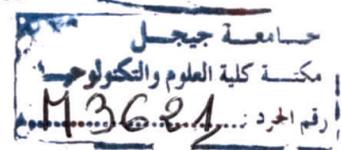


République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université Mohammed Seddik Benyahia - Jijel
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département d'Automatique



Mémoire de fin d'étude pour l'obtention du diplôme
Master en Automatique

Option : Automatique et Informatique Industrielle



Thème :

Détection de modes pour la
synchronisation des systèmes chaotiques

Réalisé par :

-MEGUEHOUT Mohammed Elhadi
-LAOUAOU DJA Walid

Encadré par :
Dr. HALIMI Meriem

Année Universitaire 2016/2017

Remerciements

Tout d'abord, nous tenons à remercier Allah, le clément et le miséricordieux de nous avoir donné la force, le courage et la patience pour mener à bien ce travail.

Nous voudrions aussi exprimer nos vifs remerciements à notre encadreuse Dr «Meriem HALIMI» pour sa sollicitude, disponibilité et ces précieux conseils.



Nous voudrions remercier tous les enseignants de l'université de Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel qui ont contribué à notre formation.

Nos remerciements vont également à tous ceux et celles qui, de près ou de loin, nous ont apporté aide et encouragement.

Qu'ils trouvent ici l'expression de notre profonde gratitude.

Dédicace

Je dédie ce travail à :

*Mes parents, mes frères et mes sœurs ainsi que mes
amis et collègues pour leur soutien et
encouragement.*

Walid

Dédicace

Je dédie ce travail à :

Ma très chère mère

*À la mémoire de mon père qui en aurait été, j'en suis
convaincue, très fière*

A mes sœurs

*A tous nos camarades d'étude de la promotion
Automatique et informatique industrielle.*



Mohammed Elhadi

TABLE DES MATIERES

<i>Table des matières</i>	i
<i>Liste des figures</i>	iv
<i>Liste des tableaux</i>	vi
<i>Notations</i>	vii
<i>Introduction Générale</i>	01
<i>Chapitre I : Généralités sur les systèmes chaotiques</i>	
I.1 Introduction.....	03
I.2 Définition des systèmes dynamiques	03
I.3 Définition du chaos.....	04
I.4 Définition d'un système chaotique.....	05
I.5 Caractéristiques des systèmes chaotiques.....	05
I.5.1 Aspect aléatoire	06
I.5.2 Déterminisme.....	06
I.5.3 Sensibilité aux conditions initiales.....	06
I.5.4 Attracteur étrange.....	06
I.6 Exposants de Lyapunov.....	06
I.6.1 Calcul des exposants de Lyapunov.....	07
I.7 Exemples des systèmes chaotiques.....	09
I.7.1 Systèmes chaotiques en temps continu.....	09
a) Système de Lorenz.....	09
b) Système de Rössler.....	10
c) Système de Liu.....	11
d) Système de Chua.....	11

e) Système des finances.....	12
I.7.2 Systèmes chaotiques en temps discret.....	13
I.7.2.1 Systèmes chaotiques discrets dans le plan.....	13
a) Récurrence de Hénon.....	13
b) Récurrence de Lozi.....	13
c) Récurrence de Duffing.....	14
d) Récurrence d'Ikeda.....	15
e) Récurrence de Lorenz discret.....	15
f) Récurrence de Flow.....	16
I.7.2.2 Systèmes chaotiques discrets dans l'espace.....	17
a) Récurrence de Hitzl-Zele.....	17
b) Récurrence de Baier-Klein.....	17
I.8 Application des chaos.....	18
I.9 Domaines d'application des chaos.....	18
I.10 Conclusion.....	18

Chapitre II : Synchronisation des systèmes chaotiques

II.1 Introduction.....	20
II.2 Définition de la synchronisation.....	20
II.3 Types de synchronisation.....	21
II.3.1 Synchronisation complète.....	21
II.3.2 Anti-synchronisation.....	22
II.3.3 Synchronisation projective.....	22
II.3.4 Synchronisation généralisée.....	22
II.3.5 Synchronisation Lag.....	23
II.3.6 Synchronisation anticipée.....	23
II.4 Méthodes de synchronisation.....	23
II.4.1 Synchronisation basée sur la partition du système.....	23
II.4.2 Synchronisation par boucle fermée.....	25
II.4.3 Synchronisation par l'inversion du système.....	25

II.4.4	Synchronisation impulsive.....	26
II.4.5	Synchronisation à l'aide d'observateur.....	27
II.4.6	Synchronisation par la commande Backstepping.....	28
II.5	Exemple numérique.....	31
II.6	Conclusion.....	35

Chapitre III : Détection de modes fondée sur les équations de parité

III.1	Introduction.....	36
III.2	Systèmes à commutation – définition formelle.....	36
III.3	Méthode de détection de mode fondée sur les équations de parité.....	37
III.3.1	Problématique.....	37
III.3.2	Principe des équations de parité.....	38
III.3.3	Estimation de la séquence active σ^*	39
III.3.4	Unicité de la solution.....	40
III.3.5	Choix de l'horizon de détection h	41
III.4	Conception d'observateur.....	41
III.5	Exemple numérique.....	42
III.6	Conclusion.....	49

Chapitre IV : Application à la synchronisation des systèmes chaotiques à retard

IV.1	Introduction.....	50
IV.2	Présentation des systèmes chaotiques à retard	50
IV.3	Formulation hybride.....	51
IV.4	(n, w) -discernabilité	53
IV.5	Exemple numérique.....	56
IV.6	Conclusion.....	63

	<i>Conclusion Générale</i>	64
--	---	----

	<i>Bibliographie</i>	66
--	-----------------------------------	----

LISTE DES FIGURES

Figure I.1	Système chaotique de Lorenz.....	10
Figure I.2	Système chaotique de Rössler.....	10
Figure I.3	Système chaotique de Liu.....	11
Figure I.4	Système chaotique de Chua.....	12
Figure I.5	Système chaotique des finances.....	12
Figure I.6	Récurrence chaotique de Hénon.....	13
Figure I.7	Récurrence chaotique de Lozi.....	14
Figure I.8	Récurrence chaotique de Duffing.....	14
Figure I.9	Récurrence chaotique d'Ikeda.....	15
Figure I.10	Récurrence chaotique de Lorenz discret.....	16
Figure I.11	Récurrence chaotique de Flow.....	16
Figure I.12	Récurrence chaotique de Hitzl-Zele.....	17
Figure I.13	Récurrence chaotique de Baier-Klein.....	18
Figure II.1	Synchronisation par partition du système.....	24
Figure II.2	Synchronisation par boucle fermée.....	25
Figure II.3	Synchronisation par l'inversion du système.....	26
Figure II.4	Synchronisation impulsive.....	26
Figure II.5	Comportement des deux systèmes avant la synchronisation.....	32
Figure II.6	Comportement des deux systèmes après la synchronisation	34
Figure II.7	Evolution de l'erreur de synchronisation.....	34
Figure II.8	Evolution de la loi de commande u	35
Figure III.1	Synchronisation des systèmes à commutation à l'aide d'observateur....	38
Figure III.2	Séquence active σ et séquence estimée σ^*	46
Figure III.3	Evolution du vecteur d'état du maître x_k et de l'esclave \hat{x}_k	47

Figure III.4	Evolution de l'erreur de synchronisation $e_k = x_k - \hat{x}_k$	48
Figure IV.1	Synchronisation des systèmes chaotiques à retard à l'aide d'observateur.....	56
Figure IV.2	Attracteur chaotique de Lozi avec et sans injection du retard.....	57
Figure IV.3	Séquence active σ et séquence estimée σ^*	59
Figure IV.4	Retard τ et retard estimé τ^*	60
Figure IV.5	Evolution du vecteur d'état du maître x_k et de l'esclave \hat{x}_k	61
Figure IV.6	Evolution de l'erreur de synchronisation $e_k = x_k - \hat{x}_k$	62

Notations

\mathbb{N}	Ensemble des entiers
\mathfrak{R}	Ensemble des nombres réels
\mathfrak{R}^n	Ensemble des nombres réels de dimension n
$\mathbf{1}$	Matrice unité de dimension appropriée
$\mathbf{0}$	Matrice zéro de dimension appropriée
λ_L	Exposants de Lyapunov
λ	Valeurs propres
x_k	Vecteur d'état d'un système dynamique en temps discret
$x(t)$	Vecteur d'état continu du maître
$\hat{x}(t)$	Vecteur d'état continu de l'esclave
\hat{x}_k	Vecteur d'état discret de l'esclave
y_k	Sortie en temps discret
$y(t)$	Sortie en temps continu
$e(t), e_k$	Erreur de synchronisation
V	Fonction de Lyapunov
$O_{\sigma[k-h,k]}$	Matrice d'observabilité dans la fenêtre d'observation finie $[k - h, k]$
σ^*	Séquence de modes estimée
σ	Séquence de modes active
$\Omega_{\sigma[k-h,k]}$	Noyau à gauche de la matrice d'observabilité $O_{\sigma[k-h,k]}$
$ \cdot $	Valeur absolue
h	Taille de L'horizon de détection
$L_{\sigma(k)}$	Gain d'observateur
u, u_k	Loi de commande
σ	Loi de commutation
r_{h,σ_s}	Résidus
$T_{\sigma[k-h,k]}$	Matrice d'entrée
$T'_{\sigma[k-h,k]}$	Matrice de transfert direct
$y_{k-h,k}$	Vecteur des sorties successives y_k dans la fenêtre d'observation finie $[k - h, k]$
$u_{k-h,k}$	Vecteur des entrées successives u_k dans la fenêtre d'observation finie $[k - h, k]$

\mathfrak{J} Ensemble contenant les valeurs de $\sigma(k)$, $\sigma(k) \in \mathfrak{J}$

$\|\cdot\|$ Norme euclidienne

Chapitre I

Généralités sur les systèmes chaotiques

Sommaire

I.1	Introduction.....	03
I.2	Définition des systèmes dynamiques	03
I.3	Définition du chaos.....	04
I.4	Définition d'un système chaotique.....	05
I.5	Caractéristiques des systèmes chaotiques.....	05
I.5.1	Aspect aléatoire	06
I.5.2	Déterminisme.....	06
I.5.3	Sensibilité aux conditions initiales.....	06
I.5.4	Attracteur étrange.....	06
I.6	Exposants de Lyapunov.....	06
I.6.1	Calcul des exposants de Lyapunov.....	07
I.7	Exemples des systèmes chaotiques.....	09
I.7.1	Systèmes chaotiques en temps continu.....	09
a)	Système de Lorenz.....	09
b)	Système de Rössler.....	10
c)	Système de Liu.....	11
d)	Système de Chua.....	11
e)	Système des finances.....	12
I.7.2	Systèmes chaotiques en temps discret.....	13
I.7.2.1	Systèmes chaotiques discrets dans le plan.....	13
a)	Récurrence de Hénon.....	13
b)	Récurrence de Lozi.....	13
c)	Récurrence de Duffing.....	14
d)	Récurrence d'Ikeda.....	15
e)	Récurrence de Lorenz discret.....	15
f)	Récurrence de Flow.....	16
I.7.2.2	Systèmes chaotiques discrets dans l'espace.....	17
a)	Récurrence de Hitzl-Zele.....	17
b)	Récurrence de Baier-Klein.....	17
I.8	Application des chaos.....	18
I.9	Domaines d'application des chaos.....	18
I.10	Conclusion.....	18

Introduction Générale

Pendant plusieurs siècles de l'histoire de la science et jusqu'à la fin du dix-neuvième siècle, les scientifiques interprétaient les phénomènes naturels par la physique déterministe. Dans la conception déterministe, l'état présent d'un phénomène physique est l'effet d'un état antérieur et la cause d'un état futur. Néanmoins, plusieurs comportements complexes qui existaient à cette époque tels que les phénomènes météorologiques ne trouvaient pas d'explication avec cette vision déterministe. Au début du vingtième siècle, Henri Poincaré a expliqué ces phénomènes par leur sensibilité aux conditions initiales. En 1967, Edwards Lorenz a présenté un système dynamique déterministe ayant un comportement complexe manifesté par un attracteur étrange et caractérisé par une forte sensibilité aux conditions initiales. Quatre ans plus tard, James Yorke a introduit pour la première fois le terme chaos pour décrire les systèmes déterministes et imprévisibles. Depuis ces découvertes, la théorie du chaos a trouvé diverses applications en mathématiques, en physique, en électronique, en biologie, en médecine et plus récemment en télécommunications. On trouve dans la littérature plusieurs définitions mathématiques du chaos, mais jusqu'à présent, il n'existe aucune définition mathématique universelle du chaos. Les nouvelles méthodes d'analyse des systèmes dynamiques qui ont été développées considèrent les systèmes chaotiques comme étant des systèmes non linéaires présentant des trajectoires globalement bornées et localement instables [Dimassi, 2012].

Dans la littérature plusieurs concepts de synchronisation chaotique ont été proposés tout d'abord avec les travaux de Yamada et Fujisaka [Yamada and Fujisaka, 1983] [Yamada et Fujisaka, 1984] qui ont utilisé une approche locale de la synchronisation chaotique. Par la suite Afraimovich, Verchev et Rabinovich [Afraimovich et al, 1983] ont développé les concepts importants liés à la synchronisation chaotique et ultérieurement Pecora et Carroll [Pecora and Carroll, 1990] ont défini la synchronisation chaotique connue sous le nom de synchronisation identique, développée sur la base de circuits chaotiques couplés, avec l'un maître et l'autre esclave, Ces travaux ont ouvert la voie des applications du chaos aux télécommunications [Luca, 2010].

Pour la synchronisation du chaos impliquant des systèmes affines à commutation, la détection de mode va révéler une question principale. En effet, les systèmes affines à commutation sont des systèmes pour lesquels les matrices de l'espace d'état peuvent prendre

des valeurs dans un ensemble fini de matrices. L'indice correspondant au système affine actif est appelé « mode » ou « état discret ». La façon avec laquelle les indices évoluent dans le temps suit une règle dite « loi de commutation ». Le problème de la détection de mode présente un intérêt important vu les nombreuses applications nécessitant la connaissance du mode. Notons que différentes terminologies ayant une signification semblable sont utilisées dans la littérature : la reconstruction de mode, la détection de mode ou l'estimation de mode [Halimi, 2013].

Le travail présenté dans ce mémoire de fin d'étude se situe dans le cadre de l'application de la détection de modes fondée sur les équations de parité pour la synchronisation à base d'observateur des systèmes chaotiques affines à commutations et les systèmes chaotiques affines à commutation à retard variable. Ainsi, pour bien présenter notre travail au lecteur, nous l'avons repartitionné en quatre chapitres :

- Au cours du premier chapitre, nous introduirons quelques notions relatives aux systèmes dynamiques d'une manière générale et aux systèmes chaotiques d'une manière détaillée. Le but est de présenter les caractéristiques du chaos, ainsi que quelques exemples de systèmes chaotiques à temps continu et discret.
- Le deuxième chapitre sera dédié à la synchronisation du chaos. On commencera par rappeler la définition de la synchronisation ainsi que ses différents types, puis, on rappellera quelques méthodes de synchronisation chaotique. Finalement, la dernière partie sera consacrée à l'application de l'algorithme backstepping pour la synchronisation de deux systèmes chaotiques de Rössler ayant des conditions initiales différentes. Les étapes de conception de la loi de commande assurant la synchronisation entre ces deux systèmes seront expliquées.
- Dans le troisième chapitre, nous allons appliquer la méthode de détection de modes fondée sur les équations de parité pour la synchronisation à base d'observateur des systèmes chaotiques affines à commutation.
- Tandis que le quatrième chapitre traitera l'application de la détection de mode pour l'estimation du retard variable inconnu, qui permettra ensuite de synchroniser le système à retard.
- Nous terminons notre travail par une conclusion générale.

I.1 Introduction

Depuis longtemps, le chaos était synonyme de désordre et de confusion, il s'opposait à l'ordre et devait être évité. La science était caractérisée par le déterminisme. La prévisibilité et la réversibilité. Poincaré fut l'un des premiers à entrevoir la théorie du chaos [Cherrier, 2006]. Il découvrit la notion de sensibilité aux conditions initiales à travers le problème de l'interaction de trois corps célestes.

Le chaos a ainsi trouvé de nombreuses applications dans les domaines tant physiques que biologique, chimique ou économique. Ainsi, nous nous intéresserons principalement dans ce chapitre au système dynamique chaotique en nous attardant sur les espaces de phase, les attracteurs étranges. Le but de ce chapitre est de présenter les principales notions liées au chaos.

I.2 Définition des systèmes dynamiques

Un système dynamique est un système classique qui évolue au cours du temps de façon à la fois :

- **Causale** : c'est-à-dire que son avenir ne dépend que de phénomènes du passé ou du présent ;
- **Déterministe** : c'est-à-dire qu'à une « condition initiale » donnée à l'instant « présent » va correspondre à chaque instant ultérieur un et un seul état « futur » possible.

L'évolution déterministe du système dynamique peut alors se modéliser de deux façons distinctes :

- Une évolution **continue** dans le temps, représentée par une équation différentielle ordinaire. C'est à priori la plus naturelle physiquement, puisque le paramètre temps nous semble continu.
- Une évolution **discontinue** dans le temps. Ce second cas est souvent le plus simple à décrire mathématiquement, même s'il peut sembler à priori moins réaliste physiquement. Cependant, l'étude théorique de ces modèles discrets est fondamentale, car elle permet de mettre en évidence des résultats importants, qui se généralisent souvent aux évolutions dynamiques continues.

I.3 Définition du chaos

Il n'existe pas de définition à la fois formelle et générale du chaos. Cependant, le chaos est défini généralement comme un comportement particulier d'un système dynamique qui inclut [Ouannas, 2015] :

- **La non-linéarité** : l'évolution irrégulière du comportement d'un système chaotique est due aux non linéarités.
- **Le déterminisme** : un système chaotique a des règles fondamentales déterministes et non probabilistes.
- **La sensibilité** : le système manifeste une très haute sensibilité aux changements de conditions.
- **L'imprévisibilité** : en raison de la sensibilité aux conditions initiales, qui peuvent être connues seulement à un degré fini de précision.
- **L'irrégularité** : l'ordre caché comprenant un nombre infini de modèles périodiques instables (ou mouvements). Cet ordre caché forme l'infrastructure des systèmes chaotiques

Le comportement chaotique peut être observé dans de nombreux systèmes naturels, comme les conditions météorologiques et le climat. Ce comportement peut être étudié par l'analyse d'un modèle mathématique chaotique, ou par des techniques d'analyse telles que des parcelles de récurrence et de section de Poincaré.

On trouve dans la littérature plusieurs définitions mathématiques du chaos, mais jusqu'à présent, il n'existe aucune définition mathématique universelle du chaos. Avant de donner la définition du chaos, due à R.L Devaney, quelques définitions de base sont nécessaires. Soit $(I \subset \mathbb{R}, d)$ désignant un espace métrique compact (d est une distance), et soit F la fonction :

$$F: I \rightarrow I, x_{k+1} = F(x_k), x_0 \in I \quad (I.1)$$

Définition I.1 Supposons que X est un ensemble et Y un sous-ensemble de X . Y est dense dans X si, pour n'importe quel élément $x \in X$, il existe un élément y dans le sous-ensemble Y arbitrairement proche de x , c'est-à-dire si la fermeture de Y est égale à X : $\bar{Y} = X$. Ce qui revient à dire que Y est dense dans X si pour tout $x \in X$ on peut trouver une séquence de points $\{y_n\} \in Y$ qui convergent vers x .

Définition I.2 F est dite avoir la propriété de sensibilité aux conditions initiales s'il existe $\delta > 0$ tel que, pour $x_0 \in I$ et tout $\epsilon > 0$ il existe un point $y_0 \in I$ et un entier $j \geq 0$ satisfaisant :

$$d(x_0, y_0) > \epsilon \Rightarrow d(F^{(j)}(x_0), F^{(j)}(y_0)) > \delta \quad (I.2)$$

où d représente la distance et $F^{(j)}$ la j ème itération de F .

Définition I.3 F est dite topologiquement transitive si U et V étant deux ensembles non vides ouverts dans I , il existe $x_0 \in U$ et un indice $j \in \mathbb{Z}^+$, tel que pour $F^{(j)}(x_0) \in V$ ou, de façon équivalente, il existe un indice $j \in \mathbb{Z}^+$; tel que pour $F^{(j)}(U) \cap V \neq \emptyset$.

La définition du chaos, au sens de Devaney [Devaney, 1989], peut être donnée maintenant.

Définition I.4 La fonction F (I.1) est dite constituée d'une dynamique chaotique si :

- (i) F possède une sensibilité aux conditions initiales,
- (ii) F est topologiquement transitive,
- (iii) L'ensemble des points périodiques de f est denses dans I .

Bien qu'il n'existe pas de définition universellement acceptée de la notion du chaos, cette définition reste la plus intéressante car les concepts sur lesquels elle repose sont facilement observables.

I.4 Définition d'un système chaotique

Un système chaotique est un système dynamique ; qui évolue dans le temps ou par rapport à une autre variable suivant l'espace de phases considéré ; et qui possède un comportement infiniment complexe. En effet, les systèmes chaotiques sont irrésistiblement attirés par une figure géométrique de structure également infiniment complexe sur laquelle ils semblent errer au hasard, mais sans jamais la quitter, ni repasser deux fois par le même point. Les attracteurs qui les caractérisent semblent inclure à la fois des lois déterministes et des lois aléatoires, ce qui rend toute prévision à long terme impossible.

I.5 Caractéristiques des systèmes chaotiques

Mise à part la non linéarité, les systèmes chaotiques sont, essentiellement, caractérisés par les propriétés suivantes [Devaney, 1992] [Boukabou, 2006] :

I.5.1 Aspect aléatoire

Un système chaotique évolue d'une manière aléatoire dans tout l'espace sans qu'aucune prévision exacte ne soit possible dans le temps.

I.5.2 Déterminisme

Le comportement irrégulier provient des non-linéarités intrinsèques plutôt que des bruits aléatoires. Un système chaotique ne présente pas des paramètres stochastiques (probabilistes).

I.5.3 Sensibilité aux conditions initiales

La sensibilité aux conditions initiales est un phénomène découvert pour la première fois, dès la fin du xix^e siècle par Poincaré, puis a été redécouvert en 1963 par Lorenz lors de ses travaux en météorologie. Cette découverte a entraîné un grand nombre de travaux importants, principalement dans le domaine des mathématiques. Cette sensibilité explique le fait que, pour un système chaotique, une modification infime des conditions initiales peut entraîner des résultats imprévisibles sur le long terme. Cela veut dire que, de très petits changements sur l'état initial peuvent mener à un comportement radicalement différent dans son état final. Le degré de sensibilité aux conditions initiales quantifie le caractère chaotique du système.

I.5.4 Attracteur étrange

Aussi attracteur chaotique, il est contenu dans un espace fini. Sa dimension est fractale et non entière, sa trajectoire est complexe, presque toutes les trajectoires sur l'attracteur ont la propriété de ne jamais passer deux fois par le même point. En d'autres termes, chaque trajectoire est apériodique, deux trajectoires proches à un instant " t " voient localement leur distance augmenter à une vitesse exponentielle. Ce phénomène traduit la sensibilité aux conditions initiales, toute condition initiale appartenant au bassin d'attraction, c'est-à-dire à la région de l'espace des phases dans laquelle tout phénomène dynamique sera "attiré" vers l'attracteur, produit une trajectoire qui tend à parcourir de façon spécifique et unique cet attracteur.

I.6 Exposants de Lyapunov

Par définition, un exposant de Lyapunov est le taux exponentiel moyen de divergence ou de convergence de trajectoires voisines de l'espace des phases. Il permet, ainsi, de mesurer la sensibilité aux conditions initiales d'une série temporelle [Anstett, 2006].

En effet, un système sensible à de très petites variations de la condition initiale ; système chaotique ; aura un exposant positif. En revanche, l'exposant est négatif si le système n'est pas sensible à des petites variations des conditions initiales. Dans ce cas, les trajectoires se rapprochent et on perd l'information sur les conditions initiales.

Le nombre des exposants de Lyapunov dépend de la dimension du système. Par conséquent, un système de dimension n possède n exposants de Lyapunov qui mesurent le taux de divergence suivant chacun des axes de l'espace de phase. L'apparition du chaos exige l'existence d'un exposant positif selon au moins un axe.

Il est à noter que l'exposant de Lyapunov λ_L (ou $\lambda_L^{(i)}$, avec $i = 1, \dots, n$, pour les systèmes à n dimensions) ne doit pas être confondu avec λ (ou λ_f), valeur propre d'un système linéaire.

