour la simulation par la méthode des éléments finis.

III.4.2.1 Définition du logiciel RDM6

RDM6 est un logiciel destiné à l'enseignement du calcul des structures par la méthode des éléments finis [23].

Ce module permet :

- La modélisation et le maillage d'un domaine plan.
- L'évaluation du comportement mécanique et/ou thermique d'une pièce plane ou axisymétrique.
- Le calcul des caractéristiques d'une section droite de poutre et les contraintes dans celle-ci pour une force intérieure donnée.



III.4.2.2 Exemple d'application par logiciel RDM6

Réalisation une poutre pour les caractéristiques suivantes :

- Sur la longueur de la poutre : 20 éléments
- Sur la hauteur de la poutre : 5 éléments
- Sur le cercle : 20 éléments

Cette discrétisation permet selon les cas, d'obtenir un maillage « homogène » où « D'affiner » le maillage dans certaines parties du modèle géométrique afin d'obtenir des résultats plus précis localement.

Le logiciel accepte des modèles géométriques comportant au maximum 1700 éléments dans le maillage.

On peut si besoin adapter le nombre maximum d'éléments par le menu :

- Modéliser
- Paramètres
- La phase de définition géométrique et de maillage est terminée.
- Il faut maintenant ajouter la modélisation des épaisseurs, du matériau, des liaisons et des charges appliquées.

Cliquer sur Fichier puis sur Elasticité / Thermique

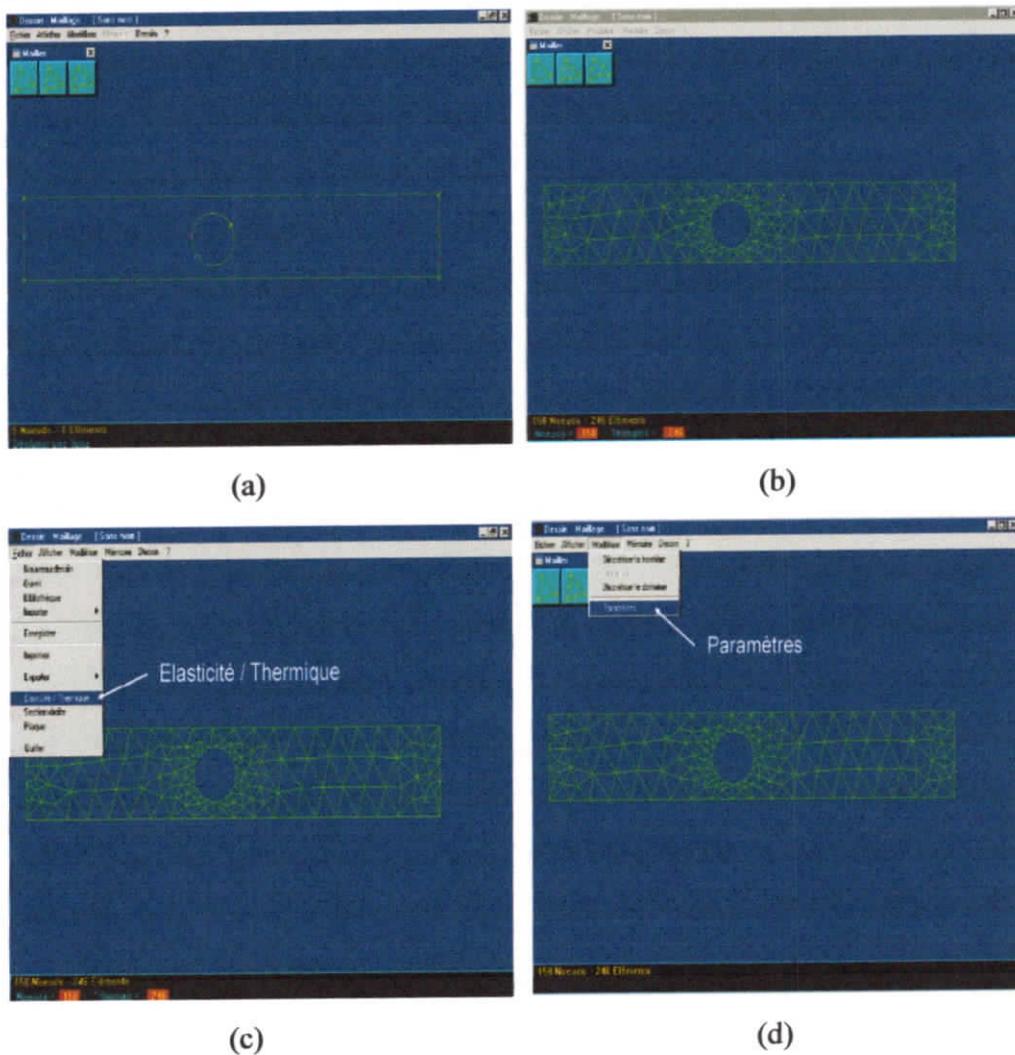


Figure III.7 – (a) : Plaque à étudier , (b) : Maillage de plaque, (c) : Elasticité thermique, (d) : Paramètre de maillage.

Sélectionner une option :

Contraintes planes ($\sigma_{zz} = 0$)

Déformations planes ($\epsilon_{zz} = 0$)

Remarque :

L'option Contraintes planes est choisie si la pièce ne subit aucune contrainte sur ses faces de normale \vec{Z} (perpendiculaire à l'écran)

Il faut maintenant modéliser :

- L'épaisseur de la pièce
- Le matériau de la pièce
- Les liaisons
- Les charges appliquées

Remarque :

Le logiciel permet le choix d'un matériau dans une bibliothèque de matériau prédéfinis [23].

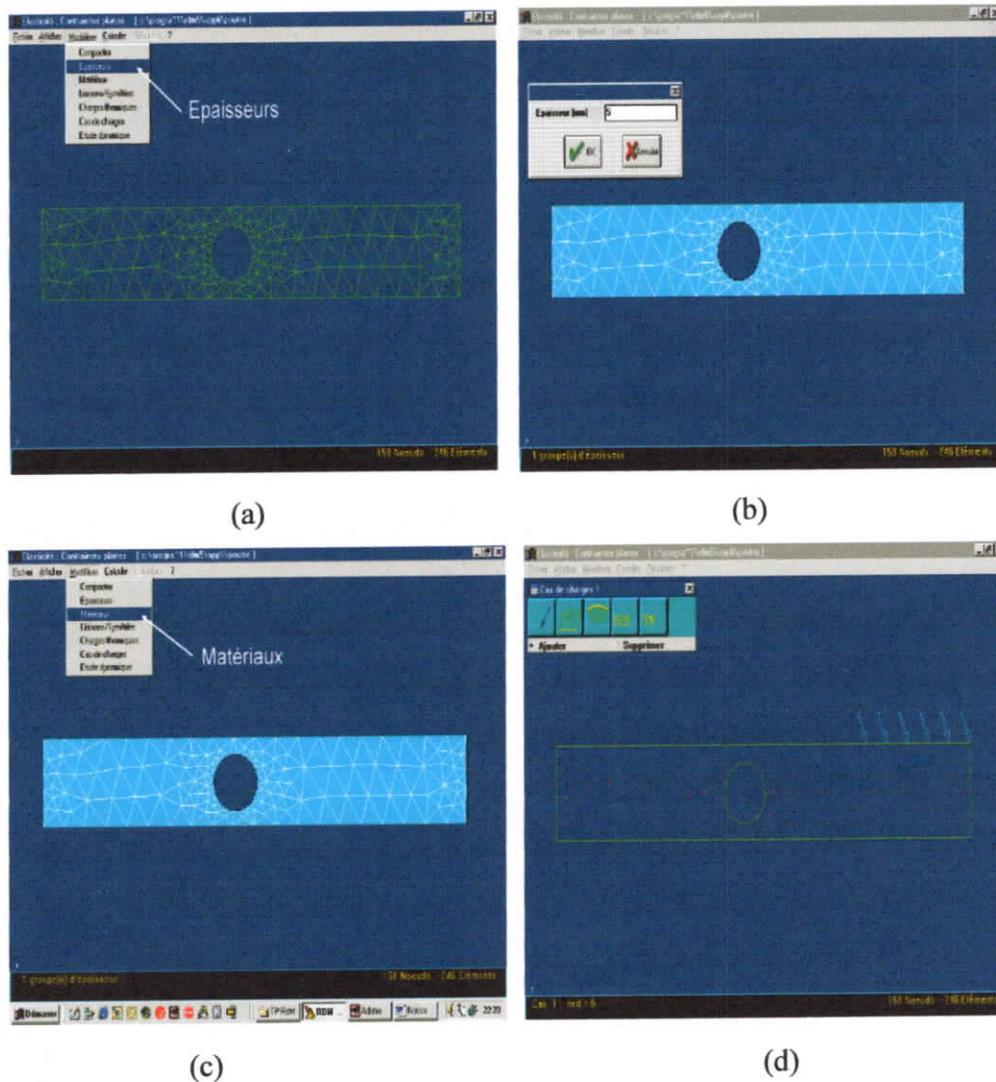


Figure III.8 - (a) : Définit l'épaisseur, (b) : Nombre d'épaisseur, (c) : Définit le matériau (d) : Cas de charge.

Le logiciel donne accès à une palette de choix :

- Force nodale
- Force linéique
- Pression
- Pesanteur
- gradient thermique
- Choisir puis implanter les différentes charges sur la poutre à étudier.
- L'ensemble de la modélisation est terminé.
- Il reste maintenant à effectuer les calculs.
- Cliquer sur Calculs puis Analyse statique.
- Enregistrer votre fichier.

Cliquer sur Résultats puis sur Isovateurs sur déformée.

