REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université de Jijel

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département d'automatique

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME MASTER EN AUTOMATIQUE

Option : Automatique & informatique industrielle

# Etude d'une loi de commande Robuste pour le pilotage d'un drone quadri-rotor

Dirigé par :
Me / M. OUAAR

Réalisé par :
MOHDEB leila

Année Universitaire : 2019/2020

# DEDICACE

*Je dédie ce mémoire à :*

*Mes chers parents, toute ma famille et tous qui ont donné une contribution de réalisation de ce mémoire.*

# REMRCIEMENT

*À la fin de ce travail, je remercie* ***Dieu*** *pour mon patience, volonté et santé à de épidémie de Corona Covid -19.*

*Ensuite, je remercie à notre encadreur, madame OUAAR Mounia et tous ceux qui m'ont aidé.*

ملخص :

في هذا العمل ، قدمت التكوينات الديناميكية الهوائية لنموذج ديناميكي غير خطي رباعي الدوار من ست درجات حرية (DOF 6) مشتق على أساس شكلية نيوتن أويلر. يتضمن الاشتقاق معادلات تحدد حركة الدوار الرباعي في ثلاثة أبعاد وتقريب قوى التشغيل من خلال نمذجة ديناميكيات المعاملات الهوائية للمحركات الكهربائية. النموذج المشتق المكون من أنظمة فرعية متعدية ودورانية غير مستقرة ديناميكيًا ، واستخدمت تقنية وضع الانزلاق. يتم تقييم أداء طريقة التحكم غير الخطية المستخدمة بواسطة المحاكاة حيث توضح النتائج الكفاءة من استراتيجية التحكم المقترحة للدوار الرباعي.

**الكلمات مفتاحيه:** وضع منزلق، دوار رباعي، ست درجات من الحرية (DDL 6) ، Lyapunov

## RESUME

Dans ce travail, j’ai présenté les configurations aérodynamiques d’un modèle dynamique non linéaire quadri-rotor à six degrés de liberté (6 DDL) est dérivé sur la base du formalisme de Newton- Euler. La dérivation comprend des équations déterminant le mouvement du quadri-rotor en trois dimensions et rapprochement des forces d'actionnement à travers la modélisation de la dynamique des coefficients aérodynamiques des moteurs électriques. Le modèle dérivé composé de sous-systèmes de translation et de rotation qui sont dynamiquement instable, et j’ai utilisé la technique par mode de glissement Les performances de méthode de contrôle non linéaire utilisés sont évaluées par des simulations où les résultats démontrent l'efficacité de la stratégie de contrôle proposée pour quadri-rotor.

**Mots Clés :** Mode de glissement, Quadri-rotor, Six degrés de liberté (6 DDL), Lyapunov.

**ABSTRACT:**

In this work, I presented the aerodynamic configurations of a six-degree-of-freedom (6 DOF) quadri-rotor nonlinear dynamic model derived based on the Newton-Euler formalism. The derivation includes equations determining the movement of the quadri-rotor in three dimensions and approximation of the actuating forces through the modeling of the dynamics of the aerodynamic coefficients of the electric motors. The derived model composed of translational and rotational subsystems which are dynamically unstable, and I used the slip mode technique The performance of the nonlinear control method used is evaluated by simulations where the results demonstrate the efficiency of the proposed control strategy for quad-rotor.

**Keywords:** Sliding mode, Quadri-rotor, Six degrees of freedom (6 DOF), Lyapunov.

# TABLE DE MATIERES



## Chapitre 1

## Généralités sur les Drone

# Chapitre 2

# Modélisation dynamique Quadri-rotor

# Chapitre 3

# Synthèse de loi de commande et simulation

# LISTE DE SYMBOLES

| | |
|---|---|
| $R_b$ | Unrepère fixe lié à la terre |
| $R_m$ | Un repère mobile |
| $P$ | Le poids |
| $m$ | La masse de système du quadri-rotor |
| $g$ | La gravité |
| $F_i$ | Les forces de poussée |
| $b$ | Le coefficient de portance |
| $w_i$ | Vitesses de rotors |
| $T_m$ | La traînée dans leshélices |
| $d$ | Le coefficient de drag |
| $F_t$ | La traînée selon les axes (x, y, z) |
| $K_{ft}$ | Le coefficient de traînée de translation |
| $V$ | La vitesse linéaire |
| $M_x$ | Moment due aux forces de poussée de la rotation autour de l'axe x |
| $l$ | La longueur du bras entre le rotor et le centre de gravité du quadri-rotor |
| $M_y$ | Moment due aux forces de poussée de la rotation autour de l'axe y |
| $K_{fa}$ | Le coefficient des frottements aérodynamiques |
| $\Omega$ | La vitesse angulaire |
| $M_{gh}$ | Moments dus aux Effet gyroscopique |
| $J_r$ | L'inertie des rotors |
| $J$ | L'inertie du système quadri-rotor |
| $V_x^b, V_y^b, V_z^b$ | Les vitesses linéaires dans le repère fixe |
| $V_x^m, V_y^m, V_z^m$ | Les vitesses linéaires dans le repère mobile |
| $\xi$ | La position du centre de masse du quadri-rotor |
| $S(\Omega)$ | La matrice antisymétrique |
| $F_f$ | La force totale générée par les quatre rotors |
| $M_z$ | Moment due aux forces de poussée de la rotation autour de l'axe z |
| $M_a$ | Moment résultant des frottements aérodynamiques |

| | |
|---|---|
| $F_t$ | La force de traînée totale selon les axes (x, y, z) |
| $K_{ftx}$,$K_{fty}$,$K_{ftz}$ | Les coefficients de traînée de translation |
| $F_g$ | Force de gravité |
| $M_f$ | Moment provoqué par les forces de poussée et de traînée. |
| $K_{fax}$,$K_{fay}$,$K_{faz}$ | Les coefficients des frottements aérodynamiques. |
| $\varphi$ | L'angle de roulis |
| $\theta$ | L'angle de tangage |
| $\psi$ | L'angle de Lacet |

# LISTE DES FIGURES

# LISTE DES TABLEAUX

# Introduction générale

Avions sans pilote ou bien robots téléguidés de vol sont des définitions d'un pilote aériens véhiculé (UAV), a été un sujet important au cours des dernières années en raison d'une large zone de possible applications, telles que la surveillance, de sauvetage, espionnage et divertissement. Le seul avantage important, il peut embarquer automatiquement sans humain au cours des missions complexes ou risquées.

De point de vue théorique, les quadri-rotors sont assez difficiles car dans la plupart des cas, ils sont des systèmes non linéaires, multivariées, fortement couplés et sous-actionnés [1], ce qui signifie que ces systèmes présentant de plus degrés de liberté que les entrées de commande (six degrés de liberté (6 DDL) avec 4 des actionneurs)

Le quadri-rotor est composé de quatre rotors, chaqu'un utilise une hélice à pas fixe qui est montée directement sur les rotors. Dans la conception de quadri-rotor, seulement les hélices qui sont en mouvement.

Les combinaisons possibles entre les sorties contrôlées peuvent être les mouvements des translations, l'angle de Lacet, l'angle de Roulis et l'angle de tangage.

Le mouvement de vol d'un quadri-rotor est le contrôle pour faire varier la vitesse de chaque hélice, de sorte que la stabilisation en attitude peut être obtenue en contrôlant exactement la vitesse de chaque moteur [2].

Ce travail est divisé en trois parties et organisé de la manière suivante :

Le premier chapitre : Dans le premier chapitre j'ai présenté les drones en générales ensuite le quadri-rotor en particulier.

Le deuxième chapitre: Le deuxième chapitre est consacré à la modélisation et l'étude dynamique du quadri-rotor.

Dans le troisième chapitre : Une présentation de loi de commande par mode glissant est aussi présentée afin d'assurer la robuste de notre système, et les résultats de la commande par mode glissant ont été notées a la fin du chapitre.

Et enfin une conclusion générale avec perspectives pour conclure ce travail.

## 1.1 Introduction :

Un UAV (Unmanned Aerial Vehicle) est un aéronef inhabité qui utilise les forces aérodynamiques pour produire un vol vertical. Il peut être piloté à distance, autonome ou semi autonome [1]. Il est susceptible d'emporter différentes charges utiles, le rendant capable d'effectuer des tâches spécifiques, pendant une durée de vol qui peut varier en fonction de ses capacités. Son utilisation a d'abord été connue dans les applications militaires, comme la surveillance et la reconnaissance et comme plateforme de désignation de cible ou comme arme. Puis, plusieurs applications civiles sont devenues concurrentes, notamment dans l'observation des phénomènes naturels (Avalanches, volcans…), la pulvérisation des pesticides sur les surfaces agricoles, la surveillance de l'environnement (exemple : mesures de la pollution) et des réseaux routiers, la maintenance des infrastructures…etc.

Aujourd'hui, plusieurs modèles d'UAVs sont disponibles suivant leurs domaines d'application et la mission accordée. Parmi ces modèles, il y a les UAVs à ailes fixes, les UAVs à ailes battantes et les aéronefs à décollage et atterrissage vertical (à voilures tournantes) VTOL : Vertical Take Off and Landing, sur lesquelles nous focalisons notre intérêt [3] [4].

Les UAVs à décollage et atterrissage vertical ont plusieurs avantages par rapport aux aéronefs à ailes fixes. Ils sont capables d'effectuer un vol stationnaire à basse vitesse et à faible altitude, ce qui est très utile dans les applications de surveillance et de poursuite et permet de fournir des informations détaillées sur les secteurs surveillés [1] [2] [5].

## 1.2 Les premiers drones opérationnels :

La conception des quadri-rotors a évolué dans deux grandes générations. La première génération était conçue pour transporter un ou plusieurs passagers. Ces véhicules étaient parmi les premiers véhicules aériens à décollage et atterrissage vertical réussis.
Caractérisés par leur grande taille et a souffert de mauvaises performances (encombrement, qualité des moteurs, matériau de conception,..).

Le premier quadri-rotor était le Gyroplane n°1 « Breguet-Richet », conçu par les frères scientifiques français Louis et Jaque Breguet en collaboration avec le professeur Charles Richet en 1907 (figure1.1) [5] [7].

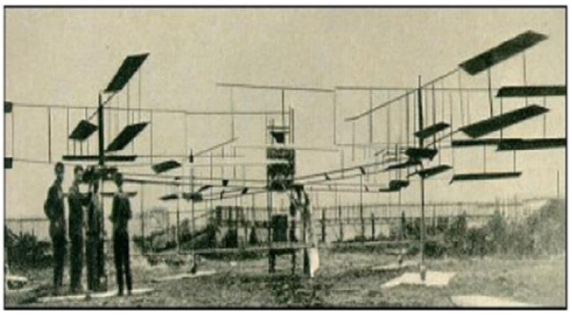


Figure (1.1): Bréguet Richet Gyroplane 1907

Le décollage du "Gyroplane n° 1" a eu lieu le 24 août 1907 [7], [5], [6]. Le "Gyroplane" de 578kg réussit tout de même à décoller de 60 centimètres au-dessus du sol, son vol fut cependant si instable que quatre hommes furent nécessaires pour le tenir. Néanmoins, l'académie française des sciences accepta de valoriser cet essai comme le premier décollage motorisé à la verticale d'un homme [7], [5].

Le "Gyroplane n° 1" était équipé d'un moteur Antoinette de 45 CV, entraînant quatre rotors de diamètre 8mètres montés par paires, entraînés en alternance. Chaque rotor était constitué de quatre ailes bi-planes. Le pilote fut placé au milieu de cette construction, en-dessous du moteur [7].

Un an plus tard, un autre quadri-rotor « Gyroplane n°2 » a été construit. Le Gyroplane n°2 est équipé d'un moteur Renault, plus puissant, qui atteignit 55 CV. Malheureusement, l'aérodyne fut détruit lors d'un atterrissage un peu brusque. Le quadri-rotor fut réparé mais, la suite des essais des frères Breguet ne déboucha sur aucun résultat significatif [8].

En 1920, Etienne Oemichen a commencé ses expériences dans la conception des aéronefs à voilures tournantes. Six modèles ont été conçus par ce jeune ingénieur de la compagnie Peugeot. Parmi lesquels nous constatons un grand quadri-rotor de 800kg construit en 1922, avec quatre rotors de diamètre (2 x 7.60 mètres + 2 x 6.40 mètres) et huit hélices tournées par un seul moteur Gnome Rhône de 135kw (Figure 1.2) [5]. Ce quadri-rotor a montré un degré considérable de stabilité et de contrôlabilité. En 1924, Oemichen a fait un premier vol réussi de 360 mètres et plus de mille tests de vol ont été effectué au cours des années 20.

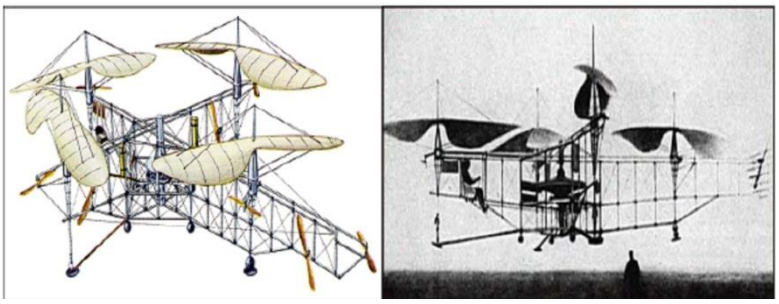


Figure (1.2) : Oemichen 1920

Une autre plateforme à vol vertical été construit pour le service aérien de l'armée américaine à Dayton, Ohio en 1921 par les ingénieurs George de Bothezat et Ivan Jerome [9]. C'était une structure en croix de 1678Kg portant six hélices de diamètre 8.1 mètres sur chaque axe de longueur 9m.

Plus de 100 essais de vols ont été exécutés sur ce grand quadri-rotor, mais la commande en vol était très difficile et le prototype n'a pas répondu aux exigences d'exécution de l'armée américaine.

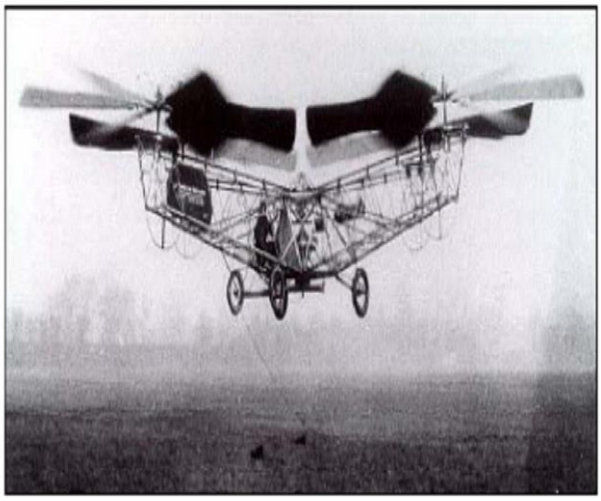


Figure (1.3) : Le quadri-rotor de Bothezat1922

Dans les années 50, Amityville (New York), Convertawings a construit un quadri-rotor disposant de rotors de diamètre 5.92 mètres et des ailes pour générer une portance vers l'avant. Deux moteurs - Continental - de 90CV ont été utilisés et le véhicule a été commandé en changeant la poussée fournie par chaque rotor. Le quadri-rotor de Convertawings a été piloté avec succès, mais la production a été arrêtée en raison d'un manque d'intérêt commercial pour cet avion [5].