1.6.1 Calcul des exposants de Lyapunov

Considérons le système dynamique non linéaire, en temps discret donné par :

$$x_{k+1} = F(x_k) \quad (I.3)$$

Nous choisissons deux conditions initiales très proches, notées x_0 et x'_0 et nous allons voir comment se comportent les trajectoires qui en sont issues. En supposant que les deux trajectoires x_k et x'_k s'écartent exponentiellement, après k itérations, on trouve :

$$|x'_k - x_k| = |x'_0 - x_0| e^{\lambda k} \quad (I.4)$$

λ indique le taux de divergence par itération des deux trajectoires dont l'expression est la suivante :

$$\lambda = \frac{1}{k} \ln \left| \frac{x'_k - x_k}{x'_0 - x_0} \right| \quad (I.5)$$

Pour x_0 et x'_0 proche, si le module de la différence $\epsilon = |x'_0 - x_0|$ a tendance à converger vers zéro, on obtient :

$$\lambda_L = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln \left| \frac{x'_k - x_k}{x'_0 - x_0} \right| \quad (I.6)$$

Cela donne :

$$\begin{aligned}\lambda_L &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{k} \ln \left| \frac{x'_k - x_k}{x'_{k-1} - x_{k-1}} \times \frac{x'_{k-1} - x_{k-1}}{x'_{k-2} - x_{k-2}} \times \dots \times \frac{x'_1 - x_1}{x'_0 - x_0} \right| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \ln \left| \frac{x'_{i+1} - x_{i+1}}{x'_i - x_i} \right| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \ln \left| \frac{F(x'_i) - F(x_i)}{x'_i - x_i} \right|\end{aligned}$$

Finalement, on trouve :

$$\lambda_L = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \ln \left| \frac{dF(x_i)}{dx_i} \right| \quad (1.7)$$

λ_L ; appelé exposant de Lyapunov, mesure le taux moyen de divergence de deux trajectoires distinctes, à partir de deux conditions initiales très proches x_0 et x'_0 .

Pour le calcul des exposants de Lyapunov $\lambda_L^{(j)}$, ($j = 1, 2, \dots, n$) d'un système de dimension $n > 1$, nous partons d'un point initial $x_0 \in R^n$; pour caractériser le comportement infinitésimal autour du point x_k par la première matrice dérivée $DF(x_i)$.

$$DF(x_i) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_i)}{\partial x_i^{(1)}} & \dots & \frac{\partial f_1(x_i)}{\partial x_i^{(n)}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x_i)}{\partial x_i^{(1)}} & \dots & \frac{\partial f_n(x_i)}{\partial x_i^{(n)}} \end{pmatrix}$$

Notons : $J_k = DF(x_{k-1}) \dots DF(x_0)$; avec : $J_0 = DF(x_0)$. Les exposants de Lyapunov sont calculés par l'expression suivante :

$$\lambda_L^{(j)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln |\lambda_i(J_k \dots J_1)|, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.8)$$

En analysant les exposants de Lyapunov d'un système, nous pouvons conclure sur le type du comportement de ce système :

❖ Pour les systèmes à une dimension

- Si $\lambda_L < 0$: l'orbite est attractive vers un point fixe ou une orbite périodique. Il caractérise les systèmes dissipatifs. Ce type de système exhibe une stabilité asymptotique.

- Si $\lambda_L = 0$: les orbites issues de conditions initiales différentes, gardent une séparation constante, ni ne convergent, ni ne divergent l'une par rapport à l'autre. Un système physique avec un tel exposant est dit conservatif.
- Si $\lambda_L > 0$: les trajectoires divergent et donc l'orbite est instable et chaotique.

❖ Pour les systèmes à n dimensions

Pour les systèmes à n dimensions, les n exposants de Lyapunov mesurent le taux de divergence suivant chacun des axes de l'espace de phase. L'apparition du chaos exige l'existence d'un exposant positif selon au moins un axe.

- Si $\lambda_L^{(n)} \leq \dots \leq \lambda_L^{(1)} < 0$; il existe des points fixes asymptotiquement stables.
- Si $\lambda_L^{(1)} = 0, \lambda_L^{(n)} \leq \dots \leq \lambda_L^{(2)} < 0$, l'attracteur est un cycle limite asymptotiquement stable.
- Si $\lambda_L^{(1)} = \dots = \lambda_L^{(k)} = 0, \lambda_L^{(n)} \leq \dots \leq \lambda_L^{(k+1)} < 0$, l'attracteur est un tore de dimension k , c'est-à-dire quasi-périodique.
- Si $\lambda_L^{(1)} > 0, \sum_i \lambda_L^{(i)} < 0$, l'attracteur est chaotique.
- Si $\lambda_L^{(1)} > \dots > \lambda_L^{(k)} > 0, \sum_i \lambda_L^{(i)} < 0$, l'attracteur est hyperchaotique.

I.7 Exemples des systèmes chaotiques

I.7.1 Systèmes chaotiques en temps continu

a) Système de Lorenz

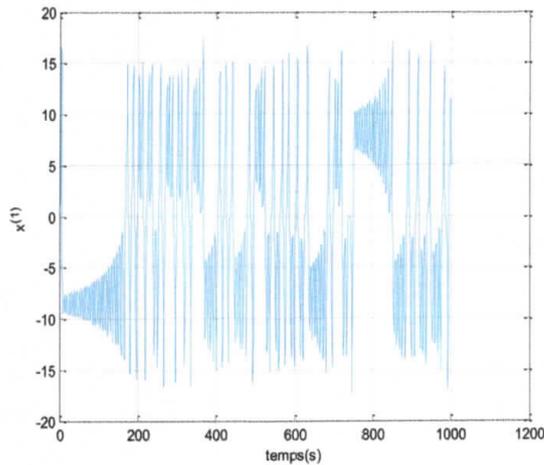
Dans sa version exprimée en paramètres et variables réduits, le système de Lorenz s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}^{(1)} = a(x^{(2)} - x^{(1)}) \\ \dot{x}^{(2)} = bx^{(1)} - x^{(2)} - x^{(1)}x^{(3)} \\ \dot{x}^{(3)} = -cx^{(3)} + x^{(1)}x^{(2)} \end{cases}$$

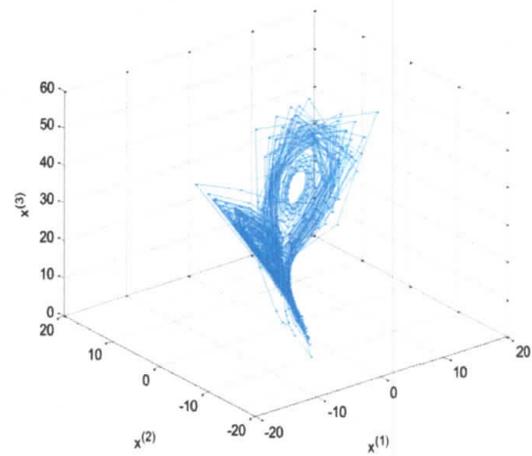
(I.9)

Où a, b et c représentent des paramètres.

L'attracteur chaotique de Lorenz ainsi que la variation de la coordonnée $x^{(1)}$ sont donnés sur la figure I.1 pour les valeurs numériques $a = 10$, $b = 28$ et $c = 8/3$.



(a) Evolution de $x^{(1)}$



(b) Attracteur chaotique

Figure I.1 Système chaotique de Lorenz

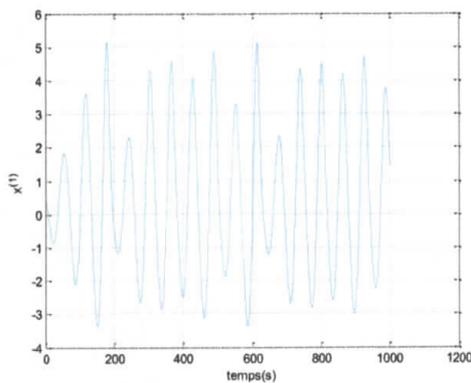
b) Système de Rössler

Proposé par l'Allemand Otto Rössler, ce système est lié à l'étude de la mécanique des fluides, il découle des équations de Navier Stokes. Les équations de ce système ont été découvertes à la suite des travaux en cinétique chimique. Les équations de ce système sont les suivantes :

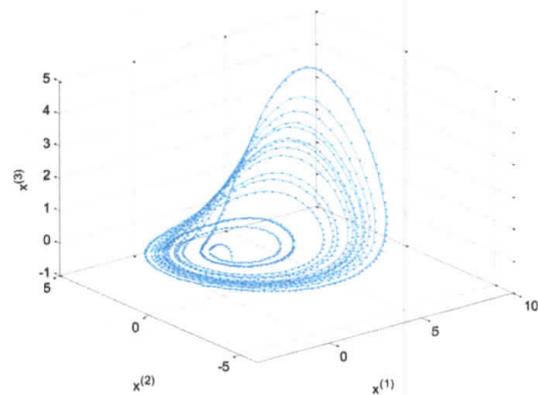
$$\begin{cases} \dot{x}^{(1)} = -(x^{(2)} + x^{(3)}) \\ \dot{x}^{(2)} = x^{(1)} + ax^{(2)} \\ \dot{x}^{(3)} = b + x^{(3)}(x^{(1)} - c) \end{cases} \quad (I.10)$$

Où a , b et c représentent des paramètres.

L'attracteur chaotique de Rössler ainsi que la variation de la coordonnée $x^{(1)}$ sont donnés sur la figure I.2 pour les valeurs numériques $a = 0.398$, $b = 2$ et $c = 4$.



(a) Evolution de $x^{(1)}$



(b) Attracteur chaotique

Figure I.2 Système chaotique de Rössler

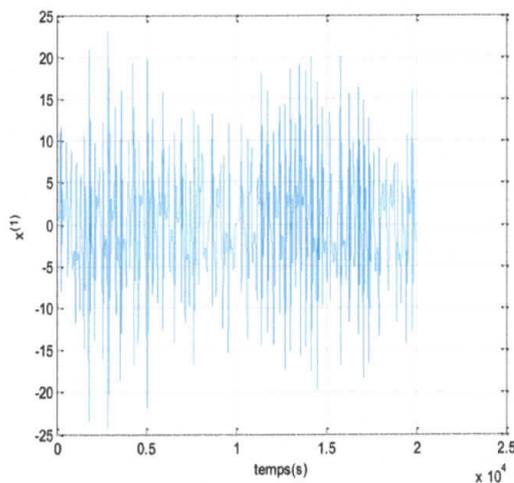
c) Système de Liu

La représentation d'état du système de Liu est la suivante :

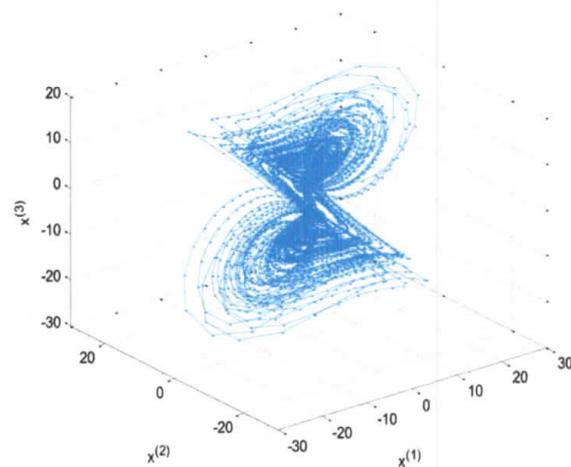
$$\begin{cases} \dot{x}^{(1)} = a(x^{(2)} - x^{(1)}) + x^{(2)}(x^{(3)})^2 \\ \dot{x}^{(2)} = b(x^{(1)} + x^{(2)}) - x^{(1)}(x^{(3)})^2 \\ \dot{x}^{(3)} = -cx^{(3)} + dx^{(2)} + x^{(1)}x^{(2)}x^{(3)} \end{cases} \quad (\text{I.11})$$

Où a , b , c et d représentent des paramètres.

L'attracteur chaotique de Liu ainsi que la variation de la coordonnée $x^{(1)}$ sont donnés sur la figure I.3 pour les valeurs numériques $a = 50$, $b = 13$, $c = 13$ et $d = 6$.



(a) Evolution de $x^{(1)}$



(b) Attracteur chaotique

Figure I.3 Système chaotique de Liu

d) Système de Chua

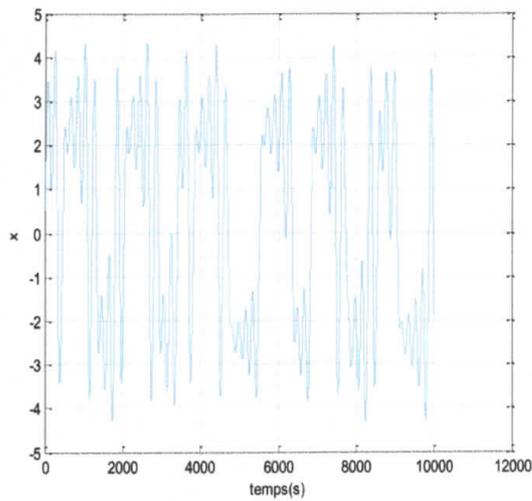
Le système de Chua est un circuit électronique composé d'éléments passifs (inductance, condensateur et résistance), et d'un élément actif (une diode de Chua) qui a une réponse non linéaire. Les équations de ce système sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}^{(1)} = a(x^{(2)} - x^{(1)} - h(x^{(1)})) \\ \dot{x}^{(2)} = x^{(1)} - x^{(2)} + x^{(3)} \\ \dot{x}^{(3)} = -bx^{(2)} - cx^{(3)} \end{cases} \quad (\text{I.12})$$

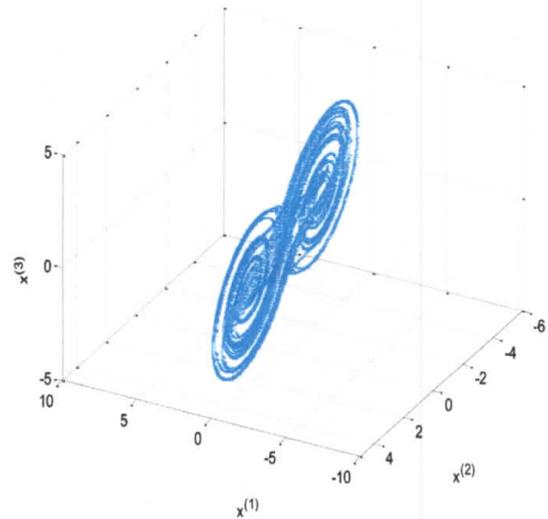
Avec :
$$h(x^{(1)}) = \beta x^{(1)} + \frac{1}{2}(\alpha - \beta)(|x^{(1)} + 1| - |x^{(1)} - 1|)$$

Où a , b et c représentent des paramètres et $\alpha < \beta < 0$.

L'attracteur chaotique de Chua ainsi que la variation de la coordonnée $x^{(1)}$ sont donnés sur la figure I.4 pour les valeurs numériques $a = 12$, $b = 18.605$, $c = 6.7781166 \times 10^{-6}$, $\alpha = -1.37067$ et $\beta = -0.732101$.



(a) Evolution de $x^{(1)}$



(b) Attracteur chaotique

Figure I.4 Système chaotique de Chua

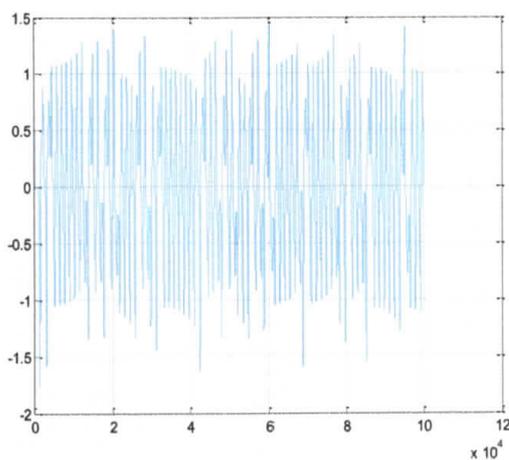
e) Système des finances

Les équations régissant la dynamique du système des finances sont données par :

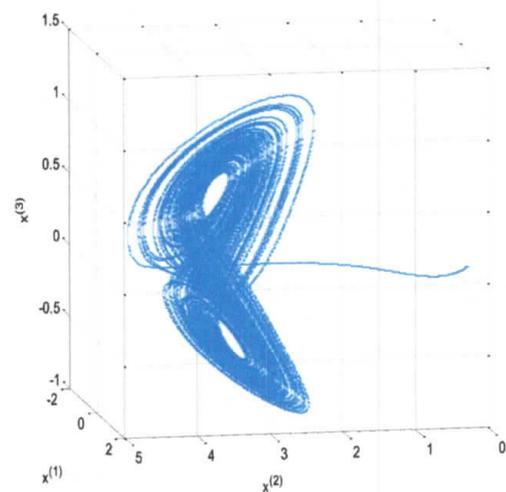
$$\begin{cases} \dot{x}^{(1)} = x^{(1)}(x^{(2)} - a) + x^{(3)} \\ \dot{x}^{(2)} = 1 - bx^{(2)} - (x^{(1)})^2 \\ \dot{x}^{(3)} = -x^{(1)} - cx^{(3)} \end{cases} \quad (I.13)$$

Où a, b et c représentent des paramètres.

L'attracteur chaotique du système des finances ainsi que la variation de la coordonnée $x^{(1)}$ sont donnés sur la figure I.5 pour les valeurs numériques $a = 2.5$, $b = 0.2$ et $c = 1.2$.



(a) Evolution de $x^{(1)}$



(b) Attracteur chaotique

Figure I.5 Système chaotique des finances

I.7.2 Systèmes chaotiques en temps discret

I.7.2.1 Systèmes chaotiques discrets dans le plan

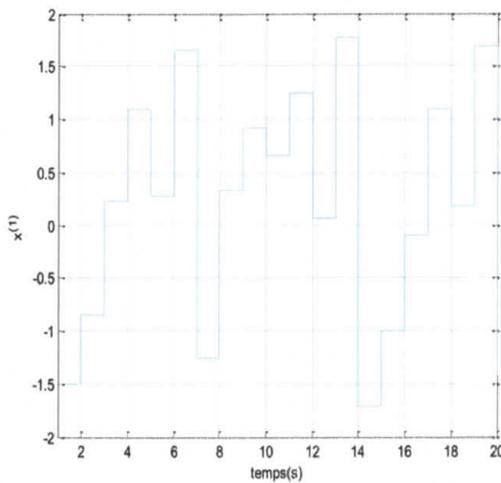
a) Récurrence de Hénon

La récurrence de Hénon est donnée par la représentation d'état suivante :

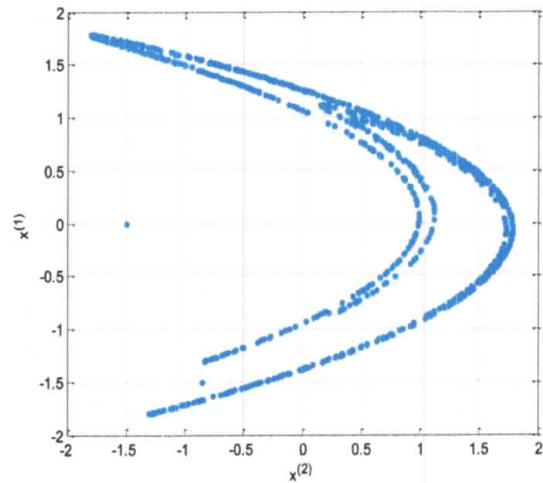
$$\begin{cases} x_{k+1}^{(1)} = a - (x_k^{(1)})^2 + bx_k^{(2)} \\ x_{k+1}^{(2)} = x_k^{(1)} \end{cases} \quad (\text{I.14})$$

Où a et b représentent les paramètres de cette récurrence et k le nombre d'itérations.

L'attracteur chaotique de Hénon ainsi que la variation de la coordonnée $x^{(1)}$ sont donnés sur la figure I.6 pour les valeurs numériques $a = 1.4$ et $b = 0.3$.



(a) Evolution de $x^{(1)}$



(b) Attracteur chaotique

Figure I.6 Récurrence chaotique de Hénon

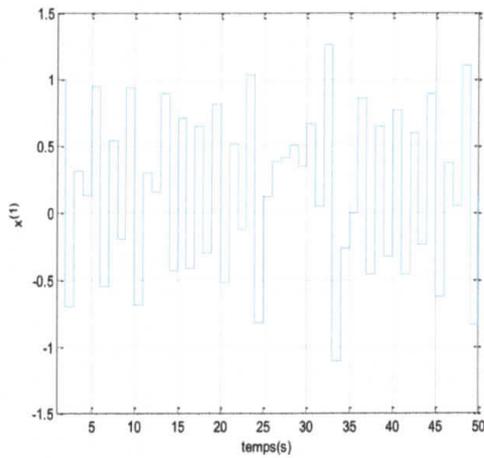
b) Récurrence de Lozi

La récurrence de Lozi est obtenue en remplaçant $(x_k^{(1)})^2$ dans la récurrence de Hénon par $|x_k^{(1)}|$ et en modifiant la valeur des paramètres. Elle peut être donnée par la représentation d'état suivante :

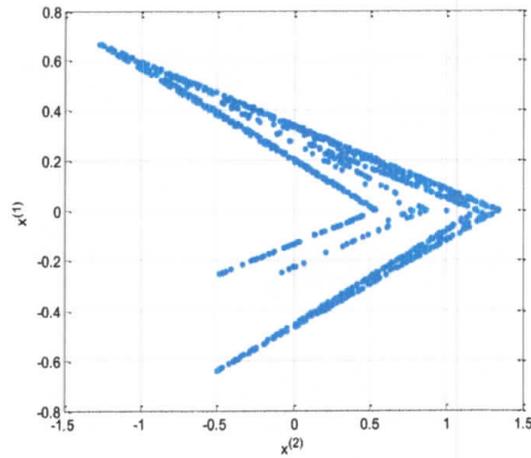
$$\begin{cases} x_{k+1}^{(1)} = 1 - a|x_k^{(1)}| + x_k^{(2)} \\ x_{k+1}^{(2)} = bx_k^{(1)} \end{cases} \quad (\text{I.15})$$

Où a et b représentent des paramètres.

L'attracteur chaotique de Lozi ainsi que la variation de la coordonnée $x^{(1)}$ sont donnés sur la figure I.7 pour les valeurs numériques $a = 1.7$ et $b = 0.5$.



(c) Evolution de $x^{(1)}$



(d) Attracteur chaotique

Figure 1.7. Récurrence chaotique de Lozi

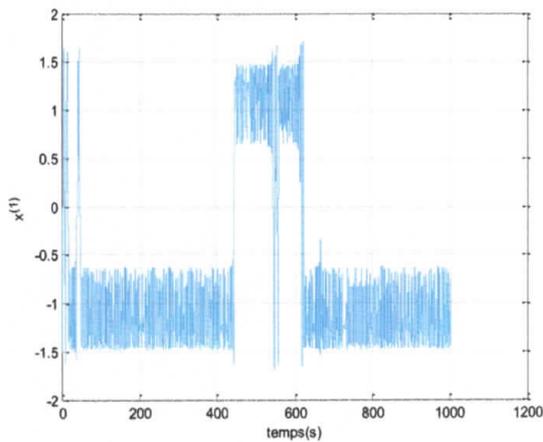
c) Récurrence de Duffing

La récurrence de Duffing est donnée par la représentation d'état suivante :

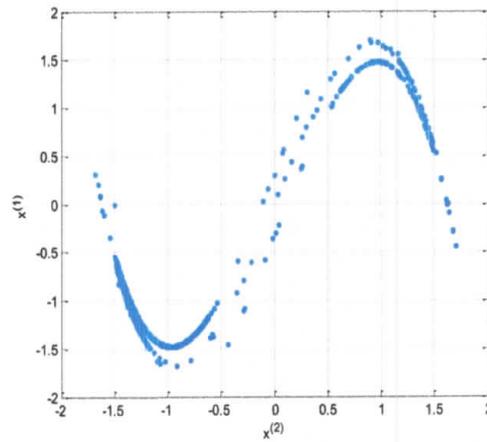
$$\begin{cases} x_{k+1}^{(1)} = x_k^{(2)} \\ x_{k+1}^{(2)} = -bx_k^{(1)} + ax_k^{(2)} - (x_k^{(2)})^3 \end{cases} \quad (I.16)$$

Où a et b représentent des paramètres et k le nombre d'itérations.

L'attracteur chaotique de Duffing ainsi que la variation de la coordonnée $x^{(1)}$ sont donnés sur la figure I.8 pour les valeurs numériques $a = 2.75$ et $b = 0.2$.



