

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Mohamed Seddik Benyahia Jijel  
Faculté de la Technologie



**Département de Génie Civil et Hydraulique**

## **MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES**

En vue de l'obtention du diplôme de Master en Hydraulique

Option : Hydraulique Urbaine

Présenté par :

**Yahi Djazil  
Fettane Ameer**

# **APPROCHE ANALYTIQUE POUR LA PREDICTION DES ONDES DE COUP DE BELIER DANS UNE CONDUITE EN CHARGE**

Dirigé par :

- M. AMARA Lyes

Soutenu le 28 / 10 / 2020 devant le jury composé de :

- Président : M. Belaabed Faris
- Examineur : M.Kessili Abdelhak

Promotion 2020

# Remerciements

Avant tout, Nous remercions Dieu qui nous a donné la patience et la sagesse pour mener à terme ce travail.

Nous voudrions remercier notre promoteur « Dr. AMARA », d'avoir accepté de nous encadrer et pour l'intérêt porté à notre travail, sa disponibilité, ses conseils précieux et surtout sa grande patience.

Mes remerciements sont destinés aussi aux membres du jury d'avoir fait l'honneur d'examiner ce modeste travail. De plus je remercie tous les enseignants du département d'hydraulique.

Merci

# Dédicace :

Je dédie ce travail :

Avant tout à mes chers parents, aucune dédicace ne saurait être assez éloquente pour exprimer ce que vous méritez pour tous les sacrifices que vous n'avez cessé de me donner depuis ma naissance, durant mon enfance et même à l'âge adulte.

A toute la famille Yahia

Je le dédie également à :

Mes grands parents

Mes sœurs

A mon binôme Amer et à toute sa famille

A mon cousin Mohammed

A tous mes amis

Djazil

# Dédicace :

Je dédie mon travail :

A l'âme de mon père qui n'était pas présent  
physiquement avec moi mais il était omniprésent  
dans mon cœur

A ma chère mère, qui ont toujours été là pour moi,

Je le dédie également à :

Mes frères

Mes sœurs

Mon collègue dans cette réalisation Djazil

A tous mes collègues.

A vous tous le mérite

Merci...

Amer

# Table des matières

Remerciements .....	I
Dédicace : .....	II
Dédicace : .....	III
Resumé : .....	III
Introduction générale.....	1

## Chapitre I .Revue de la littérature

I.1. Généralité.....	3
I.2.Types d'écoulements .....	3
I.2.1. Ecoulement permanent et non permanent.....	3
I.2.2. Ecoulement uniforme et non uniforme .....	4
I.2.3. Régime transitoire .....	4
I.3. Notions sur les ondes élastiques .....	4
I.3.1. Mécanisme de propagation .....	4
I.3.2. Réflexion des ondes planes .....	5
I.4. Phénomène du coup de bélier .....	6
I.4.1. Définition .....	6
I.4.2. Causes fréquentes du coup de bélier .....	7
I.4.3. Risques et dommages conséquents aux coups de bélier .....	7
I.5. Analyse physique du coup de bélier .....	9
I.5.1. Cas d'arrêt brusque de la pompe.....	9
I.5.2. Cas de L'arrêt brusque d'une vanne placée en aval d'une conduite.....	12
I.6. Etat de l'art.....	12
I.7. Conclusion .....	16

## **Chapitre II. Théorie du coup de bélier**

II.1. Introduction .....	17
II.2. Hypothèses des équations de base .....	17
II.3. Équation de continuité .....	17
II.3.1. Compressibilité de l'eau .....	17
II.3.2. Expressions des contraintes dans les tuyaux sous pression .....	18
II.4. Equation dynamique .....	22
II.5. Discussion des équations de base .....	25
II.6. Intégration Des équations de base .....	26
II.7. Solution général .....	27
II.8. Interprétation des équations d'Allievi .....	30
II.9. Simplification des équations d'Allievi .....	30
II.10. Célérité des ondes .....	31
II.11. Conclusion .....	33

## **Chapitre III. Problème de la fermeture brusque d'une vanne**

### **Solution par la théorie des caractéristiques**

III.1. Introduction .....	34
III.2. Méthode des caractéristiques.....	34
III.3. Avantage de la méthode des caractéristiques .....	35
III.4. Formulation mathématique du modèle aux caractéristiques .....	35
III.5. Interprétation physique de la méthode des caractéristiques .....	37
III.6. Solution numérique du système différentiel.....	38
III.7. Conditions aux limites.....	41
III.7.1. Condition à la limite du réservoir : .....	41
III.7.2. Cas d'un obturateur .....	42
III.7.3. Pompe centrifuge.....	42
III.7.4. Organes capacitifs .....	42

---

III.8. Application .....	43
III.8.1.Cas sans pertes de charge .....	44
III.8.2.Cas avec pertes de charge.....	46
III.9. Conclusion.....	47

## **IV. Problème de l'ouverture brusque d'une vanne**

### **Solution par la méthode des perturbations**

IV.1. Introduction .....	48
IV.2. Position du problème .....	48
IV.3. Solution analytique exacte pour le Temps (T) .....	49
IV.4. Solution analytique exacte pour la vitesse $v(t)$ : .....	51
IV.5. Solution par la méthode des perturbations .....	53
IV.5.1. Historique de la méthode des perturbations .....	53
IV.5.2. Précision de la méthode des perturbations .....	54
IV.5.3. Principe de la méthode .....	54
IV.5.4. Application de la méthode des perturbations .....	57
IV.6. Application :.....	58
IV.6.1. Données de l'installation .....	58
IV.6.2. Résultat.....	59
IV.6.3. Discussion .....	62
IV.7. Conclusion .....	62
Conclusion général .....	63
Bibliographie .....	63

## LISTE DES FIGURES

<b>Figure (I. 1) : mécanisme de propagation d'une onde</b> .....	5
<b>Figure (I. 2) : Réflexion des ondes</b> .....	6
<b>Figure (I. 3) : Vue d'une conduite forcée éclatée de la centrale électrique d'Oigawa, du Japon (d'après Chaudhry, 1979)</b> .....	8
<b>Figure (I. 4) : La détérioration des joints d'expansion suite à un aigu coup de bélier</b> .....	8
<b>Figure (I. 5) : Vue d'une conduite aplatie due à un vacuum de la centrale électrique d'Oigawa, du Japon (d'après Chaudhry, 1979)</b> .....	9
<b>Figure (II. 1) : forces exercées sur une conduite en équilibre statique</b> .....	19
<b>Figure (II. 2) : Déplacement d'un élément liquide</b> .....	21
<b>Figure (II. 3) : Forces exercées sur une tranche liquide</b> .....	23
<b>Figure (III. 1) : Lignes caractéristiques dans le plan <math>x,t</math> (Chaudhry, 1979)</b> .....	37
<b>Figure (III. 2) : Intégration numérique des équations sur le plan <math>x,t</math> (Wylie et Streeter, 1978)</b> .....	39
<b>Figure (III. 3) : Réseau des caractéristiques pour le calcul du régime transitoire (Chaudhry, 1979)</b> .....	41
<b>Figure (III. 4) : Condition d'écoulement à la vanne</b> .....	42
<b>Figure (III. 5) : Schéma de l'installation étudiée</b> .....	43
<b>Figure (III. 6) : Variation temporelle de la charge à l'obturateur</b> .....	44
<b>Figure (III. 7) : Avancée du front d'onde en fonction du temps</b> .....	45
<b>Figure (III. 8) : Variation temporelle de la charge à l'obturateur (cas perte de charge)</b> .....	46
<b>Figure (III. 9) : Avancée du front d'onde en fonction du temps (phase de surpression)</b> .....	47
<b>Figure (IV. 1) : Ouverture instantanée d'une vanne sur conduite en charge</b> .....	49
<b>Figure (IV. 2) : variation de la vitesse en fonction du temps</b> .....	62



## **LISTE DES TABLEAUX**

<i>Tableau (III. 1) : Données relatives au cas d'étude.....</i>	44
<i>Tableau (IV. 1) : Les données de l'installation .....</i>	59
<i>Tableau (IV. 2) : les résultats du calcul analytique pour la vitesse. ....</i>	59

# Introduction générale

L'étude des écoulements non permanents en charge revêt depuis longtemps une importance capitale dans le domaine de l'hydraulique, mais cependant forme une extrême complexité lorsque nous l'envisageons dans toute son intégralité.

En pratique, l'apparition de ces phénomènes peut avoir des conséquences fâcheuses, désastreuses pour la survie de l'installation, il soit source de plusieurs dégâts (détérioration des conduites) qui occasionnent des coûts d'équipements et d'entretien habituellement non prévus. Il est donc capital de prévoir et d'étudier ces phénomènes transitoires avec finesse dans l'objectif de réduire leurs effets néfastes.

Dans les réseaux hydrauliques, figurent divers éléments qui peuvent engendrer la variation de l'écoulement, donc création d'un régime transitoire, parmi ces éléments on peut citer :

- ✓ L'ouverture ou la fermeture des vannes (instantanée ou trop rapide).
- ✓ La mise en marche ou l'arrêt des pompes dans les conduites en charge par refoulement.

La naissance et le développement de l'informatique au cours des années soixante a entraîné l'apparition des méthodes de discrétisation, on est aujourd'hui capable d'élaborer des modèles numériques performants pour prédire le comportement correct de phénomène de coup de bélier. Cependant les approches analytiques sont toujours souhaitables dans la mesure du possible pour ainsi faire parfois simplification et des techniques approchées sont à envisager.

C'est dans ce contexte que nous entreprîmes le présent travail en se proposant comme objectif de faire une approche analytique pour la prédiction des ondes de coup de bélier dans une conduite en charge. Pour ainsi faire, le travail se voit scindé en quatre chapitres.

Le premier chapitre est consacré à des généralités et une synthèse bibliographique sur les ondes et régimes transitoires, définitions et conséquence du phénomène du coup de bélier.

Dans le deuxième chapitre nous aborderons la modélisation mathématique du phénomène de coup de bélier, à partir des lois générales de la mécanique de Saint Venant. Ces équations dérivent par l'application de deux lois principales à savoir : La loi de la conservation de la masse (équation de continuité) et la loi de la conservation de la quantité de mouvement (l'équation dynamique).

Ceci étant, dans le chapitre suivant, Nous nous y présenterons la méthode des caractéristiques (MOC), formulation discrétisation et incorporation des conditions aux limites,

et faire une application sur un cas d'une manœuvre brusque des obturateurs au bout des conduites forcées gravitaires avec la prise en compte des termes sources.

Dans le dernier chapitre, nous étudierons le problème de l'ouverture brusque de la vanne en le régime transitoire, pour cela on a choisi la méthode des perturbations pour déterminer le temps d'établissement du régime permanent.

# I. Revue de la littérature

## I.1. Généralité

L'étude du phénomène du coup de bélier a fait, depuis presque un siècle et demi, l'objet d'une succession de travaux tendant à dégager de la théorie mathématique, des formules pratiques pour ses divers effets. Ceci a pris, dans ces dernières années, un intérêt particulier en raison de l'importance exceptionnelle des conduites amenant les forces hydrauliques aux puissantes usines d'énergie électrique. Il paraît donc utile, au point de vue de l'art de l'ingénieur, de faire l'inventaire de ces travaux et d'en indiquer sommairement les résultats.

Dans le présent chapitre, des rappels théoriques sur les régimes d'écoulements et phénomènes liés aux régimes transitoires et propagation d'ondes élastiques dans les installations en charge, sont donnés après quoi un état de l'art sur les travaux de recherche s'ensuit.

## I.2. Types d'écoulements

### I.2.1. Ecoulement permanent et non permanent

Si les conditions d'écoulement, telle que la pression, la vitesse ou le débit en un point donné de la conduite restent invariables dans le temps, alors l'écoulement est dit permanent.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{I.1})$$

Si par contre ces conditions changent en fonction du temps, le régime d'écoulement subsistant dans le système est dit non permanent ou non-stationnaire. Ainsi, l'écoulement sera fonction de quatre variables indépendantes, à savoir (x, y et z) du point examiné et le temps.

$$\frac{\partial v}{\partial t} \neq 0 \quad \frac{\partial H}{\partial t} \neq 0 \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0 \quad (\text{I.2})$$

Avec :

H : charge hydraulique

V : vitesse d'écoulement

$\rho$  : Masse volumique

### I.2.2. Ecoulement uniforme et non uniforme

Si la vitesse du fluide est constante le long de la coordonnée (x) de l'écoulement à différents instants, on dira que cet écoulement est uniforme.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (\text{I.3})$$

Contrairement au cas précédent, lorsque la vitesse d'écoulement varie d'une section à l'autre, l'écoulement est dit non uniforme.

$$\frac{\partial v}{\partial x} \neq 0 \quad (\text{I.4})$$

### I.2.3. Régime transitoire

On appelle régime transitoire, un état d'écoulement qui se manifeste entre deux régimes stationnaires, autrement dit c'est un écoulement varié, où les variables d'état (H, V) changent. Il peut se produire soit dans un canal à ciel ouvert, soit dans une conduite à écoulement en charge par accroissement ou décroissement du débit. Les exemples qu'on peut citer dans le cas d'écoulements transitoires d'une conduite en charge sont :

- écoulements dus à des machines hydrauliques à charge variable.
- phénomène du coup de bélier.

## I.3. Notions sur les ondes élastiques

### I.3.1. Mécanisme de propagation

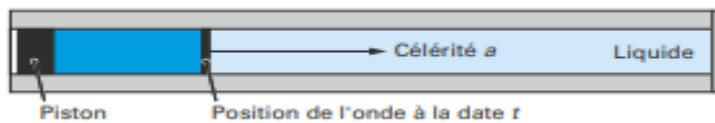
Si dans un milieu continu, au repos, on provoque le déplacement rapide d'un élément on constate que les éléments voisins se déplacent et agissent à leur tour sur les particules en contact ; ainsi, le déplacement se propage, de proche en proche, avec une vitesse finie dans tout le milieu.

Si l'ébranlement est de faible amplitude, la vitesse de propagation est appelée célérité du son et on la désigne habituellement par « a ».

Dans un fluide, cette propagation s'effectue dans une direction confondue avec celle de l'ébranlement. Elle s'accompagne, à cette même célérité, d'une variation de pression, de masse volumique et de température. Ce domaine mobile, par rapport au fluide constitue une

onde. Par exemple, dans un milieu fluide indéfini, un ébranlement produit en un point M se propagera à la célérité «  $a$  » suivant une onde sphérique.

Pour schématiser plus simplement ce phénomène de propagation d'ondes, considérons une longue tuyauterie rectiligne, absolument indéformable, de section constante, et contenant un liquide (figure 1). Supposons que l'une de ses extrémités comporte un piston mobile et que l'autre soit fermée. Dans l'éventualité hypothétique d'un liquide incompressible, le déplacement du piston se transmettrait instantanément à la totalité du fluide contenu dans la tuyauterie. Il ne pourrait pas se déplacer sans que la pression qui règne dans le liquide devienne théoriquement égale à l'infini.



*Figure (I. 1): mécanisme de propagation d'une onde*

Mais en réalité les liquides ne sont pas rigoureusement incompressibles. Si l'on déplace brusquement le piston d'une petite quantité, il apparaîtra immédiatement une augmentation de pression dans la couche de liquide en contact avec lui. Cette couche, n'étant plus en équilibre avec les tranches plus éloignées, va se détendre en comprimant à son tour les couches voisines et ainsi de suite avec une vitesse de propagation égale à «  $a$  », puisque la tuyauterie est supposée indéformable. (Frelin, 2002)

### **I.3.2. Réflexion des ondes planes**

L'expérience montre qu'un ébranlement se propageant par ondes planes dans un milieu fluide, comme par exemple celui contenu dans une conduite, s'arrête lorsqu'il arrive à l'une de ses extrémités. Il est alors réfléchi et remplacé par un ébranlement se propageant en sens inverse avec des caractéristiques différentes suivant la nature de la partie rencontrée. Cette extrémité peut être :

- fermée par une paroi immobile comme, par exemple, une vanne fermée.
- ouverte comme le raccordement avec un réservoir.
- un compromis entre les deux ; diaphragme, vanne semi-ouverte, ...etc.

Le premier de ces ébranlements est appelé "ébranlement incident" et le second "ébranlement réfléchi". Ainsi, l'ébranlement incident n'a plus de signification physique lorsque l'onde dépasse l'extrémité en question, c'est l'inverse pour l'écoulement réfléchi (Figure (I.2))

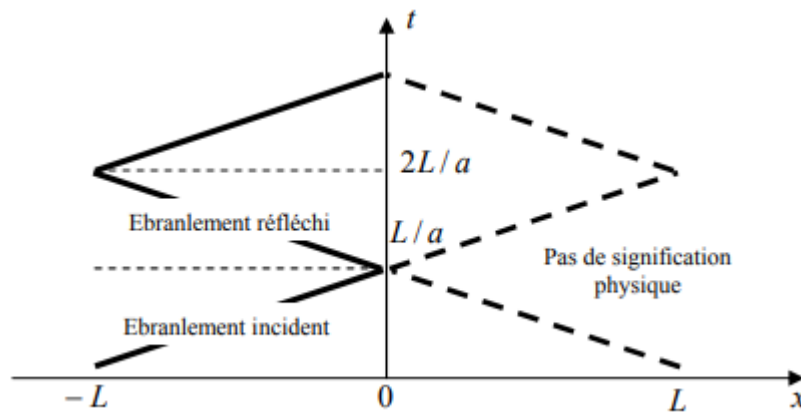


Figure (I. 2): Réflexion des ondes

### **Remarque :**

Les ondes planes se propagent sans modification dans un milieu isotrope, mais sont susceptibles de réflexion et de réfraction quand elles rencontrent une surface séparant deux milieux différents, à savoir :

- lors de la réflexion d'une onde plane sur une paroi rigide (extrémité fermée) et immobile, il y a changement de signe pour les vitesses et pas de changement de signe pour les variations de pression, ainsi une onde de compression se réfléchit en une onde de compression ;
- lors de la réflexion d'une onde plane sur une extrémité ouverte (surface libre d'un liquide par exemple), il y a changement de signe pour les variations de pression et pas pour les vitesses, ainsi une onde de compression donne naissance à une onde de dépression.

## **I.4. Phénomène du coup de bélier**

### **I.4.1. Définition**

D'une manière générale, le coup de bélier exprime toute variation de pression dans une conduite en charge, consécutive à une manœuvre quelconque de l'obturateur aval. Le coup de bélier est un phénomène non stationnaire de propagation d'ondes de pression à très hautes vitesses. Autrement dit, c'est l'arrêt brutal de la circulation de l'eau lorsqu'un organe provoque une prompt modification du débit.

Par conséquent, les forces dynamiques qui en résultent peuvent engendrer des ruptures de canalisations, dégâts matériels et quelques fois des pertes de vies humaines, d'où la nécessité de renforcement des ouvrages concernés, en particulier les conduites appelées alors conduites (Boillat, J., et De Souza, 2004).

### **I.4.2. Causes fréquentes du coup de bélier**

En ingénierie d'hydraulique, les causes fréquentes occasionnant des coups de bélier sont ; (Wylie et Streeter, 1978)

- ❖ l'ouverture ou la fermeture des vannes dans les conduites gravitaires en charge
- ❖ la mise en marche ou l'arrêt des pompes sur des conduites de refoulement
- ❖ modification de la vitesse angulaire d'une pompe
- ❖ coupure électrique inopinée dans une station de pompage qui est la cause la plus fréquente du coup de bélier en hydraulique urbaine
- ❖ vibration des accessoires de contrôle comme les vannes

Cette liste est loin d'être exhaustive, et beaucoup d'autres situations complexes engendrent ce phénomène.

