

**République Algérienne Démocratique Et Populaire**  
**Ministère De L'enseignement Supérieur et De La Recherche Scientifique**



**Université de Jijel**  
**Faculté de des Sciences et de la Technologie**  
**Département d'Électronique**

**Projet de fin d'Études pour l'Obtention du Diplôme de  
Master II en Électronique**

**Option**  
**Électronique des Systèmes Embarqués**

**Thème**

**Analyse d'un système fractionnaire du  
premier ordre**

**Présenté par :**

- BOUCHEFIRAT Lotfi
- BOUHADJERA Fouzia

**Encadré par :**

Mr. AISSOUS Kamel

Année universitaire : 2019-2020

# *Remerciements*

*Tout d'abord, On tient à remercier le bon dieu le tout puissant de nous avoir donné la force et le courage de mener à bien ce modeste travail. Également on remercie nos parent qui nous ont encouragé et aidé à arriver à ce stade de ma formation.*

*Nos remerciements vont au docteur AISSOUS Kamel, notre encadreur, pour ses précieux conseils et de nous avoir guidé pour la réalisation de ce travail.*

*Nos remerciements vont également aux membre de jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail.*

*On tient à remercier tous ceux et celles qui nous ont aidé pour la rédaction de ce mémoire.*

*Durant ces cinq années, on a eu l'occasion de rencontrer un grand nombre de personnes qui ont pris le temps d'échanger avec nous et de partager leur connaissance.*

*On tient à remercier Monsieur BENKDIDEH Toufik, chef de département, et tous les membres du département.*

# *Dédicaces*

**On dédie ce modeste travail à tous ceux qui**

**nous sont cher.**

# Table des matières

Sommaire.....	V
Liste des Figures .....	VIII
Liste des Tableaux .....	XII
Liste des abréviations .....	XIV
Liste des notations.....	XVI
Introduction générale.....	1

## Chapitre 1

### Généralités sur les systèmes fractionnaires et leurs applications

1.Introduction et terminologie du fractionnaire.....	4
2.Introduction aux processus $1/f$ .....	5
3.Définition et caractérisation d'un système fractionnaire.....	6
3.1.Système fractionnaire d'ordre unique.....	7
4. Remarques .....	10

## Chapitre 2

### Systèmes fractionnaires : Fonction singulière : Représentation et Analyse

1.Introduction .....	12
2.Fonction de singularité pour le système fractionnaire d'ordre unique .....	14
3.Fonction de singularité pour le système fractionnaire de second ordre .....	20
4.Système fractionnaire multiple.....	24
5.Exemples illustratifs .....	27
5.1.Systèmes fractionnaire d'ordre unique .....	27
5.2.Systèmes fractionnaire de second ordre .....	27
5.3.Système fractionnaire multiple.....	30
6.Fonction de singularité pour certains autre types de systèmes irrationnels.....	31
7.Remarques .....	36

## Chapitre 3

### Analyse temporelle et fréquentielle d'un système du premier ordre

1.Introduction .....	41
2.Analyse temporelle .....	41
2.1.Réponse impulsionnelle.....	41
2.2.Réponse indicielle .....	41
2.3. Réponse à une rampe.....	42
3.Analyse fréquentielle.....	43
3.1.Diagramme de Bode .....	43
3.2.Diagramme de Black-Nichols .....	46
3.3. Diagramme de Nyquist.....	47
4.Remarques .....	47

## Chapitre 4

### Résultats et simulations

1.Introduction .....	49
2.Approximation d'un système fractionnaire du premier ordre .....	49
3.Programmation du système fractionnaire.....	49
3.1.Vérification de l'approximation .....	50
4.Analyse statistique d'ordre 2 .....	54
5.comparaison des modules et phases .....	66
6.Comparaison des performances entre système fractionnaire et entier .....	68
6.1.Analyse temporelle.....	68
6.1.1.signal sinusoïdal .....	68
6.1.2.signal carré.....	69
6.1.3.signal rampe.....	70
6.1.4.Signal d'impulsion .....	71
6.2.Comparaison du système fractionnaire au système du premier ordre .....	71
6.2.1.Comparaison du signal sinusoïdal .....	71

6.2.2.Comparaison du signal carré .....	72
6.2.3.Comparaison de la rampe .....	72
6.2.4.Comparaison d'impulsion .....	73
7.Conclusion .....	73

## **Chapitre 5**

### **Conclusions et perspectives**

Conclusions et perspectives.....	76
----------------------------------	----

## Chapitre 2

<b>Figure 2.1</b>	Tracé de Bode avec une pente de $-20m \text{ dB/dec}$ et son approximation sous forme de lignes droites en zig-zag avec des pentes individuelles de $-20 \text{ dB/dec}$ et $0 \text{ dB/dec}$	15
<b>Figure 2.2</b>	Méthode pour choisir les singularités (paire pôle-zéro) en supposant une erreur prescrite de $y \text{ dB}$ entre la ligne $-20m \text{ dB/dec}$ et les lignes de pentes alternatives de $-20 \text{ dB/dec}$ et $0 \text{ dB/dec}$	15
<b>Figure 2.3</b>	La Réponse fréquentielle du pôle de puissance fractionnaire et la Réponse fréquentielle de son approximation pour trois valeurs différentes de l'erreur $y$	28
<b>Figure 2.4.1</b>	Distribution des temps de relaxation du pôle de puissance fractionnaire pour l'erreur $Y = 1 \text{ dB}$	28
<b>Figure 2.4.2</b>	Distribution des temps de relaxation du pôle de puissance fractionnaire pour l'erreur $Y = 3 \text{ dB}$	29
<b>Figure 2.4.3</b>	Distribution des temps de relaxation du pôle de puissance fractionnaire pour l'erreur $Y = 6 \text{ dB}$	29
<b>Figure 2.5</b>	La réponse fréquentielle d'un système fractionnaire du second ordre donné par et de son approximation de fonction de singularité	30
<b>Figure 2.6</b>	Distribution des temps de relaxation du système fractionnaire du second ordre	31
<b>Figure 2.7</b>	La réponse fréquentielle du système fractionnaire de quatrième ordre donnée par $X(s)$ et son approximation de fonction de singularité	32
<b>Figure 2.8</b>	Distribution des temps de relaxation du système fractionnaire du quatrième ordre	32

<b>Figure 2.9.1</b>	Rapport entre un zéro et un pôle précédent par rapport à l'ordre de position pour $beta = 0.1$	36
<b>Figure 2.9.2</b>	Rapport entre un zéro et un zéro précédent par rapport à l'ordre de position pour $beta = 0.1$	36
<b>Figure 2.10.1</b>	Rapport entre un zéro et un pôle précédent par rapport à l'ordre de position pour $beta = 0.5$	37
<b>Figure 2.10.2</b>	Rapport entre un zéro et un zéro précédent par rapport à l'ordre de position pour $beta = 0.5$	37
<b>Figure 2.11.1</b>	Rapport entre un zéro et un pôle précédent par rapport à l'ordre de position pour $beta = 0.8$	43
<b>Figure 2.11.2</b>	Rapport entre un zéro et un zéro précédent par rapport à l'ordre de position pour $beta = 0.8$	45

## Chapitre 3

<b>Figure 3.1</b>	Réponse à une $\delta(t)$ , à un $u(t)$ et une $r(t)$ d'un système de premier ordre	46
<b>Figure 3.2</b>	Diagramme de Bode d'un système du premier ordre	46
<b>Figure 3.3</b>	Diagramme de Bode d'un système du premier ordre	47
<b>Figure 3.4</b>	Diagramme de Black d'un système du premier ordre	51
<b>Figure 3.5</b>	Diagramme de Nyquist d'un système du premier ordre	51

## Chapitre 4

<b>Figure 4.1.1</b>	Système fractionnaire et son approximation <b>pour <math>m=0.1</math></b>	52
<b>Figure 4.1.2</b>	Système fractionnaire et son approximation <b>pour <math>m=0.3</math></b>	52
<b>Figure 4.1.3</b>	Système fractionnaire et son approximation <b>pour <math>m=0.5</math></b>	53



<b>Figure 4.1.4</b>	Système fractionnaire et son approximation <b>pour m=0.7</b>	54
<b>Figure 4.1.5</b>	Système fractionnaire et son approximation <b>pour m=0.9</b>	54
<b>Figure 4.2.1</b>	Erreur absolue module et phase pour <b>m=0.1</b>	57
<b>Figure 4.2.2</b>	Erreur relative module et phase pour <b>m=0.1</b>	57
<b>Figure 4.2.3</b>	Erreur absolue module et phase pour <b>m=0.2</b>	58
<b>Figure 4.2.4</b>	Erreur relative module et phase pour <b>m=0.2</b>	58
<b>Figure 4.2.5</b>	Erreur absolue module et phase pour <b>m=0.3</b>	59
<b>Figure 4.2.6</b>	Erreur relative module et phase pour <b>m=0.3</b>	59
<b>Figure 4.2.7</b>	Erreur absolue module et phase pour <b>m=0.4</b>	60
<b>Figure 4.2.8</b>	Erreur relative module et phase pour <b>m=0.4</b>	60
<b>Figure 4.2.9</b>	Erreur absolue module et phase pour <b>m=0.5</b>	61
<b>Figure4.2.10</b>	Erreur relative module et phase pour <b>m=0.5</b>	61
<b>Figure4.2.11</b>	Erreur absolue module et phase pour <b>m=0.6</b>	62
<b>Figure4.2.12</b>	Erreur relative module et phase pour <b>m=0.6</b>	62
<b>Figure4.2.13</b>	Erreur absolue module et phase pour <b>m=0.7</b>	63
<b>Figure4.2.14</b>	Erreur relative module et phase pour <b>m=0.7</b>	63
<b>Figure .2.15</b>	Erreur absolue module et phase pour <b>m=0.8</b>	64
<b>Figure4.2.16</b>	Erreur relative module et phase pour <b>m=0.8</b>	64
<b>Figure4.2.17</b>	Erreur absolue module et phase pour <b>m=0.9</b>	65
<b>Figure4.2.18</b>	Erreur relative module et phase pour <b>m=0.9</b>	65
<b>Figure 4.3.1</b>	Erreur absolue moyenne module et phase	66
<b>Figure 4.3.2</b>	Erreur relative moyenne module et phase	66

<b>Figure 4.3.3</b>	Erreur absolue max module et phase	66
<b>Figure 4.3.4</b>	Erreur relative max module et phase	67
<b>Figure 4.3.5</b>	Std absolue moyenne module et phase	67
<b>Figure 4.3.6</b>	Std relative moyenne module et phase	67
<b>Figure 4.3.7</b>	Std absolue max module et phase	68
<b>Figure 4.3.8</b>	Std relative max module et phase	68
<b>Figure 4.4.1</b>	Réponse temporelle d'un signal sinusoïdal	69
<b>Figure 4.4.2</b>	Réponse temporelle d'un signal carré	69
<b>Figure 4.4.3</b>	Réponse temporelle de la rampe	70
<b>Figure 4.4.4</b>	Réponse temporelle d'un signal d'impulsion	71
<b>Figure 4.4.5</b>	Comparaison du signal sinusoïdal au système du premier ordre	71
<b>Figure 4.4.6</b>	Comparaison du signal carré au système du premier ordre	72
<b>Figure 4.4.7</b>	Comparaison de la rampe au système du premier ordre	72
<b>Figure 4.4.8</b>	Comparaison d'impulsion au système du premier ordre	73

# Liste des Tableaux

## Chapitre 4

<b>Tableau 4.1.1</b>	L'erreur absolue et relative (module et phase) pour <b>m=0.1</b>	54
<b>Tableau 4.1.2</b>	L'erreur absolue et relative (module et phase) pour <b>m=0.3</b>	54
<b>Tableau 4.1.3</b>	L'erreur absolue et relative (module et phase) pour <b>m=0.5</b>	55
<b>Tableau 4.1.4</b>	L'erreur absolue et relative (module et phase) pour <b>m=0.7</b>	55
<b>Tableau 4.1.5</b>	L'erreur absolue et relative (module et phase) pour <b>m=0.9</b>	55
<b>Tableau 2.2.1</b>	Différentes types d'erreur absolue module et phase pour <b>m=0.1</b>	57
<b>Tableau 2.2.2</b>	Différentes types d'erreur relative module et phase pour <b>m=0.1</b>	57
<b>Tableau 2.2.3</b>	Différentes types d'erreur absolue module et phase pour <b>m=0.2</b>	56
<b>Tableau 2.2.4</b>	Différentes types d'erreur relative module et phase pour <b>m=0.2</b>	56
<b>Tableau2.2.5</b>	Différentes types d'erreur absolue module et phase pour <b>m=0.3</b>	57
<b>Tableau2.2.6</b>	Différentes types d'erreur relative module et phase pour <b>m=0.3</b>	57
<b>Tableau2.2.7</b>	Différentes types d'erreur absolue module et phase pour <b>m=0.4</b>	58
<b>Tableau2.2.8</b>	Différentes types d'erreur relative module et phase pour <b>m=0.4</b>	58
<b>Tableau2.2.9</b>	Différentes types d'erreur absolue module et phase pour <b>m=0.5</b>	59
<b>Tableau2.2.10</b>	Différentes types d'erreur relative module et phase pour <b>m=0.5</b>	59
<b>Tableau2.2.11</b>	Différentes types d'erreur absolue module et phase pour <b>m=0.6</b>	60
<b>Tableau2.2.12</b>	Différentes types d'erreur relative module et phase pour <b>m=0.6</b>	60
<b>Tableau2.2.13</b>	Différentes types d'erreur absolue module et phase pour <b>m=0.7</b>	61
<b>Tableau2.2.14</b>	Différentes types d'erreur relative module et phase pour <b>m=0.7</b>	61

<b>Tableau2.2.15</b>	Différentes types d'erreur absolue module et phase pour <b>m=0.8</b>	62
<b>Tableau2.2.16</b>	Différentes types d'erreur relative module et phase pour <b>m=0.8</b>	62
<b>Tableau2.2.17</b>	Différentes types d'erreur absolue module et phase pour <b>m=0.9</b>	63
<b>Tableau2.2.18</b>	Différentes types d'erreur relative module et phase pour <b>m=0.9</b>	63

## Liste des abréviations

<b>QRS</b>	Spectre de puissance de la dépolarisation ventriculaire
<b>CPE</b>	élément à phase constante
<b>FPP</b>	Pôle de puissance fractionnaire
<b>NIC</b>	Convertisseur d'impédance négative

## Liste des notations

$k$	Constante
$a$	Paramètre de mise à l'échelle
$b$	Paramètre de mise à l'échelle
$\mu$	Facteur de puissance
$S$	La fréquence complexe
$1/f^m$	L'équation de la loi de puissance inverse
$X(s)$	L'équation d'un système fractionnaire
$P_T$	La fréquence de coin
$1/P_{T_i}$	Les constantes de temps de relaxation
$m_i$	Les facteurs de puissance
$G(\tau)$	La fonction de distribution
$\tau$	Le temps de relaxation
$G_1(\tau)$	La version échantillonnée
$\delta(.)$	La fonction delta
$\tau_i$	Les temps de relaxation de l'échantillonnage
$\tau_0$	Le premier et le plus proche de la fréquence de coin
$A$	Constante
$P_n$	Les pôles
$Z_n$	Les zéros
$N$	Le nombre de pôle-zéro paires
$1/P_T$	La constante du temps de relaxation
$P_T$	La fréquence de coin

$y$	L'erreur
$P_0$	Le premier pôle
$Z_0$	Le premier zéro
$P_1$	Le second pôle
$Z_1$	Le deuxième zéro
$Z_{N-1}$	Le Nième zéro
$P_N$	Le (N+1)ième pôle
$m$	La dimension fractionnaire
$a$	Le rapport de localisation d'un zéro à un pôle précédent
$b$	Le rapport de localisation d'un pôle à un zéro précédent
$\Delta$	Delta
$ X(j\omega) $	Fonction de loi de puissance inverse
$k_i$	Les coefficients
$X(t)$	La fonction du système dans le domaine temporel
$R_i$	La résistance
$C_i$	Le condensateur
$k_0$	Le premier coefficient
$\omega_n$	La fréquence naturelle
$\zeta$	La constante d'amortissement
$X_a(s)$	La fonction d'approximation d'un système fractionnaire ( $0 < m \leq 0.5$ )
$X_b(s)$	La fonction d'approximation d'un système fractionnaire ( $0.5 < m < 1$ )
$\beta$	Béta

$k_j$	Les résidus (réels et positifs)
$P_{T_i}$	Les fréquences de coin
$ab$	Le rapport de localisation d'un pôle au précédent
$N_i$	Nombres de singularités pour chaque section
$\lambda$	Rapport d'un pôle à un précédent
$e$	Entrée
$s$	Sortie
$k$	Gain statique
$\tau$	Constante de temps
$H(P)$	La transformée de Laplace
$\sigma(t)$	Dirac unitaire
$\delta(t)$	L'impulsion
$L^{-1}[S(p)]$	La transformée inverse de la Laplace
$tr$	Temps de réponse
$t_m$	Temps de montée
$\varphi(w)$	Déphasage
$\delta(t)$	La réponse impulsionnelle
$u(t)$	La réponse indicielle
$r(t)$	La réponse à une rampe
$\varepsilon$	L'erreur de traînage
$w$	La pulsation
$H$	Module
$\varphi$	L'argument
$H_m$	La réponse fréquentielle d'un système fractionnaire
$H_{app}$	La réponse fréquentielle de l'approximation



## Introduction générale

Les chercheurs de nombreux phénomènes physiques ont été confrontés au problème de l'étude des systèmes complexes dont les propriétés macroscopiques de l'interaction d'un grand nombre de composants microscopiques. Cette nature composite provoque souvent certaines difficultés mathématiques dans leur étude. Aussi, de nombreux types de fonctions irrationnelles ont été dérivés pour leur modélisation mathématique dans le domaine de la transformation de Laplace.

Le concept de fractionnaires ou géométrie fractionnaire est une extension de la géométrie classique, il fournit à la fois une description précise et un modèle mathématique pour de nombreuses structures physiques complexes trouvées dans la nature. Souvent, ces structures ont tendance à être mises à l'échelle ou auto-similaires, ce qui implique que le degré de leurs irrégularités est presque identique à toutes les échelles. Cette invariance simplificatrice remarquable sous des changements de grossissement ou d'autosimilarité est la qualité essentielle des fractionnaires dans la nature, qui peut être quantifié par une dimension fractionnaire, un nombre qui est d'accord avec notre notion intuitive de dimension mais n'a pas besoin d'être un entier.

La pente fractionnaire sur la parcelle log-log de Bode a longtemps été observée dans la caractérisation d'un large éventail de processus naturels appelés systèmes fractionnaires. Ce comportement de puissance non-entière provoque souvent certaines difficultés mathématiques dans l'étude des systèmes fractionnaires.

Pour comprendre le comportement dynamique de ces systèmes fractionnaires une analyse à grande échelle doit être faite. En raison de leur représentation mathématique dans le domaine fréquentiel sont les fonctions irrationnelles, les méthodes d'analyse directe et le comportement du domaine temporel correspondant semblent très difficiles à gérer. Par conséquent, pour les besoins de l'analyse, synthèse, et des simulations de telles fonctions irrationnelles, le besoin d'une fonction rationnelle d'approximation.

Ce mémoire est divisé en cinq chapitres organisés de la façon suivante :

Dans le premier chapitre, on présentera des généralités sur les systèmes fractionnaires et leurs applications selon leurs notions de bases

Dans le deuxième chapitre, on présentera une revue avec des exemples illustratifs sur l'analyse de la fonction de singularité pour le système d'ordre unique, de la fonction de singularité pour le système de second ordre, et de système fractionnaire multiple, après on présentera la fonction de singularité pour certains autre types de systèmes irrationnels.

Dans le troisième chapitre, on présentera l'analyse temporelle et fréquentielle d'un système fractionnaire du premier ordre.

Le quatrième chapitre sera consacré à l'application des analyses et les représentations précédentes. Il comprendra des simulations MATLAB, les résultats obtenus seront traités et étudié.

Dans le dernier chapitre, des conclusions et perspectives sont données à la fin de ce mémoire.

# Chapitre 1

## Généralités sur les systèmes fractionnaires et leurs applications

---

**1 Introduction et terminologie des fractionnaires**

**2 Introduction aux processus  $1/f$**

**3 Définition et caractérisation d'un système fractionnaire**

**4 Remarques**

---

## 1. Introduction et terminologie des fractionnaires

Traditionnellement la géométrie Euclidienne a servi comme base de la compréhension intuitive de la géométrie de la nature. Cependant, la complexité et l'irrégularité des objets naturels d'une taille allant de l'échelle atomique à la taille de l'univers comme les trajectoires des particules, lignes d'écoulement hydrodynamiques, et les vagues; paysages, montagnes, îles, rivières, glaciers et sédiments; grains dans la roche, les métaux, et les matériaux composites; les plantes, les insectes et les cellules, ainsi que la structure des cristaux, des produits chimiques et éléments anatomiques tels que les poumons, les cœurs; ont mis les scientifiques au défi de développer des concepts géométriques pour ces formes[1]. Pour répondre à ce défi, Mandelbrot, avec son travail créatif et monumental, a conçu et développé d'une manière exceptionnellement inspirante une nouvelle géométrie de la nature qu'il a appelée fractionnaires.

Le concept de fractionnaires ou géométrie fractionnaire est une extension de la géométrie classique, il fournit à la fois une description précise et un modèle mathématique pour de nombreuses structures physiques complexes trouvées dans la nature. Souvent, ces structures ont tendance à être mises à l'échelle ou auto-similaires, ce qui implique que le degré de leurs irrégularités est presque identique à toutes les échelles. Cette invariance simplificatrice remarquable sous des changements de grossissement ou d'autosimilarité est la qualité essentielle des fractionnaires dans la nature, qui peut être quantifié par une dimension fractionnaire, un nombre qui est d'accord avec notre notion intuitive de dimension mais n'a pas besoin d'être un entier.

**La dimension fractionnaire** est un terme inventé par Mandelbrot. Les formes compliquées peuvent être caractérisées par ce nombre ce qui donne une mesure numérique du degré de leurs irrégularités. Le calcul de la dimension fractionnaire pour un phénomène donné dépend fortement de l'application. Par exemple, étant donné un objet auto-similaire de N Parties mises à l'échelle par un rapport r de l'ensemble, sa dimension fractionnaire est donnée par :

$$\text{La dimension fractionnaire} = \frac{\log(N)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)}$$

Une explication détaillée de la définition empirique de la dimension est donnée par Mandelbrot [2]. La définition de dimension ci-dessus est un cas particulier d'un concept plus général, appelé dimension Hausdorff, par exemple, un point, une ligne droite et un plan ont une dimension topologique de zéro, un et deux respectivement.

**La mise à l'échelle** est un concept plus large lié aux fractionnaires auto-similaires. C'est le terme utilisé pour une fonction qui satisfait la relation suivante :

$$F(x) = \frac{1}{a} F(bx)$$

Où  $a > 1$ ,  $b > 1$  et  $a < b$ . Cela signifie qu'un ordre de grandeur augmentation ou diminution de l'échelle entraîne un ordre de grandeur diminution ou augmentation de l'amplitude respectivement. Une solution de l'équation fonctionnelle ci-dessus est donnée comme suit :

$$F(x) = K x^\mu$$

Où  $K$  est une constante, " $a$ " et " $b$ " sont appelés paramètres de mise à l'échelle et liés au facteur de puissance  $\mu$  comme suit :

$$\mu = \frac{\log(a)}{\log(b)}$$

## 2. Introduction aux processus $1/f$

Une fonction de puissance fractionnaire dépendant de la fréquence, ou de manière équivalente, une pente fractionnaire sur la parcelle log-log Bode a longtemps été observée pour caractériser un large éventail de processus naturels, y compris certains types de bruit électrique, comportement de relaxation des impédances polarisées dans les diélectriques et les interfaces, lignes de transmission, rythme cardiaque, spectre de puissance de la dépolarisation ventriculaire (QRS) forme d'onde densités spectrales de la musique [3],[4],[5],[6], température saisonnière moyenne, quantité annuelle de précipitations, taux de flux de trafic [7], [8], taux d'absorption d'insuline par les diabétiques [9] et Données économiques [10]. Ces processus omniprésents sont bien connus sous le nom de processus  $1/f$  (et  $1/f^\beta$ ). Les systèmes dans lesquels ces phénomènes sont observés vont du physique au biologique en passant par le social.

Bien que leur origine reste un mystère, ils représentent le type de processus le plus commun trouvés dans la nature [11]. Mandelbrot a été le premier à reconnaître à quel point le bruit  $1/f^\beta$  est répandu dans la nature. Il a également étudié comment les courbes qui représentent ces bruits sont liées aux fractionnaires [12]. Largement inspiré par le travail séminal sur le mouvement brownien fractionnaire de Mandelbrot et Van Ness [10], un corpus considérable de littérature a évolué qui explore ces processus  $1/f^\beta$  parce qu'ils constituent une classe de plus en plus importante pour une variété d'applications en raison de la grande variété de données dont pour lesquelles ils sont intrinsèquement bien adaptés [2]. L'équation qui est couramment utilisé pour les décrire est connue comme l'équation de la loi de puissance et a été exprimée comme :

$$X(s) = \frac{K}{s^m}$$

Où  $K$  est une constante positive,  $s = j\omega$  est la fréquence complexe et  $m$  est un nombre réel positif et peut également être appelé comme la dimension fractionnaire ou l'exposant de mise à l'échelle. Ce comportement a également été connu comme le comportement de l'élément

à phase constante (CPE) qui a longtemps été observé dans la caractérisation de l'impédance de certains types d'interfaces métal-électrolyte [13]. Le CPE est un élément analogique empirique qui est dépend de fréquence utilisé pour modéliser ce type de comportement ou combiné avec d'autres éléments analogiques pour modéliser d'autres fonctions comme la fonction Cole-Cole [14].

La présence de spectres  $1/f$  dans un groupe aussi diversifié de systèmes a permis aux chercheurs de spéculer qu'il existe une loi profonde de la nature qui s'applique à ces systèmes et résultats à des spectres  $1/f$ . On est en effet tenté de soupçonner la présence d'une loi physique sous-jacente qui expliquerait l'existence de processus  $1/f$  dans tant de situations naturelles différentes. Par conséquent, un problème central concerne la compréhension des mécanismes responsables pour la genèse de leur spectre de loi de puissance. Bien que beaucoup de temps et d'énergie ont été déployés sur le développement de modèles physiques pour expliquer leur comportement depuis leur introduits par Van Der Ziel retour 1950 [15], il n'y a eu aucun modèle mathématique simple pour les représenter autre que l'hypothèse tautologique d'une distribution spécifique des constantes de temps [11].

Le concept de fractionnaires ou géométrie fractionnaires a attiré l'imagination des scientifiques dans de nombreux domaines et les articles traitant des fractionnaires dans divers contextes apparaissent maintenant presque quotidiennement. Ils sont devenus par la suite une stratégie respectable pour comprendre les systèmes dont les interactions microscopiques sont trop complexes pour être suivies en détail. Certains des mécanismes responsables de la propriété de la loi de puissance des phénomènes  $1/f$  ont été démontrés comme étant médiés par la nature fractionnaire de ces phénomènes eux-mêmes. Par conséquent, ces observations suggèrent un nouveau lien dynamique entre les fractionnaires et la théorie des systèmes. Et le terme de système fractionnaire a été introduit pour désigner ces types de processus.

### 3. Définition et caractérisation d'un système fractionnaire

Comme indiqué ci-dessus les systèmes fractionnaires ont été généralement représentés dans le domaine fréquentiel par :

$$X(s) = \frac{K}{s^m}$$

Où  $K$  est un nombre positif,  $s = j\omega$ , et  $m$  est un nombre réel positif. Cependant, dans la plupart des cas, le système présente généralement une magnitude finie à très basse fréquence ou  $S \rightarrow 0$ . Par conséquent, il a été proposé que le système fractionnaire qui a été représenté comme l'équation de la loi de puissance inverse ou  $1/f^m$ , où  $m$  est n'importe quel nombre réel, peut mieux être représenté par un pôle de puissance fractionnaire (FPP) comme suit :

$$X(s) = \frac{1}{(1 + \frac{s}{p_T})^m} \quad (1.1)$$

Où  $P_T$  est la fréquence de coin et  $s = j\omega$ . Ce type d'expression donne un bien meilleure représentation des phénomènes naturels car sa magnitude de basse fréquence est finie au lieu d'infini. Pour les systèmes plus complexes où la pente peut varier d'une valeur réelle à une autre, ils peuvent alors être facilement représentés par une équation plus générale de FPP multiple donnée comme suit :

$$X(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^P (1 + \frac{s}{P_T i})^{m_i}} \quad , 0 < m_i < 1 \quad ; \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, P$$

Où les  $1/P_{T_i}$  sont les constantes de temps de relaxation, les  $m_i$  sont les facteurs de puissance, et  $S = j\omega$ .