On peut alors accéder à une série de résultats pourtant sur :

Les déplacements

Les contraintes

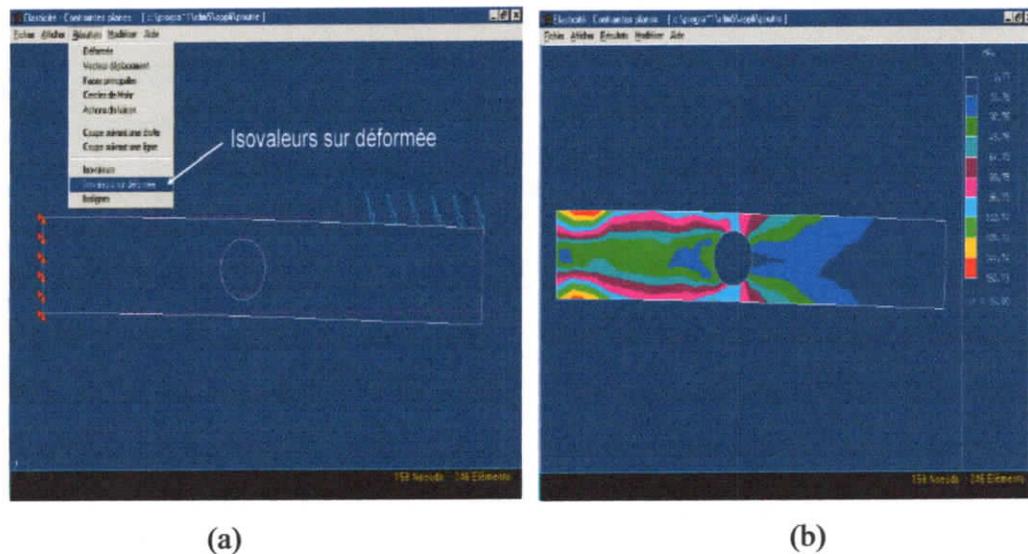


Figure III.9 – Résultats finale (a) : Déformation de la plaque, (b) : Distorsion de la plaque

III.5 simulation des plaques carrée et rondes des différents matériaux

Le but de cette simulation est l'étude des caractéristiques des plaques de différents types de matériau et différente forme sous contraintes mécaniques et thermiques en utilisant la méthode des éléments finis.

III.5.1 Simulation de la plaque ronde

On considère un cercle creux d'axe y . Ce cercle est de module de Young E et de coefficient de Poisson ν . Il est soumis à une pression extérieure P_e .

III.5.1.1 Ronde en acier

Simulation pour les caractéristiques suivantes :

- Module d'Young [MPa] = 210000
- Coefficient de poisson = 0.3
- Masse volumique [Kg/m³] = 7800
- Nombre d'épaisseur = 10 mm

A.1 Pour le maillage 1

Qualité de maillage triangle à 574 Nœuds 263 Éléments (voir figure III.10).

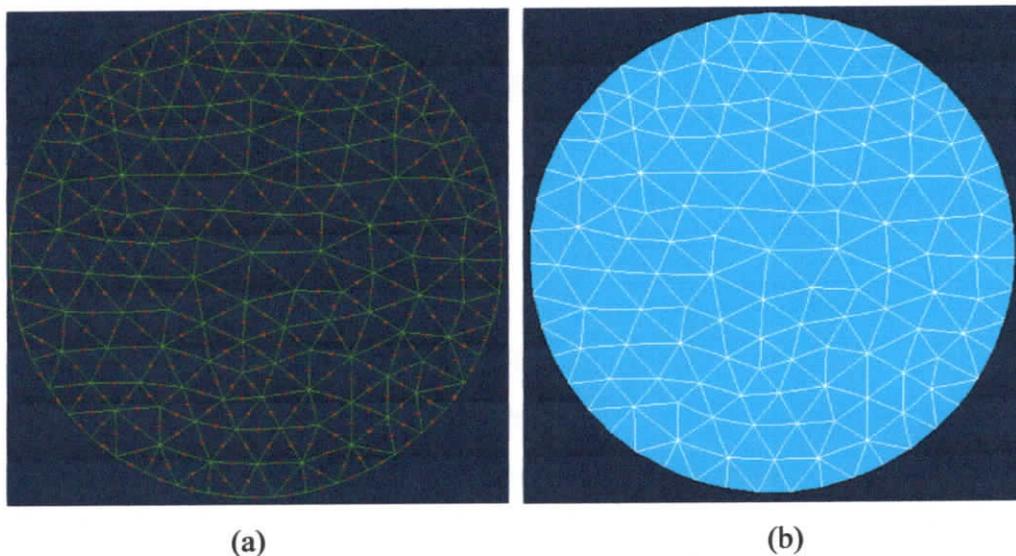


Figure III.10 – Différentes opérations sur la plaque (a) : Mailler la plaque, (b) : Définir le matériaux

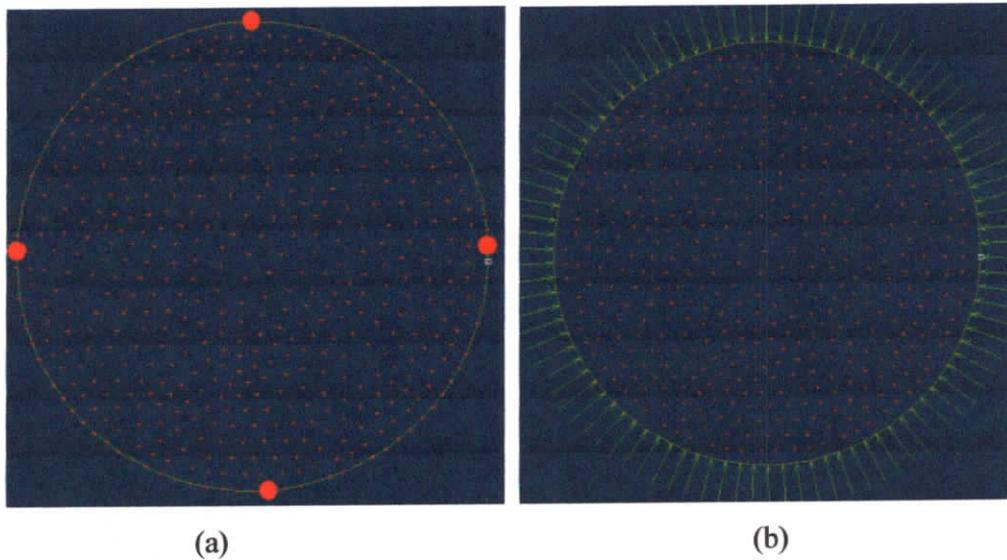


Figure III.11 - (a) : La forme des apuis (b) : La forme de charge.

Résultat obtenue pour une charge mécanique appliqué à l'extérieure de la plaque (voir figure III.12, III13).

- Déformation
- Déplacement ver x
- Déplacement ver y

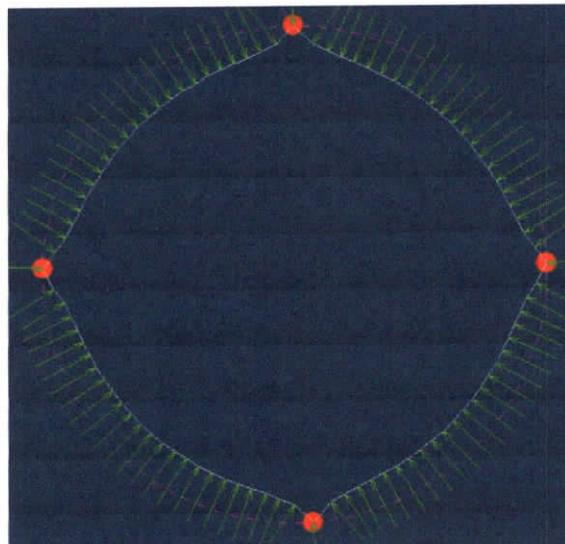


Figure III.12 – Déformation de la plaque.

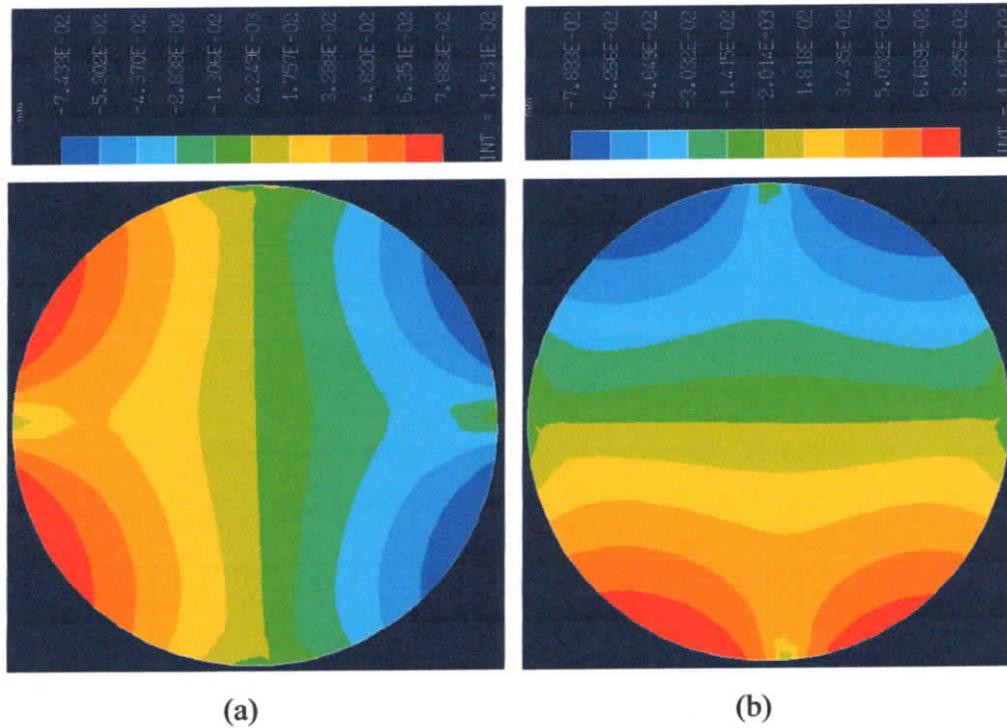


Figure III.13 – Résultat pour une charge mécanique (a) : Déplacement ver x, (b) : Déplacement ver y.
 on remarque une déformation sur la plaque qui est variée entre $-7 * 10^{-2} mm$ et $8 * 10^{-2}mm$

Résultat obtenue pour une charge thermique avec (voir figures III.14, III.15)

- Température nodal imposé 100k
- Source de chaleur nodale 50w

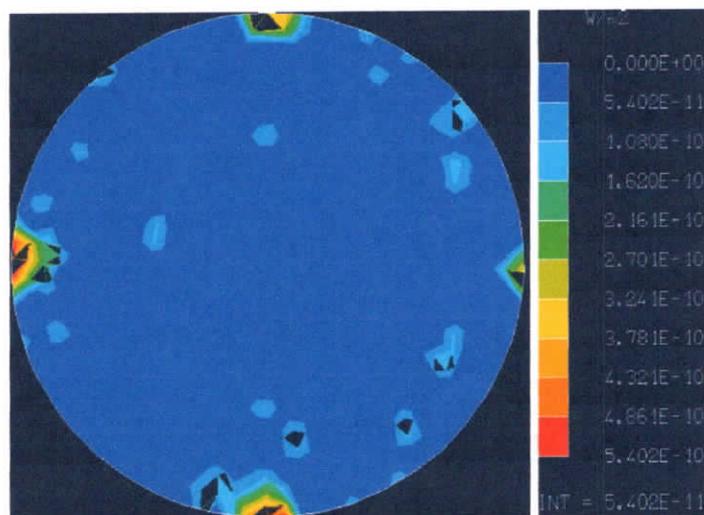


Figure III.14 – La densité de flux.