Figure (1.4) : Convertawings Model A 1956

La configuration de quadri-rotor n'a pas obtenu beaucoup d'attention jusqu'au début des années 80. Depuis, plusieurs chercheurs ont commencé à s'intéresser à la configuration 'Quadri-rotor' dans des applications mini drones à cause de sa simplicité, sa capacité à supporter une charge utile accrue et son coût réduit.

## 1.3 Classification des drones :

### 1.3.1 Principales catégories :

Il n'existe pas une façon unique de classer les drones car ils peuvent être classés selon plusieurs critères : autonomie, portée, altitude, mission, système de contrôle, etc.

Cependant, pour des raisons de sécurité dans l'espace aérien national, plusieurs pays se sont penchés sur la classification de ces drones.

La famille des drones est classifiée par taille comme suit :

- les mini et micros drones
- les drones tactiques, lents ou rapides, (à voilure fixe ou tournante) appelés TUAV (TacticalUnmanned Air Vehicle)
- les drones de combat, encore appelés UCAV (Unmanned Combat Air Vehicle)
- Les drones stratégiques à « haute endurance » :

✓ les drones volant à moyenne altitude et de grande autonomie appelés MALE (Medium Altitude Long Endurance)

- ✓ les drones volant à haute altitude et de grande autonomie appelés HALE (High Altitude Long Endurance)

### 1.3.2 Les mini et micros drones :

- Le mini drone est parfait pour débuter dans l'apprentissage du pilotage d'un véritable drone Petit, léger, facilement transportable et pratiquement incassable, le mini-drone est le must du must pour s'entraîner dans des conditions réelles de vol ! [10].

- Les micro-drones, dont les dimensions sont inférieures à 15 cm, pèsent environ 50 grammes, pour une vitesse de croisière de l'ordre de 50 Km/h, une autonomie d'une vingtaine de minutes et un rayon d'action d'une dizaine de kilomètres.


Figure (1.5) : La forme de mini drone et micro drone

### 1.3.3 Les drones tactiques :

Ayant un rayon d'action jusqu'à plus de cent kilomètres, leur poids peut largement dépasser la tonne. Ils nécessitent une empreinte logistique importante et parfois des installations aménagées. Leur endurance peut atteindre 8 heures et leurs charges utiles multifonctionnelles.

Figure (1.6) : La forme de drone tactique à voilure fixe ou tournante

L'emploi de drones à hautes performances, spécifiquement conçus pour le combat, est envisagé au sein de véritables systèmes de combat mixtes, aux côtés des aéronefs de combat pilotés.

### 1.3.4 Les drones stratégiques à « haute endurance » :

#### a) Les drones MALE (Moyenne Altitude Longue Endurance) :

L'altitude de vol est, pour cette catégorie, comprise entre 5000 et 12000 mètres, ce qui permet de parcourir jusqu'à 1000 km, à des vitesses relativement faibles, de 220 à 360 km/h (induites par des moteurs à pistons ou des turbopropulseurs). La masse peut cette fois atteindre 3,5 tonnes, et l'envergure est généralement comprise entre 10 et 20 mètres).

#### b) Les drones HALE (Haute Altitude Longue Endurance) :

On atteint dans cette catégorie les dimensions d'un avion civil (Airbus A320 par exemple) pour des autonomies de plusieurs milliers de kilomètres (10 000 km et plus) parcourues en volant largement au-dessus des trafics aériens courants, tant civils que militaires (jusqu'à 20000 m d'altitude). Les moteurs sont cette fois des turboréacteurs.

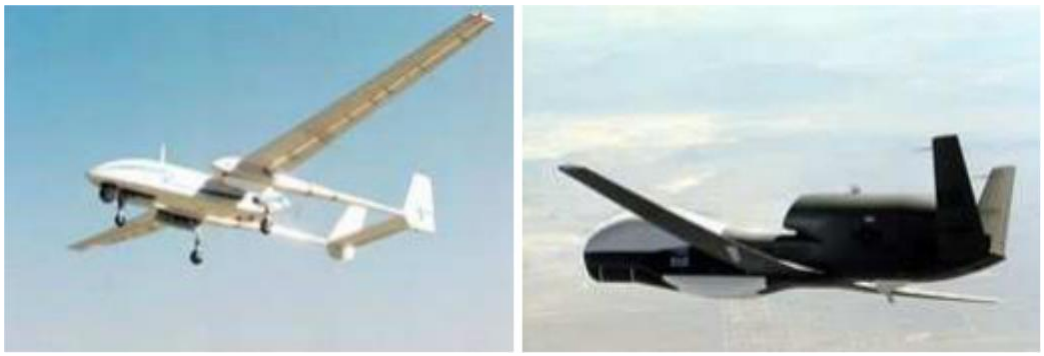


Figure (1.7) : La forme des drones MALE et HALE

Dans cette étude on s'intéresse à un seul type des drones appelé le quadri-rotor

## 1.4 Les Quadri-rotors :

Le Quadri-rotor est un système sous actionne (le nombre d'entrées de commande est inférieur au nombre de degrés de liberté), ce qui induit une grande difficulté dans la conception de la commande

L'apparition des quadri-rotors remonte à janvier 1921. Et suite à un contrat engagé par l'armée américaine, C'est l'américain d'origine russe George de Bothezat qui fut le premier à faire voler un appareil quadri-rotor. Il réussit son premier vol en octobre 1922 et réalise un vol qui a duré une minute 42s à 1,8 m du sol le 18 décembre 1922.Le 19 janvier 1923, l'appareil emporte deux personnes à 1,2 m du sol. De nombreux vols furent effectués en 1923 mais l'appareil ne s'élèvera pas au-dessus de 5 mètres et l'armée mettra fin au contrat.

Plus tard en1956, un quadri-rotor appelé, en anglais, "Convertawings Model A" a été conçu à la fois pour l'usage militaire et civil.

De nos jours, il y a un projet appelé " Bell Boeing Quad Tilt rotor", développé par Bell et Boeing en tant que candidat au programme de l'armée américaine "Joint Heavy Lift programme", ayant quatre rotors il devrait être capable d'emporter 25 tonnes à 450 km/h sur une distance de 460 km, et atterrir verticalement comme un hélicoptère.

Le tableau ci-dessous résume les projets les plus réputés concernant la conception des quadri-rotor :

| Projet | Université | Plateforme |
|---|---|---|
| Le X4-Flyer [Pounds, 2004] | Université National Australienne |  |
| Le X4-Flyer [Guenard, 2005] | CEA France |  |
| Le Quadri-rotor du projet Quentin | Ecole Pour l'Informatique et Techniques Avancées France |  |
| Le Quadrotor Scott D. Hanford 2005 | Université de Pennsylvanie Australie |  |

Tableau (1.1) : Quelques projets de quadri-rotors

## 1.5 Les avantages et les inconvénients des quadri-rotor :

Parmi les avantages du quadri-rotor, on peut citer : la rapidité de livraison en cas d'urgence, cette livraison extrême rapide serait un énorme avantage pour un client (que ce soit pour le travail, pour un loisir…)

De plus, le drone aérien est une machine aéronautique beaucoup moins complexe que les avions ou les hélicoptères. Pour faire avancer un avion, les ailes doivent être contrôlées par un pilote, et pour contrôler un hélicoptère il faut changer l'inclinaison des hélices ou la vitesse de ces dernières. Alors que les drones regroupent les meilleures parties des avions et des hélicoptères. En effet, il a plusieurs moteurs et d'hélices qui permettent au drone de se déplacer juste en changeant la vitesse de la rotation des moteurs. Le drone est aussi composé d'une partie mécanique simple qui fait de lui un objet avec une simplicité de construction.

Enfin, notons aussi l'avantage écologique. En effet, le drone distributeur utilise l'électricité pour avancer. [11]

Parmi les inconvénients du quadri-rotor on peut citer : l'autonomie du drone est très faible. En effet, le drone ne peut se déplacer que pendant 16 kilomètres avant qu'il n'est besoin d'être rechargé, aussi la saturation d'espace dans l'air. Imaginons que tous les compagnies utilisent ce concept, l'espace aérien serait donc saturé.

## 1.6 Utilisation d'un drone quadri-rotor :

Par ses capacités à rester en vol stationnaire ou à évoluer selon des trajectoires complexes, le drone multi-rotors devient un outil privilégié utilisé par :[12]

**1.6.1 Les réalisateurs et photographes, les journalistes** pour des prises de vue aériennes inédites (photographie d'art, documentaires, films)

**1.6.2 Les services de secours** (police, sapeurs-pompiers et gendarmerie) afin de prendre des informations stratégiques sur des interventions en hauteur et délicates (exemples : feu de toiture, victime d'avalanche, etc...)

**1.6.3 Les topographes, géomètres, archéologues**, et tous les corps de métiers nécessitant une prise de vue en hauteur sur un site.

Figure (1.8) : le Quadri-rotor

## 1.7 La commande des quadri-rotors :

Les travaux de recherche effectués, par différents groupes de recherche et universités dans le monde, ont montré que la configuration du quadri-rotor est meilleure que d'autres configurations d'hélicoptère pour les applications UAV.

Plusieurs architectures et techniques de contrôle ont été développées sur cette plateforme et un simple contrôleur PD peut lui fournir une stabilité suffisante [1] [3].

Un grand nombre de travaux de recherche ont été effectués sur le développement des techniques de commande sur les quadri-rotors. Nous présentons ici les techniques utilisées dans la littérature :

- ✓ Commande utilisant le théorème de Lyapunov : Cette technique de commande a permet de démontrer que le quadri-rotor est asymptotiquement stable sous certaines condition ([13], [14],[15]).
- ✓ Le contrôleur PID : cette commande classique n'a aucune exigence sur les paramètres du modèle commandé et elle est très simple à mettre en oeuvre [16].
- ✓ Le contrôleur PD² : la puissance de ce contrôleur réside dans sa propriété de la convergence exponentielle, essentiellement due à la compensation des moments de Coriolis et des moments gyroscopiques [7] [17].
- ✓ La commande adaptative : les techniques de commande adaptative offrent de bonnes performances, notamment avec les dynamiques non modélisables et l'incertitude des paramètres [18].
- ✓ La commande LQR : cette loi de commande a donné de bons résultats dans la stabilisation d'attitude du quadri-rotor OS4 dans les travaux de S .Bouabdallah et André Noth. Ces résultats ont été comparés avec ceux obtenus par le contrôleur PID [16].

- ✓ L'approche Backstepping : de meilleurs résultats ont été obtenus avec cette technique de commande non linéaire, la convergence des états internes du quadri-rotor a été garantie quelque soit les états initiaux. Cette technique de commande a été renforcée par la suite dans les travaux de [13] par l'ajout de l'action intégrale. Cette approche a été validée sur OS4 dans diverses expériences de vol.
- ✓ La commande « Dynamic Feedback » : cette technique a été appliquée dans quelques projets sur le quadri-rotor, l'objectif est de transformer le système en boucle fermée en sous-systèmes linéaires, contrôlables et découplés [18], [19].
- ✓ La Commande par Vision : cette technique est basée sur la commande visuelle utilisant soit une caméra miniature embarquée à bord du quadri-rotor, ou une caméra externe [20]. D'autres techniques de commande en été implémentés pour la commande des quadri-rotor parmi lesquelles on peut citer : Feedback Linearization, la logique floue, les réseaux de neurones [21], et l'apprentissage par renforcement dans la stabilisation et la navigation du quadri-rotor [18].

## 1.8 Conclusion :

Comme conclusion à ce chapitre, nous constatons que la configuration « Quadri-rotor » adopté dans ce travail, a connu un grand intérêt dans cette dernière décennie, que ce soit à l'échelle scientifique au niveau des universités et les unités de recherche ou à l'échelle commercial. Cela est essentiellement dû aux avancées croissantes des technologies d'instrumentation et des calculateurs et aux avantages qu'offre le Quadri-rotor par rapport aux autres modèles d'UAVs.

Le chapitre suivant est consacré à la présentation du modèle mathématique représentant le comportement dynamique est détaillé, permettant l'élaboration de futurs algorithmes de commande, en mettant l'accent sur le drone Quadri-rotor.

## 2.1 Introduction :

La dynamique des engins volants à voilure tournante est particulièrement difficile à appréhender, tant les effets aérodynamiques et les couplages 3D sont nombreux et complexes .Dans ce chapitre, nous allons développer un modèle mathématique permettant de décrire les mouvements d'un quadri-rotor.

Nous présenterons d'abord la modélisation dynamique d'un quadri-rotor. Sachant que cette modélisation peut être élaborée de plusieurs façons, nous l'exprimerons avec le formalisme de Newton-Euler qui sera la base de notre modèle dynamique auquel nous ajouterons les expressions des forces aérodynamiques et les effets de la gravité en plus des couples produits par les quatre rotors [13], [14], [22]. Le modèle dynamique de quadri-rotor standard sera décrit complètement.

Dans ce chapitre, en se basant sur le modèle vectoriel présenté dans [13], [23], nous nous intéressons principalement à la modélisation dynamique du quadri-rotor tenant en compte les différents paramètres qui peuvent affecter la dynamique d'une structure volante tel que les frottements dus aux moments aérodynamique, les forces de traînées suivant les axes (X, Y, Z) et les effets gyroscopique. Et par conséquent cela nous a permis de mettre le système sous une nouvelle représentation d'état plus complète et plus réaliste.

## 2.2 Modèle dynamique du quadri-rotor :

La modélisation des robots volant est une tâche délicate puisque la dynamique du système est fortement non linéaire et pleinement couplée. Afin de pouvoir comprendre au mieux le modèle dynamique développé ci-dessous, voilà les différentes hypothèses de travail:

- ✓ La structure du quadri-rotor est supposée rigide et symétrique, ce qui induit que la matrice d'inertie sera supposée diagonale,
- ✓ Les hélices sont supposées rigides pour pouvoir négliger l'effet de leur déformation lors de la rotation.
- ✓ Le centre de masse et l'origine du repère lié à la structure coïncident.
- ✓ Les forces de portance et de traînée sont proportionnelles aux carrés de la vitesse de rotation des rotors, ce qui est une approximation très proche du comportement aérodynamique. [15], [16], [24].