(a) Evolution de $x^{(1)}$



(b) Attracteur chaotique

Figure I.8 Récurrence chaotique de Duffing

d) Récurrence d'Ikeda

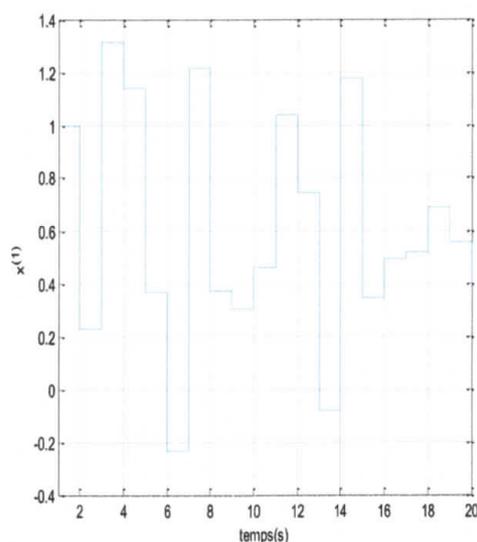
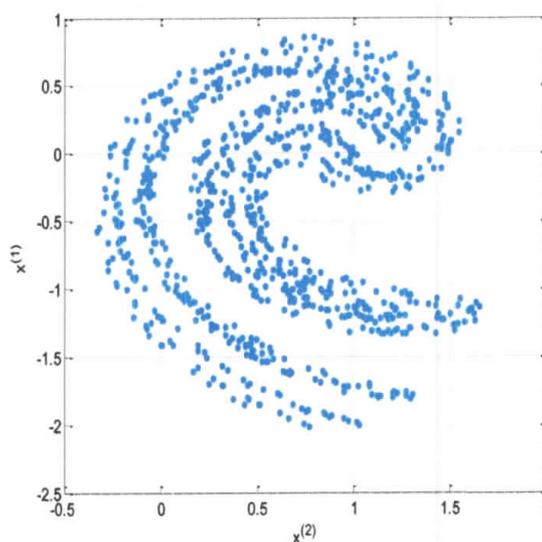
Cette récurrence a été proposée, d'abord, par Ikeda pour modéliser la propagation de la lumière à travers un résonateur optique non linéaire. Elle est souvent utilisée dans une forme modifiée donnée par le modèle d'état suivant :

$$\begin{cases} x_{k+1}^{(1)} = 1 + a(x_k^{(1)} \cos(\theta_k) - x_k^{(2)} \sin(\theta_k)) \\ x_{k+1}^{(2)} = a(x_k^{(1)} \sin(\theta_k) + x_k^{(2)} \cos(\theta_k)) \end{cases} \quad (\text{I.17})$$

$$\text{Avec : } \theta_k = 0.4 - \frac{6}{1 + (x_k^{(1)})^2 + (x_k^{(2)})^2}$$

Où a représenté un paramètre et k le nombre d'itérations.

L'attracteur chaotique d'Ikeda ainsi que la variation de la coordonnée $x^{(1)}$ sont donnés sur la figure I.9 pour la valeur numérique $a = 0.9$.

(a) Evolution de $x^{(1)}$ 

(b) Attracteur chaotique

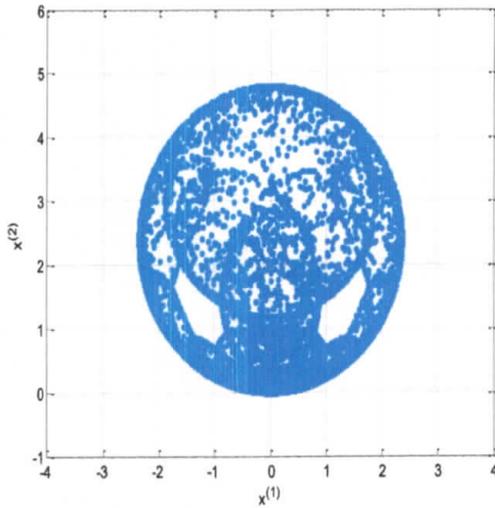
Figure I.9 Récurrence chaotique d'Ikeda**e) Récurrence de Lorenz discret**

Le système de Lorenz discret, est donné par :

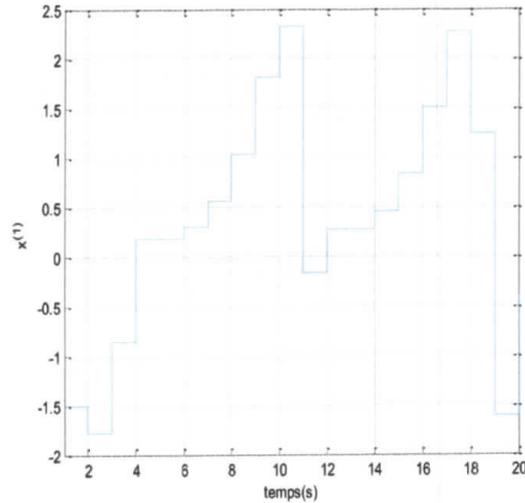
$$\begin{cases} x_{k+1}^{(1)} = (1 + \alpha\beta)x_k^{(1)} - \beta x_k^{(2)} x_k^{(1)} \\ x_{k+1}^{(2)} = (1 - \beta)x_k^{(2)} + \beta (x_k^{(1)})^2 \end{cases} \quad (\text{I.18})$$

Où α et β représentent des paramètres.

L'attracteur chaotique de Lorenz discret ainsi que la variation de la coordonnée $x^{(1)}$ sont donnés sur la figure I.10 pour les valeurs numériques $\alpha = 1.25$ et $\beta = 0.75$.



(a) Attracteur chaotique



(b) Evolution de $x^{(1)}$

Figure I.10 Récurrence chaotique de Lorenz discret

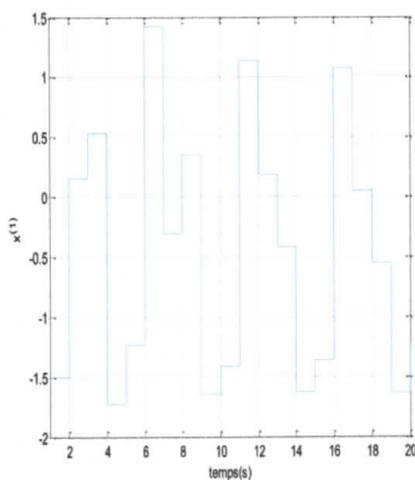
f) Récurrence de Flow

Le modèle de Flow est un système chaotique discret de dimension 2, présenté par :

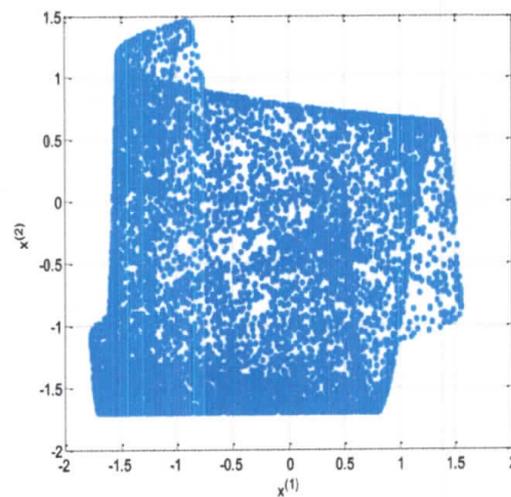
$$\begin{cases} x_{k+1}^{(1)} = x_k^{(2)} + ax_k^{(1)} \\ x_{k+1}^{(2)} = b + (x_k^{(1)})^2 \end{cases} \tag{I.19}$$

Où a et b représentent des paramètres.

L'attracteur chaotique de Flow ainsi que la variation de la coordonnée $x^{(1)}$ sont donnés sur la figure I.11 pour les valeurs numériques $a = -0.1$ et $b = -1.7$.



Evolution de $x^{(1)}$



(b) Attracteur chaotique

Figure I.11 Récurrence chaotique de Flow

I.7.2.2 Systèmes chaotiques discrets dans l'espace

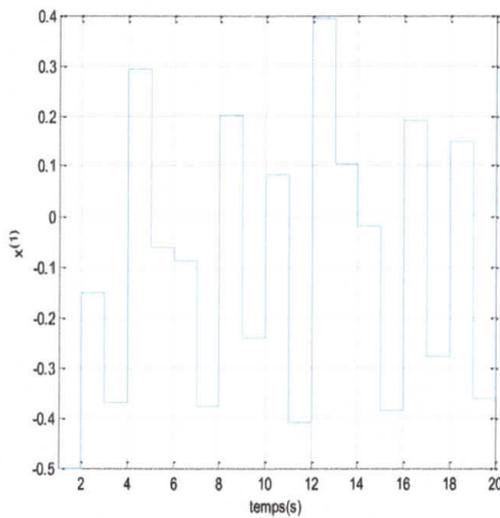
a) Récurrence de Hitzl-Zele

Le système généralisé d'Hénon a été obtenu par Hitzl et Zele :

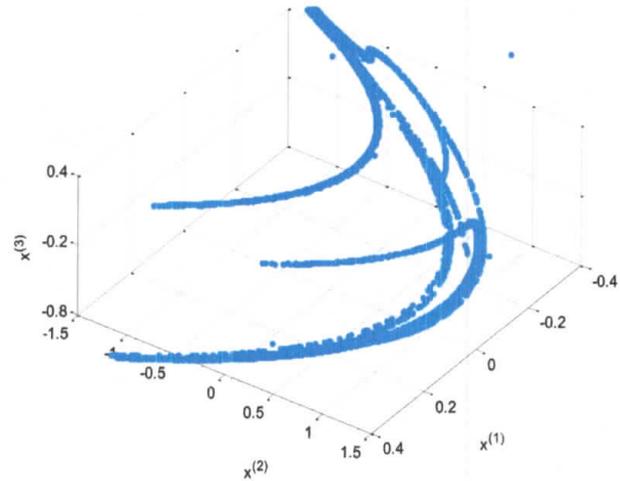
$$\begin{cases} x_{k+1}^{(1)} = -\beta x_k^{(2)} \\ x_{k+1}^{(2)} = x_k^{(3)} + 1 - \alpha (x_k^{(2)})^2 \\ x_{k+1}^{(3)} = \beta x_k^{(2)} + x_k^{(1)} \end{cases} \quad (\text{I.20})$$

Où α et β représentent des paramètres.

L'attracteur chaotique de Hitzl-Zele ainsi que la variation de la coordonnée $x^{(1)}$ sont donnés sur la figure I.12 pour les valeurs numériques $\alpha = 1.07$ et $\beta = 0.3$.



Evolution de $x^{(1)}$



(b) Attracteur chaotique

Figure I.12 Récurrence chaotique de Hitzl-Zele

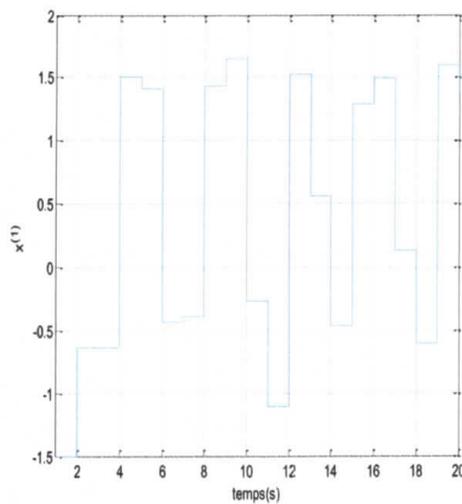
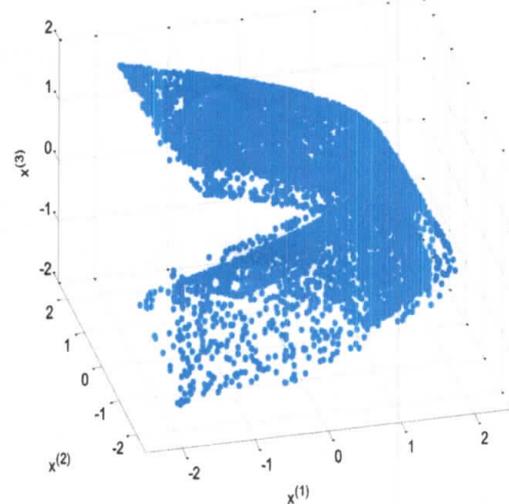
b) Récurrence de Baier-Klein

En 1985, le système d'Hénon généralisé donné par :

$$\begin{cases} x_{k+1}^{(1)} = \beta x_k^{(3)} - (x_k^{(2)})^2 + \alpha \\ x_{k+1}^{(2)} = x_k^{(1)} \\ x_{k+1}^{(3)} = x_k^{(2)} \end{cases} \quad (\text{I.21})$$

Où α et β représentent des paramètres.

L'attracteur chaotique de Baier-Klein ainsi que la variation de la coordonnée $x^{(1)}$ sont donnés sur la figure I.13 pour les valeurs numériques $\alpha = 1.76$ et $\beta = -0,1$.

(a) Evolution de $x^{(1)}$ 

(b) Attracteur chaotique

Figure I.13 Récurrence chaotique de Baier-Klein

I.8 Applications du chaos

- **Contrôle** : Première application du chaos est le contrôle du comportement irrégulier dans les circuits et les systèmes ...
- **Synchronisation** : Communication sécurisée, cryptage, radio...
- **Traitement d'information** : Codage, décodage et stockage d'information dans des systèmes chaotiques, tel que les éléments de mémoires et les circuits.

I.9 Domaines d'application du chaos

- **Engineering** : Contrôle de vibration, stabilisation des circuits, réactions chimiques, turbines, et autres ...
- **Ordinateurs** : Commutation des paquets dans des réseaux informatiques. Cryptage. Contrôle du chaos dans les systèmes robotiques...
- **Communications** : Compression et stockage d'image. Conception et management des réseaux d'ordinateurs...
- **Médecine et biologie** : Cardiologie, analyse du rythme du cœur (EEG), et autres ...
- **Management et finance** : Prévisions économiques, analyse financière, et prévision du marché...

I.10 Conclusion

Dans le présent chapitre, nous avons présenté dans un premier temps quelques généralités et notions sur des systèmes chaotiques. Le chaos apparaît dans un système

dynamique si deux points de départs très proches divergent exponentiellement. On parle dans ce cas de la propriété de sensibilité aux conditions initiales. Cette dernière permet théoriquement de générer un nombre infini de signaux chaotiques d'un même système en utilisant différentes valeurs initiales. Ensuite, nous avons donné quelques exemples des systèmes chaotiques en temps discret et continu.

Chapitre II

Synchronisation des systèmes chaotiques

Sommaire

II.1	Introduction.....	20
II.2	Définition de la synchronisation.....	20
II.3	Types de synchronisation.....	21
II.3.1	Synchronisation complète.....	21
II.3.2	Anti-synchronisation.....	22
II.3.3	Synchronisation projective.....	22
II.3.4	Synchronisation généralisée.....	22
II.3.5	Synchronisation Lag.....	23
II.3.6	Synchronisation anticipée.....	23
II.4	Méthodes de synchronisation.....	23
II.4.1	Synchronisation basée sur la partition du système.....	23
II.4.2	Synchronisation par boucle fermée.....	25
II.4.3	Synchronisation par l'inversion du système.....	25
II.4.4	Synchronisation impulsive.....	26
II.4.5	Synchronisation à l'aide d'observateur.....	27
II.4.6	Synchronisation par la commande Backstepping.....	28
II.5	Exemple numérique.....	31
II.6	Conclusion.....	35

II.1 Introduction

Parallèlement aux grandes avancées réalisées dans la théorie de chaos, les perspectives de l'utilisation du chaos dans diverses applications, notamment en télécommunication, ont motivé les chercheurs à étudier la question de l'éventuelle possibilité de synchroniser le chaos. La synchronisation des oscillateurs non linéaires est un phénomène qui a attiré l'attention des chercheurs depuis le constat et la description de ce phénomène par Huygens en 1673, dans un exemple de deux systèmes mécaniques couples. Le phénomène de synchronisation est manifesté lorsque deux systèmes dynamiques évoluent d'une manière identique en fonction de temps [Ouannas, 2015].

La théorie de commande des systèmes non linéaires a joué un rôle fondamental dans le développement des méthodes de synchronisation des systèmes chaotiques. Parmi ces techniques, on cite notamment la technique de synchronisation avec commande par retour d'état, la synchronisation par "backstepping" et la synchronisation par observateurs.

Ce chapitre a pour objectif d'expliquer la notion de synchronisation des systèmes chaotiques, de rappeler les différents types et méthodes de synchronisation. Une méthode de synchronisation ; commande par backstepping ; sera détaillée à travers un exemple numérique.

II.2 Définition de la synchronisation

La synchronisation est un phénomène qui caractérise de nombreux systèmes non linéaires. La synchronisation de deux systèmes dynamiques signifie que chaque système évolue en suivant le comportement de l'autre système.

Rappelons qu'un système chaotique est un système déterministe, extrêmement sensible aux conditions initiales. Par conséquent, Typiquement, deux trajectoires issues de deux conditions initiales arbitrairement proches l'une de l'autre divergent exponentiellement avec le temps. Il s'ensuit que deux systèmes chaotiques ne peuvent synchroniser (sauf si les conditions initiales sont exactement les mêmes, ce qui est physiquement et numériquement impossible). A première vue, parler de synchronisation pour des systèmes chaotiques semble donc être surprenant, et on peut penser que le chaos est incontrôlable. Cependant, des recherches récentes ont montré que l'on pouvait synchroniser deux systèmes chaotiques en les couplant. Ce résultat s'applique dans plusieurs domaines, par exemple pour augmenter la puissance des lasers, synchroniser les sorties d'un circuit électrique, contrôler les oscillations de réactions chimiques, et coder les messages électroniques afin de sécuriser les communications [Dimassi, 2012].

La synchronisation consiste à forcer un système esclave (récepteur) à se synchroniser avec un système maître (émetteur). Du point de vue des systèmes dynamiques, l'opération de synchronisation consiste à rapprocher les trajectoires d'état des deux systèmes jusqu'à ce qu'elles finissent par être confondues.

II.3 Types de synchronisation

Différents types de synchronisation ont été proposés dans la littérature. On rappellera ci-après, les types les plus connus.

II.3.1 Synchronisation complète

On considère un système maître représenté par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} x_{k+1} = F(x_k) \\ y_k = H(x_k) \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

Où $x_k \in \mathfrak{R}^n$ est le vecteur d'état et $y_k \in \mathfrak{R}^m$ la sortie du maître.

Le système esclave donné par :

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1} = F'(\hat{x}_k) \\ \hat{y}_k = H'(\hat{x}_k) \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

Où $\hat{x}_k \in \mathfrak{R}^n$ est le vecteur d'état et $\hat{y}_k \in \mathfrak{R}^m$ la sortie de l'esclave.

On définit l'erreur de synchronisation complète comme suit :

$$e_k = \hat{x}_k - x_k \quad (\text{II.3})$$

La synchronisation est dite complète si :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\hat{x}_k - x_k\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k\| = 0, \forall x_0, \forall \hat{x}_0 \quad (\text{II.4})$$

Où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne.

- Si $F = F'$ on parle d'une synchronisation complète identique ;
- Si $F \neq F'$ c'est une synchronisation complète non identique.

La synchronisation complète veut dire que les vecteurs d'état des deux systèmes synchronisés coïncident complètement. Les méthodes de synchronisation complète sont typiquement associées avec la synchronisation des systèmes identiques (systèmes régis par la même représentation d'état).

II.3.2 Anti-synchronisation

Théoriquement, deux systèmes sont anti-synchronisés si d'une part, le système maître et le système esclave ont des vecteurs d'état identiques en valeur absolue mais avec des signes opposés et que d'autre part, la somme des vecteurs d'état des deux systèmes tend vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini.

On définit l'erreur de l'anti-synchronisation comme suit :

$$e_k = \hat{x}_k + x_k \quad (\text{II.5})$$

L'anti-synchronisation est vérifiée si :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\hat{x}_k + x_k\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k\| = 0, \forall x_0, \forall \hat{x}_0 \quad (\text{II.6})$$

II.3.3 Synchronisation projective

Dans cette méthode, l'état du système esclave se synchronise avec un multiple de l'état du système maître. Soit a tel que :

$$\exists a \neq 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \|\hat{x}_k - ax_k\| = 0, \quad \forall x_0, \hat{x}_0 \quad (\text{II.7})$$

Où a est le facteur d'échelle.

Le cas où a est égale à 1 représente un cas de synchronisation complète. Le cas où a est égale à -1 représente un cas d'anti-synchronisation.

II.3.4 Synchronisation généralisée

La synchronisation généralisée est considérée comme une généralisation de la synchronisation complète, l'anti-synchronisation et la synchronisation projective dans le cas des systèmes chaotiques de dimension et de modèles différents. Elle se manifeste par une relation fonctionnelle entre deux systèmes chaotiques couplés.

On considère le couple de système maître et esclave donné par :

$$\begin{cases} x_{k+1} = F(x_k) \\ \hat{x}_{k+1} = F'(\hat{x}_k) \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

Où $x_k \in \mathfrak{R}^n$ et $\hat{x}_k \in \mathfrak{R}^m$ sont le vecteur d'état du maître et de l'esclave respectivement.

La synchronisation généralisée est atteinte s'il existe une transformation $M: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$ telle que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\hat{x}_k - M(x_k)\| = 0, \forall x_0, \forall \hat{x}_0 \quad (\text{II.9})$$

Si M est inversible, alors $M^{-1}(\hat{x}_k)$ fournit une estimation de l'état x_k , dans le cas contraire, il serait impossible de fournir une estimation de l'état x_k .

II.3.5 Synchronisation Lag

La synchronisation Lag (appelée aussi synchronisation retardée) entre deux systèmes maître et esclave est atteinte si les vecteurs d'état de ces systèmes vérifient la relation suivante :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\hat{x}_k - x_{k-\tau}\| = 0 \quad (\text{II.10})$$

Où τ est un retard positif.

Ainsi, le vecteur d'état du système esclave converge vers le vecteur d'état décalé dans le temps du système maître.

II.3.6 Synchronisation anticipée

Comme dans le cas de la synchronisation Lag, la relation entre les variables d'état des systèmes maître et esclave est donnée par :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\hat{x}_k - x_{k+\tau}\| = 0 \quad (\text{II.11})$$

Où τ est un nombre positif.

Dans ce cas, le vecteur d'état du système esclave converge vers le vecteur d'état avancé du système maître.



II.4 Méthodes de synchronisation

Ils existent plusieurs méthodes de synchronisation. Nous allons rappeler dans la partie suivante quelques méthodes.

II.4.1 Synchronisation basée sur la partition du système

Proposée par Pecora et Carroll, ce type de synchronisation a l'avantage d'être une solution de synchronisation simple et performante. Elle permet à l'esclave de reproduire le plus fidèlement possible l'état du maître, après un régime transitoire. Le principe de cette méthode est illustré sur la figure II.1.

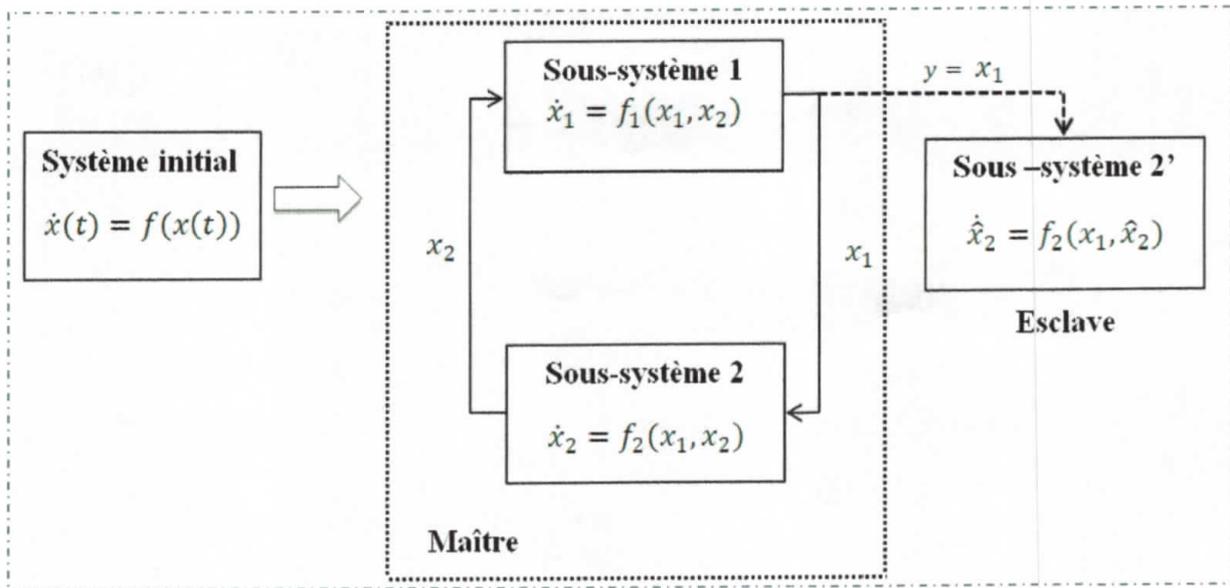


Figure II.1 Synchronisation par partition du système

Considérons le système chaotique en temps continu de dimension $n > 3$ donné par la représentation d'état suivante :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (\text{II.12})$$

Où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état.

Supposons que le système $\dot{x}(t) = f(x(t))$ peut être divisé en deux sous-systèmes avec une réorganisation des variables d'état dans un ordre quelconque :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t)) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t)) \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

Où $x_1(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$ et $n_1 + n_2 = n$.