### 3.1. Système fractionnaire d'ordre unique

On définit le système fractionnaire unique ordre unique ou le FPP unique, comme dans l'équation. (1.1), où  $0 < m < 1$ , comme la structure de base des systèmes fractionnaires qui peuvent être représentés par les modèles de pôles de puissance fractionnaires, avec  $s = j\omega$  et  $P_T$  la fréquence de coin dans le tracé log-log de Bode. La Transformée de Laplace inverse de ce FPP unique est donnée comme :

$$X(t) = C t^{(m-1)} e^{-tP_T}$$

La représentation du domaine temporel ci-dessus du système fractionnaire représentée par l'expression FPP unique est un type de fonction de mise à l'échelle [1].

Davidson et Cole [16] ont constaté que les coefficients diélectriques complexes pour certains types de liquide peuvent être représentés par l'équation FPP unique et si  $m = 1$ , il devient le type Debye ou un seul pôle réel négatif ou une seule exponentielle [17]. Ils ont également utilisé la formule Fuoss-Kirkwood [18] qui consiste à obtenir la fonction de distribution ou la distribution des temps de relaxation directement à partir de la fonction de transfert d'origine, pour obtenir la fonction de distribution pour le FPP unique qu'ils ont trouvé comme :

$$G(\tau) = \frac{\sin(m\pi)}{\pi} \left( \frac{\tau}{t_T - \tau} \right)^m \quad \tau < \tau_T$$

$$G(\tau) = 0 \quad \tau > \tau_T$$

Ou

$$G(\tau) = C_0 \tau^m \quad \text{pour } \tau \ll \tau_T$$

Où  $\tau$  est le temps de relaxation,  $\tau_T = 1/P_T$  et  $C_0 = \sin(m\pi)/\pi(\tau_T)^m$ .

Par conséquent, la fonction du système est donnée comme suit :

$$X(s) = \int_0^\infty \frac{G(\tau)}{(1+s\tau)} d\tau$$

On prends la Transformée de Laplace inverse de l'équation ci-dessus des deux côtés, nous avons :

$$X(t) = \int_0^{\infty} \frac{G(\tau)}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} d\tau \quad (1.2)$$

Ce qui est le même que le cas  $1/f$  comme décrit par West et Shlesinger [19] si on remplace  $G(\tau)/\tau$  par  $P(\tau)$ , où  $P(\tau)$  a été défini par eux comme la fonction de distribution dans le cas non déterministe et a été montré qu'il se comporte comme la loi de puissance inverse.

Pour contourner les difficultés mathématiques dans l'utilisation de la fonction  $G(\tau)$ , on a utilisé sa version échantillonnée  $G_1(\tau)$  qui est donnée comme suit :

$$G_1(\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} G(\tau_i) \delta(\tau - \tau_i)$$

Où  $\delta(\cdot)$  est la fonction delta et  $\tau_i$  sont les temps de relaxation de l'échantillonnage donnée comme suit :

$$\tau_i = \frac{\tau_0}{(\lambda)^i} \quad , \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, \dots$$

Avec  $\lambda$  une constante positive qui peut être définie comme le rapport de deux temps de relaxation successifs et  $\tau_0$  est le premier et le plus proche de la fréquence de coin  $\tau_T$  de la FPP unique, et  $G(\tau_i)$  est donné comme :

$$G(\tau_i) = C_0 \tau_i^m = C_0 \frac{\tau_0^m}{(\lambda^m)^i} = \frac{C_1}{\alpha^i}$$

Où  $C_1 = C_0 \tau_0^m$  et  $\alpha = \lambda^m$ ,

Donc,  $G_1(\tau)$  peut être réécrit comme :

$$G_1(\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} G(\tau_i) \delta(\tau - \tau_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{C_1}{\alpha^i} \delta(\tau - \tau_i)$$

Remplacer  $G_1(\tau)$  dans l'équation. (1.2) qui devient :

$$X(t) = C_1 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^i} \frac{1}{\tau_i} e^{-\frac{t}{\tau_i}}$$

$$X(t) = C_2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^i} (\lambda^i) e^{-t \lambda^i \omega_0}$$

Où  $C_2 = C_1/\tau_0$  et  $\omega_0 = 1/\tau_0$ .

Ainsi, comme  $\lambda \rightarrow 1$  nous devrions pour avoir l'équation ci-dessus convergent pour :

$$X(t) = C t^{(m-1)} e^{-t \omega_T}$$

Comme  $\lambda \rightarrow 1$ , on peut écrire  $\lambda = (1 + \varepsilon)$  où  $\varepsilon \rightarrow 0$ , ensuite nous pouvons faire l'approximation suivante :



$$\lambda^i = (1 + \varepsilon)^i \cong 1 + i\varepsilon$$

Alors  $X(t)$  est donné comme :

$$X(t) = C_2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^i e^{-t\omega_0(1+i\varepsilon)} = C_2 e^{-t\omega_0} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^i e^{-t\omega_0(i\varepsilon)} \quad (1.3)$$

Définissons :

$$u(t) = X(t) e^{t\omega_0} = C_2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^i e^{-t\omega_0(i\varepsilon)} \quad (1.4)$$

À partir de l'équation. (1.3), on peut écrire :

$$X(\lambda t) = C_2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^i e^{-t\lambda^{i+1}\omega_0} = C_2 e^{-t\omega_0} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^i e^{-t\omega_0(i+1)\varepsilon}$$

Et aussi

$$u(\lambda t) = X(\lambda t) e^{\lambda t\omega_0} = C_2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^i e^{-t\omega_0(i+1)\varepsilon} \quad (1.5)$$

Comme  $\lambda \rightarrow 1$ ,  $\lambda\omega_0 \approx \omega_0 \approx \omega_T$ , ensuite comparez éq. (1.4) et éq. (1.5), nous avons :

$$u(t) = \frac{\lambda}{\alpha} u(\lambda t) + C_2$$

On se limite au comportement dominant de la solution de l'équation ci-dessus, alors:

$$u(t) = \frac{\lambda}{\alpha} u(\lambda t)$$

Qui a la solution :

$$u(t) = At^\mu \quad (1.6)$$

Où  $A$  peut être constant et  $\mu$  est déterminé par substitution directe à être :

$$\mu = \frac{\log\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)}{\log(\lambda)} = \frac{\log(\alpha)}{\log(\lambda)} - 1 = m - 1 \quad (1.7)$$

Par conséquent à partir des équations (1.4), (1.6) et (1.7), nous pouvons écrire  $X(t)$  comme :

$$X(t) = u(t) e^{-t\omega_T} = A t^{m-1} e^{-t\omega_T}$$

Qui est un type de fonction d'échelle avec :

$$m = \frac{\log \alpha}{\log \lambda}$$

Cela montre clairement que le système FPP est un système fractionnaire.

#### 4. Remarques

Le FPP unique a été introduit par Davidson et Cole pour représenter le phénomène de relaxation diélectrique dans le Glycérol et le Propylène Glycol et pour montrer la différence par rapport au modèle Debye pour le n-Propylène.

Il est proposé l'utilisation du FPP pour représenter les systèmes fractionnaires au lieu de  $1/f^m$ , où  $m$  est un nombre réel, parce qu'il donne une bien meilleure représentation du phénomène naturel en raison de sa magnitude de basse fréquence finie au lieu d'infinie en prouvant que la fonction de domaine temporel correspondant au FPP unique est une fonction de type de mise à l'échelle.

Le FPP unique est également la structure de base pour ce type de représentation parce que le facteur de puissance  $m$  est  $0 < m < 1$ . La représentation FPP est plus ou moins un modèle déterministe alors que le  $1/f^m$  est un modèle non- déterministe.

**Systèmes fractionnaires : Fonction singulière :  
Représentation et Analyse**

---

**1 Introduction**

**2 Fonction de singularité pour le système fractionnaire d'ordre unique**

**3 Fonction de singularité pour un système fractionnaire du second ordre**

**4 Système fractionnaire multiple**

**5 Exemples illustratifs**

**6 Fonction de singularité pour certains autres types de systèmes irrationnels**

**7 Remarques**

---

## 1. Introduction

Les chercheurs de nombreux phénomènes physiques ont été confrontés au problème de l'étude des systèmes complexes dont les propriétés macroscopiques de l'interaction d'un grand nombre de composants microscopiques. Cette nature composite provoque souvent certaines difficultés mathématiques dans leur étude. Aussi, de nombreux types de fonctions irrationnelles ont été dérivés pour leur modélisation mathématique dans le domaine de la transformation de Laplace. Un large éventail de processus ont été connus pour présenter une fonction de puissance fractionnaire dépendant de la fréquence. Ces types de processus sont classés comme des processus de type  $1/f$  ou Systèmes fractionnaires. Leurs fonctions irrationnelles de représentation dans le domaine fréquentiel sont les modèles de pôle de puissance fractionnaire qui sont donnés comme suit :

$$X(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^P (1 + \frac{s}{P_{T_i}})^{m_i}} \quad , \quad 0 < m_i < 1 \quad , \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, P$$

Où  $s = j\omega$ , les  $P_{T_i}$  sont réels ou complexes, dans ce dernier cas nous devons avoir une paire de complexe conjugué avec le même facteur de puissance pour un système réel, et les  $m_i$  sont leurs facteurs de puissance. Pour les  $P_{T_i}$  réelles le système peut être appelé système de relaxation fractionnaire et les  $1/P_{T_i}$  sont les constantes globales de temps de relaxation du système.

Pour comprendre le comportement dynamique de ces systèmes fractionnaires une analyse à grande échelle doit être faite. En raison de leur représentation mathématique dans le domaine fréquentiel par des fonctions irrationnelles, les méthodes d'analyse directe et le comportement du domaine temporel correspondant semblent très difficiles à gérer. Par conséquent, pour les besoins de l'analyse, synthèse, et des simulations de telles fonctions irrationnelles, la nécessité d'une fonction rationnelle d'approximation s'impose.

Afin de représenter, par un réseau linéaire ou par ordinateur analogique ou numérique la fonction de transfert de pôle de puissance fractionnaire de base qui est appelée le seul FPP (pôle de puissance fractionnaire) donné comme suit :

$$X(s) = \frac{1}{(1 + \frac{s}{P_T})^m} \quad , \quad 0 < m < 1 \quad \text{et } s = j\omega$$

H. Sun et al. L'ont approximé par une fonction rationnelle d'ordre inférieur (rapport d'un polynôme du premier ordre à un polynôme du second ordre) en utilisant la méthode d'approximation Pade qui consiste à approximer le FPP par son expansion de Taylor sur l'origine [20]. Cette approximation ne reproduit que la réponse en fréquence FPP réelle jusqu'à sa fréquence de coin (corner frequency in Bode plot). Cependant, au-delà de cette fréquence, l'approximation s'écarte progressivement de la FPP.

Y. Tsao et B. Onaral ont également proposé une approximation rationnelle de la fonction FPP unique dans le domaine fréquentiel qu'ils ont appelé approche de la fonction de singularité, comme suit [21] :

$$X(s) = \frac{1}{(1+\frac{s}{P_T})^m} \cong \prod_{n=1}^N \frac{(1+\frac{s}{Z_n})}{(1+\frac{s}{P_n})}$$

Où  $P_n$  sont les pôles,  $Z_n$  sont les zéros de l'approximation et  $N$  est le nombre de pôle-zéro paires. Les singularités (pôle-zéro) sont telles que :

$$\frac{Z_n}{P_n} = a \text{ et } \frac{P_{n+1}}{Z_n} = b$$

$$\text{pour } n = 1, 2, \dots, N$$

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{Z_{n+1}}{Z_n} = ab$$

Soit les pôles et les zéros sont générés selon deux progressions géométriques avec le même rapport  $ab$ , un nombre qui est choisi en fonction de l'échelle de la structure ou de l'échelle de vue, et les premiers éléments correspondants sont  $P_T$ , la  $-3m \text{ dB}$  coin fréquence de la unique FPP, pour les pôles et  $aP_T$  pour les zéros de telle sorte que le coefficient  $a$  soit lié à la dimension fractionnaire  $m$  et au nombre  $ab$  par l'équation suivante :

$$m = \frac{\log(a)}{\log(ab)}$$

Cette approche de fonction de singularité a été utilisée pour représenter la fonction de pôle de puissance fractionnaire dans les cas de FPP unique et de FPP multiple. Par expansion partielle de la fraction des approximations de la fonction rationnelle la fonction de distribution discrète des temps de relaxation est obtenue comme les résidus des pôles par rapport aux temps de relaxation correspondants pour les deux cas pour le FPP unique et pour le FPP multiple [22].

Modifier l'approche de la fonction de singularité pour approximer le FPP unique en utilisant une erreur et une bande passante spécifiées pour déterminer le nombre de paires pôle-zéro. La méthode commence avec une erreur spécifiée dans  $\text{dB}$ , et à partir de laquelle les valeurs pour  $a$  et  $b$  liés à la dimension fractionnaire  $m$  sont obtenues. Où les pôles et les zéros peuvent être facilement générés selon une progression géométrique comme il a été constaté dans d'autres approches [22]. Ainsi, la combinaison de toutes ces fonctions de singularité correspondant à différentes sections du système fractionnaire multiple constituera l'approximation globale de la fonction de singularité du système fractionnaire multiple.

Il a été prouvé que la condition de réalité positive pour les systèmes fractionnaires qui peuvent être représentés par des pôles de puissance fractionnaires, est-ce que la pente nette de

la courbe du spectre de fréquences sur le graphique log-log ne doit pas dépasser  $20 \text{ dB}$  par décade [23]. Si la condition de réalité positive pour ces systèmes fractionnaires est satisfaite nous pouvons dire qu'il s'agit de systèmes passifs et qu'ils peuvent être physiquement réalisables par des réseaux électriques passifs sous la forme d'immittances de point de conduite.

L'approximation de la fonction de singularité des systèmes de relaxation fractionnaire conduit à une structure constituée de pôle-zéro tout sur l'axe réel négatif du plan de fréquence complexe. Donc, les systèmes que nous allons utiliser dans ce travail sont tous de type causal réel avec un comportement de phase l'exploitation minimum. Par conséquent, les spectres de phase de ces systèmes peuvent également être facilement construits tels que définis par la théorie de Bode.

## 2. Fonction de singularité pour le système fractionnaire d'ordre unique

Un système fractionnaire d'ordre unique peut être modélisé dans le domaine fréquentiel par la fonction de transfert d'un seul pôle de puissance fractionnaire comme suit :

$$X(s) = \frac{1}{(1+\frac{s}{P_T})^m}, \quad 0 < m < 1 \quad (2.1)$$

Où  $s = j\omega$  et  $1/P_T$  est la constante du temps de relaxation.

Comme indiqué dans la figure. (2.1), la ligne avec une pente de  $-20m \text{ dB/décade}$  est approximée par un certain nombre de lignes en zig-zag reliées entre elles avec des pentes alternatives de  $0 \text{ dB/décade}$  et  $-20 \text{ dB/décade}$  qui correspondent à un pôle alternatif et des zéros. Les propriétés de haute et de basse fréquence de la magnitude de la fonction de transfert avec un seul pôle de puissance fractionnaire suggèrent que les singularités les plus élevées de l'approximation de la fonction de transfert doivent être des pôles. Ainsi l'équation (2.1) sera telle que représentée par sa paire pôle-zéro comme :

$$X(s) = \frac{1}{(1+\frac{s}{P_T})^m} \cong \frac{\prod_{i=0}^{N-1} (1+\frac{s}{Z_i})}{\prod_{i=0}^N (1+\frac{s}{P_i})} \quad (2.2)$$

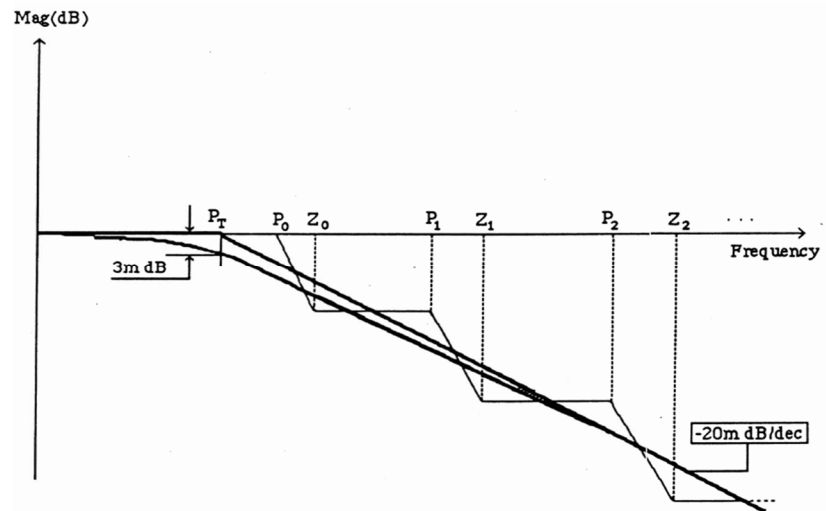
Où  $N$  est un nombre entier très grand. Pour une gamme finie de fréquence ou une bande passante finie, un nombre modéré  $N$  peut être déterminé par la fréquence de coin  $P_T$ , l'erreur  $y$  et la bande de fréquence du système

Une méthode pour choisir les singularités (la paire pôle-zéro) pour l'approximation est développé comme suit : supposons que l'écart maximum ou l'erreur maximale entre les lignes en zig-zag et la ligne désirée est choisie pour être  $y \text{ (dB)}$  ( $y$  est un nombre positif) comme indiqué sur la figure. (2.2). Ensuite les pôles et les zéros de la fonction de singularité peuvent être obtenus comme suit [24] :

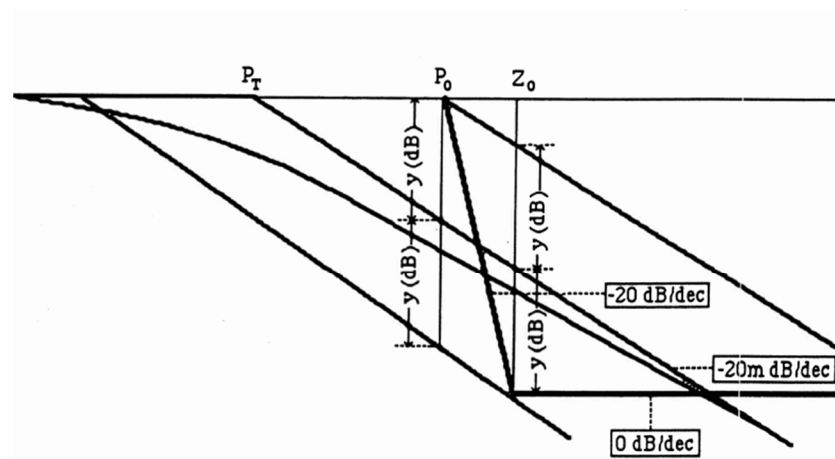
le premier pôle,  $P_0 = P_T 10^{\left[\frac{y}{20m}\right]}$

Le premier zéro,  $Z_0 = P_0 10^{\left[\frac{y}{10(1-m)}\right]}$

le second pôle,  $P_1 = Z_0 10^{\left[\frac{y}{10m}\right]}$



**Figure. (2.1)** Tracé de Bode avec une pente de  $-20m \text{ dB/dec}$  et son approximation sous forme de lignes droites en zig-zag avec des pentes individuelles de  $-20 \text{ dB/dec}$  et  $0 \text{ dB/dec}$



**Figure. (2.2)** Méthode pour choisir les singularités (paire pôle-zéro) en supposant une erreur prescrite de  $y \text{ dB}$  entre la ligne  $-20m \text{ dB/dec}$  et les lignes de pentes alternatives de  $-20 \text{ dB/dec}$  et  $0 \text{ dB/dec}$

le deuxième zéro,  $Z_1 = P_1 10^{\left[\frac{y}{10(1-m)}\right]}$

.....

$$\text{le } N\text{ième zéro, } Z_{N-1} = P_{N-1} 10^{\left[\frac{y}{10(1-m)}\right]}$$

$$\text{le } (N + 1)\text{ième pôle, } P_N = Z_{N-1} 10^{\left[\frac{y}{10m}\right]}$$

Où  $P_T$  est la fréquence de coin et est déterminée en un point de  $-3m \text{ dB}$  à partir de la fonction de transfert d'origine comme indiqué sur la figure. (2.1),  $P_0$  et le premier pôle et est déterminé par l'erreur spécifiée,  $y \text{ dB}$ , la dimension fractionnaire  $m$  et la fréquence de coin  $P_T$ .

Les constantes  $a$  et  $b$  sont définis en fonction de l'erreur  $y$  et la dimension fractionnaire  $m$  comme suit :

$$a = 10^{\left[\frac{y}{10(1-m)}\right]} \quad (2.3.a)$$

$$b = 10^{\left[\frac{y}{10m}\right]} \quad (2.3.b)$$

Puis

$$ab = 10^{\left[\frac{y}{10m(1-m)}\right]} \quad (2.3.c)$$

Donc, on obtient la distribution de ces pôles et zéros comme :

$$\frac{Z_0}{P_0} = \frac{Z_1}{P_1} = \dots = \frac{Z_{N-1}}{P_{N-1}} = a = \text{le rapport de localisation d'un zéro à un pôle précédent}$$

$$\frac{P_1}{Z_0} = \frac{P_2}{Z_1} = \dots = \frac{P_N}{Z_{N-1}} = b = \text{le rapport de localisation d'un pôle à un zéro précédent}$$

En outre, le rapport de localisation d'un pôle à un pôle précédent est égal au rapport de localisation d'un zéro à un zéro précédent et il est égal à  $ab$  ; c'est à dire.

$$\frac{Z_1}{Z_0} = \frac{Z_2}{Z_1} = \dots = \frac{Z_{N-1}}{Z_{N-2}} = ab$$

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{P_2}{P_1} = \dots = \frac{P_N}{P_{N-1}} = ab$$

D'après les relations ci-dessus on peut voir que les pôles et les zéros générés sont logarithmiquement équidistants. Ils peuvent également être générés à partir du premier pôle  $P_0$  qui est donné comme  $P_0 = P_T(b)^{0.5}$ , en utilisant l'algorithme suivant :

$$P_i = (ab)^i P_0 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \dots$$

$$Z_i = (ab)^i a P_0 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \dots$$

Il est intéressant de noter que les pôles  $P_i$  et les zéros  $Z_i$  sont tous deux sous la forme de progression géométrique avec le même rapport égal à  $ab$  et aux premiers éléments  $P_0$  et  $aP_0$ . Puis, l'approximation de la fonction de singularité peut être réécrite comme suit :



$$X(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{P_T}\right)^m} \approx \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{Z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_i}\right)} = \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{(ab)^i a P_0}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{(ab)^i P_0}\right)} \quad (2.4)$$

La pente individuelle des lignes en zig-zag est soit  $0 \text{ dB/dec}$  ou  $-20 \text{ dB/dec}$ , et la combinaison de ces lignes donne la fonction d'approximation de l'équation (2.1) qui doit avoir une pente de  $-20m \text{ dB/decade}$ . Cela peut être facilement être prouvé comme suit :

$$\text{Pente} = \frac{\Delta(20 \log |X(j\omega)|)}{\Delta(\log \omega)}$$

Donc

$$\text{Pente} = \lim_{ab \rightarrow 1} \frac{20 \log |X(jab\omega)| - 20 \log |X(j\omega)|}{\log(ab\omega) - \log(\omega)}$$

Où :

$$X(jab\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{jab\omega}{(ab)^i a P_0}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{jab\omega}{(ab)^i P_0}\right)} = \frac{\left(1 + \frac{jab\omega}{a P_0}\right)}{\left(1 + \frac{jab\omega}{P_0}\right)} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{j\omega}{(ab)^i a P_0}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{j\omega}{(ab)^i P_0}\right)} = \frac{\left(1 + \frac{jab\omega}{a P_0}\right)}{\left(1 + \frac{jab\omega}{P_0}\right)} X(j\omega)$$

Donc, pour  $\frac{\omega}{P_0} \gg 1$  ;  $|X(jab\omega)|$  devient :

$$|X(jab\omega)| = \left| \frac{1 + \frac{jab\omega}{a P_0}}{1 + \frac{jab\omega}{P_0}} \right| |X(j\omega)| \approx \frac{1}{a} |X(j\omega)| \quad (2.5)$$

Par conséquent, la pente devient :

$$\text{Pente} = \lim_{ab \rightarrow 1} \frac{20 \log \frac{|X(j\omega)|}{a} - 20 \log |X(j\omega)|}{\log(ab\omega) - \log(\omega)} \approx -20 \frac{\log(a)}{\log(ab)}$$

Ce qui implique que :

$$m = \frac{\log(a)}{\log(ab)}$$

Et à partir des définitions des nombres a et b données dans l'équation. (2.3.a) et. (2.3.b), le nombre fractionnaire m est lié à ces nombres comme suit :

$$\frac{\log(a)}{\log(ab)} = \frac{\log(10^{\lfloor \frac{y}{10(1-m)} \rfloor})}{\log(10^{\lfloor \frac{y}{10m(1-m)} \rfloor})} = \frac{\frac{y}{10(1-m)}}{\frac{y}{10m(1-m)}} = \frac{y}{10(1-m)} \times \frac{10m(1-m)}{y} = m$$

Par conséquent, on conclue que la pente résultante de l'approximation de la fonction de singularité est le même que la fonction de pôle de puissance fractionnaire unique originale. Cela a également été prouvé dans d'autres approches de fonction de singularité [22].

A partir d'un autre point de vue, l'approximation de la fonction de singularité a un comportement de loi de puissance inverse qui équivaut à dire que l'approximation de la fonction

de singularité a une pente fractionnaire sur le tracé de Bode. L'équation. (2.5) peut également être écrit comme :

$$|X(j\omega)| \cong a|X(jab\omega)|$$

Ainsi,  $|X(j\omega)|$  obéit à la propriété de mise à l'échelle. Donc, l'équation fonctionnelle ci-dessus a la solution suivante :

$$|X(j\omega)| = K\omega^\mu$$

Où  $K$  est une constante et  $\mu$  est donné par :

$$\mu = \frac{\log(\frac{1}{a})}{\log(ab)} = -\frac{\log(a)}{\log(ab)} = -m$$

Par conséquent,  $|X(j\omega)|$  est une fonction de loi de puissance inverse donnée comme :

$$|X(j\omega)| = \frac{K}{\omega^m}$$

La fonction de distribution discrète en utilisant l'expansion partielle de la fraction de la fonction rationnelle l'équation. (2.4), comme suit :

$$X(s) \approx \frac{\prod_{i=0}^{N-1} (1 + \frac{s}{(ab)^i a P_0})}{\prod_{i=0}^N (1 + \frac{s}{(ab)^i P_0})} = \sum_{i=0}^N \frac{k_i}{(1 + \frac{s}{(ab)^i P_0})} \quad (2.6)$$

Où les coefficients  $k_i$  peuvent facilement être déterminés comme suit :

$$k_i = \frac{\prod_{j=0}^{N-1} [1 - \frac{(ab)^j P_0}{(ab)^j a P_0}]}{\prod_{j=0, j \neq i}^N [1 - \frac{(ab)^j P_0}{(ab)^j P_0}]} = \frac{\prod_{j=0}^{N-1} [1 - \frac{(ab)^{(i-j)}}{a}]}{\prod_{j=0, j \neq i}^N [1 - (ab)^{(i-j)}]} \quad , \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (2.7)$$

L'ensemble des coefficients  $k_i$  pour les pôles réels sont connus comme les résidus des pôles. Ces résidus représentent la contribution de chaque pôle au processus global de relaxation. Ainsi, la fonction de ces résidus par rapport aux temps de relaxation correspondants constitue la fonction de distribution bien connue des temps de relaxation, ou le spectre de distribution [25], qui est donné par :

$$G(\tau) = \sum_{i=0}^N k_i \delta(\tau - \tau_i) \quad (2.8)$$

Où  $\tau_i = \frac{1}{(ab)^i P_0}$  est le temps de relaxation, et  $\delta(\cdot)$  est la fonction delta.