Pour évaluer le modèle mathématique du quadri-rotor on utilise deux repères, un repère fixe lié à la terre $R_b$ et un autre mobile $R_m$. Le passage entre le repère mobile et le repère fixe est donné par une matrice qui contient l'orientation et la position de repère mobile par rapport au repère fixe, voir la figure suivante :

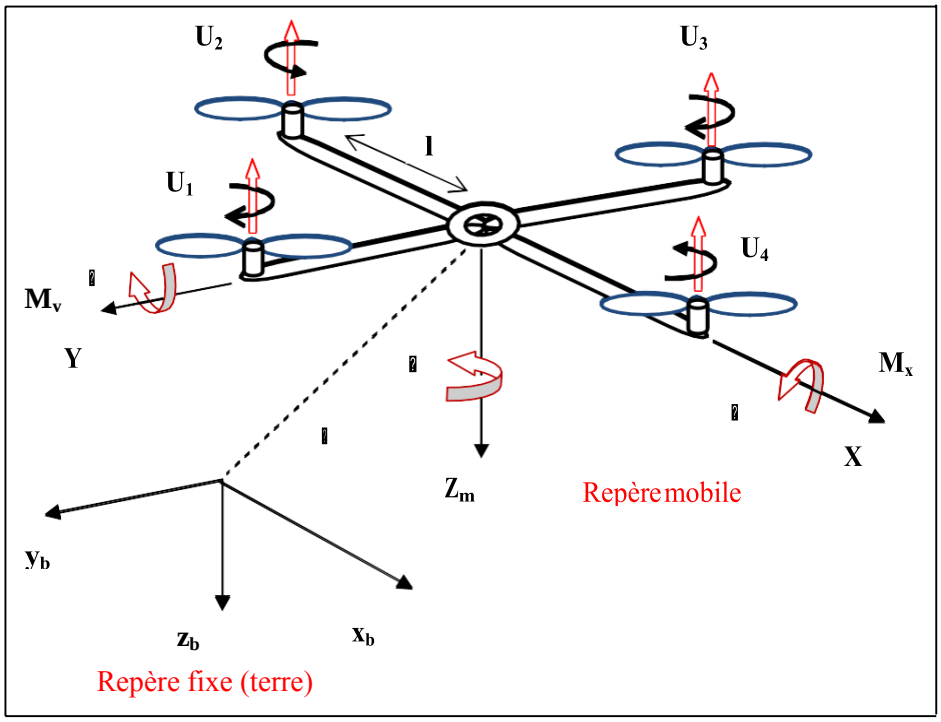



Figure (2.1) : Représentation graphique de mouvement du quadri-rotor.

## 2.3 Mouvements possibles :

Il existe quatre mouvements possibles pour un quadri-rotor : la poussée, le lacet, le tangage et le roulis. Le mouvement de correspond à la montée ou à la descente de l'appareil. Pour faire s'élever le quadri-rotor, il suffit d'augmenter la vitesse des quatre moteurs et pour le faire redescendre, il faut réduire cette dernière.

## 2.4 Représentation graphique des mouvements de quadri-rotor :

Le quadri-rotor se compose de quatre rotors, chaqu'un utilise une hélice à pas fixe qui monte directement sur les rotors. Dans la conception de quadri-rotor, seulement les hélices sont en mouvement. Les combinaisons possibles entre les sorties contrôlées peuvent être les mouvements des translations, l'angle de Lacet, l'angle de Roulis ou l'angle de tangage, ces mouvement illustrés dans le tableau suivant :

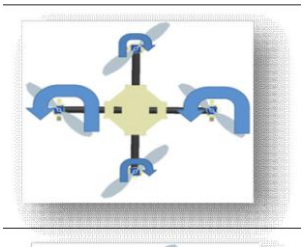
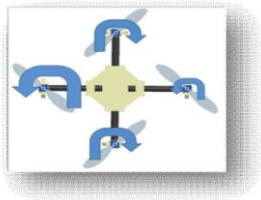
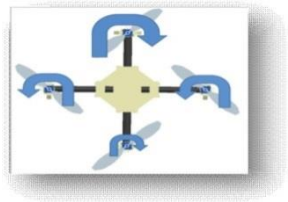
| | |
|---|---|
|  | Le lacet s'obtient en augmentant la vitesse des moteurs avant et arrière tout en réduisant la vitesse des moteurs latéraux |
|  | Le tangage est obtenu par une différence de vitesse de rotation des rotors avant et arrière |
|  | Le roulis est obtenu de manière similaire avec la différence de vitesse des moteurs latéraux |

Tableau (2.1) : Représentation graphique des mouvements de quadri-rotor

## 2.5 Mode de vol :

En se basent sur les mouvements possibles, le drone peut effectuer trois modes de vol

- ✓ vol vertical.
- ✓ vol stationnaire.
- ✓ vol de translation.

### a) Vol vertical :

Dans le vol vertical, la résultante aérodynamique et le poids totale sont deux forces ayants la même direction mais de sens opposé [17]. L'hélicoptère peut monter ou descendre, suivant l'effet aérodynamique soit supérieur ou inférieur au poids de l'appareil.

### b) Vol stationnaire :

Quand la force de Portance, et celle de pesanteur sont égales et opposées, l'hélicoptère reste immobile. On parle de vol stationnaire.

### c) Vol de translation :

Le vol de translation correspond à la navigation de l'hélicoptère sur un plan horizontal. Il est assuré en se basant sur les mouvements d'inclinaison tangage, et roulis.

## 2.6 Angles d'Euler :

Prendre en considération que deux systèmes de coordonnées sont nécessaires de définir l'état instantané de la plate-forme à tout moment. Tout d'abord, un corps système fixe avec l'axe des abscisses le long de l'avant de l'embarcation, l'axe des y de la droite, et le bas de l'axe z. Deuxièmement, une terre fixé système inertiel utilisant le Convention du Nord -Est vers le bas typique d'applications de l'aviation. La rotation d'une trame par rapport à l'autre peut être décrite en utilisant une matrice de rotation, composé de 3 matrices indépendants décrivant la rotation de l'artisanat sur chaque des axes de châssis à la terre. Ces matrices de rotation sont données dans les équations suivantes : [16], [18]

## 2.7. Les Matrices de rotations élémentaires :

Pour décrire la position et l'orientation du quad-copter, nous avons besoin de deux repères. Le premier est nommé le repère inertiel. Il s'agit d'un référentiel orthogonal fixe de type galiléen. La définition d'un deuxième repère est nécessaire pour décrire l'orientation du quadri-rotor. Celui-ci est attaché au châssis du quadri-rotor et se déplace donc avec celui-ci. Il est dénommé le repère mobile

Au début le repère mobile coïncide avec le repère fixe, après le repère mobile fait un mouvement de rotation autour de l'axe x d'un angle de roulis$(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2})$, suivi d'une rotation autour de l'axe y d'un angle de tangage$(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$, suivi d'une rotation autour de l'axe z d'angle de lacet$(-\pi < \psi < \pi)$

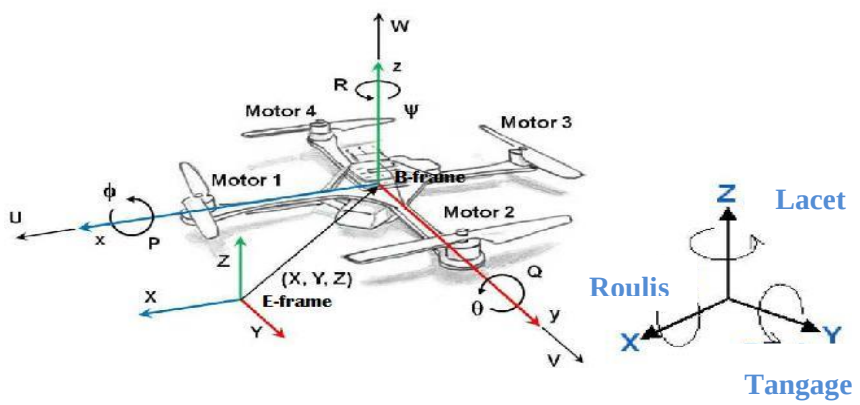



Figure (2.2) : Sens de rotation des hélices d'un quadri-rotor

### a) Rotation d'axe *x* :

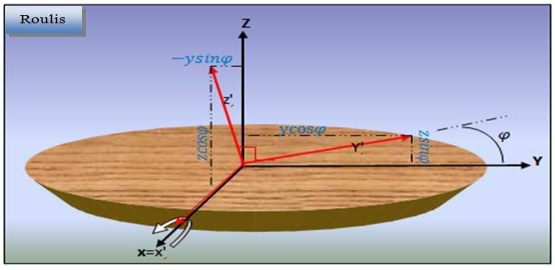



Figure (2.3): commande de roulis

$$\begin{cases} X' = X \\ Y' = \cos\varphi + Z\sin\varphi \\ Z' = -Y\sin\varphi + Z\cos\varphi \end{cases} \tag{2.1}$$

La forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\cos\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

La matrice de rotation selon X par l'angle $\varphi$ est donnée par :

$$R(X,\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\cos\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

### b) Rotation d'axe y :

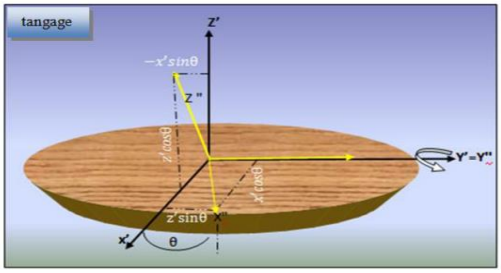



Figure (2.4) : commande de tangage

$$\begin{cases} X'' = X'\cos\theta + Z'\sin\theta \\ Y'' = Y' \\ Z'' = -X'\sin\theta + Z'\cos\theta \end{cases} \tag{2.4}$$

La forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} X'' \\ Y'' \\ Z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

La matrice de rotation selon X par l'angle $\varphi$ est donnée par :

$$R(Y', \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

**c) <u>Rotation d'axe z :</u>**

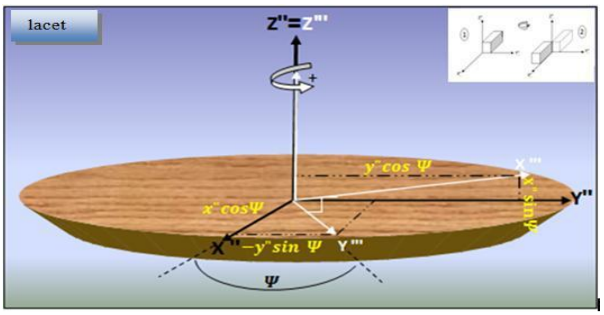



Figure (2.5) : commande de lacet

$$\begin{cases} X''' = X''\cos\Psi - Y''\sin\Psi \\ Y''' = X''\sin\Psi - Y''\cos\Psi \\ Z''' = Z'' \end{cases} \tag{2.7}$$

La forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} X'' \\ Y'' \\ Z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Psi & -\sin\Psi & 0 \\ \sin\Psi & -\cos\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

A la fin obtient :

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\Psi & -\sin\Psi\cos\varphi + \cos\varphi\sin\varphi\sin\theta & \sin\Psi\sin\varphi + \cos\Psi\sin\theta\cos\varphi \\ \sin\Psi\cos\theta & \cos\Psi\cos\varphi + \sin\Psi\sin\varphi\sin\theta & -\cos\Psi\sin\varphi + \sin\Psi\cos\varphi\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

L'utilisation de ces taux d'Euler est, cependant, pas sans inconvénients. Bien qu'il est facile de voir immédiatement la demande physique de ces angles d'Euler par

rotations visibles de l'artisanat, leur utilisation se ouvre le modèle de simulation (et le système physique) à un phénomène connu sous le nom blocage de cardan. Cardan serrure se produit quand un engin capable de rotation 3D tourne de telle sorte que deux anciennement exclusifs axes de rotation coïncident dans le même plan. Ce phénomène est illustré sur la figure (2.6).

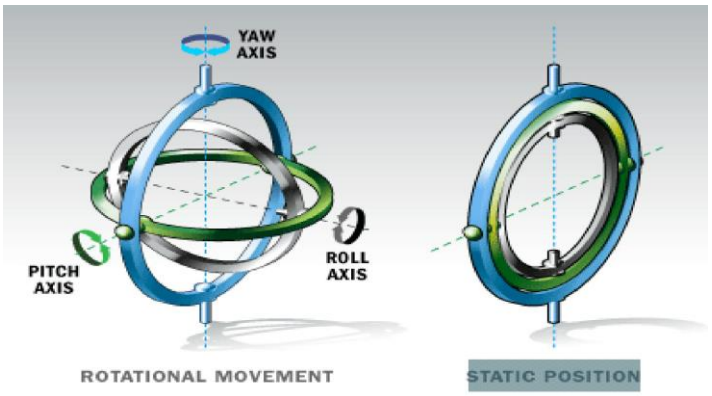



Figure (2.6) : Phénomène (blocage de cardan)

## 2.8 Vitesses de translation :

Les vitesses linéaires $v_x^b, v_y^b, v_z^b$ dans le repère fixe en fonction des vitesses linéaires $v_x^m v_y^m$, $v_z^m$ dans le repère mobile sont données par :

$$V = \begin{bmatrix} v_x^b \\ v_y^b \\ v_z^b \end{bmatrix} = R \times \begin{bmatrix} v_x^m \\ v_y^m \\ v_z^m \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

## 2.9 Vitesses de rotation :

Les vitesses de rotations $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ dans le repère fixe sont exprimées en fonction des vitesses de rotations $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$ dans le repère mobile :

Est donnée sous forme :

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi\cos\theta \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi\cos\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

Et obtenir d'après :

$$\Omega = \begin{bmatrix}\Omega_x\\ \Omega_y\\ \Omega_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\varphi\\ 0\\ 0\end{bmatrix} + Rot_x(\varphi)^{-1}\begin{bmatrix}0\\ \theta\\ 0\end{bmatrix} + (Rot_y(\theta)Rot_x(\varphi))^{-1}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \psi\end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$\Omega = [\dot{\theta} \;\; \dot{\varphi} \;\; \dot{\psi} \;\; ]^T$

## 2.10 Effets physiques agissants sur le Quadri-rotor :

**2.10.1 Les forces :** Les forces agissant sur le système sont :

- ✓ ***Le poids du quadri-rotor*** : il est donné par

$$P = m \times g \quad (2.13)$$

Ou m : la masse totale et g la gravité.

- ✓ ***Les forces de poussée :*** qui sont des forces provoquées par la rotation des moteurs, elles sont perpendiculaires sur le plan des hélices. Ces forces sont proportionnelles au carrée de la vitesse de rotation des moteurs :

$$F_i = b \times \omega^2 \quad (2.14)$$

Avec $i$= 1,…….,4 ; $b$ est le coefficient de portance, il dépend de la forme et nombre des pales et la densité de l'air.

- ✓ ***Les forces traînée :***

La force de trainée est le couplage entre une force de pression et la force de frottement visqueux dans ce cas, on a deux forces de trainée agissante sur le système, la trainée dans les hélices et la trainée selon les axes $(x, y, z)$

La trainée dans les hélices agit sur les pales, elle est proportionnelle à la densité de l'air, à la forme des pales et au carré de la vitesse de rotation de l'hélice, elle est donnée par la relation suivante :

$$T_h = d \times \omega^2 \quad (2.15)$$

Tel que :

$d$ : Est le coefficient de trainée, il dépend de la fabrication de l'hélice.

La trainée selon les axes $(x, y, z)$ est due au mouvement du corps du quadri-rotor :

$$F_t = K_{ft} \times V \quad (2.16)$$

Avec :
$K_{ft}$ : Est le coefficient de trainée de translation ; $V$ est la vitesse linéaire.

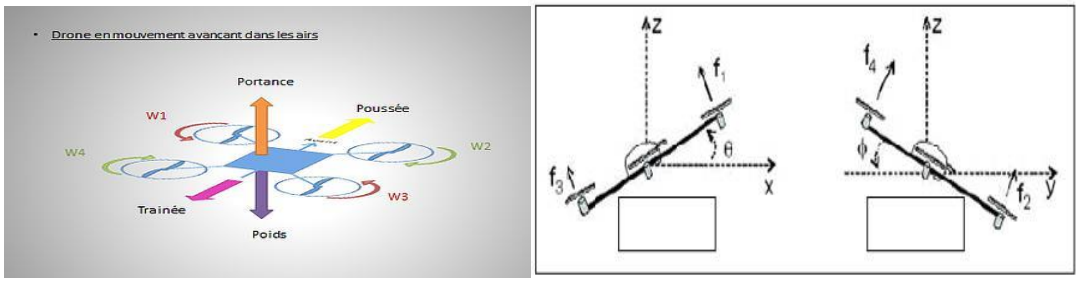



Figure (2.7): Forces exercées sur un drone

### 2.10.2 Les moments :

Il y a plusieurs moments agissants sur un quadri-rotor, qui sont dus aux forces de poussée et de traînée et aux effets gyroscopiques.