Le premier sous-système (f_1) s'appelle le système conducteur, et le second est appelé le système de réponse (f_2).

D'autre part, soit un autre système dynamique identique à (f_2) mais avec un vecteur d'état $\hat{x}_2(t)$:

$$\dot{\hat{x}}_2(t) = f_2(x_1(t), \hat{x}_2(t)) \quad (\text{II.14})$$

La synchronisation du système $\dot{x}(t) = f(x(t))$ est basée sur la stabilité du sous-système de réponse (f_2). Pecora et Carroll ont prouvé que, si tous les exposants du système $\dot{\hat{x}}_2(t)$ sont négatifs, la stabilité asymptotique du sous-système de réponse peut être garantie.

II.4.2 Synchronisation par boucle fermée

Le schéma de principe de cette synchronisation est illustré sur la figure II.2. Elle consiste à utiliser l'erreur de synchronisation entre le maître et l'esclave pour corriger le comportement de l'esclave afin d'atteindre la synchronisation.

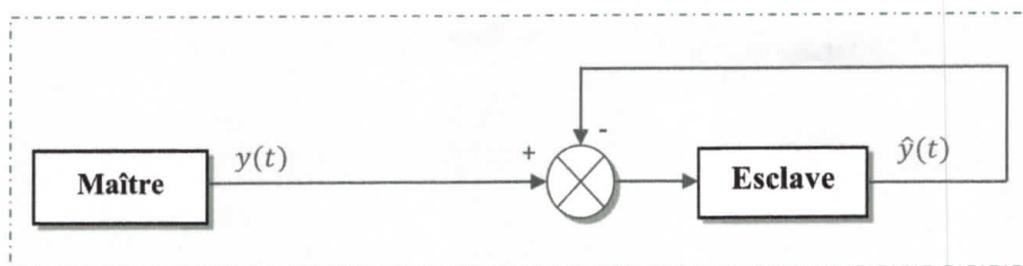


Figure II.2 Synchronisation par boucle fermée

Supposons que le maître s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

et que l'esclave peut être décrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t)) + g(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = h(\hat{x}(t)) \end{cases} \quad (\text{II.16})$$

Où g est une fonction qui dépend de l'erreur entre la sortie du maître $y(t)$ et celle de l'esclave $\hat{y}(t)$. Elle est choisie afin de garantir la synchronisation entre ces deux systèmes.

II.4.3 Synchronisation par l'inversion du système

Les approches citées jusqu'à présent consistent à synchroniser uniquement les vecteurs d'états de deux systèmes. Cependant, l'estimation des entrées inconnues est évidemment essentielle dans le cadre de la transmission chaotique où l'entrée inconnue représente le message confidentiel.

Dans ce contexte, la méthode précédente peut être utilisée avec un observateur à entrées inconnues qui permet à la fois de reconstruire le vecteur d'état de l'émetteur (maître) et d'estimer le message confidentiel.

Une autre méthode proposée est basée sur la solubilité du problème d'inversion à gauche afin d'achever les synchronisations des états et des entrées inconnues du système. Celle-ci peut être décrite en Figure II.3.

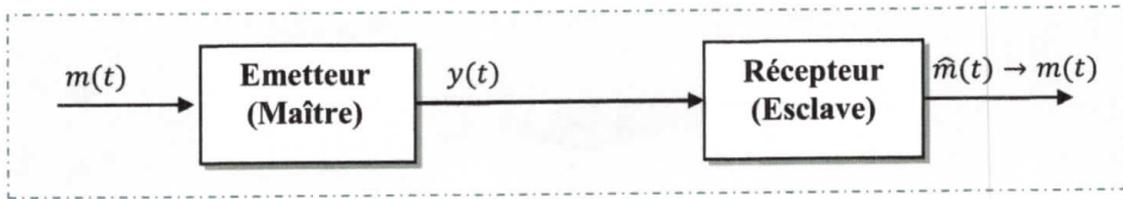


Figure II.3 Synchronisation par l'inversion du système

L'émetteur (maître) peut être écrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x) + g(x(t))m(t) \\ y(t) = h(x) \end{cases} \quad (\text{II.17})$$

Où $x(t) \in \mathcal{R}^n$ est le vecteur d'état du système et $m(t)$ est l'information à chiffrer.

L'entrée du récepteur (esclave) est le vecteur de sortie de l'émetteur (maître). Le récepteur est conçu de telle sorte que son vecteur de sortie convergera au moins asymptotiquement vers le vecteur d'entrée de l'émetteur. Ce problème s'appelle l'inversion à gauche du système. Il est à noter que l'inversion du système exige des conditions additionnelles par rapport au problème d'observabilité, telles que le degré relatif.

II.4.4 Synchronisation impulsive

Dans un schéma de transmission usuel, un des états du système dynamique est transmis afin de réaliser la synchronisation par le récepteur. Dans le but de réduire la redondance du signal transmis, c.-à-d., envoyer le signal minimum possible, la synchronisation impulsive (ce concept est analogue à la synchronisation échantillonnée) a été proposée en [Heidari-Bateni and McGillem, 1994].

Dans cette approche, en raison de l'introduction d'un opérateur de Dirac, le problème de synchronisation entre l'émetteur et le récepteur devient celui de stabiliser un système impulsionnel.

Cette méthode est donnée sur la figure II.4.

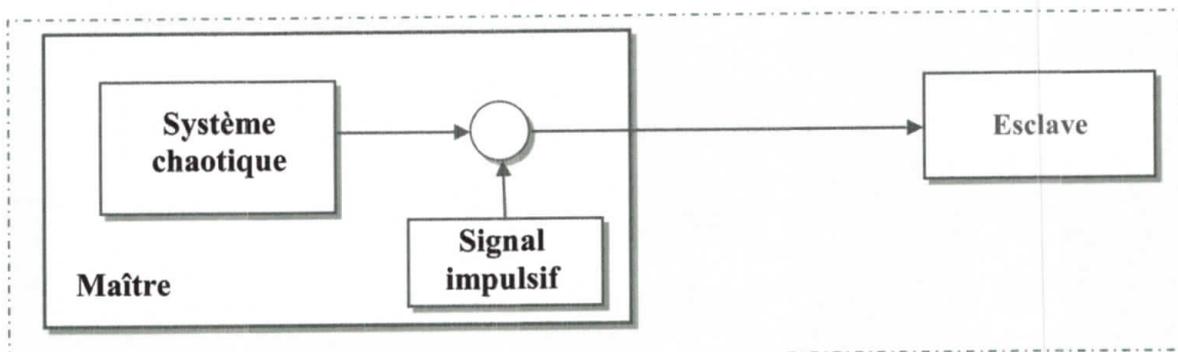


Figure II.4 Synchronisation impulsive

II.4.5 Synchronisation à l'aide d'observateur

La synchronisation des systèmes chaotiques peut également être réalisée en employant un observateur. En fait, la conception d'un observateur est une méthode permettant d'estimer les états inconnus d'un système dynamique qui ne peuvent pas être mesurés directement (inaccessible, ou pas économique). Ceci est très pratique, notamment dans le cas des transmissions chaotiques sécurisées où le vecteur d'état de l'émetteur est inaccessible.

Étant donné que les systèmes chaotiques sont décrits par une équation différentielle non linéaire, il s'avère intéressant de séparer la dynamique du système en une partie linéaire et une partie non-linéaire. En effet, considérons l'émetteur comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = Ax(t) + f(x(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

Où $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ et $y(t) \in \mathfrak{R}$ représentent respectivement le vecteur d'état et la sortie de l'émetteur, A et C sont deux matrices constantes.

Le récepteur est conçu sur la base d'un observateur où $y(t)$ correspond à l'entrée de commande. L'observateur peut être conçu de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + f(\hat{x}(t)) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (\text{II.19})$$

Où $\hat{x}(t) \in \mathfrak{R}^n$ est le vecteur d'état associé au récepteur, et $L \in \mathfrak{R}^n$ est le gain d'observateur.

L'erreur de synchronisation est définie comme étant la différence entre le vecteur d'état de l'émetteur et du récepteur :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (\text{II.20})$$

Sa dynamique vérifie :

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t) + f(x(t)) - f(\hat{x}(t)) \quad (\text{II.21})$$

Ainsi, le problème de la synchronisation devient celui de la stabilité au voisinage du point fixe 0 du système $\dot{e}(t)$. Dans ce cas, la synchronisation entre l'émetteur et le récepteur peut être réalisée si :

- La fonction $f(x(t))$ vérifie la condition Lipchitz ;

- Nous pouvons trouver un gain approprié L qui garantit la stabilité du système $\dot{e}(t)$.

Cette approche peut également être regardée comme un type de synchronisation par la-boucle fermée, puisque le récepteur est conduit également par l'erreur des signaux de sortie de l'émetteur et du récepteur. Il est à noter que l'observateur discuté ci-dessus est un des types d'observateurs, appelé l'observateur grand gain.

Nous allons s'intéresser à cette méthode de synchronisation qui sera appliquée aux systèmes chaotiques en temps discret dans les chapitres 3 et 4.

II.4.6 Synchronisation par la commande Backstepping

La commande par le backstepping est une méthode multi étapes. La convergence du système vers son état d'équilibre peut être atteinte à partir des fonctions de Lyapunov qui assurent, pas à pas, la stabilisation de chaque étape de synthèse. La procédure du backstepping, pour les systèmes d'ordre n , contient n étapes, durant la $i^{\text{ème}}$ une fonction de Lyapunov appropriée V_i est choisie.

Afin d'illustrer le principe de cette méthode, on considère le cas des systèmes non linéaires à 3 dimensions [Guessas, 2013].

Considérons le système maître à trois dimensions donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}^{(1)} = f_1(x^{(1)}) + a_2 x^{(2)} \\ \dot{x}^{(2)} = f_2(x^{(1)}, x^{(2)}) + a_3 x^{(3)} \\ \dot{x}^{(3)} = f_3(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) \\ y = x^{(1)} \end{cases} \quad (\text{II.22})$$

Où $x = [x^{(1)} \quad x^{(2)} \quad x^{(3)}]^T \in \mathfrak{R}^3$ est le vecteur d'état du système maître.

Et le système esclave donné par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}^{(1)} = f_1(\hat{x}^{(1)}) + a_2 \hat{x}^{(2)} \\ \dot{\hat{x}}^{(2)} = f_2(\hat{x}^{(1)}, \hat{x}^{(2)}) + a_3 \hat{x}^{(3)} \\ \dot{\hat{x}}^{(3)} = f_3(\hat{x}^{(1)}, \hat{x}^{(2)}, \hat{x}^{(3)}) + g(\hat{x}^{(1)}, \hat{x}^{(2)}, \hat{x}^{(3)})U \\ y = \hat{x}^{(1)} \end{cases} \quad (\text{II.23})$$

Où $g(\cdot) \neq 0, a_2 \neq 0, a_3 \neq 0, \hat{x} = [\hat{x}^{(1)} \quad \hat{x}^{(2)} \quad \hat{x}^{(3)}]^T \in \mathfrak{R}^3$ est le vecteur d'état du système esclave et $U \in \mathfrak{R}$ la loi de commande.

L'objectif consiste à déterminer une loi de commande U de telle sorte que la trajectoire du vecteur d'état du système esclave \hat{x} suit la trajectoire du vecteur d'état du système maître x .

On définit l'erreur de synchronisation comme suit :

$$\begin{cases} e^{(1)} = \hat{x}^{(1)} - x^{(1)} \\ e^{(2)} = \hat{x}^{(2)} - x^{(2)} \\ e^{(3)} = \hat{x}^{(3)} - x^{(3)} \end{cases} \quad (\text{II.24})$$

La dynamique de cette erreur est décrite par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{e}^{(1)} = f_1(\hat{x}^{(1)}) - f_1(x^{(1)}) + a_2 e^{(2)} \\ \dot{e}^{(2)} = f_2(\hat{x}^{(1)}, \hat{x}^{(2)}) - f_2(x^{(1)}, x^{(2)}) + a_3 e^{(3)} \\ \dot{e}^{(3)} = f_3(\hat{x}^{(1)}, \hat{x}^{(2)}, \hat{x}^{(3)}) - f_3(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) + g(\hat{x}^{(1)}, \hat{x}^{(2)}, \hat{x}^{(3)})U \end{cases} \quad (\text{II.25})$$

Étant donné que notre objectif est de rapprocher les trajectoires des deux vecteurs \hat{x} et x , cela est équivalent au problème de stabilisation du système (II.25) à l'origine (0,0,0). Pour cela, on définit l'erreur :

$$\begin{cases} \mathcal{E}^{(1)} = e^{(1)} - e_d^{(1)} \\ \mathcal{E}^{(2)} = e^{(2)} - e_d^{(2)} \\ \mathcal{E}^{(3)} = e^{(3)} - e_d^{(3)} \end{cases} \quad (\text{II.26})$$

Avec $e_d^{(1)} = 0$.

La dynamique de cette erreur est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{E}}^{(1)} = \dot{e}^{(1)} \\ \dot{\mathcal{E}}^{(2)} = \dot{e}^{(2)} - \dot{e}_d^{(2)} \\ \dot{\mathcal{E}}^{(3)} = \dot{e}^{(3)} - \dot{e}_d^{(3)} \end{cases} \quad (\text{II.27})$$

Donc :

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{E}}^{(1)} = f_1(\hat{x}^{(1)}) - f_1(x^{(1)}) + a_2 e^{(2)} \\ \dot{\mathcal{E}}^{(2)} = f_2(\hat{x}^{(1)}, \hat{x}^{(2)}) - f_2(x^{(1)}, x^{(2)}) + a_3 e^{(3)} - \dot{e}_d^{(2)} \\ \dot{\mathcal{E}}^{(3)} = f_3(\hat{x}^{(1)}, \hat{x}^{(2)}, \hat{x}^{(3)}) - f_3(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) + g(\hat{x}^{(1)}, \hat{x}^{(2)}, \hat{x}^{(3)})U - \dot{e}_d^{(3)} \end{cases} \quad (\text{II.28})$$

Ainsi, l'achèvement de la synchronisation est fondé sur un choix approprié des fonctions de Lyapunov et des lois de commande virtuelles $e_d^{(2)}$ et $e_d^{(3)}$. Le système (II.25) étant du troisième ordre, la synthèse de la loi de commande U s'effectue en trois étapes.

- **Première étape**

La première fonction de Lyapunov est donnée par :

$$V_1 = \frac{1}{2} \mathcal{E}^{(1)2} \quad (\text{II.29})$$

Sa dérivée est donnée par :

$$\dot{V}_1 = \dot{\mathcal{E}}^{(1)} \mathcal{E}^{(1)} = (f_1(\hat{x}^{(1)}) - f_1(x^{(1)}) + a_2 e^{(2)}) \mathcal{E}^{(1)} \quad (\text{II.30})$$

Prenons comme valeur désirée de $e_d^{(2)}$ la fonction suivante :

$$e_d^{(2)} = \frac{1}{a_2} (-k_1 \mathcal{E}^{(1)} - f_1(\hat{x}^{(1)}) + f_1(x^{(1)})) \quad (\text{II.31})$$

Où $k_1 > 0$ est un paramètre de conception. Ainsi, (II.30) devient :

$$\dot{V}_1 = -k_1 \mathcal{E}^{(1)2} + a_2 \mathcal{E}^{(1)} \mathcal{E}^{(2)} \quad (\text{II.32})$$

Pour une stabilité globale, le dernier terme $a_2 \mathcal{E}^{(1)} \mathcal{E}^{(2)}$ dans \dot{V}_1 sera éliminé dans la prochaine étape.

- **Deuxième étape**

La deuxième fonction de Lyapunov est choisie comme :

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} \mathcal{E}^{(2)2} \quad (\text{II.33})$$

Sa dérivée est donnée par :

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1 + \dot{\mathcal{E}}^{(2)} \mathcal{E}^{(2)} = -k_1 \mathcal{E}^{(1)2} + (f_2(\hat{x}^{(1)}, \hat{x}^{(2)}) - f_2(x^{(1)}, x^{(2)}) + a_3 e^{(3)} - \dot{e}_d^{(2)}) \mathcal{E}^{(2)} \quad (\text{II.34})$$

Prenons comme valeur désirée de $e_d^{(3)}$ la fonction suivante :

$$e_d^{(3)} = \frac{1}{a_3} (-k_2 \mathcal{E}^{(2)} - f_2(\hat{x}^{(1)}, \hat{x}^{(2)}) + f_2(x^{(1)}, x^{(2)}) + \dot{e}_d^{(2)}) \quad (\text{II.35})$$

Où $k_2 > 0$ est un paramètre de conception et $\dot{e}_d^{(2)}$ est calculée analytiquement par :

$$\dot{e}_d^{(2)} = \frac{\partial e_d^{(2)}}{\partial e^{(1)}} \dot{e}^{(1)} \quad (\text{II.36})$$

Ainsi, (II.34) devient :

$$\dot{V}_2 = -k_1 \mathcal{E}^{(1)2} - k_2 \mathcal{E}^{(2)2} + a_3 \mathcal{E}^{(2)} \mathcal{E}^{(3)} \quad (\text{II.37})$$

Pour une stabilité globale, le dernier terme $a_3 \mathcal{E}^{(2)} \mathcal{E}^{(3)}$ dans \dot{V}_2 sera éliminé dans la prochaine étape.

- **Troisième étape**

La troisième fonction de Lyapunov est choisie comme :

$$V_3 = V_2 + \frac{1}{2} \mathcal{E}^{(3)2} \quad (\text{II.38})$$

Sa dérivée est donnée par :

$$\dot{V}_3 = \dot{V}_2 + \dot{\mathcal{E}}^{(3)} \mathcal{E}^{(3)} = -k_1 \mathcal{E}^{(1)2} - k_2 \mathcal{E}^{(2)2} + (f_3(\hat{x}^{(1)}, \hat{x}^{(2)}, \hat{x}^{(3)}) - f_3(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) + g(\hat{x}^{(1)}, \hat{x}^{(2)}, \hat{x}^{(3)})U - \dot{e}_d^{(3)}) \mathcal{E}^{(3)} \quad (\text{II.39})$$

A présent, on est en présence de la vraie loi de commande U . Un bon choix de celle-ci est donné par :

$$U = \frac{1}{g(\hat{x}^{(1)}, \hat{x}^{(2)}, \hat{x}^{(3)})} (-k_3 \mathcal{E}^{(3)} - f_3(\hat{x}^{(1)}, \hat{x}^{(2)}, \hat{x}^{(3)}) + f_3(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) + \dot{e}_d^{(3)}) \quad (\text{II.40})$$

Où $k_3 > 0$ est un paramètre de conception et $\dot{e}_d^{(3)}$ est calculée analytiquement par :

$$\dot{e}_d^{(3)} = \frac{\partial e_d^{(3)}}{\partial e^{(1)}} \dot{e}^{(1)} + \frac{\partial e_d^{(3)}}{\partial e^{(2)}} \dot{e}^{(2)} \quad (\text{II.41})$$

Ainsi, (II.39) devient :

$$\dot{V}_3 = -k_1 \mathcal{E}^{(1)2} - k_2 \mathcal{E}^{(2)2} - k_3 \mathcal{E}^{(3)2} \quad (\text{II.42})$$

D'où la stabilité asymptotique à l'origine de $(\dot{\mathcal{E}}^{(1)}, \dot{\mathcal{E}}^{(2)}, \dot{\mathcal{E}}^{(3)})$.

Afin d'illustrer le principe de la méthode du backstepping, on étudie un exemple numérique dans la section suivante.

II.5 Exemple numérique

Considérons le système chaotique de Rössler ; système maître ; donné par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}^{(1)} = -(x^{(2)} + x^{(3)}) \\ \dot{x}^{(2)} = x^{(1)} + a x^{(2)} \\ \dot{x}^{(3)} = b + x^{(3)}(x^{(1)} - c) \end{cases} \quad (\text{II.43})$$

Avec $a = 0.398$, $b = 2$ et $c = 4$.

Afin d'appliquer la commande par backstepping, nous allons dans un premier temps réécrire le système (II.43) sous la forme triangulaire (II.22). En effet, nous procédons au changement de variables suivant: $z^{(1)} = x^{(2)}$, $z^{(2)} = x^{(1)}$ et $z^{(3)} = x^{(3)}$. Ainsi, le système (II.43) devient :

$$\begin{cases} \dot{z}^{(1)} = z^{(2)} + a z^{(1)} \\ \dot{z}^{(2)} = -(z^{(1)} + z^{(3)}) \\ \dot{z}^{(3)} = b + z^{(3)}(z^{(2)} - c) \end{cases} \quad (\text{II.44})$$

Le système esclave possède la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}^{(1)} = \hat{z}^{(2)} + a \hat{z}^{(1)} \\ \dot{\hat{z}}^{(2)} = -(\hat{z}^{(1)} + \hat{z}^{(3)}) \\ \dot{\hat{z}}^{(3)} = b + \hat{z}^{(3)}(\hat{z}^{(2)} - c) + U \end{cases} \quad (\text{II.45})$$

Pour les simulations numériques, la méthode de Runge-Kutta est utilisée pour résoudre les systèmes d'équation différentielle avec un pas de 0.01. Les conditions initiales des deux systèmes (II.44) et (II.45) sont choisies comme $z_0 = [0 \ 0.5 \ 1]^T$ et $\hat{z}_0 = [1 \ 1.2 \ 0.8]^T$.

L'évolution de ces deux systèmes avant la synchronisation ($U = 0$) est donnée dans la Figure II.5.

On remarque que les deux systèmes évoluent d'une façon complètement différente. Ceci est s'explique par la sensibilité aux conditions initiales qui caractérise les systèmes chaotiques.

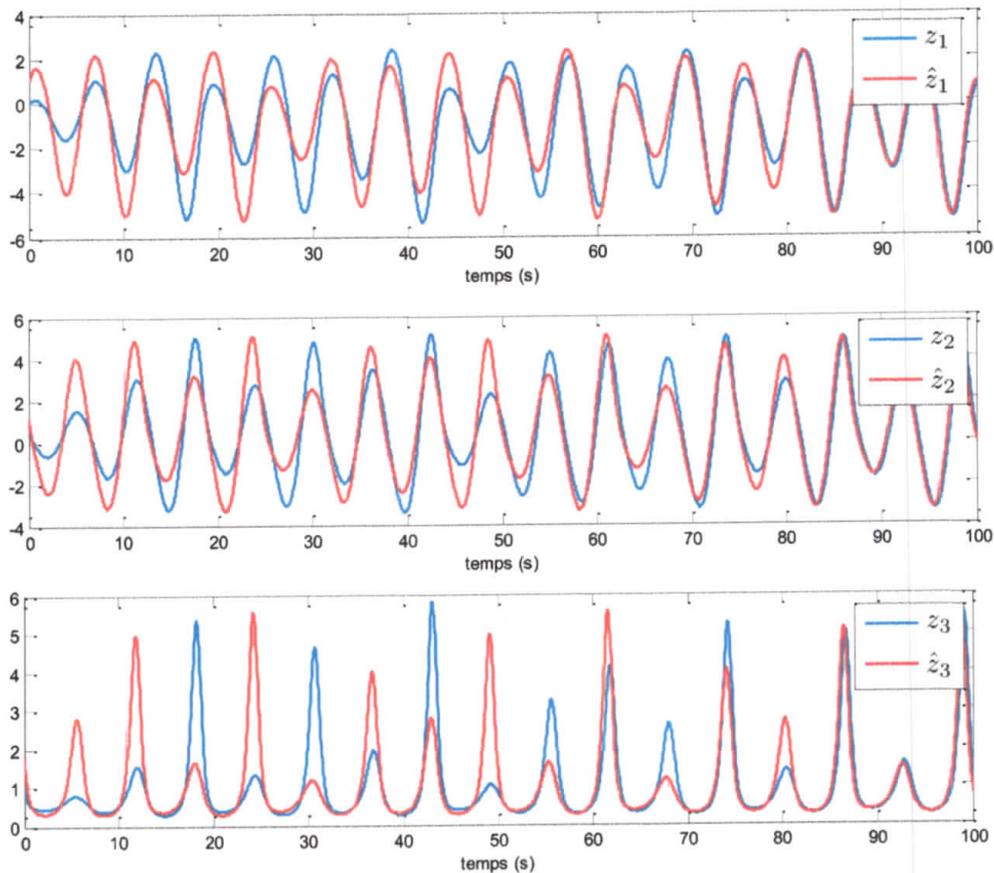


Figure II.5 Comportement des deux systèmes avant la synchronisation

Notre objectif est de réaliser une synchronisation complète identique des deux systèmes chaotiques (II.44) et (II.45) ayant deux conditions initiales différentes en utilisant la commande backstepping.