### **I.4.3. Risques et dommages conséquents aux coups de bélier**

Les conséquences du coup de bélier peuvent être néfastes elles deviennent de plus en plus dangereuses à mesure que les paramètres modificateurs deviennent importants (variation de pressions et de débits dans le temps).

Potentiellement, le coup de bélier peut poser de graves conséquences pour les installations hydrauliques. Les risques et avaries causés par ce régime transitoire sont de plusieurs ordres, nous citons :

#### **a. Cas de surpression**

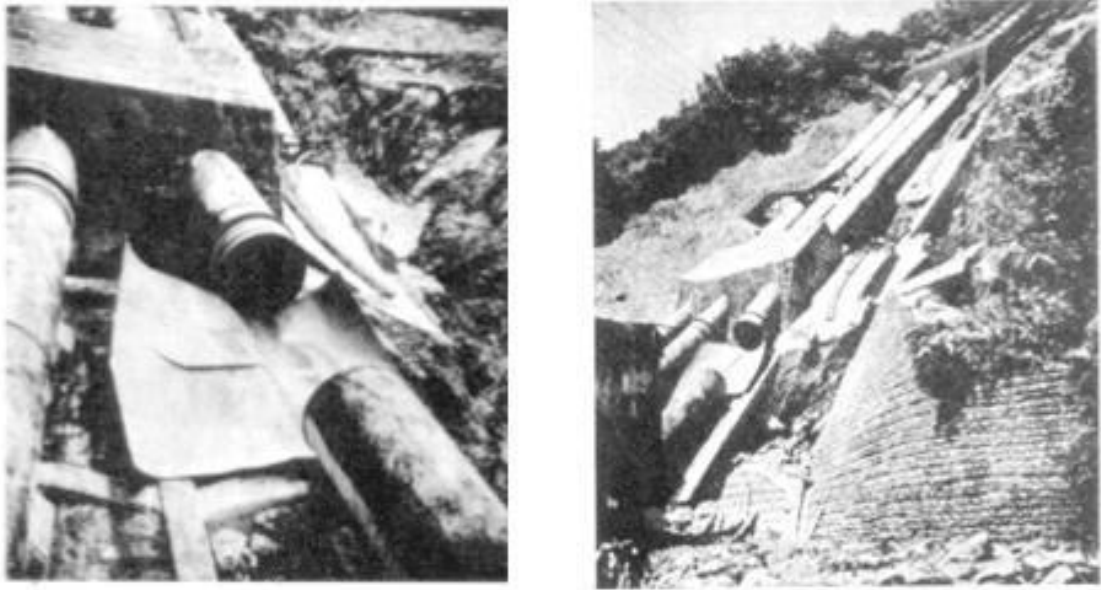
Conduit à des déformations permanentes ou la rupture des conduites ainsi que ses organes hydrauliques de contrôle, déboîtement de joints, fuites massives et désordres d'infrastructures. Ceci peut arriver si la pression totale, c'est-à-dire la pression en régime permanent majorée de la valeur de surpression due au coup de bélier dépasse la pression maximale admissible des canalisations. A titre illustratif, les photos ci-après (Figure (I.3)) représentent une rupture d'une conduite forcée. Et la (Figure (I.4)) représente la détérioration des joints d'expansion.

#### **b. Très basse pression**

Peut causer l'aplatissement des conduites et aspiration des joints, et contamination du fluide si en un point de la conduite la pression atteint le vide barométrique (-10 m.c.e), alors une cavitation (libération de gaz dissous + vapeur d'eau) se produirait, ce qui donne lieu à une séparation de la veine liquide. En ayant un profil en long tourmenté, lors de la phase de surpression, la poche de vapeur se résorbe engendrant une pression atteignant jusqu'à quatre fois la pression de service. Donc, c'est un risque à éviter à tout prix.

Les photos ci-dessous (Figure (I.5)) illustrent le risque inhérent à ce cas dangereux.

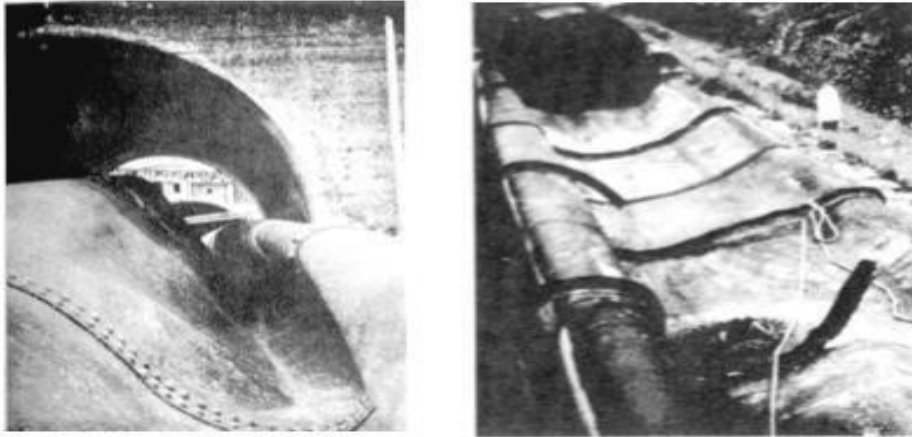




*Figure (I. 3) : Vue d'une conduite forcée éclatée de la centrale électrique d'Oigawa, du Japon (d'après Chaudhry, 1979)*



*Figure (I. 4) : La détérioration des joints d'expansion suite à un aigu coup de bélier*



*Figure (I. 5) : Vue d'une conduite aplatie due à un vacuum de la centrale électrique d'Oigawa, du Japon (d'après Chaudhry, 1979)*

### c. Inversion de l'écoulement

L'inversion du sens d'écoulement conduit à un fonctionnement en dévirage de la pompe, si cette dernière est démunie de clapet de retenue (comme c'est le cas de certaines grandes stations de pompage), causant ainsi des dégâts au groupe motopompe. Notons aussi que cette situation de fonctionnement entraînerait la vidange des réservoirs de stockage et d'accumulation.

### d. Mouvements et vibration des conduites

A pour conséquence la surcharge et sollicitation dynamique des supports d'ancrage et butées conduisant par conséquent à la rupture de ces derniers et de la conduite elle-même. Ce phénomène se manifeste généralement quand la conduite entre en état de résonance.

## I.5. Analyse physique du coup de bélier

Dans ce qui suit, on va illustrer le processus de variation de la pression et la vitesse suite au phénomène du coup de bélier dans les deux cas distincts.

### I.5.1. Cas d'arrêt brusque de la pompe

En admettant la compressibilité du fluide et l'élasticité de la conduite et supposons aussi la colonne liquide constituée de tranches infiniment rapprochées. au temps zéro, le débit  $Q_0$  se trouve brusquement arrêté par suite d'une disjonction, quatre phases peuvent alors être envisagées.

#### 1<sup>ère</sup> phase :

Par suite de son inertie, la colonne liquide va poursuivre son ascension, mais n'étant plus alimentée, il va en résulter derrière elle une dépression ; l'eau se déprime. Chaque tranche considérée de la conduite se contracte successivement par diminution élastique du diamètre. Une onde de dépression prend alors naissance au départ de la pompe et se propage jusqu'au réservoir avec une célérité désignée par « a ».

Si la distance est alors ' $L/a$ ', au bout de ce temps, la conduite est en dépression sur toute sa longueur et l'eau est alors immobile.

### 2<sup>ème</sup> phase :

Par suite de son élasticité, la conduite reprend son diamètre primitif et, cela de proche en proche, en considérant des tranches successives à partir du réservoir. L'eau revient alors dans la conduite et au bout d'un nouveau temps ' $L/a$ ', ( $(2L/a)$  depuis l'origine du phénomène) toute l'eau est redescendue, mais va se trouver arrêtée par le clapet de la pompe, qui, entre temps d'est fermé.

### 3<sup>ème</sup> phase :

En raison de cet arrêt, la première tranche en contact avec le clapet va être comprimée par les tranches suivantes. Au bout d'un temps ' $L/a$ ', ( $(3L/a)$  depuis l'origine), toute la canalisation sera dilatée avec une eau sur pressée immobile.

### 4<sup>ème</sup> phase :

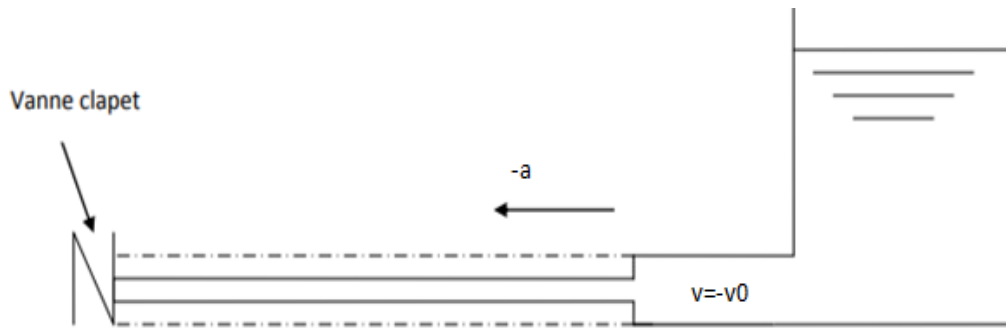
Durant cette phase l'élasticité permet à la conduite de prendre de proche en proche du réservoir à la pompe, son diamètre initial au bout d'un temps ' $L/a$ ', ( $(4L/a)$  depuis l'origine).

Nous retrouvons dans la même situation qu'au moment de l'arrêt brusque de la pompe. La période du mouvement est donc  $4L/a$ .

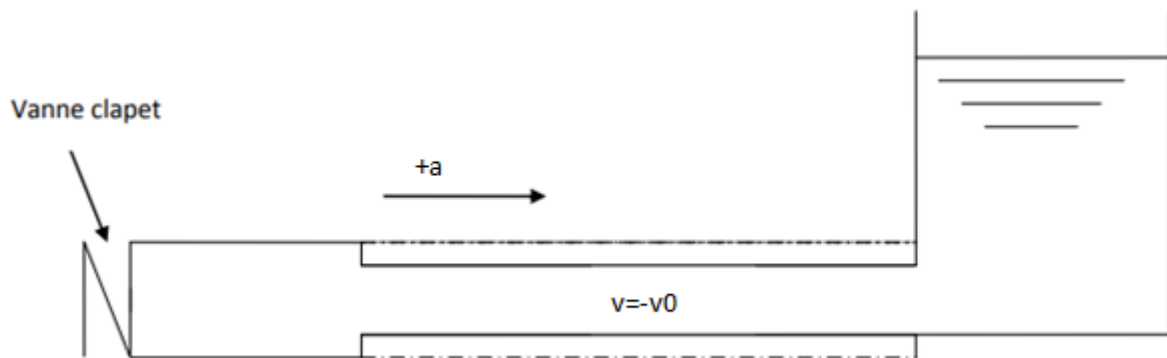
La figure suivante illustre le cycle de propagation des ondes de surpression et dépression dans le cas d'une conduite de refoulement.



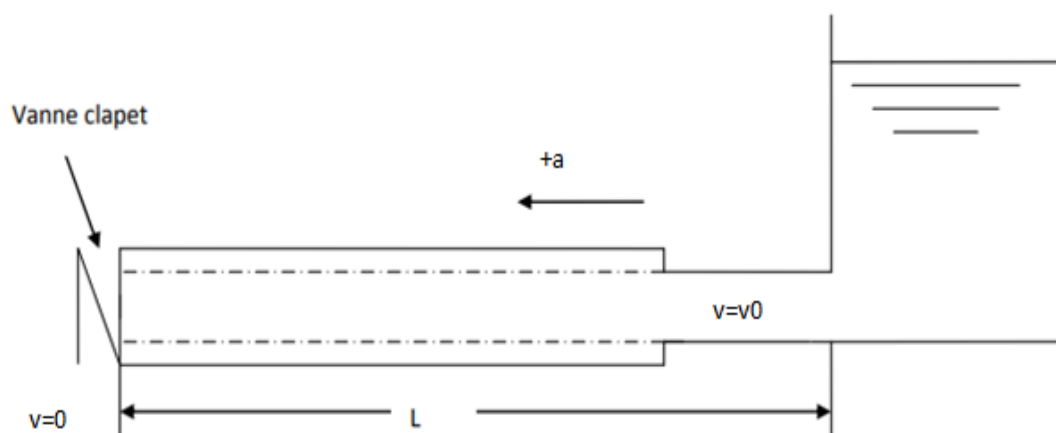
*Phase 1, temps  $t + \epsilon$*



**Phase 2**, temps  $\frac{L}{a} + \epsilon$



**Phase 3**, temps  $\frac{2L}{a} + \epsilon$



**Phase 4**, temps  $\frac{3L}{a} + \epsilon$

**Figure (I.6)** : Cycle d'évolution du coup de bélier par onde de choc

### **I.5.2. Cas de L'arrêt brusque d'une vanne placée en aval d'une conduite**

Dans le cas de l'arrêt brusque d'une vanne placée en aval d'une conduite, la manœuvre d'une vanne à l'aval du système entraîne une surpression au voisinage de la vanne semblable à celle observée à l'étape 3 du cas précédent. Le phénomène suit alors les étapes 4, 1, et 2.

Au bout du temps  $t=L/a$ , serait engendrée dans le réservoir une onde d'équilibre qui se propagerait jusqu'à la vanne, où elle arriverait dans le temps  $t = 2L/a$  (Phase 4).

À ce moment-là prendrait naissance une onde de dépression, qui atteindrait le réservoir dans le temps  $t = 3L/a$  (phase 1), suivie d'une onde d'équilibre, qui attendrait la vanne dans le temps  $t = 4L/a$  semblable à la phase 2, et le phénomène recommencerait s'il n'y n'avait pas de frottement.

#### **Remarque**

Ces deux cas sont considérés dans le cas d'un arrêt ou d'une décélération, cependant, ils peuvent aussi être soumis à des départs ou accélérations plus ou moins rapides qui entraîneront des variations importantes de pression.

### **I.6. Etat de l'art**

Nous allons à présent illustrer, en passant en revue, l'essentiel de l'état de connaissances sur les techniques analytique de résolution des régimes transitoires en charge.

Le problème du coup de bélier, a été étudié pour la première fois par Menabrea en (1885). Ensuite il y a eu des chercheurs qui ont en succédé comme Weston (1885), Carpenter (1893) et Frizell (1898), ont menées des études pour développer une expression reliant le changement de pression dû au changement de vitesse dans une conduite.

La solution définitive du problème a été donnée par l'hydraulicien Italien Lorenzo Allievi (1903) dans un mémoire magistral intitulé "Teoria General Del Moto Perturbato Del L'acqua Nei Tubi Impressioni" publié en 1903 dans les annales de la société des ingénieurs et architectes Italiens.

Le professeur N.Joukovsky, de L'institut Technique de Moscou, parait avoir, le premier, procédé avec toute l'ampleur et toute l'exactitude nécessaire aux études théoriques et aux expériences susceptibles d'élucider pleinement les questions relatives au coup de bélier. Mais son travail, publié seulement en russe à l'origine (1898) et traduit deux ans plus tard en allemand, n'a pas trouvé dans les milieux Scientifiques et techniques la diffusion immédiate qu'il méritait, et il n'a trouvé une mention explicite que dans l'Encyclopédie des Sciences Mathématiques, publié à Leipzig en Mai 1906.

Mais les travaux de Joukovsky et Allievi (1902) ont pu attirer la plus grande attention. Joukovsky a élaboré la formule bien connue dans les écoulements instationnaires, appelée souvent « équation fondamentale du coup de bélier ». Cette formule s'écrit :

$$\Delta P = \pm \rho \cdot a \cdot \Delta v \quad \text{ou} \quad \Delta H = \pm \frac{a}{g} \Delta v \quad (\text{I.5})$$

Allievi reprend le problème sans se soucier des chemins frayés par ses devanciers; sa présentation analytique, chef-d'œuvre d'élégance et de clarté et expression fidèle de la réalité physique, conduit à la création d'un arsenal mathématique original bien adapté aux phénomènes à étudier; Allievi utilise en virtuose l'instrument qu'il a ainsi forgé et dans une série de cinq notes publiées dès 1913 dans les *Aiti deI Collegio degli Ingegneri ed Architeiti* (Milano) présente une «Théorie générale du coup de bélier (2)» qui sera, pendant de longues années, la base de toutes les recherches entreprises dans ce domaine.

En (1913) Allievi parvient à interpréter avec une rigueur mathématique le phénomène physique du coup de bélier et en donner la théorie générale. Il démontre ainsi la légitimité de négliger les termes convectifs dans l'équation dynamique du mouvement, et a introduit deux importants paramètres adimensionnels caractérisant la conduite et la manœuvre de la vanne ainsi que des abaques pour le calcul des suppressions suites à des fermetures linéaires d'un obturateur. Le système d'équations aux dérivées partielles final régissant le problème s'écrit alors (Allievi, 1913) :

✓ **Equation de continuité :**

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (\text{I.6})$$

✓ **Equation dynamique :**

$$\frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad (\text{I.7})$$

Dans ces équations, les termes convectifs ont été négligés en raison de leur très faible contribution dans le modèle mathématique complet (Young, Il kim , 2008).

Ce système se ramène, en éliminant successivement chaque inconnue par une dérivation, à l'équation dite de d'Alembert ou des « cordes vibrantes» et donne les solutions bien connues :

$$H(x,t) = H_0 + F\left(t - \frac{x}{a}\right) + f\left(t + \frac{x}{a}\right) \quad (\text{I.8})$$

$$V(x,t) = V_0 + \frac{g}{a} \left[ F\left(t - \frac{x}{a}\right) - f\left(t + \frac{x}{a}\right) \right] \quad (\text{I.9})$$

On remarque qu'Allievi à négliger les termes convectifs dans l'équation dynamique, et les solutions obtenues en fonction de la vitesse. Et cela c'est impossible dans l'écoulement transitoire.

En 1933 Le français Louis Bergeron a développé une approche graphique dite «Méthode de Bergeron » et qui fut employée universellement dans la pratique pendant plusieurs années. En 1937, BERGERON a montré que la méthode graphique établie pour le calcul des ondes du coup de bélier est applicable à d'autres problèmes de la théorie d'élasticité et d'électricité. Cette méthode est développée dans son ouvrage publié en 1949 ayant pour intitulé "Du coup de bélier en hydraulique au coup de Foudre en électricité". Il est à noter que le principe de la méthode avait été donné par les autrichiens Kreitner et Lowy en 1928. L'avantage des méthodes d'intégration graphique est à mener l'analyse à une compréhension approfondie du phénomène physique. Aujourd'hui avec l'arrivée des ordinateurs et l'accroissement constant de leur puissance, ces méthodes ont évidemment été remplacées dans la pratique courant par des méthodes numériques.

A partir de là les solutions analytiques sont devenues presque faibles, mis à part les efforts de Jaeger et Rich et Sobey et autres tentatives isolées. (Jaeger, 1933), (Rich, 1945), (Sobey, 2004).

Jaeger (1933) a soumis une thèse de doctorat sur une généralisation de l'approche d'Allievi pour un système de canalisation connecté à une chambre d'équilibre, L'analyse de Jaeger permet de généraliser le système d'équations d'Allievi. À la bifurcation de trois tuyaux, l'onde positive  $F$  et l'onde négative  $f$  juste à la base du chambre d'équilibre sont liés à améliorer avec  $\alpha$  comme paramètre de réflexion.

