

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel



Faculté des Sciences Exacte et Informatique
Département de Mathématiques

Mémoire de fin de cycle

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques fondamentales.

Option : Probabilités et Statistique.

Thème

Modèles non linéaires ARCH-GARCH applications et simulations

Présenté par : **Boulkheloua Nadjjet**

Dirigé par : **Cheraitia Hassen**

Devant le jury composé de :

Djeridi Zohra M.C.B Université de Jijel

Président

Sellami Nawel M.A.A Université de Jijel

Examineur

Promotion **2019/2020**



Remerciements

Avant de présenter ce travail, mes remerciements vont tout d'abord à :

Dieu le tout puissant qui m'a donné la volonté et la santé pour accomplir ce travail et qui m'a aidé à franchir un pas vers le chemin du savoir.

Je remercie beaucoup mon encadreur **Mr.CHERAITIA Hassen** qui m'a encadré pendant la période de la réalisation de ce travail, sa disponibilité, malgré ses responsabilités, ses orientations permis de mener à merveille ce travail.

Je tient aussi a remercier mon enseignant **Mr.GHERDA Mebrouk** pour ses sacrifice et aide précieuse jusqu'à l'accomplissement de ce travail.

Mes remerciements vont également aux membres du jury pour l'intéret qu'ils ont porté à mon recherche en acceptant d'examiner mon mémoire et de l'enrichir par leurs propositions.

Mes remerciements les plus vives et chaleureuses à tous les membres de ma famille.

Je tient aussi a remercier mes amies **Yasmina, Sara, Fatima, Rofia** et particulièrement **Imene** pour leurs conseils.

Je tient aussi a remercier Mlle **LABENI Fahima**.

Enfin, que tous ceux et celles qui, de loin ou de prés ils m'ont apporté leur aide et soutien trouveront ici, mon reconnaissance et sympathie.

B.Nadjet



JE voudrais dédier ce travail :

A ma mère, je prie Dieu d'avoir pitié d'elle et de l'introduire dans ses vastes jardins.

Je le donne aussi à ma grand-mère en guise de gratitude pour sa générosité et sa bonté, en espérant que le Seigneur leur accordera sa miséricorde.

B.Nadjet

Table des matières

Listes des figures	iv
Listes des tableaux	v
Notations	vi
Introduction Générale	vii
1 Notions de base sur les séries temporelles	1
1.1 Introduction aux séries temporelles	2
1.1.1 Modélisation d'une série temporelle	2
1.1.2 Estimation et Elimination de la partie déterministe	3
1.1.3 Caractéristiques d'une série temporelle	3
1.2 Processus stochastique	6
1.2.1 Définitions	6
1.3 La notion de stationnarité	7
1.3.1 La stationnarité au sens stricte	7
1.3.2 La stationnarité au second ordre	7
1.3.3 Théorème de Wold (1954)	8
1.4 La notion de mémoire longue	8

1.5	Les processus linéaires	9
1.5.1	Les processus linéaires stationnaires	10
1.5.2	Principales extentions des processus ARMA	16
1.6	Les grandes classes des processus non linéaires	21
1.6.1	Processus bilinéaires	21
1.6.2	Modèles à seuil	23
1.6.3	Processus ARCH et GARCH	25
2	Processus Conditionnellement Hétéroscédastiques	26
2.1	Modèles ARCH/GARCH	27
2.1.1	La notion d'espérance conditionnelle et non conditionnelle, notion de variance conditionnelle et non conditionnelle	28
2.1.2	Présentation du modèle ARCH/GARCH	30
2.2	Extentions des modèles ARCH/GARCH	39
2.2.1	Modèle GARCH-M	39
2.2.2	Modèle IGARCH	40
2.3	Modèle ARCH/GARCH asymétriques	40
2.3.1	Modèle EGARCH	41
2.3.2	Modèles GARCH à seuil : TGARCH	41
2.4	Processus ARCH/GARCH et mémoire longue	42
2.4.1	Processus FIGARCH	42
2.5	Estimation de processus ARCH	43
2.6	Rappel sur le test ARCH	45
3	Simulations et Applications	46
3.1	Simulations	46