L'erreur de synchronisation entre (II.44) et (II.45) est donnée comme la différence entre leurs vecteurs d'états et vérifie ainsi l'équation suivante :

$$\begin{cases} e_1 = \hat{z}^{(1)} - z^{(1)} \\ e_2 = \hat{z}^{(2)} - z^{(2)} \\ e_3 = \hat{z}^{(3)} - z^{(3)} \end{cases} \quad (II.46)$$

La dynamique de cette erreur est obtenue en remplaçant $\dot{z} = [\dot{z}^{(1)} \ \dot{z}^{(2)} \ \dot{z}^{(3)}]^T$ et $\dot{\hat{z}} = [\dot{\hat{z}}^{(1)} \ \dot{\hat{z}}^{(2)} \ \dot{\hat{z}}^{(3)}]^T$ données dans (II.44) et (II.45) :

$$\begin{cases} \dot{e}^{(1)} = e^{(2)} + a e^{(1)} \\ \dot{e}^{(2)} = -(e^{(1)} + e^{(3)}) \\ \dot{e}^{(3)} = -c e^{(3)} + \hat{z}^{(3)} \hat{z}^{(2)} - z^{(3)} z^{(2)} + U \end{cases} \quad (II.47)$$

Ensuite, on définit l'erreur $\varepsilon = [\varepsilon^{(1)} \ \varepsilon^{(2)} \ \varepsilon^{(3)}]^T$ donné par l'équation (II.27). Sa dynamique vérifie :

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{E}}^{(1)} = e^{(2)} + a e^{(1)} \\ \dot{\mathcal{E}}^{(2)} = -(e^{(1)} + e^{(3)}) - \dot{e}_d^{(2)} \\ \dot{\mathcal{E}}^{(3)} = -c e^{(3)} + \hat{z}^{(3)} \hat{z}^{(2)} - z^{(3)} z^{(2)} + U - \dot{e}_d^{(3)} \end{cases} \quad (\text{II.48})$$

- **Première étape**

La première fonction de Lyapunov est donnée par :

$$V_1 = \frac{1}{2} \mathcal{E}^{(1)2} \Rightarrow \dot{V}_1 = \dot{\mathcal{E}}^{(1)} \mathcal{E}^{(1)} = (e^{(2)} + a e^{(1)}) \mathcal{E}^{(1)} \quad (\text{II.49})$$

Prenons comme valeur désirée de $e_d^{(2)}$ la fonction suivante :

$$e_d^{(2)} = -(a + k_1) e^{(1)} \quad (\text{II.50})$$

Où $k_1 > 0$ est un paramètre de conception.



- **Deuxième étape**

La deuxième fonction de Lyapunov est choisie comme :

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} \mathcal{E}^{(2)2} \Rightarrow \dot{V}_2 = \dot{V}_1 + \dot{\mathcal{E}}^{(2)} \mathcal{E}^{(2)} = \dot{V}_1 + (-(e^{(1)} + e^{(3)}) - \dot{e}_d^{(2)}) \mathcal{E}^{(2)} \quad (\text{II.51})$$

Prenons comme valeur désirée de $e_d^{(3)}$ la fonction suivante :

$$e_d^{(3)} = -e^{(1)} - \dot{e}_d^{(2)} + k_2 (e^{(2)} - e_d^{(2)}) \quad (\text{II.52})$$

Où $k_2 > 0$ est un paramètre de conception et $\dot{e}_d^{(2)}$ est calculée analytiquement par :

$$\dot{e}_d^{(2)} = \frac{\partial e_d^{(2)}}{\partial e^{(1)}} \dot{e}^{(1)} = -(a + k_1) (e^{(2)} + a e^{(1)}) \quad (\text{II.53})$$

- **Troisième étape**

La troisième fonction de Lyapunov est choisie comme :

$$V_3 = V_2 + \frac{1}{2} \mathcal{E}^{(3)2} \Rightarrow \dot{V}_3 = \dot{V}_2 + \dot{\mathcal{E}}^{(3)} \mathcal{E}^{(3)} = \dot{V}_2 + (-c e^{(3)} + \hat{z}^{(3)} \hat{z}^{(2)} - z^{(3)} z^{(2)} + U - \dot{e}_d^{(3)}) \mathcal{E}^{(3)} \quad (\text{II.54})$$

A présent, on est en présence de la vraie loi de commande U qui est donné par :

$$U = c e^{(3)} - \hat{z}^{(3)} \hat{z}^{(2)} + z^{(3)} z^{(2)} + \dot{e}_d^{(3)} - k_3 (e^{(3)} - e_d^{(3)}) \quad (\text{II.55})$$

Où $k_3 > 0$ est un paramètre de conception et $\dot{e}_d^{(3)}$ est calculée analytiquement par :

$$\dot{e}_d^{(3)} = \frac{\partial e_d^{(3)}}{\partial e^{(1)}} \dot{e}^{(1)} + \frac{\partial e_d^{(3)}}{\partial e^{(2)}} \dot{e}^{(2)} = (-1 + (a + k_1)a) (e^{(2)} + a e^{(1)}) + ((a + k_1) + k_2) (-(e^{(1)} + e^{(3)})) \quad (\text{II.56})$$

On refait les simulations numériques avec les paramètres donnés précédemment et en prenant en compte la loi de commande U donnée par (II.55) avec $k_1 = k_2 = k_3 = 3$. Les résultats de simulations sont illustrés sur les Figures II.6, II.7 et II.8.

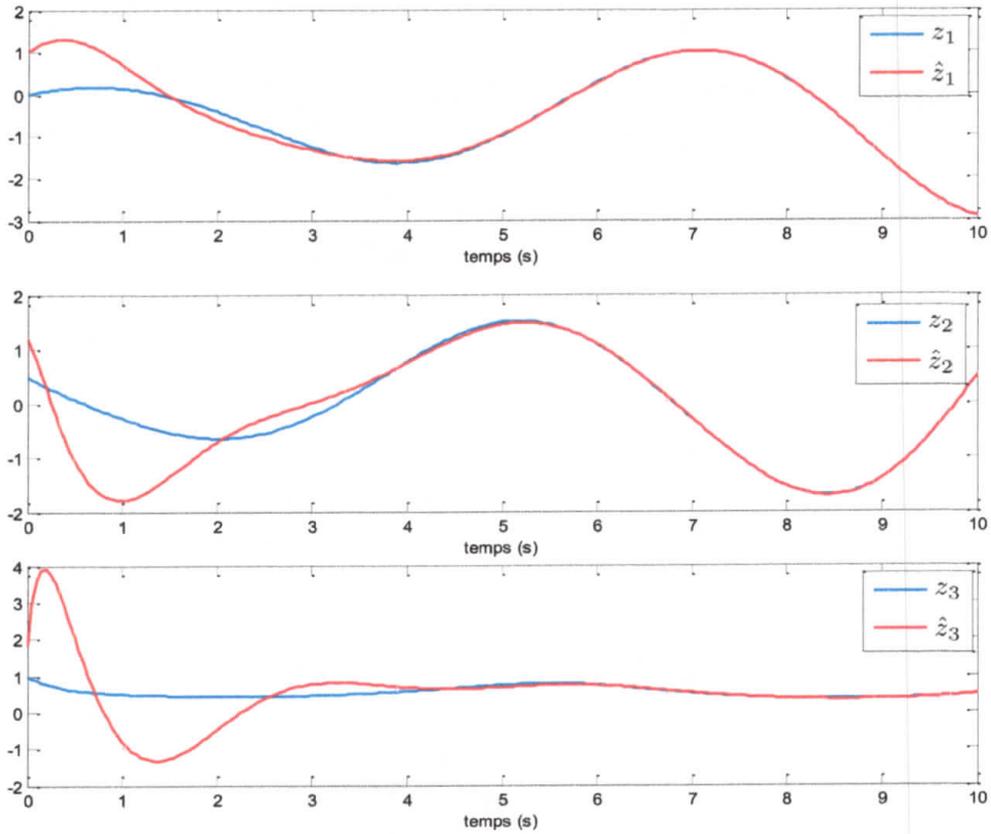


Figure II.6 Comportement des deux systèmes après la synchronisation

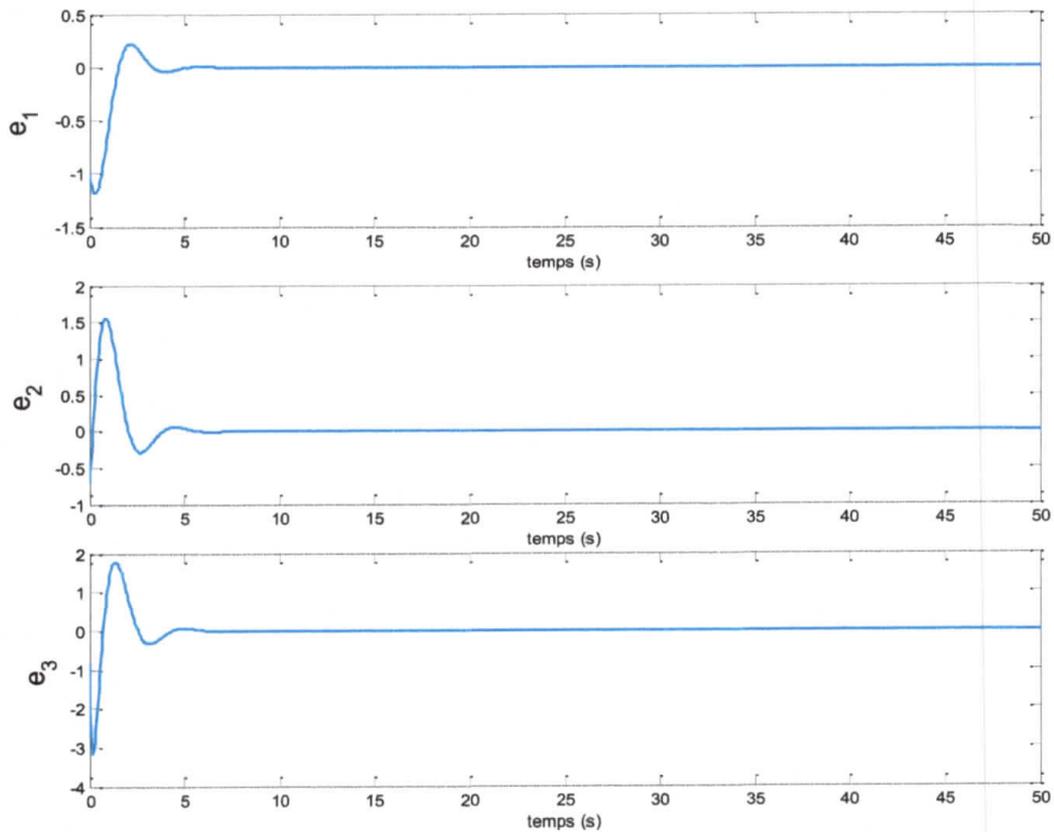


Figure II.7 Evolution de l'erreur de synchronisation

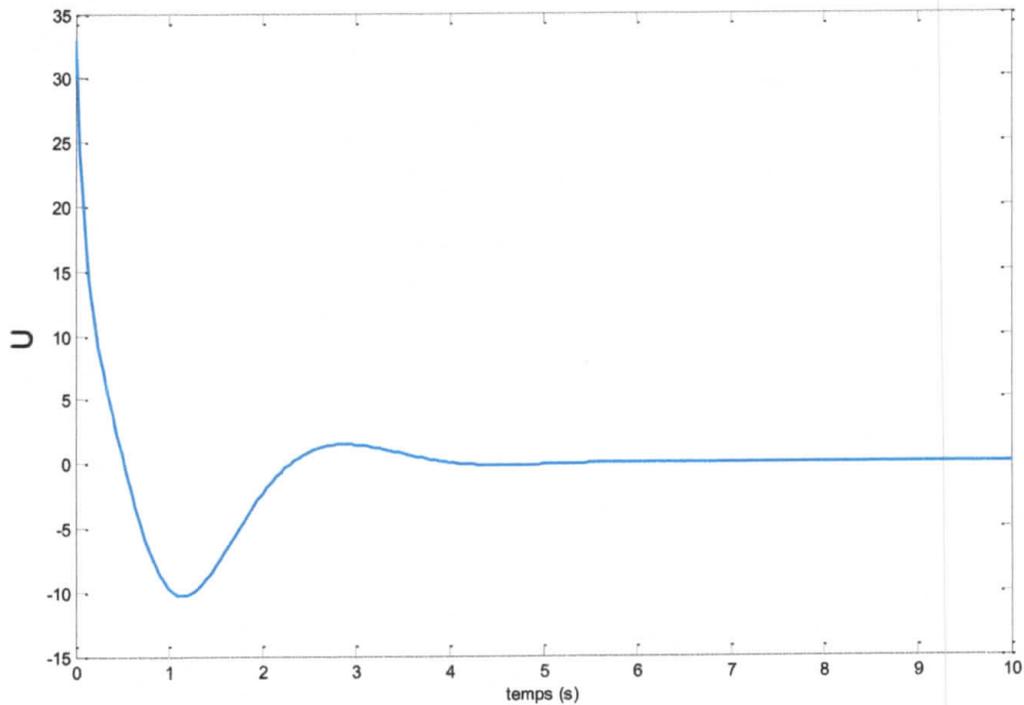


Figure II.8 Evolution de la loi de commande U

On remarque que les deux systèmes se synchronisent après un état transitoire.

II.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons expliqué le concept de synchronisation des systèmes chaotiques ainsi que les différents types et méthodes de synchronisation. Nous avons ensuite appliqué la synchronisation par la commande backstepping sur deux systèmes chaotiques identiques. Le but était de créer une loi de commande permettant d'assurer une synchronisation complète entre le système esclave et le système maître.

Chapitre III

Détection de modes fondée sur les équations de parité

Sommaire

III.1	Introduction.....	36
III.2	Systèmes à commutation – définition formelle.....	36
III.3	Méthode de détection de mode fondée sur les équations de parité.....	37
III.3.1	Problématique.....	37
III.3.2	Principe des équations de parité.....	38
III.3.3	Estimation de la séquence active σ^*	39
III.3.4	Unicité de la solution.....	40
III.3.5	Choix de l’horizon de détection h	41
III.4	Conception d’observateur.....	41
III.5	Exemples d’application.....	42
III.6	Conclusion.....	49

III.1 Introduction

Les systèmes à commutation constituent une classe particulière de systèmes hybrides. Ils sont décrits par plusieurs modèles de fonctionnement et chaque modèle, définissant un mode de système, est actif sous certaines conditions opératoires particulières. Lorsque la loi de commutation régissant le passage d'un modèle de fonctionnement à l'autre est parfaitement connue, il est aisé de manipuler de tels systèmes car le mode actif peut être connu à chaque instant. Par contre, dans la situation où aucune information n'est disponible sur l'évolution de la loi de commutation, il est nécessaire de faire appel à des méthodes de détection de modes [Domlan et al, 2006].

Dans le contexte des communications chaotiques, la détection de modes joue un rôle important car elle permet de synchroniser des systèmes de chiffrement chaotiques impliquant des systèmes chaotiques affines à commutation, où la dynamique affine active n'est pas connue au niveau du récepteur car dépendant de composantes de l'état non accessibles ou de l'information (cas de la modulation paramétrique et commutation chaotique) [Halimi, 2013].

Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord, donner la définition formelle d'un système à commutation. Ensuite, nous présenterons une méthode de détection de modes fondée sur les équations de parité. Cette méthode est fondée sur la mise en œuvre d'un modèle. Elle sera appliquée au système chaotique de Lozi.

III.2 Systèmes à commutation – définition formelle

Les systèmes à commutation représentent une classe de systèmes dynamiques hybrides qui fascine par sa simplicité structurelle et par la complexité des phénomènes qu'elle peut décrire. C'est des systèmes pour lesquels les matrices de l'espace d'état peuvent prendre des valeurs dans un ensemble fini de matrices. L'indice correspondant au système affine actif est appelé "mode" ou "état discret". La façon avec laquelle les indices évoluent dans le temps suit une règle dite "loi de commutation".

Formellement, un système à commutation en temps discret est défini par la relation :

$$\begin{cases} x_{k+1} = F_{\sigma(k)}(k, x_k, u_k) \\ y_k = G_{\sigma(k)}(k, x_k, u_k) \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Où $\sigma(k), \sigma: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathfrak{S} = \{1, 2, \dots, J\}$ représente une fonction constante par morceaux, nommée loi de commutation, qui prend des valeurs dans un ensemble d'indices \mathfrak{S} . $x_k \in \mathfrak{R}^n$ représente

l'état du système, $u_k \in \mathfrak{R}^m$ la commande, $F_i(\dots), \forall i \in \mathfrak{J}$ sont des champs de vecteurs décrivant les différents régimes de fonctionnement du système et $G_i(\dots), \forall i \in \mathfrak{J}$ sont des champs de vecteurs décrivant les sorties du système.

La loi de commutation $\sigma(k)$ spécifie le régime (sous-système) actif. Seul un sous-système est actif à un instant donné. Le choix du sous-système actif peut être lié à un critère temporel, à des régions ou surfaces déterminées dans l'espace d'état, à un paramètre extérieur, ...etc. Le modèle (III.1) est très général. Cependant, ils peuvent être affinés moyennant certaines hypothèses. Par exemple, si u_k n'est pas présent, alors le modèle (III.1) désigne un système autonome. Si les champs de vecteurs des sous-systèmes prennent la forme :

$$\begin{cases} A_i x_k + B_i u_k + E_i \\ C_i x_k \end{cases}, \quad \forall i \in \mathfrak{J} \quad (\text{III.2})$$

alors on obtient un système linéaire affine à commutation:

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_{\sigma(k)} x_k + B_{\sigma(k)} u_k + E_{\sigma(k)} \\ y_k = C_{\sigma(k)} x_k \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

Une taxonomie des systèmes à commutation peut être définie par rapport à la loi de commutation σ . Dans ce contexte, on peut identifier un aspect contrôlé (quand la loi de commutation représente une commande externe) et, par opposition, un aspect autonome (la commutation est provoquée par le franchissement d'une frontière dans l'espace d'état).

III.3 Méthode de détection de mode fondée sur les équations de parité

III.3.1 Problématique

Pour la synchronisation du chaos impliquant des systèmes affines à commutation, la détection de mode va se révéler une question principale à plusieurs niveaux.

En effet, la synchronisation des systèmes chaotiques affines à commutation à l'aide l'observateur nécessite la connaissance de la loi de commutation σ . Cependant, la dynamique affine active n'est pas nécessairement connue côté esclave (récepteur) si les frontières des régions associées à chaque dynamique affine du maître (émetteur) et qui partitionnent l'espace d'état dépendant de composantes de l'état non accessibles. Dans ce cas, la détermination de la dynamique active, qui se pose en termes de détection de mode d'un système affine à commutation, est une étape nécessaire pour la conception de l'observateur qui va assurer la synchronisation entre les deux systèmes.

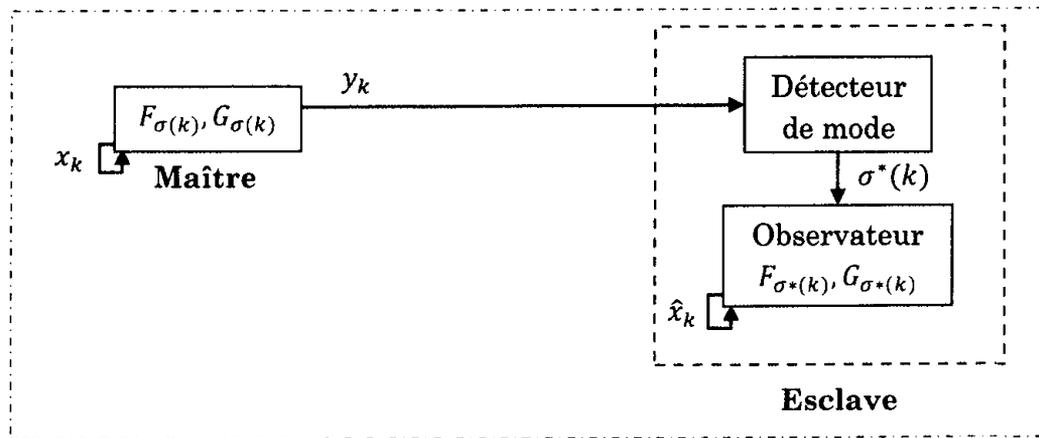


Figure III.1 Synchronisation des systèmes à commutation à l'aide d'observateur

Le problème est identique si le système chaotique de l'émetteur est un système à commutation dont la loi dépend de l'information à chiffrer qui, par définition dans le cadre du chiffrement, est inconnue.

Nous allons présenter dans la section suivante une méthode de détection de mode fondée sur les équations de parité. Nous intéresserons uniquement aux systèmes chaotiques en temps discret.

III.3.2 Principe des équations de parité

L'une des méthodes pour la détection de modes d'un système à commutation est fondée sur les équations de parité. Nous considérons le système affine à commutation à temps discret (III.3). L'équation suivante est obtenue en empilant les sorties successives y_k dans l'intervalle de temps $[k - h, k]$:

$$y_{k-h,k} = O_{\sigma[k-h,k]}x_{k-h} + T_{\sigma[k-h,k]}u_{k-h,k} + T'_{\sigma[k-h,k]} \quad (III.4)$$

Où :

$$O_{\sigma[k-h,k]} = \begin{bmatrix} C_{\sigma(k-h)} \\ C_{\sigma(k-h)}A_{\sigma(k-h)} \\ \vdots \\ C_{\sigma(k-1)}A_{\sigma(k-2)}^{\sigma(k-h)} \\ C_{\sigma(k)}A_{\sigma(k-1)}^{\sigma(k-h)} \end{bmatrix} \quad (III.5)$$

Avec : $A_{\sigma(k_1)}^{\sigma(k_2)} = A_{\sigma(k_2)}A_{\sigma(k_2+1)} \cdots A_{\sigma(k_1-1)}A_{\sigma(k_1)}$

$$T_{\sigma[k-h,k]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C_{\sigma(k-h+1)}B_{\sigma(k-h)} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{\sigma(k-1)}B_{\sigma(k-2)} & 0 & 0 \\ C_{\sigma(k)}B_{\sigma(k-1)} & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.6})$$

$$\text{Avec } B_{\sigma(k_1)}^{\sigma(k_2)} = [A_{\sigma(k_1)}^{\sigma(k_2)}B_{\sigma(k_2)} \dots A_{\sigma(k_1)}^{\sigma(k_1+1)}B_{\sigma(k_1+2)} \quad A_{\sigma(k_1)}B_{\sigma(k_1+1)} \quad B_{\sigma(k_1)}]$$

$$T'_{\sigma[k-h,k]} = \begin{bmatrix} 0 \\ C_{\sigma(k-h+1)}E_{\sigma(k-h)} \\ \vdots \\ C_{\sigma(k-1)}E_{\sigma(k-2)} \\ C_{\sigma(k)}E_{\sigma(k-1)} \end{bmatrix} \quad (\text{III.7})$$

$$\text{Avec } E_{\sigma(k_1)}^{\sigma(k_2)} = A_{\sigma(k_1)}^{\sigma(k_2)}E_{\sigma(k_2)} + \dots + A_{\sigma(k_1)}^{\sigma(k_1+1)}E_{\sigma(k_1+2)} + A_{\sigma(k_1)}E_{\sigma(k_1+1)} + E_{\sigma(k_1)}$$

$$y_{k-h,k} = \begin{bmatrix} y_{k-h} \\ y_{k-h+1} \\ \vdots \\ y_{k-1} \\ y_k \end{bmatrix}, u_{k-h,k} = \begin{bmatrix} u_{k-h} \\ u_{k-h+1} \\ \vdots \\ u_{k-1} \\ u_k \end{bmatrix} \quad (\text{III.8})$$

$O_{\sigma[k-h,k]}$ est la matrice d'observabilité dans la fenêtre d'observation finie $[k-h, k]$. $\sigma[k-h, k]$ représente la séquence finie de modes $\sigma(k-h), \dots, \sigma(k)$ dans l'intervalle de temps $[k-h, k]$. La séquence active sera notée σ^* .

Nous notons S l'ensemble des entiers $s \in S$ qui permettent d'identifier, d'une manière unique, une séquence $\sigma_s \in \mathfrak{S}^{h+1}$ dans l'intervalle de temps $[k-h, k]$.

Étant donné les séquences d'Entrée/Sortie u_k et y_k sur un horizon glissant de longueur finie sont connues, nous nous intéresserons à la reconstruction de mode, c'est à dire de $\sigma(k)$. La question d'unicité de la solution délivrée par ce détecteur ainsi que la détermination d'une valeur appropriée pour l'horizon de détection h seront donnés dans ce qui suit.