Jaeger a obtenu les coefficients pour la transmission  $r_I$  et réflexion  $s_i$ , respectivement :

$$\alpha_i = r_{III} = \frac{\tilde{n}_I^{-1} + \tilde{n}_{II}^{-1} - \tilde{n}_{III}^{-1}}{\tilde{n}_I^{-1} + \tilde{n}_{II}^{-1} + \tilde{n}_{III}^{-1}} \quad (I.10)$$

$$s_{III} = 1 - r_{III} \quad (I.11)$$

Le résultat d'Allievi est recoupé pour  $\alpha=1$  À un moment donné, la méthode analytique de Jaeger implique un système de trois équations.

Rich (1945) utilisé la transformée de Laplace pour résoudre notamment le cas de frottement à l'aide d'une approximation linéarisée, les oscillations de pression et de vitesse du coup de bélier dans un tuyau sans frottement sont données par les équations :

$$H = H_0 - \frac{v_0 \pi^2 a^2}{4L^3 Q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2_{n-1})^2 e^{-\frac{Ft}{2_n}} \sin \frac{(2_{n-1} \pi x)}{2L} \left[ \frac{2F\psi}{w} \cos \psi t + \frac{F^2}{2W^2} \sin \psi t - 2\psi^2 \sin \psi t \right]}{\psi \left( \frac{F^2}{4W^2} + \psi^2 \right)^2} \quad (I.12)$$

$$V = v_0 - v_0 \left[ 1 - \frac{\pi a^2}{2L^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2_{n-1})^2 e^{-\frac{Ft}{2n}} \cos\left(\frac{2_{n-1}\pi x}{2L}\right) \left[ \frac{F}{w} \sin \psi t - 2\psi \cos \psi t \right]}{\psi \left( \frac{F^2}{4W^2} + \psi^2 \right)} \right] \quad (\text{I.13})$$

La solution pour ces équations est comme suit:

$$H = H_0 - Fv_0 x + \frac{w a v_0}{g} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left[ \begin{aligned} & e^{-\frac{Ft}{2w}} I_0 \left( \frac{F}{2W} \sqrt{t^2 - \left( \frac{(L-x+2mL)^2}{a^2} \right)} \right) \\ & + \frac{F}{W} \int_{\frac{(L-x+2mL)^2}{a}}^t e^{-\frac{Ft}{2w}} I_0 \left( \frac{F}{2W} \sqrt{t^2 - \left( \frac{(L-x+2mL)^2}{a^2} \right)} \right) dt \\ & - e^{-\frac{Ft}{2w}} I_0 \left( \frac{F}{2W} \sqrt{t^2 - \left( \frac{(L+x+2mL)^2}{a^2} \right)} \right) \\ & - \frac{F}{W} \int_{\frac{(L+x+2mL)^2}{a}}^t e^{-\frac{Ft}{2w}} I_0 \left( \frac{F}{2W} \sqrt{t^2 - \left( \frac{(L+x+2mL)^2}{a^2} \right)} \right) dt \end{aligned} \right] \quad (\text{I.14})$$

$$v = v_0 - v_0 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left[ \begin{aligned} & e^{-\frac{F}{2W} \left( \frac{(L-x+2mL)}{a} \right)} \\ & + \frac{F}{2W} \left( \frac{(L-x+2mL)}{a} \right) \int_{\frac{(L-x+2mL)}{a}}^t \frac{e^{-\frac{Ft}{2w}} I_0 \left( \frac{F}{2W} \sqrt{t^2 - \left( \frac{(L-x+2mL)^2}{a^2} \right)} \right) dt}{\sqrt{t^2 - \left( \frac{(L+x+2mL)^2}{a^2} \right)}} \\ & + e^{-\frac{F}{2W} \left( \frac{(L+x+2mL)}{a} \right)} \\ & + \frac{F}{2W} \left( \frac{(L+x+2mL)}{a} \right) \int_{\frac{(L+x+2mL)}{a}}^t \frac{e^{-\frac{Ft}{2w}} I_0 \left( \frac{F}{2W} \sqrt{t^2 - \left( \frac{(L+x+2mL)^2}{a^2} \right)} \right) dt}{\sqrt{t^2 - \left( \frac{(L+x+2mL)^2}{a^2} \right)}} \end{aligned} \right] \quad (\text{I.15})$$

Sobey (2002) a fait une consistante et complexe étude et a trouvé la réponse dynamique aux changements rapides du débit des tuyaux est lies a la compressibilité élastique du fluide et les parois des tuyaux ;

$$\frac{\partial H}{\partial t} + v \frac{\partial H}{\partial x} + a^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (\text{I.16})$$



$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -g \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\tau_0 \rho}{\rho A} \quad (\text{I.17})$$

Les solutions analytiques de Sobey s'écrivent alors :

$$H(x,t) = mx + b + a_1 \exp(-\mu x) \cos(kx - \omega t + \phi_2) + a_2 \exp(\mu x) \cos(kx + \omega t + \phi_2) + \left[ f_0 + \frac{g_0}{\lambda} (1 - \exp(-\lambda t)) + \frac{1}{\lambda} \int_0^t (1 - \exp(-\lambda(t-\tau))) \mu_0(\tau) d\tau \right] \quad (\text{I.18})$$

$$v(x,t) = b + a_1 \exp(-\mu x) \cos(kx - \omega t + \phi_2) + a_2 \exp(\mu x) \cos(kx + \omega t + \phi_2) + \left[ f_0 + \frac{g_0}{\lambda} (1 - \exp(-\lambda t)) + \frac{1}{\lambda} \int_0^t (1 - \exp(-\lambda(t-\tau))) \mu_0(\tau) d\tau \right] \quad (\text{I.19})$$

D'après le travail de Sobey en remarque des équations sont longue et complexe, il a pris la vitesse linéaire qui n'est pas dans le cas réel.

Aucune solution analytique ne se présente pour résoudre les problèmes réels, exception faite de certains cas simples (généralement hypothétiques) sans terme dissipatif et des conditions aux limites simplifiées, lesquels n'intéressent pas les applications d'ingénierie.

C'est dans ce contexte que le présent travail s'inscrit dans l'objectif d'apporter une contribution à la résolution analytique de certains problèmes simples tels que l'ouverture et la fermeture des vannes et ce avec prise en compte des termes non linéaires de frottement.

## I.7. Conclusion

Dans ce chapitre on a présentés une synthèse bibliographique et état de l'art de coup de bélier et certaines notions et définitions générales dont l'usage se fera dans la suite du travail, relevant des écoulements ainsi que la propagation des ondes planes dans les conduites forcées. Un accent particulier a été mis sur la présentation du phénomène du coup de bélier, définition, causes et conséquences et ceci dans le but de mettre en relief l'importance pratique et la nécessité d'une prédiction et calcul analytique correct du phénomène.

## II. Théorie du coup de bélier

### II.1. Introduction

Dans cette partie de notre travail, nous aborderons la modélisation mathématique du phénomène de coup de bélier. Cette modélisation se base sur les équations des écoulements non permanents telles que l'équation de continuité et l'équation dynamique, et étudier la propagation des ondes qui formulèrent le système d'équations différentielles du modèle élastique qui gouverne le phénomène du coup de bélier.

### II.2. Hypothèses des équations de base

Nous allons établir les deux équations connues sous le nom d'équation de Saint-Venant à partir des deux équations générales qui sont :

- L'équation de conservation de la masse
- L'équation de conservation de la quantité de mouvement

Le développement des équations fondamentales, repose sur ces hypothèses (De Almeida, B. et Koelle, E., 1992) :

1. la conduite est considérée uniforme et l'écoulement est unidimensionnel et la distribution des vitesses uniforme le long de la section transversal ;
2. la conduite à une déformation linéaire proportionnelle à la contrainte et l'effet de compressibilité du liquide est caractérisée par son module de compressibilité ;
3. les formules des pertes de charge par frottement en régime stationnaire sont valides en régime transitoire.

### II.3. Équation de continuité

Avant de l'exprimer nous allons rappeler certains résultats de mécanique des matériaux et les utiliser pour déterminer les contraintes dans les tuyaux sous-pression, Nous le ferons, dans notre cas, pour les matériaux élastiques seulement (Ouragh, 1994) ;

#### II.3.1. Compressibilité de l'eau

Par définition le module d'élasticité du fluide  $K$  est donné par l'expression représentant le rapport la variation de la pression à la variation de la masse volumique.

$$K = \frac{dP}{\frac{d\rho}{\rho}} \Leftrightarrow dp = K \frac{dV}{V} \quad (\text{II.1})$$

$K$  : étant la compressibilité de volume de l'eau.

$$dV = V \frac{dP}{K} \quad (\text{II.2})$$

Mais :

$$P = \rho \cdot g \cdot H$$

$P$  varie avec  $x$  et  $t$  mais les variations de  $P$  avec  $x$  sont négligeables par rapport aux variations avec  $t$  donc :

$$dP = \rho \cdot g \cdot \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (\text{II.3})$$

On sait que  $V = S \cdot dx$

Au final on obtient la variation du volume d'eau due à sa compressibilité :

$$dV_1 = \frac{1}{K_e} \cdot S \cdot dx \cdot \rho \cdot g \cdot \frac{\partial H}{\partial t} dt \Leftrightarrow dV_1 = \frac{1}{K_e} \cdot dP \cdot S \cdot dx \quad (\text{II.4})$$

### II.3.2. Expressions des contraintes dans les tuyaux sous pression

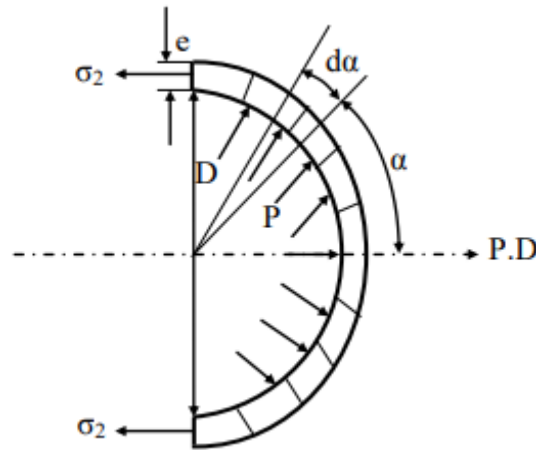
Appelons  $\sigma_1, \sigma_2$  les contraintes longitudinales et radiales  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  les déformations correspondantes et « E » le module d'élasticité du tuyau (Module de Young), et le module de poisson «  $\nu$  ».

La loi d'HOOKE permet d'écrire :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu \cdot \sigma_2)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \nu \cdot \sigma_1) \quad (\text{II.5})$$

Essayons d'exprimer les contraintes  $\sigma_1, \sigma_2$  en fonction des paramètres du tuyau à savoir le diamètre, l'épaisseur et la pression à l'intérieure de la conduite. La figure (II.1) représente la moitié d'une coupe transversale d'une conduite sous pression.



**Figure (II. 1) :** forces exercées sur une conduite en équilibre statique

Soit une conduite de longueur  $L$  et d'épaisseur  $e$  soumise à la pression  $P$  (Figure (II.1)).

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} P \cos \alpha ds - 2 \cdot \sigma_2 \cdot L \cdot e = 0 \quad (\text{II.6})$$

Puisque :  $dS = L \cdot r \cdot d\alpha$  , on aura donc :

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} P \cdot L \cdot r \cdot \cos \alpha \cdot da - 2 \cdot \sigma_2 \cdot L \cdot e = 0 \Rightarrow L \cdot r \cdot P \cdot (\sin(\alpha))_{-\pi/2}^{\pi/2} - 2 \cdot \sigma_2 \cdot L \cdot e = 0 \quad (\text{II.7})$$

$$2P \cdot L \cdot r - 2 \cdot \sigma_2 \cdot L \cdot e = 0$$

D'où il vient :

$$\sigma_2 = \frac{P \cdot D}{2 \cdot e} \quad (\text{II.8})$$

L'expression (II.8) s'appelle la formule de Chaudronniers.

La détermination de  $\sigma_1$  dépend de la manière dont s'est effectuée la pose de la conduite.

**Premier cas :** si la conduite est ancrée en plusieurs point, on peut considérer qu'il n'y a ni déformation ni contrainte longitudinale donc  $\sigma_1 = 0$  ;

**Deuxième cas :** si la conduite est sans joints et ancrée aux deux extrémités ; la contrainte longitudinale doit être prise en compte. Elle dépend dans ce cas de la façon dont le tuyau est ancrée aux extrémités  $\varepsilon_1 = 0$  on aura donc  $\sigma_1 = \nu \cdot \sigma_2$  ;

**Troisième cas** : Pour un tuyau libre à une extrémité : la force qui s'exerce à l'extrémité du tuyau est donnée par l'expression suivante :

$$\sigma_1 = \frac{P.D}{4.e} = \frac{\sigma_2}{2} \quad (\text{II.9})$$

D'autre façon on peut écrire  $\sigma_1 = k.\sigma_2$

K : coefficient d'ancrage.

On à l'hypothèse selon laquelle la conduite comporte des joints de dilatation sans friction est admise sur toute la longueur, donc  $\sigma_1 = 0$  et équation (II.8) est admise.

Cela représente que la variation de pression  $dP$  entraîne alors une variation  $d\sigma$  sans variation dans le temps, on a :

$$d\sigma = \frac{D}{2.e} dp \quad (\text{II.10})$$

Accroissement du diamètre  $dD$  provient de l'augmentation de la contrainte donnée par la loi de l'élasticité, qui entraîne un accroissement de la section ;

$$d\sigma = E \frac{dD}{D} \quad (\text{II.11})$$

$$\frac{dS}{S} = 2 \frac{dD}{D} \quad (\text{II.12})$$

$$dS = 2 \cdot S \cdot \frac{dD}{D} = \frac{S.D}{E.e} \cdot dP \quad (\text{II.13})$$

On divise les relations (II.10) et (II.11), on obtient:

$$\frac{dD}{D} = \frac{d\sigma}{E} = \frac{D.dP}{2.E.e} \quad (\text{II.14})$$

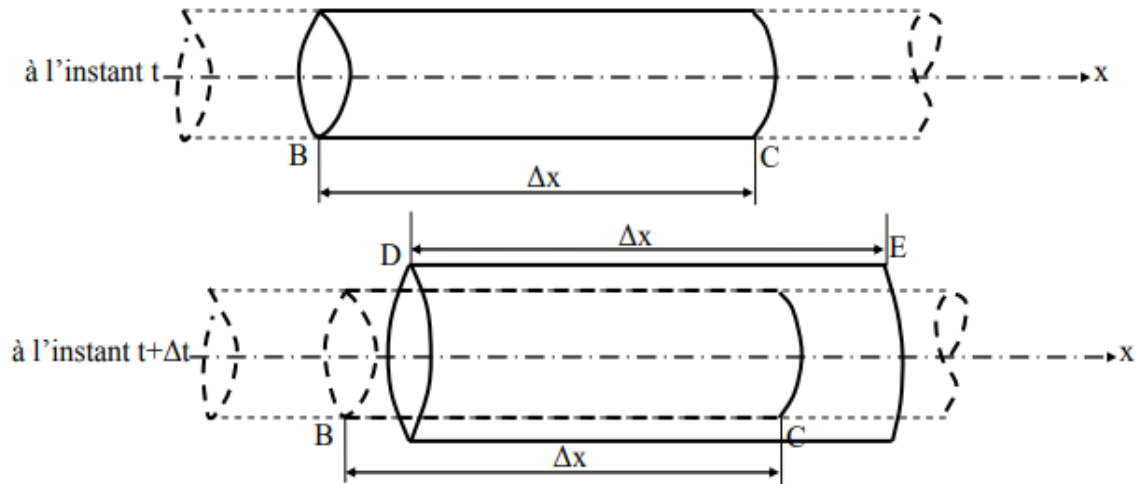
La conduite considérée emmagasine, de ce fait, un volume d'eau supplémentaire :

$$dV_e = dS \cdot dx \quad (\text{II.15})$$

$$dV_e = \frac{S.D}{E.e} dP \cdot dx \quad (\text{II.16})$$

Nous allons chercher l'expression de l'équation de continuité en analysant les déformations à masse d'un volume de liquide entre les instants  $t$  et  $t + dt$ . Comme il est

indiqué sur la figure (II.2), pour cela nous allons dire que cette masse exprimée par  $\rho V = \rho.S.dx$ , reste constante (Ouragh, 1994).



**Figure (II. 2) :** Déplacement d'un élément liquide

La variation de la masse au cours du temps est nulle, ce qui permet d'écrire :

$$dm = 0 \Leftrightarrow d(\rho.S.dx) = 0$$

Un volume entre pendant le temps  $dt$  par la face amont :

$$V_{etr} = S.v.dt \quad (II.17)$$

Il sort par la face aval un volume de :

$$V_{srt} = S \cdot \left( v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) \cdot dt \quad (II.18)$$

La quantité d'eau emmagasinée étant la différence des volumes entrant et sortant :

$$dV_{em} = -\frac{\partial v}{\partial x} dx \cdot S \cdot dt \quad (II.19)$$

L'équation de continuité s'obtiendra en écrivant que l'accroissement de volume d'eau emmagasinée  $dV_{em}$  dû à la variation de vitesse est égal à la somme des accroissements de volume (Carlier, 1972).

Donc c'est la somme de  $dV_1$  dû à la compressibilité (II.4), et de  $dV_e$  dû à la dilatation (II.16), d'où :

$$-\frac{\partial v}{\partial x} dx \cdot S \cdot dt = \frac{1}{K_e} \cdot dP \cdot S \cdot dx + \frac{S \cdot D}{E \cdot e} dP \cdot dx \quad (II.20)$$

On divisant sur  $S \cdot dx \cdot dt$  :

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = \left( \frac{1}{K_e} + \frac{D}{E.e} \right) \frac{dp}{dt} \quad (\text{II.21})$$

On sait que :

$$\frac{dP}{dt} = \varpi \left( v \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} \right) \quad (\text{II.21})$$

Posant :

$$\frac{1}{a^2} = \frac{\varpi}{g} \left( \frac{1}{K_e} + \frac{D}{E.e} \right) \quad (\text{II.22})$$

On vérifie facilement que «  $a$  » a les dimensions d'une vitesse. Nous montrerons plus loin que «  $a$  » représente la vitesse de propagation des ondes de vitesse et de pression à l'intérieur d'un liquide limité par la conduite.

On peut écrire finalement l'équation de continuité par :

$$\frac{a^2}{g} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.23})$$

## II.4. Equation dynamique

On va suivre un petit élément de volume dans son mouvement et lui appliquer le théorème des quantités de mouvement :

$$\frac{d(mv)}{dt} = \sum F_{ex} \quad (\text{II.24})$$

Avec :

$\sum F_{ex}$  : La somme des forces extérieures.

$m$  : La masse de la tranche.

$v$  : La vitesse d'écoulement.