3.1.1	Quelques simulations de processus GARCH(p,q)	46
3.1.2	Simulation d'un processus avec erreur ARCH	49
3.2	Applications	50
3.2.1	Analyse préliminaire de la série ST	50
3.2.2	Différenciation de la série ST	52
3.2.3	La méthodologie de Box-Jenkins	54
3.2.4	Estimation des modèles GARCH sur les résidus du modèles ARMA	59
3.2.5	Validation du modèle	59
	Conclusion	61
	Bibliographie	62
	Annex	64

Table des figures

3.1	Graphiques des séries GARCH simulées	47
3.2	Variance conditionnelle h_t des séries GARCH simulées	48
3.3	Processus bruit blanc ε_t des séries simulées	48
3.4	Série simulée par un modèle avec erreur ARCH(1)	49
3.5	L'évolution de la série (ST) entre (1974-2017)	50
3.6	Le corrélogramme de la série (ST)	51
3.7	Estimation du modèle (01,02 et 03) de "ST"	52
3.8	La représentation graphique et le corrélogramme de la série DST	53
3.9	Estimation du modèle de "DST"	54
3.10	Estimation du modèle ARMA(2,1)	55
3.11	Le graphe et le corrélogramme des résidus	56
3.12	Les résultats du test de Ljung-Box	56
3.13	L'histogramme des résidus du modèle estimé	57
3.14	Résultat du test de Jarque-Bera	57
3.15	Le corrélogramme des résidus carrés $\hat{\varepsilon}^2$	58
3.16	Résultat du test ARCH	58
3.17	Estimation du modèle GARCH(1,1)	59

3.18 Estimation du modèle ARCH(1)	59
3.19 QQ plot du modèle GARCH(1,1) et ARCH(1)	60

Liste des tableaux

3.1	Séries GARCH à simuler	47
3.2	La table des critères	59

Notations

- ▶ T_t : La tendance
- ▶ S_t : La saisonnalité
- ▶ C_t : Le cycle
- ▶ ε_t : Le résidu
- ▶ \mathbf{E} : Espérance
- ▶ \mathbf{v} : La variance
- ▶ \mathbf{cov} : La covariance
- ▶ \mathbb{L}^2 : Espace de Lebesgue ($p=2$)
- ▶ **ACF** : La fonction d'autocorrélation
- ▶ **PACF** : La fonction d'autocorrélation Partielle
- ▶ **i.i.d** : Indépendant identiquement distribué
- ▶ **MA** : Moyenne mobile
- ▶ **AR** : Autorégressif
- ▶ **ARMA** : Autorégressif Moyenne mobile
- ▶ **SARMA** : Autorégressif Moyenne mobile Saisonnier
- ▶ **ARIMA** : Autorégressif Moyenne mobile Intégré
- ▶ **SARIMA** : Autorégressif Moyenne mobile Intégré Saisonnier
- ▶ **FARIMA** : Autorégressif Moyenne mobile Fractionnement Intégré
- ▶ **ARCH** : Autorégressif Conditionnement Hétéroscédastique
- ▶ **GARCH** : Autorégressif Conditionnement Hétéroscédastique Généralisé
- ▶ **GARCH-M** : Autorégressif Conditionnement Hétéroscédastique Généralisé en moyenne
- ▶ **IGARCH** : Autorégressif Conditionnement Hétéroscédastique Généralisé Intégré
- ▶ **TGARCH** : Autorégressif Conditionnement Hétéroscédastique Généralisé à seuil
- ▶ **EGARCH** : Exponentiel Autorégressif Conditionnement Hétéroscédastique Généralisé
- ▶ **FIGARCH** : Autorégressif Conditionnement Hétéroscédastique Généralisé Fractionnement Intégré