III.3.3 Estimation de la séquence active σ^*

Afin d'estimer la séquence de modes active, nous devons éliminer le seul inconnu dans l'équation (III.4) (x_{k-h}). Pour cela, nous multiplions les deux membres de l'équation (III.4) par $\Omega_{\sigma[k-h,k]}$; le noyau à gauche de la matrice d'observabilité $O_{\sigma[k-h,k]}$; et qui vérifie :

$$\Omega_{\sigma[k-h,k]} O_{\sigma[k-h,k]} = 0 \quad (\text{III.9})$$

Ainsi, l'équation (III.4) devient :

$$\Omega_{\sigma[k-h,k]} y_{k-h,k} = \Omega_{\sigma[k-h,k]} (T_{\sigma[k-h,k]} u_{k-h,k} + T'_{\sigma[k-h,k]}) \quad (\text{III.10})$$

L'équation (III.10) est équivalente à :

$$\Omega_{\sigma[k-h,k]} (y_{k-h,k} - T_{\sigma[k-h,k]} u_{k-h,k} - T'_{\sigma[k-h,k]}) = 0 \quad (\text{III.11})$$

Nous définissons maintenant le résidu suivant :

$$r_{h,\sigma_s} = \Omega_{\sigma_s} (y_{k-h,k} - T_{\sigma_s} u_{k-h,k} - T'_{\sigma_s}) \quad (\text{III.12})$$

Où Ω_{σ_s} est la solution de $\Omega_{\sigma_s} O_{\sigma_s} = 0$

La séquence active σ^* dans l'intervalle de temps $[k-h, k]$ est une séquence $\sigma_s \in \mathfrak{S}^{h+1}$ ($s \in S$) telle que le résidu correspondant vérifie :

$$r_{h,\sigma_s} = 0 \quad (\text{III.13})$$

III.3.4 Unicité de la solution

Comme nous venons de le voir dans la section précédente, la séquence de modes active σ^* est la séquence σ_s qui annule le résidu (III.12). Cependant, si on trouve plusieurs résidus nuls, on ne saura pas quelle est la séquence active.

Par exemple, supposons que nous avons quatre séquences possibles : $\sigma_1 = 11$, $\sigma_2 = 12$, $\sigma_3 = 21$ et $\sigma_4 = 22$. Etant donné qu'à un instant donné k , la séquence active est $\sigma^* = 21$. Pour pouvoir estimer cette séquence, on doit trouver uniquement le résidu $r_{1,\sigma_3} = 0$. Cette unicité de solution est garantie par la condition de discernabilité que nous allons voir dans ce qui suit.

Définition III.1 - Considérons deux séquences de modes σ_i et σ_j délivrées par le système (III.3). Supposons que σ_i est la séquence active. La séquence σ_j est discernable de σ_i dans une fenêtre d'observation de longueur $h+1$, si les résidus correspondants r_{h,σ_i} et r_{h,σ_j} ne sont pas simultanément nuls.

Définition III.2 - Le système (III.3) est discernable si pour chaque paire de séquences $\sigma_i \in \mathfrak{S}^{h+1}$ et $\sigma_j \in \mathfrak{S}^{h+1}$, σ_i est discernable de σ_j .

Théorème III.1 [Domlan et al, 2007] - Considérons deux séquences de modes σ_i et σ_j délivrées par le système (III.3). Supposons que σ_i est la séquence active. Pour une séquence d'entrée donnée $u_{k-h,k}$, la séquence σ_i est discernable de σ_j dans une fenêtre d'observation de longueur $h + 1$, pour presque toutes les conditions initiales x_{k-h} , si et seulement si, au moins l'une des conditions suivantes est satisfaite :

$$\Omega_{\sigma_i} O_{\sigma_j} \neq 0 \quad (III.14)$$

$$\Omega_{\sigma_i} \left((T_{\sigma_j} - T_{\sigma_i}) u_{k-h,k} + (T'_{\sigma_j} - T'_{\sigma_i}) \right) \neq 0 \quad (III.15)$$

III.3.5 Choix de l'horizon de détection h [Halimi, 2013]

L'horizon de détection h est choisi comme étant le plus petit entier qui vérifie l'équation suivante :

$$\text{rang}(O_{\sigma[k-h,k]}) = \text{rang}(O_{\sigma[k-h,k-1]}) \quad (III.16)$$

III.4 Conception d'observateur

Après l'étape de l'estimation de la séquence active σ^* , nous allons utiliser un observateur pour synchroniser les systèmes maître et esclave. Cet observateur obéit à la description suivante :

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1} = A_{\sigma^*(k)} \hat{x}_k + B_{\sigma^*(k)} u_k + E_{\sigma^*(k)} + L_{\sigma^*(k)} (y_k - \hat{y}_k) \\ \hat{y}_k = C_{\sigma^*(k)} \hat{x}_k \end{cases} \quad (III.17)$$

Où $\hat{x}_k \in \mathfrak{R}^n$ est le vecteur d'état de l'observateur, $\hat{y}_k \in \mathfrak{R}^m$ est la sortie de l'observateur et $L_{\sigma^*(k)}$ est le gain de l'observateur.

A partir de (III.3) et (III.17), l'erreur de synchronisation est donnée par :

$$e_k = x_k - \hat{x}_k \quad (III.18)$$

Dans le cas où $\sigma^*(k) = \sigma(k)$, l'erreur (III.18) est gouvernée par la dynamique :

$$e_{k+1} = (A_{\sigma^*(k)} - L_{\sigma^*(k)} C_{\sigma^*(k)}) e_k \quad (III.19)$$

La dynamique de l'erreur de reconstruction d'état est non linéaire puisque $A_{\sigma^*(k)}$, $L_{\sigma^*(k)}$ et $C_{\sigma^*(k)}$ dépendent de $\sigma^*(k)$.

La stabilité asymptotique globale (GAS) de (III.19) autour du point d'équilibre zéro peut être assurée par un choix approprié des gains $L_{\sigma^*(k)}$. Ceci est garanti par le théorème suivant.

Théorème III.2 [Daafouz et al., 2002] S'il existe des matrices symétriques S_i , des matrices G_i et des matrices F_i vérifiant, $\forall (i, j) \in \{1, \dots, I\} \times \{1, \dots, I\}$, les LMIs :

$$\begin{bmatrix} G_i^T + G_i - S_i & (\blacksquare)^T \\ A_i^T G_i - C_i^T F_i & S_j \end{bmatrix} > 0 \quad (III.20)$$

alors l'observateur (III.17) avec le gain $L_i = G_i^{T-1} F_i^T$ garantit que le système (III.19) soit globalement asymptotiquement stable.

La preuve détaillée de ce théorème est donnée dans [Daafouz et al., 2002]. Il est démontré que les LMIs (III.20) assure l'existence d'une fonction de Lyapunov $V(e_k)$ définie par $V(e_k) = e_k^T \mathcal{P}(x_k) e_k$, appelée fonction de Lyapunov poly-quadratique, vérifiant pour tout $e_k \in \mathbb{R}^n$:

$$V(e_{k+1}) - V(e_k) < 0 \quad (III.21)$$

Cette fonction assure la stabilité poly-quadratique de (III.19) qui est suffisante pour la stabilité asymptotique globale.

III.5 Exemple numérique

Considérons la récurrence de Lozi donnée par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} x_{k+1}^{(1)} = 1 - a |x_k^{(1)}| + x_k^{(2)} \\ x_{k+1}^{(2)} = b x_k^{(1)} \\ y_k = -2.3 |x_k^{(1)}| + x_k^{(1)} + x_k^{(2)} \end{cases} \quad (III.22)$$

Où a et b représentent des paramètres et k le nombre des itérations.

Nous avons vu que la récurrence de Lozi présente un comportement chaotique pour les valeurs numériques $a = 1.7$ et $b = 0.5$.

- **Etape 1 : écriture de la récurrence chaotique sous la forme (III.3)**

D'abord, on définit la loi de commutation $\sigma(k)$ comme suit :

$$\begin{cases} \sigma(k) = 1 & \text{si } x_k^{(1)} > 0 \\ \sigma(k) = 2 & \text{si } x_k^{(1)} \leq 0 \end{cases} \quad (\text{III.23})$$

Par conséquent, la récurrence (III.22) peut être écrite sous la forme d'un système à commutation de la forme (III.3) avec :

$$x_k = \begin{bmatrix} x_k^{(1)} \\ x_k^{(2)} \end{bmatrix}; A_1 = \begin{bmatrix} -a & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix}; E_1 = E_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; C_1 = [-1.3 \quad 1]; C_2 = [3.3 \quad 1]$$

Etant donné que le vecteur d'état est inaccessible, on ne peut pas estimer le mode $\sigma(k)$. Pour cela, nous allons appliquer, dans ce qui suit, la méthode de détection de mode fondée sur l'espace de parité afin d'estimer $\sigma(k)$.

- **Etape 2 : équation entrée/sortie**

On teste la condition (III.16) afin de trouver l'horizon de détection. On trouve que cette condition est vérifiée pour $h = 2$. Ensuite, on écrit les sorties du système sur un horizon de longueur $h + 1 = 3$, on trouve :

$$\begin{cases} y_{k-2} = C_{\sigma(k-2)} x_{k-2} \\ y_{k-1} = C_{\sigma(k-1)} A_{\sigma(k-2)} x_{k-2} + C_{\sigma(k-1)} E_{\sigma(k-2)} \\ y_k = C_{\sigma(k)} A_{\sigma(k-1)} A_{\sigma(k-2)} x_{k-2} + C_{\sigma(k)} (A_{\sigma(k-1)} E_{\sigma(k-2)} + E_{\sigma(k-1)}) \end{cases} \quad (\text{III.24})$$

L'ensemble des équations obtenues peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} y_{k-2} \\ y_{k-1} \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{\sigma(k-2)} \\ C_{\sigma(k-1)} A_{\sigma(k-2)} \\ C_{\sigma(k)} A_{\sigma(k-1)} A_{\sigma(k-2)} \end{bmatrix} x_{k-2} + \begin{bmatrix} 0 \\ C_{\sigma(k-1)} E_{\sigma(k-2)} \\ C_{\sigma(k)} (A_{\sigma(k-1)} E_{\sigma(k-2)} + E_{\sigma(k-1)}) \end{bmatrix} \quad (\text{III.25})$$

Cette équation est équivalente à :

$$y_{k-2,k} = O_{\sigma[k-2,k]} x_{k-2} + T'_{\sigma[k-2,k]} \quad (\text{III.26})$$

Puisque le vecteur x_{k-2} est inconnu, on doit l'éliminer dans l'équation (III.26) en la multipliant par $\Omega_{\sigma[k-2,k]}$ qui vérifie $\Omega_{\sigma[k-2,k]} O_{\sigma[k-2,k]} = 0$. Par conséquent, on obtient :

$$\Omega_{\sigma[k-2,k]} y_{k-2,k} = \Omega_{\sigma[k-2,k]} T'_{\sigma[k-2,k]} \quad (III.27)$$

Nous obtenons, ainsi, le vecteur des résidus sous sa forme calculable :

$$r_{2,\sigma[k-2,k]} = \Omega_{\sigma[k-2,k]} (y_{k-2,k} - T'_{\sigma[k-2,k]}) = 0 \quad (III.28)$$

Par conséquent, afin d'estimer la séquence de modes active, on doit calculer les résidus (III.28) pour toutes les séquences possibles σ_s sur un horizon de longueur $h + 1 = 3$: $\sigma_1 = 111, \sigma_2 = 112, \sigma_3 = 121, \sigma_4 = 122, \sigma_5 = 211, \sigma_6 = 212, \sigma_7 = 221, \sigma_8 = 222$:

$$r_{2,\sigma_s} = \Omega_{\sigma_s} (y_{k-2,k} - T'_{\sigma_s}) \quad (III.29)$$

Ce résidu est nul si la séquence correspondante σ_s est la séquence active $\sigma^* = \sigma[k - 2, k]$.

- **Etape 3 : Test de discernabilité**

Nous avons testé les conditions (III.13) et (III.14). Il s'avère que le système est discernable. Cela veut dire, qu'à chaque instant k , un seul résidu est nul, ce qui garantit l'estimation de toute la séquence active.

- **Etape 4 : Détection de la séquence de modes active σ^***

Nous visualisons dans le tableau suivant la valeur des résidus pour les 6 premières itérations :

	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$
r_{2,σ_1}	/	/	-1.1697	-0.9977	0	0.6447	-0.9133
r_{2,σ_2}	/	/	0.4767	0.5676	2.0891	0	1.0388
r_{2,σ_3}	/	/	0	0.0628	-0.2157	-1.7660	0
r_{2,σ_4}	/	/	-0.6470	-0.6405	-2.1923	-1.6761	-1.1351
r_{2,σ_5}	/	/	-0.9292	0	-0.9095	-1.1295	-1.2100
r_{2,σ_6}	/	/	0.1041	-0.2788	-1.9120	0.0921	-0.4792
r_{2,σ_7}	/	/	1.4360	0.7502	0.7428	2.4491	1.3583
r_{2,σ_8}	/	/	1.0596	0.3729	-0.4684	1.7559	0.7067

Tableau III.1 Valeurs des résidus

✓ **Remarques**

- On commence l'estimation initiale à l'instant $k = 2$. On trouve un seul résidu nul qui est r_{2,σ_3} , ce qui implique que la séquence active est $\sigma^* = \sigma_3 = 121 = \sigma[0,2]$;
- A l'instant $k = 3$, un seul résidu s'annule : $r_{2,\sigma_5} = 0 \Rightarrow \sigma^* = \sigma_5 = 211 = \sigma[1,3]$;
- De la même façon on trouve :

	$\sigma^*(0)$	$\sigma^*(1)$	$\sigma^*(2)$	$\sigma^*(3)$	$\sigma^*(4)$	$\sigma^*(5)$	$\sigma^*(6)$
$k = 2$	1	2	1				
$k = 3$		2	1	1			
$k = 4$			1	1	1		
$k = 5$				1	1	2	
$k = 6$					1	2	1

Tableau III.2 Premiers modes estimés

- D'après le tableau III.2, on remarque que l'estimation initiale (à $k = 2$) nous donne la séquence de modes $\sigma^*[0,2] = \sigma^*(0)\sigma^*(1)\sigma^*(2)$. Ensuite, à l'instant $k = 3$, le calcul des résidus nous permet d'estimer la séquence de modes $\sigma^*[1,3]$. Cependant, étant donné que les modes $\sigma^*(1)$ et $\sigma^*(2)$ ont été déjà estimés, il n'est pas nécessaire, à l'instant $k = 3$ d'estimer toute la séquence $\sigma^*[1,3]$ mais uniquement le dernier mode $\sigma^*(3)$.
- De plus, puisque à l'instant $k = 3$, nous savons que $\sigma^*[1,2] = 21$, et afin de réduire le temps de calcul, uniquement les résidus des séquences $\sigma_5 = 211$ et $\sigma_6 = 212$ doivent être calculés.
- D'une façon générale, après l'estimation initiale ($k > h$), il n'est pas nécessaire de :
 - Estimer toute la séquence de modes active $\sigma^*[k-h, k]$ mais uniquement le dernier mode $\sigma^*(k)$;
 - Calculer tous les résidus mais uniquement ceux des séquences ayant la partie $\sigma^*[k-h, k-1]$ estimée précédemment.

Les résultats de simulation sont donnés sur la figure suivante :

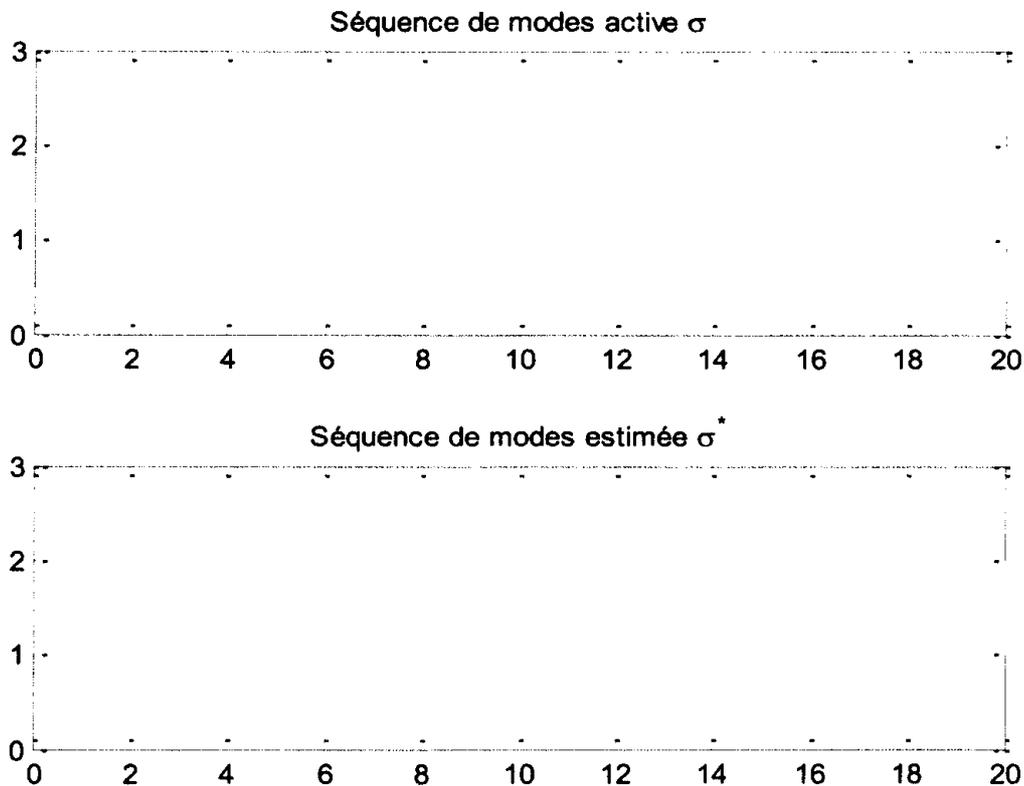


Figure III.2 Séquence active σ et séquence estimée σ^*

- **Etape 5 : Conception d'observateur**

Pour la reconstruction de \hat{x}_k et donc la synchronisation du maître et de l'esclave, nous avons recours à un observateur à commutation de la forme (III.17). La toolbox Yalmip de Matlab est utilisée pour résoudre les inégalités matricielles linéaires (III.20) qui permettent de calculer les gains L_1 et L_2 de l'observateur. Il s'avère que les LMI (III.20) sont faisables. Les gains qui en résultent sont :

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1.2024 \\ -0.2530 \end{bmatrix} \text{ et } L_2 = \begin{bmatrix} 0.5406 \\ 0.1436 \end{bmatrix} \quad (\text{III.30})$$

La reconstruction du vecteur d'état x_k est assurée par l'observateur à commutation (III.17). Cependant, étant donné que le détecteur de modes ne délivre la séquence active (et donc le mode actif $\sigma^*(k)$) qu'à partir de l'instant $k = 2$, alors à l'instant $k = 0$ et $k = 1$ nous n'avons aucune information sur le mode actif. Par conséquent, nous allons donner des valeurs aléatoires pour $\sigma^*(0)$ et $\sigma^*(1)$ ($\sigma^*(0)=1$ et $\sigma^*(1)=1$). Ensuite, pour $k \geq 2$, à chaque instant k , le détecteur délivre le mode actif $\sigma(k)$, ce qui permet à l'observateur à commutation de

reconstruire le vecteur d'état x_k . La reconstruction du vecteur d'état x_k ainsi que l'erreur de synchronisation sont illustrés sur la figure III.3 et la figure III.4 respectivement.

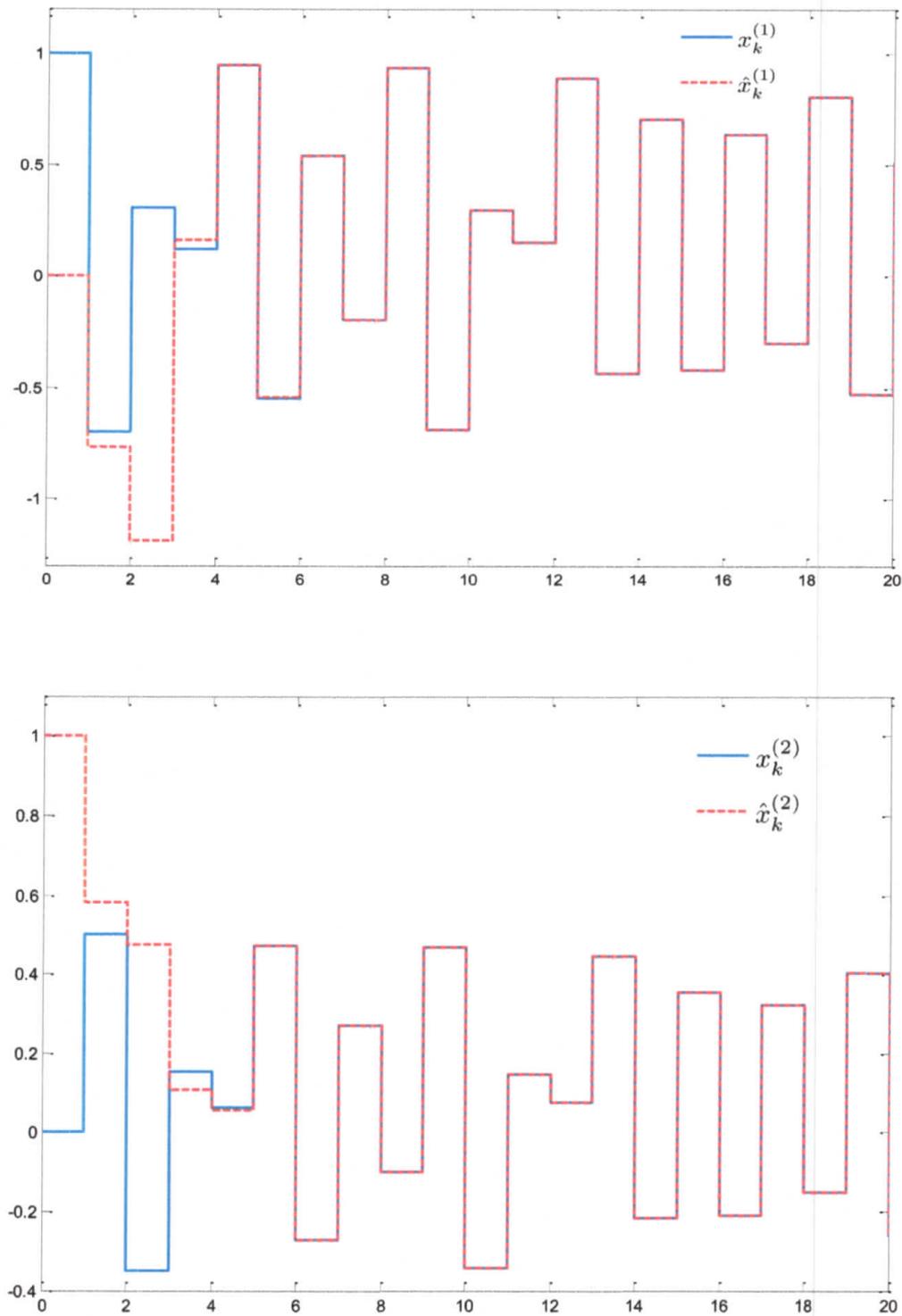


Figure III.3 Evolution du vecteur d'état du maître x_k et de l'esclave \hat{x}_k

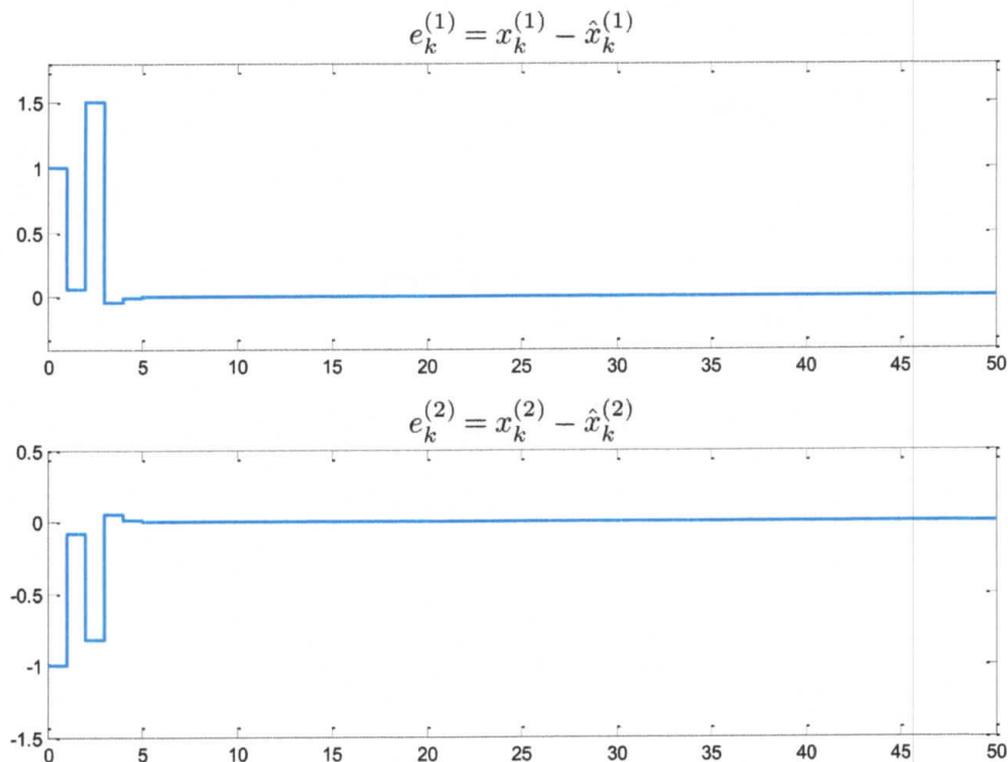


Figure III.4 Evolution de l'erreur de synchronisation $e_k = x_k - \hat{x}_k$

✓ Discussion des résultats

D'après les résultats obtenus, on remarque que :

- La détection du mode actif ne peut avoir lieu qu'à partir de $k = 2$. En effet, la méthode de détection de modes fondée sur les équations de parité fait appel au vecteur de sortie $y_{k-h,k}$. Puisque $h = 2$, nous devons avoir le vecteur de sortie $y_{0,2} = y_{2-2,2} = [y_0 \ y_1 \ y_2]^T$ pour pouvoir commencer la reconstruction de la séquence de modes active $\sigma^*[0,2]$;
- Pour $k \geq 2$, le détecteur délivre à chaque instant k , le mode actif $\sigma(k)$ et donc l'observateur à commutation reconstruit le vecteur d'état x_k .
- Le détecteur de mode fondé sur les équations de parité a permis de reconstruire toute la séquence active ;
- Le vecteur d'état de l'esclave converge vers le vecteur d'état du maître après un état transitoire, et donc l'erreur de synchronisation complète tend vers zéro après l'état transitoire.