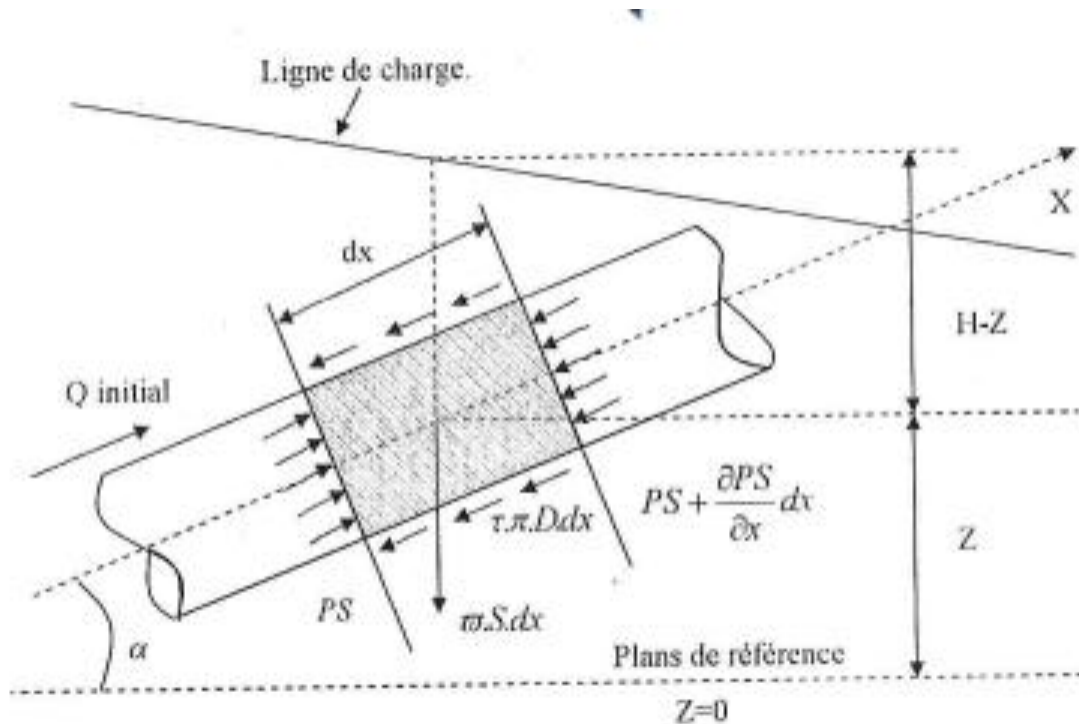


Figure (II. 3) : Forces exercées sur une tranche liquide

Qui indique que la dérivée de la quantité de mouvement est égale à la somme des forces extérieures appliquées à l'élément fluide.

$$\frac{d(mv)}{dt} = \frac{dm}{dt} v + m \frac{dv}{dt} \quad (\text{II.25})$$

La masse de l'élément liquide ne varie pas dans son déplacement.

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad (\text{II.26})$$

Donc :

$$\frac{d(mv)}{dt} = m \frac{dv}{dt} = \frac{\varpi}{g} \cdot S \cdot dx \cdot \frac{dv}{dt} \quad (\text{II.27})$$

Les forces extérieures appliquées et projetées sur l'axe de la conduite pour une couche d'eau d'épaisseur  $dx$ , (figure II.3) sont :

- La pression sur une face de la tranche  $PS$
- La pression sur l'autre face :  $-\left(PS + \frac{\partial P}{\partial x} S dx\right)$
- Les frottements du liquide avec les parois de la conduite :  $\pi \cdot \tau \cdot D \cdot dx$
- La composante du poids :  $-\varpi \cdot S \cdot dx \cdot \sin \alpha$

Où,  $\alpha$  : l'angle entre l'axe de la conduite et l'horizontal.



A partir de la figure (II.3) on aura :

$$\sum F_{ex} = PS - \left( PS + \frac{\partial P}{\partial x} S dx \right) - \varpi \cdot S \cdot dx \cdot \sin \alpha - \pi \cdot \tau \cdot D \cdot dx \quad (\text{II.28})$$

On détermine d'abord le terme  $\tau \cdot \pi \cdot D$  ;

Les pertes de charge étant représentées par  $\Delta P$  données par la formule :

$$\Delta p = \varpi \frac{\lambda L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} \quad (\text{II.29})$$

On peut écrire alors que la force de frottement  $F_r$  se calcule par l'une des deux formules suivantes :

$$F_R = \tau \cdot \pi \cdot D \cdot L = \Delta p \cdot \frac{\pi D^2}{4} \quad (\text{II.30})$$

D'où l'on déduit :

$$\pi \cdot \tau \cdot D = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \varpi \cdot \frac{\lambda}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} = j \varpi \cdot S \quad (\text{II.31})$$

Avec :

$$j = \frac{\lambda}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} \quad (\text{II.32})$$

L'équation (II.32) représente le gradient hydraulique.

On injecte l'expression  $\tau \cdot \pi \cdot D$  dans l'équation (II.28), on aura :

$$\sum F_{ex} = -\frac{\partial p}{\partial x} S \cdot dx - \varpi \cdot S \cdot dx \sin \alpha - j \varpi \cdot S \cdot dx \quad (\text{II.33})$$

En portant l'équation (II.29) dans l'équation (II.27) on obtient après simplification par

$$\frac{\varpi}{g} \cdot S \cdot dx :$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} - g \cdot (\sin \alpha + j) \quad (\text{II.34})$$

Ou bien :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} = -g \cdot (\sin \alpha + j) \quad (\text{II.35})$$

L'expression (II.35) est la seconde équation de Saint-Venant.

La vitesse est une fonction de l'abscisse  $x$  et du temps, qui donne :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{II.36})$$

D'où on aura :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + g \cdot (\sin \alpha + j) = 0 \quad (\text{II.37})$$

Sachant que ;

$$P = \varpi \cdot (H - z) \quad (\text{II.38})$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sin \alpha \quad (\text{II.39})$$

On obtient au final :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} = -g \cdot j \quad (\text{II.40})$$

L'expression (II.40) est la seconde équation de Saint-Venant. En régime varie en charge.

## II.5. Discussion des équations de base

Reprenons le système d'équations dit parfois de Saint-Venant :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} + g \cdot j = 0 \quad (\text{II.41})$$

$$\frac{a^2}{g} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.42})$$

C'est deux équations régissant la propagation des ondes élastiques dans les conduites en charge, constituent donc un système d'équations différentielles de premier ordre. Les variables indépendantes sont la coordonnée longitudinale  $x$  et le temps  $t$ , et les variables dépendantes sont la charge  $H$  et la vitesse d'écoulement. Les autres variables, comme la célérité de l'onde  $a$ , et le diamètre  $D$ , ne changent pas dans le temps mais peuvent évidemment varier selon  $x$ . Le terme d'accélération convective  $v \frac{\partial v}{\partial x}$  peut être négligé devant

$\frac{\partial v}{\partial t}$ , ainsi  $v \frac{\partial H}{\partial x}$  avec  $\frac{\partial H}{\partial x}$  (Chaudhry, 1979, Boillat et De Souza, 2004) ;

Le système différentiel se simplifiera comme suit :

$$\frac{g}{a^2} \left( \frac{a^2}{g} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{g}{a^2} \left( v \cdot \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{g}{a^2} \left( \frac{\partial H}{\partial t} \right) = 0 \quad (\text{II.43})$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{g}{a^2} \left( v \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} \right) = 0 \quad (\text{II.42})$$

Donc :

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{g}{a^2} \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.43})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} + g \cdot j = 0 \quad (\text{II.44})$$

## II.6. Intégration Des équations de base

Pour pouvoir intégrer ces équations différentielles, nous devons passer par une cascade de simplifications.

Après avoir négligé les termes convectifs, le système d'équations est rendu sous une forme conservative en omettant le terme dissipatif correspondant aux pertes de charge. Nous parviendrons alors au système suivant :

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{g}{a^2} \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.45})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.46})$$

Dérivons l'équation (II.45) par rapport à t et l'équation (II.46) par rapport à x :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \cdot \partial t} + \frac{g}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{II.47})$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \cdot \partial t} + g \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{II.48})$$

On fait égalité des deux équations :

$$\frac{g}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = g \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \quad (\text{II.49})$$

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \quad (\text{II.50})$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \quad (\text{II.51})$$

Dérivons l'équation (II.45) par rapport à  $x$  et l'équation (II.46) par rapport à  $t$  :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{g}{a^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t \cdot \partial x} = 0 \quad (\text{II.52})$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + g \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial x \cdot \partial t} = 0 \quad (\text{II.53})$$

On divise équation (II.53) sur «  $a$  » :

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{g}{a^2} \frac{\partial^2 H}{\partial x \cdot \partial t} = 0 \quad (\text{II.54})$$

On fait égalité entre les deux équations

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (\text{II.55})$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (\text{II.56})$$

On obtient donc les équations (II.51) et (II.56), dans lesquelles  $H$  et  $v$  sont liées aux variables  $x$  et  $t$  par une même équation différentielle qui est l'équation classique des « cordes vibrantes », bien connue aussi sous le nom de l'équation de d'Alembert, dont la solution générale de ce type d'équation a été donnée par ce dernier.

## II.7. Solution général

La solution générale de ces équations différentielles s'obtient après un changement de variables comme suit (James, 2011) :

$$\begin{aligned} z &= t - \frac{x}{a} \\ w &= t + \frac{x}{a} \end{aligned} \quad (\text{II.57})$$

$z$  et  $w$  sont les variables de Riemann.

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial w} \quad (\text{II.58})$$

Car :

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 1 \quad (\text{II.59})$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial H}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial w} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial H}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial w} \right) \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{\partial H}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial w} \right) \frac{\partial w}{\partial t} \quad (\text{II.60})$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial z \cdot \partial w} + \frac{\partial^2 H}{\partial w^2} \quad (\text{II.61})$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{II.62})$$

Avec

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{a}$$

Et

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{a}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{a} \left( -\frac{\partial H}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial w} \right) \quad (\text{II.63})$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{a} \left( -\frac{\partial H}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial w} \right) \right] \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial w} \left[ \frac{1}{a} \left( -\frac{\partial H}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial w} \right) \right] \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{II.64})$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = -\frac{1}{a^2} \left( -\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z \cdot \partial w} \right) + \frac{1}{a^2} \left( -\frac{\partial^2 H}{\partial w \cdot \partial z} + \frac{\partial^2 H}{\partial w^2} \right) \quad (\text{II.65})$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 H}{\partial z \cdot \partial w} + \frac{\partial^2 H}{\partial w^2} \right) \quad (\text{II.66})$$

En introduisant les équations (II.61) et (II.66) dans (II.51), on obtient :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \Leftrightarrow \left( \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial z \cdot \partial w} + \frac{\partial^2 H}{\partial w^2} \right) = \left( \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 H}{\partial z \cdot \partial w} + \frac{\partial^2 H}{\partial w^2} \right) \quad (\text{II.67})$$

$$\text{Si } \frac{\partial^2 H}{\partial z \partial w} = 0 \quad \frac{\partial H}{\partial z} = \text{Fonction indépendante de } w$$

$$\frac{\partial H}{\partial w} = \text{Fonction indépendante de } z$$

$$\text{Posons } \frac{\partial H}{\partial z} = F'(z) + C \text{ par intégration } H = f(z) + C$$

Donc :

$$H = F\left(t - \frac{x}{a}\right) + C \quad (\text{II.68})$$

$$\text{De même posons } \frac{\partial H}{\partial w} = f'(w) \text{ par intégration } H = f(w) + C$$

Donc :

$$H = f\left(t + \frac{x}{a}\right) + C \quad (\text{II.69})$$

La solution générale est la somme des deux solutions, et on aura en final :

$$H = F\left(t - \frac{x}{a}\right) + f\left(t + \frac{x}{a}\right) + C \quad (\text{II.70})$$

La constante s'obtient en considérant la pression  $H_0$  au point considéré avant l'apparition du régime transitoire, c'est-à-dire à l'instant  $t = 0$ . Donc :

$$H = H_0 + F\left(t - \frac{x}{a}\right) + f\left(t + \frac{x}{a}\right) \quad (\text{II.71})$$

Dérivons l'équation (II.71) par rapport à  $x$  et reportons cette dérivée dans l'équation (II.46), celle-ci devient alors :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{g}{a} \left[ F'\left(t - \frac{x}{a}\right) - f'\left(t + \frac{x}{a}\right) \right] \quad (\text{II.72})$$

Après intégration, on aura :

$$v = v_0 - \frac{g}{a} \left[ F\left(t - \frac{x}{a}\right) - f\left(t + \frac{x}{a}\right) \right] \quad (\text{II.73})$$

Où  $V_0$  représente la vitesse dans la canalisation en régime stationnaire.

## II.8. Interprétation des équations d'Allievi

Imaginons un observateur mobile, se déplaçant à la vitesse constante « a » (mouvement uniforme) dans la direction positive des x selon la loi :

$$x = at + cste \quad (\text{II.74})$$

D'après le système d'axes choisi auparavant, x étant positif dans le sens opposé à l'écoulement, l'observateur remonte donc le courant. De l'équation (II.74) on a :

$$\left(t - \frac{x}{a}\right) = cste$$

Par conséquent, pour cet observateur,

$$F\left(t - \frac{x}{a}\right)$$

Représente toujours la même valeur, où qu'il se trouve (en chaque point). F caractérise ainsi une onde se propageant dans la conduite avec une vitesse a en sens inverse de v.

De la même manière que pour un observateur se déplaçant à une vitesse « -a », c'est-à-dire dans le sens du courant,

$$f\left(t + \frac{x}{a}\right)$$

Représenterait une onde se propageant en sens inverse de la première ( $f\left(t + \frac{x}{a}\right)$  reste constante en chaque point).

De ce fait, la surpression (ou la dépression) H en chaque point de la conduite, résulte de la superposition en ce point des deux ondes F et f se propageant dans la conduite en sens inverse et avec la même vitesse absolue « a ».

## II.9. Simplification des équations d'Allievi

Dans la plupart des cas pratiques (conduites de refoulement ou conduites forcée) l'origine de la canalisation est constituée par un réservoir dont les dimensions sont suffisamment grandes par rapport à celles de la conduite, en admettant que le réservoir est à  $x=L$  de l'origine du phénomène, on peut écrire que :

Où :

$$F\left(t - \frac{L}{a}\right) + f\left(t + \frac{L}{a}\right) = 0 \quad (\text{II.75})$$

$$f\left(t + \frac{L}{a}\right) = -F\left(t - \frac{L}{a}\right) \quad (\text{II.76})$$

A l'origine de canalisation l'onde de retour  $f$  est donc constamment égale et opposée à l'onde incidente. Autrement dit, à l'extrémité amont de la conduite ou il existe une surface libre à pression constante, les ondes se réfléchissent avec changement de signe (Carlier, 1980).

$$f(t) = -F\left(t - \frac{2L}{a}\right) \quad (\text{II.77})$$

$\frac{2L}{a}$  Représente la durée correspondant à un aller et retour de l'onde de long de la conduite.

On a donc, en considérant l'instant  $\left(t + \frac{x}{a}\right)$  :

$$f\left(t + \frac{x}{a}\right) = -F\left(t - \frac{2L - x}{a}\right) \quad (\text{II.78})$$

Les équations d'Allievi deviennent :

$$H = H_0 + F\left(t - \frac{x}{a}\right) - F\left(t - \frac{2L - x}{a}\right) \quad (\text{II.79})$$

$$v = v_0 - \frac{g}{a} \left[ F\left(t - \frac{x}{a}\right) - F\left(t - \frac{2L - x}{a}\right) \right] \quad (\text{II.80})$$

On remarque que l'onde  $f$  a disparu et le problème est la détermination seule de l'onde  $F$ .

## II.10. Célérité des ondes

L'expression de la célérité des ondes dans une conduite sous pression, siège d'une perturbation du régime, comme suit :

$$a = \sqrt{\frac{K_e}{\rho \left(1 + \frac{K_e}{E} \psi\right)}} \quad (\text{II.81})$$

On conclut que la célérité dépend des caractéristiques du fluide ( $K_e$ ,  $\rho$ ) et des propriétés élastiques de la conduite ( $E$ ) et contraintes externes ( $\psi$ ) qui dépend des propriétés élastiques du conduit (Chaudhry, 1979)

Le facteur adimensionnel  $\psi$  s'exprime par :



$$\psi = \frac{E}{S} \frac{dS}{dP} \approx \frac{E}{S} \frac{\Delta S}{\Delta P} \quad (\text{II.82})$$

Nous donnons à présent quelques valeurs de  $\psi$  pour les conditions répandues dans la pratique :

### 1. Conduite rigide

$$\psi = 0$$

### 2. Conduits élastiques à parois épaisses

#### a. Conduit ancré sur toute sa longueur

$$\psi = 2(1 + \nu) \cdot \frac{R_0^2 + R_i^2}{R_0^2 - R_i^2} - \frac{2\nu R_i^2}{R_0^2 - R_i^2} \quad (\text{II.83})$$

Où  $\nu$  représente le coefficient de Poisson.

$R_0$  et  $R_i$  les rayons externe et interne du conduit.

#### b. Conduit ancré à l'extrémité supérieure

$$\psi = 2 \left[ \frac{R_0^2 + 1.5R_i^2}{R_0^2 - R_i^2} + \frac{\nu(R_0^2 - 3R_i^2)}{R_0^2 - R_i^2} \right] \quad (\text{II.84})$$

#### c. Conduit avec joints de dilatation

$$\psi = 2 \left( \frac{R_0^2 + R_i^2}{R_0^2 - R_i^2} + \nu \right) \quad (\text{II.85})$$

### 3. Conduite élastique à paroi mince

#### a) Ancrée à ces deux extrémités

$$\psi = \frac{D}{e} (1 - \nu^2) \quad (\text{II.86})$$

#### b) Ancrée à l'extrémité amont sans joints d'expansion :

$$\psi = \frac{D}{e} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) \quad (\text{II.87})$$

#### c) Avec joints d'expansion

$$\psi = \frac{D}{e} \quad (\text{II.88})$$

Plusieurs auteurs ont donné des différentes formules pour la détermination de la célérité des ondes dans les conduites forcées, tel que les conduites composites (galerie en rocher revêtue, en béton armé,...etc.). Mais dans la pratique, on se contente de l'usage de la formule d'Allievi qui s'écrit :

$$a = \frac{9900}{\sqrt{48.3 + K \frac{D}{e}}} \quad (\text{II.89})$$

Avec  $a$  en (m/s),  $D$  et  $e$  diamètre et épaisseur de la conduite en mètre.  $K$  est un coefficient dépendant du matériau de la conduite (fonction inverse du module d'élasticité  $E$ ), et prend généralement les valeurs suivantes (Meunier, 1980) ;

- $K=0.5$  pour l'acier et le fer.
- $K=1$  pour la fonte.
- $K=5$  pour le plomb.
- $K=33$  pour le PVC.
- $K=83$  pour le polyéthylène haut densité.

## II.11. Conclusion

Les deux équations de Saint- Venant sont obtenues en appliquant les équations de la continuité et de la quantité de mouvement, elles permettent de traduire tous les mouvements transitoires en hydraulique sous pression. Les équations d'Allievi représentent un cas simple des équations de Saint-Venant. Les équations différentielles auxquelles nous avons aboutis n'ont malheureusement pas de solution analytique, dans le chapitre suivant on va apporter une contribution à la résolution analytique.

## III. Problème de la fermeture brusque d'une vanne

### Solution par la théorie des caractéristiques

#### III.1. Introduction

Le calcul des écoulements transitoires en charge par les méthodes numériques a beaucoup évolué dans les dernières années. L'apparition des ordinateurs a favorisé le développement rapide de la modélisation mathématique et a permis la résolution des équations fondamentales gouvernant les écoulements des fluides en régime transitoires par des méthodes numériques (Amara, L., Berreksi, A., Amireche, M., 2016)

Le modèle mathématique est par conséquent le moyen le plus économique et le plus expéditif permettant de prévoir le comportement des installations hydrauliques soumis aux écoulements transitoires en charge et de fournir les éléments nécessaires au dimensionnement correct de ces équipements.