Introduction Générale

Dans l'analyse traditionnelle de la prévision, la construction des valeurs futures prévues est fondée sur la moyenne conditionnelle de la série utilisée. Les méthodes classiques de prévision basées sur les processus ARMA supposent des séries temporelles à volatilité constante. Cette modélisation n'est pas toujours conforme à la réalité, elle néglige l'information contenue dans la partie non expliquée du processus d'évolution des séries temporelles. Ces modèles linéaires des séries temporelles n'étaient finalement fondés que sur des combinaisons linéaires de valeurs présentes et passés de chocs. Par conséquent, l'hypothèse de processus ARMA stationnaire ne permet pas de prendre en compte d'une part les mécanismes d'asymétrie et d'autre part les ruptures de forte amplitude. Les modèles GARCH ont muni à un changement fondamental à la modélisation des séries financières, et sont particulièrement annoncés pour prendre en compte les caractéristiques importantes de ces séries (stationnarité, volatilité, asymétrie, saisonnalité,...). De plus, ces processus prennent en compte dans la modélisation la forte *leptokurticité* observée dans la loi de distribution non conditionnelle de la plupart des séries financières. L'avantage de ces modèles est expliqué par le fait qu'ils sont riches de coté théorique et simple à utiliser dans la pratique. L'objet de ce mémoire est de fournir une introduction aux modèles ARCH/GARCH le plus souvent utilisés dans la modélisation des marchés financiers.

Afin de répondre à cet objet, nous articulons ce mémoire autour de trois chapitres. Dans **le premier chapitre** intitulé «*Notions de base sur les séries temporelles*», nous présentons quelques rappels sur les processus stochastiques et la représentation de séries temporelles par des modèles linéaires, ses principales classes de modèles non linéaires et quelques notions utiles dans notre travail.

Dans **le deuxième chapitre** intitulé «*Processus Conditionnellement Hétéroscédastiques*», nous étudierons les modèles ARCH/GARCH ainsi que ses propriétés de ses nombreuses extensions avec quelques méthodes d'estimation (repose sur la méthode du M.V).

Enfin, dans le troisième Chapitre «*Simulations et Applications*», on fait compléter notre travail par la mise en place de quelques simulations de processus GARCH en changeant ces différents paramètres et nous essayerons de modéliser une série financière réelle par un modèle ARMA avec erreur GARCH.

A la fin, une conclusion générale dresse une synthèse des principaux résultats obtenus au cours de notre travail.

1

Notions de base sur les séries temporelles

Introduction

Dans ce chapitre nous intéressons de présenter les notions générales des séries temporelles et ses modèles (linéaires ou non linéaires). Une série chronologique est une suite d'observations indicées par le temps $(y_t, t = 1, \dots, T)$. En général, dates d'observation régulières : t=heure, jour, mois, année.....Elle a plusieurs domaines d'application comme **Finance** (cours de bourse quotidiens 1992-1998), **Epidémiologie** (Décès mensuels dus à des maladies pulmonaires 1974-1980), **Ecologie**, **Environnement**, **Météorologie**, **Hydrologie** (Température annuelle moyenne à **New Heaven** 1910-1970, Evolution du rendement de blé tendre d'hiver en **France** 1940-2010), moyenne annuelle de la concentration en nitrates dans les eaux superficielles en **Bretagne** 1971-2009, le but de l'étude d'une série chronologique est analyser une phénomène et la prévision.

Depuis le début des années 1970, suite à la parution du livre **Box** et **Jenkins**, l'accent a été mis sur les modèles linéaires. Depuis une dizaine d'années, devant les problèmes de modélisation rencontrés pour certains séries de données (les nombre de taches solaires, des séries de Biologie, des séries financières et monétaires) les modèles non linéaires ont été envisagés. Plusieurs classes de modèles ont été abordées : *Les modèles bilinéaires*, *Les modèles à seuils*,

Les modèles hétéroscédastiques.....

1.1) Introduction aux séries temporelles

Définition 1.1.

Une série temporelle (ou série chronologique) est une suite de nombres réels, indexés par les entiers relatifs tels que le temps.

Pour chaque instant du temps, la valeur de la quantité étudiée X_t est appelée variable aléatoire, l'ensemble des valeurs quand t varie est appelé processus aléatoire $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$.

Une série temporelle est ainsi la réalisation d'un processus aléatoire.

1.1.1) Modélisation d'une série temporelle

La modélisation d'une série temporelle se fait à partir de la décomposition classique en fonctions des quatre éléments suivants :

1. **Tendance** (T_t) : mouvement à long terme (longue période).
2. **Saisonnalité** (S_t) : fonction périodique du temps (période courte).
3. **Cycle** (C_t) : cycle d'affaire, fluctuation périodique (moyenne terme).
4. **Résidu** (R_t) : partie irrégulière, correspondante à la notion d'écart au modèle ou encore Bruit.

