République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

jij.png

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Probabilités et Statistique.

Thème

Comparaison des Systèmes série et parallèle avec des composants partageant la même Copule

Présenté par :

∗ **Alioua Yassmin**

∗ **Kirat Meryem**

Devant le jury composé de :

Yakoubi Fatma	M.A.A Université de Jijel	Encadreur
Stihi Sara	M.C.B Université de constantine1	Présidente
Gherda Mebrouk	M.A.A Université de Jijel	Examinateur

Promotion **2019/2020**

♡ *Remerciements* ♡

Quelles mots en préambule de cette étude, qui met un point d'orgue à une année riche et intense

Tout d'abord, nous remercions **Allah** le tout puissant pour son aide et pour nous avoir guidé pour mener à bien ce travail

La première personne que nous tenons à remercier est notre encadreur **M**me

∗**Yakoubi Fatma**∗

pour l'orientation, la confiance, la patience qui ont constitué un apport considérable sans lequel ce travail n'aurrait pas pu étre mené au bon port

Un grand merci également aux membres du jury, **M**me la présidente **Setihi Sara**
ainsi que l'examinateure **M**r **Mebrouk Gherda** pour l'honneur qu'elles nous ont fait en acceptant de juger notre mémoire

Nos vifs remerciements vont à tous enseignants qui nous suivis nos cinq années d'études à l'université

Enfin, nous remercions toutes les personnes qui auraient contribué d'une manière ou d'une autre à la réalisation de ce travail.

♡**Yassmin – Meryem**♡

Dédicaces

Un grand merci au bon Dieu, le seigneur pour le courage et la force qui nous a offert

pour terminer ce mémoire.

Je dédie ce modeste travail :

A celle qui m'a
aidé par ses sincères prières et
douaa à la plus chère personne de ma vie
ma mère. à celui qui a bien travaillè pour
m'apprendre c'est qu'ou le combat et
qui m'a fait ce que je suis **mon
chère père** que Dieu le protegè
pour nous.
♡

A mes frères : Djalel-eddine, Seif-Eddine Je vous dédie ce travail et veillez trouver dans ce mémoire l'expression de mon respect.
A ma soeur : Anfel Meilleurs voeux de succées dans tes études et bonheur dans ta vie.
A ma collègue Yassmin : Que Dieu réunisse nos chemins pour un long commun serein et que ce travail soit témoignage de ma profonde reconnaissance et de mon amour sincére et fidèle.
A mes profs : Je tiens à exprimer ma profonde gratitude de sincères remerciements à tous mes **enseignants du département de mathèmatiques** qui m'ont accompagnés et aidés à m'améliorer durant mon cursus de formation.
A mes chères amies : Une dédicace particulier est sincère pour mes amies **Assia, Nadia**,

Randa, Nadjet, Soumia, Amira, Djahida, Mounira, Sara, Meriem

A la fin, je prie le bon Dieu de faire ce travail très utile pour les autres candidats de cette spécialité.

♡ **Meryem** ♡

Dédicaces

Un grand merci au bon Dieu, le seigneur pour le courage et la force qui nous a offert pour terminer ce mémoire.

Je dédie ce modeste travail :

A celle qui m'a
aidé par ses sincères prières et
douaa à la plus chère personne de ma vie
ma mère. à celui qui a bien travaillè pour
m'apprendre c'est qu'ou le combat et
qui m'a fait ce que je suis **mon
chère père** que Dieu le protegè
pour nous.

♡

A mes frères : Amine, abd-EL Razak, abd-EL Ghani Je vous dédie ce travail et veillez trouver dans ce mémoire l'expression de mon respect.
A mes soeurs : Hassiba, Ibetissam, Amina Meilleurs voeux de succées dans tes études et bonheur dans ta vie.
A ma collègue Meryem : Que Dieu réunisse nos chemins pour un long commun serein et que ce travail soit témoignage de ma profonde reconnaissance et de mon amour sincére et fidèle.
A mes profs : Je tiens à exprimer ma profonde gratitude de sincères remerciements à tous mes **enseignants du département de mathèmatiques** qui m'ont accompagnés et aidés à m'améliorer durant mon cursus de formation.
A mes chères amies : Une dédicace particulier est sincère pour mes amies **Monira, Sara,**

Randa, Nadjet,, Amira, Djahida, souad, Meriam, Lobna.

A la fin, je prie le bon Dieu de faire ce travail très utile pour les autres candidats de cette spécialité.

♡ **Yassmin** ♡

Table des matières

Résumé **2**

Introduction **5**

1 Concepts généraux **7**

1.1 La théorie de fiabilité 7

1.1.1 Définitions 7

1.1.2 Certains distributions usuelle dans la fiabilité 12

1.1.3 Systèmes multi-composants 15

1.2 les copules 18

1.2.1 Les mesures de dépendence 18

1.2.2 Définition d'un copule 20

1.2.3 Théorème de sklar 21

1.2.4 Propriétes des copules 22

1.2.5 Relation d'ordre sur les copules 23

1.2.6 Copules associées à une copule 24

1.2.7 Autres exemples 25

1.3 Autres résultats et Définitions 26

2 Comparaison des systèmes par les copules **29**

2.1 Principaux résultats des systèmes en série 29

2.1.1 Théorèmes 30

2.2 Principaux résultats des systèmes parallèles 34

2.2.1 Théorèmes 35

2.3 Principaux résultats des systèmes cohérents généraux 37
2.3.1 Théorèmes 38
2.4 Discussions et remarques finales 41

Bibliographie **42**

Résumé

Ce travail est consacré à la comparaisons stochastiques des systèmes en série et en parallèles avec des vecteurs de durée de vie des composants partageant la même copule. Nous montrons que, sous certaines conditions sur la copule commune, le système série à composants hétérogènes est moins fiable qu′un système en série à composants homogènes ayant une fonction de fiabilité commune, qui est égale à la moyenne des fonctions de fiabilité des composants hétérogènes. Cependant, nous montrons que cette propriété n′est pas nécessairement vraie pour une copule arbitraire. Nous obtenons des propriétés similaires pour les systèmes parallèles et pour les systèmes cohérents généraux.

Mots clé : Systéme, série, parallèle, copule.

Abstract

This work is devoted to the stochastic comparisons of series and parallel systems with lifetime vectors of components sharing the same copula. We show that, under certain conditions on the common copula, the series system with heterogeneous components is less reliable than a series system with homogeneous components having a reliability common function, which is equal to the mean of the reliability functions of the herogenous components. However, we show that this property is not necessarily true for a copula arbitrary. We obtain similar properties for parallel systems and for the general coherent systems.

Key words : System, serie, parallel, copula.

Introduction

La comparaison stochastique des durées de vie de systèmes est un sujet très pertinent en ingénierie et notament pour l'étude Dans ce travail, nous présentons quelques propriétés qui sont vraies sous certaines conditions sur la copule.

Cependant, nous montrons également qu'elles ne sont pas nécessairement vraies pour toutes les copules (contre-intuitif). De plus (tant pour les cas de systèmes en série que parallèles) nous fournissons quelques résultats pour comparer les systèmes contenant des composants dépendants hétérogènes avec les systèmes contenant composants dépendants homogènes.

de survie. Ces comparaisons peuvent être utilisées pour choisir la meilleure structure du système sous différents critères ou pour étudier ou placer
les différents composants dans une structure du système.

La fiabilité d'un système dépend de la structure du système ainsi que de la distribution multivariée des durées de vie des composants. Plusieurs articles traitent des comparaisons entre systèmes avec la même répartition des durées de vie et avec des structures différentes.
Nous sommes essentiellement intéressés, pour une structure donnée, dans la comparaison entre les différentes distributions et en particulier, entre les différents vecteurs de distributions marginales.

Il est utile de réaliser une telle étude en concentrant notre attention sur les structures
les plus élémentaires, en considérant le cas des systèmes en série et en parallèle.
Un système en série est un système sans redondance, c'est-à-dire un système qui fonctionne chaque fois que tous ses composants fonctionnent. Un système en parallèle est un système qui fonctionne de qu' un seulement fonctionne.

Ce mémoire est divisé en deux chapitres. Le premier chapitre, est un rappel des notions élémentaires de la fiabilité et des copules. Dans la deuxiéme chapitre, nous présentons les différentes théories utilisées pour comparer la fiabilité d'un même type de système en utilisant toujours les copules dans le calcul de cette fiabilité.

Chapitre 1

Concepts généraux

Dans ce chapitre on va mentioner quelques notions fondamentales (fiabilité, copules), ces derniers sont utilisées dans la suite de ce travail.

1.1 La théorie de fiabilité

La fiabilité est l'étude de déffaillance des systèmes, elle est retenue tant que critère fondamentale pour leur élabortion.

Le système est reconstitué à l'efficacité opérationnelle en faisant un ajustemment ou en remplaçant un composant.

Du point de vue des mesures de fiabilité on distingue deux sortes des systèmes :

Les systèmes réparables : destinés à fonctionné longtemps et à effectuer un grand nombre de mission successives, c'est le cas de tous les systèmes complexe.

Les systèmes non réparables : destines à ne fonctionnes q'une seul fois, c'est le cas des petite système.

1.1.1 Définitions

La fiabilité

La fiabilité est la probabilité de réussite ou la probabilité que le système remplira sa fonction prévue dans les limites de conception spécifiées.

Plus précisément, la fiabilité est la probabilité qu'un produit ou une pièce fonctionne correctement pendant une période de temps spécifiée dans le cadre conditions (la température, le volt, etc) sans défaillance. En d'autres termes, La fiabilité peut être utilisée pour mesurer le succès du système à fournir ses fonctionner correctement. La fiabilité est une caractéristiques de qualité que les consommateurs exiger du fabricant des produits.