Parmi les méthodes mathématiques utilisées, notre choix a été porté sur la méthode des caractéristiques, en raison de sa précision et de l'interprétation physique qu'elle fournisse (Streeter et Wylie, 1975 ; Chaudhry, 1987).

#### III.2. Méthode des caractéristiques

Depuis les années 1960, la méthode des caractéristiques a fait preuve de sa puissance et sa supériorité comparée à d'autres méthodes, ce qui lui a permis d'être la méthode la plus populaire et universelle dans le calcul des coups de bélier.

L'origine de la méthode remonte à Monge en 1789 qui développa une procédure graphique pour l'intégration des équations aux dérivées partielles. Il appelle cette procédure la méthode des caractéristiques (Chaudhry M. , 2008). Cette méthode a été par la suite utilisée par Massau (1899), reprise ultérieurement par Craya (1946) pour l'étude des écoulements variés à surface libre et propagation des crues.

Dans les problèmes de coup de bélier, le mérite revient conjointement à Schneider et à Bergeron (1949), mais c'est ce dernier qui a su en donner des applications graphiques

concrètes en hydraulique et aux autres branches de la mécanique et de l'électricité, et depuis, son nom reste attaché à la méthode graphique des caractéristiques.

Dans certains cas particuliers, la méthode des caractéristiques peut permettre la résolution purement analytique des EDP. Dans les cas les plus complexes rencontrés par exemple en modélisation des systèmes hydrauliques, la méthode des caractéristiques peut être utilisée comme une méthode de résolution numérique du problème de propagation des ondes dans les conduites en charge.

Pour une équation aux dérivées partielles (EDP) du premier ordre, la méthode des caractéristiques consiste à rechercher des courbes (appelées « lignes caractéristiques », ou plus simplement « caractéristiques ») le long desquelles l'EDP se réduit à une simple équation différentielle ordinaire (EDO). La résolution de l'EDO le long d'une caractéristique permet de retrouver la solution du problème original.

Des logiciels comme CEBELMAIL ou encore SURGE, AFT Impulse ou HAMMER utilisent la méthode des caractéristiques comme moteur de calcul pour la résolution des équations de Saint-Venant unidimensionnelles et bidimensionnelles.

### III.3. Avantage de la méthode des caractéristiques

La méthode des caractéristiques présente trop avantage dans le calcul du coup de bélier, on peut citer :

- ✓ Simulation correcte d'ondes a front raide, ce qui très fréquent en coup de bélier ;
- ✓ Facilité de programmation des conditions aux limites formées par les divers appareils hydrauliques ;
- ✓ Offre la possibilité de calcul des phénomènes d'oscillation en masse et résonance ;

### III.4. Formulation mathématique du modèle aux caractéristiques

La méthode des caractéristiques consiste à transformer un système d'équations aux dérivées partielles en un autre système d'équations aux dérivées ordinaires. Ainsi, les deux équations (l'équation de continuité et l'équation dynamique) formant un système d'équations aux dérivées partielles de type hyperbolique, est converti en quatre équations aux dérivées totales.

Reprenons les équations différentielles gouvernant les régimes transitoires en charge :

$$L_1 = \frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} + g \cdot j = 0 \quad (\text{III.1})$$

$$L_2 = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (\text{III.2})$$

Pour que ce système d'équations définisse de manière unique la solution, il faut et il suffit que les deux équations  $L_1$  et  $L_2$  soient linéairement indépendantes, donc la combinaison linéaire de ces équations doit être nulle. On écrit alors (Wylie et Streeter, 1978) :

$$L_1 + \lambda L_2 = 0 \quad (\text{III.3})$$

Prenons  $\lambda$  comme le facteur constant d'échelle linéaire, appel aussi le multiple de Lagrange. D'où :

$$\left( \frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} + g \cdot j \right) + \lambda \left( \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} \right) = 0 \quad (\text{III.4})$$

Ce qui implique :

$$\lambda \left( \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{g}{\lambda} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \left( \frac{\lambda \cdot a^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} \right) + g \cdot j = 0 \quad (\text{III.5})$$

On associe à cette équation le système des dérivées totales suivant :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{III.6})$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial t} \quad (\text{III.7})$$

Ce système définit également la solution de manière unique, donc ces équations sont aussi linéairement dépendantes:

$$\lambda \frac{dh}{dt} + \frac{dv}{dt} + g \cdot j = 0 \quad (\text{III.8})$$

Soit :

$$\lambda \left( \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial h}{\partial t} \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial t} \right) + g \cdot j = 0 \quad (\text{III.9})$$

On peut noter que :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{g}{a} = \frac{\lambda \cdot a^2}{g} \quad (\text{III.10})$$

La solution donne deux racines réelles distinctes, soit :

$$\lambda = \pm \frac{g}{a} \quad (\text{III.11})$$

En substituant la valeur de  $\lambda$  dans l'équation (III.10), la manière particulière dont  $x$  et  $t$  sont liés est :

$$\frac{dx}{dt} = \pm a \quad (\text{III.12})$$

La substitution des valeurs de  $\lambda$  dans l'équation (III.8) conduit à deux paires d'équations, lesquelles sont regroupées et notées, équations C+ et C-:

Pour l'équation C+ :

$$\begin{aligned} \frac{g}{a} \frac{dh}{dt} + \frac{dv}{dt} + g.j &= 0 \\ \frac{dx}{dt} &= +a \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

Pour l'équation C- :

$$\begin{aligned} -\frac{g}{a} \frac{dh}{dt} + \frac{dv}{dt} + g.j &= 0 \\ \frac{dx}{dt} &= -a \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

Ainsi, les deux valeurs réelles de  $\lambda$  ont permis de transformer les équations aux dérivées partielles de départ à ce système d'équations aux dérivées ordinaires où la variable indépendante est seul le temps t.

La solution du système d'équations sera représentée donc, dans le domaine formé par les variables indépendantes, qui est le plan x,t . Et puisque la célérité des ondes a est généralement constante, les équations caractéristiques (III.14) et (III.13) représentent ainsi deux droites de pentes  $\pm dx / dt$  (Figure (III.1)).

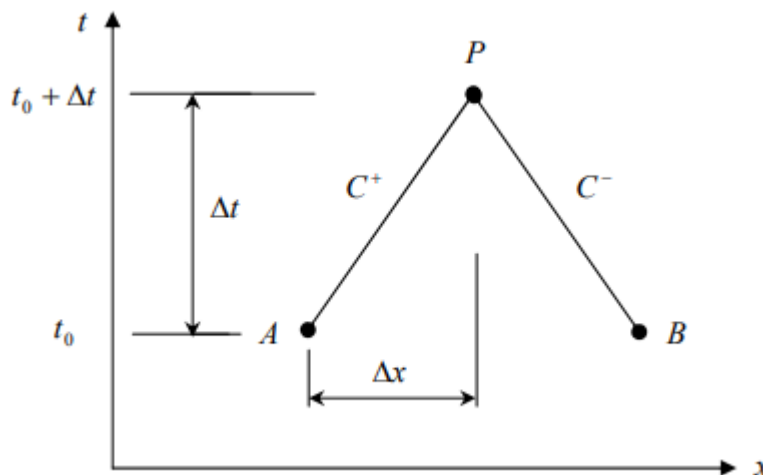


Figure (III. 1) : Lignes caractéristiques dans le plan x,t (Chaudhry, 1979)

### III.5. Interprétation physique de la méthode des caractéristiques

La signification physique des courbes caractéristiques peut être mise en évidence, en considérant un cas simple comme l'écoulement dans une conduite ayant au bout un réservoir

et à l'extrémité une vanne. Supposons qu'une réduction de débit, causée par la fermeture de la vanne a eu lieu, ceci provoquera une augmentation de pression et une propagation d'onde vers le réservoir. La représentation du trajet de l'onde sur un plan (X-t) fait apparaître deux régions:

La première région représente le domaine influencé par les conditions initiales (Celles du réservoir). Qui restent inchangées; par contre la deuxième région est influencée par les conditions de vanne.

Les lignes caractéristiques partagent le plan (t,x), en deux régions sur lequel les solutions sont recherchées. Mais du point de vue physique, les droites caractéristiques correspondent aux tracés le long desquels les perturbations se propagent (Abbott, 1966).

### III.6. Solution numérique du système différentiel

La résolution par la méthode de caractéristiques consiste à déterminer la hauteur et la vitesse au point P connaissant les valeurs initiales aux points A et B. Pour effectuer l'intégration des équations de compatibilité, on discrétise la conduite en un certain nombre N de tronçon égaux (Figure (III.2)), Les points de calcul engendrés par cette discrétisation sont supposés suffisamment proches pour pouvoir écrire la différence finie suivante (Amara L. , 2013):

$$dF(x,t) = F_{(N+1)} - F_{(N)} \quad (\text{III.15})$$

Avec  $f(x,t)$  une fonction telle que la charge H ou le débit Q aux points de discrétisation. Le pas de temps de calcul est déterminé par l'équation caractéristique,  $\Delta t = \Delta x / a$  ce qui satisfait l'équation (III.14) de pente positive caractérisée par la droite AP (Figure (III.2)). Si les variables dépendantes H et Q sont connues au point A , alors l'équation (III.14), laquelle est valide le long de la caractéristique  $C_+$  , peut alors être intégrée entre les limites A et P et écrite de ce fait en terme des variables d'inconnues H et Q au point P.

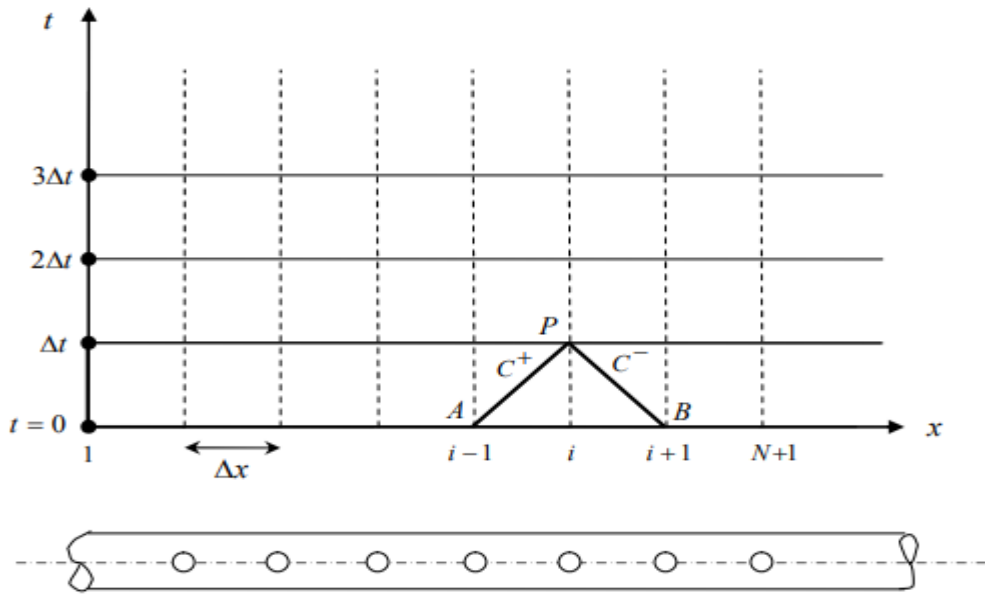


Figure (III. 2) : Intégration numérique des équations sur le plan  $x,t$  (Wylie et Streeter, 1978)

En multipliant l'équation (III.13) par  $a \cdot dt / g = dx / g$ , et en introduisant la section de la conduite pour écrire l'équation en fonction du débit au lieu de la vitesse, ces dernières peuvent s'écrire alors :

$$dh + \frac{a}{g \cdot S} dQ + j \cdot dx = 0 \quad (\text{III.16})$$

On peut donc intégrer les équations (III.16) le long des caractéristiques  $C^+$  entre l'instant  $t_0 = 0$ , où les variables  $H$  et  $Q$  sont connus le long de la conduite (régime permanent), et l'instant  $t_0 + \Delta t$  :

$$\int_{h_A}^{h_P} dh + \frac{a}{g \cdot S} \int_{Q_A}^{Q_P} dQ + I^+ = 0 \quad (\text{III.17})$$

Le terme  $I^+$  représente l'intégrale du terme de frottement le long du bief de la conduite. Il s'écrit :

$$I^+ = \int_{A,B}^x \frac{\lambda Q Q}{2gDS^2} dx \quad (\text{III.18})$$

On peut écrire :

$$\int_{h_A}^{h_P} dh + \frac{a}{g \cdot S} \int_{Q_A}^{Q_P} dQ + \int_{x_A}^{x_P} \frac{\lambda Q |Q|}{2gDS^2} dx = 0 \quad (\text{III.19})$$



L'intégration de l'équation (III.16) avec une manipulation fait le long de la caractéristique C- entre les point B et P ;

$$H_p - H_A + \frac{a}{g.S} (Q_p - Q_A) + \frac{\lambda \Delta x}{2.g.D.S^2} Q_A |Q_A| = 0 \quad (\text{III.20})$$

$$H_p - H_B + \frac{a}{g.S} (Q_p - Q_B) + \frac{\lambda \Delta x}{2.g.D.S^2} Q_A |Q_A| = 0 \quad (\text{III.21})$$

Ces deux équations de compatibilité sont les relations algébriques de base décrivant la propagation des ondes de pression et de débit dans une conduite en charge. En écrivant la solution pour  $H_p$ , ces dernières équations s'écrivent alors :

$$C+ : H_p = H_A - B(Q_p - Q_A) - RQ_A |Q_A| \quad (\text{III.22})$$

$$C- : H_p = H_A + B(Q_p - Q_B) - RQ_B |Q_B| \quad (\text{III.23})$$

Avec :

$$B = a / gS$$

Les équations (III.22) et (III.23) sont aussi valides pour le régime stationnaire étant donné que ce dernier représente un cas particulier des régimes transitoires. Pour le régime permanent  $Q_A = Q_B = Q_p$ .

La résolution numérique du régime transitoire commence alors à partir des conditions initiales. A ce temps zéro, H et Q sont connues à chaque section de calcul le long de la conduite. Ainsi, le calcul du régime transitoire consiste à trouver H et Q à chaque point de la grille au temps  $t = \Delta t$  ensuite le procédé est répété à chaque incrément de temps, jusqu'à l'achèvement du temps de simulation.

Pour la commodité des calculs et de la programmation, les équations (III.22) et (III.23) peuvent s'écrire sous la forme simple suivante :

$$C+ : H_{pi} = C_p - BQ_{pi} \quad (\text{III.24})$$

$$C- : H_{pi} = C_M + BQ_{pi} \quad (\text{III.25})$$

Où  $C_p$  et  $C_M$  sont des constantes connues à chaque pas de temps, ayant pour valeur :

$$C_p = H_{i-1} + BQ_{i-1} - R.Q_{i-1} |Q_{i-1}| \quad (\text{III.26})$$

$$C_M = H_{i+1} - BQ_{i+1} + R.Q_{i+1} |Q_{i+1}| \quad (\text{III.27})$$

En éliminant  $Q_P$  :

$$H_{PI} = \frac{(C_P + C_M)}{2} \quad (\text{III.28})$$

Connaissant le valeur de  $H_{PI}$ , le débit  $Q_{PI}$  peut être trouvé à partir de l'une des équations :

$$Q_{pi} = \frac{(C_p - H_{pi})}{B} \quad (\text{III.29})$$

Partant de ces deux équations, on pourra donc calculer les variables  $H$  et  $Q$  en régime transitoire aux points intérieurs du réseau des caractéristiques à chaque pas de temps connaissant ces mêmes variables au pas de temps antérieur. Ainsi, chaque étage de temps transmet l'information à l'étage immédiatement supérieur suivant les droites caractéristiques  $C+$  et  $C-$ , où leurs intersections définissent la solution au point considéré (Figure (III.3)).

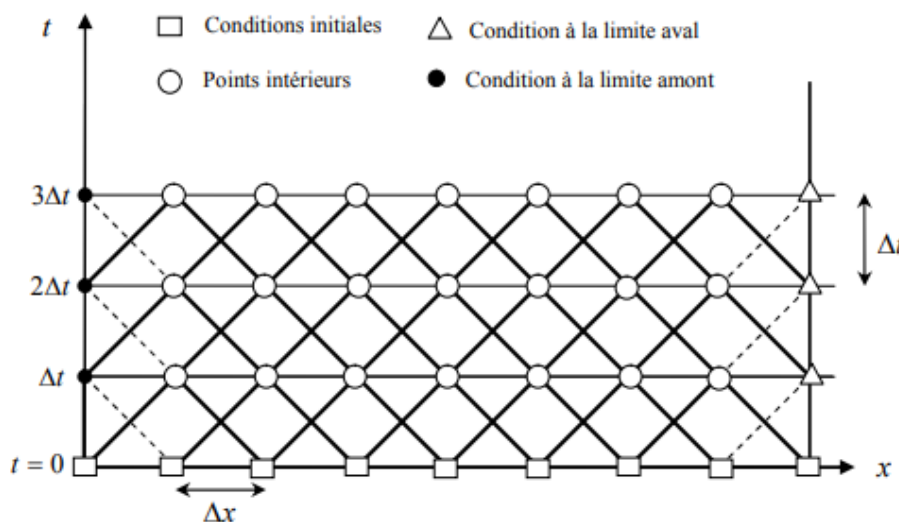


Figure (III. 3) : Réseau des caractéristiques pour le calcul du régime transitoire (Chaudhry, 1979)

### III.7. Condition aux limites

Les valeurs  $H$  et  $V$  dans notre cas sur les extrémités de la conduite ont été déterminées en utilisant des conditions limites. Ces conditions sont :

#### III.7.1. Condition à la limite du réservoir :

Lorsque la conduite existe à partir d'un réservoir, la valeur de  $H$  reste constante pour tous les temps. Cette forme comme :

$$H_{PI} = H_R \quad (\text{III.30})$$

Et la solution de débit peut être :

$$Q_{P1} = \frac{H_R - C_M}{B} \quad (\text{III.31})$$

### III.7.2. Cas d'un obturateur

La figure (III.4) représente le schéma de cet organe obturateur, qui peut être bien évidemment une vanne à opercule, à boisseau, vanne papillon, pointeau ou autres (Wylie et Streeter, 1978).

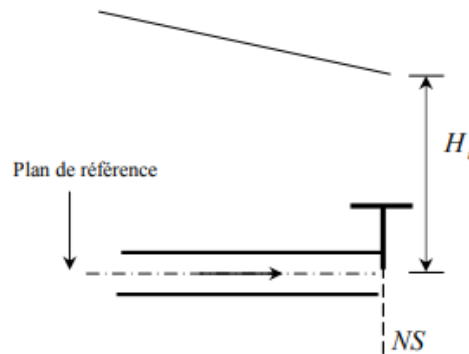


Figure (III. 4) : Condition d'écoulement à la vanne.