D'une manière générale, on peut proposer un modèle qui représente la série temporelle étudiée en combinaison des quatre éléments précédents. Pour cela, on a trois types de modèles :

Le premier est le **modèle d'ajustement** de forme additive ou multiplicative comme suit :
 $X_t = T_t + S_t + C_t + R_t$ ou $X_t = T_t S_t C_t + R_t$.

Le deuxième type est le **modèle autoprojectif**, dont on suppose que X_t est une fonction de ces valeurs passées et d'une perturbation aléatoire R_t , ie, $X_t = f(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots; R_t)$. Dans cette classe, on peut citer les modèles ARIMA, ARMA,...

Le troisième type est le plus important, c'est le **modèle explicatif**. Dans cette catégorie de modèle, la variable aléatoire Y_t est exprimée en fonction d'un vecteur aléatoire X_t et d'une perturbation aléatoire R_t : $Y_t = f(X_t, R_t)$, ou X_t est soit déterministe ou aléatoire, dans ce cas les processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ et $(R_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ont certains propriétés d'indépendances.

1.1.2) *Estimation et Elimination de la partie déterministe*

Pour l'estimation, on propose deux méthodes qui sont la méthode des moindres carrées ordinaires (MCO) et la méthode de lissage par moyenne mobile (pour la tendance) et pour l'élimination, on fait recours à la méthode de différenciation.

1.1.3) *Caractéristiques d'une série temporelle*

Moyenne et variance

Soit une série temporelle stationnaire $(X_t, t = 1, \dots, T)$, les expressions de la moyenne et de la variance sont :

$$E(X_t) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t$$

$$v(X_t) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (X_t - E(X_t))^2$$

Fonction d'autocovariance

Définition 1.2.

Soit $(X_t)_t$ un processus aléatoire de variance finie. On appelle fonction d'autocovariance γ_h de X_t la fonction :

$$\begin{aligned} \gamma_h &= \text{cov}(X_t, X_{t+h}) \\ &= E[(X_t - E(X_t))(X_{t+h} - E(X_{t+h}))] \end{aligned}$$

Théorème 1.3.

La fonction d'autocovariance d'un processus $(X_t)_t$ stationnaire vérifie les propriétés suivantes :

- $\gamma_0 = \text{cov}(X_t, X_t) = E[(X_t - E(X_t))^2] = v(X_t) = \sigma_X^2 \geq 0$
- $|\gamma_h| \leq \gamma_0$
- $\gamma_h = \gamma_{-h}$: fonction paire

Fonction d'autocorrélation**Définition 1.4.**

Soit $(X_t)_t$ un processus stationnaire. On appelle fonction d'autocorrélation ρ_h la fonction :

$$\rho_h = \frac{\gamma_h}{\gamma_0}, \quad h \in \mathbb{Z}$$

Remarque

Le graphique de la fonction d'autocorrélation est appelé **corrélogramme**.

Théorème 1.5.

La fonction d'autocorrélation d'un processus X_t stationnaire vérifie les propriétés suivantes :

- $\rho_0 = 1$
- $|\rho_h| \leq \rho_0$
- $\rho_h = \rho_{-h}$: fonction paire

Exemple

Soit le processus $X_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$ où ε_t est un processus stationnaire de moyenne nulle, de variance σ_ε^2 et tel que $\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t'}) = 0, \forall t \neq t'$. calculons l'espérance et la variance de X_t

$$\begin{aligned} E(X_t) &= E(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}) = E(\varepsilon_t) - E(\varepsilon_{t-1}) = 0 \\ v(X_t) &= v(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}) \\ &= E((\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2) \\ &= E(\varepsilon_t^2) + E(\varepsilon_{t-1}^2) - 2E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) \\ &= 2\sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