Mathématiquement : la fiabilité $R(t)$ est la probabilité qu'un système soit réussi dans l'intervalle du temps 0 au temps t :

$$R(t) = P(T > t) \qquad \forall t \geq 0$$

où T est une variable aléatoire indiquant le temps de défaillance et le temps de défaillance est le manque de fiabilité $F(t)$, une mesure de la défaillance, est défini comme la probabilité que le système échouera au temps t :

$$F(t) = P\,(T \leq t) \quad \forall t \geq 0$$

En d'autres termes, $F(t)$ est la fonction de distribution des défaillances. Si le délai de défaillance la variable aléatoire T a une fonction de densité $f(t)$, puis

$$F(t) = \int\limits_{t}^{\infty} f(s)ds$$

et on a :

$$f(t) = -\frac{dR(t)}{dt}$$

Envisagez un nouveau système testé avec succès qui fonctionne bien une fois mis en service au temps $t = 0$. Le système à moins de chances de continuer à fonctionner comme l'intervalle de temps augmente. La probabilité de réussite pour un intervalle de temps infini, bien sûr est nul.

Ainsi, le système fonctionne à une probabilité de un et finalement diminue à une probabilité de zéro. De toute évidence, la fiabilité est fonction du temps de mission.
Par exemple : on peut dire que la fiabilité du système est de $(0,995)$ pour un temps de mission de 24 $heures$. Cependant, une déclaration telle que la fiabilité du système est $(0,995)$ est vide de sens car l'intervalle de temps est inconnu.

Temps moyen de défaillance du système

Supposons que la fonction de fiabilité d'un système soit donnée par R(t). temps moyen de défaillance du système (MTTF), est donné par :

$$MTTF = \int_{0}^{\infty} t\ f\,(t)\,dt$$

telle que :

$$f(t) = -\frac{dR(t)}{dt} \tag{1.1}$$

dans l'équation (1.1) et en réalisant l'intégration par parties, nous obtenons

$$\begin{aligned} MTTF &= -\int_0^\infty t\ d\left(R\left(t\right)\right) \\ &= \left[-tR\left(t\right)\right]_0^\infty + \int_0^\infty R\left(t\right) dt \end{aligned} \tag{1.2}$$

Le premier terme sur le côté droit de l'équation (1.2) est égal à zéro aux deux limites, car le système doit tomber en panne après une durée de fonctionnement limitée, Donc $tR(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$. Cela laisse le deuxième terme, ce qui équivaut à

$$MTTF = \int_0^\infty R\left(t\right) dt$$

Ainsi, $MTTF$ est l'évaluation intégrale définie de la fonction de fiabilité.
Dans général, si $\lambda(t)$ est défini comme la fonction de taux de défaillance, alors : $MTTF$ est différent de $/1\lambda(t)$.

Maintenabilité

La maintenabilité est définie comme la probabilité qu'un système défaillant soit rétabli dans des conditions spécifiées dans un délai donné lorsque la maintenance est exécutées selon les procédures et les ressources prescrites.
Soit T la variable aléatoire du temps de réparation. Si le temps de réparation T a une fonction de densité de temps de réparation $g(t)$, puis la maintenabilité M (t), est défini comme la probabilité que le système défaillant soit remis en service par
instant t, c'est-à-dire :

$$M(t) = P\left(T \leq t\right) = \int_0^t g\left(s\right) ds$$

Par exemple : si $g(t) = \mu \exp\left(-\mu t\right)$ où $\mu > 0$ est un taux de réparation constant alors :

$$M(t) = 1 - \exp\left(-\mu t\right)$$

qui représente la forme exponentielle de la fonction de maintenabilité.

Une mesure importante souvent utilisée dans les études de maintenance est le temps moyen réparation ($MTTR$) ou le temps d'arrêt moyen. $MTTR$ est la valeur attendue de l'aléatoire temps de réparation variable pas de temps de défaillance et est donné par :

$$MTTR = \int_0^\infty tg\left(t\right) dt$$

lorsque la distribution a une densité de temps de réparation donnée par :

$$g(t) = \mu \exp(-\mu t)$$

alors, à partir de l'équation ci-dessus, $MTTR = 1/\mu$.
Lorsque le temps de réparation T a la distribution normal fonction de densité $g(t)$, et la fonction de densité est donnée par :

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma t} \exp\left(-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad t > 0$$

alors on peut montrer que

$$MTTR = m \exp\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)$$

où m désigne la médiane de la distribution *log* normale.

pour concevoir et fabriquer un système maintenable, il est né cessaire de prévoir le $MTTR$ pour diverses conditions de défaut qui pourraient se produire dans le système.

Le temps de réparation du système se compose de deux intervalles distincts :
temps de réparation passif et temps de réparation actif.
Le temps de réparation passif est principalement déterminé par le temps pris par des ingénieurs de service pour se rendre sur le site du client. Dans de nombreux cas, le coût du voyage le temps dépasse le coût de la réparation proprement dite.
Le temps de réparation actif est directement affecté par la conception du système et est répertorié comme suit :

1. Le temps entre l'apparition d'une panne et l'utilisateur du système prendre conscience que cela s'est produit.
2. Le temps nécessaire pour détecter un défaut et isoler le remplaçable Composants.
3. Le temps nécessaire pour remplacer le ou les composants défectueux.
4. Le temps nécessaire pour vérifier que le défaut a été corrigé et que le système est pleinement opérationnel.

Disponibilité

La disponibilité d'un système est définie comme la probabilité que le système soit réussi au temps t. Mathématiquement :

$$\begin{aligned} Disponibilit\acute{e} &= \frac{Temps\ de\ fonctionnement\ du\ syst\grave{e}me}{Temps\ de\ fonctionnement\ du\ syst\grave{e}me + Temps\ d'arr\hat{e}t\ du\ syst\grave{e}me} \\ &= \frac{MTTF}{MTTF + MTTR} \end{aligned}$$

La disponibilité est une mesure du succès utilisée principalement pour les systèmes réparables. On distingue deux cas :

• pour systèmes non réparables, la disponibilité $A(t)$ égal à la fiabilité $R(t)$

• En systèmes réparable $A(t)$ sera égal ou supérieur à $R(t)$.

Fonction de structure

Soit un système formé de n composants indépendants pour lesquels, on définit le vecteur d'état :

$$X = (X_1, X_2, ..., X_n)$$

avec :

$$X_i = \begin{cases} 1 \quad si\ le\ composant\ \mathrm{i}\ fonctionne \\ 0\ si\ le\ composant\ \mathrm{i}\ est\ en\ panne \end{cases}$$

la fonction binaire $\phi(X) = \phi(X_1, X_2, ..., X_n)$, telle que :

$$\phi(X) = \begin{cases} 1 \quad si\ le\ système\ fonctionne \\ 0 \quad si\ le\ système\ est\ en\ panne \end{cases}$$

est appelée fonction de structure d'ordre n. le $i^{éme}$ composant est dit inutile à la structure ϕ si ϕ est constante en X_i. c'est-à-dire :

$$\phi(1_i, X) = \phi(0_i, X)\,,\ pour\ tout\ vecteur\ \ (\cdot_i, X)$$

où :

$$\begin{aligned} (1_i, X) &= (X_1, ..., X_{i-1}, 1_i, X_{i+1}, ..., X_n) \\ (0_i, X) &= (X_1, ..., X_{i-1}, 0_i, X_{i+1}, ..., X_n) \\ (\cdot_i, X) &= (X_1, ..., X_{i-1}, \cdot_i, X_{i+1}, ..., X_n) \end{aligned}$$

La décomposition pivotale

Pour toute fonctoin de structure ϕ d'ordre n on a :

$$\phi(X) = X_i \phi(1_i, X) + (1 - X_i)\, \phi(0_i, X)$$

pour tout X et pour tout i=1,...,n.

La fonction duale

Si ϕ est une fonction de structure d'ordre n, on définit sa duale :

$$\phi^D(X) = 1 - \phi(1 - X)$$

où :

$$1 - X = (1 - X_1, ..., 1 - X_n)$$

Définition 1.1.1. *Pour une fonction de structure ϕ, nous dirons que ϕ° est la fonction de structure duale de ϕ si : pour tout vecteur binaire x, l'égalité suivante est vérifiée :*

$$\phi^\circ(x) = 1 - \phi(1 - x)$$

il est clair que cette opération est involutive. De plus, les structures séries et parallèles sont bien duales l'une de l'autre.

1.1.2 Certains distributions usuelle dans la fiabilité

Distribution binomiale

La distribution binomiale est l'une des variables aléatoires discrètes les plus utilisées distributions en fiabilité et contrôle qualité. Il a des applications en fiabilité l'ingénierie, par exemple, quand on fait face à une situation dans laquelle un événement est soit un succès ou un échec.

la distribution est donnée par :

$$P(X = x) \quad = \quad \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad x = 0, 1, 2, ..., n$$

telle que :

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}$$

où n = nombre d'essais ; x = nombre de succès ; p = probabilité d'essai unique de Succès.

La fonction de fiabilité $R(k)$ est donnée par :

$$R(k) = \sum_{x=k}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Distribution de Poisson

Distribution de Poisson est utilisé pour traiter des événements dans lesquels la taille de l'échantillon est inconnue. Il s'agit également d'une distribution de variable aléatoire discrète est donné par :

$$P\left(X=x\right)=\frac{\left(\lambda t\right)^{x}\exp\left(-\lambda t\right)}{x!}\qquad pour\ x=0,1,2,....$$

où $\lambda =$ taux d'échec constant, $P(X = x)$ est la probabilité d'exactement x échecs se produisant au temps t.

La fonction de fiabilité $R(k)$ est donnée par :

$$R\left(k\right)=\sum_{x=0}^{k}\frac{\left(\lambda t\right)^{x}\exp\left(-\lambda t\right)}{x!}$$

Distribution exponentielle

La distribution exponentielle joue un rôle essentiel dans l'ingénierie de la fiabilité car elle à un taux d'échec constant.

la fonction de densité est donnée par :

$$f\left(t\right)=\frac{1}{\theta}\exp\left(\frac{-t}{\theta}\right)=\lambda\exp\left(-\lambda t\right),\quad\forall t\geq 0$$

La fonction de fiabilité $R(t)$ est donnée par :

$$R\left(t\right)=\exp\left(\frac{-t}{\theta}\right)=\exp\left(-\lambda t\right)$$

où $\theta = 1/\lambda > 0$ est un paramètre du $MTTF$ et $\lambda \geq 0$ est un taux d'échec constant.