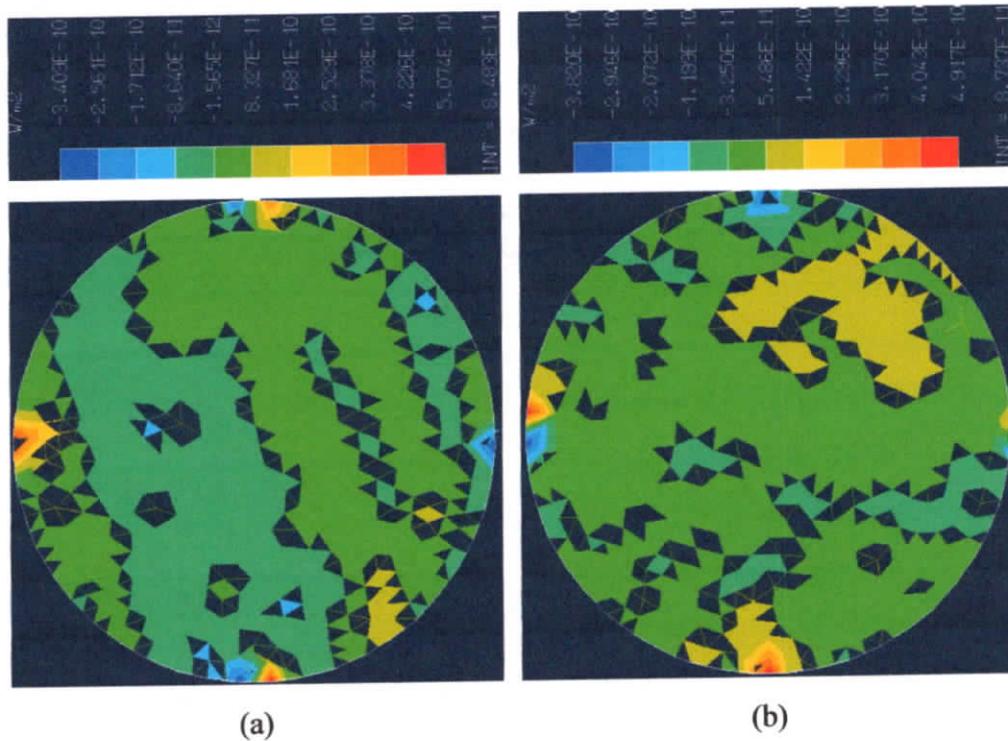


Figure III.15 – Résultat pour une charge thermique (a) : Densité flux suivant x, (b) : Densité flux suivant y.

on remarque qu'il y'a une variation de la densité flux varié entre $-3 * 10^{-10} w/m^2$ et $5 * 10^{-10} w/m^2$

A.2 Pour le maillage triangulaire 2

On augmente le nombre d'éléments de maillage tout en préservant le type et les caractéristiques du matériau (voir figure III.16).

2120 Noeuds

1013 Éléments

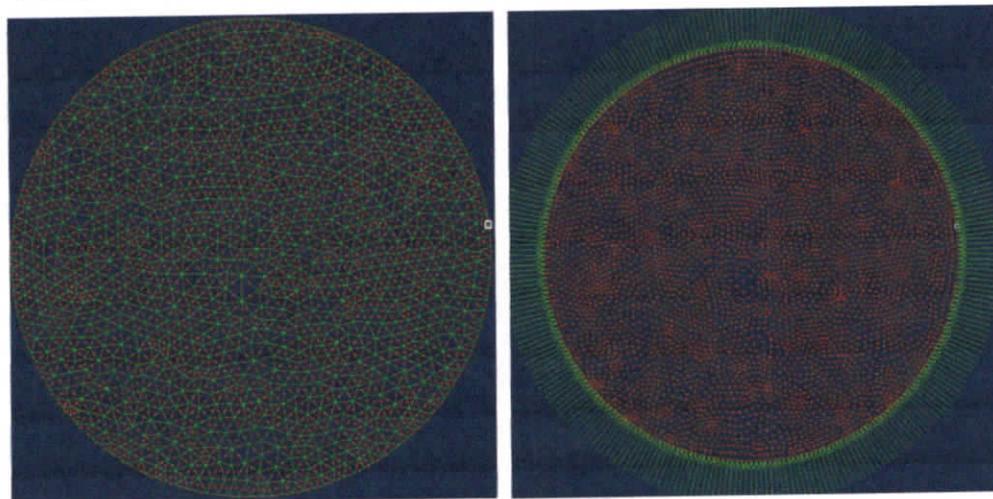
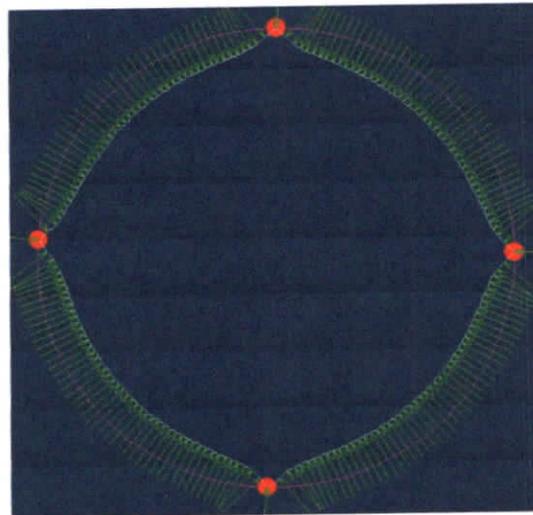
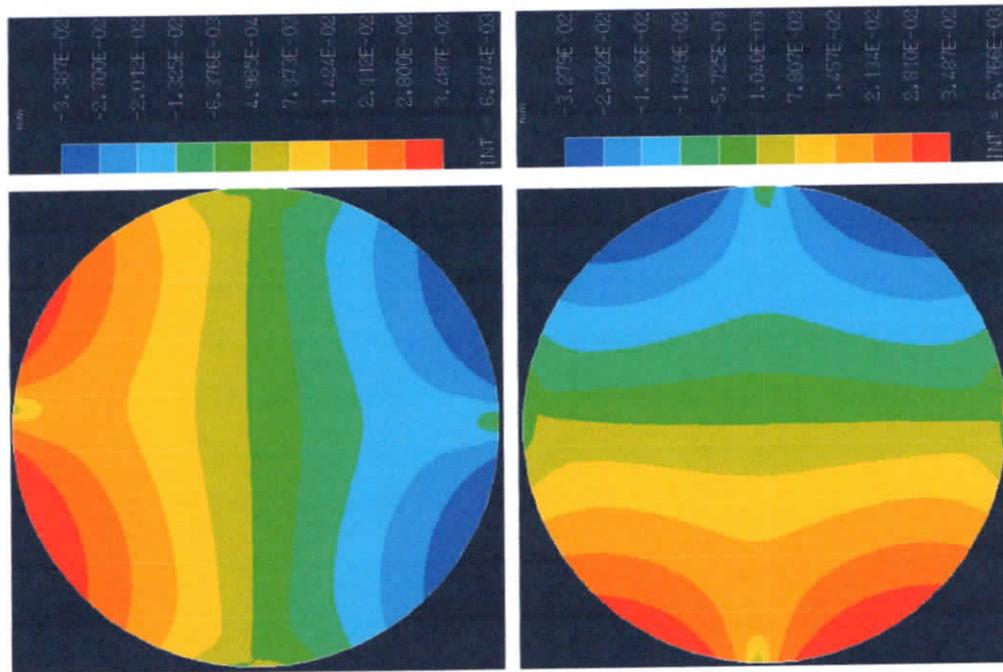


Figure III.16 - Différentes opération sur la plaque (a) Nouveaux maillage , (b) Cas de charge appliquée.

Résultats obtenus après changement de maillage pour une charge mécanique appliqué à l'extérieure de la plaque (voir figure III.17).



(a)



(b)

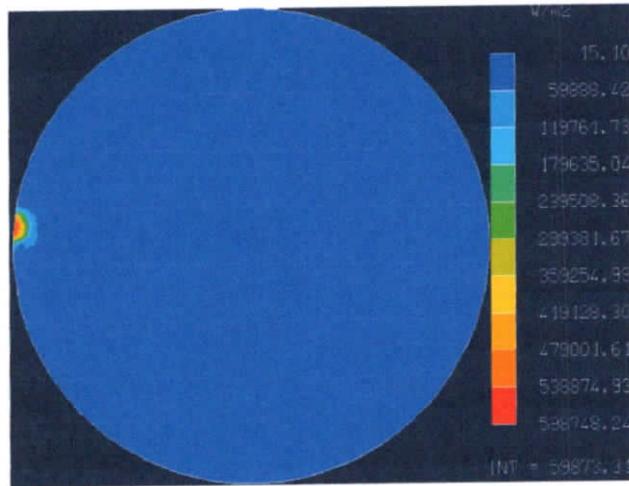
(c)

Figure III.17 – Nouveaux résultats avec une charge mécanique, (a) : Déformation de plaque ,(b) : Déplacement vers x, (c) : Déplacement vers y.