III.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous nous sommes intéressés à la détection de modes fondée sur les équations de parité. Cette méthode suppose que le modèle du système est connu et peut être appliquée sur les systèmes à commutation. Nous avons expliqué l'intérêt de la détection de modes dans le cadre de la synchronisation du chaos à l'aide d'observateur impliquant des systèmes chaotiques à commutation. Finalement, nous avons illustré les étapes de la détection de modes ainsi que la conception d'un observateur à commutation pour synchroniser la récurrence chaotique de Lozi

Chapitre IV

Application à la synchronisation des systèmes chaotiques à retard

Sommaire

IV.1	Introduction.....	50
IV.2	Présentation des systèmes chaotiques à retard	50
IV.3	Formulation hybride.....	51
IV.4	(n, w) -discernabilité	53
IV.5	Exemple numérique.....	56
IV.6	Conclusion.....	63

IV.1 Introduction

Depuis des années, les systèmes à retard ont fait l'objet de recherches intensives. Cela est dû au fait que des retards sont inhérents à de nombreux systèmes physiques, tels que les systèmes mécaniques, les procédés chimiques, la biologie, les systèmes de transport ou de communication et les modèles économétriques. L'estimation des retards pour les systèmes dynamiques a reçu une attention considérable en automatique. Au cours des deux dernières décennies, il y a eu un intérêt croissant pour les systèmes chaotiques à retard dans les communications sécurisées. En effet, les retards augmentent la dimension du système, ce qui est intéressant pour améliorer la complexité des dynamiques.

L'estimation du retard est un enjeu important dans ce contexte puisqu'il peut jouer le rôle de clé secrète dans une communication sécurisée. Néanmoins, la plupart des méthodes disponibles d'estimation de retards sont dédiées aux systèmes continus

Dans ce chapitre, nous allons appliquer la détection de mode fondée sur les équations de parité pour l'estimation du retard inconnu. Cette étape est nécessaire pour synchroniser les systèmes chaotiques à retard. Le plan de ce chapitre est le suivant. Nous allons commencer par présenter le système chaotique à retard auquel nous nous intéresserons. Ensuite, il sera montré comment le problème d'estimation de ce retard variant dans le temps peut être formulé comme une détection de mode à travers une formulation hybride. Ensuite, vu que la condition de discernabilité ne sera jamais vérifiée, une condition moins restrictive ; (n, w) -discernabilité ; sera introduite. Un exemple illustratif sera ensuite proposé.

IV.2 Présentation des systèmes chaotiques à retard

Après la synchronisation complète et généralisée, les chercheurs ont découvert que deux systèmes dynamiques chaotiques non identiques peuvent exposer un phénomène de synchronisation dont lequel les variables dynamiques des deux systèmes deviennent synchronisées, mais avec un retard dans le temps, de l'un par rapport à l'autre. Il s'agit de la synchronisation de retard.

Considérons le système affine à commutation à retard à temps discret donné par :

$$\begin{cases} z_{k+1} = \mathcal{A}_{\gamma(k)} z_k + \mathcal{H}_{\gamma(k)} z_{k-\tau(k)} + \mathcal{B}_{\gamma(k)} u_k + \mathcal{E}_{\gamma(k)} \\ y_k = \mathcal{C}_{\gamma(k)} z_k \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

Où $k \in \mathbb{N}$ est le nombre naturel représentant le temps discret, $z_k \in \mathbb{R}^N$ est le vecteur d'état, $y_k \in \mathbb{R}^M$ est la sortie et $u_k \in \mathbb{R}^P$ est l'entrée de commande. Les matrices $\mathcal{A}_{\gamma(k)} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $\mathcal{H}_{\gamma(k)} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $\mathcal{B}_{\gamma(k)} \in \mathbb{R}^{N \times P}$, $\mathcal{E}_{\gamma(k)} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ et $\mathcal{C}_{\gamma(k)} \in \mathbb{R}^{M \times P}$ sont les matrices d'états. La quantité γ est la loi de commutation appartenant à l'ensemble $\gamma(k) \in \mathcal{I} = \{1, \dots, I\}$.

La quantité $\tau(k)$ est le retard variable dans le temps associé au vecteur d'état. Elle prend des valeurs dans l'ensemble fini et connu $\tau(k) \in \mathcal{T} = \{0, \dots, \alpha\}$. La variation de $\tau(k)$ est supposée arbitraire, et le cas où $\tau(k)$ n'est pas directement accessible est considéré. Tandis que le modèle et les séquences de sortie y_k sont supposés être connues et accessibles en ligne.

Nous allons voir dans ce qui suit, comment peut-on reformuler le problème d'estimation de ce retard comme un problème de détection de mode pour la synchronisation des systèmes chaotique affines à commutation. L'approche consiste à réécrire le système (IV.1) sous la forme d'un système affine à commutation.

IV.3 Formulation hybride

Nous allons procéder au changement de variable suivant :

$$x_k = \begin{bmatrix} z_k \\ z_{k-1} \\ z_{k-2} \\ \vdots \\ z_{k-\alpha} \end{bmatrix}, \quad u_k = \mathcal{U}_k, \quad y_k = \mathcal{Y}_k \quad (\text{IV.2})$$

Ainsi, le système à retard (IV.1) peut être réécrit sous la forme du système affine à commutation suivant :

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_{\sigma(k)}x_k + B_{\sigma(k)}u_k + E_{\sigma(k)} \\ y_k = C_{\sigma(k)}x_k \end{cases} \quad (\text{IV.3})$$

Où $x_k \in \mathbb{R}^n$ avec $n = (\alpha + 1)N$, $y_k \in \mathbb{R}^m$ avec $m = M$ et $u_k \in \mathbb{R}^p$ avec $p = P$. Les matrices d'état sont $A_{\sigma(k)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_{\sigma(k)} \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $E_{\sigma(k)} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ et $C_{\sigma(k)} \in \mathbb{R}^{m \times p}$.

La fonction σ est la loi de commutation et $\sigma(k)$ est le mode appartenant à l'ensemble $\sigma(k) \in \mathcal{J} = \{1, \dots, J\}$ avec $J = (\alpha + 1)I$. Elle permet d'identifier de manière unique, à chaque instant k , $(\gamma(k), \tau(k))$ en fonction de la correspondance suivante :

$$\begin{aligned}
(\gamma(k), \tau(k)) = (1,0) &\leftrightarrow \sigma(k) = 1 \\
(\gamma(k), \tau(k)) = (1,1) &\leftrightarrow \sigma(k) = 2 \\
&\vdots \\
(\gamma(k), \tau(k)) = (1, \alpha) &\leftrightarrow \sigma(k) = \alpha + 1 \\
(\gamma(k), \tau(k)) = (2,1) &\leftrightarrow \sigma(k) = \alpha + 2 \\
&\vdots \\
(\gamma(k), \tau(k)) = (l, \alpha) &\leftrightarrow \sigma(k) = l(\alpha + 1)
\end{aligned} \tag{IV.4}$$

Les matrices d'état sont données par :

$$A_{\sigma(k)} = \begin{bmatrix} V(\mathcal{A}_{\gamma(k)}, \mathcal{H}_{\gamma(k)}) & V_{\alpha}(\mathcal{H}_{\gamma(k)}) \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{IV.5}$$

$$B_{\sigma(k)} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_{\gamma(k)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{IV.6}$$

$$E_{\sigma(k)} = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_{\gamma(k)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{IV.7}$$

$$C_{\sigma(k)} = [\mathcal{C}_{\gamma(k)} \quad \mathbf{0}] \tag{IV.8}$$

Avec : $V(\mathcal{A}_{\gamma(k)}, \mathcal{H}_{\gamma(k)}) = [V_0(\mathcal{A}_{\gamma(k)}, \mathcal{H}_{\gamma(k)}) \quad \dots \quad V_{\alpha-1}(\mathcal{H}_{\gamma(k)})]$ et V_i avec $i \in \{1, \dots, \alpha\}$ vérifient :

$$V_0 = \begin{cases} \mathcal{A}_{\gamma(k)} + \mathcal{H}_{\gamma(k)} & \text{si } \tau(k) = 0 \\ \mathcal{A}_{\gamma(k)} & \text{si } \tau(k) \neq 0 \end{cases} [\mathcal{C}_{\gamma(k)} \quad \mathbf{0}] \tag{IV.9}$$

$$V_{i \neq 0} = \begin{cases} \mathcal{H}_{\gamma(k)} & \text{si } \tau(k) = i \\ \mathbf{0} & \text{si } \tau(k) \neq i \end{cases}$$

Afin de clarifier cette formulation, considérons le système donné par (IV.1) avec $\tau(k) \in \{0,1\}$ et $\gamma(k) \in \{1,2,3\}$. Il peut être réécrit sous la forme (IV.3) avec la loi de commutation $\sigma(k)$ qui vérifie :

$$\begin{aligned}
(\gamma(k), \tau(k)) = (1,0) &\leftrightarrow \sigma(k) = 1 \\
(\gamma(k), \tau(k)) = (1,1) &\leftrightarrow \sigma(k) = 2 \\
(\gamma(k), \tau(k)) = (2,0) &\leftrightarrow \sigma(k) = 3 \\
(\gamma(k), \tau(k)) = (2,1) &\leftrightarrow \sigma(k) = 4 \\
(\gamma(k), \tau(k)) = (3,0) &\leftrightarrow \sigma(k) = 5 \\
(\gamma(k), \tau(k)) = (3,1) &\leftrightarrow \sigma(k) = 6
\end{aligned}$$

Les matrices d'état sont :

$$A_1 = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_1 + \mathcal{H}_1 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, E_1 = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, C_1 = [C_1 \quad \mathbf{0}]$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_1 & \mathcal{H}_1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, C_2 = [C_1 \quad \mathbf{0}]$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_2 + \mathcal{H}_2 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, C_3 = [C_2 \quad \mathbf{0}]$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_2 & \mathcal{H}_2 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, E_4 = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, C_4 = [C_2 \quad \mathbf{0}]$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_3 + \mathcal{H}_3 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, B_5 = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_3 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, E_5 = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_3 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, C_5 = [C_3 \quad \mathbf{0}]$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_3 & \mathcal{H}_3 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, B_6 = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_3 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, E_6 = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_3 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, C_6 = [C_3 \quad \mathbf{0}]$$

Et

$$x_k = \begin{bmatrix} z_k \\ z_{k-1} \end{bmatrix}, u_k = \mathcal{U}_k, y_k = \mathcal{Y}_k$$

Le système (IV.3) est un système affine à commutation avec $(\alpha + 1)l$ modes en fonction de la valeur du retard inconnu $\tau(k)$ et de la loi de commutation $\gamma(k)$.

Dans ces conditions, l'estimation de $\tau(k)$ et de $\gamma(k)$ du système (IV.1) revient à l'estimation du mode $\sigma(k)$ du système équivalent (IV.3). Par conséquent, la détection de mode fondée sur les équations de parité que nous avons vu au cours du chapitre 3 peut être appliquée. Cependant, il a été démontré dans [Halimi, 2013] que la condition de discernabilité n'est jamais vérifiée pour ces systèmes. Par conséquent, nous allons introduire dans la section suivante une condition moins restrictive qui est la (n, w) -discernabilité.

IV.4 (n, w) -discernabilité

La notion de (n, w) -discernabilité a été introduite dans [Alessandri et al., 2005]. Elle reflète la capacité de discriminer la sous-séquence active $\sigma^*[k - h + n, k - w]$ de toutes les autres.

Les grandeurs n et w sont des entiers vérifiant $n \in \{0, \dots, h\}$ et $w \in \{0, \dots, h\}$ et $n + w \leq h$. Clairement, la (n, w) -discernabilité coïncide avec la discernabilité si $n = 0$ et $w = 0$.

Dans la suite, nous considérons $n > 0$ ou $w > 0$. Les entiers n et w doivent être choisis les plus petits possible pour obtenir une séquence estimée de longueur maximale.

Soit $\sigma_s[k - h + n, k - w]$ une séquence de modes $\sigma(k - h + n), \sigma(k - h + n + 1) \dots \sigma(k - w)$. La (n, w) -discernabilité obéit alors à la définition suivante.

Définition IV.1 - Considérons deux séquences de modes σ_i et σ_j délivrées par le système (IV.3). Supposons que σ_i est la séquence active. La séquence σ_i est (n, w) -discernable de σ_j dans une fenêtre d'observation de longueur $h + 1$, si $\sigma_i[k - h + n, k - w] \neq \sigma_j[k - h + n, k - w]$ et σ_i est discernable de σ_j .

Définition IV.2 - Le système (IV.3) est (n, w) -discernable si pour chaque paire de séquences $\sigma_i \in \mathfrak{Z}^{h+1}$ et $\sigma_j \in \mathfrak{Z}^{h+1}$, σ_i est (n, w) -discernable de σ_j .

Proposition IV.1 [Halimi, 2013] - Considérons deux séquences de modes σ_i et σ_j délivrées par le système (IV.3). Supposons que σ_i est la séquence active. Pour une séquence d'entrée donnée $u_{k-h,k}$, la séquence σ_i est (n, w) -discernable de σ_j dans une fenêtre d'observation de longueur $h + 1$, pour presque toutes les conditions initiales x_{k-h} , si et seulement si, au moins l'une des conditions suivantes est satisfaite :

$$\Omega_{\sigma_i} O_{\sigma_j} \neq 0 \quad (\text{IV.10})$$

$$\Omega_{\sigma_i} \left((T_{\sigma_j} - T_{\sigma_i}) u_{k-h,k} + (T'_{\sigma_j} - T'_{\sigma_i}) \right) \neq 0 \quad (\text{IV.11})$$

Avec : $\sigma_i[k - h + n, k - w] \neq \sigma_j[k - h + n, k - w]$.

Nous allons expliquer la notion de la (n, w) -discernabilité à travers l'exemple suivant :

- **Exemple**

Supposons que nous avons un système à commutation avec $\sigma(k) \in \{1, 2\}$. Le calcul de l'horizon de détection avec l'équation (III.16) a donné $h = 2$. Ce qui veut dire que les séquences possibles sont :

$$\begin{cases} \sigma_1 = 111 \\ \sigma_2 = 112 \\ \sigma_3 = 121 \\ \sigma_4 = 122 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \sigma_5 = 211 \\ \sigma_6 = 212 \\ \sigma_7 = 221 \\ \sigma_8 = 222 \end{cases}$$

Le test des conditions de discernabilité (III.14) et (III.15) nous a permis de construire le tableau suivant :

Séquence active	Séquences σ_j tel que la séquence active n'est pas discernable de σ_j
$\sigma_1 = 111$	σ_2
$\sigma_2 = 112$	/
$\sigma_3 = 121$	/
$\sigma_4 = 122$	σ_3 et σ_7
$\sigma_5 = 211$	/
$\sigma_6 = 212$	/
$\sigma_7 = 221$	/
$\sigma_8 = 222$	/

Tableau IV.1 Séquences non discernables

Dans cette discussion, nous considérons le cas de l'estimation initiale ($k = 2$), et donc on cherche à estimer la séquence active dans l'intervalle $[0,2]$ qui est $\sigma[0,2]$.

D'après ce tableau, on remarque que les séquences $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_5, \sigma_6, \sigma_7$ et σ_8 sont discernables de toutes les autres séquences, ce qui veut dire que, si l'une de ces séquences est la séquence active, on aura un seul résidu qui s'annule, ce qui va nous permettre de l'estimer.

Par contre, si σ_1 est la séquence active on va trouver deux résidus qui s'annulent en même temps : $r_{2,\sigma_1} = 0$ et $r_{2,\sigma_2} = 0$. Dans ce cas, on ne pourra pas savoir, laquelle de σ_1 ou σ_2 est la séquence active. Néanmoins, on remarque que ces deux séquences ont les deux premiers modes identiques : $\sigma_1 = \mathbf{111}$ et $\sigma_2 = \mathbf{112}$. Par conséquent, on ne peut pas estimer la totalité de la séquence active mais on pourra estimer la première partie : $\sigma^* = \mathbf{11X}$. Uniquement le mode X ne peut pas être reconstruit car on ne sait pas si $X = 1$ ou $X = 2$. Pour cette séquence, on dit que σ_1 est (0,1)-discernable de toutes les autres séquences, car si on teste les conditions de discernabilité avec les séquences σ_j tel que : $\sigma_1[0,1] \neq \sigma_j[0,1]$ (donc avec $\sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6, \sigma_7$ et σ_8), on trouve que σ_1 est discernable.

De la même façon, si σ_4 est la séquence active, nous allons trouver trois résidus qui s'annulent en même temps : $r_{2,\sigma_3} = 0, r_{2,\sigma_4} = 0$ et $r_{2,\sigma_7} = 0$. Il est évident que l'une de ces

séquences est la séquence active, mais tant que la loi de commutation n'est pas accessible, on ne peut pas trouver la séquence active. Si on compare ces séquences : $\sigma_3 = 121$, $\sigma_4 = 122$ et $\sigma_7 = 221$, on remarque que le premier mode est le dernier mode changement mais le deuxième mode est identique pour les trois séquences $\Rightarrow \sigma^* = X2Y$. Uniquement les modes X et Y ne peuvent pas être reconstruits car on ne sait pas s'ils valent 1 ou 2. Pour cette séquence, on dit que σ_4 est (1,1)-discernable des autres séquences, car si on teste les conditions de discernabilité avec les séquences σ_j tel que : $\sigma_4(1) \neq \sigma_j(1)$ (donc avec $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_5, \sigma_6$), on trouve que σ_4 discernable.

Puisque σ_1 est (0,1)-discernable et σ_4 est (1,1)-discernable, alors ce système est (1,1)-discernable. D'une manière générale, dans la (n, w)-discernabilité :

- n : est le nombre de modes qu'on ne peut pas reconstruire à gauche ;
- w : est le nombre de modes qu'on ne peut pas reconstruire à droite.

IV.5 Exemple numérique

On s'intéresse à la synchronisation des systèmes chaotiques affine à commutation avec un retard variable illustrée sur la figure IV.1.

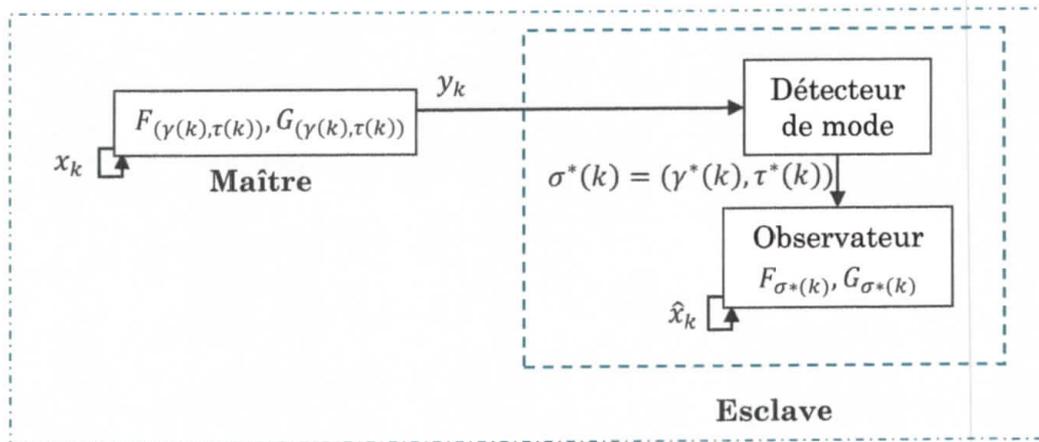


Figure IV.1 Synchronisation des systèmes chaotiques à retard à l'aide d'observateur

Où le maître est la récurrence de Lozi donnée par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} z_{k+1}^{(1)} = 1 - a |z_k^{(1)}| + z_k^{(2)} + 0.01z_{k-\tau(k)}^{(1)} \\ z_{k+1}^{(2)} = b z_k^{(1)} + 0.03z_{k-\tau(k)}^{(2)} \\ y_k = -2.3 |z_k^{(1)}| + z_k^{(1)} + z_k^{(2)} \end{cases} \quad (IV.12)$$

Avec $\tau(k) \in \{0,1\}$ $a = 1.7$ et $b = 0.5$.

La projection de l'attracteur chaotique de Lozi avec et sans retard est donnée sur la figure IV.2.

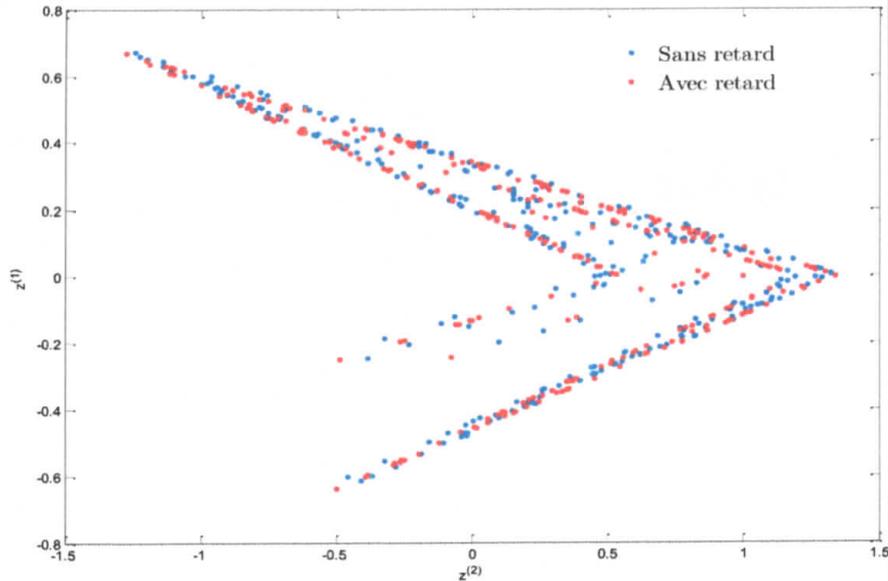


Figure IV.2 Attracteur chaotique de Lozi avec et sans injection du retard

On remarque que l'injection du retard a modifié l'attracteur chaotique de la récurrence de Lozi.

Maintenant afin de synchroniser cette récurrence, nous allons suivre les étapes suivantes :

- **Etape 1 : écriture de la récurrence chaotique sous la forme (IV.1)**

D'abord, on définit la loi de commutation $\gamma(k)$ comme suit :

$$\begin{cases} \gamma(k) = 1 & \text{si } z_k^{(1)} > 0 \\ \gamma(k) = 2 & \text{si } z_k^{(1)} \leq 0 \end{cases} \quad (\text{IV.13})$$

Par conséquent, la récurrence (IV.12) peut être écrite sous la forme d'un système à commutation à retard de la forme (IV.1) avec :

$$z_k = \begin{bmatrix} z_k^{(1)} \\ z_k^{(2)} \end{bmatrix}; \mathcal{A}_1 = \begin{bmatrix} -a & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix}; \mathcal{A}_2 = \begin{bmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix}; \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathcal{C}_1 = [-1.3 \quad 1]; \mathcal{C}_2 = [3.3 \quad 1]$$

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \begin{bmatrix} 0.01 & 1 \\ 0 & 0.03 \end{bmatrix}; \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 = 0.$$

Etant donné que le vecteur d'état est inaccessible, on ne peut pas estimer le mode $\gamma(k)$. De plus, la variation du retard $\tau(k)$ est inconnue. Pour cela, nous allons procéder à la formulation hybride qui va nous permettre d'estimer à la fois le mode et le retard inconnu.