La fonction de risque ou le taux d'échec de la fonction de densité exponentielle est constante, c'est-à-dire :

$$h\left(t\right)=\frac{f\left(t\right)}{R\left(t\right)}=\frac{\frac{1}{\theta}\exp\left(-\frac{1}{\theta}\right)}{\exp\left(-\frac{1}{\theta}\right)}=\frac{1}{\theta}=\lambda$$

Nous allons maintenant discuter de certaines propriétés de la distribution exponentielle qui sont utile pour comprendre ses caractéristiques, quand et où il peut être appliqué

proprieté 1.1.1. *(Propriété sans mémoire)*
La distribution exponentielle est la seule distribution continue satisfaisante

$$P\left\{T\geq t\right\}=P\left\{T\geq t+s\mid T\geq s\right\}\quad pour\ t>0,s>0$$

Ce résultat indique que la fonction de fiabilité conditionnelle pour la durée de vie d'un composant qui a survécu au temps s est identique à celui d'un nouveau composant.

Ce terme est l'hypothèse dite utilisée comme bonne comme nouvelle .

La durée de vie d'un fusible dans un système de distribution éléctrique peut être supposée une distribution exponentielle. Il échouera en cas de surtension provoquant le fusible à griller. En supposant que le fusible ne subit aucune dégradation pendant temps et que les surtensions qui provoquent une panne sont susceptibles de se produire également au fil du temps, alors l'utilisation de la distribution de durée de vie exponentielle est appropriée, et un fusible utilisé qui n'a pas échoué est comme neuf.

Distribution normale

La distribution normale joue un rôle important dans les statistiques classiques en raison de la Théorème de la limite centrale sa densité est donnée par :

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-1}{2} \left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2 \qquad -\infty < t < \infty$$

et sa fonction de répartitoin

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-1}{2} \left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2 ds$$

La fonction de fiabilité est :

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - \int_{t}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-1}{2} \left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2 ds$$

Distribution de Weibull

La distribution de Weibull (Weibull 1951) est une généralisation de la distribution exponentielle et est couramment utilisé pour représenter la résistance à la fatigue, la balle durée de vie des roulements et durée de vie du tube à vide. La fonction de densité de probabilité est :

$$f(t) = \frac{\beta (t-\gamma)^{\beta-1}}{\theta^{\beta}} \exp\left(-\left(\frac{t-\gamma}{\theta}\right)^{\beta}\right), \quad t \geq \gamma \geq 0$$

où θ et β sont respectivement appelés paramètres d'échelle et de forme et γ est appelé paramètre d'emplacement. Ces paramètres sont toujours positifs. En utilisant différents paramètres, cette distribution peut suivre la distribution exponentielle, la distribution normale, etc. Il est clair que, pour $t \geq \gamma$, la fonction de fiabilité $R(t)$ est :

$$R\left(t\right) = \exp\left(-\left(\frac{t-\gamma}{\theta}\right)^{\beta}\right) \qquad \text{pour } t > \gamma > 0,\ \beta > 0, \theta\ > 0$$

Par conséquent :

$$h\left(t\right) = \frac{\beta\left(t-\gamma\right)^{\beta-1}}{\theta^{\beta}} \qquad t > \gamma > 0,\ \beta > 0, \theta\ > 0$$

On peut montrer que la fonction de danger diminue pour $\beta < 1$,augmentant pour $\beta > 1$, et constant lorsque $\beta = 1$.

1.1.3 Systèmes multi-composants

Le système en série

La configuration du système en série à n composants est représentée par :

image/fig4.png

FIGURE 1.1 – Système en série

Système en série est le fonctionnement fonctionnel du système dépend de la bon fonctionnement de tous les composants du système. Un système comportant n unités est dit être en un système en série si la défaillance d'une unité arbitraire provoquer toute la défaillance du système.

La fiabilité d'un système en série à n composants est donnée par :

$$\begin{aligned} R_{sys}(t) &= P\left(T > t\right) \\ &= P\left(\min\left\{T_1, T_2, \cdots, T_n > t\right\}\right) \\ &= P\left(T_1 > t, T_2 > t, \cdots, T_n > t\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} P\left(T_i > t\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} R_i\left(t\right) \end{aligned}$$

la fonction de structure du ce système est donnée par :

$$\Phi(x) = \prod_{i=1}^{n} X_i$$

Example 1.1.1. ***Si les composants non identique :***
soit un poste de radio constitué de 4 composants en série : une alimentation $R_A = 0.95$, une partie récepteur $R_B = 0.92$, un amplificateur $R_C = 0.97$ et un haut-parleur $R_D = 0.89$.

La fiabilité R_S de l'appareil est :

$$R_S = R_A.R_B.R_C.R_D = 0.7545$$

Si les composants identique *soit une imprimante constitué de 2000 composants montés en série, supposés tous de même fiabilité, trés élevée, R=0.9999.*

La fiabilité de l'appareil est :

$$R_S = R^n = 0.9999^{2000} = 0.8187$$

Système en parallèle

La configuration du système parallèle à n composants est représentée par :

un système en parallèle si le système est suffisant pour faire le travail en fonctionnant d'au moins une unité dans ce système, car toutes les unités du système sont connectées en parallèle, c-à-d : la défaillance du système se produit uniquement lorsque toutes les unités du système en parallèle tombent en panne.

image/fig5.png

FIGURE 1.2 – Système en parallèle

Soit $R_i(t)$ et T_i la fiabilité du i$^{\text{ème}}$ composant et la durée de vie de la i$^{\text{ème}}$ unié au temps t respectivement, la fiabilité du ce système est obtenu par :

$$\begin{aligned} R_{sys}(t) &= P\left(T > t\right) \\ &= P\left(\max\left(T_1, T_2, \cdots, T_n\right) > t\right) \\ &= 1 - P\left(T_1 < t, T_2 < t, \cdots, T_n < t\right) \\ &= 1 - \left[\left(1 - R_1\left(t\right)\right).\left(1 - R_2\left(t\right)\right).\cdots.\left(1 - R_n\left(t\right)\right)\right] \end{aligned}$$

Si les unités fonctionnent indépendamment, alors

$$R_{sys}(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left[1 - R_i\left(t\right)\right]$$

La fonction de structure du ce système est donnée par :

$$\Phi(X) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - X_i)$$

Example 1.1.2.

soit un dispositif se compose de 4 composants connectés en paralléle dont les fiabilités sont respectivement de $R_A = 0.98$,$R_B = 0.97$, $R_C = 0.98$, $R_D = 0.99$.

La fiabilité de l'ensemble est :

$$\begin{aligned} R(t) &= 1 - \prod_{i=1}^{4}(1 - R_i(t)) \\ &= 1 - [(1 - R_A)(1 - R_B)(1 - R_C)(1 - R_D)] \\ &= 0.99 \end{aligned}$$

Système cohérent

Un système est dit cohérent si la panne de tous ses composants entraîne la panne du système, et le fonctionnement de tous ses composants entraîne le fonctionnement du système.

Lorsque le système en panne, aucune défaillance supplémentaire ne rétablit le fonctionnement du système.

Lorsque le système est en fonctionnement, aucune réparation n'induit la panne du système.

Théorème 1.1.1. *Soit ϕ une fonctoin cohérente d'ordre n, alors :*

$$\phi(0) = 0 \quad et \quad \phi(1) = 1$$

La fiabilité d'un système cohérent La fonction de fiabilité d'un système cohérent vérifié l'identité suivante :

$$R(p) = p_i R(1_i, p) + (1 - p_i) R(0_i, p), \; pour \; i = 1, ..., n$$

1.2 les copules

Le but de ce partier est de fournir une introduction à la notion de copule, d'abord nous commençons par définir la copule dans le cas bivariée et ses propriétés, ensuite, nous parlerons du cas multivarié qui est une généralisation de cas bivarié.

Nous avons recours à d'autres indicateurs de dépendance comme le tau de Kendall ou encore le rho de Spearman (ces deux mesures sont définies dans la suite).

1.2.1 Les mesures de dépendence

Définition 1.2.1. *(Coefficient de corrélation linéaire)*
Soient X et Y deux variables aléatoires ayant des variances finies. Le coefficient de corrélation

linéaire des variables X et Y est donné par

$$r(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}.$$

Où $Cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ est la covariance entre X et Y ; $Var(X)$, $Var(Y)$ correspondent aux variances respectives des variables X, Y .
La définition du coefficient de corrélation linéaire est donc subordonnée à l'existence des variances de X et Y.
Dans le cadre d'une dépendance linéaire parfaite, $Y = aX + b$, $(a \neq 0; b \in \mathbb{R})$, le coefficient de corrélation est égal à (+1) ou (-1) selon le signe de a.
D'autre part, ce coefficient de corrélation reste invariant par des transformations linéaires strictement croissantes des variables aléatoires. En effet : $r(aX+b, cY+d) = sign(ac)r(X,Y)$.
Néanmoins, ce coefficient ne demeure pas constant sous l'hypothèse d'une transformation croissante non linéaire.

Les coefficients de corrélation tau de Kendall et rho de Spearman

Les définitions de ces deux coefficients sont intimement liées à la notion de concordance. Ils constituent une alternative au coefficient de corrélation linéaire, qui n'est pas comme nous l'avons montré auparavant la mesure de dépendance la plus appropriée et souffre de certaine lacunes.