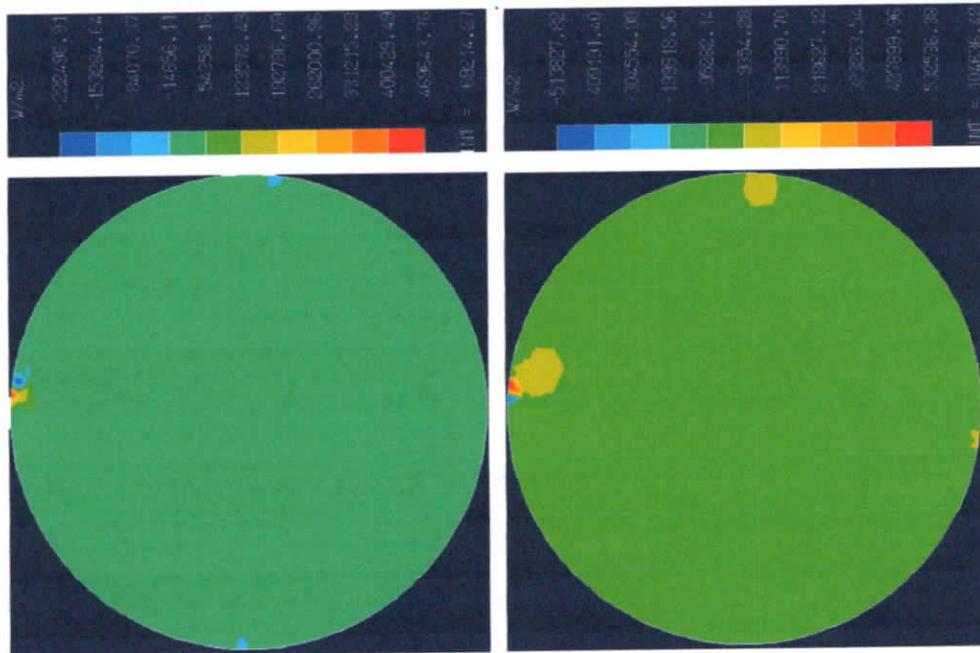
D'après les résultats des figures (III.13 , III.17) que nous avons acquis dans le cas des charges mécaniques, on remarque que à chaque fois que nous augmentons le nombre des éléments du maillage, la déformation dans chaque éléments est diminuée.

Nouveaux resultat pour une charge thermique tel que :

- Température nodal imposé 100k
- Source de chaleur nodale 50w



(a)



(b)

(c)

Figure III.18 – Nouveaux résultat avec une charge thermique, (a) : Densité flux, (b) : Densité de flux suivant x, (c) : Densité de flux suivant y.

D'après les résultats que nous avons acquis dans le cas des charges thermiques (figure III.15,III.18), la densité flux des charges thermique est augmentée.

III.5.1.2 Ronde en verre

Simulation pour les caractéristiques suivantes :

- Module d'Young = 60000 MPa
- Coefficient de Poisson = 0.25
- Module de cisaillement = 24000 MPa

La figure III.19 représente les résultats obtenus pour une charge mécanique :

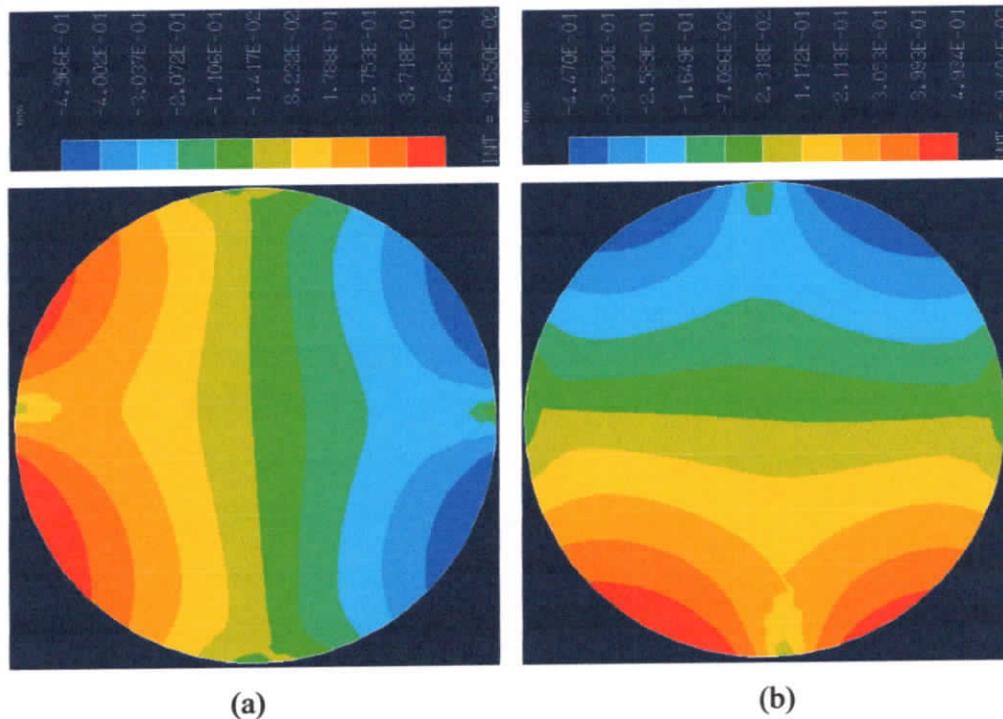


Figure III.19 – Résultat pour charge mécaniques (a) : Déplacement sur x, (b) : Déplacement sur y.

D'après les résultats des charges mécaniques de la plaque en verre (figure III.13, III.19), on remarque que la déformation est plus grande que la déformation pour la plaque en acier.

Résultat pour une charge thermique :

- Température nodal imposé 100k
- Source de chaleur nodale 50w

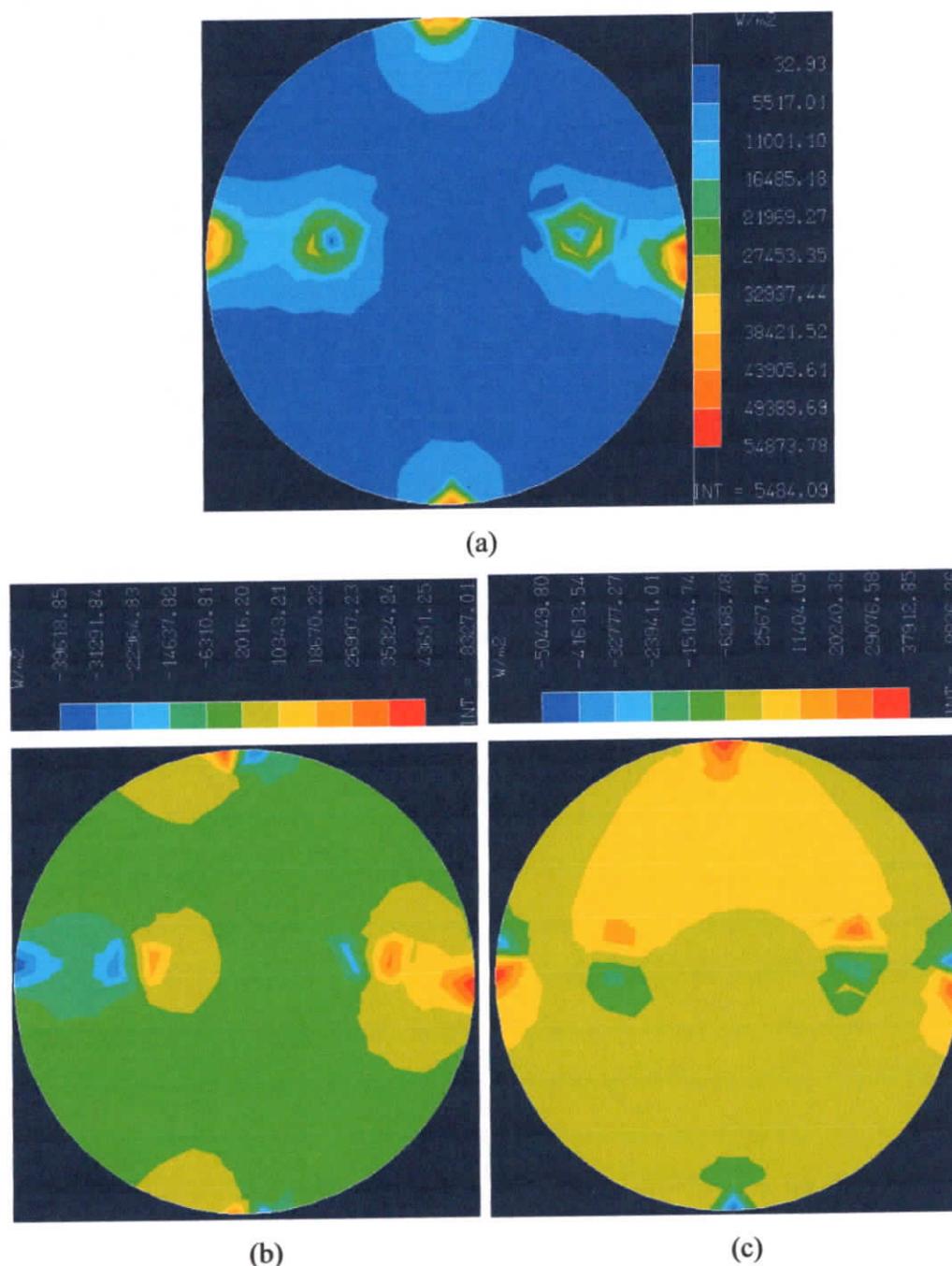


Figure III.20 – Résultat pour matériaux verre, (a) : Densité flux, (b) : Densité de flux sur x
(c) : Densité de flux sur y.