- ✓ ***Moments dus aux forces de poussée :***

La rotation autour de l'axe x : due au moment créé par la différence entre les forces de portance des rotors droit et gauche, ce moment est donné par la relation suivante:

$$Mx = l(F_4 - F_2) = lb(\omega^2{}_4 - \omega^2{}_2) \quad (2.17)$$

Avec :
$l$ :Est la longueur du bras entre le rotor et le centre de gravité du quadri-rotor.

$$My = l(F_3 - F_1) = lb(\omega^2{}_3 - \omega^2{}_1) \quad (2.18)$$

- ✓ ***Moments dus aux forces de traînée :***

La rotation autour de l'axe z : due à un couple réactif provoqué par les couples de traînée dans chaque hélice, ce moment est donné par la relation suivante :

$$M_z = d(\omega^2{}_1 - \omega^2{}_2 + \omega^2{}_3 - \omega^2{}_4) \quad (2.19)$$

Moment résultant des frottements aérodynamiques, il est donné par :

$$M_a = K_{fa}\,\Omega^2 \quad (2.20)$$

Avec :

$K_{fa}$ : le coefficient des frottements aérodynamique ;

$\Omega$ : La vitesse angulaire.

### 2.10.3 Les effets gyroscopiques :

Tout objet en rotation autour d'un axe est soumis à l'effet gyroscopique. C'est la capacité qu'a cet objet à conserver son axe de rotation ou, de façon plus précise, à conserver son moment angulaire.

Dans notre cas il y a deux moments gyroscopiques, le premier est le moment gyroscopique des hélices, l'autre est le moment gyroscopique dû aux mouvements du quadri-rotor.

Moment gyroscopique des hélices : il est donné par la relation suivante :

$$M_{gh} = \sum_{i=1}^{4} \Omega \wedge J_r [0 \;\; 0 \;\; (-1)^{i+1} * \omega_i]^T \qquad (2.21)$$

Moment gyroscopique dû aux mouvements de quadri-rotor : il est donné par la relation suivante :

$$M_{gm} = \Omega \wedge j\,\Omega \qquad (2.22)$$

Avec :

$J_r$ : est l'inertie des rotors.

$J$ : est l'inertie du système.

## 2.11 Développement du modèle mathématique selon Newton-Euler :

Nous avons négligé la force de traînée selon les axes et le moment dû aux frottements aérodynamiques pour développer le modèle dynamique.

En utilisant la formulation de Newton-Euler, les équations sont écrites sous la forme suivante :

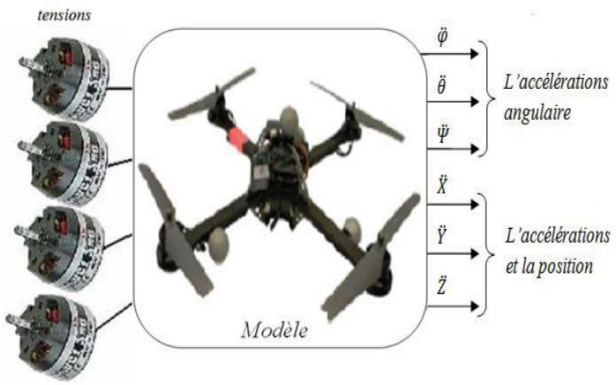



Figure (2.8) : Le modèle de quadri-rotor

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \upsilon \\ m\ddot{\xi} = F_f + F_t + F_g \\ \dot{R} + R.S(\Omega) \\ J\dot{\Omega} = -\Omega \wedge J\Omega + M_f + M_a + M_{gf} \end{cases} \tag{2.23}$$

Avec :

$\xi$ : Vecteur de position du quadri-rotor.

m: La masse totale du quadri-rotor.

Ω: Vitesse angulaire exprimée dans le repère fixe.

R : Matrice de rotation.

∧: Produit vectoriel.

J : Matrice d'inertie symétrique dimension (3*3), la structure du quadri-rotor est supposée rigide et parfaitement symétrique selon l'hypothèse exprimée au début, ce implique que la matrice d'inertie diagonale

$$J = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_Z \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

Chaque terme de la matrice d'inertie dépend de la distribution de la masse de l'objet tel que :

$$I_x = \iiint_v (y^2 + z^2)\partial m \tag{2.25}$$

$$I_y = \iiint_v (x^2 + z^2)\partial m \tag{2.26}$$

$$I_z = \iiint_v (x^2 + y^2)\partial m \tag{2.27}$$

$S(\Omega)$: La matrice antisymétrique. Pour le vecteur de vélocité $\Omega = [\Omega_1\ \Omega_2\ \Omega_3]^{\mathrm{T}}$

Cette matrice est exprimée par :

$$S(\Omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_1 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

$F_f$ : Est la force totale générée par les quatre rotors, elle est donnée par :

$$F_f = \mathrm{R}[0 \quad 0 \quad \textstyle\sum_{i=1}^{4} F_i]^{\mathrm{T}} \tag{2.29}$$

$$F_f = \begin{bmatrix} \cos\varphi \sin\theta \cos\psi + \sin\psi \sin\varphi \\ \cos\varphi \sin\theta \sin\psi - \sin\varphi \cos\psi \\ \cos\varphi \cos\theta \end{bmatrix} * \textstyle\sum_{i=1}^{4} F_t \tag{2.30}$$

$F_t$: Est la force de trainée selon les axes$(x, y, z)$, elle est décrite par :

$$F_t = \begin{bmatrix} -K_{ftx} & 0 & 0 \\ 0 & -K_{fty} & 0 \\ 0 & 0 & -K_{ftz} \end{bmatrix} \dot{\xi} \tag{2.31}$$

$K_{ftx}$ ,$K_{fty}$,$K_{ftz}$ : Les coefficients de trainée de translation.

$F_g$: Représente la force de gravité. Elle est donnée par le vecteur suivant :

$F_g = [0 \quad 0 \quad -mg]^{\mathrm{T}}$

$M_f$: Est le moment provoqué par les forces de poussée et de trainée. Il est donné par :

$$M_f = \begin{bmatrix} l(F_4 - F_2) \\ l(F_3 - F_1) \\ d(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

$M_a$: Estle moment résultant des frottements aérodynamiques il est décrit par l'expression :

$$M_a = \begin{bmatrix} K_{fax}\dot{\varphi}^2 \\ K_{fay} \quad \dot{\theta}^2 \\ K_{faz} \quad \dot{\psi}^2 \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

$K_{fax}$, $K_{fay}$, $K_{faz}$ : sont des coefficients des frottements aérodynamiques.

### 2.11.1 Equations de mouvement de translation :

D'après la deuxième loi de la dynamique de Newton :

$$\frac{d(mv)}{dt} = \sum F_{ext} \tag{2.34}$$

On a:

$$m\ddot{\xi} = F_f + F_t + F_g \tag{2.35}$$

On replace chaque force par sa formule, on trouve :

$$m\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \sin\theta \cos\psi + \sin\psi \sin\varphi \\ \cos\varphi \sin\theta \sin\psi - \sin\varphi \cos\psi \\ \cos\varphi \cos\theta \end{bmatrix} * \sum_{i=1}^{4} F_t - \begin{bmatrix} k_{ftx}\dot{x} \\ K_{fty}\dot{y} \\ K_{ftz}\dot{z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} \tag{2.36}$$

On obtient alors les équations différentielles qui définissent le mouvement de translation :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{1}{m}(\cos\varphi \sin\theta \cos\psi - \sin\psi \sin\varphi)(\sum_{i=1}^{4} F_i) - \frac{K_{ftx}}{m}\dot{x} \\ \ddot{y} = \frac{1}{m}(\cos\varphi \sin\theta \sin\psi - \sin\varphi \cos\psi)(\sum_{i=1}^{4} F_i) - \frac{K_{fty}}{m}\dot{y} \\ \ddot{z} = \frac{1}{m}(\cos\varphi \cos\theta)(\sum_{i=1}^{4} F_i) - \frac{K_{ftz}}{m}\dot{z} - g \end{cases} \tag{2.37}$$

### 2.11.2 Equations de mouvement de rotation :

D'après la deuxième loi de la dynamique de Newton :

$$\frac{d(J\Omega)}{dt} = \sum M_{ext} \tag{2.38}$$

On a :

$$J\dot{\Omega} = -M_{gm} - M_{gh} - M_a + M_f \tag{2.39}$$

$$J = -\Omega \wedge J\Omega - \sum_1^4 \Omega \wedge J_r \left[0 \;\; 0 \;\; (-1)^{i+1}\omega_i\right]^{\mathrm{T}} - M_a + M_f \tag{2.40}$$

$$\begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} = -\begin{bmatrix} -\dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \right\} - \begin{bmatrix} J_r \Omega_r \dot{\theta} \\ -J_r \Omega_r \dot{\varphi} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{fax}\, \dot{\varphi}^2 \\ K_{fay} \dot{\theta}^2 \\ K_{faz} \dot{\psi}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l(F_4 - F_2) \\ l(F_3 - F_1) \\ d(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

On obtient alors les équations différentielles définissants le mouvement de rotation :

$$\begin{cases} I_x \ddot{\varphi} = -\dot{\theta}\dot{\psi}\left(I_z - I_y\right) - J_r\, \Omega_r \dot{\theta}^2 - K_{fax}\, \dot{\varphi}^2 + lb(\omega_4^2 - \omega_2^2) \\ I_y\, \ddot{\theta} = -\dot{\varphi}\, \dot{\psi}\; (I_z - I_x) - J_r \Omega_r \dot{\varphi}^2 - K_{fay}\, \dot{\theta}^2 + \dot{l}b(\omega_3^2 - \omega_1^2) \\ I_z \ddot{\psi} = -\dot{\varphi}\dot{\theta}\left(I_y - I_x\right) - K_{faz} \dot{\psi}^2 + lb(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \end{cases} \tag{2.42}$$

Avec :

$$\Omega_r = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4 \tag{2.43}$$

### 2.11.3 Dynamique du rotor :

Généralement les moteurs utilisés dans les quadri-rotors sont des moteurs à courant continu.

La dynamique du rotor est approximée à celle d'un moteur à courant continu, elle est donnée par les équations différentielles suivantes :

$$J_r \dot{\omega}_i = \tau_i - q_i \;, \{1, 2, 3\} \tag{2.44}$$

Avec : $\tau_i$ est le couple d'entrée, et $q_{i} = d\;\omega^2$ est le couple résistant généré par le rotor $i$

Pour atteindre les objectifs de la commande d'un quadri-rotor, une boucle d'asservissement en vitesse est souvent nécessaire. D'abord, nous avons besoin de déterminer les vitesses désirées $\omega$ correspondantes aux valeurs des commandes fournies par le contrôleur, ces vitesses peuvent être calculées comme suit : [16]

$$v_i = \frac{R_a}{K_m K_g}\, \tau_i + K_m\, K_g\, \omega_i \tag{2.45}$$

Avec :

$R_a$ : Est la résistance du moteur

$K_m$ : Est la constant du couple de moteur

$K_g$ : est le gain du réducteur.

## 2.12 Le modèle dynamique complet :

Le modèle dynamique complet qui régit le quadri-rotor est le suivant :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{1}{m}((cos\varphi cos\psi sin\theta + sin\psi sin\theta)U_1 - K_{ftx}\dot{x}) \\ \ddot{y} = \frac{1}{m}\left((cos\varphi sin\psi sin\theta - cos\psi sin\varphi)U_1 - K_{fty}\dot{y}\right) \\ \ddot{z} = \frac{1}{m}\left((cos\varphi cos\theta)U_1 - K_{ftz}\dot{z}\right) - g \\ \ddot{\varphi} = \frac{1}{I_x}(\dot{\theta}\dot{\psi}\left(I_y - I_z\right) + dU_2 - K_{fax}\dot{\varphi}^2 - J_r\overline{\Omega}\dot{\theta}) \\ \ddot{\theta} = \frac{1}{I_y}\left(\dot{\varphi}\dot{\psi}(I_z - I_x) + dU_3 - K_{fay}\dot{\theta}^2 J_r\Omega\dot{\varphi}\right) \\ \ddot{\psi} = \frac{1}{I_z}((\dot{\theta}\dot{\varphi}\left(I_x - I_y\right) + U_4 - K_{faz}\dot{\psi}^2) \end{cases} \quad (2.46)$$

<u>A conditions que :</u>

L'angle de roulis :$-\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi/2$

L'angle de tangage :$-\pi/2 < \theta < \pi/2$

L'angle de Lacet :$-\pi < \psi < \pi$

### 2.12.1 La représentation d'état du système :

Il existe un multiple des représentations d'état pour un système physique, on considère $X = [x_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_{12}]^T$ comme vecteur d'état du système :

$X=[\varphi\ \dot{\varphi}\ \theta\ \dot{\theta}\ \psi\ \dot{\psi}\ x\ \dot{x}\ y\ \dot{y}\ z\ \dot{z}]^T$

On obtient la représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = a_9 x_2 + U_x \frac{U_1}{m} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = x_{10} x_4 + U_y \frac{U_1}{m} \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = a_{11} x_6 + \left(\frac{\cos x_9 \cos x_{11}}{m}\right) U_1 - g \\ \dot{x}_7 = x_8 \\ \dot{x}_8 = a_8 x_8^2 + a_7 x_{10} x_{12} \\ \dot{x}_9 = x_{10} \\ \dot{x}_{10} = a_4 x_8 x_{12} + a_5 x_{10}^2 + a_6 x_{12} \overline{\Omega} + b_2 U_3 \\ \dot{x}_{11} = x_{12} \\ \dot{x}_{12} = a_1 x_{10} x_8 + a_2 x_{12}^2 + a_3 x_{10} \overline{\Omega} + b_1 U_2 \end{cases} \tag{2.47}$$

Avec :

$$\begin{cases} a_1 = \frac{(I_x - I_z)}{I_x} \\ a_2 = -\frac{K_{fax}}{I_x} \\ a_3 = -\frac{I_r}{I_x} \\ a_4 = \frac{(I_z - I_x)}{I_y} \end{cases} \begin{cases} a_5 = -\frac{K_{fay}}{I_y} \\ a_6 = -\frac{I_r}{I_y} \\ a_7 = \frac{(I_x - I_y)}{I_z} \\ a_8 = -\frac{K_{faz}}{I_z} \end{cases} \begin{cases} a_9 = -\frac{K_{ftx}}{m} \\ a_{10} = -\frac{K_{fy}}{m} \\ a_{11} = -\frac{K_{ftz}}{m} \\ b_1 = \frac{l}{I_x} \end{cases} \begin{cases} b_2 = \frac{l}{I_y} \\ b_3 = \frac{l}{I_z} \end{cases} \tag{2.48}$$

## 2.13 Conclusion :

Dans cette partie, nous avons présenté les équations différentielles représentant la dynamique du quadri-rotor. Celle-ci est effectuée en utilisant les lois de mouvement de Newton ainsi que les forces et moments générées par le groupe de propulsion.

A partir du modèle obtenu, nous concluons que le quadri-rotor est un système sous actionné. La complexité du modèle, la non linéarité, et l'interaction entre les états du système, peuvent se voir clairement. Dans le chapitre suivant, nous présenterons la structure de commande mode de glissement.