Il est facile de constater que pour une fermeture instantanée, qui est un cas hypothétique, la condition à imposer en ce lieu est analogue à celle d'un bout mort  $Q = 0$

### III.7.3. Pompe centrifuge

La condition hydraulique imposée par cette turbomachine étant la courbe caractéristique  $H(Q)$  à vitesse constante, cette relation est du type :

$$H_p = B + a_1 \cdot Q_p + a_2 \cdot Q_p^2 \quad (\text{III.32})$$

Sachant que  $B$  est le point de barbotage de la pompe,  $a_1$  et  $a_2$  sont des coefficients dépendant du tracé de cette pompe. En résolvant simultanément l'équation polynomiale (III.87) et l'équation de compatibilité, il est alors possible de déterminer les variables  $H_p$  et  $Q_p$  en ce lieu. (Amara, L., Berreksi, A., Amireche, M., 2016)

### III.7.4. Organes capacitifs

Ce type d'appareil forme une capacité avec une section finie, subissant des variations de niveau d'eau en fonction des débits entrant et sortant de cet organe en régime transitoire. L'exemple de cette famille d'appareil étant les cheminées d'équilibre. La condition imposée alors par cet organe est l'équation différentielle du stockage de l'eau :

$$(Q_e - Q_s).dt = A.dh \quad (\text{III.33})$$

$Q_e$  : Le débit entrant de l'organe.

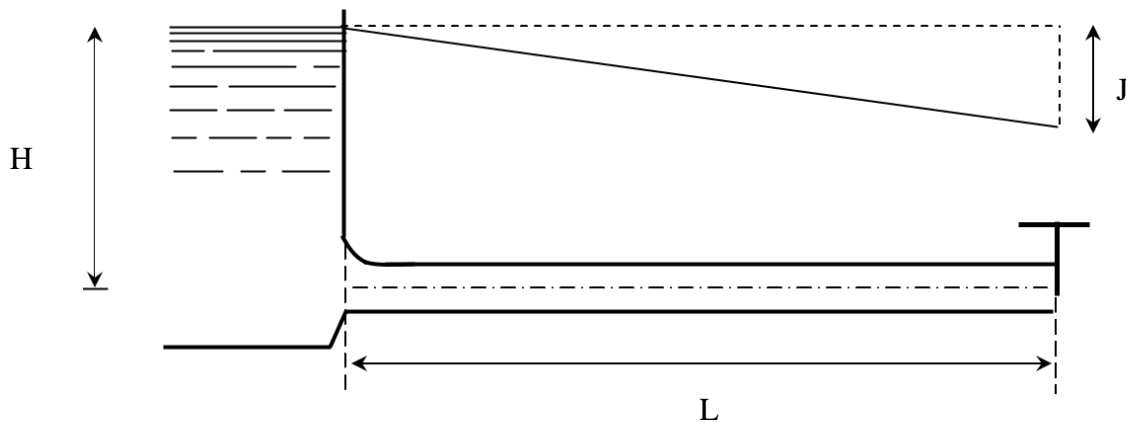
$Q_s$  : Le débit sortant de l'organe.

$A$  : la section horizontale occupée par l'eau.

### III.8. Application

En hydraulique, la manœuvre brusque des obturateurs au bout des conduites forcées gravitaires à pos trop de problèmes dans les installations industrielles. Nous présentons ici la simulation numérique de ce type de problème par la méthode des caractéristiques.

L'installation que l'on se propose d'étudier est schématisée sur la figure (III.5).



*Figure (III. 5) : Schéma de l'installation étudiée.*

Il s'agit d'une conduite unique (c'est-à-dire de section et d'épaisseur constantes) horizontale de longueur  $L$  et de diamètre  $D$  débouchant d'un réservoir (bassin) de section infinie tel que le niveau d'eau reste constant en phase transitoire. Le niveau du plan libre assure une charge  $H_R$  au-dessus de l'axe de la conduite, laquelle se termine par un obturateur (orifice) de section variable, qui peut être en pratique une vanne, une aiguille d'injecteur de turbine Pelton ou autres types d'obturateurs. Nous choisissons comme données de l'installation celles récapitulées dans le tableau (III.1) suivant :

**Tableau (III. 1) : Données relatives au cas d'étude**

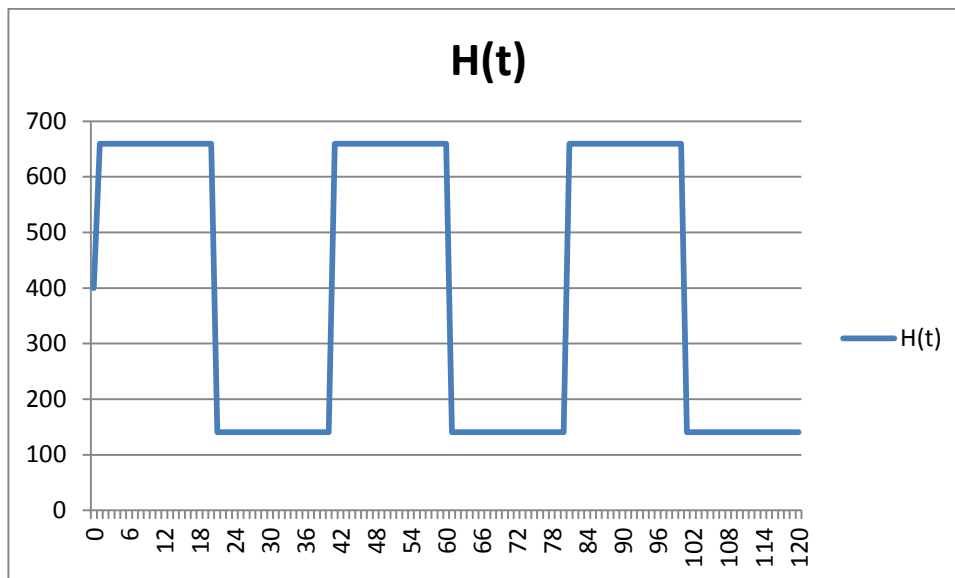
Charge statique du bassin ( $H_R$ )	400 m
Diamètre de la conduite	1.0 m
Longueur	10 000 m
Rugosité	1 mm
Célérité des ondes	1 000 m/s
Débit initial (régime établi)	$2 \text{ m}^3/\text{s}$

Les paramètres de simulation relatifs à ce cas de figure sont :

- Temps de fermeture de la vanne :  $T_F = 0 \text{ s}$
- Durée de la simulation :  $t_s = 120 \text{ s}$
- Discrétisation de la conduite  $N = 30$  tronçons
- Pas de temps de calcul :  $\Delta t = 0.33\bar{3}$

### III.8.1. Cas sans pertes de charge

Les résultats de la simulation sont représentés dans la figure (III.8) qui traduire la variation temporelle de la charge enregistrée en phase transitoire au point  $x = L$  (vanne)



**Figure (III. 6) : Variation temporelle de la charge à l'obturateur**

Comme on a dit avant à l'extrémité de la conduite où se crée la perturbation, la surpression s'établit brusquement au temps 0 suite à l'annulation instantanée du débit en régime permanent et la surpression reste constante jusqu'au temps 20 s pendant la durée d'aller et retour de l'onde ( $2L/a$ ) entre l'obturateur et le bassin de mise en charge. Après 20 s une dépression a été créée égale à la surpression précédente et reste également constante durant 20 secondes. Passé ce temps, le phénomène recommence indéfiniment et sans amortissement de l'amplitude étant donné qu'aucune dissipation de l'énergie mécanique du fluide n'intervient au cours du phénomène de propagation d'ondes.

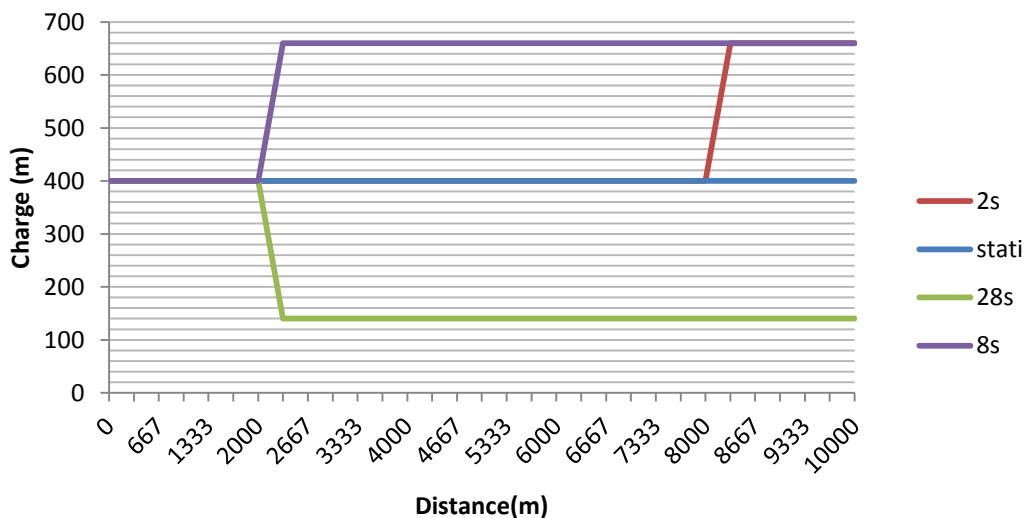
On remarque le caractère périodique du phénomène d'une durée 20 s de surpression et 20 s de dépression qui est le temps de phénomène transitoire  $2\theta = 4L/a$

D'après les résultats les charges maximales et minimales enregistrées sont de 659.58 m et 140.42 m. Ainsi, la surpression et dépression par rapport à la charge statique de 400 m sont :

$\xi_{Surp} = 259,58 \text{ m}$  et  $\xi_{Depr} = -259,58 \text{ m}$ , Cette valeur est celle donnée par la formule bien

connue d'Allievi  $\frac{a.V_0}{g}$ .

En portant les variations de la charge en fonction de l'espace Figure (III.7) qui permet de bien connaître la synthèse du phénomène.



**Figure (III. 7) :** Avancée du front d'onde en fonction du temps.

D'après la figure (III.7) avant le début de phénomène  $t=0$ , on voit que la charge est de  $H_R$ , juste après ce temps le front avance vers le réservoir à la célérité  $a$ , le débit s'annule derrière lui mais existe encore le long de la partie non atteinte par la perturbation. La surpression disposée sur toute la conduite et le débit est annulé sur toute la longueur et cela au moment que la perturbation arrive au Réservoir. En second temps, le front d'onde inverse chemin et le débit s'inverse jusqu'à l'arrivée à la vanne où la surpression devient nulle et le

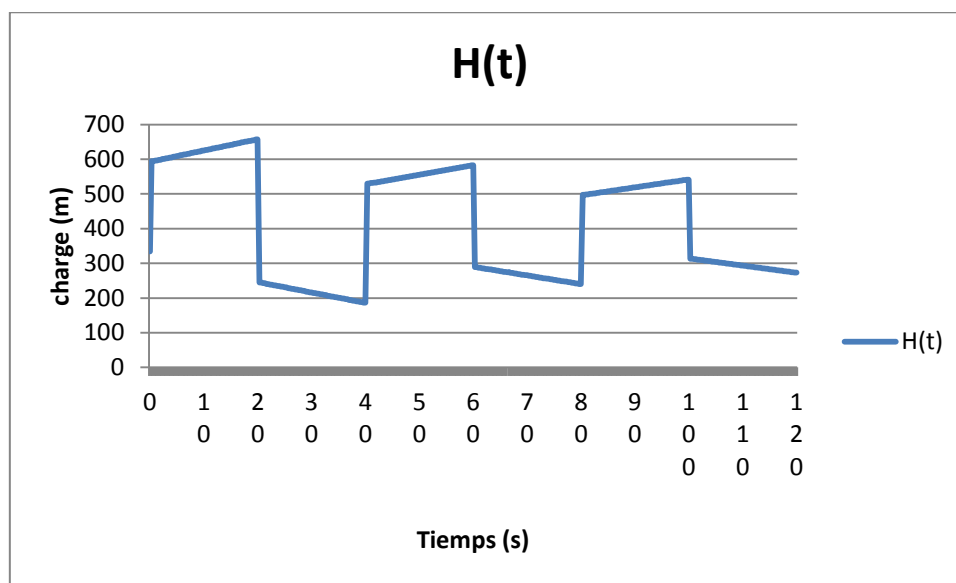
débit inversé existe tout la conduite. Consécutivement après, une onde de dépression prend naissance en annulant le débit sur son trajet jusqu'à son arrivée au réservoir, En dernière phase le débit se rétablit dans la conduite de proche en proche à la célérité des ondes en annulant la dépression, et à son arrivée à l'obturateur la conduite retrouve son état initial et le phénomène recommence.

### III.8.2.Cas avec pertes de charge

On prend compte ici de la résistance de la conduite dans la simulation et les résultats reportés sur la figure (III.8) :

L'examen de la Figure (III.8) enregistré à l'obturateur, montre qu'au temps 0 la surpression s'établit instantanément comme dans le cas précédent mais à partir de la charge 334,63 m, à cause des pertes de charge en régime initial.

L'onde va vers le réservoir, la charge augmente progressivement derrière l'opercule de l'obturateur pour atteindre son maximum au moment juste du retour de l'onde en ce point, engendrer une surpression totale supérieure à celle d'Allievi.

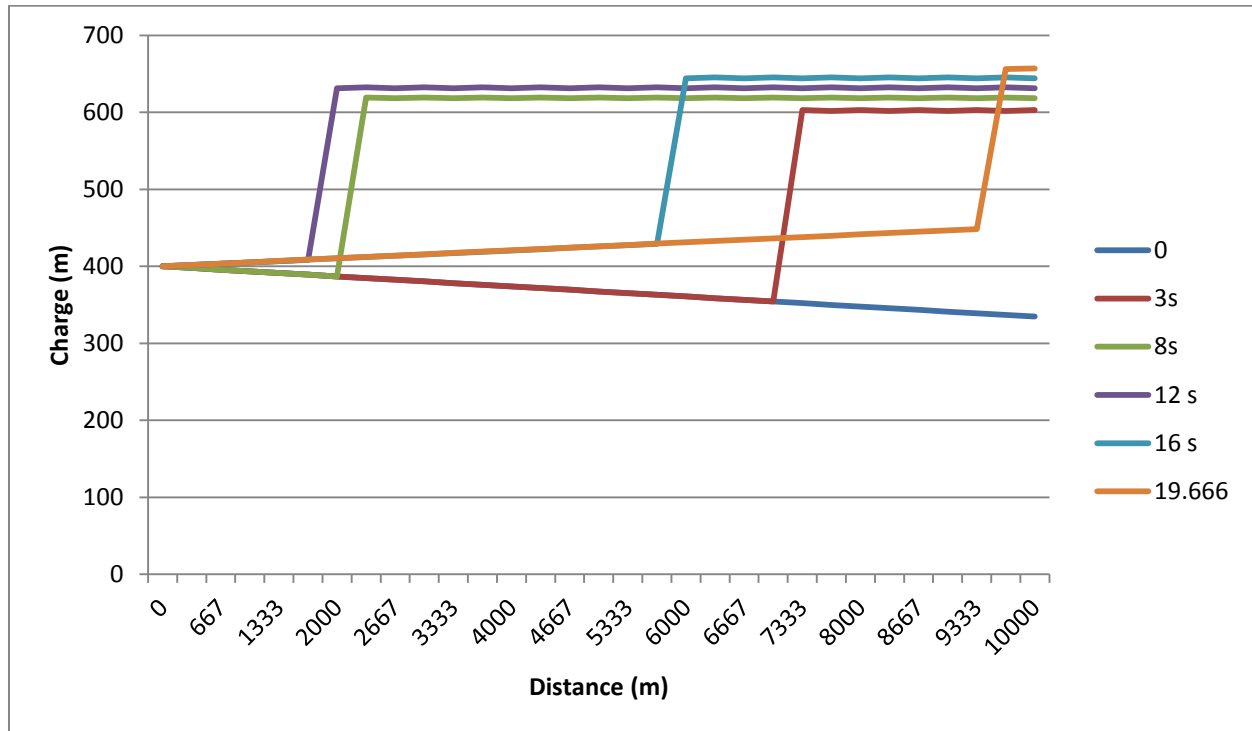


**Figure (III. 8) :** Variation temporelle de la charge à l'obturateur (cas perte de charge).

On peut reproduire l'avancée du front d'onde figure (III.9) pour mieux percevoir ce phénomène :

Ce phénomène d'augmentation de la surpression, est attribuable à l'état de non équilibre régnant au sein de la conduite. Quoique la vitesse du fluide soit nulle, et par suite du gradient de charge initial, un petit débit descendant se développe pour éliminer ce gradient et introduit le système en équilibre dynamique (Larock, 2000), jusqu'à qu'il soit interrompu par l'onde de dépression (au-delà de la 20ème seconde). A la vanne, cet ajustement cumulatif de

charge avoisine numériquement la valeur de la perte de charge d'équilibre en régime initial dans la conduite. Le même phénomène se reproduit en phase de dépression où l'on observe une diminution progressive de la charge en chaque point après le passage du front d'onde.



*Figure (III. 9) : Avancée du front d'onde en fonction du temps (phase de surpression).*

Les valeurs enregistrées après la première période du phénomène ayant atteint les maxima de surpression de 657.07m et dépression de 186.48m. Quand le phénomène se reproduit l'onde de choc provoqué à la vanne s'atténue progressivement et ne garde pas la même amplitude avec le temps.

### III.9. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté une méthode puissante pour la résolution numérique des équations caractérisant l'écoulement transitoire en charge, qui est la méthode des caractéristiques. Cette méthode nécessite de convertir les équations aux dérivées partielles en des équations ordinaires.

Les pertes de charge sont introduites directement dans les équations de compatibilité, et ne change en rien le caractère périodique du phénomène, mais provoque l'atténuation de l'amplitude des ondes.



## **IV. Problème de l'ouverture brusque d'une vanne**

### **Solution par la méthode des perturbations**

#### **IV.1. Introduction**

L'ingénieur en hydraulique sait que si l'on manœuvre sur une vanne, l'écoulement deviendrait transitoire et s'établit dans la conduite en charge pour un certain moment pour retrouver par la suite l'état stationnaire. Dans cette partie de notre travail, nous étudions le problème de l'ouverture brusque de la vanne occasionnant le régime transitoire. Pour cela on a choisi une méthode mathématique qui trouve une solution approchée à une équation en partant de la solution d'un problème plus simple. Cette méthode dite la méthode des « perturbations ».

#### **IV.2. Position du problème**

L'une des questions principales posées en hydraulique est la variation du débit en fonction du temps quand on ouvre brusquement une vanne d'une conduite en charge et le temps d'établissement du régime permanent. Pour simplifier le problème, la figure (IV.1) ci-dessous montre une conduite en charge d'une certaine longueur débouchant d'un réservoir infiniment grand déchargeant son débit à partir d'une vanne placée à son extrémité. La question posée est quel est le temps d'établissement du régime permanent et comment varie le débit en fonction du temps ?

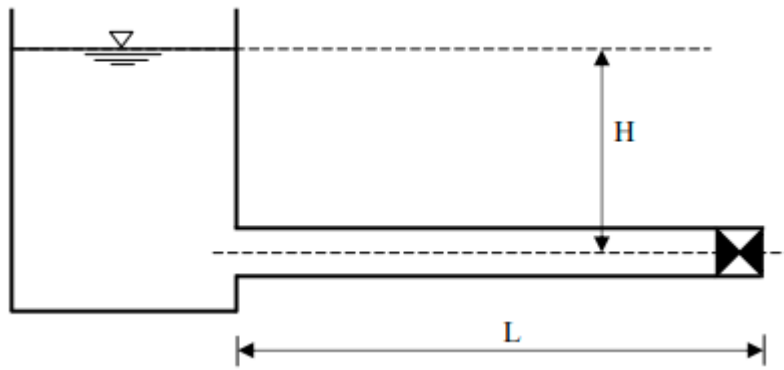


Figure (IV. 1) : Ouverture instantanée d'une vanne sur conduite en charge.