Ainsi, l'approximation correspondante de la fonction du système dans le domaine temporel est obtenue en prenant la Transformée de Laplace inverse des deux côtés de l'équation. (2.6), et est donné comme suit :

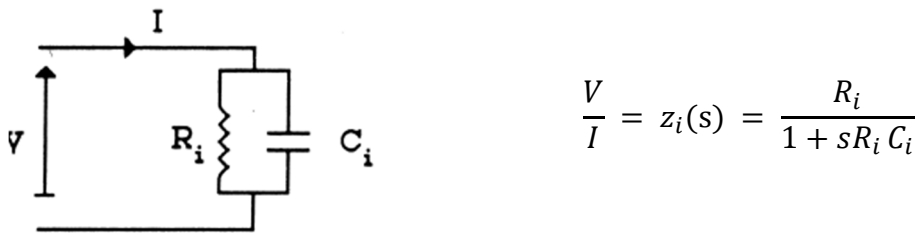
$$X(t) = \sum_{i=0}^N k_i (ab)^i P_0 e^{-t(ab)^i P_0}$$

L'équation (2.6) est une somme des éléments de base donnés comme suit :

$$X(s) = \frac{k_i}{1+s\tau_i} \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, N$$

Où  $\tau_i = 1/(ab)^i P_0$  et  $k_i$  sont comme donnés dans l'équation (2.7)

Chaque élément  $X_i(s)$  pour  $i = 0, 1, \dots, N$  peut alors être facilement remplacé, à son tour, par le circuit de Foster des résistances et des condensateurs comme :



En comparant les deux équations ci-dessus les valeurs de la résistance  $R_i$  et du condensateur  $C_i$  peuvent être facilement obtenues comme suit :

$$R_i = k_i \quad \text{et} \quad C_i = \tau_i/k_i \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, N$$

De la définition des coefficients  $k_i$  dans l'équation (2.7), il peut être facilement montré que :

$$\frac{k_{i+1}}{k_i} \approx \frac{1}{a} \quad , \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, \dots, N$$

Où ces coefficients  $k_i$  peuvent être générés à partir du premier coefficient  $k_0$  comme suit :

$$k_i = \frac{k_0}{(a)^i} \quad , \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, \dots, N$$

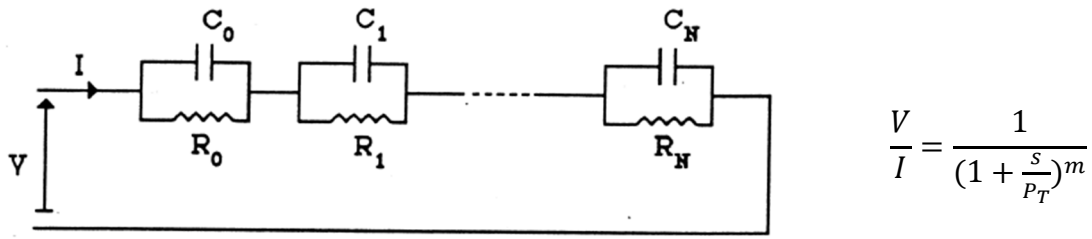
Par conséquent, les résistances et les condensateurs peuvent être générés :

$$R_i = \frac{R_0}{a^i} \quad , \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, \dots, N$$

$$C_i = \frac{C_0}{b^i}$$

Où  $R_0 = k_0$  et  $C_0 = \tau_0/R_0$ .

Ainsi, la fractionnaire unique peut être synthétisée par un circuit RC en cascade du type Foster comme :



Un circuit  $RC$  en cascade similaire a également été dérivé dans autres approches [22].

### 3. Fonction de singularité pour un système fractionnaire du second ordre

Cette représentation est étendue de pôle de puissance fractionnaire à une paire de pôles complexes conjugués dominants qui ont été largement utilisés pour représenter la plupart des systèmes linéaires non fractionnaires [26], avec une puissance fractionnaire  $m$  tel que  $0 < m < 1$ . Ce système fractionnaire du second ordre peut être représenté dans le domaine fréquentiel par :

$$X(s) = \frac{1}{\left[\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1\right]^m}, \quad 0 < m < 1 \text{ et } s = j\omega \quad (2.9)$$

Où  $\omega_n$  est la fréquence naturelle et  $\zeta$  est la constante d'amortissement. Pour  $|\zeta| < 1$  les racines du dénominateur de l'équation ci-dessus lorsque  $m = 1$  sont complexes conjugués. Nous allons maintenant montrer une méthode qui nous permet d'approximer la paire de pôles complexes conjugués dominants avec une puissance fractionnaire par une fonction rationnelle. Pour ce faire nous allons considérer deux cas qui correspondent à  $0 < m \leq 0.5$  et  $0.5 < m < 1$ . La paire de pôles complexes conjugués dominants avec une puissance fractionnaire  $m$  de l'équation. (2.9) peut être approximé par  $X_a(s)$  comme suit :

**Premier cas :  $0 < m \leq 0.5$**

$$X(s) \approx X_a(s) = \frac{\left(\frac{s}{\omega_n} + 1\right)\left(\frac{s}{\omega_n} + 1\right)^\beta}{\left[\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\alpha\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1\right]} \quad (2.10)$$

Tels que  $\alpha = \zeta^m$  et  $0 < \beta = (1 - 2m) < 1$ .

**Deuxième cas :  $0.5 < m < 1$**

$$X(s) \approx X_b(s) = \frac{\left(\frac{s}{\omega_n} + 1\right)}{\left[\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\alpha\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1\right]\left(\frac{s}{\omega_n} + 1\right)^\beta} \quad (2.11)$$

Tels que  $\alpha = \zeta^m$  et  $0 < \beta = (2m - 1) < 1$ . Et pour les deux cas, il peut être facilement montré que :

pour  $\omega \ll \omega_n$   $|X(j\omega)| = 1$  et  $|X_a(j\omega)| = |X_b(j\omega)| = 1$

pour  $\omega = \omega_n$   $|X(j\omega_n)| = 1/(2\zeta)^m$  et  $|X_a(j\omega_n)| = |X_b(j\omega)| = 1/(2\zeta)^m$

pour  $\omega \gg \omega_n$   $|X(j\omega)| = (\omega_n/\omega)^{2m}$  et  $|X_a(j\omega)| = |X_b(j\omega)| = (\omega_n/\omega)^{2m}$

Par conséquent, il est possible de convertir la paire de pôles complexes conjugués dominants avec une puissance fractionnaire en une paire non fractionnaire régulière de pôles complexes conjugués dominants combinés avec un seul pôle de puissance fractionnaire ou zéro en fonction de la plage de puissance fractionnaire  $m$ . La méthode d'approximation de la fonction de singularité est ensuite utilisée pour approximer le pôle de puissance fractionnaire ou le zéro. Les détails sont comme suit :

### Premier cas : $0 < m \leq 0.5$

$$X_a(s) = \frac{1}{[(\frac{s}{\omega_n})^2 + 2\zeta(\frac{s}{\omega_n}) + 1]^m} = \frac{(\frac{s}{\omega_n} + 1)(\frac{s}{\omega_n} + 1)^\beta}{[(\frac{s}{\omega_n})^2 + 2\alpha(\frac{s}{\omega_n}) + 1]}$$

L'approximation de la puissance fractionnaire unique zéro qui est donnée comme :

$$(\frac{s}{\omega_n} + 1)^\beta$$

Peut être effectuée de manière similaire à l'approximation du FPP unique en commençant le processus avec un zéro comme première singularité ou :

$$(\frac{s}{\omega_n} + 1)^\beta = \prod_{i=0}^N \frac{(1 + \frac{s}{Z_i})}{(1 + \frac{s}{P_i})}$$

Les pôles et les zéros sont tels que  $Z_0 < P_0 < Z_1 < P_1 < \dots < Z_N < P_N$  et ils peuvent être générés comme suit :

$$Z_i = (ab)^i Z_0$$

$$P_i = (ab)^i a Z_0$$

Avec  $Z_0 = \omega_n \sqrt{b}$ ,  $\beta = \frac{\log(a)}{\log(ab)}$  et  $i = 0, 1, 2, \dots, N$ .

Par conséquent,

$$X_a(s) \approx \frac{\frac{s}{\omega_n} + 1}{(\frac{s}{\omega_n})^2 + 2\alpha(\frac{s}{\omega_n}) + 1} \prod_{i=0}^N \frac{(1 + \frac{s}{(ab)^i Z_0})}{(1 + \frac{s}{(ab)^i a Z_0})}$$

Et par l'expansion partielle de fraction, nous aurons :

$$X_a(s) \approx \frac{As+B}{(\frac{s}{\omega_n})^2 + 2\alpha(\frac{s}{\omega_n}) + 1} + \sum_{i=0}^N \frac{k_i}{(1 + \frac{s}{(ab)^i a Z_0})} \quad (2.12)$$

$$X_a(s) \approx X_{a1}(s) + X_{a2}(s)$$

Où

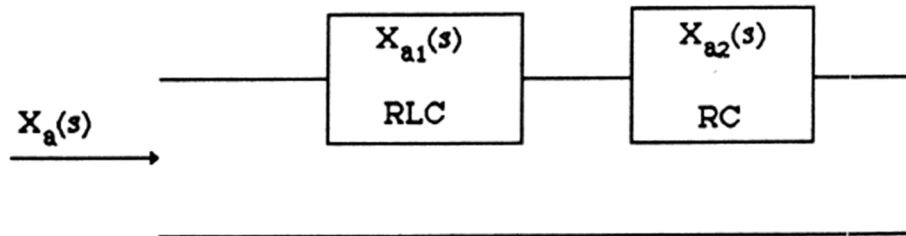
$$k_j = \frac{(1-a\sqrt{b}(ab)^j)}{[a\sqrt{b}(ab)]^2 - 2\alpha a\sqrt{b}(ab)^{j+1}} \frac{\prod_{i=0}^N [1-a(ab)^{(j-i)}]}{\prod_{i=0, i \neq j}^N [1-(ab)^{(j-i)}]} \quad \text{pour } j = 0, 1, \dots, N \quad (2.13)$$

À  $s = 0$  ,  $X(0) = B + \sum_{i=0}^N k_i$  puis  $B = X(0) - \sum_{i=0}^N k_i = 1 - \sum_{i=0}^N k_i$

Aussi,  $\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \omega_n a^{(N+1)} = A\omega_n^2 + \sum_{i=0}^N k_i (ab)^i aZ_0$

Puis  $A = \frac{a^{(N+1)} - \sum_{i=0}^N k_i (ab)^i a\sqrt{b}}{\omega_n}$

La pente nette du spectre de fréquence dans ce cas est inférieure à  $-20 \text{ dB/dec}$  car la puissance fractionnaire  $m$  est inférieure à  $0.5$ . Par conséquent, la fonction est réel positif. Comme dans le cas du système fractionnaire unique la distribution du temps de relaxation peut être obtenue pour la partie des résidus des pôles réels comme indiqué dans l'équation. (2.13) par rapport à leurs temps de relaxation correspondants. En raison de la réalité positive, les résidus  $k_j$  sont réels et positifs, ainsi un circuit passif de  $R$  et  $C$  peut être dérivé pour représenter la partie de fonction de singularité du système comme une impédance de point d'entraînement. La première partie du système ou la partie des pôles complexes peut être représentée par un circuit Buttin-Duffin comme impédance de point d'entraînement. La cascade de ces deux représente la simulation d'une paire dominante de pôles complexes conjugués avec une puissance fractionnaire donnée par l'équation (2.9) comme indiqué ci-dessous :



**Deuxième cas :  $0.5 < m < 1$**

$$X_b(s) = \frac{1}{[(\frac{s}{\omega_n})^2 + 2\zeta(\frac{s}{\omega_n}) + 1]^m} \approx \frac{(\frac{s}{\omega_n} + 1)}{[(\frac{s}{\omega_n})^2 + 2\alpha(\frac{s}{\omega_n}) + 1](\frac{s}{\omega_n} + 1)^\beta}$$

Le FPP unique peut être approximée comme suit :

$$\frac{1}{(\frac{s}{\omega_n} + 1)^\beta} = \prod_{i=0}^N \frac{(1 + \frac{s}{Z_i})}{(1 + \frac{s}{P_i})}$$

Où les pôles et les zéros sont tels que  $P_0 < Z_0 < P_1 < Z_1 < \dots < P_N < Z_N$  et ils peuvent être générés comme suit :

$$P_i = (ab)^i P_0$$

$$Z_i = (ab)^i a P_0$$

Avec  $P_0 = \omega_n \sqrt{b}$ ,  $\beta = \frac{\log(a)}{\log(ab)}$  et  $i = 0, 1, 2, \dots, N$ .

Par conséquent,

$$X_b(s) \approx \frac{\frac{s}{\omega_n} + 1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\alpha\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1} \prod_{i=0}^N \frac{\left(1 + \frac{s}{(ab)^i a P_0}\right)}{\left(1 + \frac{s}{(ab)^i P_0}\right)}$$

Et par l'expansion partielle de fraction, nous aurons :

$$X_b(s) \approx \frac{As+B}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\alpha\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1} + \sum_{i=0}^N \frac{k_i}{\left(1 + \frac{s}{(ab)^i P_0}\right)} \tag{2.14}$$

$$X_b(s) \approx X_{b1}(s) + X_{b2}(s)$$

Où

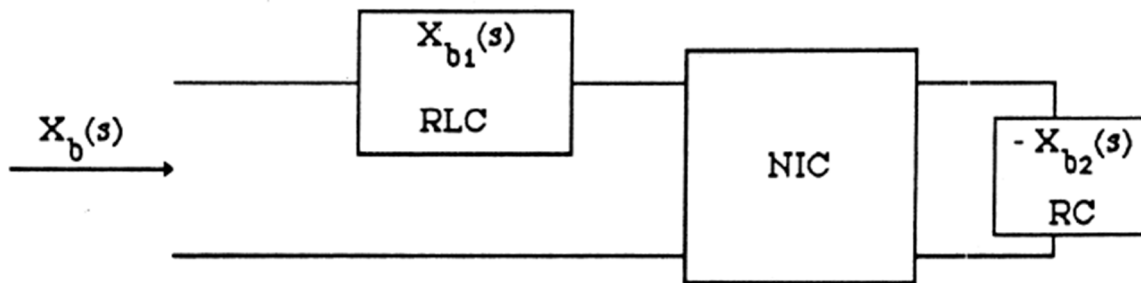
$$k_j = \frac{(1 - \sqrt{b}(ab)^j)}{[\sqrt{b}(ab)^j]^2 - 2\alpha\sqrt{b}(ab)^{j+1}} \frac{\prod_{i=0}^N [1 - \frac{(ab)^{j-i}}{a}]}{\prod_{i=0, i \neq j}^N [1 - (ab)^{j-i}]} \quad \text{pour } j = 0, 1, 2, \dots, N$$

À  $s = 0$ ,  $X(0) = B + \sum_{i=0}^N k_i$  puis  $B = X(0) - \sum_{i=0}^N k_i = 1 - \sum_{i=0}^N k_i$

Aussi,  $\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \frac{\omega_n}{a^{(N+1)}} = A\omega_n^2 + \sum_{i=0}^N k_i (ab)^i P_0$  puis  $A = \frac{a^{-(N+1)} - \sum_{i=0}^N k_i (ab)^i \sqrt{b}}{\omega_n}$

Dans ce cas, la pente nette du spectre de fréquence est supérieure à  $-20 \text{ dB/dec}$  mais inférieure à  $-40 \text{ dB/dec}$ ,  $A$  et  $B$  sont réels positifs mais  $k_i$  sont tous négatifs. Dans ce cas, un convertisseur d'impédance négative (NIC) peut être utilisé pour le  $X_{b2}(s)$  et le circuit

résultant est représenté sur la figure ci-dessous comme :



Dans les deux cas, l'approximation de la fonction de domaine temporel peut être obtenue en prenant la Transformée de Laplace inverse de la fonction de singularité étendue donnée respectivement dans les équations (2.12) et (2.13).

### 4. Système fractionnaire multiple

Un système fractionnaire multiple peut être modélisé dans le domaine fréquentiel par la fonction de transfert de plusieurs pôles de puissance fractionnaires comme suit :

$$X(s) = \frac{1}{\prod_{i=0}^P (1 + \frac{s}{P_{T_i}})^{m_i}}$$

Où  $s = j\omega$ , tous les  $m_i$  sont tels  $0 < m_i < 1$ ,  $P_{T_i}$  sont les fréquences de coin, et nous supposons que  $P_{T_i} < P_{T_{(i+1)}}$  pour  $i = 1, 2, \dots, P$ .

De la même manière que dans le cas du système fractionnaire unique, chaque section du système fractionnaire multiple (section est la partie entre deux coins consécutifs sur le tracé de Bode) est considérée comme un seul pôle de puissance fractionnaire et peut être approximée par un certain nombre de singularités (paires pôles-zéros) de la même manière que pour le FPP unique au paragraphe (2.2). Supposons que le facteur de puissance de chaque section du système fractionnaire multiple est inférieur à un pour le système de relaxation fractionnaire passive. Par conséquent, la fonction de transfert approximative globale est donnée comme suit :

$$X(s) \approx \frac{\prod_{i_1=0}^{N_1} (1 + \frac{s}{Z_{i_1}}) \prod_{i_2=0}^{N_2} (1 + \frac{s}{Z_{i_2}}) \dots \dots \dots \prod_{i_{P-1}=0}^{N_{P-1}} (1 + \frac{s}{Z_{i_{P-1}}})}{\prod_{i_1=0}^{N_1} (1 + \frac{s}{P_{i_1}}) \prod_{i_2=0}^{N_2} (1 + \frac{s}{P_{i_2}}) \dots \dots \dots \prod_{i_P=0}^{N_P} (1 + \frac{s}{P_{i_P}})}$$

Les singularités telles que les pôles et les zéros sont alternés les uns aux autres sont choisis pour assurer que les résidus sont tous positifs et réels ou le système peut être synthétisé par RC réseau. Ceci est accompli en premier choix les pôles du système pour toutes les sections :

$$P_n = (ab)^n P_0 \quad \text{pour } n = 1, 2, 3 \dots, M ;$$

$$\text{et } M = (N_1 + N_1 + \dots + N_P + (P - 1))$$

Les zéros de chaque section seront ensuite choisis pour s'adapter aux deux pôles adjacents. Depuis le début du processus avec le pôle  $P_0$ , la première fréquence de coin, ensuite chaque section doit être terminée par un zéro afin que la section suivante puisse être démarrée à nouveau par un pôle. Par conséquent, les zéros sont générés par les expressions suivantes :

$$Z_{i_1} (\text{Première section}) = (ab)^{i_1} a_1 P_0 \quad , \quad \text{Pour } i_1 = 0, 1, 2, 3 \dots, N_1$$

$$Z_{i_2} (\text{deuxième section}) = (ab)^{(N_1+1+i_2)} a_2 P_0 \quad , \quad \text{Pour } i_2 = 0, 1, 2, 3 \dots, N_2$$

.....

.....



$$Z_{i_p}(\text{pth section}) = (ab)^{[N_1 + N_2 + \dots + N_{p-1} + (P-1)+i_p]} a_p P_0, \quad \text{Pour } i_p = 0, 1, 2, 3 \dots, N_p$$

Nous pouvons voir que le rapport de localisation d'un pôle au précédent ou "ab" est une constante pour l'ensemble du système, mais le rapport de localisation d'un zéro à un pôle précédent "a<sub>i</sub>",  $i = 1, 2, 3, \dots, P$ , seront différents pour chaque section en fonction de la pente de la section considérée, ou

$$a_1 = (ab)^{m_1} \text{ première section avec pente } = m_1$$

$$a_2 = (ab)^{(m_1+m_2)} \text{ deuxième section avec pente } = m_1 + m_2$$

.....

.....

$$a_p = (ab)^{(m_1+m_2+\dots+m_p)} \text{ dernière section avec pente } = m_1 + m_2 + \dots m_p$$

$N_1, N_2, \dots, N_p$  (nombres de singularités pour chaque section) sont également déterminés par les erreurs  $y_i$  en dB (pour  $i = 1, 2, \dots, P$ , erreurs attribuées pour chaque section pour l'approximation) et la bande passante de chaque section.

Par conséquent la fonction d'approximation peut être réécrite comme :

$$X(s) \approx \frac{\prod_{i_1=0}^{N_1} [1 + \frac{s}{(ab)^{i_1} a_1 P_0}] \prod_{i_2=0}^{N_2} [1 + \frac{s}{(ab)^{(N_1+1+i_2)} a_2 P_0}] \dots \prod_{i_p=0}^{N_p-1} [1 + \frac{s}{(ab)^{[N_1 + \dots + N_{p-1} + (P-1)+i_p]} a_p P_0}]}{\prod_{n=0}^M [1 + \frac{s}{(ab)^n P_0}]}$$

Par l'expansion partielle de fraction de la fonction rationnelle, l'équation ci-dessus devient :

$$X(s) \approx \sum_{n=0}^M \frac{k_n}{(1 + \frac{s}{(ab)^n P_0})} \tag{2.15}$$

Où les coefficients  $k_n$  (Pour  $n = 0, 1, 2, \dots, M$ ) sont facilement déterminés comme :

$$k_n = \frac{\prod_{i_1=0}^{N_1} [1 - \frac{(ab)^{n-i_1}}{a_1}] \prod_{i_2=0}^{N_2} [1 - \frac{(ab)^{n-(N_1+1+i_2)}}{a_2}] \dots \prod_{i_p=0}^{N_p-1} [1 - \frac{(ab)^{n-[N_1 + \dots + N_{p-1} + (P-1)+i_p]} }{a_p}]}{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq i}}^M [1 - (ab)^{n-i}]} \tag{2.16}$$

En raison de la réalité positive du système, la distribution de relaxation peut alors être obtenue de manière similaire à l'équation. (2.8) pour le système fractionnaire unique, en utilisant la fonction des résidus donnés dans l'équation. (2.16) par rapport à leurs temps de relaxation correspondants. Les résidus sont tous des nombres réels et positifs, par conséquent, chaque élément de l'équation (2.15) peut, à son tour, être facilement remplacé par une conduite de point d'impédance. La combinaison de tous ces circuits individuels en cascade constituera alors le circuit de réalisation du système fractionnaire multiple considéré. L'approximation de la fonction de domaine temporel pour le système fractionnaire multiple peut également être facilement obtenue en prenant la Transformée de Laplace inverse de la fonction de singularité étendue du système fractionnaire multiple global, comme indiqué dans l'équation (2.15).

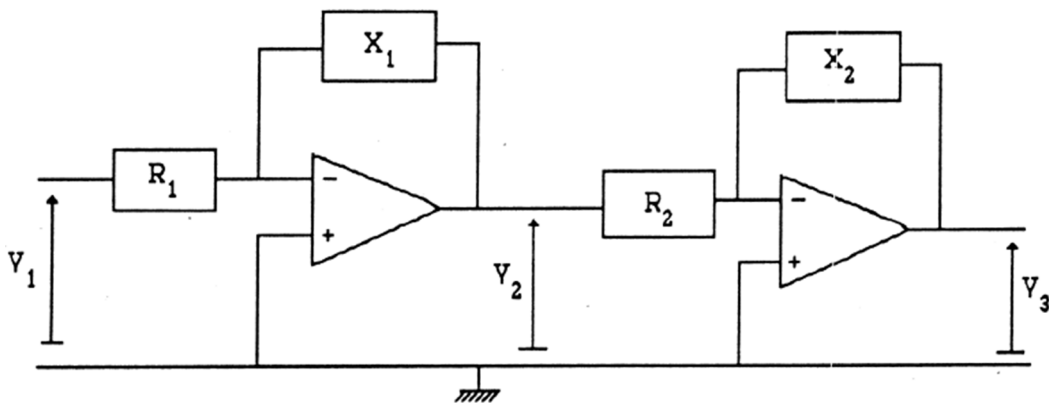
L'étude ci-dessus était valable pour un système où la pente nette du spectre de fréquences de l'ensemble du système ne dépasse pas  $-20 \text{ dB/dec}$ . Dans ce qui suit, Nous allons donner un exemple illustratif pour montrer comment nous allons synthétiser des systèmes où la pente dépasse  $-20 \text{ dB/dec}$  sur certaines sections du graphique log-log du spectre de fréquences ou ces sections ont un facteur de puissance supérieur à l'unité. L'exemple sera un système fractionnaire de quatrième ordre représenté par l'équation suivante :

$$X(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{P_1}\right)^{0.7} \left(1 + \frac{s}{P_2}\right)^{0.5} \left(1 + \frac{s}{P_3}\right)^{0.2} \left(1 + \frac{s}{P_4}\right)^{0.3}}$$

Pour synthétiser ce système nous considérerons que  $X(s)$  peut être écrit comme un produit de plusieurs fonctions dont chacune est un réel positif et il peut être traité individuellement. Donc, pour l'exemple ci-dessus nous pouvons écrire  $X(s)$  comme :

$$X(s) = X_1(s)X_2(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{P_1}\right)^{0.7} \left(1 + \frac{s}{P_3}\right)^{0.2}} \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{P_2}\right)^{0.5} \left(1 + \frac{s}{P_4}\right)^{0.3}}$$

$X_1(s)$  et  $X_2(s)$  seront alors traités comme indiqué dans la procédure décrite dans le paragraphe ci-dessus, ou simplement chaque fonction individuelle de  $X(s)$  peut être réalisée individuellement par un circuit  $RC$  passif comme impédance de point d'entraînement. En utilisant des amplificateurs opérationnels nous pouvons facilement réaliser le produit de toutes ces fonctions individuelles ce qui nous donnera la fonction de transfert global  $X(s)$ . Pour l'exemple ci-dessus  $X(s)$  peut être obtenu comme suit :



$$\frac{V_2}{V_1} = -\frac{X_1}{R_1} \text{ et } \frac{V_3}{V_2} = -\frac{X_2}{R_2} \text{ puis } \frac{V_3}{V_1} = \frac{X_1 X_2}{R_1 R_2}$$

Si nous choisissons  $R_1 = R_2 = 1.0 \text{ Ohm}$ , la fonction de transfert du circuit ci-dessus sera :

$$\frac{V_3}{V_1} = X(s) = X_1(s)X_2(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{P_1}\right)^{0.7} \left(1 + \frac{s}{P_2}\right)^{0.5} \left(1 + \frac{s}{P_3}\right)^{0.2} \left(1 + \frac{s}{P_4}\right)^{0.3}}$$

## 5. Exemples illustratifs

### 5.1. Système fractionnaire unique

Un système fractionnaire unique est représenté par un pôle de puissance fractionnaire à

$$s = -1 \text{ et } m = 0.3 :$$

$$X(s) = \frac{1}{(1+s)^{0.3}}$$

La bande passante du système égale à  $10^{12}$  Hz et trois valeurs différentes de l'erreur  $y$  à partir de laquelle nous obtenons les trois valeurs différentes de  $N$  le nombre de paires de singularité (pôles et zéros) comme :

$$Y = 1 \text{ dB} \quad N = 26$$

$$Y = 3 \text{ dB} \quad N = 10$$

$$Y = 6 \text{ dB} \quad N = 5$$

Figure. (2.3) montre les diagrammes de Bode du système original et de ses trois fonctions d'approximation qui démontrent clairement l'erreur prescrite comme spécifié et montre également que plus l'erreur est petite meilleure est l'approximation. Figure. (2.4.a, b, c) montrer les trois graphiques différents du spectre de distribution qui prend ses valeurs au point d'échantillonnage et l'erreur plus petite ressemble à une période d'échantillonnage plus petite.