## 3.1 Introduction :

Le réglage par le mode de glissement est un mode de fonctionnement particulier des systèmes à structure variable. L'étude du mode de glissement a commencé en URSS et la Yougoslavie dans les années 60 [4], [5], par la suite, ces travaux on été repris ailleurs, soit pour compléter l'étude théorique, soit pour étudier quelques applications possibles.

Cependant, ce n'est qu'à partir des années 80 [1] la commande par mode de glissement des systèmes à structure variable est devenue intéressante et attractive. Elle a été considérée comme l'une des approches de commande des systèmes non linéaires et des systèmes ayant des modèles imprécis.

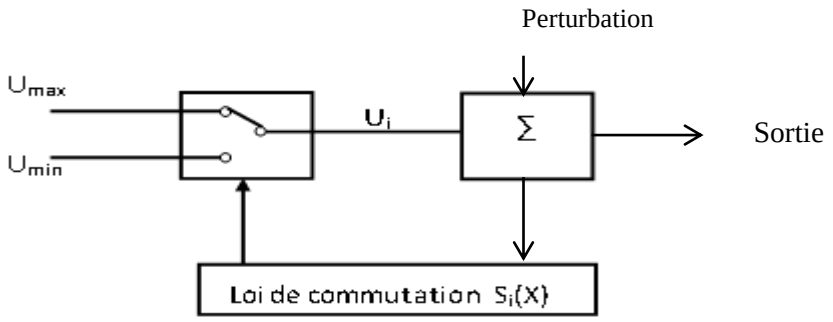
Dans cette partie, nous présentons les éléments fondamentaux du formalisme de la commande à structure variable.
Tout d'abord, nous présenterons les différentes structures de contrôle par les modes glissants, après, nous expliquons brièvement le principe de cette commande, et le choix de la surface de glissement. Cette technique de commande robuste est une classe particulière à structure variable [4], [5], [7].

## 3.2 Différentes structures du contrôle par mode de glissement :

Dans la littérature on trouve trois configurations de base pour la synthèse des différentes commandes. La première correspond à la structure la plus simple où la commutation est au niveau de l'organe de commande lui-même. On l'appellera, structure par commutation au niveau de l'organe de commande. La deuxième structure fait intervenir la commutation au niveau d'une contre-réaction d'état, la dernière est une structure de régulation avec ajout de la commande équivalente [4],[7]. Cette dernière structure est retenue pour la suite de notre étude.

### 3.2.1 Structure par commutation au niveau de l'organe de commande :

Le schéma d'une structure par commutation au niveau de l'organe de commande est donné par la figure (3.1). Cette structure de commande est la plus classique et la plus utilisée.

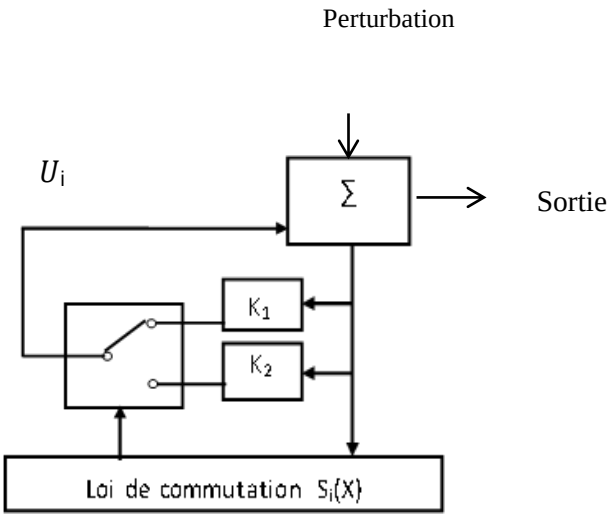



Figure(3.1): Structure de régulation par commutation au niveau de l'organe de commande

Cette structure correspond au fonctionnement tout ou rien des interrupteurs de puissance associés dans une grande majorité d'application aux variateurs de vitesse. Elle a été utilisé pour la commande des moteurs pas-à-pas [7], [11].

### 3.2.2 Structure par commutation au niveau d'un contre réaction d'état :

Nous pouvons consulter le schéma d'une telle structure sur la figure (3.2). D'après les études menées précédemment [8], c'est la structure la moins exigeante au niveau de la sollicitation de la commande. Elle a été mise en œuvre dans la commande de moteurs à courant continu et à aimants permanents, ainsi que dans la commande des machines à induction [9]. Elle s'appuie sur la commande par contre réaction d'état classique où le réglage de la dynamique du système est réalisé par les gains de réglage. Le non linéarité provient de la commutation entre les gains, donc on a créé une commutation au niveau de la dynamique du système




Figure(3.2): Structure de régulation par commutation au niveau de la contre réaction d'état

### 3.2.3 Structure de régulation avec ajout de la commande équivalente :

Elle permet de prépositionnel l'état futur du système grâce à la commande équivalente qui n'est rien d'autre que la valeur désirée du système en régime permanent. L'organe de commande est beaucoup moins sollicité mais on est plus dépendant des variations paramétriques du fait l'expression de cette commande équivalente [10], [11].

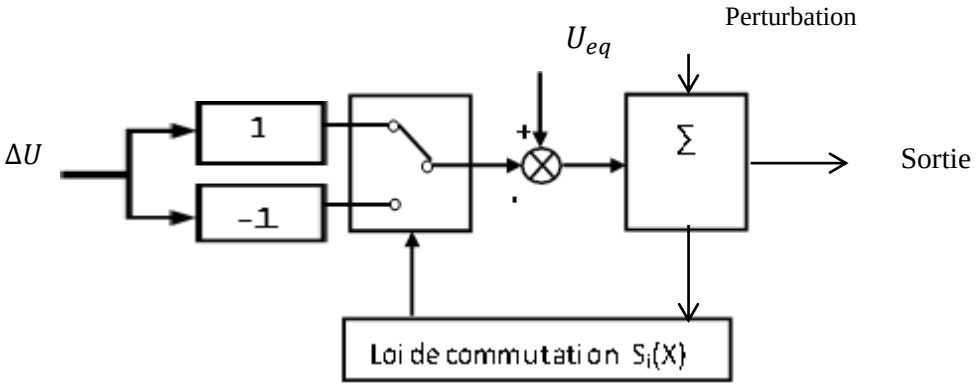



Figure (3.3): Structure de régulation par ajout de la commande équivalente

## 3.3 Théorie de la commande par mode glissement :

La théorie des systèmes à structure variable **(**sliding mode**),** est une technique de commande non linéaire, elle est caractérisée par la discontinuité de la commande aux passages par une surface de commutation appelée surface de glissement. La technique des modes glissants consiste à amener la trajectoire d'état d'un système vers la surface de glissement et de la faire commuter à l'aide d'une commutation appropriée autour de celle-ci jusqu'au point d'équilibre. D'où le phénomène de glissement figure (3.4). En résumé, une commande par régime glissant est divisée en deux parties :

- ✓ Détermination d'une région d'espace d'état telle qu'une fois que le système se trouve dans cette région, il ait le comportement désiré.
- ✓ Définition d'une loi de commande qui conduit le système jusqu'à cette région de l'espace d'état.

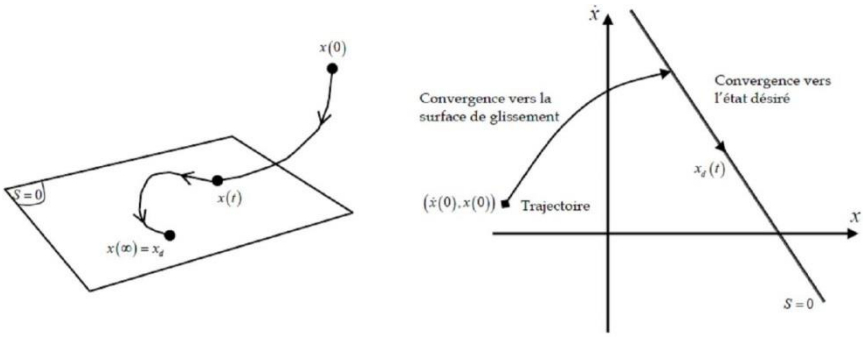



Figure (3.4): Convergence du système glissant

**a) Régime glissant idéal :**

En théorie, l'organe de commutation est supposé insensible aux bruits. et la trajectoire en régime glissant décrit parfaitement l'équation S(x) = 0. Le régime glissant idéal à une oscillation de fréquence infinie et d'amplitude nulle, le point représentatif de l'évolution du système glisse parfaitement sur l'hyper surface de commutation S.

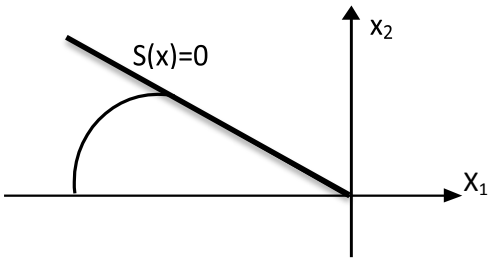



Figure (3.5) : Glissement idéal

**b) Régime glissant réel :**

En pratique l'organe de commutation est réalisé à partir de relais qui présente des imperfections comme les retards de commutations, dans ce cas, la trajectoire de phase du régime glissant reste au voisinage de la surface de commutation donnant naissance à des oscillations indésirables qui éliminent la précision du système et néanmoins sa stabilité.

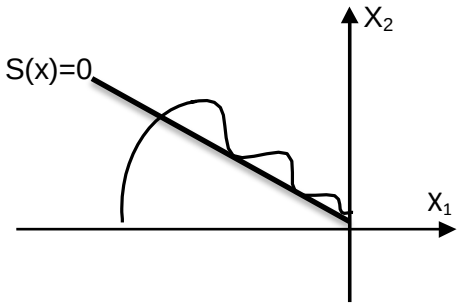



Figure (3.6): Glissement réal

## 3.4 Conception de l'algorithme de commande par mode glissement :

La conception de la commande par mode de glissement prend en compte les problèmes de stabilité et de bonnes performances de façon systématique dans son approche. Qui s'effectue principalement en trois étapes complémentaires définies par:

- ✓ Choix des surfaces de glissement.
- ✓ Définition des conditions d'existence et de convergence du régime glissant.
- ✓ Détermination de la loi de commande.

### 3.4.1 Choix des surfaces de glissement :

on considère le modèle d'état suivant :

$$[\dot{X}]=[A][X]+[B][U] \tag{3.1}$$

ou $[X] \in R^n$ est le vecteur d'état, et $[U] \in R^m$ le vecteur de commande, avec n>m. Généralement, le choix du nombre des surfaces de glissement est égal à la dimension du vecteur de commande$[U]$. Afin d'assurer la convergence d'une variable d'état X vers sa valeur de référence$X^*$ , plusieurs travaux proposent la forme générale suivante :

$$s(x)=\left(\frac{d}{dt}+\lambda\right)^{r-1} e(x) \tag{3.2}$$

avec

$\lambda$ : Gain positif.

$e(x)=X-X^*$ : Écart de la variable à réguler.

$r$ : Degré relatif, c'est le plus petit entier positif représentant le nombre de fois qu'il faut dériver afin de faire apparaître la commande. Tel que : $\frac{ds}{st} \neq 0$ assurant la contrôlabilité.

$$\text{Pour } r = 1 \qquad S(x) = e(x)$$

$$\text{Pour } r = 2 \qquad S(x) = \lambda_x e(x) + \dot{e}(x)$$

$$\text{Pour } r = 3 \qquad S(x) = \lambda_x^2 e(x) + 2\lambda_x \dot{e}(x) + \ddot{e}(x)$$

$S(x)$ : est une équation différentielle linéaire autonome dont la réponse e(x) tend vers zéro pour un choix correct du gain λ et c'est l'objectif de la commande.

En d'autre terme, la difficulté revient à un problème de poursuite de trajectoire dont l'objectif est de garder S(x) à zéro .Ceci est équivalent à une linéarisation exacte de l'écart en respectant la condition de convergence .La linéarisation exacte de l'écart à pour but de forcer la dynamique de l'écart (référence – sortie) à être une dynamique d'un système linéaire autonome d'ordre

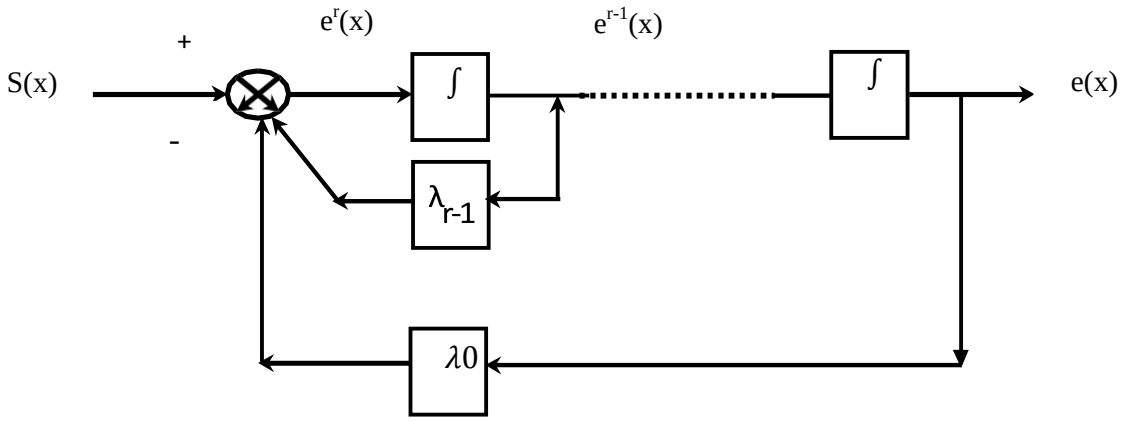



Figure (3.7): Linéarisation exacte de l'écart.

Les conditions d'existence et de convergence sont les critères qui permettent aux différentes dynamiques du système de converger vers la surface de glissement et d'y rester indépendamment de la perturbation. On présente deux types de conditions qui sont :

### 3.4.2 Approche direct :

Cette approche est la plus ancienne, elle est proposée et étudiée par Emilyanov et Utkin [11]. Elle est donnée sous la forme : $\dot{S}(x)S(x) < 0$

### 3.4.3 Approche de Lyapunov :

Il s'agit de choisir une fonction candidate de Lyapunov $V(x) > 0$ (fonction scalaire positive) pour les variables d'état du système et de choisir une loi de commande qui fera décroitre cette fonction $\dot{V}(x) < 0$ .En définissant par exemple une fonction candidatede Lyapunov pourlesystèmecomme suit :

$$V(x) = \frac{1}{2} S^2 \tag{3.3}$$

En dérivant cette dernière, on obtient :

$$\dot{V}(x) = \dot{S}(x)S(x) \tag{3.4}$$

Pour que la fonction candidate de Lyapunov puisse décroitre, il suffit d'assurer que :

$$\dot{S}(x)S(x) < 0 \tag{3.5}$$

## 3.5 Détermination de la loi de commande :

Lorsque le régime glissant atteint la dynamique du système qui est indépendante de la loi de commande qui n'a pour but de maintenir les conditions de glissement (l'attractivité de la surface), c'est pour cette raison que la surface est déterminée indépendamment de la commande. Maintenant, il reste à déterminer la commande nécessaire pour attirer la trajectoire d'état vers la surface et en suite vers son point d'équilibre toute en garantissant les conditions d'existence du mode de glissement.