D’après les résultat des figures (III.15,III.20), on remarque que les charges thermiques pour la ronde en verre sont plus grandes que les charges thermiques pour la ronde en acier.

III.5.2 simulation de la plaque carrée

III.5.2.1 Plaque carrée en verre

- Module d'Young = 60000 MPa
- Coefficient de Poisson = 0.25
- Module de cisaillement = 24000 MPa

B.1 Pour le maillage 1

Qualité de maillage quadrangle à 4 nœuds et 400 éléments

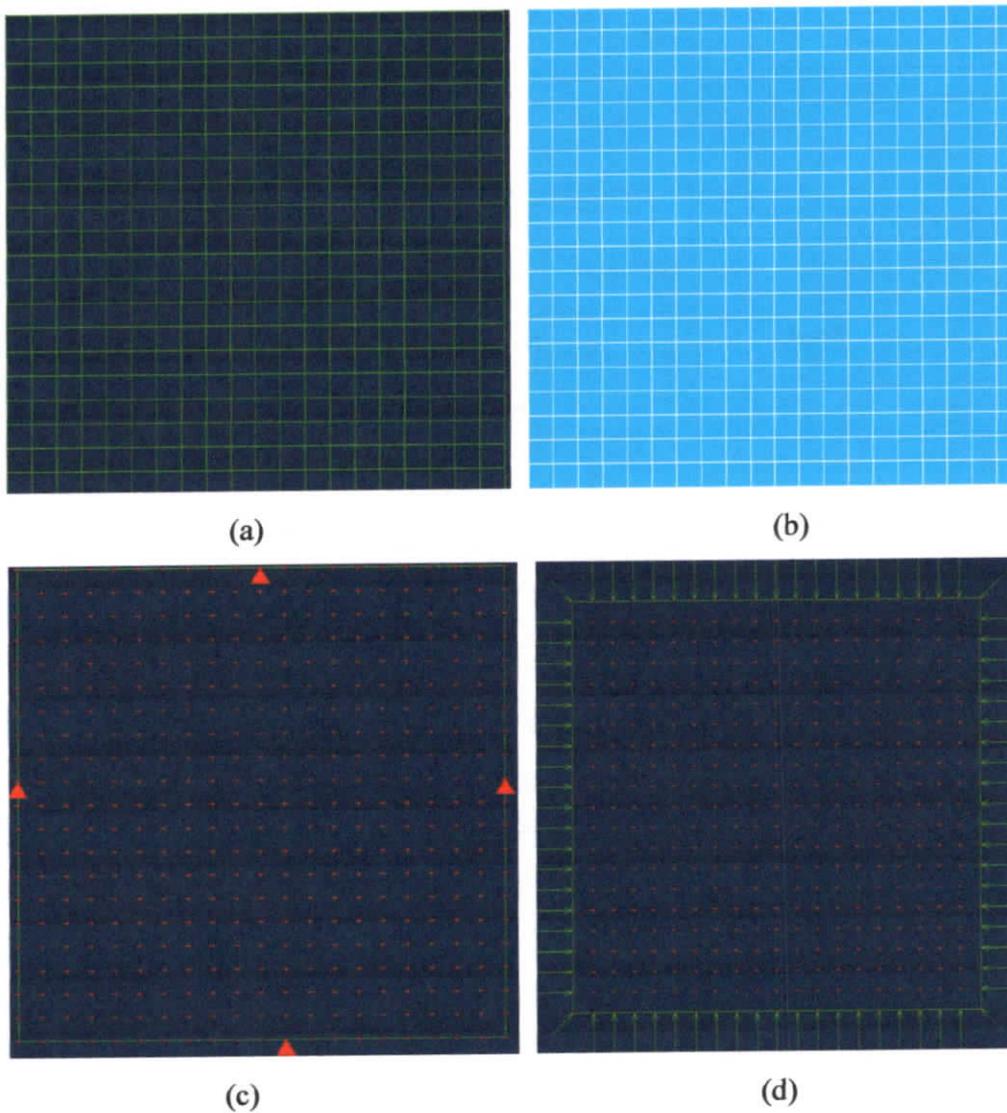


Figure III.21 - (a) : Maillier la plaque (carrée), (b) : Définir le matériaux (carrée) ,
(c) : La forme des apuis, (d) : La forme de charge.

Résultat obtenue pour une charge mécanique appliqué à l'extérieure de la plaque :

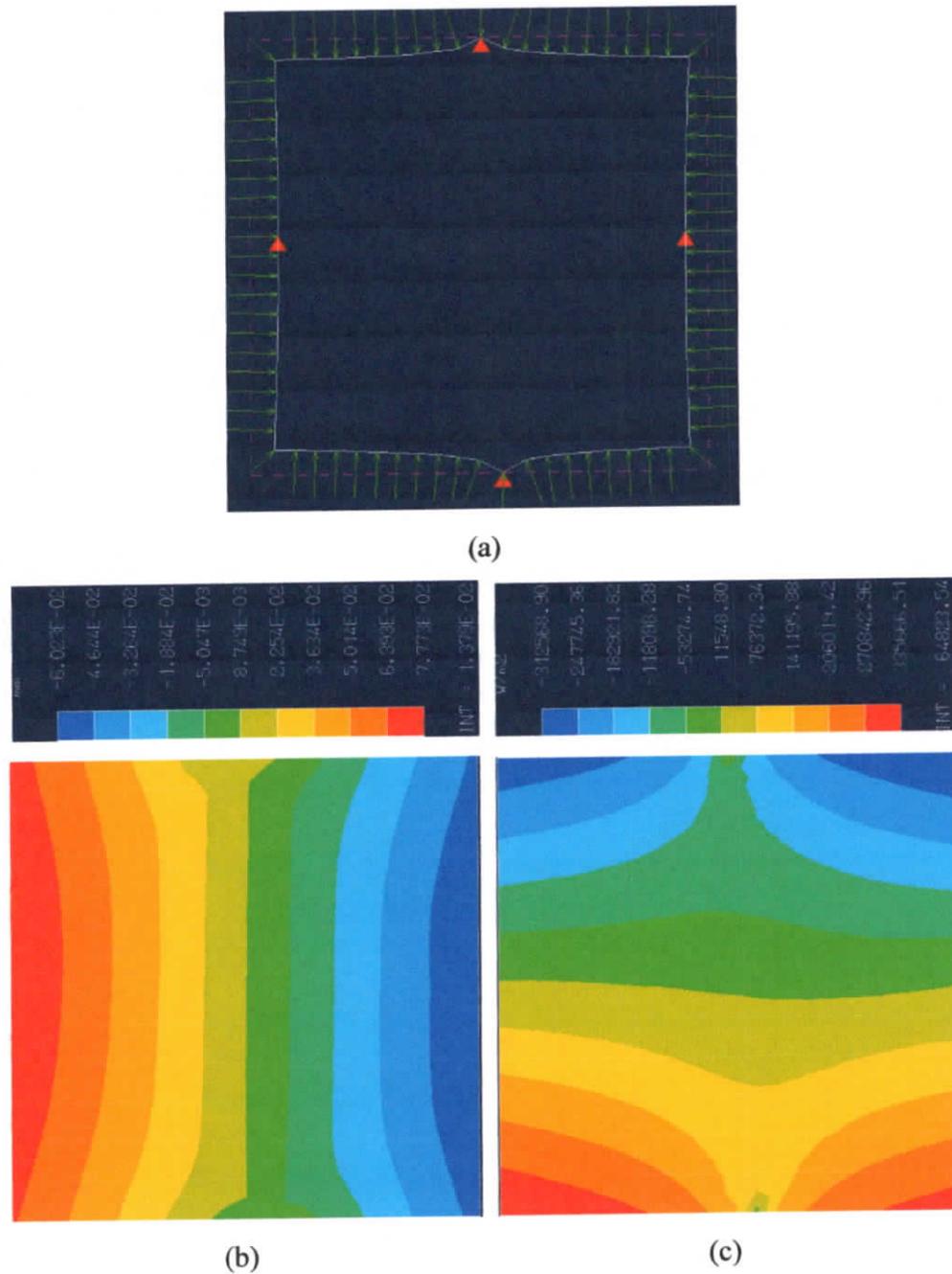


Figure III.22 - Résultat de cas de charge mécanique, (a) : Déformation de la plaque, (b) : Déplacement sur x, (c) : Déplacement sur y.

Résultat obtenu pour une charge thermique figure III.23.