On recherche la fonction d'autocorrélation de X_t . Pour cela, on commence par calculer la fonction d'autocovariance :

$$\begin{aligned} \star\gamma_0 &= v(X_t) = 2\sigma_\varepsilon^2 \\ \star\gamma_1 &= \text{cov}(X_t, X_{t-1}) \\ &= E((\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2})) \\ &= E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1} - \varepsilon_t \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2} - \varepsilon_{t-1}^2) \\ &= -\sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\star\gamma_2 &= \text{cov}(X_t, X_{t-2}) \\
&= E((\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-2} - \varepsilon_{t-3})) \\
&= E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-2} - \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-3} - \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-3}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

on a donc : $\gamma_h = 0, \forall h \geq 2$

on a en déduit la fonction d'autocorrélation de X_t :

$$\begin{cases} \rho_0 = 1 \\ \rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{-1}{2} \\ \rho_h = 0, \forall h \geq 2 \end{cases}$$

Fonction d'autocorrélation Partielle

La fonction d'autocorrélation partielle est donnée par :

$$\phi_{hh} = \frac{|P_h^*|}{|P_h|}$$

où $|P_h^*|$ (resp $|P_h|$) est le déterminant de la matrice P_h^* (resp P_h) sont données par :

$$P_h = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{h-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{h-2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \rho_{h-1} & \rho_{h-2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

P_h est la matrice symétrique formés des $(h - 1)$ premiers autocorrélations de X_t .

$$P_h^* = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \rho_{h-1} & \rho_{h-2} & \cdots & \rho_h \end{bmatrix}$$

P_h^* est la matrice P_h dans laquelle on a remplacé la dernière colonne par le vecteur $(\rho_1, \dots, \rho_h)'$.

Estimation des autocorrélations

Considérons un ensemble d'observations X_1, \dots, X_T .

- La fonction d'autocovariance empirique est donnée par :

$$\hat{\gamma}_h = \frac{1}{T-h} \sum_{t=1}^{T-h} (X_t - \bar{X}_T)(X_{t+h} - \bar{X}_T)$$

Remarque

Pour obtenir un estimateur sans biais c'est-à-dire :

$$E(\hat{\gamma}_h) = \gamma_h \quad \text{quand } T \rightarrow \infty$$

- La fonction d'autocorrélation empirique est donnée par :

$$\hat{\rho}_h = \frac{\hat{\gamma}_h}{\hat{\gamma}_0}$$

1.2) Processus stochastique**1.2.1) Définitions****Définition 1.6.**

Un processus stochastique est une séquence de variable aléatoire $\{y_t, t \in \Omega\}$ indicées par le temps, ou t appartient à un ensemble ordonné qui correspond au temps.

- Si l'indice t prend les valeurs réelles, c-à-d, $\Omega \in \mathbb{R}^+$, $\{y_t, t \in \Omega\}$ est qualifié de processus stochastique continu.
- Dans le cas contraire où les valeurs prises par t sont discrètes, $\Omega \in \mathbb{N}$ alors $\{y_t, t \in \Omega\}$ est un processus stochastique discret.

Définition 1.7.

Un bruit blanc fort est une suite de variables aléatoires indépendants et identiquement distribuées (iid) $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ centrées et de variances σ^2 . On note $(\varepsilon_t)_t \sim \text{bbf}(0, \sigma^2)$.

Définition 1.8.

On appelle bruit blanc faible, toute suite de v.a.r $(\varepsilon_t)_t$ centrée et de variance σ^2 . On note $\varepsilon_t \sim \text{bb}(0, \sigma^2)$.

Définition 1.9.

On dit que $(X_t)_t$ est un processus linéaire de moyenne m s'il peut être écrit sous la forme :

$$X_t = m + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k \varepsilon_{t-k}$$

tel que : $(\varepsilon_t)_t \sim iid(0, \sigma^2)$, $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k^2 < \infty$

1.3) La notion de stationnarité

1.3.1) La stationnarité au sens stricte

On dit qu'un processus aléatoire temporel X_t est stationnaire au sens stricte si pour toute suite d'instants $\{t_1, \dots, t_N\}$, il existe un entier k quelconque tel que la f.d.p (la fonction de distribution de probabilités) jointe f de $\{X_{t_1}, \dots, X_{t_N}\}$ est identique à la f.d.p jointe de $\{X_{t_1+k}, \dots, X_{t_N+k}\}$ ie :

$$f(X_{t_1}, \dots, X_{t_N}) = f(X_{t_1+k}, \dots, X_{t_N+k})$$

Un processus strictement stationnaire a toutes ses caractéristiques (c-à-d ses moments) invariants dans le temps. Cette définition de la stationnarité est cependant trop restrictive, c'est pour cela que l'on a défini la stationnarité au second ordre.