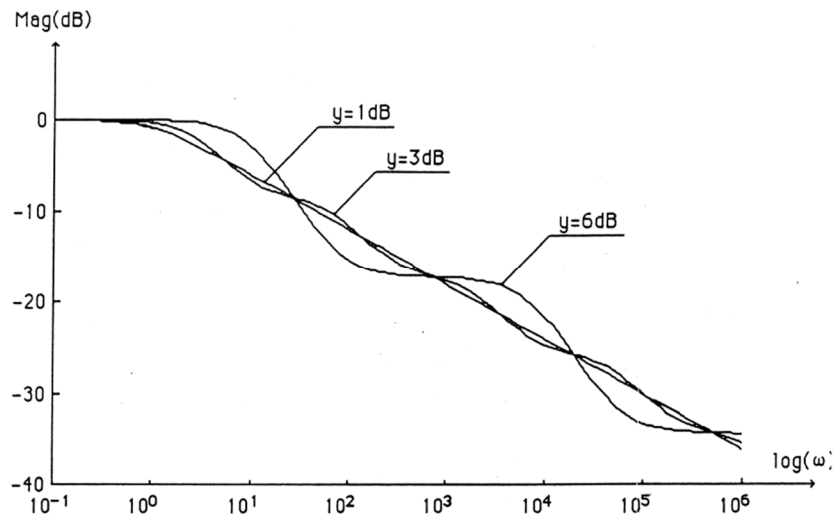
### 5.2. Système fractionnaire de second ordre

Le système fractionnaire du second ordre est représenté par une paire de pôles complexes conjugués dominants élevés à une puissance réelle comme suit :

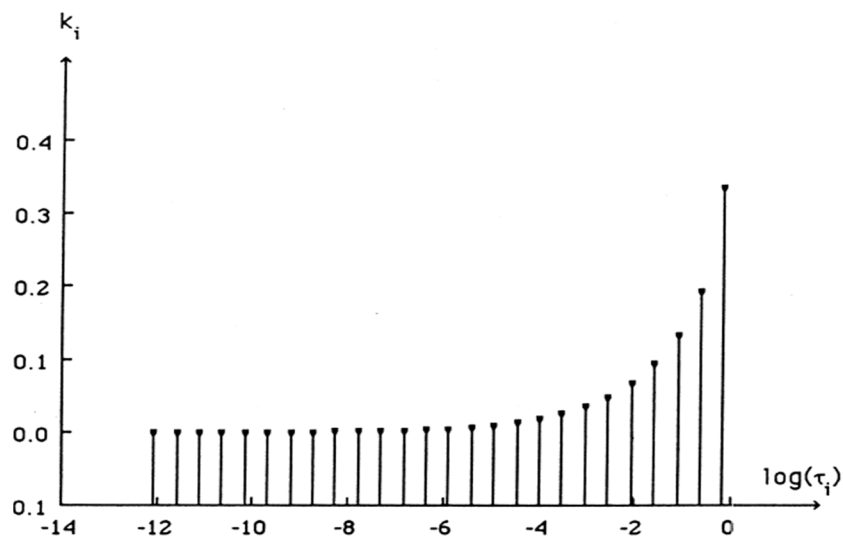
$$X(s) = \frac{1}{\left[\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + 1\right]^m}$$

Avec  $\omega_n = 1$ ,  $\zeta = 0.6$ , et  $m = 0.3$ . Selon le paragraphe (2.3)  $X(s)$  peut être approximé comme suit :

$$X(s) \approx X_a(s) = \frac{s+1}{s^2+2\alpha s+1} (s+1)^\beta$$

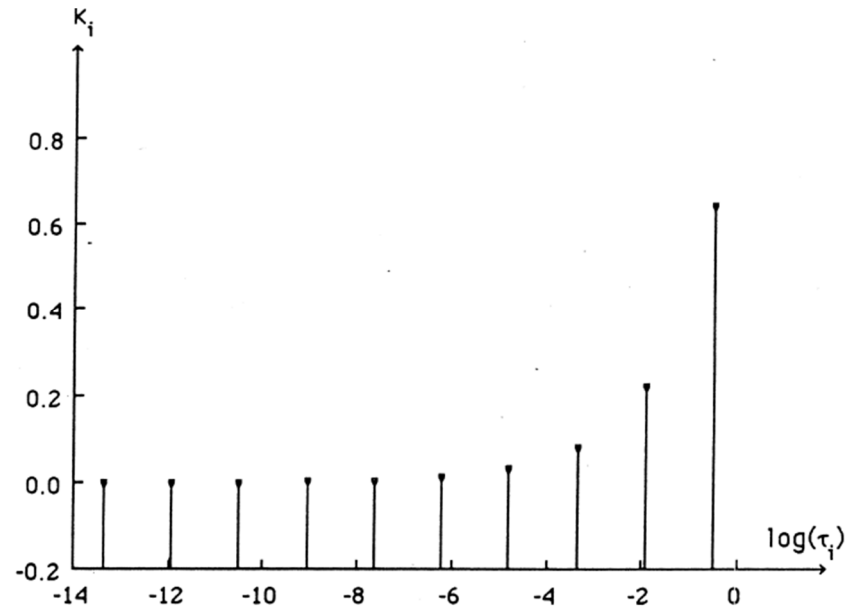


**Figure.(2.3)** La Réponse fréquentielle du pôle de puissance fractionnaire  $X(s) = \frac{1}{(1+s)^{0.3}}$  et la Réponse fréquentielle de son approximation pour trois valeurs différentes de l'erreur  $y$



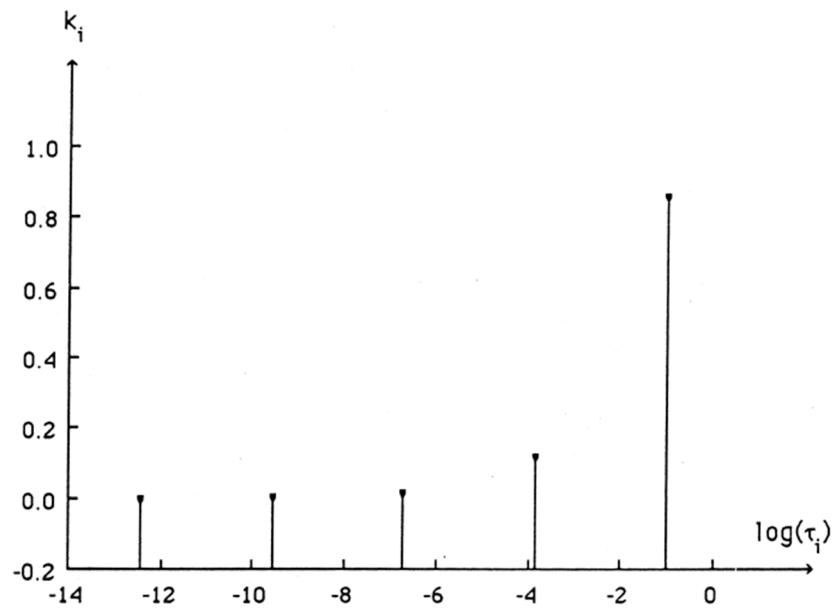
**Figure. (2.4.1)** Distribution des temps de relaxation du pôle de puissance fractionnaire

$$X(s) = \frac{1}{(1+s)^{0.3}} \text{ pour l'erreur } Y = 1 \text{ dB}$$



**Figure. (2.4.2)** Distribution des temps de relaxation du pôle de puissance fractionnaire

$$X(s) = \frac{1}{(1+s)^{0.3}} \text{ pour l'erreur } Y = 3 \text{ dB}$$



**Figure. (2.4.3)** Distribution des temps de relaxation du pôle de puissance fractionnaire

$$X(s) = \frac{1}{(1+s)^{0.3}} \text{ pour l'erreur } Y = 6 \text{ dB}$$

Où  $\alpha = \zeta^m = (0.6)^{0.3} = 0.858$  et  $b = 1 - 2m = 0.4$ . Ainsi, on fini avec un produit d'un seul zéro de puissance fractionnaire et d'une fonction de second ordre non fractionnaire

régulière. La puissance fractionnaire zéro peut être facilement approximée par une fonction rationnelle en utilisant la méthode dérivé pour l'approximation du pôle de puissance fractionnaire unique. Dans cet exemple l'erreur  $y$  en  $dB$  tels que le rapport "ab" d'un pôle à un autre ou d'un zéro d'une précédente à 1.15 et la bande passante est également choisi pour être  $1KHZ$ . La combinaison de la fonction rationnelle qui approxime le seul zéro de puissance fractionnaire et de la fonction de second ordre constituera alors le système de puissance fractionnaire de second ordre considéré. Figure. (2.5) montre les tracés de Bode du système fractionnaire d'origine du second ordre et de sa fonction d'approximation, et il montre clairement la proximité de l'original et la fonction d'approximation. Par expansion partielle de la fraction de l'approximation de la fonction de singularité, on peut facilement dériver les résidus  $k_i$  (pour  $i = 0, 1, 2, \dots, 50$ ) pour la partie des pôles réels de l'expansion qui est tracée par rapport à leurs temps de relaxation correspondants comme le montre la figure. (2.6).

### 5.3. Système fractionnaire multiple

L'exemple de système fractionnaire multiple est représenté dans le domaine fréquentiel par un système fractionnaire de quatrième ordre comme suit :

$$X(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{P_1}\right)^{m_1} \left(1 + \frac{s}{P_2}\right)^{m_2} \left(1 + \frac{s}{P_3}\right)^{m_3} \left(1 + \frac{s}{P_4}\right)^{m_4}}$$

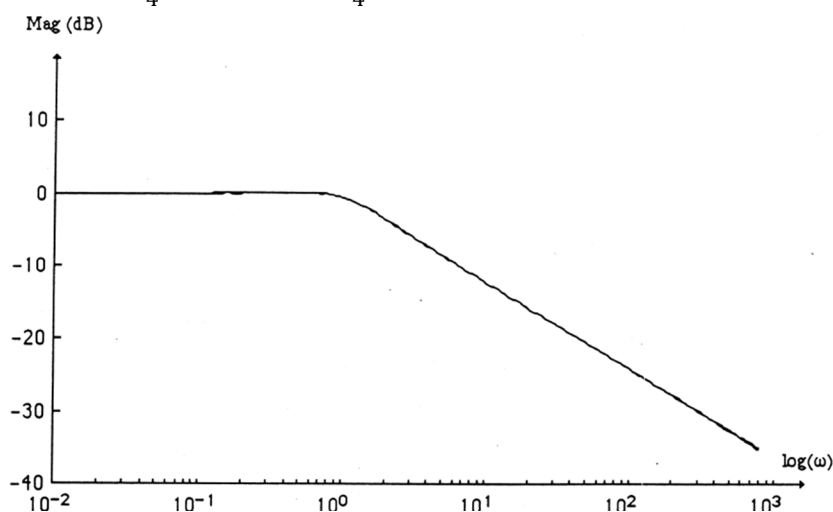
Avec

$$P_1 = 0.1 \quad m_1 = 0.25$$

$$P_2 = 1 \quad m_2 = 0.1$$

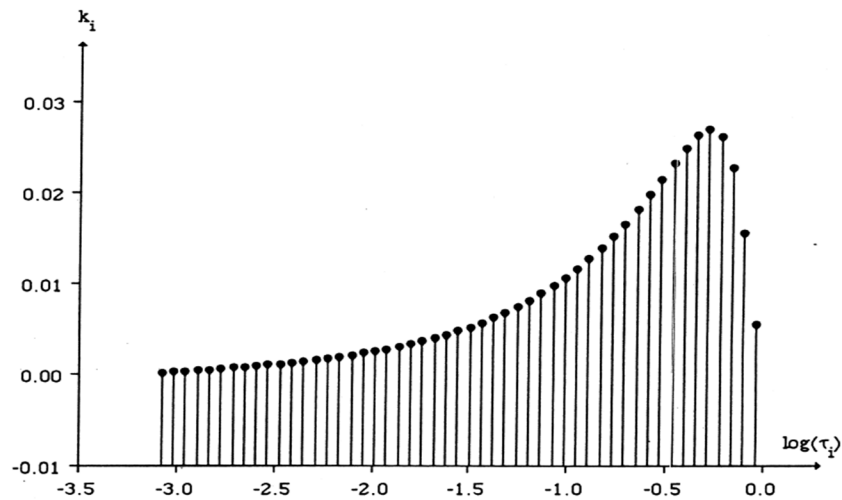
$$P_3 = 10 \quad m_3 = 0.4$$

$$P_4 = 100 \quad m_4 = 0.2$$



**Figure. (2.5)** La réponse fréquentielle d'un système fractionnaire du second ordre donné par

$$X(s) = \frac{1}{(s^2 + 1.6s + 1)^{0.3}} \text{ et de son approximation de fonction de singularité}$$



**Figure. (2.6)** Distribution des temps de relaxation du système fractionnaire du second ordre

$$\text{donnée par } X(s) = \frac{1}{(s^2 + 1.6s + 1)^{0.3}}$$

La méthode pour le pôle de puissance fractionnaire unique est utilisée pour obtenir l'approximation des quatre systèmes fractionnaires par quatre structures de singularité distinctes ou les paires pôle-zéro, chacun peut ensuite être facilement simulé en utilisant des structures en cascade de réseaux *RC* simples. On choisit d'abord le rapport de localisation d'un pôle à un précédent pour être une constante pour le système global ( $ab = 1.2$ ), la bande passante de fréquence est choisie pour être la différence entre deux coins consécutifs pour les trois premières sections et la dernière section aura une bande passante étendue jusqu'à 10 KHz.

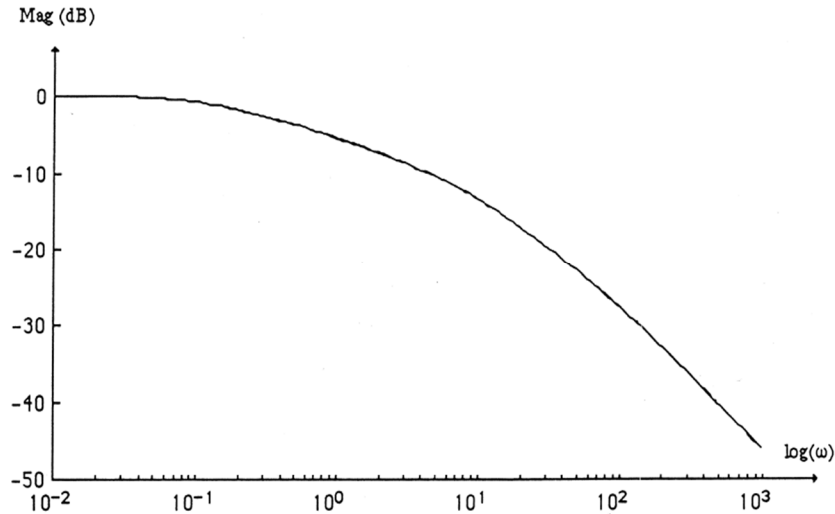
Nous avons ensuite calculé le nombre de cellules de réseau pour chaque section fractionnaire et elles sont respectivement  $N_1 = 12$ ,  $N_2 = 11$ ,  $N_3 = 12$ ,  $N_4 = 20$ . La combinaison des quatre systèmes fractionnaires simples constituera alors le système fractionnaire multiple global du quatrième ordre et le résultat de l'approximation est représenté sur la figure. (2.7) qui coïncide très étroitement avec le système fractionnaire original. La fonction de singularité obtenue après la combinaison des quatre fonctions de singularité correspondant aux quatre sections peut ensuite être étendue développée sous forme de sommation en utilisant une expansion de fraction partielle et obtenir le spectre de distribution. Figure. (2.8) montre le spectre de distribution avec un seul période d'échantillonnage qui correspond à un rapport constant d'un pôle à un précédent pour le système fractionnaire global du quatrième ordre. La courbe d'enveloppe a quatre pics dont chacune correspond aux quatre coins du tracé de Bode log-log du système fractionnaire de quatrième ordre.

## 6. Fonction de singularité pour certains autres types de systèmes irrationnels

Le comportement des constantes diélectriques complexes d'une grande variété de liquides et de solides à été trouvé par K. S. Cole et R. H. Cole [14] et a été décrit dans le domaine de transformation de Laplace par l'équation :

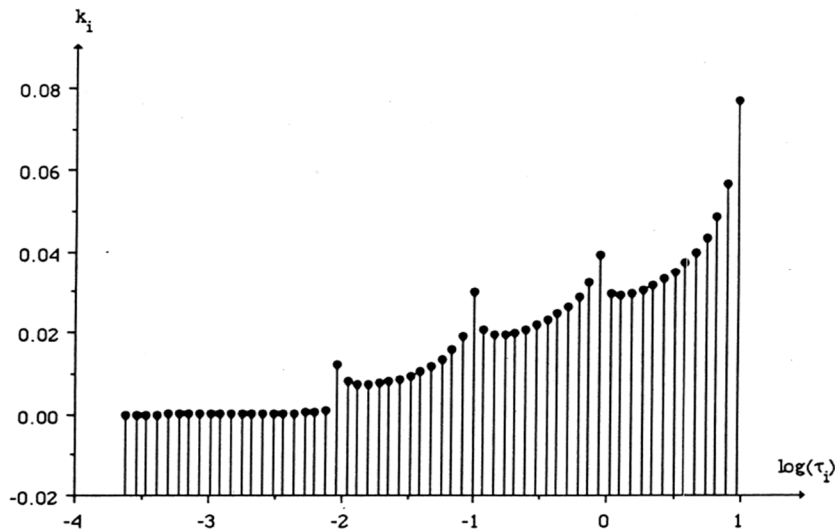
$$X(s) = \frac{1}{1+(s\tau_0)^\beta} \quad , \quad s = j\omega \tag{2.17}$$

Où  $0 < \beta < 1$ , et  $(1 - \beta) \pi/2$  est l'angle entre l'axe réel et de la ligne au centre du cercle à partir de l'ordonnée à l'origine à haute fréquence, sur le tracé de Nyquist, de la constante diélectrique complexe.



**Figure. (2.7)** La réponse fréquentielle du système fractionnaire de quatrième ordre donnée par  $X(s)$  et

son approximation de fonction de singularité. 
$$X(s) = \frac{1}{(1+\frac{s}{0.1})^{0.25}(1+s)^{0.1}(1+\frac{s}{10})^{0.4}(1+\frac{s}{100})^{0.2}}$$



**Figure. (2.8)** Distribution des temps de relaxation du système fractionnaire de quatrième ordre donnée

par 
$$X(s) = \frac{1}{(1+\frac{s}{0.1})^{0.25}(1+s)^{0.1}(1+\frac{s}{10})^{0.4}(1+\frac{s}{100})^{0.2}}$$

Comme on peut le voir que pour  $s \gg 1/\tau_0$ ,  $X(s)$  devient :



$$X(s) = \frac{A}{s^\beta}$$

Qui est une équation de la loi de puissance inverse. Par conséquent, le système fractionnaire qui a été représenté comme l'équation de la loi de puissance inverse peut également être représenté par une équation du type Cole-Cole ou par l'équation (2.17) qui a également une magnitude finie aux basses fréquences.

Pour étendre le modèle Debye [17] qui n'a qu'un temps de relaxation, la distribution des temps de relaxation a également été dérivée. Ce concept a d'abord été introduit par Von Schweidler [13] et plus tard Fouss et Kirkwood [18] ont dérivé une formule pour obtenir la distribution des temps de relaxation de la fonction  $G(\tau)$  directement à partir de la fonction de transfert d'origine comme suit :

$$X(s) = \int_0^\infty \frac{G(\tau)}{1+s\tau} d\tau \quad (2.18)$$

K. S. Cole et R. H. Cole ont appliqué cette méthode pour trouver la fonction de distribution  $G(\tau)$  pour leur modèle donné dans l'équation (2.17) comme suit :

$$G(\tau) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin[(1-\beta)\pi]}{\cosh[\beta \log(\frac{\tau}{\tau_0})] - \cos[(1-\beta)\pi]} \quad (2.19)$$

Ils ont aussi souligné que la réponse correspondant à la fonction d'équation. (2.17) peut être obtenue par un circuit contenant un élément à phase constante (CPE) qui est un élément très difficile à réaliser [13].

Dans ce qui suit, nous allons utiliser l'équation. (2.18) pour dériver un circuit  $RC$  groupé pour simuler  $X(s)$  dans l'équation. (2.17). Pour comprendre le modèle Cole-Cole d'équation. (2.17), les pôles et les zéros de l'approximation de la fonction de singularité sont dérivés de sorte que leur distribution sur le plan  $s$  peut être obtenue pour différentes valeurs du paramètre  $\beta$ .

Par échantillonnage de la fonction de distribution  $G(\tau)$  donnée dans l'équation. (2.19) pour une bande passante limitée aux points logarithmiquement équidistants  $\tau_i$  (pour  $i = 1, \dots, 2N - 1$ ) nous pouvons écrire :

$$G(\tau) \approx \sum_{i=1}^{2N-1} G(\tau_i) \delta(\tau - \tau_i) \quad (2.20)$$

Où  $\tau_i = \tau_0(\lambda)^{(N-i)}$  pour  $i = 1, 2, \dots, 2N - 1$  et  $\lambda$ , un nombre constant supérieur à l'unité, c'est le rapport d'une constante de temps pour la prochaine ou le rapport d'un pôle à précédent, où les pôles sont  $P_i = 1/\tau_i$  (pour  $i = 1, 2, \dots, 2N - 1$ ).

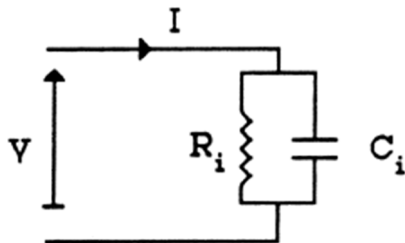
La substitution de l'équation. (2.20) dans l'équation. (2.18) nous obtiendrons :

$$X(s) \approx \int_0^\infty \frac{\sum_{i=1}^{2N-1} G(\tau_i) \delta(\tau - \tau_i)}{1+s\tau} d\tau$$

Puis,  $X(s)$  sera :

$$X(s) \approx \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{G(\tau_i)}{1+s\tau_i} \tag{2.21}$$

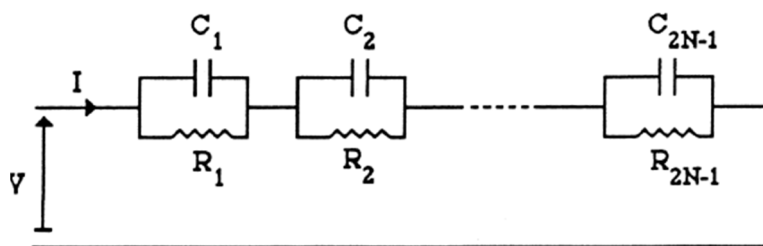
Chaque élément de la sommation ci-dessus peut alors être facilement remplacé, en tournant, par une impédance de point d'entraînement respective du type de circuit RC suivant :



$$\frac{V}{I} = Z_i(s) = \frac{R_i}{1 + sR_iC_i}$$

Où  $R_i = G(\tau_i)$  et  $C_i = \tau_i/G(\tau_i)$  pour  $i = 1, 2, \dots, 2N - 1$ .

Ainsi, la fonction Cole-Cole de l'équation (2.17) peut être synthétisée par des cellules "RC" en cascade comme :



$$\frac{V}{I} = \frac{1}{1 + (s\tau_0)^\beta}$$

Lorsque les singularités (pôles et zéros) d'une fonction système sont mélangées sans préjudice sur le plan  $s$ , il n'y aura pas beaucoup d'interaction entre eux. Par conséquent, leur combinaison ne conduira pas à une forme de fonction spéciale. Cependant, si ces singularités sont choisies pour suivre certaines règles nous pouvons contrôler la forme de la fonction. Par exemple, la fonction Davidson-Cole donnée par :

$$X(s) = \frac{1}{(1+s\tau_T)^m}, \quad \text{pour } 0 < m < 1$$

Peut être approximée par une fonction de singularité comme :

$$X(s) \approx A \frac{\prod_{i=0}^N (s+Z_i)}{\prod_{i=0}^N (s+P_i)}$$

Où  $A$  est une constante, les pôles  $P_i$  et les zéros  $Z_i$  sont choisis pour suivre les règles suivantes :

$$\frac{Z_i}{P_i} = a = \text{rapport d'un zéro à un pôle précédent} \tag{2.22}$$

$$\frac{P_{i+1}}{P_i} = ab = \text{rapport d'un pôle à un précédent} \quad (2.23)$$

$$\frac{Z_{i+1}}{Z_i} = ab = \text{rapport d'un zéro à un précédent}$$

Où  $a$  et  $ab$  sont des constantes positives qui sont liées à l'exposant  $m$  donnée par l'équation suivante :

$$m = \frac{\log(a)}{\log(ab)} \quad (2.24)$$

Parce que ces singularités sont contrôlées par des équations (2.22), (2.23), et (2.24) la fonction de singularité globale conduira à une fonction de la forme du type Davidson-Cole.

Par conséquent, dans la suite, nous allons étudier les règles qui régissent les pôles et les zéros de la fonction de singularité qui conduiront à une fonction du type Cole-Cole.

La fonction de singularité approximation pour la fonction Cole-Cole d'équation. (2.17) peut être facilement obtenue à partir d'équation. (2.21) comme suit :

$$X(s) = \frac{\sum_{i=1}^{2N-1} H_i \prod_{j=1}^{2N-1} (s+P_j)}{\prod_{j=1}^{2N-1} (s+P_i)}, \quad \text{pour } j \neq i$$

$$X(s) = \frac{\sum_{k=1}^{2N-1} \sum_{i=1}^{2N-1} H_i C_{i,k} s^{2N-1-k}}{\prod_{i=1}^{2N-1} (s+P_i)}$$

Où  $H_i = G(\tau_i)/\tau_i$ , et

$$C_{i,1} = 1$$

$$C_{i,k} = \frac{1}{(k-1)!} [\sum_{i_1}^{2N-1} \dots \sum_{i_{(k-1)}}^{2N-1} P_{i_1} \dots P_{i_{(k-1)}}]$$

pour  $b_i = \sum_{k=1}^{2N-1} H_k C_{k,i}$ , nous aurons :

$$X(s) = \frac{b_1 s^{2N-2} + b_2 s^{2N-3} + \dots + b_{2N-1}}{\prod_{i=1}^{2N-1} (s+P_i)} \quad (2.25)$$

Par conséquent, nous pouvons écrire

$$X(s) = A \frac{\prod_{i=0}^{2N-1} (s+Z_i)}{\prod_{i=0}^{2N-1} (s+P_i)}$$

Où  $A$  est une constante, les  $P_i$  sont les pôles, et  $Z_i$  sont les zéros de l'approximation de la fonction de singularité. Nous allons d'abord échantillonner le  $G(\tau)$  donnée dans l'équation. (2.19) pour obtenir  $G(\tau_i)$  où  $\tau_i = \tau_0(\lambda)^{(N-i)}$ , pour  $i = 1, 2, \dots, 2N-1$ . Les pôles  $P_i$  peuvent alors être générés pour  $i = 1, 2, \dots, 2N-1$  en suivant la règle donnée ci-dessous :

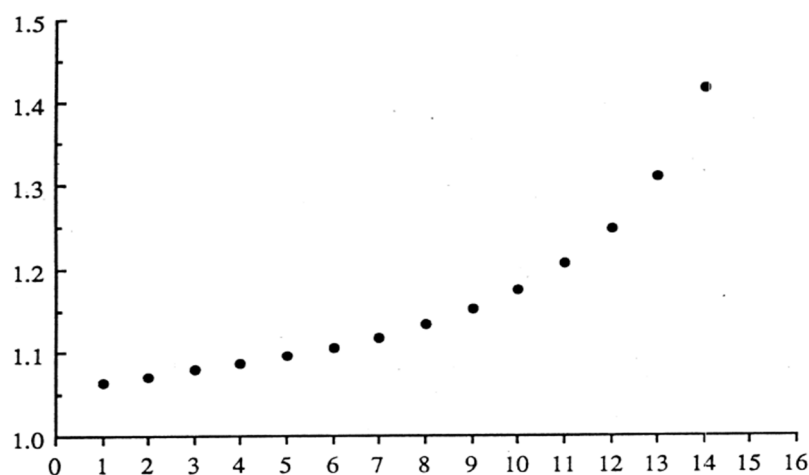
$$\frac{P_{i+1}}{P_i} = \lambda = \text{rapport d'un pôle à un précédent}$$

Où  $\lambda$  est une constante positive supérieure à l'unité. Les zéros  $Z_i$  (pour  $i = 1, 2, \dots, 2N - 2$ ) peuvent être facilement obtenus à partir de l'équation. (2.25) comme les racines de son polynôme numérateur  $(2N - 2)$  ème ordre.