La structure de la commande comporte deux parties, une première concernant la linéarisation exacte $U_{eq}$ et une deuxième stabilisante $\Delta U$, cette dernière est très importante dans la technique de commande par mode de glissement, car elle est utilisée pour éliminer les effets d'imprécision du modèle et de rejeter les perturbations extérieures.

$$U(t) = \Delta U + U_{eq} \tag{3.6}$$

$U_{eq}$ **:** Correspond à la commande équivalente proposée par Filipov et Utkin, elle sert à maintenir la variable à contrôler sur la surface de glissement$S(x)$ . La commande équivalente est déduite en considérant que le dérivé de la surface est nul $\dot{S}(x) = 0$ . Elle peut être interprétée comme étant un retour d'état particulier jouant le rôle d'un signal de commande appliqué sur le système à commande lors de la commutation rapide entre les valeurs $U_{max}$ $et$ $U_{min}$ [7] figure (3.8).

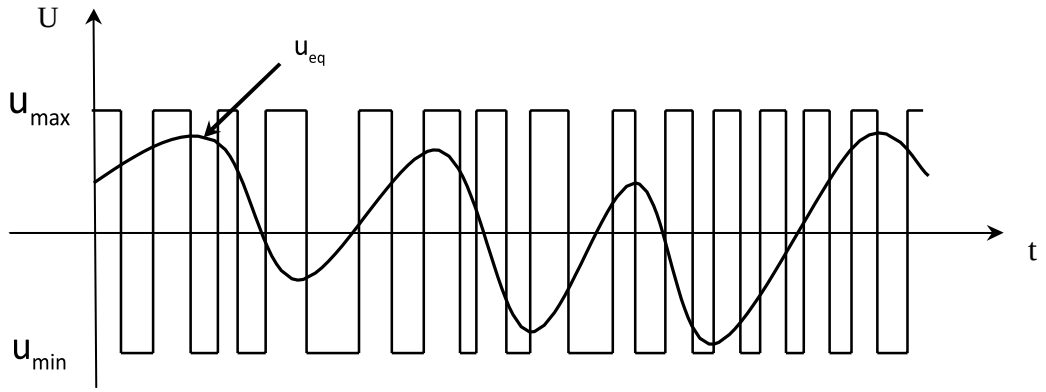



Figure (3.8): La valeur continue $U_{eq}$ prise par la commande lors de la commutation

Entre $U_{max}$ et $U_{min}$ .

$\Delta U$ **:** est déterminée pour vérifier la condition de convergence.

Afin de mettre en évidence le développement précédent, on considère le système d'état (3.1). On cherche à déterminer l'expression analogique de la commande U .La dérivée de la surface $S(x)$ est :

$$\dot{S}=\frac{ds}{dt}=\frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial s}{\partial t} \tag{3.7}$$

En remplaçant (3.1) et (3.6) dans (3.7), on trouve :

$$\dot{S}(x)=\frac{ds}{dt}=\frac{\partial s}{\partial x}\left\{[A]\,[X]+\,[B]\,U_{eq}\right\}+\frac{\partial S}{\partial X}\,[B]\Delta U \tag{3.8}$$

Durant le mode de glissement et le régime permanent, la surface est nulle et par conséquent, sa dérivée et la partie discontinue sont aussi nulles. D'où, on déduit l'expression de la commande équivalente.

$$U_{eq}=-\left\{\frac{\partial s}{\partial X}[B]\right\}^{-1}\left\{\frac{\partial s}{\partial X}[A][X]\right\} \tag{3.9}$$

Pour que la commande équivalente puisse prendre une valeur finie, il faut que :

$$\frac{\partial s}{\partial X}[B]\neq 0 \tag{3.10}$$

Durant le mode de convergence et en remplaçant la commande équivalente par son expression dans (3.8), on obtient la nouvelle expression de la dérivée de la surface :

$$\dot{S}(x)=\frac{\partial s}{\partial X}[B]\;\;\Delta U \tag{3.11}$$

et la condition d'attractivité $\dot{S}(x)s(x)<0$ devient :

$$s(x)\frac{\partial s}{\partial X}[B]\Delta U<0 \tag{3.12}$$

Afin de satisfaire la condition, le signe de $\Delta U$ doit être opposé à celui de $s(x)\frac{\partial s}{\partial X}[B]$.La forme la plus simple que peut prendre la commande discontinuer est celle d'une fonction ***sign*** figure (3.9).

$$\Delta U = K_x sign\, S(x) \tag{3.13}$$

Le signe de $K_x$ doit être différent de celui de $\frac{\partial s}{\partial x}[B]$

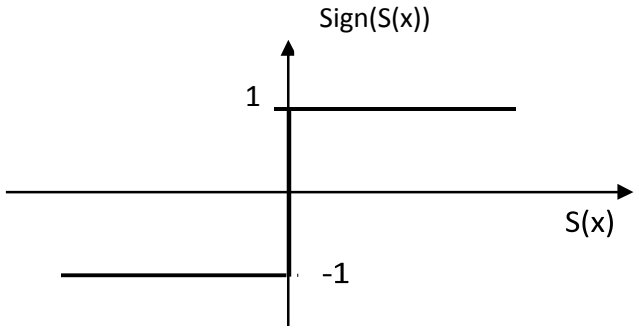



Figure (3.9): Fonction sign (non linéarité tout ou rien)

Cependant, cette génère sur la surface de glissement, un phénomène appelé broutement (chattering) qui est en général indésirable car il ajoute au spectre de la commande des composantes hautes fréquences, la figure (3.10) représente le phénomène broutement.

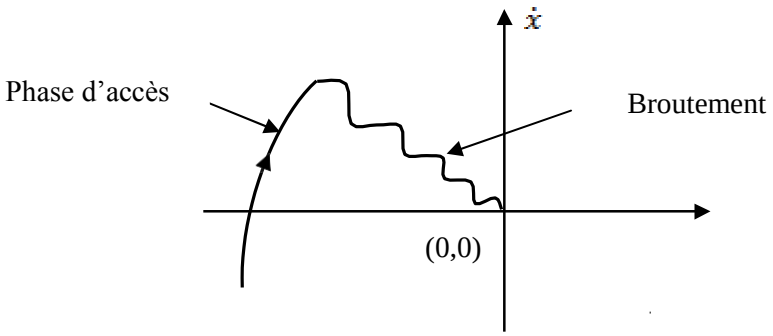



Figure (3.10): Phénomène de broutement

## 3.6 Elimination du phénomène du broutement (chattering) :

L'un des principaux inconvénients du réglage par mode de glissement est le phénomène du chattering. Car il peut endommager les actionneurs par des oscillations trop fréquentes et nuire au fonctionnement et aux performances du système. Dans le but de réduire ces oscillations, plusieurs solutions ont été apportées comme par exemple : remplacer la fonction **«sign»** par une fonction de saturation caractérisée par un ou deux seuils (atténuation des amplitudes des ondulations) figure (3.11).

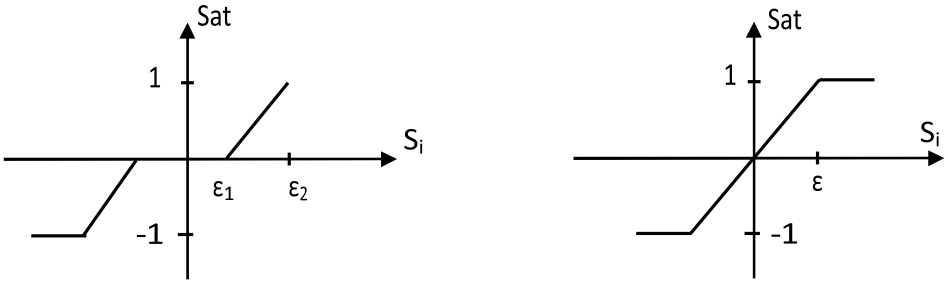



Figure (3.11): Fonction SAT avec un seuil et deux seuils (zone morte).

$$\text{Sat(S)} = \begin{cases} -1 \ , si \ \ S < -\varepsilon \\ \frac{S}{\varepsilon} \ \ , si \ \ |S| < -\varepsilon \\ 1 \ , si \ \ S > -\varepsilon \end{cases} \qquad (3.14)$$

$$\text{Sat(S)} = \begin{cases} 0 \ , si \ \ |S| < \varepsilon_1 \\ \frac{S-\varepsilon_1}{\varepsilon_2-\varepsilon_1} \ \ , si \ \ \varepsilon_1 < |S| < \ \varepsilon_2 \\ sign(s) \ , si \ \ S > \varepsilon_2 \end{cases} \qquad (3.15)$$

## 3.7 Domaine d'application du réglage par mode glissant :

La technique du réglage par mode glissant a connu des développements importants dans tous les domaines de la commande, tel que la commande des systèmes hydrauliques ou pneumatiques et la robotique. Il existe des valves fonctionnant par tout ou rien qui ne possèdent que deux états stables : complètement ouvertes ou complètement fermées.

Ces valves admettent des fréquences de commutation de quelques 10 Hz [7] ,[11], [12].

Les entraînements électriques pour des machines-outils ou des robots qui nécessitent soit un réglage de la vitesse de rotation, soit un régalage de position, dans ce cas le comportement dynamique à haute performance à la possibilité de limiter facilement certaines grandeurs (comme le courant et la vitesse de rotation), sont des avantages incontestables en faveur du réglage par mode glissant.

Il faut mentionner que dans certains domaines tels que : les processus chimiques et métallurgies, où il y'a des réglages qui font appel à des régulateurs à deux positions, le procédé par mode glissant peut apporter plusieurs avantages.

## 3.8 Les avantages de la commande par mode glissant :

Cette commande présente:

- La réponse du système est insensible.

## 3.9 Synthèse de loi de commande :

D'après le modèle (2.47) de représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = a_9 x_2 + U_x \frac{U_1}{m} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = x_{10} x_4 + U_y \frac{U_1}{m} \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = a_{11} x_6 + \left(\frac{\cos x_9 \cos x_{11}}{m}\right) U_1 - g \\ \dot{x}_7 = x_8 \\ \dot{x}_8 = a_8 x_8^2 + a_7 x_{10} x_{12} \\ \dot{x}_9 = x_{10} \\ \dot{x}_{10} = a_4 x_8 x_{12} + a_5 x_{10}^2 + a_6 x_{12} \overline{\Omega} + b_2 U_3 \\ \dot{x}_{11} = x_{12} \\ \dot{x}_{12} = a_1 x_{10} x_8 + a_2 x_{12}^2 + a_3 x_{10} \overline{\Omega} + b_1 U_2 \end{cases} \tag{3.16}$$

## 3.10 Démonstration :

$$\begin{cases} e_i = x_i - x_{id} \\ e_{i+1} = \dot{e}_i \end{cases} \quad \begin{cases} e_1 = x_1 - x_{1d} \\ e_2 = \dot{e}_1 \end{cases} \quad \begin{cases} e_2 = x_2 - x_{2d} \\ e_3 = \dot{e}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_3 = x_3 - x_{3d} \\ e_4 = \dot{e}_3 \end{cases} \quad \begin{cases} e_4 = x_4 - x_{4d} \\ e_5 = \dot{e}_4 \end{cases} \quad \begin{cases} e_5 = x_5 - x_{5d} \\ e_6 = \dot{e}_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_6 = x_6 - x_{6d} \\ e_7 = \dot{e}_6 \end{cases} \quad \begin{cases} e_7 = x_7 - x_{7d} \\ e_8 = \dot{e}_7 \end{cases} \quad \begin{cases} e_8 = x_8 - x_{8d} \\ e_9 = \dot{e}_9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_9 = x_9 - x_{9d} \\ e_{10} = \dot{e}_{11} \end{cases} \quad \begin{cases} e_{10} = x_{10} - x_{10d} \\ e_{11} = \dot{e}_{10} \end{cases} \quad \begin{cases} e_{11} = x_{11} - x_{11d} \\ e_{12} = \dot{e}_{11} \end{cases}$$

(3.17)

Les surfaces de glissement sont choisies comme suite :

$$\begin{cases} S_x = e_2 + \lambda_4 e_1 \\ S_y = e_4 + \lambda_5 e_3 \\ S_z = e_6 + \lambda_6 e_5 \\ S_\psi = e_8 + \lambda_3 e_7 \\ S_\theta = e_{10} + \lambda_2 e_9 \\ S_\varphi = e_{12} + \lambda_1 e_{11} \end{cases} \qquad \begin{cases} S_x = \dot{e}_1\ (x) + \lambda_4 e_1(x) \\ S_y = \dot{e}_3\ (y) + \lambda_5 e_3(y) \\ S_z = \dot{e}_5(z) + \lambda_6 e_5(z) \\ S_\psi = \dot{e}_7(\psi) + \lambda_3 e_7(\psi) \\ S_\theta = \dot{e}_9(\theta) + \lambda_2 e_9(\theta) \\ S_\varphi = \dot{e}_{11}(\varphi) + \lambda_1 e_{11}(\varphi) \end{cases} \tag{3.18}$$

### 3.10.1 Détermination de $U_2$ :

Nous choisissons la surface de glissement comme suit :

$S_\varphi = e_{11}(\varphi) + \lambda_1 e_{11}(\varphi)$

Tel que :$\lambda_1 > 0, e_{11} = \varphi_d - \varphi$

En utilisant la théorie de commande par mode de glissement, la loi de commande est la suivante :

$$U_2 = U_{2gliss} + U_{2eq} \tag{3.19}$$

Avec :

$U_{2gliss}$ Est le terme de la correction défini par :

$U_2 = -\ K_{S1} sign(S_\varphi), K_{S1} > 0$

$U_{2eq}$ Est la commande équivalente, elle est calculée lorsque :

$S_\varphi$=0, et $\dot{S}_\varphi$=0.

Soit la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_{S\varphi} = \frac{1}{2} S_\varphi^2 \tag{3.20}$$

$$V_{S\varphi} = x_{12} - \dot{x}_{11d} - \lambda_1\ \dot{e}_{11} \tag{3.21}$$

$V_{S\varphi} > 0$

$$\dot{V}_{S\varphi} = \dot{x}_{12} - \ddot{x}_{11d} - \lambda_1 \dot{e}_{11} \tag{3.22}$$

Si $\dot{V}_{S\varphi} < 0$, alors $\dot{V}_{S\varphi} V_{S\varphi} < 0$, on peut dire que la conduction nécessaire de glissement est vérifiée et la stabilité au sens lyapunov est garantie.