Définition 1.2.2. *Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux observations d'un couple de variables aléatoires continus (X, Y) sont dit :*

- ***concordantes** si*

$$(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0$$

- ***discordantes** si*

$$(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) < 0$$

Définition 1.2.3. *La fonction de concordance entre les deux vecteurs aléatoires (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) est définie par :*

$$Q = \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]$$

a) **Le taux de Kendall**

Définition 1.2.4. *Soient (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) deux vecteurs aléatoires continus (iid) de fonction de répartition conjointe H et de fonctions marginales F (pour $X_1,\ X_2$) et G (pour $Y_1,\ Y_2$), Le taux de Kendall noté τ est définie par :*

$$\tau = \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0].$$

Soient a et b des fonction strictement croissante, alors :

$$\tau(a(X), b(Y)) = \tau(X, Y)$$

b) **Le rho de Spearman**

Définition 1.2.5. *Soient (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) et (X_3, Y_3) trois vecteurs aléatoires indépendants de même loi H. Le coefficient de corrélation de Spearman est définie par :*

$$\rho = 3\mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0]$$

Ce coefficient est invariant sous transformation non linéaire strictement croissante c-à -dire si a et b sont deux fonctions strictements croissantes, alors :

$$\rho(a(X), b(Y)) = \rho(X, Y)$$

1.2.2 Définition d'un copule

Définition 1.2.6. *une copule bidimensionnelle(ou 2_copula) est une fonction C qui possède les propriétés suivantes :*

1. *Dom $C = [0, 1] \times [0, 1]$*
2. *$\forall u, v \in [0, 1], C(u, 0) = C(0, v) = 0$ et $C(u, 1) = u, C(1, v) = v$*
3. *C est deux croisante :*

$$C(v_1, v_2) - C(u_1, v_2) - C(u_1, v_2) + C(u_1, u_2) \geq 0$$

pour toute$(u_1, u_2) \in [0.1]^2, (v_1, v_2) \in [0, 1]^2$
tq : $0 \leq u_1 \leq v_1 \leq 1$ et $0 \leq u_2 \leq v_2 \leq 1$.

Cette définition signifie que la copule est une distribution avec des marginales uniformes.

Soients u_1, u_2 deux variables aléatoires uniformes. considérons le vecteur aléatoire $U = (U_1, U_2)$, nous avons

$$C(U_1, U_2) = P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2)$$

la premier propriété implique que :

$$P[U_1 \leq 0, U_2 \leq u] = P[U_1 \leq u, U_2 \leq 0] = 0$$

et la deusième propriété implique que :

$$P[U_1 \leq 1, U_2 \leq u] = P[U_1 \leq u, U_2 \leq 1] = u$$

C est une distribution de probabilité, ce qui implique que :

$$P[u_1 \leq U_1 \leq v_1, u_1 \leq U_2 \leq v_2] = C(v_1, v_2) - C(v_1, u_2) - C(u_1, v_2) + C(u_1, u_2)$$

1.2.3 Théorème de sklar

Soient C est une copule, F_1 et F_2 sont deux fonctions de répartition alors $H(X,Y) = C(F_1(X), F_2(Y))$ est une fonction de répartition bivariée, ayant F_1 et F_2 pour marginales.

Soit H une fonction de répartition bivariée de marginales F_1 et F_2 il existe une copule C pour tout $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$:

$$H(X,Y) = C(F_1(X), F_2(Y))$$

si de plus F_1 et F_2 sont continues, alors C est unique.

Soit H la fonction de distribution du copule $F_1(X)$ et $F_2(Y)$ alors :

$$\begin{aligned} C(u,v) &= P[F_1(X) \leq u, F_2(Y) \leq v] \\ &= P[X \leq F_1^{-1}(u), Y \leq F_2^{-1}(v)] \\ &= H[F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v)]. \end{aligned}$$

Example 1.2.1.

$$H(x_1, x_2) = (1 + e^{-x_1} + e^{x_2})^{-1}$$

définie sur $\mathbb{R}^2$. *Nous pouvons montrer les marges sont*

$$F_1(x_1) = H(x_{1,}\infty) = (1 + e^{x_1})^{-1} \; et \; F_2(x_2) = H(x_2, \infty) = (1 + e^{x_2})^{-1}$$

les foctions inverses sont donc

$$F_1^{-1}(u) = \ln u - \ln(1-u) \; et \; F_2^{-1}(v) = \ln v - (1-v)$$

Nous de déduisons que la fonction copule est

$$\begin{aligned} C(u,v) &= H\left(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v)\right) \\ &= \left(1+\frac{1-u}{u}+\frac{1-v}{v}\right)^{-1} \\ &= \frac{uv}{u+v-uv} \end{aligned}$$

1.2.4 Propriétes des copules

les résultats suivants donnent les propriétés et les théorémes les plus important d'une copule bivariée

Théorème 1.2.1. (*Bornes de Fréchet-Hoeffding*) *Soit H une fonction de répartition conjointe d'une copule aléatoire (X,Y) de fonctions de répartition marginales F_1 et F_2. pour toute copule bivariée C associée à H et $\forall\ (u,v) \in I^2$, on a*

$$C_L\,(u,v) = \max(u+v-1,0) \leq C(u,v) \leq \min\,(u,v) = C_U\,(u,v)$$

Démonstration. on a

$$\forall u,v \in I \begin{cases} C\,(u,v) \leq C\,(u,1) = u \\ C(u,v) \leq C(1,v) = v \end{cases} \Longrightarrow C\,(u,v) \leq \min\,(u,v) = C_U$$

de la défnition (2.1) dans 3) et $\forall\ u,v \in I$, on a

$$\begin{aligned} C(u,v) &\geq C(u,1) + C\,(1,v) - C\,(1,1) \\ &\Rightarrow C\,(u,v) \geq (u+v-1) \end{aligned}$$

or $\forall\ u,v \in I,\ \ C\,(u,v) \geq 0$

$$\Rightarrow C\,(u,v) \geq \max\,(u+v-1,0) = C_L\,(u,v)$$

donc

$$C_L\,(u,v) \leq C\,(u,v) \leq C_U\,(u,v)\,.$$

Théorème 1.2.2. (*Continuité*) *Si u_1, u_2 ; v_1, v_2 sont dans $[0,1]$ avec $u_1 \leq u_2$ et $v_1 \leq v_2$ on a :*

$$\left|C\,(u_1,v_1) - C\,(u_2,v_2)\right| \leq |u_2-u_1| + |v_2-v_1|\,.$$

Théorème 1.2.3. (*Différentiabilité*) *Soit C une copule bivariée ; $u, v \in [0,1]^2$*

1. *les dérivées partielle existent p.s et*

$$0 \leq \frac{\partial C\left(u_1, u_2\right)}{u_j} \leq 1 \text{ avec } j = \overline{1,2}$$

2. $u \to \frac{\partial C(u,v)}{\partial u}$ *et* $v \to \frac{\partial C(u,v)}{\partial v}$

soit bien définies et décroissantes sur I p.s

Proposition 1.2.4.
Si $C_{X,Y}$ est la copule de (X, Y), toute transformation croissante de (X, Y) a la même copule

Conséquences :

$$\begin{aligned}
&\text{si } f \nearrow \text{ et } g \nearrow \; ; C_{f(X),g(Y)}\left(u, v\right) = C_{X,Y}\left(u, v\right) ; \\
&\text{si } f \nearrow \text{ et } g \searrow \; ; C_{f(X),g(Y)}\left(u, v\right) = u - C_{X,Y}\left(u, 1 - v\right) ; \\
&\text{si } f \searrow \text{ et } g \searrow \; ; C_{f(X),g(Y)}\left(u, v\right) = u + v - 1 + C_{X,Y}\left(u - 1, v - 1\right)
\end{aligned}$$

1.2.5 Relation d'ordre sur les copules

soient C_1 et C_2 deux copules. On dit que C_1 est plus petite que C_2 et note $C_1 < C_2$ si et seulement si

$$C_1(u_1, u_2) \leq C_2(u_1, u_2), \forall u, v \in [0,1]^2$$

cette relation d'ordre est partielle car ne peut pas comparer toutes les copules entre elles. Néanmois, nous avons toujours

$$C_U < C < C_L$$

Nous en deduisons qu'une structure de dépendace positive est une fonction copule C qui verifie lingalité suivante :

$$C_I < C < C_L$$

De même, une structure de dependance negative est une fonction copule C qui vérifie l'inégaité suivante

$$C_U < C < C_I$$

Cependant, comme cette relation d'ordre est partielle, il existe donc des fonction copules qui ne sont ni des structures de dépendance positive, ni des structures de dépendance négative.

Remarque 1.2.1.
C_I est la copule de produit

$$C_I(u,v) = uv$$

1.2.6 Copules associées à une copule

La copule de survie

Cett copule est trés intéressante, car dans la majorité des application à la duré de vie des individus dans une certaine population . Dans le cas univarie la probabilité de survie
est définie par :

$$P\left(X > x\right) = 1 - F\left(x\right)$$

telle que F représente la fonction de répartition de X.

De même pour le cas bivarié, si H est la fonction de répartitition jointe associée au $\left(X > x, Y > y\right)$ et les marginales sont $\overline{F}$ et $\overline{G}$, alors

$$\begin{aligned}
\widehat{H}\left(x,y\right) &= P\left(X > x, Y > y\right) \\
&= 1 - P\left(X \leq x, Y \leq y\right) \\
&= 1 - F\left(x\right) - G\left(y\right) + H\left(x,y\right) \\
&= \overline{F}\left(x\right) + \overline{G}\left(y\right) - 1 + C_{X,Y}\left(1 - \overline{F}\left(x\right), 1 - \overline{G}\left(y\right)\right)
\end{aligned}$$

donc la copule de survie $\overline{C}$ de X, Y est
$\widehat{H}\left(x,y\right) = \overline{C}\left(\overline{F}\left(x\right), \overline{G}\left(y\right)\right) = \overline{F}\left(x\right) + \overline{G}\left(y\right) - 1 + C_{X,Y}\left(1 - \overline{F}\left(x\right), 1 - \overline{G}\left(y\right)\right)$

La copule duale

Elle est définie par :

$$\begin{aligned}
P\left(X \leq x \text{ ou } Y \leq y\right) &= PX \leq x) \ + P(\ Y \leq y) - P\left(X \leq x\ ,\ Y \leq y\right) \\
&= F\left(x\right) + G\left(y\right) - H\left(F\left(x\right), G\left(y\right)\right)
\end{aligned}$$

La copule archimidienne

Définition 1.2.7. *Une copule archimidienne est de la forme :*

$$C\left(x,y\right) = \phi^{-1}\left(\phi\left(x\right) + \phi\left(y\right)\right)$$

avec $\phi : [0,1] \to [0,+\infty[$ une fonction continue strictement décroissante et convexe vérifiant $\phi\left(1\right) = 0$ et la convention $\phi^{-1}\left(y\right) = 0$, $y \geq \phi\left(0\right)$.