### IV.3. Solution analytique exacte pour le Temps (T)

On sait qu'au début, la charge motrice vaut  $H - Kv^2$  où  $K$  est un facteur des pertes de charge :

$$K = \left( \frac{\lambda L}{D} + k \right) \cdot \frac{1}{2g} \tag{IV.1}$$

Avec  $k$  coefficient de perte singulière de la charge. L'équation du mouvement s'écrit dans ce cas :

$$\omega S(H - Kv^2) = \rho SL \frac{dv}{dt} \tag{IV.2}$$

Pour le temps  $T$  sera alors :

$$T = \int_{t_1}^{t_2} dt = \frac{L}{g} \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{(H - Kv^2)} \tag{IV.3}$$

En admettant  $\lambda = \text{Constant}$  dans l'intervalle  $v_1$  et  $v_2$  en notant  $H = a^2$  et  $K = b^2$ , l'équation précédente devient :

$$T = \frac{L}{g} \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{a^2 - b^2 v^2} \tag{IV.4}$$

On pose

$$A = \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{a^2 - b^2 v^2} \tag{IV.5}$$

Soit encore :

$$A = - \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{b^2 v^2 - a^2} \quad (\text{IV.6})$$

$$A = - \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{(bv - a)(bv + a)} \quad (\text{IV.7})$$

$$A = - \int_{v_1}^{v_2} \left( \frac{1}{2a(bv - a)} - \frac{1}{2a(bv + a)} \right) dv \quad (\text{IV.8})$$

$$A = - \left( \frac{1}{2a} \int_{v_1}^{v_2} \left( \frac{1}{bv - a} \right) dv - \frac{1}{2a} \int_{v_1}^{v_2} \left( \frac{1}{bv + a} \right) dv \right) \quad (\text{IV.9})$$

Maintenant on pose :

$$Z = \int_{v_1}^{v_2} \frac{1}{bv - a} dv \quad (\text{IV.10})$$

Par un changement de variable tel que :

$$u = bv - a \Rightarrow \frac{du}{dv} = b \rightarrow dv = \frac{1}{b} du \quad (\text{IV.11})$$

Alors :

$$Z = \frac{1}{b} \int_{v_1}^{v_2} \frac{1}{u} du \quad (\text{IV.12})$$

$$Z = \frac{\ln(u)}{b} \quad (\text{IV.13})$$

$$Z = \frac{\ln(bv - a)}{b} \quad (\text{IV.14})$$

De la même façon

$$u = bv + a \Rightarrow \frac{du}{dv} = b \rightarrow dv = \frac{1}{b} du \quad (\text{IV.15})$$

$$Z = \frac{\ln(bv + a)}{b} \quad (\text{IV.16})$$

Maintenant on a :

$$A = - \left( \frac{\ln(bv - a)}{2ab} - \frac{\ln(bv + a)}{2ab} \right) \quad (\text{IV.17})$$

$$A = \left( \frac{\ln(bv + a)}{2ab} - \frac{\ln(bv - a)}{2ab} \right) \quad (\text{IV.18})$$

Au final on obtient :

$$T = \frac{L}{2gab} \left[ \ln \left( \frac{bv + a}{bv - a} \right) \right]_{v_1}^{v_2} \quad (\text{IV.19})$$

Soit encore :

$$T = \frac{L}{2g\sqrt{KH}} \left[ \ln \left( \frac{\sqrt{H} + \sqrt{Kv}}{\sqrt{H} - \sqrt{Kv}} \right) \right]_{v_1}^{v_2} \quad (\text{IV.20})$$

Ainsi, le temps d'établissement du régime permanent est donné par l'équation (IV.20) entre  $v = 0$  et  $v = v_0$  où  $v_0$  est la vitesse de l'écoulement en régime permanent sous la charge  $H$ . En réalité  $v_0$  n'est atteint qu'à l'infini d'où on prend  $v = 0.99 v_0$

Avec  $H = Kv_0^2$ , l'équation précédente devient finalement :

$$T = \frac{Lv_0}{g2H} \left[ \ln \left( \frac{v_0 + v}{v_0 - v} \right) \right]_{v=0}^{v_0} \quad (\text{IV.21})$$

#### IV.4. Solution analytique exacte pour la vitesse $v(t)$ :

On reprend l'équation de mouvement :

$$\varpi S(H - Kv^2) = \rho SL \frac{dv}{dt} \quad (\text{IV.22})$$

$$L \frac{dv}{dt} = g(H - Kv^2) \quad (\text{IV.23})$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g(H - Kv^2)}{L} \quad (\text{IV.24})$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{gH}{L} - \frac{Kg}{L} v^2 \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} + \alpha v^2 - \beta = 0 \quad (\text{IV.25})$$

Avec :

$$\alpha = \frac{Kg}{L} \quad (\text{IV.26})$$

$$\beta = \frac{gH}{L}$$

Par ailleurs :

$$\frac{dv_0}{dt} = 0 \Rightarrow \alpha v_0^2 - \beta = 0 \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \quad (\text{IV.27})$$

Faisons le changement de variables

$$V = v - v_0 \Rightarrow v = V + v_0 \quad (\text{IV.28})$$

On remplace dans équation (IV.25) on aura :

$$(V + v_0)' + \alpha(V + v_0)^2 - \beta = 0 \quad (\text{IV.29})$$

$$V' + v_0' + \alpha V^2 + \alpha v_0^2 + 2\alpha V v_0 - \beta = 0 \quad (\text{IV.30})$$

D'après équation (IV.27), équation (IV.30) prend la forme :

$$V' + \alpha V^2 + 2\alpha V v_0 = 0 \quad (\text{IV.31})$$

Et en divisant par  $V^2$  :

$$\frac{V'}{V^2} + \alpha + \frac{2\alpha v_0}{V} = 0 \quad (\text{IV.32})$$

Pour résoudre cette nouvelle équation, dite de Bernoulli, on effectue le changement de

variable :

$$z = \frac{1}{V} \Rightarrow z' = -\frac{V'}{V^2} \quad (\text{IV.33})$$

Donc :

$$-z' + 2\alpha v_0 z + \alpha = 0 \quad (\text{IV.34})$$

$$z' = 2\alpha v_0 z + \alpha \quad (\text{IV.35})$$

Cette équation différentielle linéaire du premier ordre admet pour solution :

$$z = C e^{2\alpha v_0 t} - \frac{1}{2v_0} \quad (\text{IV.36})$$

$$z = \frac{2C v_0 e^{2\alpha v_0 t} - 1}{2v_0} \quad (\text{IV.37})$$

Et en remontant :

$$V = \frac{1}{z} = \frac{2v_0}{2Cv_0 e^{2\alpha v_0 t} - 1} \quad (\text{IV.38})$$

Puis

$$v = V + v_0 = v_0 + \frac{2v_0}{2Cv_0 e^{2\alpha v_0 t} - 1} \quad (\text{IV.39})$$

$$v = v_0 \frac{2Cv_0 e^{2\alpha v_0 t} + 1}{2Cv_0 e^{2\alpha v_0 t} - 1} \quad (\text{IV.40})$$

Pour déterminer C, on a la condition initiale la vitesse égale zéro au temps zéro  $v(0) = 0$ . Cela conduit à :

$$2Cv_0 + 1 = 0 \quad (\text{IV.41})$$

$$C = -\frac{1}{2v_0} \quad (\text{IV.42})$$

Donc en remplaçant C par sa valeur :

$$v = v_0 \frac{e^{2\alpha v_0 t} - 1}{e^{2\alpha v_0 t} + 1} \quad (\text{IV.43})$$

A l'aide de la fonction tangente hyperbolique équation devient :

$$v = v_0 \tanh(\alpha \cdot v_0 \cdot t) \quad (\text{IV.44})$$

$$v(t) = \left( \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \tanh \left( \alpha \left( \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} t \right) \right) \right) \quad (\text{IV.45})$$

$$v(t) = \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha} \tanh(\sqrt{\alpha\beta} t) \quad (\text{IV.46})$$

$$v(t) = \frac{\sqrt{KH}}{K} \tanh(\sqrt{KH} t) \quad (\text{IV.47})$$

## IV.5. Solution par la méthode des perturbations

### IV.5.1. Historique de la méthode des perturbations

Dès le début du 18ème siècle, la théorie des perturbations a été utilisée par les astronomes pour les besoins de la mécanique céleste : en effet, les équations différentielles

décrivant un système de  $N$  corps en interaction gravitationnelle n'a pas de solution exacte générale pour

$N > 2$ .

Cet aspect de la théorie des perturbations a été synthétisé à la fin du 19ème siècle dans les ouvrages classiques de Laplace, Tisserand et Poincaré, avant de connaître de nouveaux développements dans la seconde moitié du 20ème siècle avec l'avènement en 1954 de la « théorie KAM », du nom de ses trois concepteurs : Kolmogorov, Arnold et Moser.

La méthode a par ailleurs été abondamment utilisée au 20ème siècle pour les besoins de la physique quantique, d'abord en mécanique quantique non relativiste, puis en théorie quantique des champs perturbatives.

#### IV.5.2. Précision de la méthode des perturbations

La théorie des perturbations est un domaine des mathématiques, qui consiste à étudier les contextes où il est possible de trouver une solution approchée à une équation en partant de la solution d'un problème plus simple.

Les problèmes que l'on peut résoudre correspondent assez souvent à des phénomènes fortement idéalisés. Lorsque l'on cherche une description plus réaliste, on aboutit en général à un jeu d'équations non solubles analytiquement. Cependant, il n'est pas rare que parmi les effets physiques considérés, certains soient mineurs devant les autres. C'est le cas en mécanique céleste par exemple, où l'étude de la trajectoire d'une planète est essentiellement le résultat de l'attraction du Soleil, les autres astres jouant un rôle perturbateur. D'un point de vue mathématique, la formalisation du problème aboutit alors à une équation différentielle avec un ou plusieurs termes perturbateurs. Nous proposons ici d'introduire une méthode, dite méthode des perturbations, qui permet d'approcher analytiquement la solution dans ce contexte.

#### IV.5.3. Principe de la méthode

Une procédure alternative à celle consistant à développer l'expansion par itération consiste à prendre la forme de l'expansion au départ. Donc si nous supposons que l'expansion de perturbation implique la séquence asymptotique standard  $\{\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4, \dots\}$  alors la solution,  $v$  qui dépend de la variable  $t$  et du paramètre  $\varepsilon$  est exprimée sous la forme :

$$v(\varepsilon, t) = \varepsilon^0 v_0(t) + \varepsilon^1 v_1(t) + \varepsilon^2 v_2(t) + \dots \quad (\text{IV.48})$$

Les coefficients  $v_0(t), v_1(t), \dots$  de la puissance de  $\varepsilon$  sont des fonctions de  $t$  seulement. Cela signifie que la dépendance de  $v$  sur le paramètre  $\varepsilon$  est supposée être de la forme de série de puissance ci-dessus, Si cette hypothèse est fautive, il faut s'attendre à une incohérence dans le processus de détermination des fonctions de coefficient  $v_0, v_1, \dots$ . Il est important de noter la distinction entre les quantités en indice  $v_1$ , qui sont les coefficients des puissances de  $\varepsilon$  dans l'équation (IV.51) alors que les indices supérieurs entre crochets utilisés dans les

quantités  $v^{(1)}$  désignent la solution complète au 1<sup>er</sup> ordre d'itération de la précédente approche.

L'expression  $\varepsilon^0$  a été utilisée pour souligner qu'il fait partie de la famille  $\varepsilon^n$ , mais elle sera remplacée par la valeur numérique de l'unité. Le remplacement de l'élargissement (IV.48) par l'équation de base  $\frac{dv}{dt} = -1 - \varepsilon v$  donne la suivant :

$$\frac{dv_0}{dt} + \varepsilon \frac{dv_1}{dt} + \varepsilon^2 \frac{dv_2}{dt} + \dots = -1 - \varepsilon v_0 - \varepsilon^2 v_1 - \dots \quad (\text{IV.49})$$

Où, par commodité, la dépendance à  $t$  des coefficients n'est pas montrée explicitement. L'équation simple (IV.49) ainsi que la condition initiale unique

$$v_0(0) + \varepsilon v_1(0) + \varepsilon^2 v_2(0) + \dots = 1 \quad (\text{IV.50})$$

Doivent être utilisées pour déterminer toutes les fonctions  $v_1(t)$ . La condition supplémentaire qui est imposée est que ces équations soient vraies pour toutes les valeurs du paramètre  $\varepsilon$  dans certains intervalle, la valeur (par exemple  $0 \leq \varepsilon \leq 0.1$ , bien qu'il ne soit pas nécessaire de spécifier l'intervalle) ce coefficient de puissance de  $\varepsilon$  peut être assimilé à gauche et à droite de l'équation (IV.49).

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 : \frac{dv_0}{dt} &= -1 \\ \varepsilon^1 : \frac{dv_1}{dt} &= -v_0 \\ \varepsilon^2 : \frac{dv_2}{dt} &= -v_1 \end{aligned} \quad (\text{IV.51})$$

La preuve de la validité de cette procédure fondamentale peut être développée par le premier réglage  $\varepsilon = 0$  dans l'équation (IV.49) qui donne le premier de l'équation (IV.51).

L'utilisation de ce résultat permet d'éliminer les premiers membres des côtés gauche et droit de l'équation (IV.49). Puis, après avoir divisé les termes restants par  $\varepsilon$  nous avons obtenu l'équation :

$$\frac{dv_1}{dt} + \varepsilon \frac{dv_2}{dt} + \dots = -v_0 - \varepsilon v_1 + \dots \quad (\text{IV.52})$$

Ceci est valable pour toutes les valeurs non nulles de  $\varepsilon$  de sorte qu'en prenant la limite alors que tend vers zéro, nous obtenons la seconde des équations (IV.51) à noter  $\frac{dv_1}{dt} = -v_0$ . La

répétition de la procédure conduit à  $\frac{dv_2}{dt} = -v_1$



Les équations (IV.51) nécessitent chacune une condition initiale. Un ensemble de conditions initiales est généré à partir de l'équation (IV.50) en réécrivant le membre de droite dans la série de puissances à partir de  $1 = 1 + 0\varepsilon + 0\varepsilon^2 + \dots$ . La condition initiale devient alors :

$$v_0(0) + \varepsilon v_1(0) + \varepsilon^2 v_2(0) + \dots = 1 + 0\varepsilon + 0\varepsilon^2 + \dots \quad (\text{IV.53})$$

Qui est valable pour tous les  $\varepsilon$  dans un intervalle continue afin que nous puissions assimiler à nouveau des coefficients de puissances de  $\varepsilon$  à gauche et à droite de l'équation pour obtenir :

$$v_0(0) = 1, \quad v_1(0) = 0, \quad v_2(0) = 0, \text{ etc.} \quad (\text{IV.54})$$

Les fonctions  $v_1(t)$  sont déterminées en combinant les conditions initiales avec les équations (IV.51) pour donner l'ensemble suivant de problèmes de valeur initiale.

$$\varepsilon^0 : \frac{dv_0}{dt} = -1, v_0(0) = 1 \quad (\text{IV.55.a})$$

$$\varepsilon^1 : \frac{dv_1}{dt} = -v_0, v_1(0) = 0 \quad (\text{IV.55.b})$$

$$\varepsilon^2 : \frac{dv_2}{dt} = -v_1, v_2(0) = 0 \quad (\text{IV.55.c})$$

La solution de (IV.55.a), obtenue par intégration directe est  $v_0 = 1 - t$  ensuite remplacée par  $v_0$  dans (IV.55.b) la solution par intégration directe est  $v_1 = \frac{t^2}{2} - t$  également similaire (IV.55.c) obtenir  $v_2 = \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2}$ . De cette façon, les coefficients dans l'extension de perturbation (IV.52) sont trouvés et nous avons

$$v(t, \varepsilon) = 1 - t + \varepsilon \left( \frac{t^2}{2} - t \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} \right) + \dots \quad (\text{IV.56})$$

Où d'autre manière on peut généraliser la démarche de la méthode des perturbations à l'ordre  $n$  mais on retiendra le schéma général :

Considérons une équation différentielle de la forme

$$y' = f(t, y(t)) + \varepsilon g(t, y(t)), \text{ avec } y(0) = y_0 \quad (\text{IV.57})$$

Où  $\varepsilon$  est un paramètre suffisamment petit pour que l'on puisse considérer le terme  $\varepsilon g(t, y(t))$  comme une perturbation. La méthode consiste à rechercher une solution de la forme  $y = y^0 + \varepsilon y^1$  et à remplacer  $y$  par  $y^0$  dans le terme perturbateur. On obtient alors :

$$\frac{dy^0}{dt} + \varepsilon \frac{dy^1}{dt} = f(t, y^0 + \varepsilon y^1) + \varepsilon g(t, y^0) \text{ avec } y^0(0) + \varepsilon y^1(0) = y_0$$

Procédant à un développement de  $f$  à l'ordre 1 au voisinage de  $y^0$  on obtient :

$$\frac{dy^0}{dt} + \varepsilon \frac{dy^1}{dt} = f(t, y^0) + \varepsilon y^1 f'_y(t, y^0) + \varepsilon g(t, y^0) \quad (\text{IV.58})$$

Avec

$$y^0(0) + \varepsilon y^1(0) = y_0 \quad (\text{IV.59})$$

Équation qui doit être valable pour tout  $\varepsilon$  proche de zéro. On obtient alors deux équations différentielles :

$$\frac{dy^0}{dt} = f(t, y^0(t)) \text{ Avec } y^0(0) = y_0 \quad (\text{IV.60})$$

$$\frac{dy^1}{dt} = y^1 f'_y(t, y^0) + g(t, y^0) \text{ avec } y^1(0) = 0 \quad (\text{IV.61})$$

Si l'on sait résoudre la première équation (solution non perturbée), alors la deuxième équation est une équation différentielle linéaire avec second membre.