Soit :

$\dot{S}_\varphi = -K_1 \text{ sign}(S_\varphi) \qquad S_\varphi = e_{12} + \lambda_1 e_{11}$

$\dot{S}_\varphi = \dot{x}_{12} - \ddot{x}_{11d} - \lambda_1 \dot{e}_{11}$

$\dot{S}_\varphi = a_1 x_8 x_{10} + a_2 x_{12}^2 + a_3 x_{10}\overline{\Omega} + b_1 U_2 - \ddot{\varphi}_d - \lambda_1 \dot{e}_{11} = -K_1 \text{sing}(S_\varphi)$

$$U_2 = \frac{1}{b}\{-a_1 x_8 x_{10} - a_2 x_{12}^2 + a_3 x_{10}\overline{\Omega} + \ddot{\varphi}_d + \lambda_1 e_{12} - K_1 \text{sign}(S_\varphi)\} \tag{3.23}$$

$$\begin{cases} U_{2attractive} = -\frac{K_1}{b_1} sign(S_\varphi) \\ U_{2equivalente} = -\frac{1}{b_1}\{a_1 x_8 x_{10} + a_2 x_{12}^2 + a_3 x_{10}\overline{\Omega} - \ddot{\varphi}_d - \lambda_1 e_{12}\} \end{cases} \tag{3.24}$$

### 3.10.2 Détermination de $U_1$:

Soit

$\dot{S}_Z = -K_6 \text{sign}(S_Z) \qquad S_Z = e_6 + \lambda_6 e_5$

$\dot{S}_Z = \dot{x}_6 - \ddot{x}_{5d} - \lambda_6 \dot{e}_5$

$\dot{S}_Z = a_{11} x_6 - \ddot{Z}_d - g - \lambda_6 e_6 + \frac{\cos x_{11} \cos x_9}{m} U_2 = -K_6 \text{sign}(S_Z)$

$$U_1 = \frac{m}{\cos x_{11} \cos x_9}\{-K_6 sign(S_Z) - a_{11} x_6 + \ddot{Z}_d + g + \lambda_6 e_6\} \tag{3.25}$$

$$\begin{cases} U_1 = \frac{m}{\cos x_{11} \cos x_9}\{-K_6 sign(S_\varphi)\} \\ U_1 = \frac{m}{\cos x_{11} \cos x_9} - \{a_{11} x_6 + \ddot{Z}_d + g + \lambda_6 e_6\} \end{cases} \tag{3.26}$$

### 3.10.3 Détermination de $U_3$:

Soit

$\dot{S}_\theta = -K_2 \text{sign}(S_\theta) \qquad S_\theta = e_{10} + \lambda_2 e_9$

$\dot{S}_\theta = \dot{x}_{10} - \ddot{x}_{9d} - \lambda_2 \dot{e}_9$

$\dot{S}_\theta = a_4 x_8 x_{12} + a_5 x_{10}^2 + a_6 x_{12}\overline{\Omega} + b_2 U_3 - \ddot{\theta}_d - \lambda_2 e_{10} = -K_2 \text{sing}(S_\theta)$

$$U_3 = \frac{1}{b_2}\{-a_4 x_8 x_{12} - a_5 x_{10}^2 + a_6 x_{12}\overline{\Omega} + \ddot{\theta}_d + \lambda_2 e_{10} - K_2 \text{sign}(S_\theta)\} \tag{3.27}$$

$$\begin{cases} U_{3attractive} = -\frac{K_2}{b_2} sign(S_\theta) \\ U_{3equivalente} = -\frac{1}{b_2}\{-a_5 x_8 x_{10} - a_5 x_{10}^2 - a_6 x_{12}\overline{\Omega} + \ddot{\theta}_d + \lambda_2 e_{10}\} \end{cases} \tag{3.28}$$

### 3.10.4 Détermination de $U_4$:

Soit

$\dot{S}_\psi = -K_3 \text{sign}(S_\psi)$ $\qquad$ $S_\psi = e_8 + \lambda_3 e_7$

$\dot{S}_\psi = \dot{x}_8 - \ddot{x}_{7d} - \lambda_3 \dot{e}_7$

$\dot{S}_\psi = a_7 x_{10} x_{12} + a_8 x_8^2 + b_3 U_4 - \ddot{\psi}_d - \lambda_3 e_8 = -K_3 \text{sing}(S_\psi)$

$$U_4 = \frac{1}{b_3}\left\{-a_7 x_{10} x_{12} - a_8 x_8^2 + \ddot{\psi}_d + \lambda_3 e_8 - K_3 \text{sign}(S_\psi)\right\} \tag{3.29}$$

$$\begin{cases} U_{4attractive} = -\frac{K_3}{b_3} sign(S_\psi) \\ U_{4equivalente} = \frac{1}{b_3}\left\{-a_7 x_{10} x_{12} - a_8 x_8^2 + \ddot{\psi}_d + \lambda_3 e_8\right\} \end{cases} \tag{3.30}$$

### 3.10.5 Détermination de $U_x$:

Soit

$\dot{S}_x = -K_4 \text{sign}(S_x)$ $\qquad$ $S_x = e_2 + \lambda_4 e_1$

$\dot{S}_x = \dot{x}_2 - \ddot{x}_{1d} - \lambda_4 \dot{e}_1$

$\dot{S}_x = a_9 x_2 + \frac{U_1}{m} U_x - \ddot{X}_d - \lambda_4 e_2 = -K_4 \text{sing}(S_x)$

$$U_x = \frac{m}{U_1}\left\{-a_9 x_2 + \ddot{X}_d + \lambda_4 e_2 - K_4 \text{sign}(S_x)\right\} \tag{3.31}$$

$$\begin{cases} U_{xattractive} = -\frac{m}{U_1} K_4 sign(S_x) \\ U_{xequivalente} = \frac{m}{U_1}\left\{-a_9 x_2 + \ddot{X}_d + \lambda_4 e_2\right\} \end{cases} \tag{3.32}$$

### 3.10.6 Détermination de $U_Y$:

Soit :

$\dot{S}_y = -K_5 \text{sign}(S_y)$ $\qquad$ $S_y = e_4 + \lambda_5 e_3$

$\dot{S}_y = \dot{x}_4 - \ddot{x}_{3d} - \lambda_5 \dot{e}_3$

$\dot{S}_y = a_{10} x_4 + \frac{U_1}{m} U_y - \ddot{Y}_d - \lambda_5 e_4 = -K_5 \text{sing}(S_y)$

$$U_y = \frac{m}{U_1}\left\{-a_{10} x_4 + \ddot{Y}_d + \lambda_5 e_4 - K_5 \text{sign}(S_y)\right\} \tag{3.33}$$

$$\begin{cases} U_{yattractive} = -\frac{m}{U_1} K_5 sign(S_y) \\ U_{yequivalente} = \frac{m}{U_1}\left\{-a_{10} x_4 + \ddot{Y}_d + \lambda_5 e_4\right\} \end{cases} \tag{3.34}$$

Donc:

$$U_1 = \frac{m}{\cos x_{11} \cos x_9}\{-K_6 sign(S_Z) - a_{11}x_6 + \ddot{Z}_d + g + \lambda_6 e_6\} \ / \cos x_{11}, \cos x_9 \neq 0$$

$$U_2 = \frac{1}{b}\{-a_1 x_8 x_{10} - a_2 x_{12}^2 + a_3 x_{10}\overline{\Omega} + \ddot{\varphi}_d + \lambda_1 e_{12} - K_1 \text{sign}(S_\varphi)\}$$

$$U_3 = \frac{1}{b_2}\{-a_4 x_8 x_{12} - a_5 x_{10}^2 + a_6 x_{12}\overline{\Omega} + \ddot{\theta}_d + \lambda_2 e_{10} - K_2 \text{sign}(S_\theta)\}$$

$$U_4 = \frac{1}{b_3}\{-a_7 x_{10} x_{12} - a_8 x_8^2 + \ddot{\psi}_d + \lambda_3 e_8 - K_3 \text{sign}(S_\psi)\} \qquad (3.35)$$

$$U_x = \frac{m}{U_1}\{-a_9 x_2 + \ddot{X}_d + \lambda_4 e_2 - K_4 \text{sign}(S_x)\}$$

$$U_y = \frac{m}{U_1}\{-a_{10} x_4 + \ddot{Y}_d + \lambda_5 e_4 - K_5 \text{sign}(S_y)\}$$

## 3.11 Simulation:

Nous allons présenter les résultats de simulation issus de l'application de la structure de command par modes glissants, vue précédemment sur le quadri-rotor.

avec l'état initial X = $[0,0,0,0,0,0]^T$

Pour résoudre les équations différentielles, nous utilisons l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 avec un pas de simulation 0. 01 sec. et un temps final $t_f$ =50 sec.

Il est à noter que cette simulation est accomplie avec les paramètres de simulation du tableau (3.1).

| Paramètres de la commande par modes glissants | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lambda_1 = 0.5$ | $\lambda_2 = 0.5$ | $\lambda_3 = 1.5$ | $\lambda_4 = 2.3$ | $\lambda_5 = 2.5$ | $\lambda_6 = 1.5$ |
| $k_1 = 0.09$ | $k_2 = 0.09$ | $k_3 = 2.5$ | $k_4 = 3$ | $k_5 = 3$ | $k_6 = 2.5$ |

Tableau (3.1) : Les paramètres du Contrôleur utilisé

- **Premier cas: simulation sans bruit :**

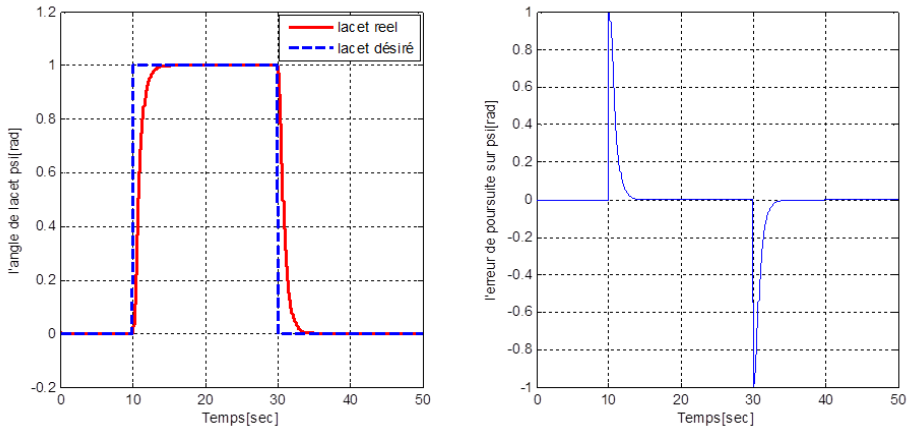



Figure (3.12) :L'angle de rotation $\psi$

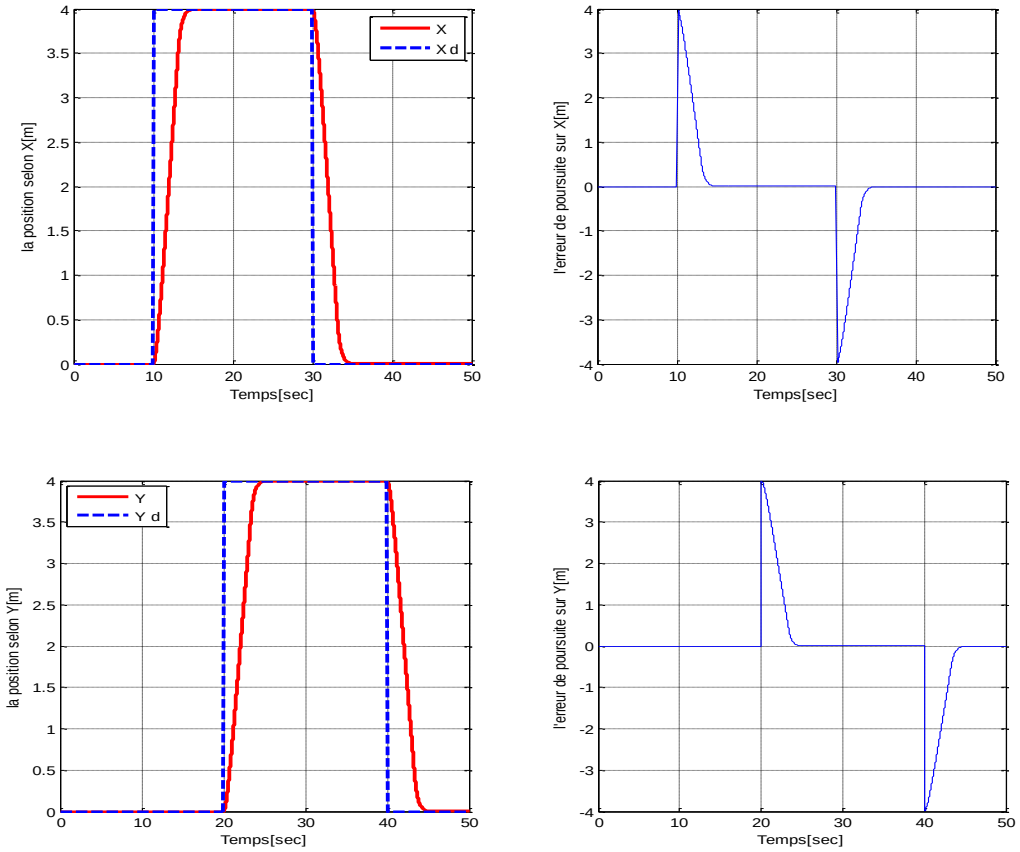



Figure (3.13) **:** Les mouvements suivant les axes (x, y, z)