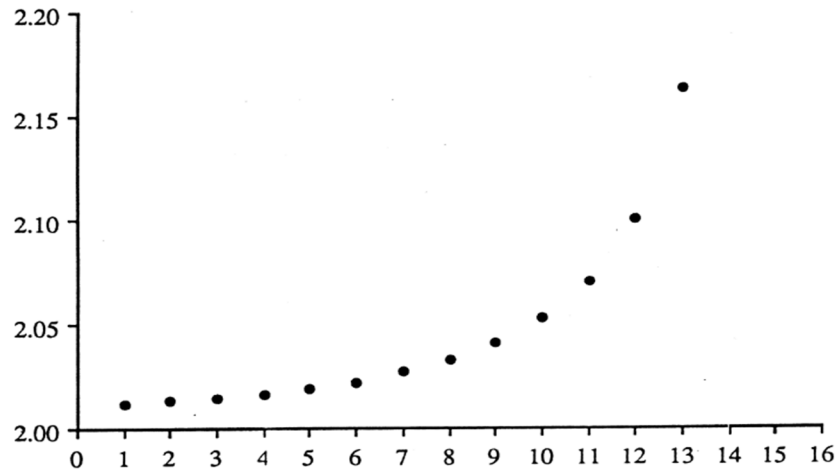
Par conséquent, les rapports d'un zéro à un précédent et d'un zéro à un pôle précédent peuvent être calculés, ce qui permet d'obtenir leur distribution de  $r$  sur le plan  $s$ . Pour illustrer cette approche, nous avons utilisé une fonction de type Cole-Cole d'équation. (2.19) où  $\tau_0 = 1$ . Nous choisissons d'abord 7 points de chaque côté du pôle  $P_0 = 1/\tau_0$  qui sont donnés par  $P_i = P_0(\lambda)^{(i-N)}$ , pour  $i = 1, 2, \dots, 2N - 1$ , où  $N = 8$ , et le rapport d'emplacement pour les pôles  $\lambda = 2$ . À partir de l'équation. (2.21), le circuit pour cet exemple contiendra alors 15 cellules ou résistances et condensateurs. Les valeurs de ces résistances et condensateurs pour trois valeurs différentes de l'exposant  $\beta$ . Ensuite nous calculons les zéros de l'approximation de la fonction de singularité pour obtenir les rapports mentionnés ci-dessus pour différentes valeurs de l'exposant  $\beta$ . Ces rapports sont tracés par rapport à leur ordre de position sur le plan  $s$  comme indiqué sur la figure. (2.9), (2.10), et (2.11) correspondant respectivement à  $\beta = 0.1, 0.5$ , et  $0.8$ .

## 7. Remarques

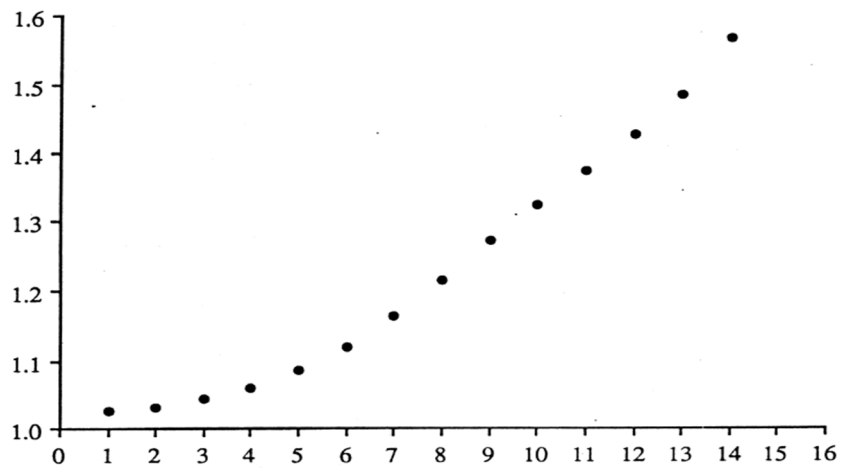
Une méthode graphique pour approximer la fonction fractionnaire d'un seul pôle de puissance fractionnaire est utilisée comme élément de base pour l'approximation des systèmes fractionnaires. L'approximation montre que le processus global consiste en une combinaison d'un certain nombre de processus élémentaires dont chacun est décrit par une structure unique de paire pôle-zéro, et chacun apportera ensuite sa part au processus global. La nature composite du processus provoque des interactions entre ces processus élémentaires et donne le facteur de puissance fractionnaire dans le graphique log-log de la fonction de transfert du processus global.



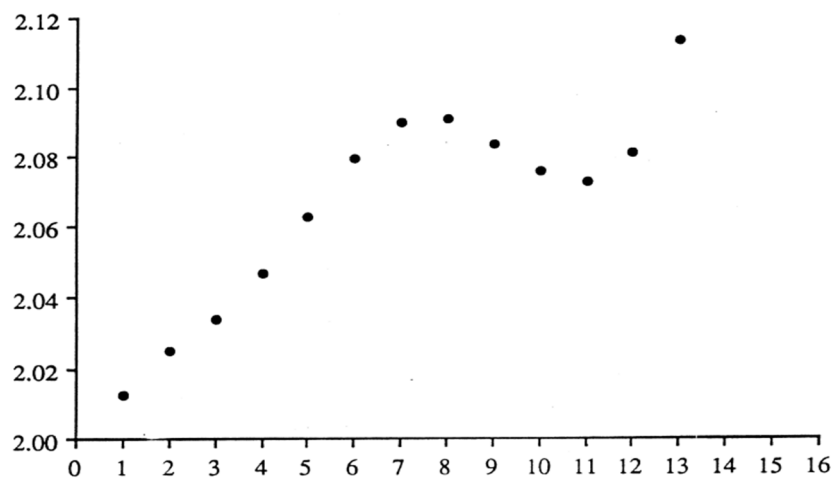
**Figure. (2.9.a)** Rapport entre un zéro et un pôle précédent par rapport à l'ordre de position pour  $\beta = 0.1$



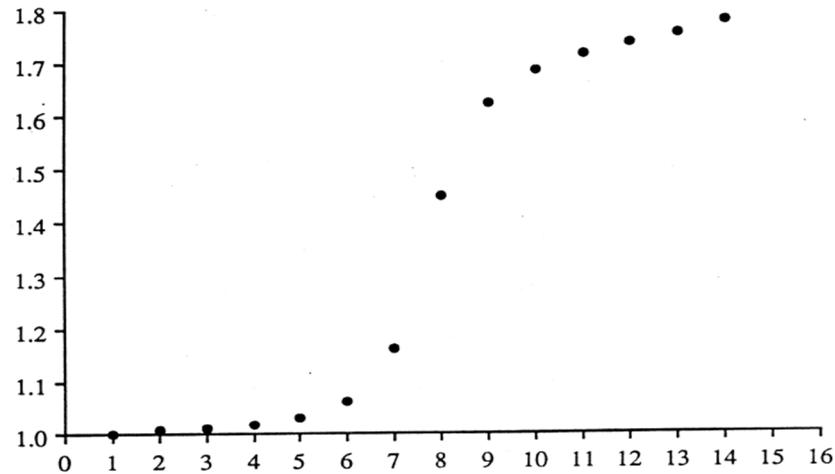
**Figure. (2.9.b)** Rapport entre un zéro et un zéro précédent par rapport à l'ordre de position pour  $beta = 0.1$



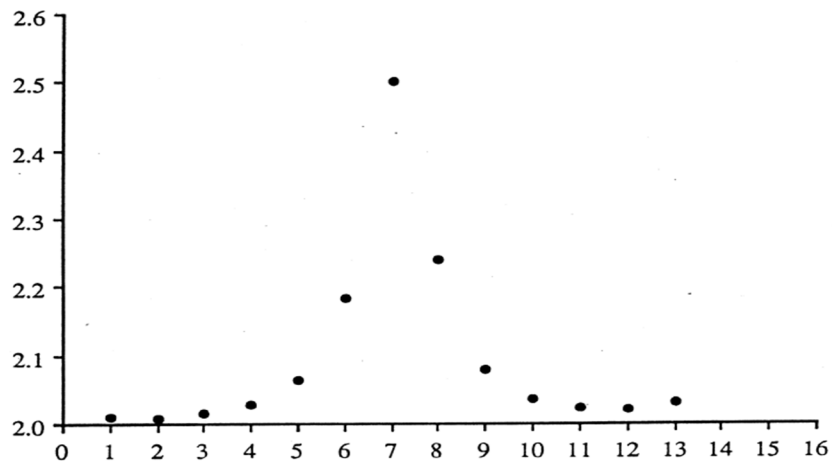
**Figure. (2.10.a)** Rapport entre un zéro et un pôle précédent par rapport à l'ordre de position pour  $beta = 0.5$



**Figure. (2.10.b)** Rapport entre un zéro et un zéro précédent par rapport à l'ordre de position pour  $beta = 0.5$



**Figure. (2.11.a)** Rapport entre un zéro et un pôle précédent par rapport à l'ordre de position pour  $\beta = 0.8$



**Figure. (2.11.b)** Rapport entre un zéro et un zéro précédent par rapport à l'ordre de position pour  $\beta = 0.8$

Chacun de ces processus élémentaires peut être facilement représenté par une structure  $RC$ . Dans l'approximation graphique, l'écart entre les lignes en zig-zag et la ligne désirée de la figure. (2.2) est choisi pour être constant afin que ces singularités puissent être facilement générées. Le nombre de sections pôle-zéro choisi dans une structure de singularité est fixé par l'erreur spécifiée et la bande passante de fréquence d'intérêt du système. Plus l'erreur est petite, le plus grand est le nombre de sections pôle-zéro pour le processus pour la même bande passante. Pour les systèmes réels positifs, la distribution des temps de relaxation ou le spectre de distribution peut alors être facilement obtenue directement à partir de l'approximation de la fonction de singularité comme les résidus de sa fraction partielle d'expansion par rapport à leur temps de relaxation correspondants.

L'attention est étendue à d'autres types de système fractionnaire comme dans le cas d'une paire de pôles complexes conjugués élevés à une puissance fractionnaire. Transformation de ce type de système fractionnaire du second ordre en un produit d'une paire non fractionnaire régulière de pôles complexes conjugués et d'un pôle de puissance fractionnaire ou zéro en fonction de la plage de puissance fractionnaire du système fractionnaire original du second ordre. Cette transformation permet d'utiliser la méthode de la fonction de singularité pour le pôle fractionnaire simple ou zéro. La représentation de circuit se composera d'une cascade d'un types *RLC* Butt-Daffin et d'un circuit *RC* de la fonction de singularité avec ou sans carte réseau.

La méthode est étendue pour approximer le cas du système fractionnaire unique à un système fractionnaire multiple et avons constaté que la même structure de singularité de la paire pôle-zéro peut être utilisée pour le système réel positif. Le système peut être considéré comme la combinaison de tous les systèmes de pôles de puissance fractionnaires individuels dont chacun est représenté par la région entre deux coins consécutifs sur le tracé de Bode. Chaque région est, à son tour, approximée par une structure de singularité et la combinaison de toutes ces structures de singularité individuelles constituera l'approximation globale du système fractionnaire multiple par une fonction de singularité. Par conséquent, par une expansion partielle de la fraction de la fonction de singularité globale nous pouvons calculer les résidus qui nous conduisent au spectre de distribution du système fractionnaire multiple. Un circuit *RC* peut également être facilement dérivé pour représenter ce type de système fractionnaire multiple comme impédance de point d'entraînement. Dans le cas d'un système de type réel non positif, on divise le système en un certain nombre de fonctions individuelles, dont chacune est un type réel positif. La combinaison de ces fonctions individuelles avec des amplificateurs opérationnels constituera alors la fonction globale de transfert du système fractionnaire multiple.

Un circuit *RC* pour la fonction de type Cole-Cole est ainsi dérivé. Nous avons également dérivé une méthode pour construire cette structure pôle-zéro qui régit la nature composite de la fonction qui conduit au comportement de fréquence du type de fonction Cole-Cole.

# Chapitre 3

## Analyse temporelle et fréquentielle d'un système du premier ordre

---

**1 Introduction**

**2 Analyse temporelle**

**3 Analyse Fréquentielle**

**4 Remarques**

---



## 1. Introduction

L'objectif est de comprendre comment va réagir le système à des sollicitations de l'entrée. On distingue : **l'analyse temporelle** qui étudie le comportement transitoire du système suite à un changement brusque de l'entrée. **L'analyse fréquentielle** (ou harmonique) qui étudie le comportement du système suite à une excitation. [27]

On appelle système du premier ordre, tout système régi par une équation différentielle linéaire à coefficients constant du premier ordre :

$$\tau \frac{ds}{dt} + s = ke(t)$$

Avec  $e$ : entrée ;  $s$ : sortie ;  $k$ : gain statique et  $\tau$  : constante de temps.

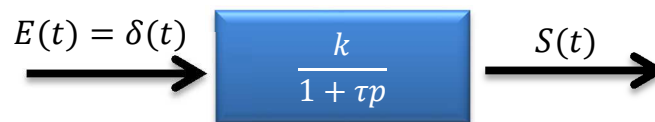
La transformée de Laplace de cette équation différentielle, permet d'obtenir sa fonction de Transfert :

$$H(P) = \frac{S(P)}{E(P)} = \frac{1}{1 + \tau p}$$

## 2. Analyse temporelle

### 2.1. Réponse Impulsionnelle

Le système du premier ordre est excité par une impulsion de Dirac unitaire  $\sigma(t)$ , sa transformée de Laplace vaut :  $E(p) = L[\delta(t)] = 1$ , d'où  $S(p) = H(p).E(p)$

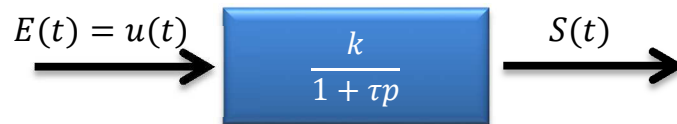


La transformée inverse de Laplace de  $S(p)$  est fournie par :

$$L^{-1}[S(p)] = L^{-1}\left[\frac{K}{\tau p + 1}\right] = s(t) = \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

### 2.2. Réponse Indicielle

Le système du premier ordre est excité par un échelon unitaire  $e(t) = u(t)$ , sa transformée de Laplace vaut :  $E(p) = L[u(t)] = \frac{1}{p}$  ; d'où  $S(p) = H(p).E(p)$



La transformée inverse de Laplace est fournie par :

$$L^{-1}[S(p)] = L^{-1}\left[\frac{k}{p(\tau p + 1)}\right] = s(t) = K\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

### Temps de réponse

On caractérise le régime transitoire de la réponse indicielle, par un temps de réponse ( $tr$ ). Il est obtenu quand la valeur finale du régime permanent du processus atteint ( $\frac{2}{3}$ ) de la valeur finale d'entrée, elle est donnée par  $tr = 3\tau$

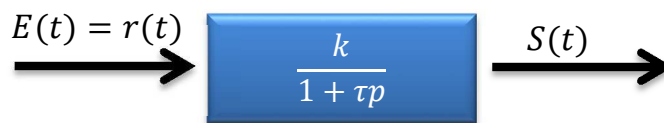
### Temps de montée

C'est le temps mis pour que la sortie du processus atteigne 90% de la valeur finale du régime établi. On a donc alors :  $0.9K = K\left(1 - e^{-\frac{t_m}{\tau}}\right)$ , d'où  $t_m = 2.3\tau$

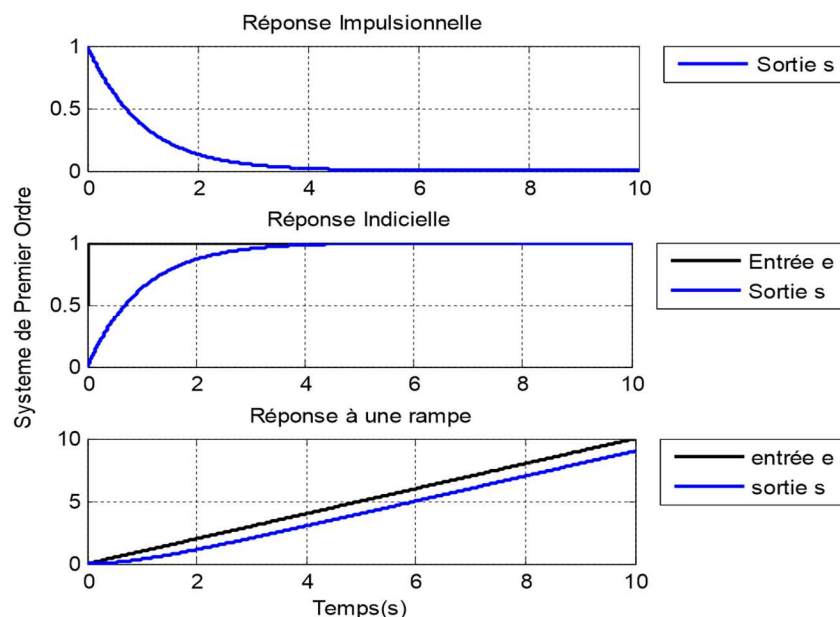
### 2.3. Réponse à une Rampe

Le système du premier ordre est excité par une rampe unitaire  $e(t) = r(t)$ . Elle est appelée aussi réponse en vitesse, sa transformée de Laplace vaut :

$$E(p) = L[r(t)] = \frac{1}{p^2} ; \text{ d'où } S(p) = H(p).E(p)$$



La transformée inverse de Laplace est :  $L^{-1}[S(p)] = L^{-1}\left[\frac{K}{p^2(1+\tau p)}\right] = s(t) = K\left(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$



**Figure .3.1** Réponse à une  $\delta(t)$ , à un  $u(t)$  et une  $r(t)$  d'un système du premier ordre

La réponse à une rampe présente une erreur de traînage. On voit que si ( $k \neq 1$ ), la sortie ne suit pas l'entrée. On dit qu'elle traîne. L'écart s'agrandit régulièrement et à la limite devient infini. L'erreur de traînage vaut  $\varepsilon = k \cdot \tau$

### 3. Analyse Fréquentielle

L'objectif de l'analyse fréquentielle est d'étudier le comportement et la réponse d'un système linéaire à une sollicitation sinusoïdale. La réponse en fréquence du système est l'étude du régime permanent. La sortie d'un système linéaire sollicité par une entrée sinusoïdale est de forme sinusoïdale de même pulsation que le signal d'entrée mais d'amplitude différente et déphasé par rapport au signal d'entrée. [28]

#### 3.1. Diagramme de Bode

##### Systèmes du premier ordre :

La fonction de transfert complexe d'un système canonique du premier ordre s'écrit :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\tau\omega}$$

$$\text{D'où } |H(j(\omega))| = |H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}}$$

Le tracé du diagramme asymptotique consiste à séparer l'espace des pulsations en deux domaines, selon que  $\tau\omega$  est très grand ou très petit devant 1.

Si  $\tau w \ll 1$  soit  $w \ll \frac{1}{\tau}$   $|G(jw)| = \frac{K}{\sqrt{1+j\tau^2 w^2}} \approx K$  donc  $20\log|G(jw)| = 20\log K$

La courbe de gain suit une asymptote horizontale d'ordonnée  $20\log K$ ,

$\tau w \gg 1$  soit  $w \gg \frac{1}{\tau}$  on a :

$|G(jw)| = \frac{K}{\sqrt{1+j\tau^2 w^2}} \approx \frac{K}{\tau w}$  donc  $20\log|G(jw)| = 20\log K - 20\log \tau - 20\log w$

Correspond à une droite de pente de  $-20 \text{ dB/décade}$ , ce qui signifie que le gain diminue de 20 dB lorsque la pulsation est multipliée par 10. Cette droite coupe l'autre asymptote au point

$$w = \frac{1}{\tau}$$

À la pulsation  $w = \frac{1}{\tau}$ ,  $|G(jw)|_{\text{dB}} = -3\text{dB}$  ce qui signifie que le trace réel se trouve donc à 3 dB en dessous des asymptotes (voir Figure 4.3). Cette pulsation est appelée pulsation de coupure.

**Remarque :** dans la courbe de gain, les asymptotes ne peuvent prendre pour pente que les valeurs multiples de  $20 \text{ dB/décade}$ . On appelle pente d'ordre  $n$ , une pente égale à  $20n \text{ dB/décade}$ .

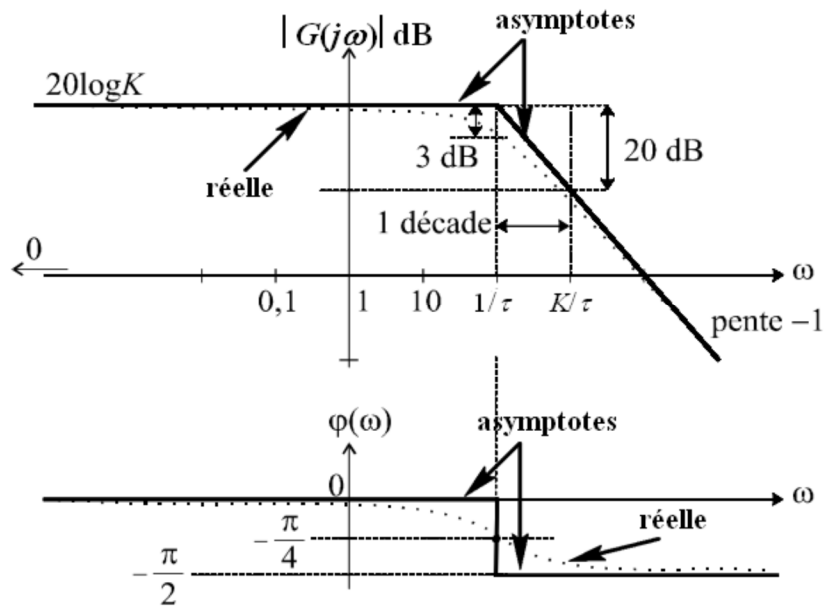
Concernant le déphasage, on a :

$\tau w \ll 1$  soit  $w \ll \frac{1}{\tau} \Rightarrow \varphi(w) \approx 0$  La courbe de phase est une asymptote horizontale à l'ordonnée  $0 \text{ rad}$ ,

$\tau w \gg 1$  soit  $w \gg \frac{1}{\tau} \Rightarrow \varphi(w) \approx \frac{\pi}{2}$  Alors la courbe de phase est une asymptote horizontale à l'ordonnée  $\frac{-\pi}{2} \text{ rad}$ .

À la pulsation  $\tau$ , on obtient un déphasage de  $\frac{-\pi}{4} \text{ rad}$ .

Il consiste à tracer deux courbes de la fonction complexe,  $H(j(w))$  le module et la de phase en fonction de fréquences (pulsations). Ils sont donnés par :



**Figure 3.2** Diagramme de Bode d'un système du premier ordre

$$|H(j(w))| = \begin{cases} \frac{k}{\sqrt{1 + \left(\frac{w}{w_c}\right)^2}} \\ \varphi = \arg(H(jw)) = -\arctan\left(\frac{w}{w_c}\right) \end{cases}$$

Soit en décibel (échelle semi-logarithmique), pour faciliter l'allure des courbes, et sont donnés par:

$$\begin{cases} H = 20 \cdot \text{Log}(k) - 10 \cdot \text{Log}\left[1 + \left(\frac{w}{w_c}\right)^2\right] \\ \varphi = \arg(H(jw)) = -\arctan\left(\frac{w}{w_c}\right) \end{cases}$$

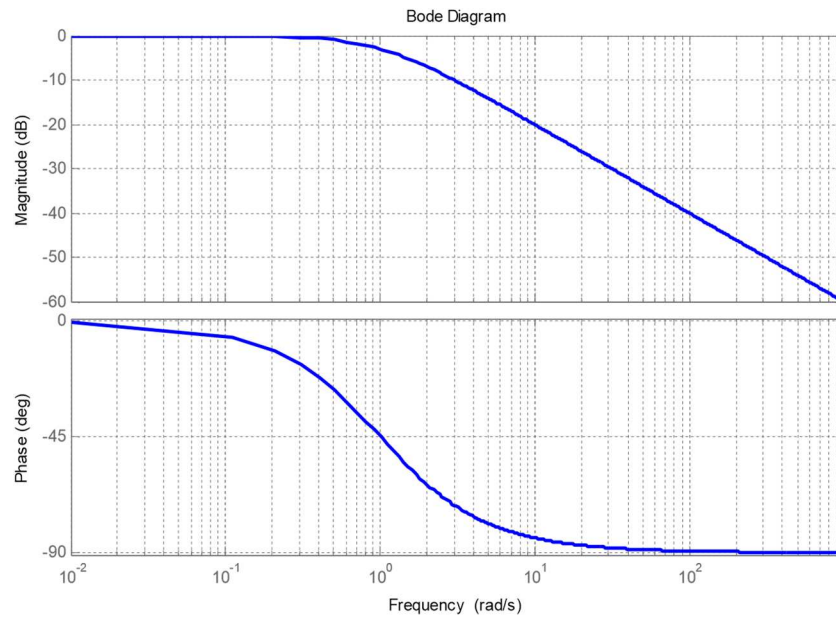


Figure.3.3 : Diagramme de Bode d'un système du premier ordre

### 3.2. Diagramme de Black-Nichols

Il consiste à tracer une seule courbe, le module en fonction de l'argument d'une fonction de transfert d'un processus, pour des pulsations orientées et graduées.  $H_{db}=f(\varphi)$  On peut déduire plusieurs paramètres d'un système en **boucle fermée** à partir d'une fonction de transfert en **boucle ouverte**.

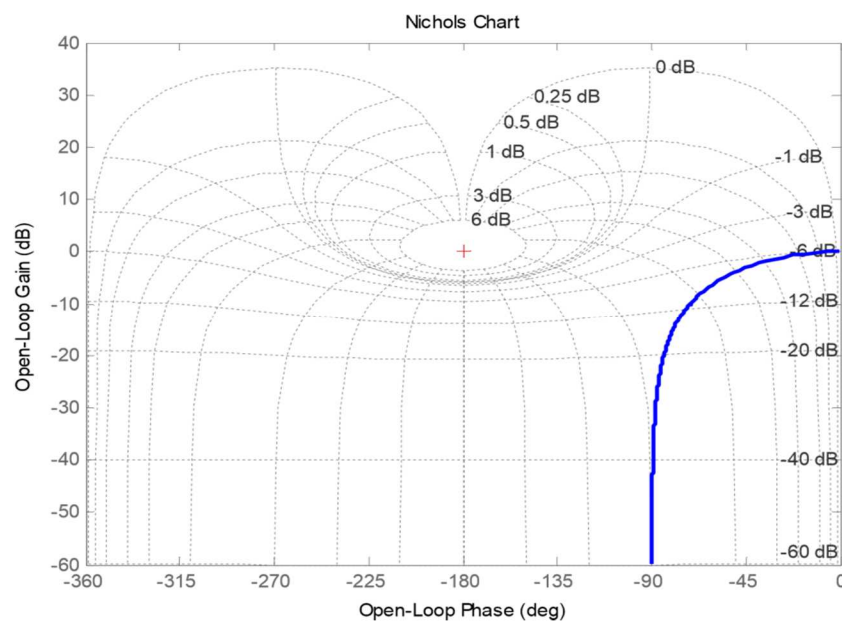
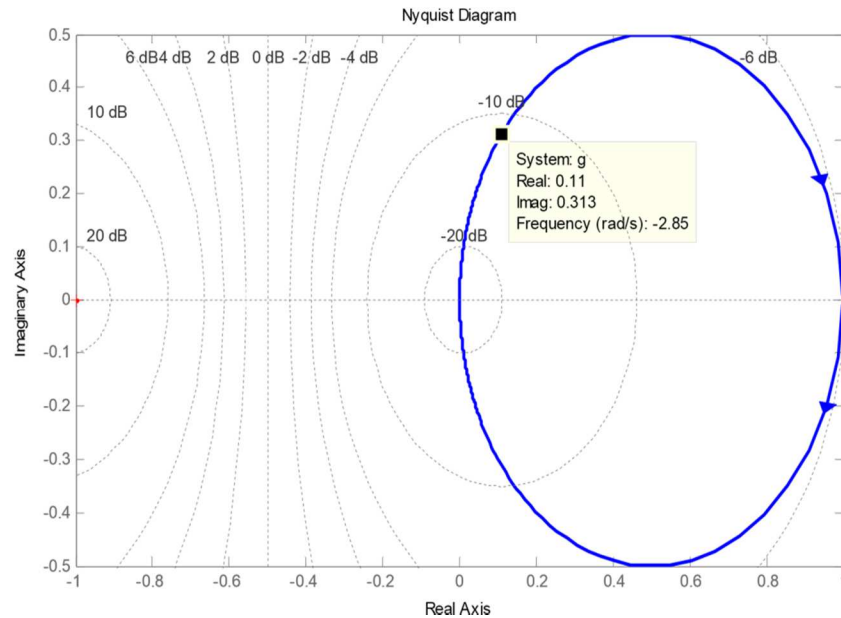


Figure.3.4 Diagramme de Black d'un système du premier ordre

### 3.3. Diagramme de Nyquist

Il consiste à tracer dans le même plan, la partie imaginaire en fonction de la partie réelle d'une fonction de transfert d'un processus. C'est un diagramme qui contient aussi l'allure du module en fonction de l'argument (phase) de cette même fonction de transfert, pour une pulsation qui varie de zéro à l'infini.