Quelques exemples classiques :

Le tableau suivant résume les différentes familles de copules Archimédiennes bivariées

copule	Copule bivariée	générateur
clayton	$\left(u^{-\theta}+v^{-\theta}-1\right)^{-\frac{1}{\theta}}, \theta \in]-1,+\infty[\setminus \{0\}$	$\frac{U^{-\theta}-1}{\theta}$
Gumbel	$\exp\left[-\left((-\ln u)^{\theta}+(-\ln v)^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right]$, $\theta \in]1,+\infty[$	$(-\ln u)^{\theta}$
Frank	$-\frac{1}{\theta}\ln\left[1+\frac{\left(e^{-\theta u}-1\right)\left(e^{-\theta v}-1\right)}{e^{-\theta}-1}\right], \theta \in R\setminus\{0\}$	$-\ln\left(\frac{e^{-\theta u}-1}{e^{-\theta}-1}\right)$
indépendance	uv	$-\ln u$

1.2.7 Autres exemples

Copule minmax

Soit $X_1, ..., X_n$ i.i.d. de loi F, et $X_{(1)}, ...X\,(n)$ les statistiques d'ordre associées. Loi de $X_{(r)}$:

$$F_r\,(r) = \sum_{i=r}^{n} C_n^i\; F^i\,(X)\,(1-F\,(X))^{n-1}$$

Loi du Max et du min :

$$F_M\,(X) = F^n\,(X)\,, \qquad F_m\,(X) = 1-(1-F\,(X))^n\,.$$

Loi du couple (min,Max)

$$F_{(m,M)}\,(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} C_n^i F^i\,(X)\,(F\,(Y)-F\,(X))^{n-1}\,1_{X<Y} + F^n\,(Y)\,1_{X\geq Y}$$

En résolvant : $C_{(m,M)}\,(F_m\,(X)\,, F_M\,(Y)) = F_{(m,M)}\,(X,Y)$

Définition 1.2.8. *Le copule minimax s'écrit :*

$$C_{(m,M)}\,(u,v) = \left\{\; v-\left[v^{\frac{1}{n}}+(1-u)^{\frac{1}{n}}-1\right]^n,\;\right\}.$$

Relation avec clayton pour $\alpha = \frac{-1}{n}$:

$$v - C_{(m,M)}\,(1-u,v) = C_{\alpha}^{Clayton}\,(u,v)\,.$$

1.3 Autres résultats et Définitions

Définition 1.3.1. *Soit $g : R^n \to R$ une fonction à valeurs réelles, alors g est Schur-concave (Schur-convex) si*

$$g(u_1, u_2, ..., u_n) \leq g(v_1, v_2, ..., v_n) \quad (\geq)$$

pour tout $(u_1, u_2, ..., u_n) \geq_m (v_1, v_2, ..., v_n)$.

Définition 1.3.2. *une copule C est appelée Schur concave(Schur convexe) si, pour tout X, Y et dans* $[0, 1]$

$$C(u, v) \leq C(\lambda u + (1 - \lambda)v, (1 - \lambda)u + \lambda v) \quad (\geq)$$

Il est bien connu que les copules C_I, C_L et C_U sont Schur concaves et que l'unique Schur-convexe la copule est C_L. Si une copule est Schur-concave, alors elle est échangeable, c'est

$$C(u_1, u_2, ..., u_n) = C\left(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, ..., u_{\sigma(n)}\right)$$

pour toutes permutations. Par conséquent, les copules non échangeables ne sont pas concaves Schur.

Définition 1.3.3. *Soit $g : R^n \to R$ une fonction à valeurs réelles, alors g est faiblement schur concave (faiblement schur convexe) si*

$$g(u_1, u_2, ..., u_n) \leq g(\overline{u}, \overline{u}, ..., \overline{u}) \quad (\geq),$$

pour tout $(u_1, u_2, ...u_n)$ *,où* $\overline{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i/n$.

Définition 1.3.4. *Une copule C est dite faiblement Schur-concave(faiblement Schur-convexe) si*

$$C(u_1, u_2, ..., u_n) \leq g(\overline{u}, \overline{u}, ..., \overline{u}) \quad (\geq)$$

pour tout $(u_1, u_2, ...u_n)$, *où* $\overline{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i/n$.

Définition 1.3.5. *Soit $g : R^n \to R$ une fonction à valeur réelle, alors la fonction moyenne associée à g est toute fonction $m_g : R^n \to R$ telle que :*

$$g(u_1, u_2, ..., u_n) = g(z, z, ..., z)$$

pour tout $(u_1, u_2, ...u_n)$, *où* $z = m_g(u_1, u_2, ..., u_n)$.

Lemme 1.3.1.

Si m_g est la fonction moyenne associée à une fonction croissante g, alors g est faiblement Schur-concave (faiblement Schur-convexe) si et seulement si

$$m_g(u_1, u_2, ..., u_n) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i \quad (\geq).$$

La fonction moyenne associée à la copule indépendante C_I est

$$m_{C_I}(u_1, u_2, ..., u_n) = \left(\prod_{i=1}^{n} u_i\right)^{1/n}$$

pour tout $0 \leq u_i \leq 1$ et $i = 1, 2, ..., n$, c'est-à-dire que c'est la moyenne géométrique. Comme la moyenne géométrique est inférieure ou égale à la moyenne arithmétique, C_I est faiblement schur-concave (en fait, il est schur-concave).

De façon analogue, la fonction moyenne associée à la fonction C_L est

$$m_{C_L}(u_1, u_2, ..., u_n) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i$$

pour tout $0 \leq u_i \leq 1$ et $i = 1, 2, ..., n$, c'est-à-dire que c'est la moyenne arithmétique. Ainsi C_L est faiblement Schur-constant, c'est-à-dire qu'il est à la fois faiblement schur-convexe et faiblement schur-concave (en fait c'est Schur-constant).

La fonction moyenne associée à la copule maximale C_U est

$$m_{C_U}(u_1, u_2, ..., u_n) = \min(u_1, u_2, ..., u_n)$$

pour tout $0 \leq u_i \leq 1$ et $i = 1, 2, ..., n$. Ainsi, C_U est faiblement Schur concave (en fait, il est Schur concave). Si C est archimédien, alors :

$$m_C(u_1, u_2, ..., u_n) = \phi^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \phi(u_i)\right).$$

Comme mentionné ci-dessus, ce sont toujours les cas où C est Schur-concave, puis, en particulier, faiblement Schur-concave.

Remarque 1.3.1.

Si C est une copule continue de section diagonale strictement croissante $\sigma(u) = C(u, u, ..., u)$, alors :

$$m_C(u_1, u_2, ..., u_n) = \sigma^{-1}(C(u_1, u_2, ..., u_n)) \tag{1.3}$$

est une fonction moyenne continue strictement croissante telle que $m_C(u, u, ..., u)$ pour $0 \leq u \leq 1$, où σ^{-1} est la fonction inverse de la section diagonale $\sigma(u)$ de la copule.

Définition 1.3.6. *On dit qu'une variable aléatoire X est plus petite qu'une autre variable aléatoire Y dans l'ordre stochastique (on écrit $X \leq_{ST} Y$) si leurs fonctions de distribution satisfont $F_X \geq F_Y$.*

Chapitre 2

Comparaison des systèmes par les copules

Ce chapitre est inspiré d'un travail de recherche publié par Jorge Navaro (2009). Ce travail est consacré à la comparaisons stochastiques des systèmes en série et en parallèles avec des vecteurs de durée de vie des composants partageant la même copule. Nous montrons que, sous certaines conditions sur la copule commune, le système série à composants hétérogènes est moins fiable qu'un système en série à composants homogènes ayant une fonction de fiabilité commune, qui est égale à la moyenne des fonctions de fiabilité des composants hétérogènes. Cependant, nous montrons que cette propriété n'est pas nécessairement vraie pour une copule arbitraire. Nous obtenons des propriétés similaires pour les systèmes parallèles et pour les systèmes cohérents généraux. Pour ces fins, nous introduisons dans notre analyse la notion de la fonction moyenne d'une copule.

Notation

Tout au long de ce travail, les termes croissant et décroissant sont utilisés dans le sens non strict, c'est-à-dire une fonction $g : R^n \to R$ augmente (diminue) lorsque $g(x) \leq (\geq) g(y)$ pour tous $x \leq y$,
où $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ et $x \leq y$ signifie que $x_i \leq y_i$ pour $i = 1, 2, .., n$.

2.1 Principaux résultats des systèmes en série

Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ le vecteur aléatoire des durées de vie de n composants dans un système série.

On note K la copule de survie de $(X_1, X_2, ..., X_n)$ et par $\overline{F}_i$ la fonction de fiabilité marginale de X_i pour $i = 1, 2, ..., n$.

La durée de vie du système en série est $X_{1:n} = \min(X_1, X_2, ..., X_n)$ et sa fonction de fiabilité est donnée par :

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{1:n}(t) &= P(X_{1:n} > t) \\
&= P(X_1 > t, X_2 > t, ..., X_n > t) \\
&= \overline{F}(t, t, ..., t) \\
&= K\left(\overline{F}_1(t), \overline{F}_2(t), ..., \overline{F}_n(t)\right)
\end{aligned}$$

$$= K(\varphi(t), \varphi(t), ..., \varphi(t)) \tag{2.1}$$

où

$$\varphi(t) = m_k\left(\overline{F}_1(t), \overline{F}_2(t), ..., \overline{F}_n(t)\right) \tag{2.2}$$

et m_K est la fonction moyenne de K. Notez que si m_K est une fonction continue à droite croissante tel que $m_K(0, 0, ..., 0) = 0$ et $m_K(1, 1, ..., 1) = 1$, puis pour tout choix de $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n$ la fonction dans (2.2) se révèle être une fonction de fiabilité sur $[0, +\infty[$. Dans ce cas, la fonction peut être appelée la fonction de fiabilité moyenne associée à K et $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n$. Si la copule de survie K a une diagonale continue strictement croissante, alors φ peut être obtenue à partir de (1.3). Ainsi on peut obtenir le résultat suivant pour les systèmes en série avec des composants partageant la même copule.