1.3.2) La stationnarité au second ordre

On dit qu'un processus aléatoire temporel X_t est stationnaire de second ordre s'il vérifie les propriétés suivantes :

1. $E(X_t^2) < \infty, \forall t \in \mathbb{Z}$
2. $E(X_t) = m, \forall t \in \mathbb{Z}$
3. $cov(X_t, X_{t+h}) = \gamma_h, \forall t, h \in \mathbb{Z}$

La propriété (2) signifie que la moyenne du processus est indépendante du temps. La condition (3) traduit le fait que la covariance entre deux périodes t et $t+h$ est uniquement fonction de la différence des temps h .

Remarque

- ✓ $\forall t \in \mathbb{Z}$, $(X_t)_t$ est de carré intégrable, la stationnarité au sens stricte (forte) implique la stationnarité au second ordre (faible).
- ✓ Si le processus $(X_t)_t$ est gaussien, la stationnarité au second ordre implique la stationnarité au sens stricte.

1.3.3) Théorème de Wold (1954)**Théorème 1.10.**

Considérons un processus stationnaire X_t . Il est toujours possible de décomposer X_t en une composante déterministe d_t et une composante stochastique u_t telle que :

$$X_t = d_t + u_t$$

avec :

$$u_t = \sum_{i=0}^{+\infty} \zeta_i \varepsilon_{t-i}$$

où ε_t est un bruit blanc, c-à-d un processus de moyenne nulle et variance constante et non autocorrélé.

1.4) La notion de mémoire longue**Définition 1.11.**

Un processus stationnaire X_t est un processus à mémoire longue s'il existe un nombre réel d (où d : le paramètre de délai et $d < \frac{1}{2}$) et une constante C , $C > 0$ vérifiant :

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\rho_h}{C \cdot h^{2d-1}} = 1$$

où ρ la fonction d'autocorrélation et h le retard.

Il est possible de faire une distinction suivant la valeur de d :

- * si $d < 0$: mémoire intermédiaire, la série ρ_h est absolument convergente

$$\sum |\rho_h| < \infty$$

* si $0 < d < \frac{1}{2}$: mémoire longue, la série ρ_h n'est plus absolument convergente
 $\sum |\rho_h| = \infty$

Par conséquent, les autocorrélations d'un processus à mémoire longue vérifiant la relation asymptotique suivante : $\rho_h \sim C.h^{2d-1}$ quand $h \rightarrow \infty$.

Les autocorrélations ρ_h décroissent très lentement, c-à-d à un taux hyperbolique. Ce décroissement hyperbolique des autocorrélations est à opposer au décroissement exponentiel des autocorrélations d'un processus ARMA : $\rho_h \leq C.a^h$ où C est une constante positive et $0 < a < 1$. En d'autres termes, la fonction d'autocorrélation des processus ARMA est géométriquement bornée.

1.5) Les processus linéaires

L'opérateur retard

L'opérateur retard, noté L , est tel que :

$$LX_t = X_{t-1}$$

Plus généralement, on a :

$$L^n X_t = X_{t-n}$$

On constate ainsi que l'opérateur retard transforme une variable X_t en sa valeur passé. Si l'on applique le polynome retard $\psi(L)$ défini comme suit :

$$\psi(L) = 1 - \psi_1 L - \psi_2 L^2 - \dots - \psi_p L^p$$

à une série X_t , on a :

$$\psi(L)X_t = X_t - \psi_1 X_{t-1} - \psi_2 X_{t-2} - \dots - \psi_p X_{t-p}$$

où ψ_1, \dots, ψ_p sont des coefficients.

L'opérateur retard est linéaire et inversible. Son inverse $L^{-1} = F$ est défini par $FX_t = X_{t+1}$ est appelé opérateur **avance**.