- Température nodal imposée 100k
- Source de chaleur nodale 50w

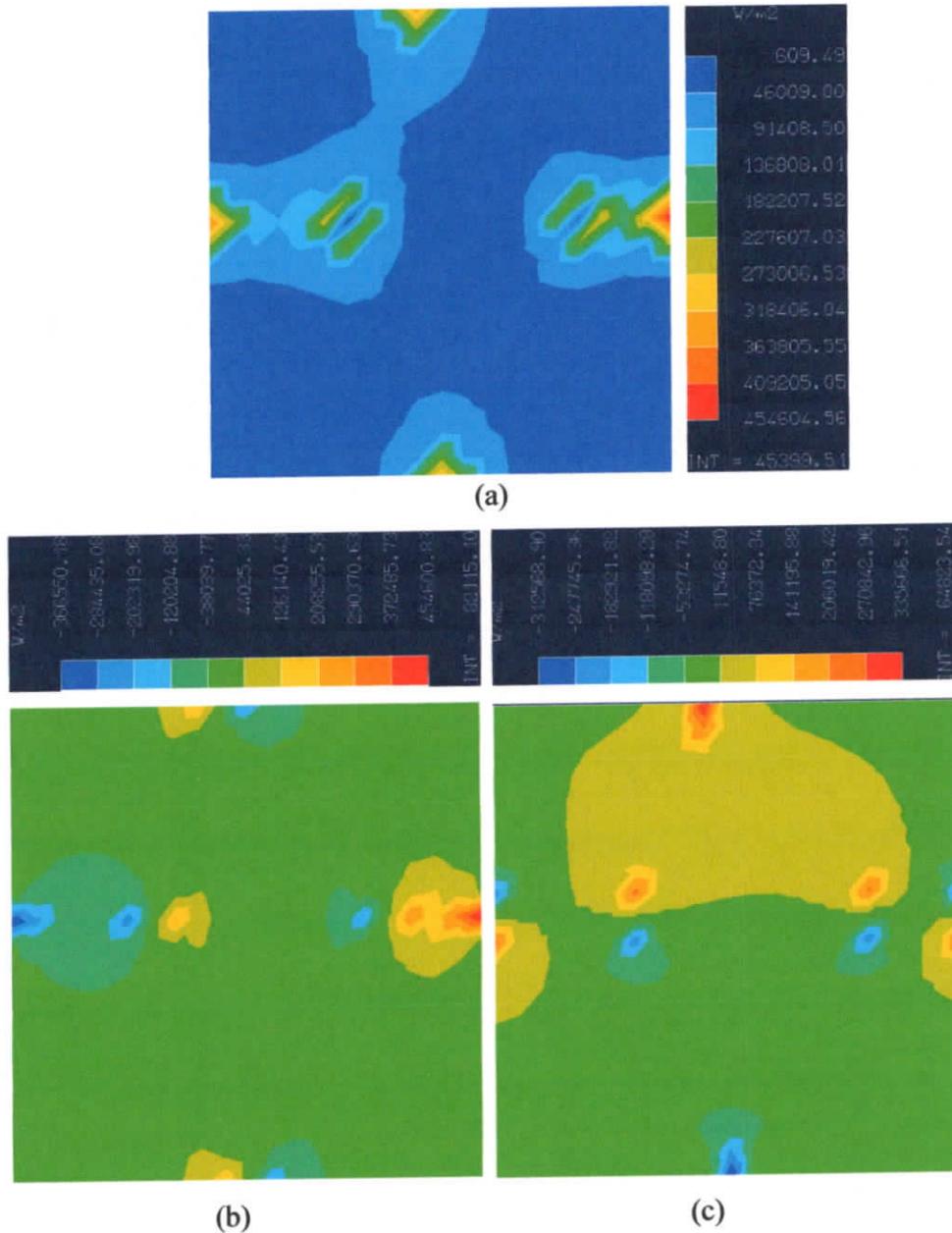


Figure III.23 – Résultat pour charge thermique, (a) : Densité flux, (b) : Densité de flux Sur x, (d) : Densité de flux sur y.

B.2 Pour le maillage 2

On change le type de maillage (maillage triangulaire à 6 noeuds) tout en préservant le type et les caractéristiques des matériaux.

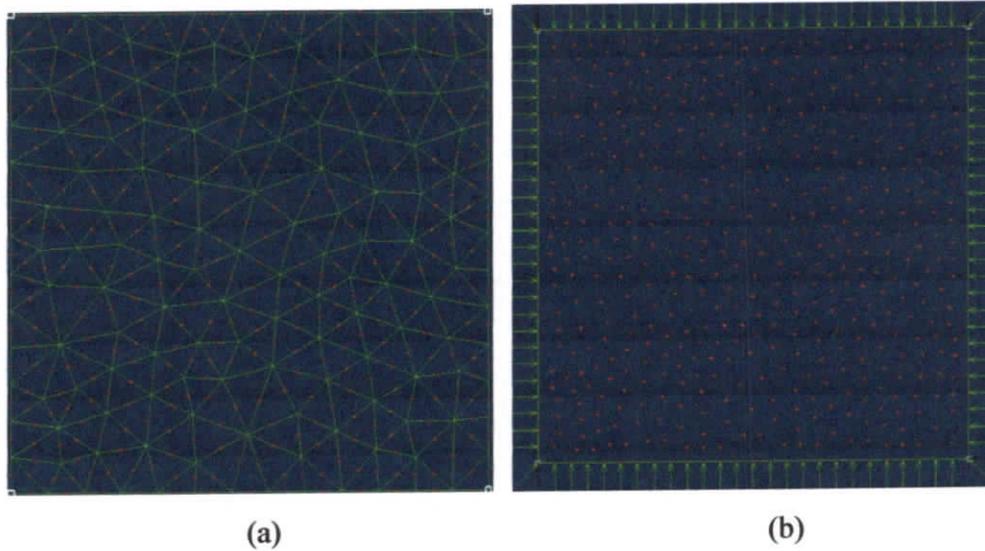


Figure III.24 – (a) : Maillage triangulaire, (b) : Cas de charge.

Résultat obtenue après changement du type de maillage pour une charge mécanique appliqué à l'extérieur de la plaque :

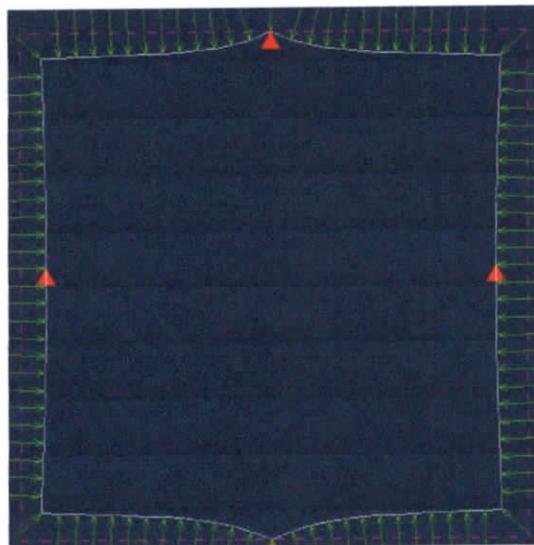


Figure III.25 – déformation de la plaque.

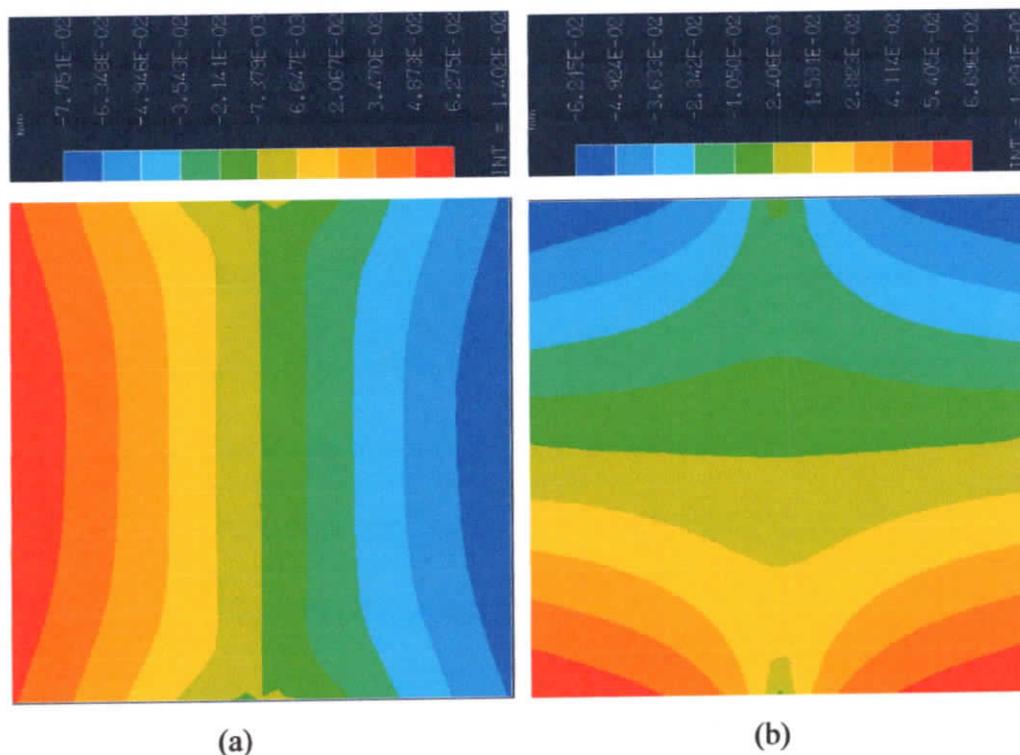
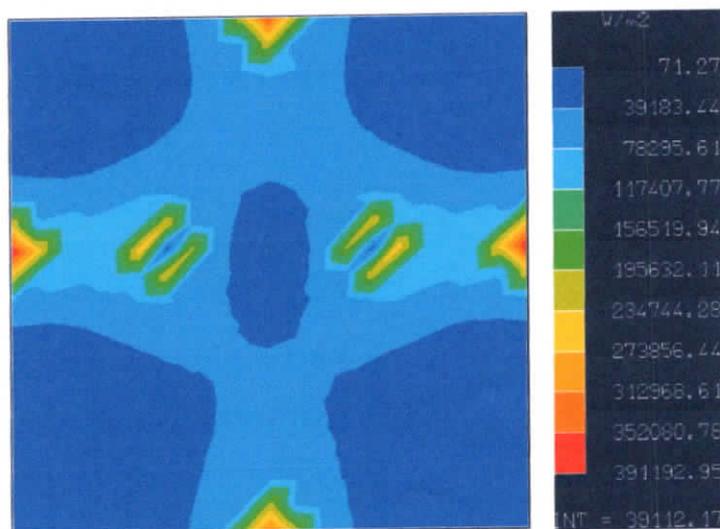


Figure III.26 – Nouveaux résultats pour charge mécanique, (a) : Déplacement sur x, (b) : Déplacement sur y.

D'après les résultats de changement du type de maillage (figures III.22, III.26), on remarque que la déformation sur y de la plaque carrée au maillage triangulaire est plus grande que la déformation de la plaque carrée au maillage quadrangle.