**Figure.3.5** : Diagramme de Nyquist d'un système du premier ordre

### 4. Remarques

- Un système du premier ordre est stable.
- Si la constante de temps ( $\tau$ ) est faible, par conséquent le temps de réponse ( $tr$ ) l'est aussi, donc le système est rapide. Si ( $\tau$ ) est grande, le système est lent.
- Un système du premier ordre ne suit pas en vitesse.
- Un système du premier ordre est un filtre passe-bas.
- Un système rapide est un système qui a une bande passante large (faible constante de temps).
- Un système lent est un système qui possède une bande passante étroite. [29]

# Chapitre 4

## Résultats et Simulations

---

**1 Introduction**

**2 Approximation d'un système fractionnaire du premier ordre**

**3 Programmation du système fractionnaire**

**4 Analyse statistique d'ordre 2**

**5 Comparaison des modules et phases**

---



## 1. Introduction

Après avoir présenté les bases des systèmes fractionnaires dans les Chapitres précédents, la nécessité d'approximer ces systèmes par des modèles entiers. Ce présent Chapitre va traiter des exemples utilisant une approximation présentée en détail dans le chapitre II, et pour ce faire il sera procédé, par élaborations des programmes Matlab à l'approximation de système fractionnaire, L'analyse statistique d'ordre 2, comparaison des performances entre système entier et fractionnaire, Les résultats seront ensuite interprétés.

## 2. Approximation d'un système fractionnaire du 1<sup>er</sup> ordre :

### Définition d'un système fractionnaire du 1<sup>er</sup> ordre

Un système fractionnaire du premier ordre est un système du premier ordre qui varie en fonction de  $m$ , avec  $m = 0.1$  jusqu'à  $m = 0.9$

$$H_m(s) = \left( \frac{1}{1 + \frac{s}{p_t}} \right)^m$$

**Remarque :** l'analyse temporelle d'un système du 1<sup>er</sup> ordre est très difficile s'avère impossible à cause de l'ordre fractionnaire, pour cela plusieurs travaux ont été achevés dans ce contexte.

L'une des solutions est d'approximer le système fractionnaire par un système entier qui aura les mêmes caractéristiques fréquentielles dans la bande d'utilisation.

Dans notre travail, nous utilisons l'approximation, explicitée en détail dans le chapitre II.

## 3. Programmation du système fractionnaire

- le système du premier ordre d'ordre entier :

$$H(s) = \left( \frac{K}{\alpha + \tau_0 \times s} \right)^1$$

- le système fractionnaire équivalent est :

$$H_m(s) = \left( \frac{K}{\alpha + \tau_0 \times s} \right)^m = K^m \times \left( \frac{1}{\alpha + \tau_0 \times s} \right)^m = \left( \frac{K}{\alpha} \right)^m \times \left( \frac{1}{1 + \frac{s}{p_t}} \right)^m$$

- donc la formule d'approximation devient

$$H_m(s) = \left(\frac{K}{\alpha}\right)^m \times \left(\frac{1}{1+\frac{s}{p_t}}\right)^m = \left(\frac{K}{\alpha}\right)^m \times \sum_{i=0}^N \frac{k_i}{\left(1+\frac{s}{p_i}\right)} \quad \text{avec } p_t = \frac{\alpha}{\tau_0}$$

$$\tau_0 = 1, K = 1, \alpha = 1, y = 1, N = 11, m = 0.1, p_t = \frac{\alpha}{\tau_0} = 1$$

### 3.1. Vérification de l'approximation :

La comparaison entre les réponses fréquentielles  $H_m$  et  $H_{app}$  :

$$H_m(s) = \left(\frac{K}{\alpha}\right)^m \times \left(\frac{1}{1+\frac{s}{p_t}}\right)^m ; H_{app}(s) = \left(\frac{K}{\alpha}\right)^m \times \sum_{i=0}^N \frac{k_i}{\left(1+\frac{s}{p_i}\right)}$$

On prendre  $w = [w_{min} = 10^{-2} : pas = 1 : w_{max} = 10^{+5}]$

$$s = jw \rightarrow H_m(jw) = \left(\frac{K}{\alpha}\right)^m \times \left(\frac{1}{1+\frac{jw}{p_t}}\right)^m = \left(\frac{K}{\alpha}\right)^m \times (\text{module}(w)^m \times e^{j \times \text{phase}(\omega) \times m}),$$

$w$  est la fréquence et  $j = \sqrt{-1}$

$$\text{module}(w) = \text{module}\left(\frac{1}{1+\frac{jw}{p_t}}\right) \text{phase}(\omega) = \text{phase}\left(\frac{1}{1+\frac{jw}{p_t}}\right)$$

$$s = jw \rightarrow H_{app}(jw) = \left(\frac{K}{\alpha}\right)^m \times \sum_{i=0}^N \frac{k_i}{\left(1+\frac{jw}{p_i}\right)} = \left(\frac{K}{\alpha}\right)^m \times (\text{module}_{app}(w) \times e^{j \times \text{phase}_{app}(\omega)}),$$

$w$  est la fréquence et  $j = \sqrt{-1}$

$$\text{module}_{app}(w) = \text{module}\left(\sum_{i=0}^N \frac{k_i}{\left(1+\frac{jw}{p_i}\right)}\right) \text{phase}_{app}(w) = \text{phase}\left(\sum_{i=0}^N \frac{k_i}{\left(1+\frac{jw}{p_i}\right)}\right)$$

#### Exemple 1

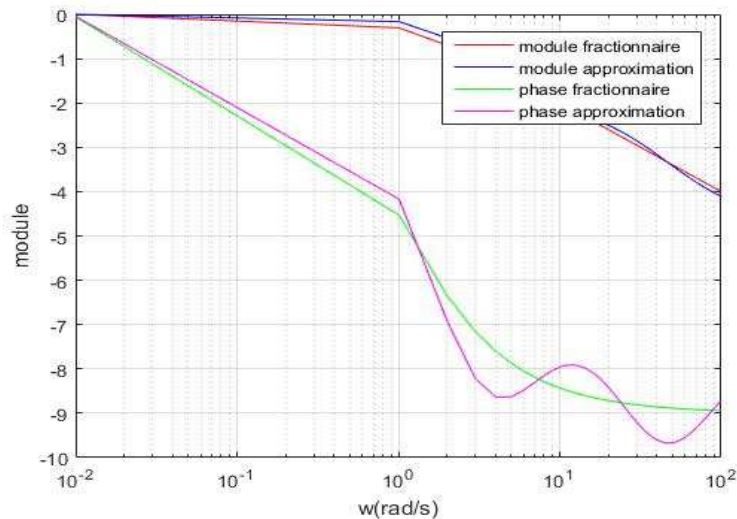
$$y = 1$$

Pour  $m = 0.1$

-La fonction de transfert du système fractionnaire :

$$H_{0.1}(s) = \frac{1}{(1+s)^{0.1}}$$

- $N = 11$
- $a = 1.2915$
- $ab = 12.9155$
- $k_i = [0.23, 0.17, 0.13, 0.10, 0.08, 0.06, 0.04, 0.03, 0.029, 0.022, 0.01, 0.05]$
- $p_i = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.002, 0.031, 0.408, 5.275]$



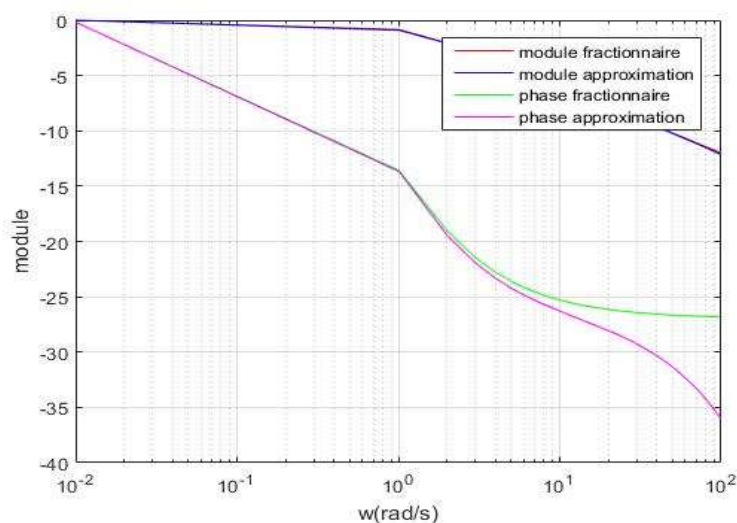
**Figure 4.1.1** Système fractionnaire et son approximation pour  $m=0.1$

**Pour  $m = 0.3$**

-La fonction de transfert du système fractionnaire :

$$H_{0.3}(s) = \frac{1}{(1 + s)^{0.3}}$$

- $N = 26$
- $a = 1.3895$
- $ab = 2.9936$
- $k_i = [ 0.33, 0.19, 0.13, 0.09, 0.06, 0.04, 0.03, 0.02, 0.01, 0.01, 0.009, 0.006, 0.004, 0.003, 0.002, 0.001, 0.001, 0.000, 0.0007, 0.0005, 0.0003, 0.0003, 0.0002, 0.0001, 0.0001, 0.0001, 0.0001 ]$
- $p_i = [ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.0001, 0.0002, 0.0005, 0.0016, 0.0049, 0.0147, 0.0439, 0.1315, 0.3938, 1.1788, 3.5287 ]$



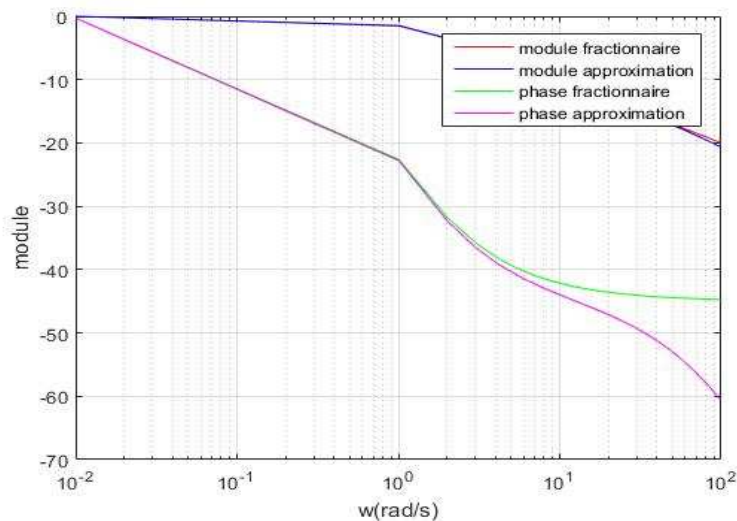
**Figure 4.1.2** Système fractionnaire et son approximation pour  $m=0.3$

**Pour  $m = 0.5$** 

-La fonction de transfert du système fractionnaire :

$$H_{0.5}(s) = \frac{1}{(1 + s)^{0.5}}$$

- $N = 31$
- $a = 1.5849$
- $ab = 2.5119$
- $k_i = [ 0.511, 0.197, 0.111, 0.067, 0.041, 0.026, 0.016, 0.010, 0.006, 0.004, 0.002, 0.001, 0.0010, 0.0007, 0.0004, 0.0003, 0.0002, 0.0001, 0.0001, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 ]$
- $p_i = [ 0, 0.031, 0.0794, 0.1995, 0.5012, 1.2589, 3.1623 ]$



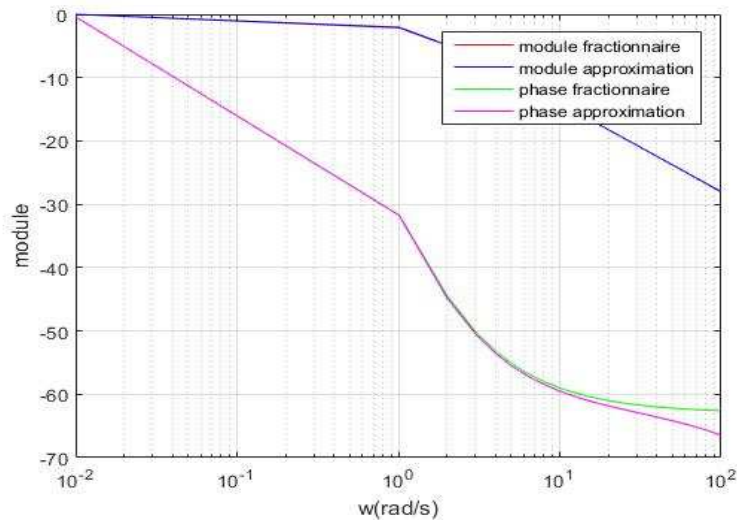
**Figure 4.1.3** Système fractionnaire et son approximation pour  $m=0.5$

**Pour  $m = 0.7$** 

-La fonction de transfert du système fractionnaire :

$$H_{0.7}(s) = \frac{1}{(1 + s)^{0.7}}$$

- $N = 26$
- $a = 2.1544$
- $ab = 2.9936$
- $k_i = [ 0.748, 0.146, 0.058, 0.025, 0.011, 0.005, 0.002, 0.001, 0.0005, 0.0003, 0.0001, 0.0001, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 ]$
- $p_i = [ 0, 0.0001, 0.0004, 0.0013, 0.0039, 0.0118, 0.0353, 0.1056, 0.3162, 0.946, 2.8339 ]$



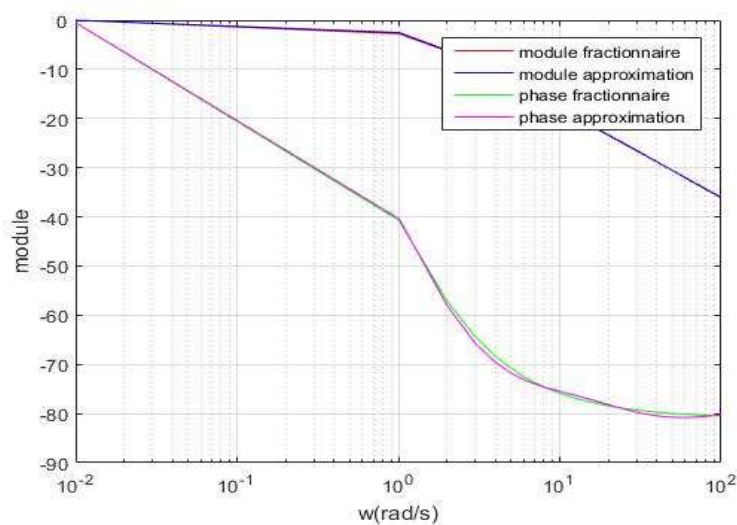
**Figure 4.1.4** Système fractionnaire et son approximation pour **m=0.7**

**Pour  $m = 0.9$**

-La fonction de transfert du système fractionnaire :

$$H_{0,9}(s) = \frac{1}{(1 + s)^{0,9}}$$

- $N = 11$
- $a = 10.0000$
- $ab = 12.9155$
- $k_i = [0.9737, 0.0238, 0.0023, 0.0002, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$
- $p_i = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.0001, 0.0009, 0.0114, 0.146, 1.895]$



**Figure 4.1.5** Système fractionnaire et son approximation pour **m=0.9**

**Remarque**

En remarque que il y a une bonne approximation mais en peut pas voir cette approximation donc on va passer Analyse statistique d'ordre 2.

**4. Analyse statistique d'ordre 2**

On calcule le module et la phase de la fonction fractionnaire et de la fonction approximante

$$\text{fonction fractionnaire} = H(s) = \frac{1}{(1+s)^m}$$

$$\text{fonction approximante} = \sum_{i=1}^N \frac{k(i)}{1+s/p(i)}$$

On calcul l'erreur d'approximation absolue et relative comme suit :

On fixe la plage de fréquence  $10^{-1} < w < 10^{+5}$  pour analyser les variations d'erreurs

$$E_{\text{MODULEabsolue}} = |\text{Module}(w)_{\text{fonction fractionnaire}} - \text{Module}(w)_{\text{fonction approximante}}|$$

$$E_{\text{PHASEabsolue}} = |\text{Phase}(w)_{\text{fonction fractionnaire}} - \text{Phase}(w)_{\text{fonction approximante}}|$$

$$E_{\text{MODULErelative}} = \frac{E_{\text{MODULEabsolue}}}{\text{Module}(w)_{\text{fonction fractionnaire}}}$$

$$E_{\text{PHASERelative}} = \frac{E_{\text{PHASEabsolue}}}{\text{Phase}(w)_{\text{fonction fractionnaire}}}$$

Dans cette plage de fréquence lorsque le pas est 1 on obtient 9999 erreurs.

**Pour  $m = 0.1$**

<i>L'erreur</i>	$(10)^{-2}$	$(10)^{-1}$	$(10)^0$	$(10)^1$	$(10)^2$
<i>Erreur absolue<sub>module</sub></i>	0	0.1	0.2	0.1	0.1
<i>Erreur absolue<sub>phase</sub></i>	0	0.3	0.4	0.5	0.2
<i>Erreur relative<sub>module</sub></i>	0	0.66	0.44	0.05	0.025
<i>Erreur relative<sub>phase</sub></i>	0	0.056	0.088	0.058	0.022

**Tab.4.1.1** l'erreur absolue et relative (module et phase) pour **m=0.1**

**Pour  $m = 0.3$**

<i>L'erreur</i>	$(10)^{-2}$	$(10)^{-1}$	$(10)^0$	$(10)^1$	$(10)^2$
<i>Erreur absolue<sub>module</sub></i>	0	0	0	0	0
<i>Erreur absolue<sub>phase</sub></i>	0	0	0	1	9
<i>Erreur relative<sub>module</sub></i>	0	0	0	0	0
<i>Erreur relative<sub>phase</sub></i>	0	0	0	0.039	0.33

**Tab.4.1.2** l'erreur absolue et relative (module et phase) pour **m=0.3**

Pour  $m = 0.5$

<i>L'erreur</i>	$(10)^{-2}$	$(10)^{-1}$	$(10)^0$	$(10)^1$	$(10)^2$
<i>Erreur absolue<sub>module</sub></i>	0	0	0	0.01	0.001
<i>Erreur absolue<sub>phase</sub></i>	0	0	0	2	15
<i>Erreur relative<sub>module</sub></i>	0	0	0	0.01	0.00005
<i>Erreur relative<sub>phase</sub></i>	0	0	0	0.047	0.33

Tab.4.1.3 l'erreur absolue et relative (module et phase) pour  $m=0.5$

Pour  $m = 0.7$

<i>L'erreur</i>	$(10)^{-2}$	$(10)^{-1}$	$(10)^0$	$(10)^1$	$(10)^2$
<i>Erreur absolue<sub>module</sub></i>	0	0	0	0	0
<i>Erreur absolue<sub>phase</sub></i>	0	0	0	0.01	0.4
<i>Erreur relative<sub>module</sub></i>	0	0	0	0.01	0.00005
<i>Erreur relative<sub>phase</sub></i>	0	0	0	0.0001	0.006

Tab.4.1.4 l'erreur absolue et relative (module et phase) pour  $m=0.7$

Pour  $m = 0.9$

<i>L'erreur</i>	$(10)^{-2}$	$(10)^{-1}$	$(10)^0$	$(10)^1$	$(10)^2$
<i>Erreur absolue<sub>module</sub></i>	0	0	0	0	0
<i>Erreur absolue<sub>phase</sub></i>	0	0	0	0.01	0
<i>Erreur relative<sub>module</sub></i>	0	0	0	0.00038	0
<i>Erreur relative<sub>phase</sub></i>	0	0	0	0	0

Tab.4.1.5 l'erreur absolue et relative (module et phase) pour  $m=0.9$

Pour  $m = 0.1$

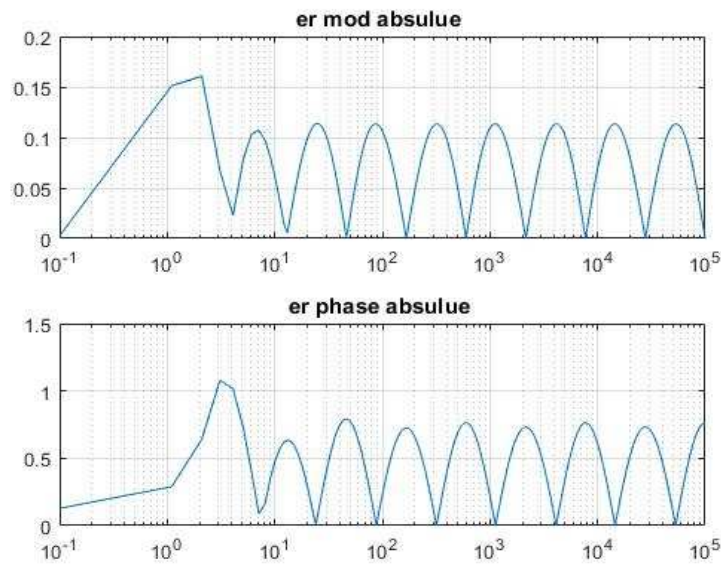


Figure 4.2.1 Erreur absolue module et phase pour  $m=0.1$

Type	Erreur absolue module	Erreur absolue phase
moyenne	0.07	0.5
max	0.16	1.1
écartype	0.035	0.24

Tab.4.2.1 Différentes types d'erreur absolue module et phase pour  $m=0.1$

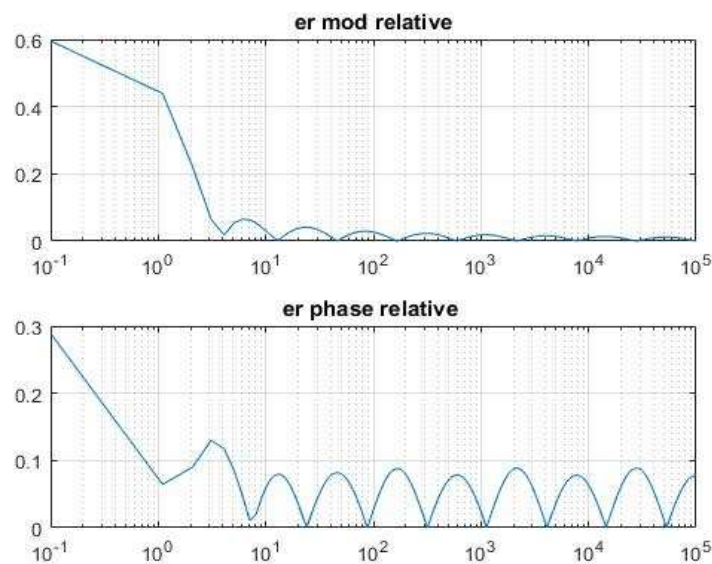


Figure 4.2.2 Erreur relative module et phase pour  $m=0.1$

Type	Erreur relative module	Erreur relative phase
moyenne	0.008	0.055
max	0.6	0.3
écartype	0.005	0.025

Tab.4.2.2 Différentes types d'erreur relative module et phase pour  $m=0.1$



Pour  $m = 0.2$

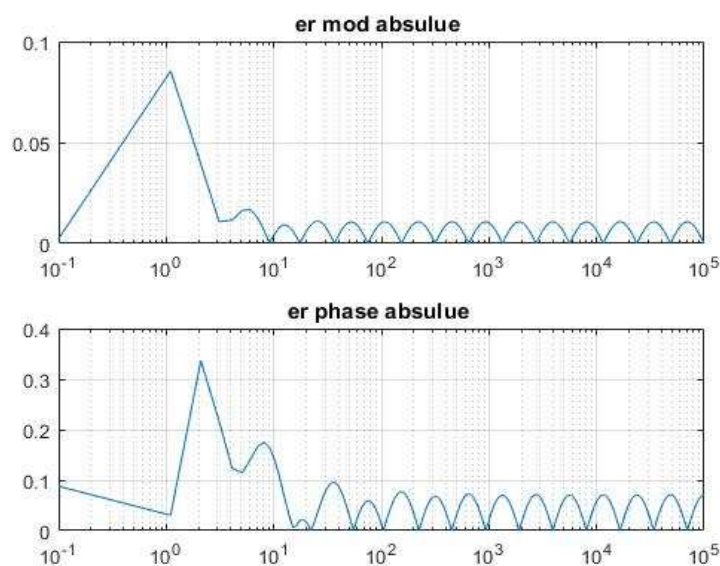


Figure 4.2.3 Erreur absolue module et phase pour  $m=0.2$

Type	Erreur absolue module	Erreur absolue phase
moyenne	0.035	0.25
max	0.11	0.65
écartype	0.019	0.15

Tab.4.2.3 Différentes types d'erreur absolue module et phase pour  $m=0.2$

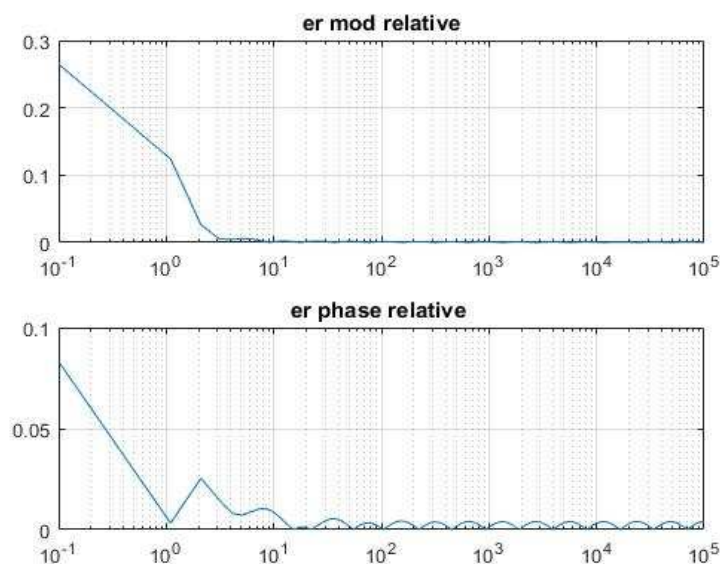


Figure 4.2.4 Erreur relative module et phase pour  $m=0.2$

Type	Erreur relative module	Erreur relative phase
moyenne	0.004	0.025
max	0.38	0.15
écartype	0.0025	0.012

Tab.4.2.4 Différentes types d'erreur relative module et phase pour  $m=0.2$

Pour  $m = 0.3$

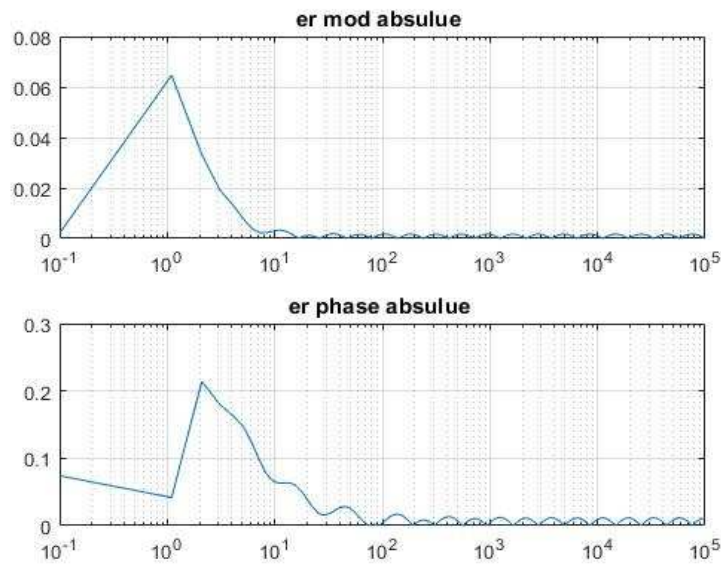


Figure 4.2.5 Erreur absolue module et phase pour  $m=0.3$

Type	Erreur absolue module	Erreur absolue phase
moyenne	0.00	0.00
max	0.06	0.2
écartype	0.00	0.00

Tab.4.2.5 Différentes types d'erreur absolue module et phase pour  $m=0.3$

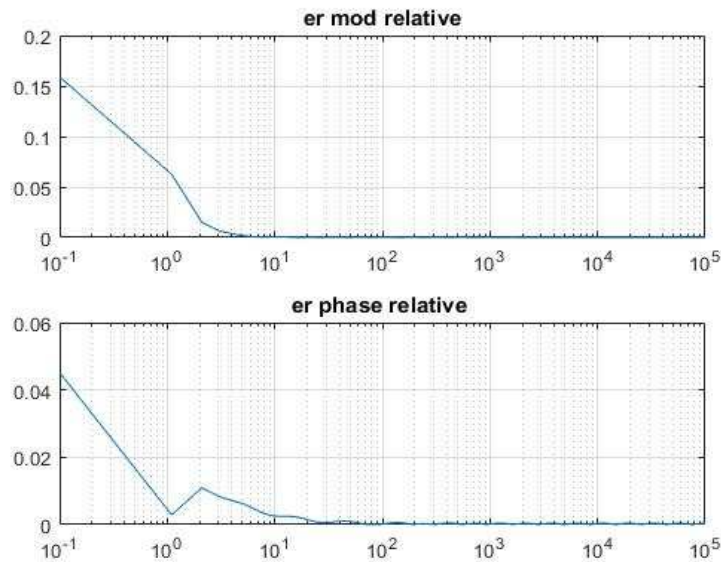


Figure 4.2.6 Erreur relative module et phase pour  $m=0.3$

Type	Erreur relative module	Erreur relative phase
moyenne	0.00	0.00
max	0.18	0.05
écartype	0.0005	0.00