- **Etape 2 : Formulation hybride**

La récurrence chaotique à retard (IV.12) peut être réécrite sous forme du système à commutation (IV.3) avec :

$$x_k = \begin{bmatrix} z_k \\ z_{k-1} \end{bmatrix}, \quad u_k = \mathcal{U}_k, \quad y_k = \mathcal{Y}_k$$

La loi de commutation σ vérifie :

$$(\gamma(k), \tau(k)) = (1,0) \leftrightarrow \sigma(k) = 1$$

$$(\gamma(k), \tau(k)) = (1,1) \leftrightarrow \sigma(k) = 2$$

$$(\gamma(k), \tau(k)) = (2,0) \leftrightarrow \sigma(k) = 3$$

$$(\gamma(k), \tau(k)) = (2,1) \leftrightarrow \sigma(k) = 4$$

Les matrices d'état sont :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -a + 0.01 & 1 & 0 & 0 \\ b & 0.03 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 = [-1.3 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -a & 1 & 0.01 & 1 \\ b & 0 & 0 & 0.03 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = [-1.3 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} a + 0.01 & 1 & 0 & 0 \\ b & 0.03 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_3 = [3.3 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} a & 1 & 0.01 & 1 \\ b & 0 & 0 & 0.03 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_4 = [3.3 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

- **Etape 3 : Choix de l'horizon de détection h**

On teste la condition (III.16) afin de trouver l'horizon de détection. On trouve que cette condition est vérifiée pour $h = 4$. Par conséquent, les résidus à calculer sont donnés sous la forme suivante :

$$r_{4,\sigma_s} = \Omega_{\sigma_s} (y_{k-4,k} - T'_{\sigma_s}) \quad (\text{IV.14})$$

Avec $\sigma_s \in \mathfrak{S}^5$ (une séquence de cinq modes).

- **Etape 4 : Test de (n, w) -discernabilité**

Nous avons testé les conditions de la (n, w) -discernabilité (IV.10) et (IV.11). Il s'avère que le système est $(2,1)$ -discernable. Cela veut dire, qu'à chaque instant k , on ne peut estimer que la partie $\sigma[k-2, k-1]$ de la séquence active $\sigma[k-4, k]$.

- **Etape 5 : Détection de la séquence de modes active σ^***

On commence l'estimation initiale à l'instant $k = h = 4$. Puisque la (2,1)-discernabilité est vérifiée, on ne peut estimer que la sous-séquence $\sigma^*[2,3]$ de la séquence active $\sigma^*[0,4]$. Ensuite à l'instant $k = 5$, on estime $\sigma^*[3,4]$. Pour $k > 5$, étant donné que la séquence de modes $\sigma^*[2,4]$ a été estimée, nous n'avons pas besoin de calculer tous les résidus mais uniquement ceux des séquences ayant la partie $\sigma^*[k - h, k - 2]$ estimée précédemment.

Après l'estimation initiale, à chaque instant k , on estime le mode $\sigma^*(k - 1)$. Pour reconstruire le retard $\tau^*(k)$ et le mode $\gamma^*(k)$, nous avons :

$$\begin{aligned}
 \sigma^*(k) = 1 &\leftrightarrow (\gamma^*(k), \tau^*(k)) = (1,0) \\
 \sigma^*(k) = 2 &\leftrightarrow (\gamma^*(k), \tau^*(k)) = (1,1) \\
 \sigma^*(k) = 3 &\leftrightarrow (\gamma^*(k), \tau^*(k)) = (2,0) \\
 \sigma^*(k) = 4 &\leftrightarrow (\gamma^*(k), \tau^*(k)) = (2,1)
 \end{aligned}
 \tag{IV.15}$$

Les résultats de simulation illustrant la reconstruction du mode actif $\gamma^*(k)$ et du retard $\tau^*(k)$ sont donnés sur les figures IV.3 et IV.4 respectivement.

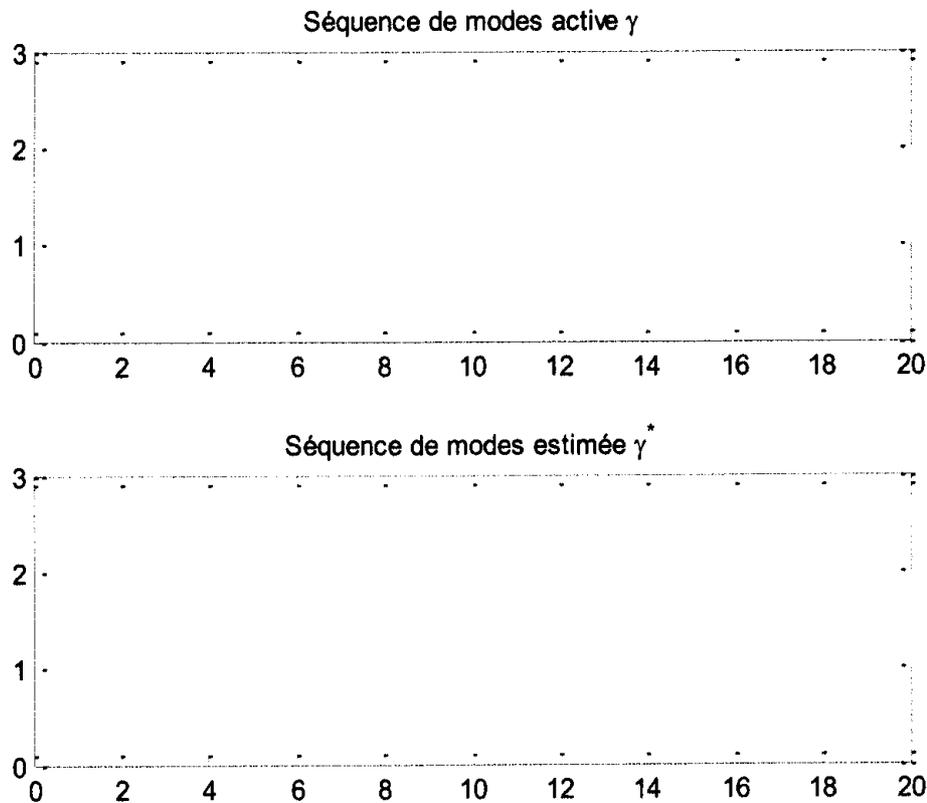
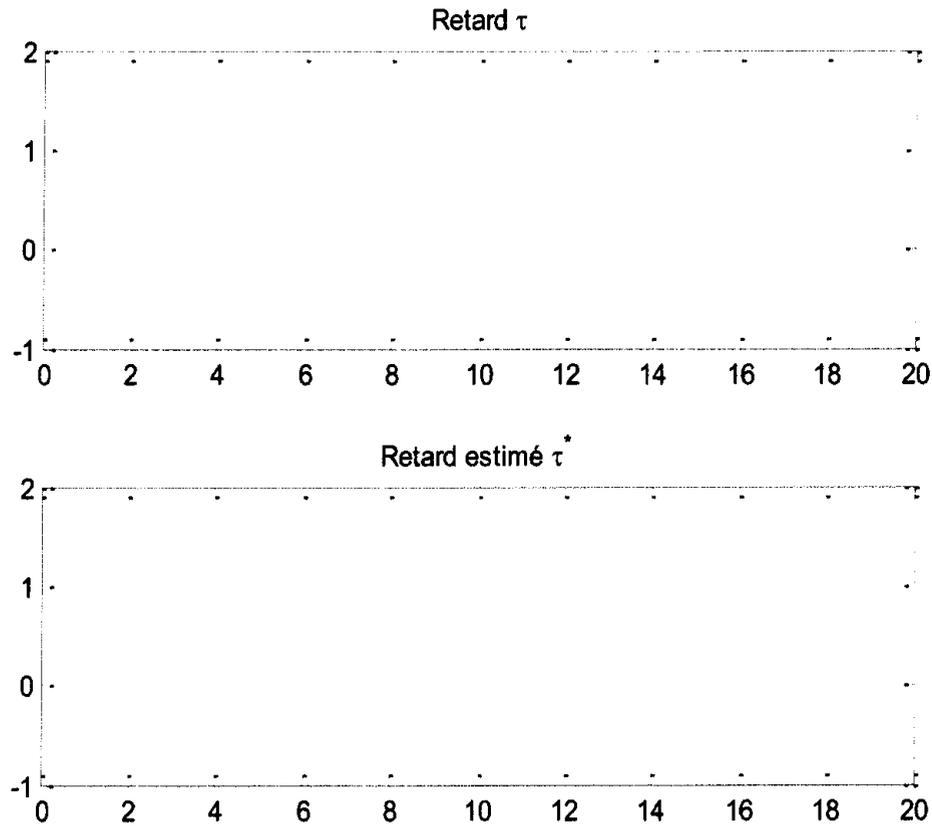


Figure IV.3 Séquence active γ et séquence estimée γ^*

Figure IV.4 Retard τ et retard estimé τ^*

- **Etape 5 : Conception d'observateur**

Pour la reconstruction de x_k , et sachant que le détecteur de modes fournit à chaque instant k le mode $\sigma^*(k-1)$, nous utiliserons l'observateur à commutation suivant :

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1} = A_{\sigma^*(k-1)} \hat{x}_k + E_{\sigma^*(k-1)} + L_{\sigma^*(k-1)} (y_{k-1} - \hat{y}_k) \\ \hat{y}_k = C_{\sigma^*(k-1)} \hat{x}_k \end{cases}$$

Cet observateur assure la synchronisation retardée (Lag) avec $\tau = 1$ entre le maître et l'esclave. La toolbox Yalmip de Matlab est utilisée pour résoudre les LMI (III.20) qui permettent de calculer les gains L_1 , L_2 , L_3 et L_4 de l'observateur. Il s'avère que les LMI (III.20) sont faisables. Les gains qui en résultent sont :

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1.2104 \\ -0.2608 \\ -0.5395 \\ 0.2987 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 1.2167 \\ -0.2710 \\ -0.5394 \\ 0.2987 \end{bmatrix}, L_3 = \begin{bmatrix} 0.5308 \\ 0.1483 \\ 0.2951 \\ 0.0262 \end{bmatrix} \text{ et } L_4 = \begin{bmatrix} 0.5275 \\ 0.1487 \\ 0.2951 \\ 0.0262 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.16})$$

La reconstruction du vecteur d'état x_k ainsi que l'erreur de synchronisation sont illustrés sur la figure IV.5 et la figure IV.6 respectivement.

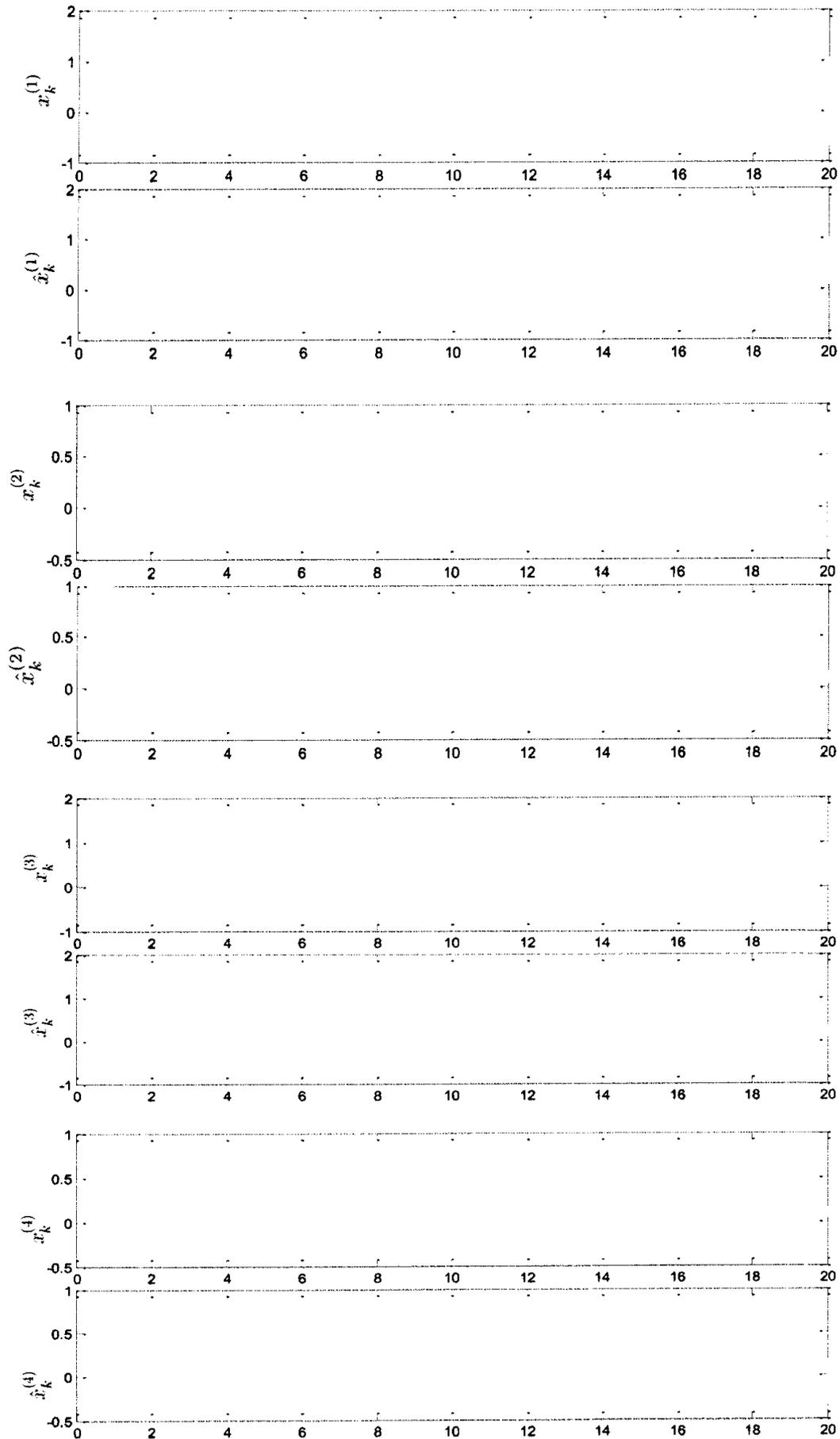


Figure IV.5 Evolution du vecteur d'état du maître x_k et de l'esclave \hat{x}_k

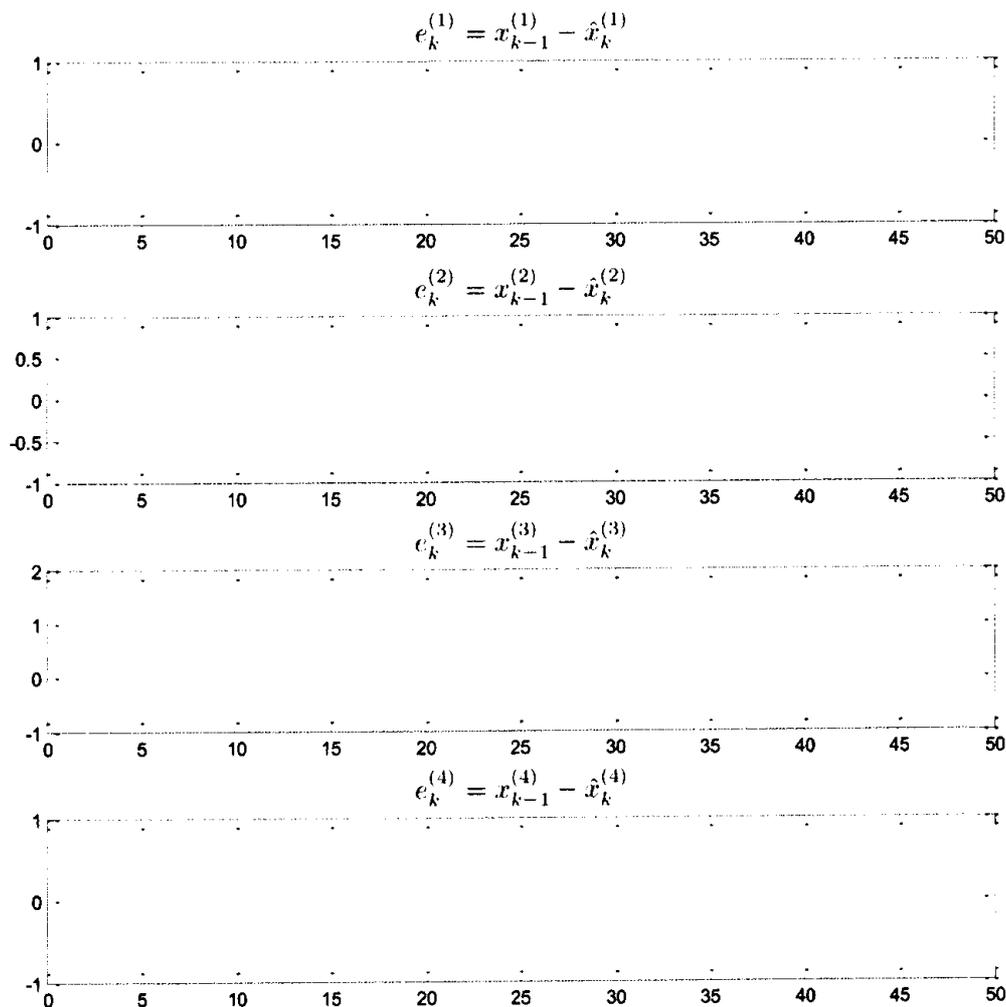


Figure IV.6 Evolution de l'erreur de synchronisation $e_k = x_{k-1} - \hat{x}_k$

✓ Discussion des résultats

D'après les résultats obtenus, on remarque que :

- Le détecteur de mode fondé sur les équations de parité ne peut pas reconstruire les deux premiers modes $\sigma(0) = (\gamma(0), \tau(0))$ et $\sigma(1) = (\gamma(1), \tau(1))$ de la séquence active car le système est (2,1)-discernable, ce qui explique l'erreur de reconstruction de $\gamma(k)$ et $\tau(k)$ à l'instant $k = 0$ et $k = 1$.
- De plus, vu que le système est (2,1)-discernable, pour $k > 4$, le détecteur délivre à chaque instant k , le mode actif $\sigma^*(k-1)$ et donc l'observateur à commutation reconstruit à l'instant k le vecteur d'état x_{k-1} .
- Le vecteur d'état de l'esclave converge vers le vecteur d'état retardée de $\tau = 1$ du maître après un état transitoire et l'erreur de synchronisation de Lag tend vers zéro ;
- La détection du mode actif ainsi ne peut avoir lieu qu'à partir de $k = h = 4$ comme nous l'avons expliqué dans le chapitre précédent.

IV.6 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons appliqué la méthode de détection de modes fondée sur les équations de parité pour estimer le retard variant pour une classe de systèmes chaotiques hybrides à temps discret. L'application de cette méthode a nécessité le passage par une formulation hybride. L'efficacité de la méthode a été mise en évidence dans un problème de synchronisation à base d'observateur.

Conclusion Générale

Ce travail a porté sur l'application de la détection de modes fondée sur les équations de parité pour la synchronisation à base d'observateur des systèmes chaotiques.

Dans un premier temps, nous avons évoqué quelques notions sur les systèmes chaotiques. Un système chaotique possède un comportement borné en régime permanent qui ne correspond pas à un point d'équilibre, qu'il n'est ni périodique, ni quasi-périodique. Parmi les caractéristiques principales permettant d'évoquer un comportement chaotique, on peut retenir les trois suivantes :

1. Un système chaotique est un système déterministe ; ce qui signifie qu'il est régi par des règles fondamentales non probabilistes. Il est alors possible de reproduire le comportement chaotique ;
2. Il exhibe une extrême sensibilité aux conditions initiales ; un moindre écart ou imprécision dans les conditions initiales engendre des évolutions totalement différentes. Ceci implique l'impossibilité de prédiction à long terme du comportement du système chaotique.
3. Si le système est linéaire, il ne peut pas être chaotique.

Après, nous avons introduit le concept de synchronisation des systèmes chaotiques et nous avons rappelé les types et quelques techniques de synchronisation proposées dans la littérature. La technique backstepping a été appliquée ensuite pour synchroniser deux systèmes chaotiques de Rössler. Cette technique suppose que le vecteur d'état du maître est accessible à chaque instant.

Dans le troisième chapitre, nous avons vu que la synchronisation des systèmes chaotiques affines à commutation nécessite la connaissance du mode actif, ce qui n'est pas toujours le cas. Par conséquent, nous nous sommes intéressée à la détection de mode fondée sur les équations de parité, qui s'appuie sur le calcul des résidus à partir de l'équation entrée/sortie du système. Les étapes d'application de cette méthode ainsi que la conception d'un observateur à commutation assurant la synchronisation de la récurrence chaotique de Lozi ont été ensuite détaillées.

Le dernier chapitre a été consacré à l'application de la détection de mode pour la synchronisation des systèmes chaotiques affines à commutation avec un retard inconnu. Le passage par une formulation hybride nous a permis de réécrire le système chaotique à retard

sous la forme d'un système affine à commutation où la nouvelle loi de commutation dépend à la fois du retard inconnu et du mode actif. Ainsi, l'application de la détection de mode sur le nouveau modèle issu de la formulation hybride nous a permis de reconstruire le retard inconnu et le mode actif. Finalement, l'efficacité de la méthode a été mise en évidence dans la synchronisation de la récurrence chaotique de Lozi à retard.

BIBLIOGRAPHIE

- [Afraimovich et al, 1983] V. S. Afraimovich, N. N. Verochev, and M. I. Rabinovich. "Stochastic synchronization of oscillations in dissipative systems". *Radio Phys. and Quantum Electron.*, 29 : Pages 795–803, 1983.
- [Anstett, 2006] F. Anstett, « Les systèmes dynamiques chaotiques pour le chiffrement : Synthèse et cryptanalyse ». Thèse de doctorat, 2006.
- [Bazart, 2014] L. Bazart, « Détection de changement de mode de fonctionnement : Application à la coulée continue de l'acier ». Thèse de doctorat, 2014.
- [Boukabou, 2006] A. Boukabou, « Méthodes de contrôle des systèmes chaotiques d'ordre élevé et leur application pour la synchronisation : contribution et l'élaboration de nouvelles approches ». Thèse de doctorat, 2006.
- [Cherrier, 2006] E. Cherrier, « Estimation de l'état et des entrées inconnues pour une classe de système non linéaire ». Thèse de doctorat, 2006.
- [Daafouz et al, 2002] J. Daafouz, G. Millerioux, and C. Iung, "A poly-quadratic stability based approach for linear switched systems" *International Journal of Control*, vol. 75, no. 16–17, 2002.
- [Devaney, 1992] R. L. Devaney, "A first course in chaotic dynamical systems". Addison-Wesley, 1992.
- [Devaney, 1989] R. L. Devaney, "An introduction to chaotic dynamical systems". In Redwood City, Calif. Addison-Wesley, 1986. Second Edition, 1989.
- [Dimassi, 2012] H. Dimassi, « Synchronisation des systèmes chaotiques par observateurs et applications à la transmission d'informations », Thèse de doctorat, Université de Paris Sud - Paris XI, 2012.
- [Domlan et al, 2006] E. Domlan, J. Ragot, D. Maquin. « Systèmes à Commutation : Diagnostic de Fonctionnement et Identification de la Loi de Commutation ». GdR MACS -

CNRS. Conférence Internationale Francophone d'Automatique, CIFA'2006, May 2006, Bordeaux, France.

[Guessas, 2013] L. Guessas, « Backstepping Backstepping adaptatif pour le contrôle la poursuite et la synchronisation des systèmes dynamiques non linéaires chaotiques ». Thèse de doctorat, 2013.

[Halimi, 2013] M. Halimi, « Observation et détection de modes pour la synchronisation des systèmes chaotiques : une approche unifiée », Thèse de doctorat, 2013.

[Heidari-Bateni and McGillem, 1994] G. Heidari-Bateni, C.D. McGillem, "A chaotic direct-sequence spread-spectrum communication system", IEEE Transactions on Communications, Volume 42, Issue: 234, 1994.

[Luca, 2010] M. B. Luca, « Apports du chaos et des estimateurs d'états pour la transmission sécurisée de l'information », Thèse de doctorat, 2010.

[Megherbi, 2013] O. Megherbi, « Etude et réalisation d'un système sécurisé é base de systèmes chaotiques », Thèse de doctorat, 2013.

[Ouannas, 2015] A. Ouannas. « Sur La Synchronisation Des Systèmes Chaotiques Discrets ». Thèse de doctorat, 2015.

[Pecora and Carroll, 1990] L. Pecora and T. Carroll. "Synchronization in chaotic systems". *Phys. Rev. Lett.*, 64:821–823, 1990.

[Yamada et Fujisaka, 1983] T. Yamada and H. Fujisaka. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. ii. *Prog. Theor. Phys.*, 70:1240, 1983.

[Yamada et Fujisaka, 1984] T. Yamada and H. Fujisaka. "Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems" *Prog. Theor. Phys.*, 72 : 885, 1984.