2.1.1 Théorèmes

Théorème 2.1.1.

Si $(X_1, X_2, ..., X_n)$ et $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ avoir la même copule de survie K de fonction moyenne m_K, alors $X_{1:n} \leq_{ST} Y_{1:n}$ est valable si et seulement si

$$m_K\left(\overline{F}_1(t)\,\overline{,F}_2(t), ..., \overline{F}_n(t)\right) \leq m_K\left(\overline{G}_1(t)\,\overline{,G}_2(t), ..., \overline{G}_n(t)\right)$$

pour tout t, où $\overline{F}_i$ et $\overline{G}_i$ sont les fonctions de fiabilité de X_i et Y_i, respectivement.

Démonstration. A partir de (2.1), la fonction de fiabilité de $X_{1:n}$ peut s'écrire

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{1:n}(t) &= K\left(\overline{F}_1(t), \overline{F}_2(t), ..., \overline{F}_n(t)\right) \\
&= K(\varphi_1(t), \varphi_1(t), ..., \varphi_1(t)),
\end{aligned}$$

où $\varphi_1(t) = m_K\left(\overline{F}_1(t), \overline{F}_2(t), ..., \overline{F}_n(t)\right)$. De façon analogue, pour la fonction de fiabilité de $Y_{1:n}$ nous avoir

$$\begin{aligned}\overline{G}_{1:n}(t) &= K\left(\overline{G}_1(t), \overline{G}_2(t), ..., \overline{G}_n(t)\right)\\ &= K\left(\varphi_2(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_2(t)\right),\end{aligned}$$

où $\varphi_2(t) = m_K\left(\overline{G}_1(t), \overline{G}_2(t), ..., \overline{G}_n(t)\right)$. Par conséquent, comme K est une fonction croissante, $\overline{F}_{1:n} \leq \overline{G}_{1:n}$ si et seulement si $\varphi_1(t) \leq \varphi_2(t)$ pour tout t.

Lorsque la copule de survie est égale à la copule d'indépendance $K = C_I$ (c'est-à-dire lorsque les composants sont indépendants), ceci est équivalent à

$$\left(\overline{F}_1(t)\overline{F}_2(t), ..., \overline{F}_n(t)\right)^{1/n} \leq \left(\overline{G}_1(t)\overline{G}_2(t), ..., \overline{G}_n(t)\right)^{1/n}$$

(un résultat bien connu). par exemple, pour $n = 2$ et la copule minimale $K = C_L$, nous avons si et seulement si

$$\frac{\overline{F}_1(t) + \overline{F}_2(t)}{2} \leq \frac{\overline{G}_1(t) + \overline{G}_2(t)}{2}$$

Dans le théorème suivant, nous donnons un résultat général pour les systèmes en série dont les vecteurs de composante les durées de vie ont différentes copules.

Théorème 2.1.2.

Si $(X_1, X_2, ..., X_n)$ et $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ ont les copules de survie K_X et K_Y telles que : $K_X \leq K_Y$

$$m_{K_X}\left(\overline{F}_1(t)\overline{F}_2(t), ..., \overline{F}_n(t)\right) \leq m_{K_Y}\left(\overline{G}_1(t)\overline{G}_2(t), ..., \overline{G}_n(t)\right) \tag{2.3}$$

pour tout t, où $\overline{F}_i$ est la fonction de fiabilité de X_i et $\overline{G}_i$ est la fonction de fiabilité de Y_i, alors :

$$X_{1:n} \leq_{ST} Y_{1:n}.$$

Démonstration.

De $(2.1), (2.3)$ et $K_X \leq K_Y$, nous avons

$$\begin{aligned}\overline{F}_{1:n}(t) &= K_X\left(\overline{F}_1(t)\overline{F}_2(t), ..., \overline{F}_n(t)\right)\\ &= K_X\left(\varphi_1(t), \varphi_1(t), ..., \varphi_1(t)\right)\\ &\leq K_X\left(\varphi_2(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_2(t)\right)\\ &\leq K_Y\left(\varphi_2(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_2(t)\right)\\ &= K_Y\left(\overline{G}_1(t)\overline{G}_2(t), ..., \overline{G}_n(t)\right)\\ &= \overline{G}_{1:n}(t),\end{aligned}$$

où $\varphi_1(t) = m_{K_X}\left(\overline{F}_1(t)\,\overline{F}_2(t),...,\overline{F}_n(t)\right)$ et $\varphi_2(t) = m_{K_Y}\left(\overline{G}_1(t)\,\overline{G}_2(t),...,\overline{G}_n(t)\right)$.

En particulier, à partir du Théorème 1.2.1, nous peuvent conclure qui les systèmes en série s'améliorent avec la dépendance, c'est-à-dire,

$$X_{1:n}^L \leq_{ST} X_{1:n} \leq_{ST} X_{1:n}^U$$

où $X_{1:n}^L$ et $X_{1:n}^U$ représentent les durées de vie des systèmes en série avec des durées de vie de composants les mêmes fonctions de fiabilité marginale que $X_1, X_2, ..., X_n$ et ayant des copules de survie C_L et C_U, respectivement. Bien que $X_{1:n}^L$ n'est pas une durée de vie de système en série correcte lorsque $n > 2$ (car C_L n'est pas une copule), sa fonction de fiabilité $C_L\left(\overline{F}_1(t)\,\overline{F}_2(t),...,\overline{F}_n(t)\right)$ peut être utilisée comme borne inférieure pour la fonction de fiabilité de $X_{1:n}$. Comme conséquence immédiate du Théorème 2.1.1, pour la comparaisons entre systèmes de séries hétérogènes et homogènes.

Théorème 2.1.3.
Si $(X_1, X_2, ..., X_n)$ et $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ ont la même copule de survie K de fonction moyenne m_K, alors $X_{1:n} \leq_{ST} Y_{1:n}$ est valable si et seulement si

$$m_K\left(\overline{F}_1(t)\,\overline{F}_2(t),...,\overline{F}_n(t)\right) \leq \overline{G}(t)$$

pour tout t, où $\overline{F}_i$ est la fonction de fiabilité de X_i et $\overline{G}$ est la fonction de fiabilité de Y_i pour $i = 1, 2, ..., n$.

Notons que si $\varphi_1(t) = m_{K_X}\left(\overline{F}_1(t)\,\overline{F}_2(t),...,\overline{F}_n(t)\right)$ est une fonction de fiabilité, alors :

$$X_{1:n} =_{ST} Z_{1:n}$$

où $(Z_1, Z_2, ..., Z_n)$ à une copule de survie K et des fonctions de fiabilité marginales égales à $\varphi_1(t)$. Le résultat suivant preuve que les systèmes en série s'améliorent lorsque les durée de vie de leurs composants est identique à chaque fois que la copule de survie est faiblement Schur concave .

Théorème 2.1.4.
Si $(X_1, X_2, ..., X_n)$ et $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ ont la même copule de survie K, K est faiblement Schur concave (faiblement schur-convexe), $\overline{F}_i$ est la fonction de fiabilité de X_i et $\overline{G} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{F}_i}{n}$ est le

fonction de fiabilité de Y_i pour $i = 1, 2, ..., n$,
alors :

$$X_{1:n} \leq_{ST} Y_{1:n} \, (\geq_{ST})$$

Démonstration. De(2.1), nous avons

$$\begin{aligned}\overline{F}_{1:n}(t) &= K\left(\overline{F}_1(t)\,\overline{F}_2(t), ..., \overline{F}_n(t)\right) \\ &= K\left(\varphi_1(t), \varphi_1(t), ..., \varphi_1(t)\right) \\ &\leq K\left(\overline{G}(t), \overline{G}(t), ..., \overline{G}(t)\right) \quad (\geq) \\ &= \overline{G}_{1:n}(t).\end{aligned}$$

où $\varphi_1(t) = m_{K_X}\left(\overline{F}_1(t)\,\overline{F}_2(t), ..., \overline{F}_n(t)\right)$ et m_K est la fonction moyenne associée à K et l'inégalité est vraie si K est faiblement schur concave (faiblement schur convexe) et que $\varphi_1(t) \leq \overline{G}(t)$ $(\geq)$ est vrai d'après le Lemme1.3.1.

De nombreuses copules sont faiblement Schur concaves (voir [3]). Ainsi, dans de nombreuses situations, un système en série avec des composants hétérogènes s'améliore si nous remplaçons ses composants par des composants identiques avec fonctions de fiabilité communes égales à la moyenne des fonctions de fiabilité des composants hétérogènes , de copule de survie Schur-concave. Cependant,Example 2.1.1 preuve que cette propriété n'est pas nécessairement vrai pour toutes les copules. En fait, comme déjà indiqué par le Théorème 2.1.4, il peut être inversé si la survie la copule est une copule faiblement convexe de Schur différente de la copule minimale CL.

Les conditions des résultats précédents peuvent être simplifiées dans le cas des copules d'Archimèdiennes.

Par exemple, la condition (2.3) se réduit à

$$\phi_X^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\phi_X\left(\overline{F}_i\right)\right) \geq \phi_Y^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\phi_Y\left(\overline{G}_i\right)\right),$$

où X et Y sont les générateurs des copules d'Archimèdiennes K_X et ,K_Y respectivement.

Example 2.1.1.
Dans cet exemple, nous utilisons la copule mentionnée ci-dessous pour montrer que la conclusion du Théorème 2.1.4 ne tient pas nécessairement lorsque la copule n'est ni faiblement Schur-concave ni faiblement Schur-convexe.