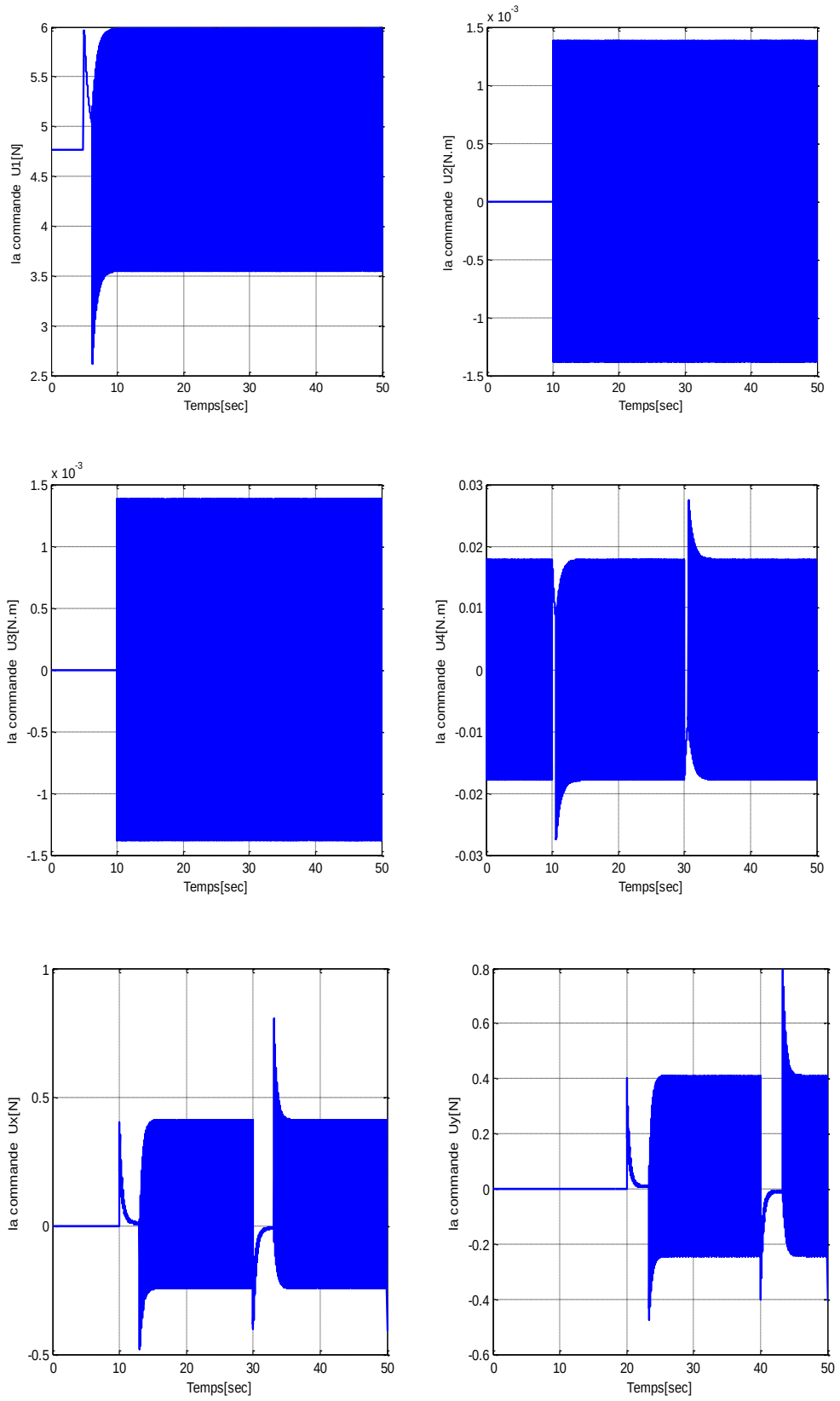



Figure (3.14) : Les commandes

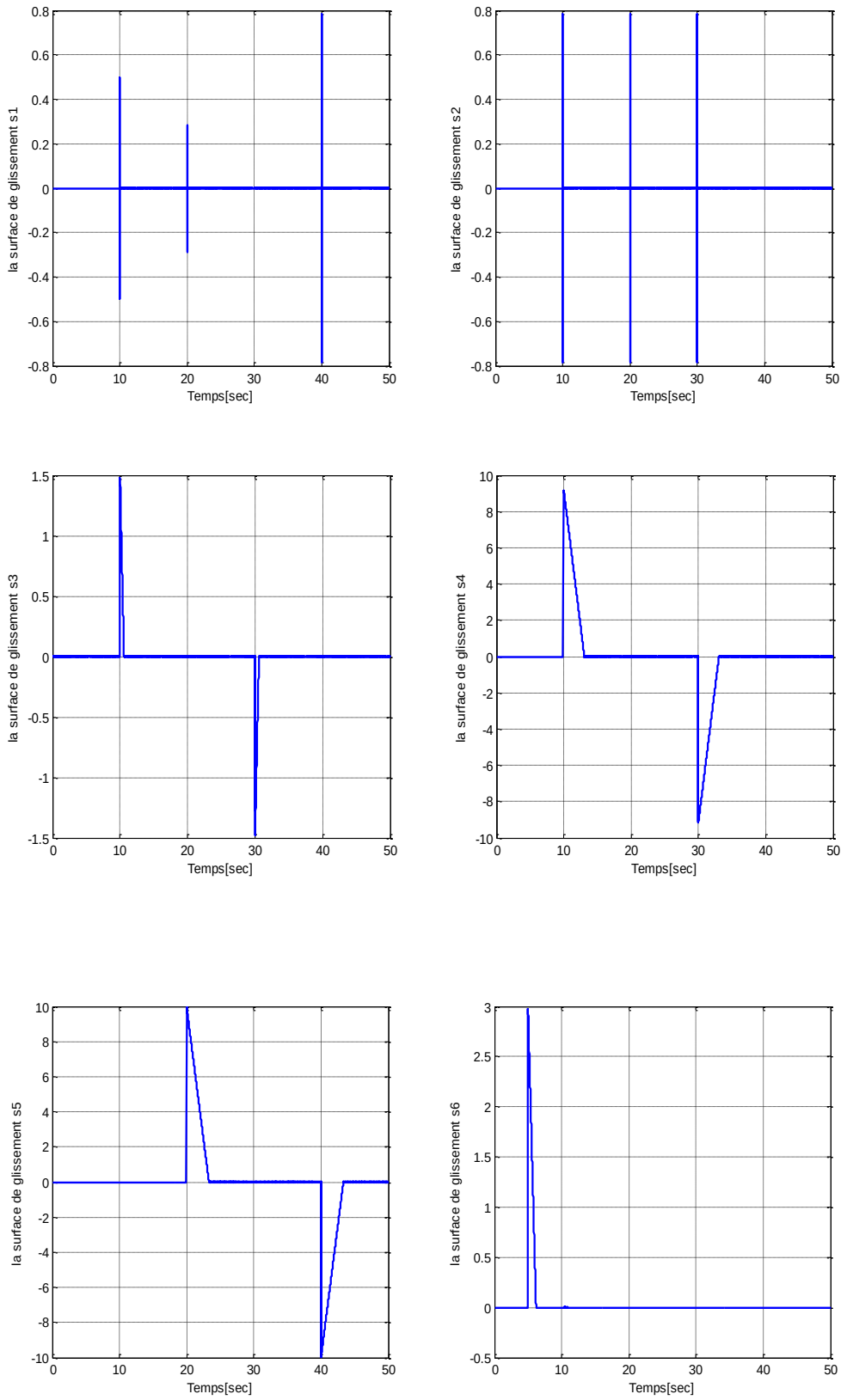



Figure (3.15) : Les surfaces de glissement

➢ **Deuxième cas: simulation avec bruit**

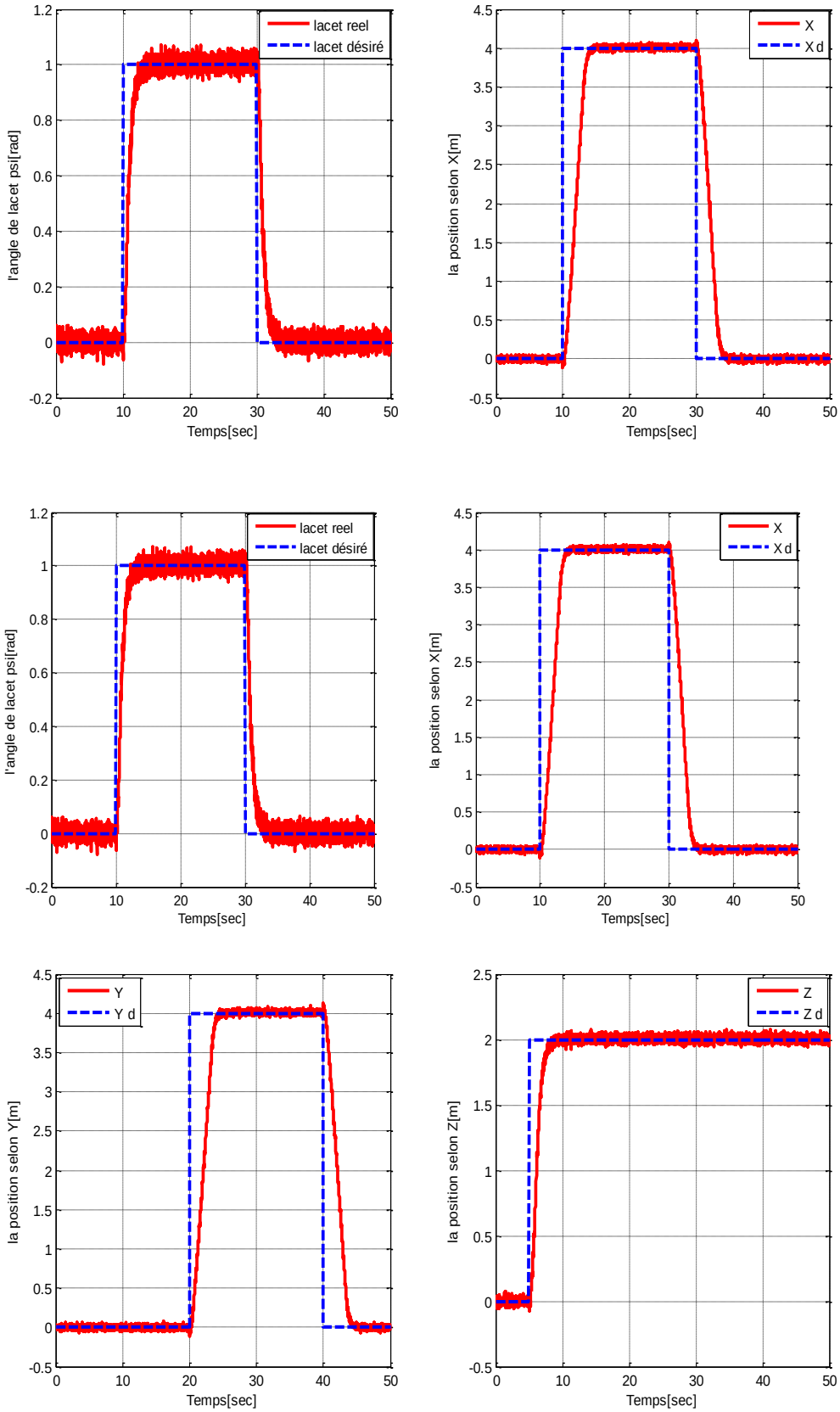



Figure (3.16) : Les mouvements suivant les axes (x, y, z) et autour l'axe (z) avec bruit

### 3.11.1 Interprétation des résultats :

On constate que la poursuite des trajectoires est satisfaisante avec une erreur tend vers le zéro, et un temps de réponse acceptable .Le bon choix de ( $\lambda_i , k_i$ ) assure de très bon résultats de poursuite, néanmoins le phénomène du réticence (chattering) est toujours présent surtout dans les signaux de commande ce phénomène est dû au terme de correction que contient la fonction signe.

## 3.12 Conclusion :

L'application du mode glissant a prouvé son efficacité pour la synthèse d'une commande qui assure le bon fonctionnement du système, néanmoins le mode glissant présente des avantages et des inconvénients.

D'une part, le mode glissant est peu sensible aux perturbations qui offre des commandes robuste et d'autre part il peut dans certains cas diminuer l'ordre du système ce qui réduit la complexité de la synthèse de la commande et l'étude de stabilité.

En revanche, l'application de l'approche par mode glissant induit l'apparition du phénomène de broutement (chattering) sous forme des oscillations au niveau de la commande, une technique a été proposée pour réduire ou éliminer ce phénomène.

# Conclusion générale

Ce type d'appareil possède une dynamique hautement non linéaire, multi-variables, fortement couplée et sous actionnée, ce qui augmente le défi rencontré par le concepteur.

Le problème traité consiste à garantir que la poursuite de trajectoire avec plus au moins des performances acceptables vis-à-vis le milieu de navigation.

Pour ce faire, un modèle non linéaire de quadri-rotor a été suivie en se basant sur les équations de mouvement de Newton, notant que nous avons essayé de prendre en considération toutes les forces et tous les moments afin de pouvoir suivre le modèle le plus réaliste et le plus représentatif possible.

A partir de ce model, La technique la commande par mode glissant est une méthode de commande très efficace qui permet de démontrer facilement la stabilité d'un système non linéaire en boucle fermée, les résultats obtenus montrent le bon fonctionnement de la loi de commande proposée à travers les performances enregistrées, aussi bien pour les simulations effectuées sur le quadri-rotor.

Nous proposons comme perspectives dans le future travail de :

Étudier le système de quadri-rotor en présence de défauts via la méthode de mode glissant.

# REFERENCES BIBLIOGRAPHIES

[1] Ashfaq Ahmad Mian, Wang Daobo , « Modeling and Backstepping-based Nonlinear Control Strategy for a 6 DOF Quadrotor Helicopter », Chinese Journal of Aeronautics,université China 2008.

[2] Hazry Desa, « Adaptive Hybrid Control Algorithm Design for Attitude Stabilization of Quadrotor (UAV) », Archives Des Sciences Vol 66, N°. 2, University Malaysia Perlis, Malaysia, 2013.

[3] Mohd Ariffanan, Mohd Basri, Abdul Rashid Husain, Kumeresan, A.Danapalasingam ,« Robust Chattering Free Backstepping Sliding Mode ControlStrategy for Autonomous Quadrotor Helicopter » ,International Journal of Mechanical & Mechatronics Engineering IJMME-IJENS Vol:14 N°.03 36 , Université Malaysia, 2014.

[4] « All the word's Rotorcraft », http://www.aviastar.org.

[5] R. Austin, « Unmanned Aircraft Systems - UAVS Design », Development and Deployment. Wiley, 2010.

[6] S. d. Prior, « Reviewing and Investigating the Use of Co-Axial Rotor Systems in Small UAVs », International Journal of Micro Air Vehicles, vol. 2, N°. 1, p. 1-16, 2010.

[7] M.fays, Long paul, M.blumenfeld Guillaume , « Conception et réalisation d'un hélicoptère à rotor coaxiaux contrarotatifs pour le concours micro drones ONERA/DGA », projet industriel et de recherche, Institut Polytechnique des sciences Avancées, France 2008.

[8] http://WWW.cad-modelltechnik-jung.de/projekte/Kamov Ka-52.htm.

[9] A. Dzul , T. Hamel , R. Lozano « Nonlinear control for a tandem rotor helicopter » .15th Triennial World Congress, Barcelona,Spain, 2002.

[10] H.R.Everett, « Sensors for Mobile Robots : Theory and Application ». A K Peters, 1995.

[11] B. Abdelouhab et H. Adel, Commande par mode de glissement d'une suspension active d'un véhicule, PFE, Ecole Nationale Polytechnique, Juin 2006.

[12] N. K. A. N. M. R. P. Pierre Beugnet, Modélisation et interface de contrôle d'un quadrirotor, 2008.

[13] F. Dernoncourt, La Logique Floue :entre raisonnement humain et intelligence arti, Paris, 2011.

[14] B. Y. BOUSIFI Achraf, Etude en simulation d'une regulation thermique par logique floue, 2010.

[15] Anežka Chovancová, Tomáš Ficoa, Ľuboš Chovaneca, Peter Hubinskýa, « Mathematical Modelling and Parameter Identification of Quadrotor (a survey) », Modelling of Mechanical and Mechatronic Systems MMaMS/14, Procedia Engineering 96 , 172 – 181, 2014.

[16] H.Bouadi, M.Bouchoucha and M.Tadjine « Modelling and Stabilizing Control Laws Design Based on Sliding Mode for an UAV Type-Quadrotor », Engineering Letters, 2007.

[17] Samir Bouabdallah , « Design and control of quadrotors with application to autonomous flying » , Thèse de doctorat , Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, Suisse, 2007.

[18] Erdinç Altug, James P. Ostrowski, Camillo J. Taylor, « Control of a Quadrotor Helicopter
Using Dual CameraVisual Feedback », The International Journal of Robotics Research Vol. 24, No. 5, pp. 329-341, 2005.

[19] Michael David Schmidt, « Simulation and control of a quadrotor unmanned aerial vehicle » , University of Kentucky, Master's thèsis, 2011.

[20] Salvador González-Vázquez and Javier Moreno-Valenzuela, « Motion control of a quadrotor aircraft via singular perturbations », International Journal of Advanced Robotic Systems , Instituto Politécnico Nacional , Mexico 2013.

[21] Bora Erginer and Erdinç Altuğ, « Modeling and PD Control of a Quadrotor VTOL Vehicle », Proceedings of the 2007 IEEE Intelligent Vehicles Symposium Istanbul, Turkey, June 13-15, 2007.

non linéaires Application : Système UAV de type Quadrirotor », Mémoire de Magister, université Ferhat Abbas, Sétif, 2012.

[23] Holger Voos, « Nonlinear Control of a Quadrotor Micro-UAV using Feedback Linearization », Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Mechatronics. Malaga, Spain, April 2009.

[24] Andrzej koszewnik, « the parrot uav controlled by PID controllers », acta mechanica et automatica, vol.8 N°.2 DOI 10.2478/ama-0011,2014.