Tab.4.2.6 Différentes types d'erreur relative module et phase pour  $m=0.3$

Pour  $m = 0.4$

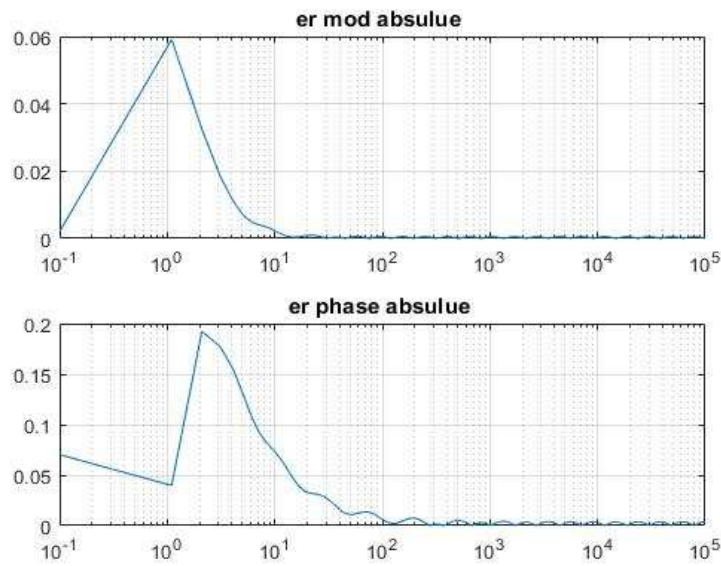


Figure 4.2.7 Erreur absolue module et phase pour  $m=0.4$

Type	Erreur absolue module	Erreur absolue phase
moyenne	0.00	0.00
max	0.055	0.2
écartype	0.5	0.00

Tab4.2.7 Différentes types d'erreur absolue module et phase pour  $m=0.4$

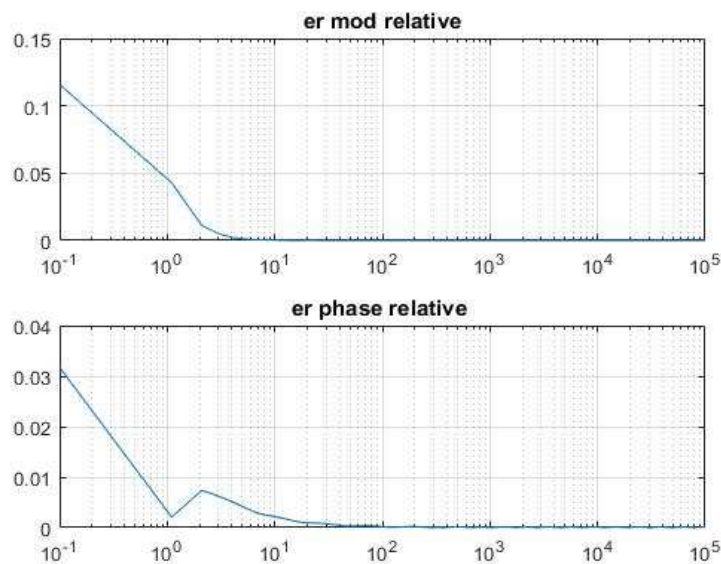


Figure 4.2.8 Erreur relative module et phase pour  $m=0.4$

Type	Erreur relative module	Erreur relative phase
moyenne	0.00	0.00
max	0.16	0.04
écartype	0.0004	0.00

Tab4.2.8 Différentes types d'erreur relative module et phase pour  $m=0.4$

Pour  $m = 0.5$

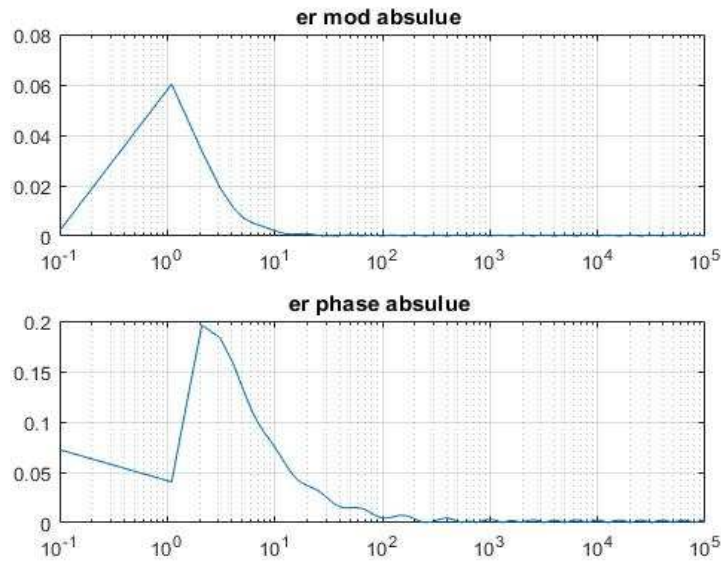


Figure 4.2.9 Erreur absolue module et phase pour  $m=0.5$

Type	Erreur absolue module	Erreur absolue phase
moyenne	0.00	0.00
max	0.05	0.19
écartype	0.0003	0.00

Tab.4.2.9 Différentes types d'erreur absolue module et phase pour  $m=0.5$

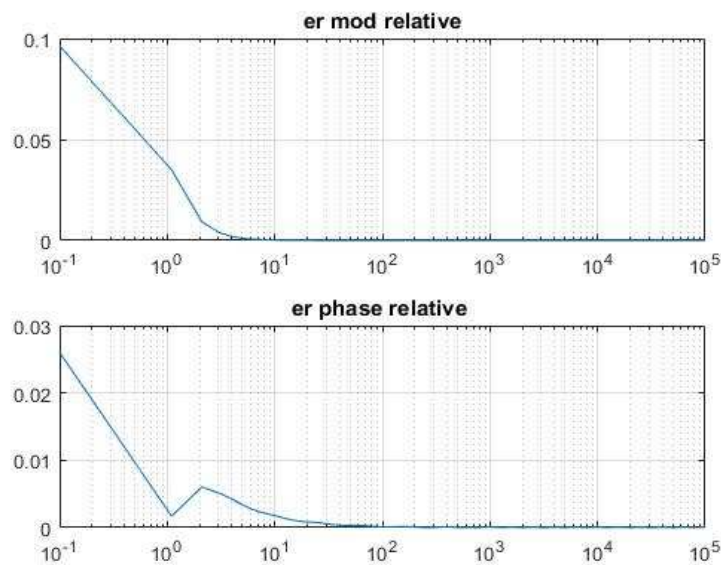


Figure 4.2.10 Erreur relative module et phase pour  $m=0.5$

Type	Erreur relative module	Erreur relative phase
moyenne	0.0	0.0
max	0.15	0.03
écartype	0.0003	0.00

Tab.4.2.10 Différentes types d'erreur relative module et phase pour  $m=0.5$

Pour  $m = 0.6$

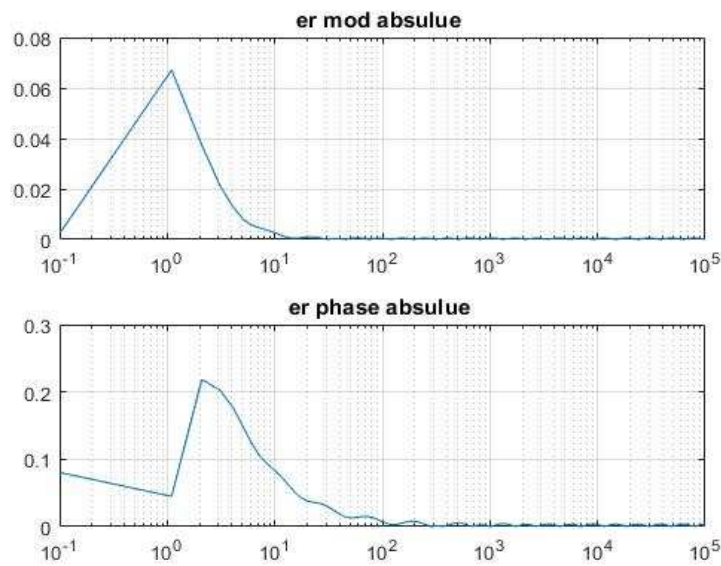


Figure 4.2.11 Erreur absolue module et phase pour  $m=0.6$

Type	Erreur absolue module	Erreur absolue phase
moyenne	0.00	0.00
max	0.07	0.25
écartype	0.0	0.00

Tab.4.2.11 Différentes types d'erreur absolue module et phase pour  $m=0.6$

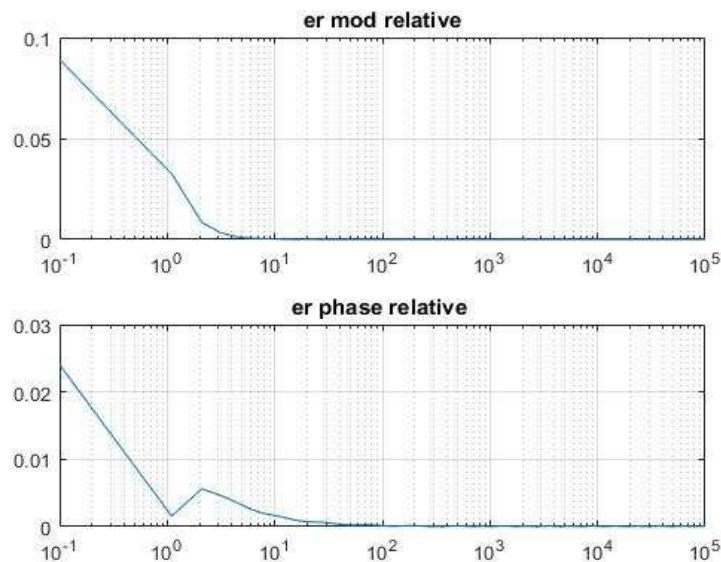


Figure 4.2.12 Erreur relative module et phase pour  $m=0.6$

Type	Erreur relative module	Erreur relative phase
moyenne	0.00	0.00
max	0.14	0.02
écartype	0.0002	0.0

Tab.4.2.12 Différentes types d'erreur relative module et phase pour  $m=0.6$



Pour  $m = 0.7$

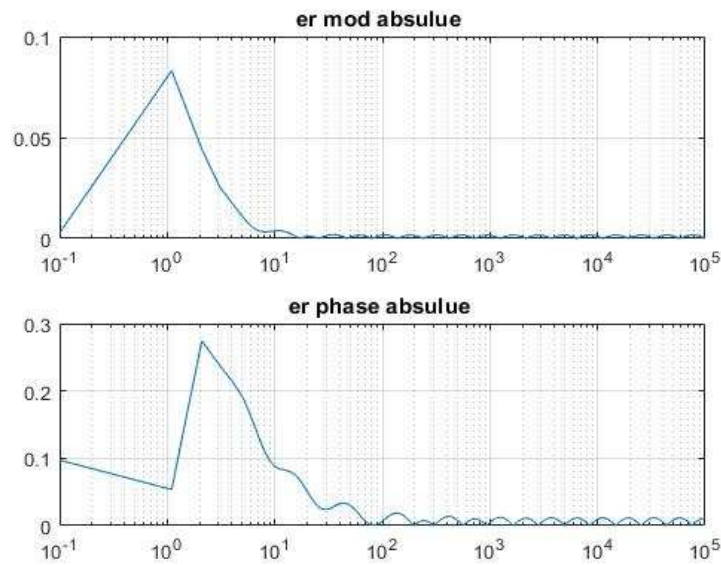


Figure 4.2.13 Erreur absolue module et phase pour  $m=0.7$

Type	Erreur absolue module	Erreur absolue phase
moyenne	0.00	0.00
max	0.08	0.3
écartype	0.00	0.00

Tab.4.2.13 Différentes types d'erreur absolue module et phase pour  $m=0.7$

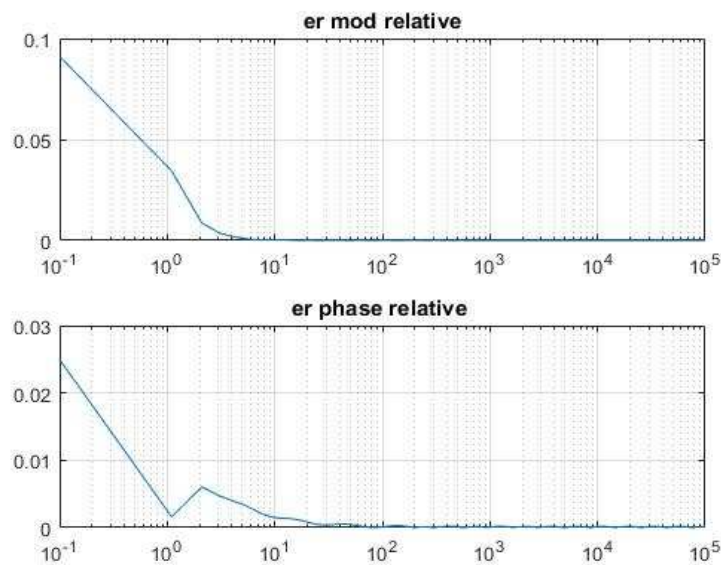


Figure 4.2.14 Erreur relative module et phase pour  $m=0.7$

Type	Erreur relative module	Erreur relative phase
moyenne	0.0	0.0
max	0.15	0.03
écartype	0.0002	0.00

Tab.4.2.14 Différentes types d'erreur relative module et phase pour  $m=0.7$

Pour  $m = 0.8$

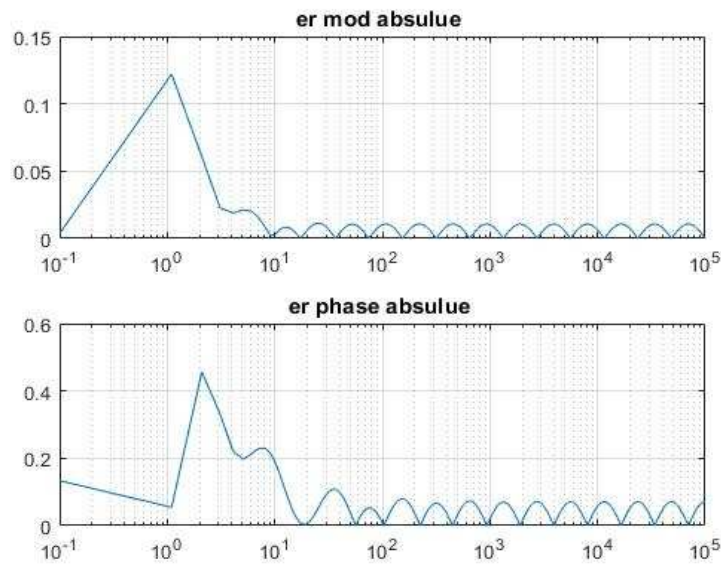


Figure 4.2.15 Erreur absolue module et phase pour  $m=0.8$

Type	Erreur absolue module	Erreur absolue phase
moyenne	0.038	0.28
max	0.17	0.75
écartype	0.019	0.12

Tab.4.2.15 Différentes types d'erreur absolue module et phase pour  $m=0.8$

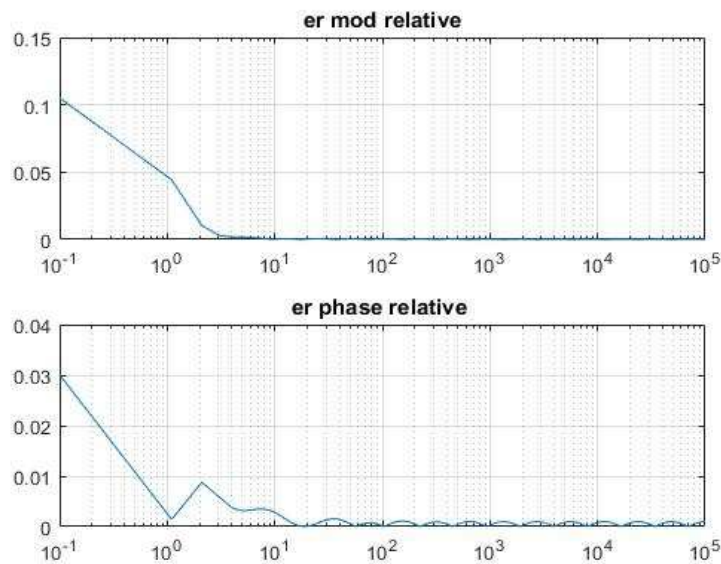


Figure 4.2.16 Erreur relative module et phase pour  $m=0.8$

Type	Erreur relative module	Erreur relative phase
moyenne	0.009	0.0004
max	0.16	0.04
écartype	0.0005	0.0002

Tab.4.2.16 Différentes types d'erreurs relative module et phase pour  $m=0.8$

Pour  $m = 0.9$

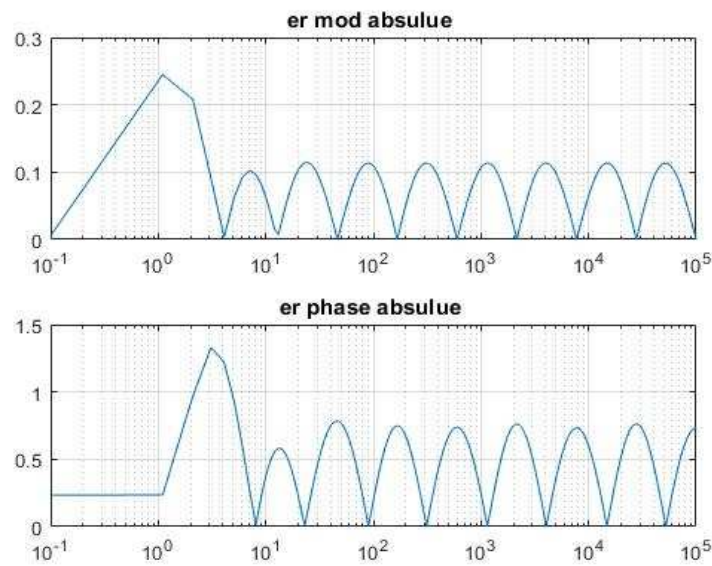


Figure 4.2.17 Erreur absolue module et phase pour  $m=0.9$

Type	Erreur absolue module	Erreur absolue phase
moyenne	0.07	0.25
max	0.25	1.3
écartype	0.036	0.23

Tab.4.2.17 Différentes types d'erreur absolue module et phase pour  $m=0.9$

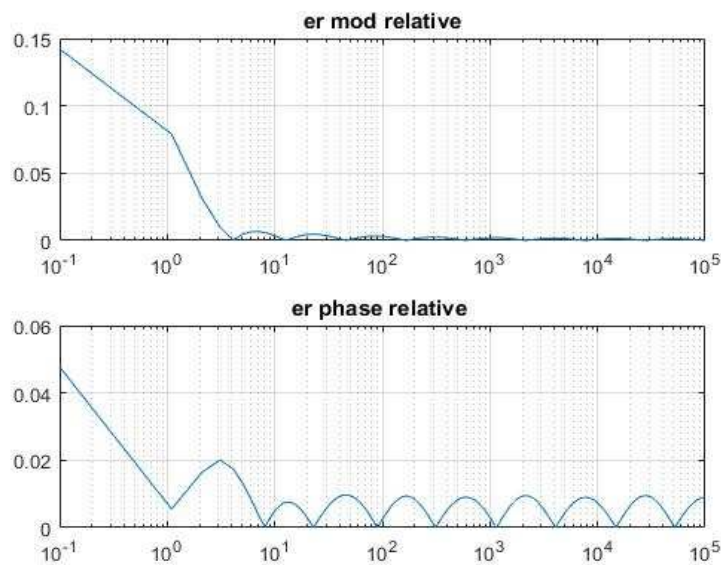


Figure 4.2.18 Erreur relative module et phase pour  $m=0.9$

Type	Erreur relative module	Erreur relative phase
moyenne	0.001	0.0075
max	0.18	0.05
écartype	0.0008	0.0003

Tab.4.2.18 Différentes types d'erreur relative module et phase pour  $m=0.9$



Donc :

$$\text{moyenne totale module (absolue)} = [0.07, 0.035, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.038, 0.07] = 0.023$$

$$\text{moyenne totale phase (absolue)} = [0.5, 0.25, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.28, 0.25] = 0.142$$

$$\text{moyenne totale module (relative)} = [0.008, 0.004, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.009, 0.001] = 0.0024$$

$$\text{moyenne totale phase (relative)} = [0.055, 0.025, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.0004, 0.0075] = 0.0097$$

$$\text{max totale module (absolue)} = [0.16, 0.11, 0.06, 0.055, 0.05, 0.07, 0.08, 0.17, 0.25] = 0.112$$

$$\text{max totale phase (absolue)} = [1.1, 0.65, 0.2, 0.2, 0.19, 0.25, 0.3, 0.75, 1.3] = 0.548$$

$$\text{max totale module (relative)} = [0.6, 0.38, 0.18, 0.16, 0.15, 0.14, 0.15, 0.16, 0.18] = 0.233$$

$$\text{max totale phase (relative)} = [0.3, 0.15, 0.05, 0.04, 0.03, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05] = 0.078$$

$$\text{écartype totale module (absolue)} = [0.036, 0.018, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.019, 0.036] = 0.012$$

$$\text{écartype totale phase (absolue)} = [0.23, 0.12, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.12, 0.23] = 0.777$$

$$\text{écartype totale module (relative)} = [0.005, 0.0025, 0.0005, 0.0004, 0.0003, \dots, 0.0008] = 0.0011$$

$$\text{écartype totale phase (relative)} = [0.025, 0.012, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0002, 0.0003] = 0.0041$$

### 5. Comparaison des modules et phases

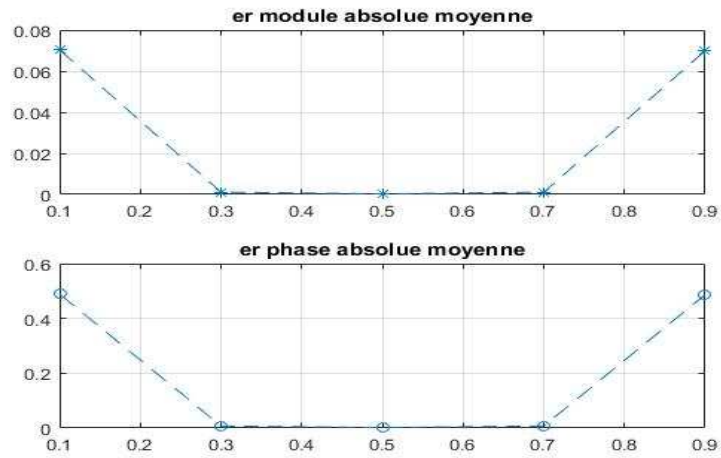


Figure 4.3.1 L'erreur absolue moyenne module et phase

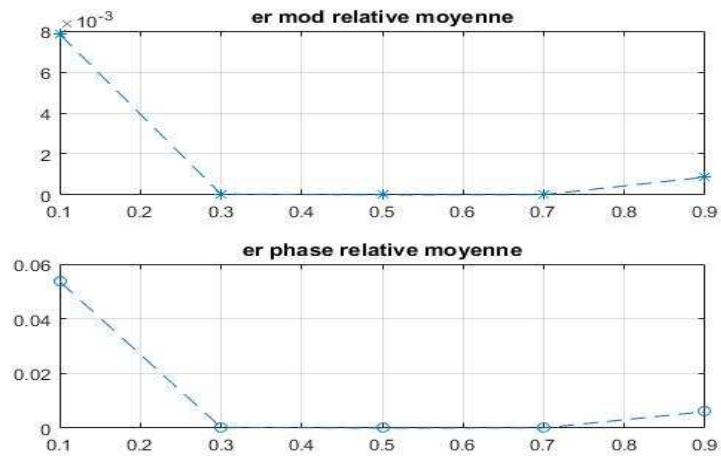


Figure 4.3.2 L'erreur relative moyenne module et phase

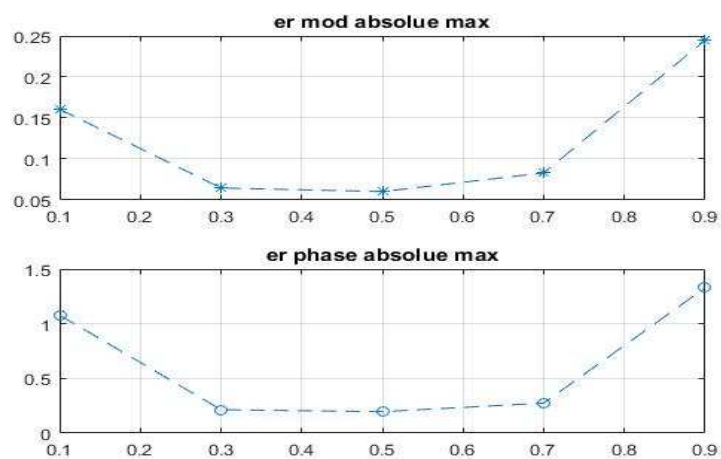


Figure 4.3.3 L'erreur absolue max module et phase

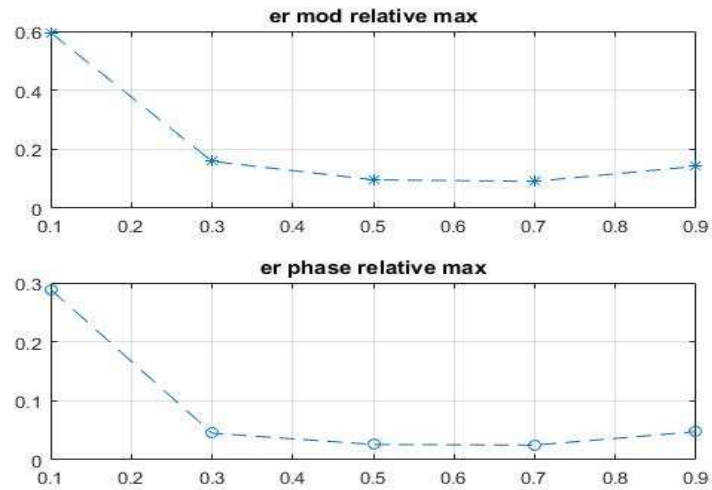


Figure 4.3.4 L'erreur relative max module et phase

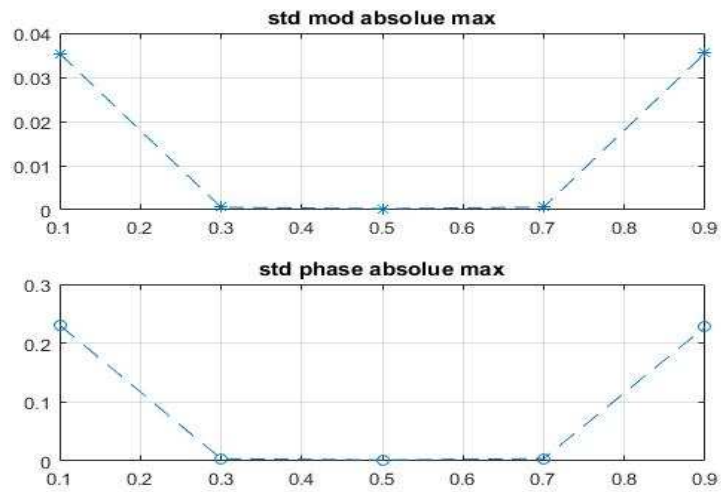


Figure 4.3.5 Std absolue max module et phase

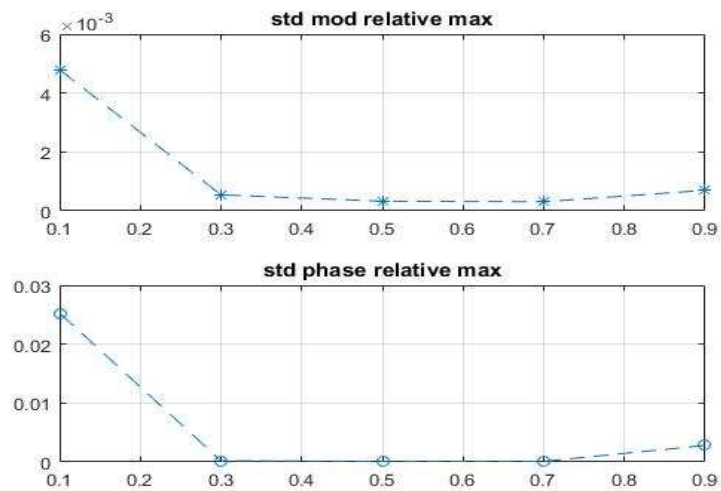
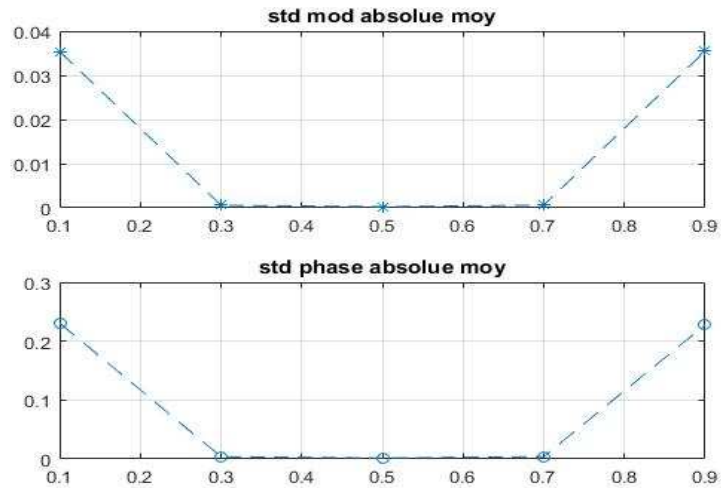
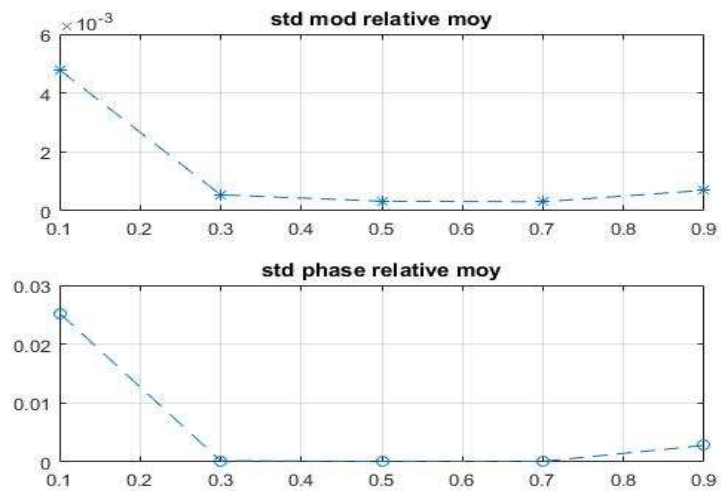