Soit $X_{1:2}$ *et* $Y_{1:2}$ *deux durées de vie de système en série avec des durées de vie de composants ayant les caractéristiques suivantes copule de survie articulaire*

$$K_{DS}(u,v)=\begin{cases} uv/2 \quad si \quad 0\leq u\leq \frac{1}{2}, 0\leq v\leq \frac{1}{2} \\ u(3v-1)/2 \quad si \quad 0\leq u\leq \frac{1}{2}, \frac{1}{2}<v\leq 1 \\ v(3u-1)/2 \quad si \quad \frac{1}{2}<u\leq 1, 0\leq v\leq \frac{1}{2} \\ (uv+u+v-1)/2 \quad si \ \frac{1}{2} \ <u\leq 1, \frac{1}{2}<v\leq 1 \end{cases}$$

on prouvé que le K_{DS} *est échangeable mais qu'il n'est pas Schur-concave.*
c est symétrique, mais

$$K_{DS}(\frac{6}{10},\frac{4}{10})=\frac{32}{200}<\frac{33}{200}=K_{DS}(\frac{7}{10},\frac{3}{10})$$

alors, c n'est pas schur concave
En fait, n'est pas faiblement Schur-concave comme

$$K_{DS}(\frac{2}{9},\frac{2}{3})=\frac{9}{81}>\frac{8}{81}=K_{DS}(\frac{4}{9},\frac{4}{9})$$

et il n'est pas faiblement convexe Schur comme

$$K_{DS}(\frac{1}{4},\frac{1}{2})=\frac{8}{128}<\frac{8}{128}=K_{DS}(\frac{3}{8},\frac{3}{8})$$

Par conséquent, si X_1 *et* X_2 *ont des fonctions de fiabilité différentes* $\overline{F}_1$ *et* $\overline{F}_2$ *avec support* $[0,\infty[$, *et* Y_1 *et* Y_2 *sont (iid) avec une fonction de fiabilité commune* $\left(\overline{F}_1+\overline{F}_2\right)/2$, *alors* $X_{1:2}$ *et* $Y_{1:2}$ *ne sont pas nécessairement ST- ordonné. Par exemple, si* X_1 *et* X_2 *ont des distributions exponentielles avec des moyennes* 1 *et* $\frac{1}{2}$, *respectivement,*
alors $\overline{G}_{1:2}\,(0.2)=0.522>0.519=\overline{F}_{1:2}(0.2)$ *et* $\overline{G}_{1:2}(0.4)=0.217<0.227=\overline{F}_{1:2}(0.4)$,
c'est-à-dire que $X_{1:2}$ *et* $Y_{1:2}$ *ne sont pas ordonnés ST.*

2.2 Principaux résultats des systèmes parallèles

Dans les théorèmes suivants, nous donnons des résultats pour les systèmes parallèles similaires à ceux obtenus dans le section précédente pour les systèmes en série. Nous omettons les preuves. Ils peuvent être obtenus en utilisant le fait que pour la durée de vie du système parallèle est $X_{n:n} = \max(X_1, X_2, ..., X_n)$, la fonction de distribution est donnée par :

$$\begin{aligned} F_{n:n}(t) &= P(T \leq t) \\ &= P(X_1 \leq t, X_2 \leq t, ..., X_n \leq t) \\ &= F(t, t, ...t) \\ &= C(F_1(t), F_2(t), ..., F_n(t)) \\ &= C(\phi(t), \phi(t), ..., \phi(t)) \end{aligned}$$

où C est la copule associé, F_i est la fonction de distribution de X_i

$$\phi(t) = m_C(F_1(t), F_2(t), ..., F_n(t))$$

et m_C est la fonction moyenne de la copule C.

2.2.1 Théorèmes

Théorème 2.2.1.
Si $(X_1, X_2, ..., X_n)$ et $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ ont la même copule associé C avec la fonction moyenne m_C, alors $X_{n;n} \leq_{ST} Y_{n:n}$ est valable si et seulement si

$$m_C(F_1(t), F_2(t), ..., F_n(t)) \geq m_C(G_1(t), G_2(t), ..., G_n(t))$$

pour tout t, où F_i est la fonction de distribution de X_i et G_i est la fonction de distribution de Y_i.

Démonstration.
Si $(X_1, X_2, ..., X_n)$ et$(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ ont la même copule associé C avec la fonction moyenne m_C, alors :

$$\begin{aligned} F_{n:n}(t) &= C(F_1(t), ..., F_n(t)) \\ &= C(m_C(F_1(t), ..., F_n(t), ..., m_C(F_1(t), ..., F_n(t))) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} G_{n:n}(t) &= C(G_1(t), ..., G_n(t)) \\ &= C(m_C(G_1(t), ..., G_n(t), ..., m_C(G_1(t), ..., G_n(t))) \end{aligned}$$

D'ou $X_{n;n} \leq_{ST} Y_{n:n}$ est valable si et seulement si

$$m_C(F_1(t), F_2(t), ..., F_n(t)) \geq m_C(G_1(t), G_2(t), ..., G_n(t)) \quad \forall t$$

Théorème 2.2.2.
Si $(X_1, X_2, ...X_n)$ *et* $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ *ont les copules associé* C_X *et* C_Y *telles que :*
$C_X \geq C_Y$ *et* $m_{C_X}(F_1(t), F_2(t), ..., F_n(t)) \geq m_{C_Y}(G_1(t), G_2(t), ..., G_n(t))$
pour tout t*, où* F_i *est la fonction de distribution de* X_i *et* G_i *est la fonction de distribution de* Y_i*, alors :*

$$X_{n:n} \leq_{ST} Y_{n:n}$$

Théorème 2.2.3.
Si $(X_1, X_2, ..., X_n)$ *et* $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ *ont la même copule associé* C *avec fonction moyenne* m_C*, alors* $X_{n:n} \leq_{ST} Y_{n:n}$ *est valable si et seulement si :*

$$m_C(F_1(t), F_2(t), ..., F_n(t)) \geq G(t)$$

pour tout t *, où* F_i *est la fonction de distribution de* X_i *et* G *est la fonction de distribution de* Y_i *pour* $i = 1, 2, ..., n$ *.*

Théorème 2.2.4.
Si $(X_1, X_2, ..., X_n)$ *et* $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ *ont la même copule associé* C*,* C *est faiblement Schur-convexe (faiblement Schur-concave),* F_i *est la fonction de distribution de* X_i *et* $G = (1/n)\sum_{i=1}^{n} F_i$ *est la fonction de fiabilité de* Y_i *pour* $i = 1, 2, ..., n$ *, alors :*

$$X_{n:n} \leq_{ST} Y_{n:n}(\geq_{ST})$$

.

D'où un système parallèle à composants hétérogènes ayant une copule faiblement Schur-concave s'améliore si nous remplaçons ses composants par des composants (iid) avec des fonctions de distribution communes égale à la moyenne des fonctions de distribution des composants hétérogènes. Example 2.1.1 preuve que cette propriété n'est pas nécessairement vraie pour toutes les copules et le Théorème 2.2.4 preuve qu'elle peut être inversée si la copule associé est une copule faiblement Schur-convexe différente du la copule du minimum C_L.

2.3 Principaux résultats des systèmes cohérents généraux

Dans cette section, nous montrons comment les résultats précédents peuvent être étendus à des systèmes cohérents différents à partir de systèmes en série ou parallèles. D'après [11], nous savons que la fonction de fiabilité d'un élément cohérentle système peut être écrit comme une combinaison linéaire des fonctions de fiabilité des systèmes en série obtenu à partir de la durée de vie de ses composants. Par conséquent, si $T = \varPhi(X_1, X_2, ..., X_n)$ est la durée de vie de un système cohérent avec une structure décrite par la fonction $\varPhi$ et avec des durées de vie des composants $(X_1, X_2, ..., X_n)$ ayant la copule de survie K, alors sa fonction de fiabilité peut s'écrire :

$$\overline{F}_T(t) = P(\overline{F}_1(t), \overline{F}_2(t), ..., \overline{F}_n(t))$$

où $\overline{F}_i$ est la fonction de fiabilité de X_i et p est une fonction qui ne dépend que de K et Ψ par exemple, pour la durée de vie du système cohérent $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$ nous obtenons

$$\begin{aligned}
\overline{F}_T(t) &= P(X_1 > t, X_2 > t) + P(X_1 > t, X_3 > t) - P(X_1 > t, X_2 > t, X_3 > t) \\
&= \overline{F}(t, t, 0) + \overline{F}(t, 0, t) - \overline{F}(t, t, t) \\
&= K(\overline{F}_1(t), \overline{F}_2(t), 1) + K(\overline{F}_1(t), 1, \overline{F}_3(t)) - K(\overline{F}_1(t), \overline{F}_2(t), \overline{F}_3(t)) \\
&= p(\overline{F}_1(t), \overline{F}_2(t), \overline{F}_3(t))
\end{aligned}$$

où $p(x, y, z) = K(x, y, 1) + K(x, 1, z) - K(x, y, z)$.

La fonction p peut être appelée fonction de domination. Elle sera notée $P_{K,\varPhi}$,
lorsqu'il est nécessaire de souligner sa dépendance des fonctions K et $\varPhi$. Si les composants sont indépendants, alors p est un polynôme qui ne dépend que de la structure du système et il est appelé la structure fonction de fiabilité dans [6]. Si les composants sont (iid),
alors le polynôme p est appelé la domination polynôme. On voit facilement que, dans le cas général, la fonction p augmente dans tous les composant $p(0, 0, ..., 0) = 0$ *et* $p(1, 1, ..., 1) = 1$. Bien sûr, c'est une copule si le système est un système séries (en fait c'est la copule survie). Cependant, dans le cas général, il n'est pas une copule et donc il pourrait avoir des propriétés différentes. Malgré cela, il est facile de voir que les résultats précédents pour les systèmes en série peuvent également être appliqués pour un système cohérent général en remplaçant la copule de survie K par la fonction de domination $p = p_{K,\varPhi}$. Ils peuvent être énoncés comme suit. les preuves sont analogues.

2.3.1 Théorèmes

Théorème 2.3.1.
Si $T_1 = \Phi(X_1, X_2, ..., X_n)$ et $T_2 = \Phi(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ sont les durées de vie de deux systèmes cohérents, $(X_1, X_2, ..., X_n)$ et $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ ont la même copule de survie K, alors $T_1 \leq_{ST} T_2$ tient si et seulement si

$$m_P(\overline{F}_1(t), \overline{F}_2(t), ..., \overline{F}_n(t)) \leq m_P(\overline{G}_1(t), \overline{G}_2(t), ..., \overline{G}_n(t))$$

pour tout t, où $\overline{F}_i$ et $\overline{G}_i$ sont les fonctions de fiabilité de X_i et Y_i , respectivement, et m_P est la fonction moyenne associée à la fonction de domination p obtenue à partir de K et Φ.