Résultat obtenu pour une charge thermique :

- Température nodal imposé 100k
- Source de chaleur nodale 50w



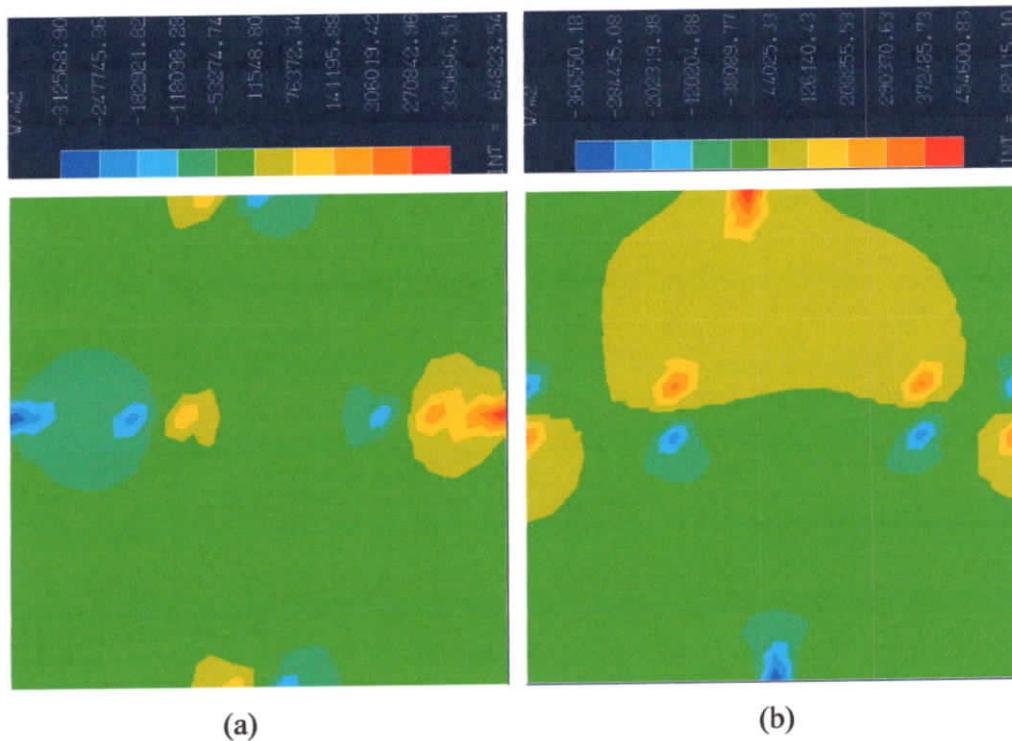


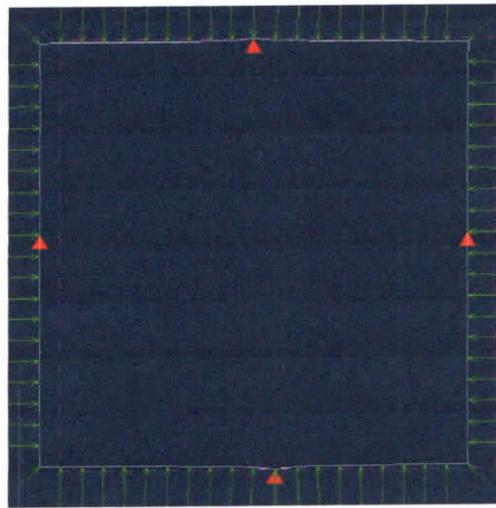
Figure III.28 - (a) : Densité de flux Sur x, (d) : Densité de flux sur y.

D'après les résultats de changement du type de maillage (figures III.23, III.28), on remarque que la densité flux de la plaque carrée au maillage triangulaire est plus grande que la densité de la plaque carrée au maillage carré.

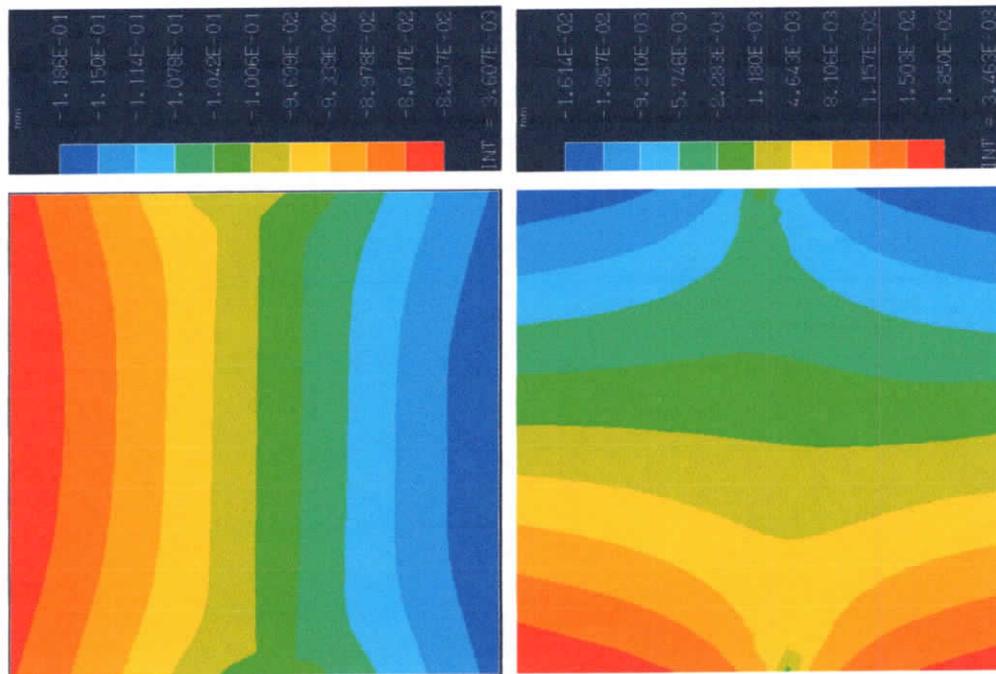
III.5.2.2 Plaque carré en matériau acier

- Module d'Young [MPa] = 210000
- Coefficient de poisson = 0.3
- Masse volumique [Kg/m³] = 7800
- Nombre d'épaisseur = 10 mm
- Qualité de maillage quadrangle à 400 éléments

Donc le résultat obtenu pour une charge mécanique :



(a)



(b)

(c)

Figure III.29 – (a) : Déformation de plaque, (b) : Déplacement sur x, (c) : Déplacement sur y.

D'après les résultats mécaniques de simulation de la plaque en acier (figure III.22, III.29) on remarque que la déformation de la plaque est diminuée.

Résultats obtenus pour une charge thermique :

- Température nodal imposée 100k
- Source de chaleur nodale 50w

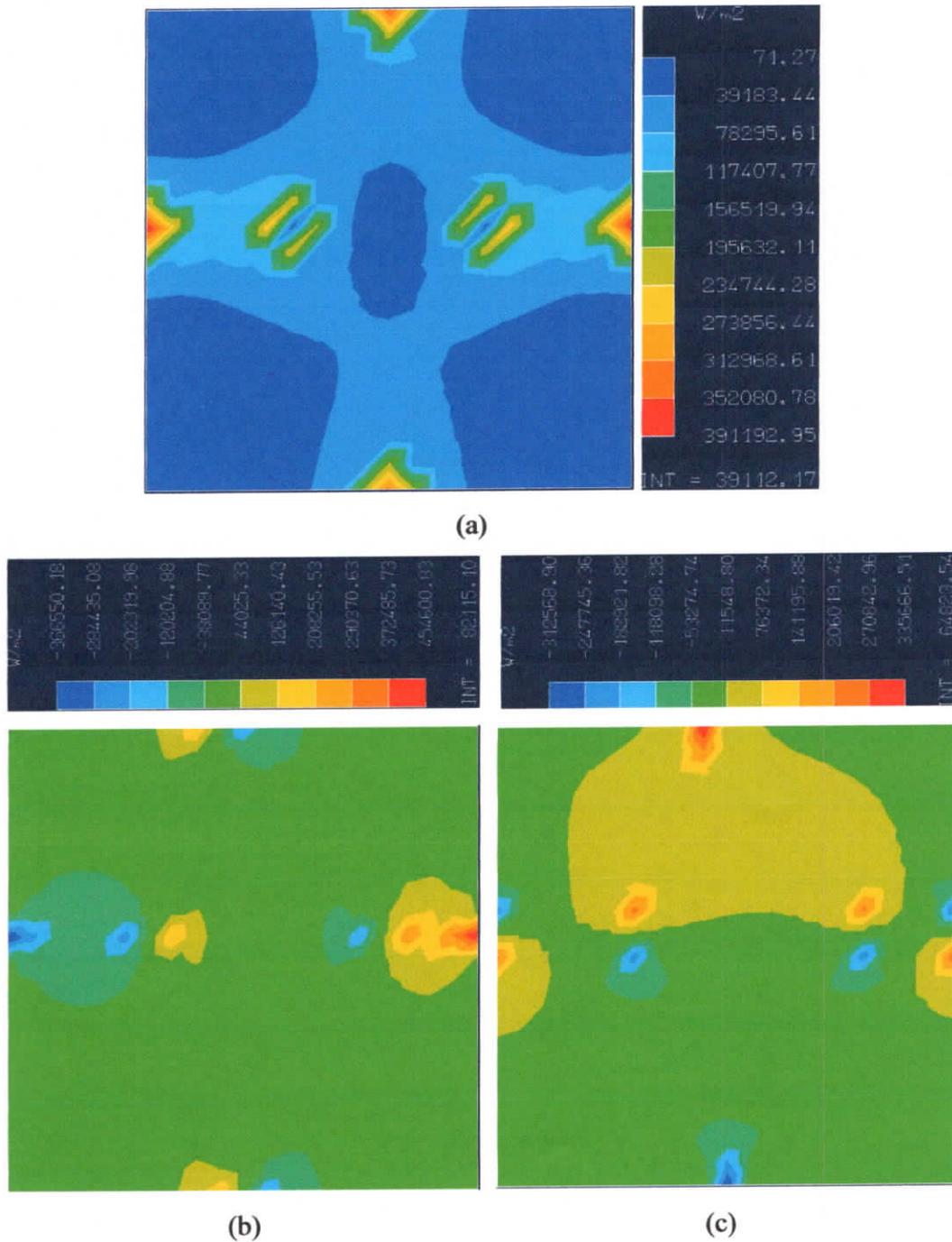


Figure 3.30 – (a) : Densité flux, (b) : Densité de flux suivant x, (c) : Densité de flux suivant y.