Figure 4.3.6 Std relative max module et phase



**Figure 4.3.7** Std absolue moyenne module et phase



**Figure 4.3.8** Std relative moyenne module et phase

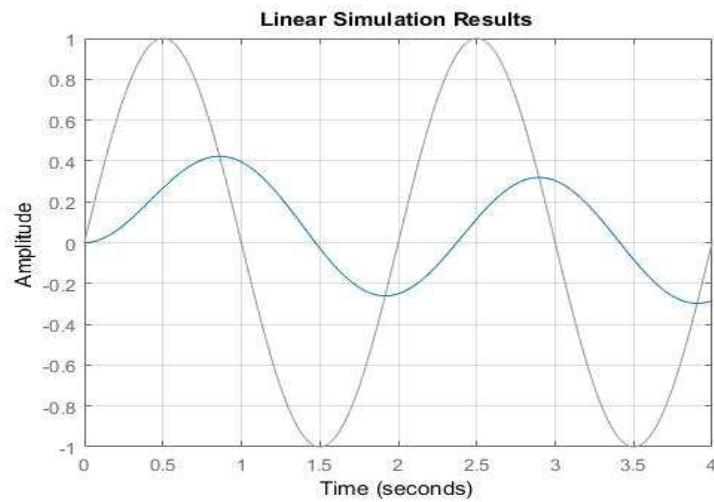
### Remarque

On remarque que on a une bonne approximation pour  $m=0.3$  jusqu'à  $m=0.7$

## 6. Comparaison des performances entre système entier et fractionnaire

### 6.1. Analyse temporelle

#### 6.1.1 Signal sinusoïdal



**Figure 4.4.1** Réponse temporelle d'un signal sinusoïdal

$$E1 = A\sin(2\pi f + \Delta\theta)$$

$$E1 = 1\sin(2\pi f + 0)$$

$$\text{sys1} = 0.4\sin(2\pi f - 89^\circ) \approx 0.4\sin(2\pi f - \frac{\pi}{2})$$

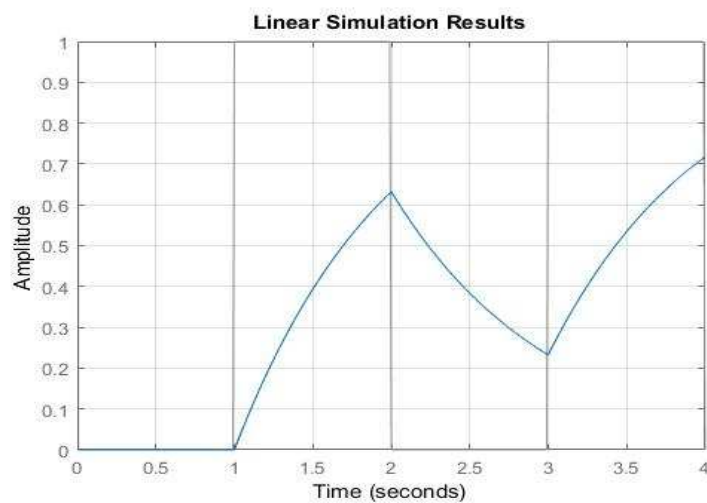
### Conclusion

-Atténuation de  $-3\text{dB}/\text{dec}$  sur l'amplitude [ $1 \rightarrow 0.4$ ].

- Déphasage de  $\approx -\frac{\pi}{2}$ .

-Décalage de gauche à droite.

### 6.1.2 Signal carré



**Figure 4.4.2** Réponse temporelle d'un signal carré

$$T_2 = 3.49$$

$$Y_2 = 2.52$$

$$\text{erreur statique} = 1 - 0.625$$

$$\text{erreur statique} = 0.375$$

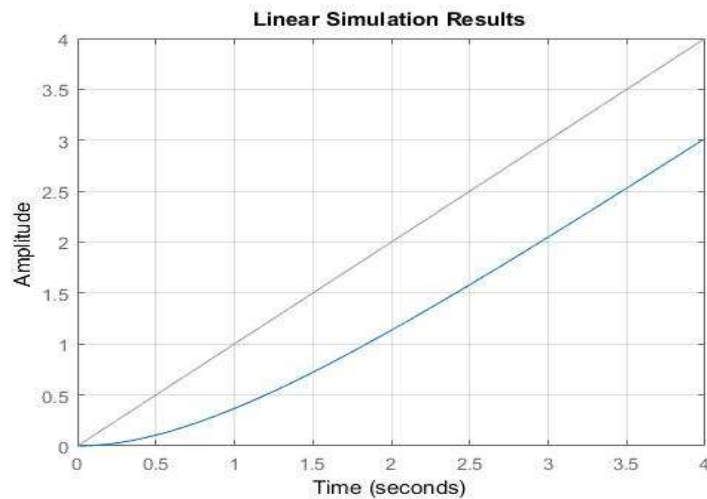
### Conclusion

-Le temps de durée 1s ne suffit pas pour la charge et la décharge.

-L'erreur statique est grande.

-Le système est lent.

### 6.1.3 La rampe



**Figure 4.4.3** Réponse temporelle d'un signal sinusoïdal

$$T_3 = 3.49$$

$$Y_3 = 2.52$$

$$\text{Erreur de Traînage} = 3.49 - 2.52$$

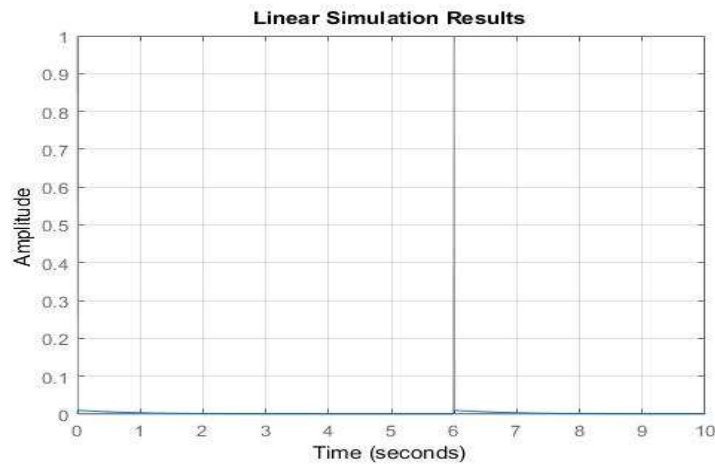
$$\text{Erreur de Traînage} = 0.97$$

### Conclusion

-L'erreur de Traînage est proportionnelle à la constante de temps du système.

-Le système a une faible vitesse.

### 6.1.4 Signal d'impulsion ( $durée \ll 1$ )



**Figure 4.4.4** Réponse temporelle d'un signal d'impulsion

$$T_4 = 1$$

$$Y_4 = 0.00997$$

$$\text{Erreur de Traînage} = 1 - 0.00997$$

$$\text{Erreur de Traînage} = 0.99003$$

#### Conclusion

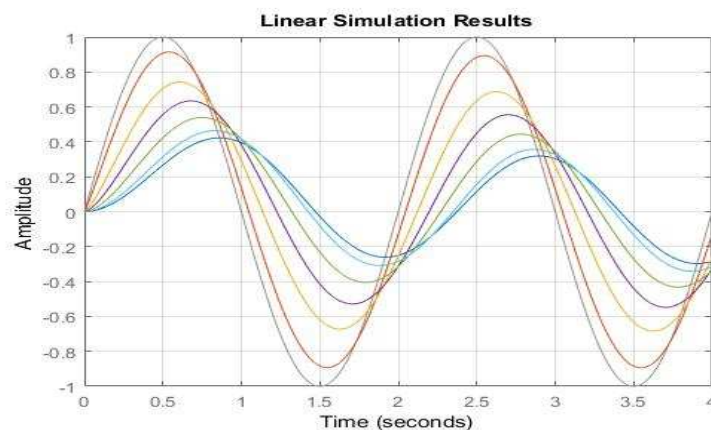
-Erreur de Traînage varie proportionnellement avec la vitesse du signal (fréquence).

-Le système à haute vitesse.

On passe à la comparaison du système fractionnaire au système du premier ordre.

## 6.2. Comparaison du système fractionnaire au système du premier ordre

### 6.2.1 Comparaison du signal sinusoïdal

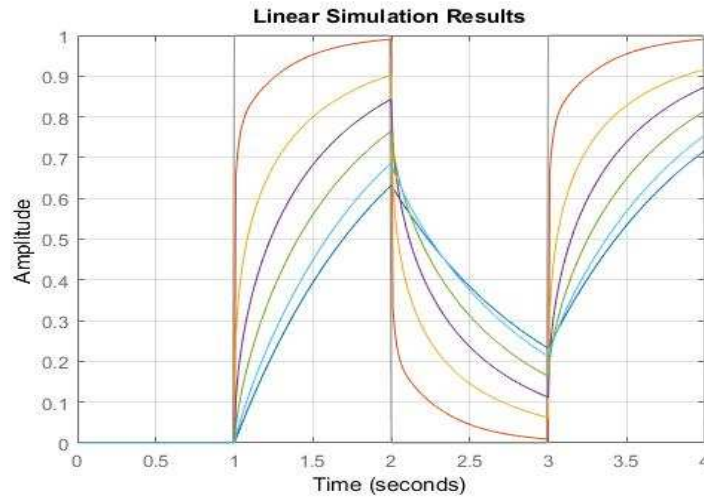


**Figure 4.4.5** Comparaison du signal sinusoïdal au système du premier ordre

-Le système est plus rapide si  $m$  proche de 0.1

-La vitesse de système fractionnaire varie proportionnelle avec  $m$  ( $0.1 < m < 0.9$ )

### 6.2.2 Comparaison du signal carré

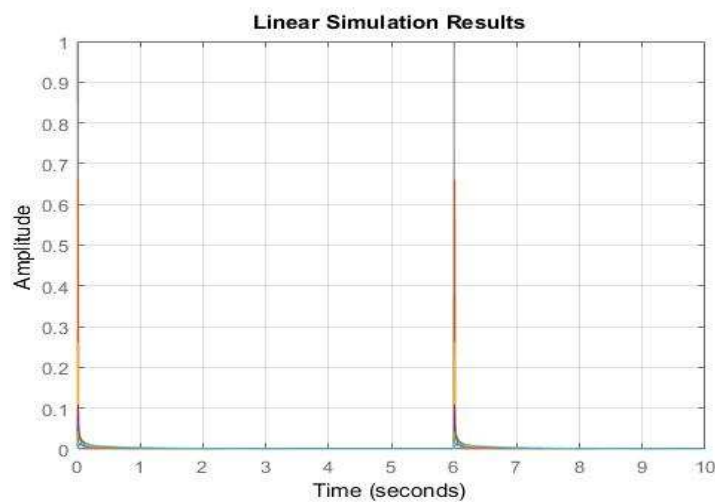


**Figure 4.4.6** Comparaison du signal carré au système du premier ordre

-Le système est plus rapide si  $m$  proche de 0.1

-La vitesse de système fractionnaire varie proportionnelle avec  $m$  ( $0.1 < m < 0.9$ )

### 6.2.3 Comparaison de l'impulsion



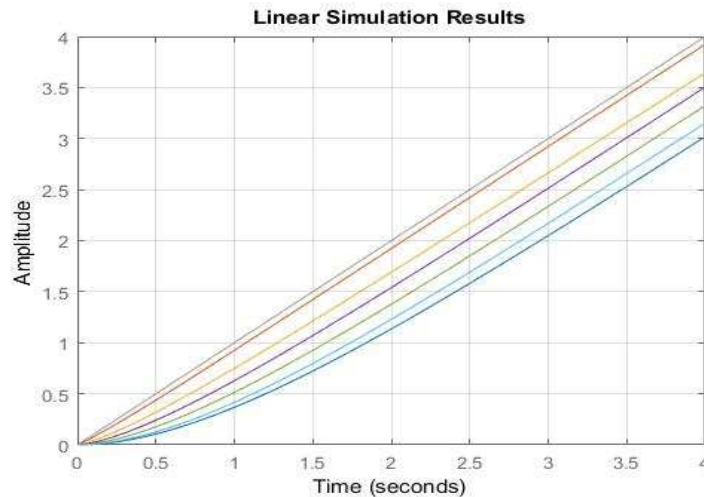
**Figure 4.4.6** Comparaison du signal carré au système du premier ordre



-Le système est plus rapide si  $m$  proche de 0.1

-La vitesse de système fractionnaire varie proportionnelle avec  $m$  ( $0.1 < m < 0.9$ )

### 6.2.4 Comparaison de la rampe



**Figure 4.4.7** Comparaison de la rampe au système du premier ordre

-Le système est plus rapide si  $m$  proche de 0.1

-La vitesse de système fractionnaire varie proportionnelle avec  $m$  ( $0.1 < m < 0.9$ )

## 7. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons essayé de confirmer et d'analyser l'exactitude de l'approximation utilisée, le système fractionnaire a la même dynamique que le système entier.

- Le système fractionnaire a le même comportement que le système d'ordre entier au sein d'une plage de fréquences limitée.

- L'approximation utilisées est sensibles à certains paramètres, qu'il est donc nécessaire de bien choisir et ajuster, tels que : La bande de fréquences, les écarts, le nombre de singularités...

- L'approximation a des limites de performances vis-à-vis de l'ordre  $m$ , en effet l'approximation affiché des pertes de précision, voir inefficacité, pour des valeurs de  $m$  proches de 0 et de 1.

-La bonne approximation été obtenu pour  $m \in [0.3, 0.7]$

- La comparaison des performances entre système entier et fractionnaire été effectué par l'analyse temporelle et par la comparaison du système fractionnaire et système du premier ordre

.

# Chapitre 5

## Conclusions et perspectives

---

Ce mémoire porte sur les systèmes fractionnaires qui peuvent être représentés par des fonctions rationnelles généralisées avec des puissances réelles au lieu de puissances entières seulement. Nous avons présenté quelques techniques mathématiques pour les comprendre et les analyser. La méthode de la fonction de singularité est utilisée, pour mettre l'accent sur l'approximation du système fractionnaire par une fonction de singularité, une combinaison de paires pôle-zéro, d'où la distribution discrète des temps de relaxation qui donne certaines propriétés statistiques du système fractionnaire sous-jacent et un modèle de circuit analogique pour le système tel que développé dans [22] avec une approche différente et quelques extensions.

L'utilisation du pôle de puissance fractionnaire (FPP) pour représenter le système fractionnaire au lieu de l'équation de loi de puissance inverse ( $1/f^m$ ) où la FPP obéit à l'équation de loi de puissance inverse dans les deux domaines, temporelle et fréquentielle. La FPP présente également certains avantages tels que la valeur finie aux basses fréquences qui, dans la plupart des cas, est exposé par des processus naturels. La FPP peut également être considéré comme une fonction rationnelle généralisée. Par conséquent, il peut être étendu à des types plus généraux de systèmes fractionnaires que nous avons classés dans le cas suivants :

- 1- fractionnaire unique – ordre unique
- 2- fractionnaire unique – ordre multiple
- 3- fractionnaire multiple – ordre unique
  - 3.1- Paire de puissance fractionnaire de pôles conjugués complexes
  - 3.2- puissance fractionnaire multiple pôles uniques
- 4- fractionnaire multiple - ordre multiple

Il a été montré comment utiliser une méthode graphique sur le tracé de Bode pour approximer une fonction de singularité pour le système à ordre unique fractionnaire (FPP unique) qui est l'élément de base pour la représentation du système fractionnaire dans le domaine fréquentiel. Avec une erreur spécifiée dans dB, la ligne avec une pente de  $-20m \text{ dB/dec}$ , où  $m$  est la dimension fractionnaire et  $0 < m < 1$ , est approximé par un certain nombre de lignes en zig-zag reliées entre elles avec des pentes alternatives de  $-20 \text{ dB/dec}$  et  $0 \text{ dB/dec}$  qui correspondent également à des pôles alternatifs et des zéros sur le côté gauche de l'axe réel sur le domaine de Laplace S et peuvent être liées par des rapports de localisation. Les rapports de localisation et la dimension fractionnaire  $m$  du système sont liés par la formule de dimension. L'approximation de la fonction de singularité a été ensuite étendue à des systèmes fractionnaires d'ordre supérieur tels qu'une paire de pôles complexes conjugués élevés à une puissance fractionnaire et de multiples pôles de puissance fractionnaires. Pour tous les types de systèmes fractionnaires réels positifs, la distribution discrète des temps de relaxation est obtenue et un modèle de circuit analogique est synthétisé comme une immittance

de point d'entraînement. Pour les systèmes fractionnaires réels non positifs, un circuit analogique peut être réalisé en tant que fonction de transfert.

Cette approximation de la fonction de singularité montre que le processus fractionnaire global consiste en un processus élémentaire où chacun contribue sa part au processus global. Cette nature composite provoque des interactions entre les processus élémentaires d'une manière donnée et donne la pente fractionnaire dans le graphique log-log du processus global. La méthode de la fonction de singularité ne donne qu'une bonne approximation pour une bande passante limitée avec un nombre modéré de singularités.

Nous avons analysé le système fractionnaire du premier ordre, premièrement l'analyse temporelle qui est basé sur sa réponse impulsionnelle, sa réponse indicielle, et sa réponse à une rampe. Deuxièmement l'analyse fréquentielle basée sur diagramme de Bode,

L'application des analyses et les représentations sont faites sous simulations MATLAB, L'une des solutions est d'approximer le système fractionnaire par un système entier qui a les mêmes caractéristiques fréquentielles dans la bande d'utilisation. Nous avons comparé les réponses  $H_m$  et  $H_{app}$ , on a remarqué qu'il y a une bonne approximation mais on a pas pu voir cette approximation donc nous avons passé a l'analyse statistique d'ordre 2. D'après les simulations des erreurs absolues et relatives (module et phase) moyenne, max, écartype nous avons obtenu qu'on a une bonne approximation pour  $m=0.3$  jusqu'à  $m=0.7$ .

La comparaison des performances entre système entier et fractionnaire été effectué par l'analyse temporelle et par la comparaison du système fractionnaire et système du premier ordre

## Références

- [1] Feder, J., fractals, Plenum Press, NY, 1988.
- [2] Mandelbrot, B. B., the Fractal Geometry of Nature, W. H. Freeman & Co. 1983.
- [3] Dutta, P. and Horn P.M., " Low Frequency Fluctuations in solids : 1/f noise," Reviews of Modern Physics, Vol. 53, No. 3, July 1981.
- [4] Mandelbrot, B. B., Ed., " Some noises with 1/f spectrum, a bridge between direct current and white noise," IEEE Trans. on Information Theory, Vol. IT-13, No. 2, april 1967.
- [5] Sun, H. and B. Onaral, " A unified approach to represent metal electrode interface, " IEEE Trans. Biomed. Eng., Vol. BME-31, July 1984.
- [6] Goldberger, A. L., V. Bhargava, B. J. West, A. J. Mandell, " On a Mechanism of Cardiac Electrical Stability –the Fractal Hypothesis, " Bioph. J., 48, pp 525-528, 1985.
- [7] Voss, R.F., " 1/f (flicker) noise : A brief review," In Proc. 33rd Annu. Symp. Frequency Contr., Atlantic City, NJ, pp. 40-46, 1979.
- [8] Hooge, F. N., " 1/f Noise," Physica, Vol. 83B, pp. 14-23, 1976.
- [9] Campbell, M. J. and B. W. Jones," Cyclic changes cycliques in the insulinneeds of an unstable diabetic," Science, Vol. 177, pp. 889-891, Sept. 8, 1972.
- [10] Mandelbrot, B. B. and J. W. Van Ness," Fractional Brownian Motion, Fractional noises, and applications," SIAM Rev., Vol. 10, no 4, pp. 422-437, 1968.
- [11] Peitgen, H.-O. and D. Saupe, The Science of Fractal Images, Springer-Verlag, NY, 1988.
- [12] Mandelbrot, B. B., Fractals : Form, Chance, and Dimension, W. H. Freeman, San Francisco, 1977.
- [13] MacDonald, J.R., Impedance Spectroscopy, NY, John Wiley, 1987.
- [14] Cole, K. S. and R.H. Cole," Dispersion and Absorption in Dielectrics, Alternating Current Characterization," J. Chem. Physics, 9, pp 341-351, 1941.
- [15] Van Der Zeil, A., " On the Noise Spectra of Semiconductor Noise and of Flicker Effect," Physica, 16, pp 359-372, 1950.
- [16] Davidson, D. W. and R. H. Cole," Dielectric Relaxation in Glycerol, Propylene Glycol and n-Propanol," J. Chem. Physics, 19, pp 1484-1490, 1951.

- [17] Debye, P., Polar Molecules, Dover Publication, NY, 1929.
- [18] Fuoss, R. M., J. K. Kirkwood, "Electrical Properties of solids VIII-Dipole Moments in polyvinyle chloride Diphenyl Systems," J. Am. Chem. Soc. , 63, pp 385-394, 1941.
- [19] West, B. J., M. F. Shlesinger, "On the Inevitability of 1/f Noise," Int. J. Modern physics, Vol. B3, p. 795, 1989.
- [20] Sun, H. H., A. A. Abdelwahab, B. Onaral, "Linear Approximation of Transfer Function with a Pole of Fractional Power," IEEE Trans. Autom. Con., 29, pp 441-444, 1984.
- [21] Tsao, Y. Y. and B Onaral, "Fractal Relaxation Systems, Part I : Singularity Structure Analysis," Int. J. Gen. Systems, Vol.17, pp 359-377, 1990.
- [22] Tsao, Y. Y., Fractal Concepts in the Analysis of Dispersion/Relaxation process, ph. D. Dissertation, Drexel University Press, 1987.
- [23] Sun, H. H., B. Onaral, Y. Y. Tsao, "Application of the Positive Reality Principle to Metal Electrode Linear Polarization Phenomena," IEEE Trans. Biom. Eng., Vol.31, pp 664-674, 1984.
- [24] Charef, A., H. H. Sun, Y. Y. Tsao, B. Onaral, "Modeling of Fractal System by Singularity Function," In Proc. 21st Annu. Model. and Simula. Conf., Pittsburgh, PA, pp. 87-93, 1990.
- [25] Tsao, Y. Y., D. Wawrzynski, and B. Onaral, "Distribution of Relaxation Times of Fractal Dimension Systems," In Proc. 9th IEEE-EMBS Annu. Conf., Boston, MA, pp. 12-13, 1987.
- [26] Kuo, B. J., Automatic Control System, 5th edition, Prentice-Hall Inc., 1987.
- [27] Garnier, H. (2020). Analyse des systèmes, pp. 1,39, <http://w3.cran.univ-lorraine.fr/perso/hugues.garnier/Enseignement/Auto/C-Auto Analyse.pdf>
- [28] Soyed, A. Analyse temporelle et fréquentielle d'un SLC, pp.25,48. <https://www.technologuepro.com/cours-asservissement-regulation-as/chapitre-3-analyse-temporelle-frequentielle-slc.pdf>
- [29] Robert, P. (2003). Analyse fréquentielle des systèmes linéaires, pp.1, 13. [https://sciences-indus-cpge.papanicola.info/IMG/pdf/SA4-Analyse\\_frequentielle\\_des\\_systemes\\_lineaires.pdf](https://sciences-indus-cpge.papanicola.info/IMG/pdf/SA4-Analyse_frequentielle_des_systemes_lineaires.pdf)

## ملخص

حظيت الأنظمة الكسرية باهتمام كبير في العديد من مجالات العلوم والهندسة التطبيقية. يتم وصف هذه الأنظمة بشكل عام وتمثيلها. تمت دراسة الأنظمة الكسرية بشكل عام نظرًا لعدم وجود حلول تحليلية دقيقة لديهم. في مجال التردد ، تُستخدم التقنيات العددية والتقريبية على نطاق واسع لحلها وتحليلها وتنفيذها. في هذه المذكرة يتم عرض تحليل الأنظمة الكسرية الأساسية المبنية على التقريبات بالوظائف المنطقية لوظائف التحويل غير المنطقية. كما يتم استخلاص وتحليل خصائص التردد والزمان لهذه الأنظمة ، مع تقديم أمثلة توضيحية لإثبات فعالية ودقة الطرق المقترحة. كانت نتائج المحاكاة التي تم الحصول عليها مرضية و تمت مناقشتها.

الكلمات المفتاحية: FPP ، QRS ، CPE ، NIC ، التقريب ، التحجيم ، النظام الكسري ، الأنظمة غير المنطقية ، وظيفة التردد ، نظام الترتيب بالكامل ، استجابة التردد ، الاستجابة الزمنية.

## Résumé

Les systèmes fractionnaires ont reçu un intérêt considérable dans de nombreux domaines des sciences appliquées et de l'ingénierie. Les systèmes fractionnaires ont été marginalement étudiés car ils n'ont pas de solutions analytiques exactes. Dans le domaine fréquentielle, les techniques numériques et d'approximation sont largement utilisées pour leur résolution, analyse et implémentation. Dans ce mémoire l'analyse des systèmes fractionnaires fondamentaux en se basant sur des approximations par des fonctions rationnelles de leurs fonctions de transfert irrationnelles sont présentées. L'extraction et l'analyse des caractéristiques fréquentielles et temporelles de ces systèmes a aussi été faite. Des exemples illustratifs ont été présentés pour démontrer l'efficacité et l'exactitude des méthodes proposées. Les résultats des simulations obtenus ont été satisfaisants et ainsi discutés.

Mots clés : FPP, QRS, CPE, NIC, L'approximation, mise à l'échelle, Système fractionnaire, systèmes irrationnels, Fonction de singularité, système d'ordre entier, réponse fréquentielle, réponse temporelle.

## Abstract

Fractional systems have received considerable interest in many fields of applied science and engineering. These systems are generally generated and illustrated. Fractional systems have been marginally studied because they don't have exact analytical solutions. In the frequency domain, numerical and approximation techniques are used for their resolution, analysis and implementation. In this dissertation the analysis of fundamental fractional systems based on approximations by rational functions of their irrational transfer functions is presented. The extraction and analysis of the frequency and temporal characteristics of these systems was also done. Illustrative examples were evaluated to demonstrate the effectiveness and accuracy of the proposed methods. The results of the simulations obtained were satisfactory and thus discussed.

Keywords : FPP, QRS, CPE, NIC, Approximation, scaling, Fractional system, irrational systems, Singularity function, whole order system, frequency response, time response.