#### IV.5.4. Application de la méthode des perturbations

Pour illustrer notre propos, On reprend l'équation de mouvement :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{gH}{L} - \frac{Kg}{L} v^2 \quad (\text{IV.62})$$

**Au 1<sup>er</sup> ordre d'approximation :**

$$\frac{dv_0}{dt} = \frac{gH}{L} \Rightarrow v_0(t) = \frac{gH}{L} t \quad (\text{IV.63})$$

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{gH}{L} - \frac{Kg}{L} (v_0)^2 \quad (\text{IV.64})$$

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{gH}{L} - \frac{Kg}{L} \left( \frac{gH}{L} t \right)^2 \quad (\text{IV.65})$$

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{gH}{L} - \frac{Kg^3 H^2}{L^3} t^2 \quad (\text{IV.66})$$

Par intégration

$$v_1(t) = \frac{gH}{L}t - \frac{Kg^3H^2}{3L^3}t^3 \quad (\text{IV.67})$$

Au 2<sup>ème</sup> ordre :

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{gH}{L} - \frac{Kg}{L} \left( \underbrace{\frac{gH}{L}t - \frac{Kg^3H^2}{3L^3}t^3}_{v_1} \right)^2 \quad (\text{IV.68})$$

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{gH}{L} - \frac{Kg}{L} \left( \frac{g^2H^2}{L^2}t^2 + \frac{K^2g^6H^4}{9L^6}t^6 - \left( \frac{2gH}{L}t \cdot \frac{Kg^3H^2}{3L^3}t^3 \right) \right) \quad (\text{IV.69})$$

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{gH}{L} - \frac{Kg}{L} \left( \frac{g^2H^2}{L^2}t^2 + \frac{K^2g^6H^4}{9L^6}t^6 - \frac{2g^4H^3K}{3L^4}t^4 \right) \quad (\text{IV.70})$$

Par intégration on obtient :

$$v_2(t) = \frac{gH}{L}t - \frac{Kg^3H^2}{3L^3}t^3 - \frac{K^3g^7H^4}{63L^7}t^7 + \frac{2K^2g^5H^3}{15L^5}t^5 \quad (\text{IV.71})$$

3<sup>ème</sup> ordre :

$$\frac{dv_3}{dt} = \frac{gH}{L} - \frac{Kg}{L} \left( \frac{gH}{L}t - \frac{Kg^3H^2}{3L^3}t^3 - \frac{K^3g^7H^4}{63L^7}t^7 + \frac{2K^2g^5H^3}{15L^5}t^5 \right)^2 \quad (\text{IV.72})$$

$$v_3(t) = -\frac{g^{15}H^8K^7}{59535L^{15}}t^{15} + \frac{4g^{13}H^7K^6}{12285L^{13}}t^{13} - \frac{134g^{11}H^6K^5}{51975L^{11}}t^{11} + \frac{38g^9H^5K^4}{2835L^9}t^9 - \frac{17g^7H^4K^3}{315L^7}t^7 + \frac{2g^5H^3K^2}{15L^5}t^5 - \frac{g^3H^2K}{3L^3}t^3 + \frac{gH}{L}t \quad (\text{IV.73})$$

## IV.6. Application :

### IV.6.1. Données de l'installation :

Les données de l'installation hydraulique, sujet d'étude, sont groupées dans le tableau suivant :

**Tableau (IV. 1) :** Les données de l'installation

Charge H (m)	Longueur L (m)	Diamètre D (mm)	Rugosité $\varepsilon$ (mm)
20	5000	300	0,03

**IV.6.2. Résultat**

D'abord on fait un calcul préliminaire pour calculer le coefficient lambda que l'on trouve  $\lambda = 0,01495549$ , Le temps d'établissement du régime permanent donné par l'équation (IV.21) :

$$T = 84,62677258 \text{ seconde.}$$

Les résultats analytiques de la méthode des perturbations calculés au premier et au second ordre et troisième ordre avec un pas de temps 1 seconde, sont regroupés dans le tableau suivant :

**Tableau (IV. 2) :** les résultats du calcul analytique pour la vitesse.

t(s)	$v_0$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_{analytique}$
0,00	0	0	0	0	0
1,00	0,03924	0,0392272	0,0392272	0,0392272	0,039227212
2,00	0,07848	0,0783777	0,0783778	0,0783778	0,078377813
3,00	0,11772	0,1173746	0,1173758	0,1173758	0,11737579
4,00	0,15696	0,1561412	0,1561463	0,1561463	0,156146315
5,00	0,1962	0,1946008	0,1946164	0,1946163	0,194616313
6,00	0,23544	0,2326766	0,2327154	0,232715	0,232714999
7,00	0,27468	0,2702919	0,2703755	0,2703744	0,270374386
8,00	0,31392	0,3073698	0,3075326	0,3075297	0,307529737
9,00	0,35316	0,3438336	0,3441264	0,3441199	0,344119982
10,00	0,3924	0,3796066	0,3801013	0,3800878	0,380088063
11,00	0,43164	0,414612	0,4154067	0,4153806	0,415381234
12,00	0,47088	0,448773	0,4499976	0,4499499	0,449951297
13,00	0,51012	0,4820129	0,4838347	0,4837519	0,483754774
14,00	0,54936	0,5142549	0,5168854	0,5167475	0,516753019
15,00	0,5886	0,5454223	0,5491235	0,5489023	0,548912277
16,00	0,62784	0,5754382	0,5805302	0,5801862	0,580203681

17,00	0,66708	0,604226	0,6110936	0,6105737	0,610603199
18,00	0,70632	0,6317089	0,6408098	0,6400434	0,640091534
19,00	0,74556	0,6578101	0,6696826	0,6685775	0,668653982
20,00	0,7848	0,6824528	0,6977235	0,696162	0,696280253
21,00	0,82404	0,7055603	0,7249525	0,7227856	0,722964257
22,00	0,86328	0,7270559	0,7513973	0,7484396	0,748703871
23,00	0,90252	0,7468627	0,7770937	0,7731175	0,773500679
24,00	0,94176	0,764904	0,8020858	0,7968139	0,797359702
25,00	0,981	0,7811031	0,8264252	0,8195245	0,820289115
26,00	1,02024	0,7953832	0,8501713	0,8412449	0,842299963
27,00	1,05948	0,8076675	0,8733908	0,8619705	0,863405869
28,00	1,09872	0,8178793	0,8961574	0,8816953	0,883622754
29,00	1,13796	0,8259417	0,9185515	0,9004118	0,902968554
30,00	1,1772	0,8317782	0,9406594	0,9181098	0,921462954
31,00	1,21644	0,8353118	0,9625729	0,9347761	0,939127126
32,00	1,25568	0,8364658	0,9843886	0,9503936	0,955983488
33,00	1,29492	0,8351636	1,0062071	0,9649409	0,972055468
34,00	1,33416	0,8313282	1,0281322	0,9783915	0,987367289
35,00	1,3734	0,8248829	1,0502699	0,9907132	1,00194377
36,00	1,41264	0,8157511	1,0727273	1,001868	1,015810144
37,00	1,45188	0,8038559	1,0956117	1,0118107	1,028991886
38,00	1,49112	0,7891205	1,119029	1,0204892	1,041514564
39,00	1,53036	0,7714683	1,1430824	1,027844	1,053403703
40,00	1,5696	0,7508224	1,1678714	1,0338073	1,064684664
41,00	1,60884	0,727106	1,1934895	1,0383035	1,075382539
42,00	1,64808	0,7002425	1,2200231	1,0412484	1,085522054
43,00	1,68732	0,6701551	1,2475493	1,0425493	1,095127493
44,00	1,72656	0,636767	1,2761343	1,0421053	1,104222631
45,00	1,7658	0,6000014	1,3058311	1,0398073	1,112830671
46,00	1,80504	0,5597815	1,3366774	1,0355384	1,120974205
47,00	1,84428	0,5160308	1,3686934	1,0291747	1,128675168
48,00	1,88352	0,4686722	1,401879	1,020586	1,135954817
49,00	1,92276	0,4176292	1,4362117	1,0096374	1,142833704
50,00	1,962	0,3628249	1,4716437	0,9961904	1,149331661
51,00	2,00124	0,3041826	1,5080988	0,9801054	1,155467794
52,00	2,04048	0,2416255	1,5454698	0,9612441	1,161260478
53,00	2,07972	0,1750769	1,5836151	0,9394724	1,166727356

54,00	2,11896	0,1044599	1,6223554	0,9146641	1,171885347
55,00	2,1582	0,0296979	1,6614705	0,8867057	1,17675065
56,00	2,19744	-0,049286	1,7006953	0,8555009	1,181338762
57,00	2,23668	-0,132568	1,7397164	0,8209769	1,185664483
58,00	2,27592	-0,220226	1,7781681	0,7830908	1,189741941
59,00	2,31516	-0,312336	1,8156281	0,7418373	1,193584603
60,00	2,3544	-0,408975	1,8516134	0,6972567	1,197205294
61,00	2,39364	-0,510219	1,8855759	0,6494442	1,20061622
62,00	2,43288	-0,616146	1,9168978	0,5985593	1,203828989
63,00	2,47212	-0,726831	1,9448868	0,5448359	1,206854626
64,00	2,51136	-0,842353	1,968771	0,4885926	1,209703602
65,00	2,5506	-0,962788	1,987694	0,4302426	1,21238585
66,00	2,58984	-1,088212	2,0007095	0,3703032	1,214910789
67,00	2,62908	-1,218702	2,0067758	0,3094039	1,217287347
68,00	2,66832	-1,354335	2,0047498	0,2482928	1,219523978
69,00	2,70756	-1,495187	1,9933817	0,1878393	1,221628685
70,00	2,7468	-1,641336	1,9713085	0,1290334	1,223609042
71,00	2,78604	-1,792859	1,9370475	0,0729787	1,225472212
72,00	2,82528	-1,949831	1,8889905	0,020878	1,227224967
73,00	2,86452	-2,11233	1,8253964	-0,025991	1,228873705
74,00	2,90376	-2,280433	1,7443848	-0,06631	1,230424472
75,00	2,943	-2,454216	1,6439284	-0,098777	1,231882977
76,00	2,98224	-2,633756	1,5218463	-0,12217	1,233254608
77,00	3,02148	-2,81913	1,3757956	-0,135447	1,234544453
78,00	3,06072	-3,010414	1,2032646	-0,137867	1,23575731
79,00	3,09996	-3,207686	1,001564	-0,129145	1,236897706
80,00	3,1392	-3,411021	0,7678191	-0,10965	1,237969907
81,00	3,17844	-3,620498	0,4989611	-0,080657	1,238977939
82,00	3,21768	-3,836192	0,1917188	-0,044644	1,239925594
83,00	3,25692	-4,05818	-0,157391	-0,005668	1,240816446
84,00	3,29616	-4,28654	-0,552071	0,030182	1,241653863
85,00	3,3354	-4,521347	-0,996256	0,0542387	1,242441018
86,00	3,37464	-4,762679	-1,494119	0,054605	1,243180897
87,00	3,41388	-5,010613	-2,050083	0,0153714	1,243876315
88,00	3,45312	-5,265224	-2,668831	-0,084308	1,24452992
89,00	3,49236	-5,526591	-3,355316	-0,27131	1,245144207
90,00	3,5316	-5,794789	-4,114772	-0,579823	1,245721524

Où :

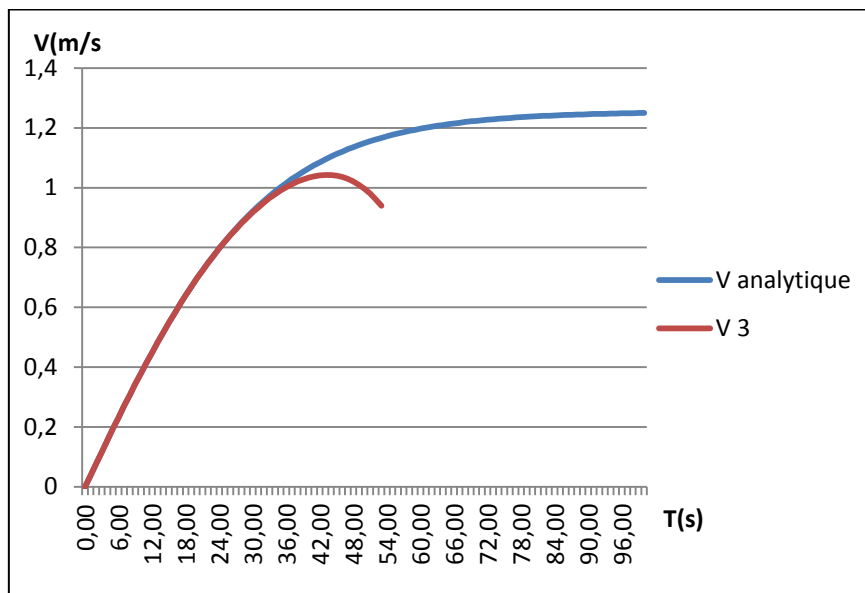
$v_1$  : Solution du 1<sup>er</sup> ordre équation (IV.67).

$v_2$  : Solution du 2<sup>eme</sup> ordre équation (IV.71).

$v_3$  : Solution du 3<sup>eme</sup> ordre équation (IV.73).

$v_{analytique}$  : Solution analytique exacte de la vitesse équation (IV.47).

Les résultats sont regroupés sur le graphique de la figure (IV.2) .Elle illustre la courbe de  $v_{analytique}$  et Solution au 3<sup>eme</sup> ordre en fonction de temps :



*Figure (IV. 2) : variation de la vitesse en fonction du temps.*

### IV.6.3. Discussion

On remarque que la solution aux perturbations diverge à partir d'au temps  $t = 49\%$  de temps  $T$ . au temps 39s au « crochet » se manifeste sur la solution montrant le rayon de convergence de la série au 3<sup>eme</sup> ordre. Une solution d'ordre supérieure rend son usage plus compliqué d'où compromis. Il apparait bien que pour ce genre de problème la solution perturbative n'est pas bien adaptée pour l'ordre 3.

### IV.7. Conclusion

Dans ce dernier chapitre, nous avons fait une application directe de la méthode des perturbations pour calculer la variation de la vitesse en fonction du temps. Les résultats analytiques du présent travail montrent que notre méthode n'est pas suffisamment précise pour notre cas étude.

En conclusion, la méthode de la perturbation consiste à étudier les contextes où il est possible de trouver une solution approchée à une équation en partant de la solution d'un problème plus simple. D'autres techniques sont alors explorer.



## Conclusion général

Dans ce travail nous nous sommes intéressés à l'étude de l'écoulement transitoire en charge, en l'occurrence le phénomène du coup de bélier, qui forme un danger dans la pratique. Une étude approfondie dans les conduites forcées apparaît comme nécessité importante et un test extrême à chaque installation hydraulique.

La modélisation mathématique de l'écoulement par l'application des lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement aboutit à un système d'équations aux dérivées partielles. Nous nous sommes également appuyés sur les équations de base hyperboliques établies par Saint-Venant, en l'occurrence l'équation de continuité et l'équation dynamique pour évaluer ces phénomènes transitoires. Donc en premier lieu, nous avons présenté les bases et fondements théoriques du problème du coup de bélier.

Deuxièmement nous nous sommes consacré à l'étude du problème de la fermeture brusque de la vanne au bout d'une adduction gravitaire par la méthode des caractéristiques. Cette méthode est certainement la plus populaire et actuellement la plus utilisée. Les avantages de la méthode des caractéristiques sont une simulation correcte d'onde à front raide, une illustration simple de sa propagation, une programmation présentant peu de difficultés et une efficacité en termes de calcul.

En dernier chapitre de notre travail, nous avons traité le problème de l'ouverture brusque de la vanne par une approche aux perturbatives dans le but de comparer les résultats analytiques exacts de la vitesse pour calculer le temps d'établissement du régime permanent avec le résultat analytique issu de la méthode des perturbations. Ces résultats sont ensuite représentés sous forme graphique et tabulé.

La méthode des perturbations consiste à étudier les contextes où il est possible de trouver une solution approchée à une équation en partant de la solution d'un problème plus simple.

Enfin, au terme de ce modeste travail, nous espérons avoir contribué à la résolution analytique d'un des problèmes de l'écoulement en charge tels que l'ouverture et la fermeture des vannes et ce avec prise en compte des termes non linéaires de frottement.

Il en a ainsi découlé que cette approche n'est pas adaptée à ce genre de question en raison des problèmes de convergence qu'elle manifeste.

Nous pensons que l'exploration d'autres techniques analytiques approchées peut potentiellement servir d'alternative à cette avarie.

## Bibliographies

- Abbott, M. "An introduction to the method of characteristics". Thames and Hudson, 1966.
- Allievi, L "Teoria del colpo d'ariete". Atti Collegio Ing. Arch,1913. Traduit vers l'anglais par HALMOSS M.E. "Theory of water hammer". Typography Riccardo Garroni, Rome, 1925.
- Amara, L. "Modélisation et simulation numérique des écoulements transitoires en charge par la méthode des volumes finis". Thèse de Magistère ,Université de Biskra, 186p,2013.
- Amara, L., Berreksi, A., Amireche, M. (2016). "Simulation numérique du phénomène transitoire du coup bélier" .édition universitaire européennes.
- Boillat, et De Souza. "Hydraulic system". Communication N°16. Laboratoire de Construction Hydraulique, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2004.
- Carlier, M. "Hydraulique générale et appliquée". Eyrolles, Paris, 1980.
- Chaudhry. "Applied hydraulic transients". Van Nostrand, 1979.
- Chaudhry, M. "Open Channels Flow". Deuxième édition, Springer, 2008.
- De Almeida et Koelle, E. "Fluid transients in pipe networks". Computational Mechanics Publications, Elsevier Applied Science, Glasgow, 1992.
- Frelin, M. "Coup de bélier". Technique de l'Ingénieur, Traité de génie mécanique, 2002
- Jaeger, C. "Théorie générale du coup de bélier. Application au calcul des conduites à caractéristiques multiples et des chambres d'équilibre".Thèse de Doctorat des sciences techniques, Ecole Polytechnique Fédérale (ETH) de Zurich, Dunod, Paris, 1933.
- James, S. "Analyse concepts et contextes". Volume 2, Fonctions de plusieurs variables, 2011
- Larock, B." Hydraulics of pipeline systems". CRS Press, 2000
- Meunier. "Les coups de bélier et la protection des réseaux d'eau sous pression". Ecole Nationale du Génie Rural des Eaux et des Forêts, 1980.
- Ouragh, Y. "Ecoulements forcés en hydraulique". Deuxième partie. Office des Publications Universitaires, OPU, Alger,169p. 1994
- Rich. "water hammer analysis by the Laplace-Mellin transformation". *ASME*,pp 362-372,1945.

Sobey. (2004). "Analytical solutions for unsteady pipe flow". Journal of Hydroinformatics, 06 (3), pp. 187-207

Wylie, et Streeter. "Fluid transients". MacGraw-Hill,1978.

Young, Il kim . "Advanced Numerical and Experimental Transient Modelling of Water and Gas Pipeline Flow Incorporating Distributed and Local Effects". Thèse de Doctorat de Philosophie (PhD), Université d'Adelaïde, Australie, 2008.

## Résumé

Les changements du régime permanent d'écoulement d'un fluide dans une conduite, entraînent souvent de brusques variations des pressions et donne naissance à ce qu'on appelle les écoulements transitoires en charge.

Dans ce travail, le problème de l'ouverture et la fermeture brusque de la vanne est traité par des modèles mathématique, et résolu analytiquement par la méthode des caractéristiques et la méthode des perturbations. Les résultats obtenus par la méthode des caractéristiques sont bon, par contre celle de la méthode des perturbations montrent que notre méthode n'est pas suffisamment précise pour notre cas étude.

## Abstract

The changes in the steady state of the flow of a fluid in a pipe often lead to sudden variations in pressure and give rise to what is called transient flow under load

In this work, the problem of the sudden opening and closing of the valve is treated by mathematical models, and solved analytically by the method of characteristics and the method of disturbances. The results obtained by the characteristics method are good, on the other hand that of the perturbation method show that our method is not sufficiently precise for our case study.

غالبًا ما تسبب التغييرات في الحالة الثابتة لتدفق السائل في الأنابيب تغييرات مفاجئة في الضغط وتؤدي إلى ما يسمى بالتدفقات في هذا العمل ، يتم معالجة مشكلة الفتح والإغلاق المفاجئ للصمام من خلال النماذج الرياضية ، ويتم حلها .العابرة تحت الحمل تحليليًا بطريقة الخصائص وطريقة الاضطرابات. النتائج التي تم الحصول عليها من خلال طريقة الخصائص جيدة ، من ناحية أخرى تظهر طريقة الاضطراب أن طريقتنا ليست دقيقة بما يكفي لدراسة الحالة الخاصة بنا