D'après les résultats des charges thermiques de simulation de la plaque en acier, on remarque que la densité du flux est diminuée.

III.5.2.3 Interprétation des résultats de simulation des plaques

A partir des résultats de la simulation des plaques obtenus, on peut tester la résistance du matériau qui correspond à l'étude de déformation pour une charge mécanique et la densité flux pour une charge thermique par le changement des différentes caractéristiques de la plaque (maillage, type du matériau et la forme du plaque). La méthode des élément finis est fiable pour simuler le contrôle non destructif.

III.6 Avantage et désavantage de cette simulation

a. Avantages

- Étudiez le comportement d'un système sans le construire.
- Les résultats sont précis en général par rapport au modèle analytique.
- Aide à trouver un phénomène non attendu, le comportement du système.
- Les enseignants-étudiants sont aidés de diverses façons, bien que la formation simulée. Cela contribue à développer une confiance en soi parmi eux
- Cette technique aide à relier la théorie à la pratique de l'enseignement.
- Cela aide à développer l'efficacité des étudiants-enseignants et à prédire les conséquences de l'enseignement avant d'aller dans la classe réelle.

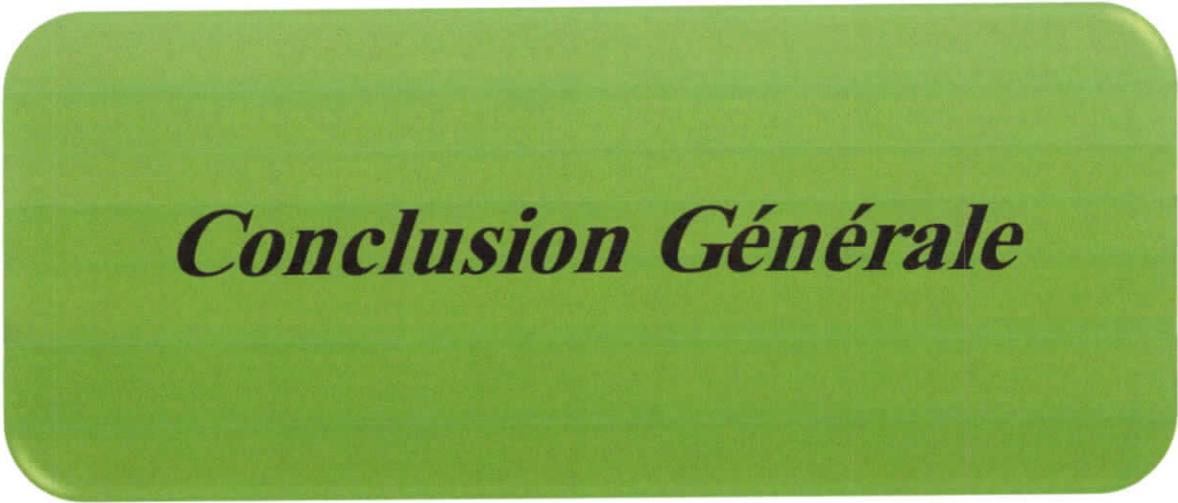
b. Désavantages

- En simulation, le jeu de rôle se fait dans des situations artificielles qui ne sont pas psychologiques et impraticables.
- Il faut la surveillance en formant du personnel qui n'est généralement pas disponible ou pas dévoué à leurs fonctions.
- Les tentatives de simulation pour représenter les situations réelles d'une manière simple, qui en général, sont très complexes sont difficiles.
- Cher à construire un modèle de simulation.
- Parfois, il est difficile d'interpréter les résultats de la simulation [24].

III.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons effectué une expérience pratique du contrôle non destructif par ultrason sur des échantillons de différent type de matériau., Cette expérience divisée en deux parties : par immersion et par contact. Pour détecter les défauts et les caractéristiques des échantillons des différents matériaux. Des résultats obtenus on peut détecter la présence de défaut et calculer les propriétés des échantillons.

On a vu aussi dans ce chapitre la simulation des différents plaques rond et carré à l'aide du logiciel de simulation RDM6 pour tester la résistance du matériau des plaques (déformation et densité flux) après le changement du maillage (type ou nombre des éléments), type de matériau et la forme de la plaque.



Conclusion Générale

Conclusion Générale

Dans ce mémoire nous avons appliqué la méthode des éléments finis au contrôle non destructif. Elle est applicable pour plusieurs domaines et diffère d'une application à une autre et d'un domaine à un autre.

Nous avons vu dans le premier chapitre un rappel bref sur le contrôle non destructif qui est présentés par un ensemble de méthodes d'investigation qui permet d'examiner l'état des pièces sans la détruire, nous avons introduit ses différentes techniques, et ses domaines d'application.

Dans le second chapitre, on a donné un aperçu sur les principes généraux de la méthode des éléments finis, son principe de fonctionnement ainsi que le domaine d'application.

Dans le troisième chapitre, nous avons réalisé une expérience pratique du contrôle non destructif sur des échantillons de différents matériaux au laboratoire NDT. Les résultats obtenus montrent clairement que l'étude expérimentale est insuffisante pour la caractérisation des échantillons et la détection des défauts à cause des problèmes rencontrés durant notre expérience que nous avons cités déjà.

On a utilisé la méthode des éléments finis pour traiter le comportement thermique et mécanique de la structure des plaques de différentes formes et de différents types de matériaux par logiciel de simulation par l'élément fini RDM6, et aussi pour étudier la variation de la déformation des plaques sous contraintes.

Après plusieurs simulations et tests par différents types de maillages, différents types de matériaux, on trouve des résultats acceptables, et nous avons vu que les résultats optimaux pour un échantillon dépendent du bon choix du maillage et du type de matériau.

A l'issue de ces travaux, ce mémoire ouvre de nouvelles perspectives de recherche parmi lesquelles nous citons :

- application de la méthode des éléments finis avec d'autres techniques de CND.
- détection et localisation des défauts avec d'autres types de matériaux.

- [1] *k. Selma, B. Sabrina*, " Contrôle non destructif par transformée en ondelette", mémoire de master en électronique université de Jijel 2015.
- [2] *A. bouazzouni*, " Détection et localisation d'endommagements des structures mécaniques linéaire, " mémoire de magistère de génie mécanique université de Tizi-Ouzou,2011.
- [3] *A. Abdou*, " Contrôle non destructif par courant de Foucault, étude et réalisation d'un capteur inductif ", université de batna,2006.
- [4] *A. Hakim Ridouh*, "méthode de traitement du signal pour signaux ultrasonores en control non destructif", mémoire de master en électronique, université de jijel,2011.
- [5] *M. Guellal*, " Résolution d'un problème thermique inverse pour la détermination des défauts à l'intérieur d'un corps solide ", mémoire de magister en énergétique et mécanique des fluide, université de Ferhat Abbas Sétif,2006.
- [6] *A. Eddine Lakhdar*, " Etude et modélisation de capteur CND par courant de Foucault : application a la détection des fissures ", mémoire de magister, université Mohamed khider-biskra,2011.
- [7] *B. Banks, G.E. Oldfield, H. Rawding*, "La détection ultrasonique des défauts Dans les matériaux eyrolles",1991.
- [8] *L. Oukhellon*, " Paramétrisation et classification de signaux en contrôle non destructif. Application à la reconnaissance des défauts de Rails par courant de Foucault ", thèse de doctorat, université de paris XI Orsay, juillet 2003.
- [9] *Yahya Choua*, " Application de la méthode des éléments finis pour la Modélisation de configurations de contrôle non destructif Par courants de Foucault ", Université Paris Sud - Paris XI, France, 2009.
- [10] *André Fortin*, " les éléments finis :de la théorie à la pratique", Département de mathématiques et de statistique, Université Laval,1997-2011.
- [11] *Evgeny Barkanov*, " introduction to the finite element methode", Institute of Materials and Structures, Faculty of Civil Engineering Riga Technical University,2001.
- [12] *Daniel Choi*, "méthode des éléments-finis par l'exemple", Université de Caen, Bld Marechal, France, avril 2010.

- [13] *J-H SAIAC*, Méthode des éléments finis. " Analyse numérique des Equations aux dérivées partielles ", Polycopie des cours de Calcul Scientifique CSC108 et CSC109, juin 2006.
- [14] *Site Web Wikipédia*, "définition de la méthode des éléments finis", [https://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9thode des%C3%A9l%C3%A9ments_finis](https://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9thode_des%C3%A9l%C3%A9ments_finis).
- [15] *Hervé Oudin*. " Méthode des éléments finis ". Engineering school. Ecole Centrale de Nantes, 2008.
- [16] *Laboratoire Jacques-Louis Lions*, " introduction à la méthode des éléments finis ". Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 4 place Jussieu, 75005 Paris V, France, 2006.
- [17] *Nabil Benhadda*, "Modélisation des Capteurs Inductifs à Courants de Foucault", Université de Batna, Septembre 2006.
- [18] *F. Ledoux*, " Topologie et maillage hexaédrique ", J.-C. Weill CEA - DAM Île-de-France, 2010.
- [19] *Coques Frey*, " Analyse des structures et milieux continus ", Marc-André Studer par François, 2006.
- [20] *Zhi-Qiang FENG (CM, TP)*, <http://lmee.univ-evry.fr/~feng> , Christine RENAUD (TD) <http://lmee.univ-evry.fr> , renaud Gregory TURBELIN (TP) Méthode des Eléments Finis, 2008.
- [21] *Pourroy (frank)*, " Apport des élément finis à la conception mécanique ", Technique de l'ingénieur, avril 1999.
- [22] *Site Web* , " Introduction à la simulation par éléments finis ", Ressource publiée sur EDUSCOL-STI : <http://eduscol.education.fr/sti/si-ens-cachan/>
- [23] *Help de logiciel RDM6 version 6.16*, "Notice d'utilisation RDM le mans", 28 mars 2011.
- [24] *Site web* : www.formation-industries-paysdelaloire.fr.