L'opérateur retard vérifie les propriétés suivantes :

- $(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i L^i) X_t = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i X_{t-i}$
 - $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i L^i X_t + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} b_i L^i X_t = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (a_i + b_i) L^i X_t = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (a_i + b_i) X_{t-i}$
 - $\alpha \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i L^i = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \alpha a_i L^i$
- où a_i, b_i et α sont des coefficients.

1.5.1) Les processus linéaires stationnaires

On va introduire une classe de processus linéaire très importante dans la modélisation des séries chronologiques à savoir les processus ARMA (Autoregressive Moving Average). Ces processus sont linéaires et sous certaines conditions ils sont stationnaires. La linéarité de ces processus fournira une théorie simple de la prévision.

Processus moyenne mobile

Définition 1.12.

On appelle processus moyenne mobile d'ordre q , noté $MA(q)$, un processus X_t stationnaire vérifiant une relation de type :

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

où les θ_i ($i = 1, \dots, q$) sont des réels et $(\varepsilon_t)_t \sim bb(0, \sigma_\varepsilon^2)$

En introduisant l'opérateur retard, la relation précédente peut encore s'écrire :

$$X_t = (1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q) \varepsilon_t$$

Soit encore :

$$X_t = \boldsymbol{\theta}(L) \varepsilon_t$$

avec

$$\boldsymbol{\theta}(L) = 1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q$$

Remarque

Par définition, un processus MA(q) stationnaire et causal.

Si le polynome θ a toutes ses racines à l'extérieur du disque unité, alors on peut inverser ce polynome et écrire MA(q) sous la forme AR(∞) :

$$\varepsilon_t = \theta^{-1}(L)X_t = \sum_{i=0}^{+\infty} v_i X_{t-i}$$

avec $v_0 = 1$ et $\sum_{i=0}^{+\infty} |v_i| < \infty$

Autocovariance et autocorrélation

La fonction d'autocovariance d'un processus MA(q) est donnée par :

$$\gamma_k = cov(X_t, X_{t+k}) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{q-|k|} \theta_i \theta_{i+k} & \text{si } 0 \leq k \leq q \\ 0 & \text{si } k > q \end{cases}$$

où : $\theta_0 = 1$

Démonstration.

On a

$$\gamma_k = cov(X_t, X_{t+k}) = E(X_t X_{t+k}) - E(X_t)E(X_{t+k})$$

et

$$E(X_t) = E(X_{t+k}) = 0 \quad (\text{car } E(\varepsilon_t) = 0)$$

donc

$$\begin{aligned} \gamma_k &= E(X_t X_{t+k}) = E\left[\left(\sum_{i=0}^q \theta_i \varepsilon_{t-i}\right)\left(\sum_{j=0}^q \theta_j \varepsilon_{t+k-j}\right)\right] \\ &= E\left[\sum_{i=0}^q \sum_{j=0}^q \theta_i \theta_j \varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t+k-j}\right] \\ &= \sum_{i=0}^q \sum_{j=0}^q \theta_i \theta_j E(\varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-(j-k)}) \\ &= \begin{cases} \sum_{i=0}^{q-|k|} \theta_i \theta_{i+k} \sigma_\varepsilon^2 & \text{si } i = j - k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{q-|k|} \theta_i \theta_{i+k} & \text{si } 0 \leq k \leq q \\ 0 & \text{si } k > q \end{cases}$$

* Si $k=0$ alors :

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^q \theta_i^2 \\ &= \sigma_\varepsilon^2 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2) \end{aligned}$$

La fonction d'autocorrélation d'un MA(q) est donnée par :

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} \frac{\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k} \theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2} & \text{si } 0 \leq k \leq q \\ 0 & \text{si } k > q \end{cases}$$

Propriété 1.13.

Pour un processus MA(q), $\rho_k = 0, \forall k > q$. En d'autres termes, les autocorrélations s'annulent à partir du rang $q+1$. Cette propriété fondamentale nous permet ainsi d'identifier l'ordre q des processus MA.

Les processus autoregressifs

Définition 1.14.