Démonstration.
Si $(X_1, X_2, ..., X_n)$ et $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ sont deux systèmes cohérents et leurs composantes les vies ont la même copule de survie K, alors :

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{T_1}(t) &= p(\overline{F}_1(t), \overline{F}_2(t), ..., \overline{F}_n(t)) \\
&= p(m_p(\overline{F}_1(t), \overline{F}_2(t), ..., \overline{F}_n(t)), m_p(\overline{F}_1(t), \overline{F}_2(t), ..., \overline{F}_n(t)))
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\overline{G}_{T_1}(t) &= p(\overline{G}_1(t), \overline{G}_2(t), ..., \overline{G}_n(t)) \\
&= p(m_p(\overline{G}_1(t), \overline{G}_2(t), ..., \overline{G}_n(t)), m_p(\overline{G}_1(t), \overline{G}_2(t), ..., \overline{G}_n(t)))
\end{aligned}$$

où m_p est la fonction moyenne associée à la fonction de domination p obtenue à partir de K Par conséquent, à mesure que p augmente $T_1 \leq_{ST} T_2$ est valable si et seulement si :

$$m_p(\overline{F}_1(t), \overline{F}_2(t), ..., \overline{F}_n(t)) \leq m_p(\overline{G}_1(t), \overline{G}_2(t), ..., \overline{G}_n(t)) \quad \forall t$$

Théorème 2.3.2.
Si $T_1 = \Phi_1(X_1, X_2, ..., X_n)$ et $T_2 = \Phi_2(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ sont les durées de vie de deux systèmes cohérents avec des fonctions de domination p_1 et p_2 telles que :
$p_1 \leq p_2$ $m_{p_1}(\overline{F}_1(t), \overline{F}_2(t), ..., \overline{F}_n(t)) \leq m_{p_2}(\overline{G}_1(t), \overline{G}_2(t), ..., \overline{G}_n(t))$

pour tout t, où $\overline{F}_i$ est la fonction de fiabilité de $X_i$et $\overline{G}_i$ est la fonction de fiabilité de Y_i, alors :

$$T_1 \leq_{ST} T_2.$$

Théorème 2.3.3.

Si $T_1 = \Phi(X_1, X_2, ..., X_n)$ et $T_2 = \Phi(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ sont les durées de vie de deux systèmes cohérents $(X_1, X_2, ..., X_n)$ et $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ ont la même copule de survie K , alors :
$T_1 \leq_{ST} T_2$tient si et seulement si :

$$m_P(\overline{F}_1(t), \overline{F}_2(t), ..., \overline{F}_n(t)) \leq \overline{G}(t)$$

pour tout t, où $\overline{F}_i$ est la fonction de fiabilité de X_i, $\overline{G}$ est la fonction de fiabilité de Y_i pour $i = 1, 2, ..., n$ et m_P est la fonction moyenne associée à la fonction de domination p obtenue à partir de Ket Φ.

Théorème 2.3.4.

Si $T_1 = \Phi(X_1, X_2, ..., X_n)$ et $T_2 = \Phi(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ sont les durées de vie de deux systèmes cohérents, $(X_1, X_2, ..., X_n)$ et $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ ont la même copule de survie K, la fonction de domination $P_{K,\Phi}$,obtenu à partir de Ket Φ est faiblement Schur-concave (faiblement Schur-convexe), $\overline{F}_i$ est la fonction de fiabilité de X_i et $\overline{G} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i/n$ est la fonction de fiabilité de Y_i pour $i = 1, 2, ..., n$, alors :

$$T_1 \leq_{ST} T_2 (\geq_{ST}).$$

Example 2.3.1.

Soit $T_1 = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$ et $T_2 = \min(Y_1, \max(Y_2, Y_3))$ deux durées de vie du système cohérentes avec des durées de vie des composants ayant la survie égale à la copule maximal, $K = C_U$. En suite, de (2.4) la fiabilité de T_1 est donnée par :

$$\overline{F}_{T_1}(t) = p(\overline{F}_1(t), \overline{F}_2(t), \overline{F}_3(t))$$

où $\overline{F}_i$ est la fonction de fiabilité de X_i ,pour $i = 1, 2, 3$

La fonction de domination, est :

$$p\,(x, y, z) = \min(x, y) + \min(x, z) - \min(x, y, z)$$

pour $0 \leq x, y, z \leq 1$. Comme $p(z, z, z) = z$, la fonction moyenne associée à p est $m_P(x, y, z) = p(x, y, z)$. Le fait que $K = C_U$ signifie que les durées de vie augmentent les fonctions déterministes l'un des autre. Cela implique que, si tous les Y_i ont la même fiabilité $\overline{G}$ pour $i = 1, 2, 3$, alors $T_2 = Y_1 = Y_2 = Y_3$

image/fige6.png

FIGURE 2.1 – Fonctions de fiabilité $\overline{F}_{T_1}$ (ligne continue) et $\overline{F}_{T_2}$ (ligne pointillée)

Par conséquent, si Y_i a une fonction de fiabilité G pour $i = 1, 2, 3$, alors $T_1 \leq_{ST} T_2 (\geq_{ST})$ si et seulement si

$$\overline{G}(t) \geq min(\overline{F}_1(t), \overline{F}_2(t)) + min(\overline{F}_1(t), \overline{F}_3(t)) - min(\overline{F}_1(t), \overline{F}_2(t), \overline{F}_3(t))(\leq)$$

Il est facile de voir que P n'est ni faiblement schur-concave ni faiblement schur-convexe et donc T_1 et T_2 ne sont pas nécessairement ordonnés ST lorsque $\overline{G} = (\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3)/3$. Par exemple, si le composantles durées de vie ont des fonctions de fiabilité $\overline{F}_1(t) = e^{-t}$,
$\overline{F}_2(t) = (1 + t)^{-2}$ et $\overline{F}_3(t) = (1 + t/2)^{-3}$ pour $t \geq 0$, et $\overline{G} = (\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3)/3$
puis $\overline{F}_{T_1}(1) = 0.296 < 0.305 = \overline{F}_{T_2}(1)$ et $\overline{F}_{T_1}(2) = 0.125 > 0.124 = \overline{F}_{T_2}(2)$, c'est-à-dire que T_1 et T_2 ne sont pas ordonnés ST (voir figure 2). cependant,notez que si les durées de vie des composants dans T_1 sont ordonnées ST, alors la fiabilité du système est égale à la fiabilité du pire composant et donc

$$\overline{F}_{T_1}(t) = min(\overline{F}_1(t), \overline{F}_2(t), \overline{F}_3(t)) \leq (\overline{F}_1(t) + \overline{F}_2(t) + \overline{F}_3(t))/3 = \overline{F}_{T_2}(t)$$

et $T_1 \leq_{ST} T_2$ maintiennent.

2.4 Discussions et remarques finales

Nous avons obtenu quelques procédures pour comparer stochastiquement les séries, parallèles et cohérentes générales systèmes à composants indépendants ou dépendants. Nos résultats sont basés sur des représentations de copules et certains concepts connexes tels que la faible de Schur concavité/convexité et la fonction moyenne. des copules sont utilisées pour modéliser la dépendance des composants dans le système. Bien sûr, le cas des systèmes avec des composants dépendants sont très pertinents dans la pratique. Les résultats pour les systèmes cohérences générale sont basés sur les fonctions de domination associées qui ne sont pas des copules mais qui propriétés similaires. A ces fins, nous introduisons dans notre analyse
les notions de fonctions moyennes d'une copule et de fonctions de domination. Les résultats de ce travail sont théoriques mais ils peuvent être appliqués à n'importe quel système industriel réel avec des structures en série, parallèles ou autres cohérentes. Il faut dire que si la structure d'un ensemble cohérent est complexe, il serait alors difficile d'analyser la fonction de domination correspondante.

Bibliographie

[1] **Ali Dolati** and **Akbar Dehgan Nezhad** : Some Results on Convexity and Concavity of Multivariate Copulas,2014.

[2] **A. Sklar** : Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 8 (1959).

[3] **Durante F** and **Sempi C** : Copulae and Schur-concavity, International Mathematical Journal 2003.

[4] **Durante F** and **Papini PL** : A weakening of Schur-concavity for copulas, Fuzzy Sets and Systems 2007.

[5] **E. Alvoni**, **F. Durante**, **P.L. Papini**, **C. Sempi** : Different types of convexity and concavity for copulas.

[6] **Esary JD**,**Proschan F** : Relationship between system failure rate and component failure rates. Technometrics 1963 ; 5 :183–189.

[7] **Jean.Louis Bon** : Fiabilité Des Systèmes,1995.

[8] **J.L.Bon.** Fiabilité des systèmes-Méthodes Mathématiques, Msson, Paris, 1995.

[9] **Hamdellou Razika** et **Tebboub Samira** : Les Copules dans , Mémoire de Master, Département de Mthématiques, Universite de jijel, 2017/2018.

[10] **Merrouche Ines** et **Alioueche Djahida** : Importance en fiabilité des systèmes k-sur-n dont les composants sont non identiques, Mémoire de Master, Département de Mthématiques, Universite de jijel, 2016/2017.

[11] **Navarro J**,**Ruiz JM**, **Sandoval CJ** : Properties of coherent systems with dependent components. Communications in Statistics—Theory Methods 2007.

[12] **Navarro J** and **Fabio Spizzichino** : Comparisons of series and parallel systems with components sharing the same copula,2009.

[13] **Nelson, R. B.** : An Introduction to Copulas. Springer Series in Statistics, Springer Science+Business Media, Inc., New York, 2nd édition, 2006.

[14] **Pham.h.** : System Software Reliability, Springer, 2006.

[15] **Salvadori, G.**, **Michele, C.**,**Kottegoda , N. T.** and **Rosso, R.** : Extremes In Nature : An Approach Using Copulas, Springer, The Netherlands, 2007.

[16] **Thierry RONCALLI** : Théorie des Valeurs Extrêmes, 2002.