On appelle processus autoregressif d'ordre p , noté AR(p), un processus stationnaire X_t vérifiant une relation de type :

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

où les ϕ_i ($i = 1, \dots, p$) sont des réels

et $\varepsilon_t \sim \text{bb}(0, \sigma_\varepsilon^2)$

En introduisant l'opérateur retard, la relation précédente peut s'écrire :

$$\phi(L)X_t = \varepsilon_t$$

avec

$$\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p$$

Remarque

Par définition, le processus AR(p) est inversible.

Si le polynôme ϕ a toutes ses racines à l'extérieur du disque unité, alors on peut inverser ce polynôme et écrire AR(p) sous la forme MA(∞) :

$$X_t = \phi^{-1}(L)\varepsilon_t = \sum_{i=0}^{+\infty} \varphi_i \varepsilon_{t-i}$$

avec $\varphi_0 = 1$ et $\sum_{i=0}^{+\infty} |\varphi_i| < \infty$

Autocorrélation et équations de Yulle-Walker

Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus AR(p) vérifiée l'équation :

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

on a :

$$\begin{aligned} \gamma_k &= cov(X_t, X_{t-k}) = E(X_t X_{t-k}) - E(X_t)E(X_{t-k}) \\ &= E(X_t X_{t-k}) \end{aligned}$$

car : $E(X_t) = E(X_{t-k}) = 0$ [AR(p) possède une représentation MA(∞)]

alors :

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \phi_1 E(X_{t-1} X_{t-k}) + \dots + \phi_p E(X_{t-p} X_{t-k}) + E(\varepsilon_t X_{t-k}) \\ &= \phi_1 \gamma_{k-1} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} + E(\varepsilon_t X_{t-k}) \end{aligned}$$

avec

$$E(\varepsilon_t X_{t-k}) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

donc

$$\gamma_k = \begin{cases} \phi_1 \gamma_{k-1} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} & \text{si } k = 1, \dots, p \\ \phi_1 \gamma_{k-1} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} + \sigma_\varepsilon^2 & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

D'où, en notant $\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$, la fonction d'autocorrélation d'un AR(p) est finalement donnée par :

$$\rho_k = \sum_{i=1}^p \phi_i \rho_{k-i} \quad , \quad \forall k > 0$$

Les autocorrélations d'un processus AR(p) sont ainsi décrites par une équation de récurrence linéaire d'ordre p. En écrivant cette relation pour différentes valeurs de k (k=1,...,p), on obtient les équations de Yulle-Walker :

$$\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & & \\ \vdots & & & & \rho_1 \\ \rho_{p-1} & & \cdots & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{pmatrix}$$

Autocorrélations Partielles

Il est possible de calculer les autocorrélations partielles du processus AR à partir des équations de Yulle-Walker.

Propriété 1.15.

Pour un processus AR(p), $\phi_{kk} = 0, \forall k > p$. En d'autres termes, les autocorrélations partielles s'annulent à partir du rang p+1. Cette propriété fondamentale dans la mesure où elle sert à identifier l'ordre p des processus AR.

Processus ARMA(p,q)

Définition 1.16.

Un processus stationnaire X_t suit un processus ARMA(p,q) s'il vérifie la relation suivante :

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \dots - \phi_p X_{t-p} = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

où les coefficients ϕ_i ($i = 1, \dots, p$) et θ_j ($j = 1, \dots, q$) sont des réels et $\varepsilon_t \sim bb(0, \sigma_\varepsilon^2)$

En introduisant l'opérateur retard, la relation précédente s'écrit :

$$\phi(L)X_t = \theta(L)\varepsilon_t$$

$$\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p \quad \text{et} \quad \theta(L) = 1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q$$

Remarque

Un processus ARMA(p,q) stationnaire si le polynome ϕ a toutes ses racines à l'extérieur du disque unité et inversible si le polynome θ a toutes ses racines à l'extérieur du disque unité.

En conséquent, si ϕ et θ a toutes ses racines à l'extérieur du disque unité, on peut écrire un processus ARMA(p,q) :

⊗ Soit sous la forme MA(∞) :

$$X_t = \frac{\theta(L)}{\phi(L)} \varepsilon_t = \sum_{i=0}^{+\infty} \varphi_i \varepsilon_{t-i}$$

avec $\varphi_0 = 1$ et $\sum_{i=0}^{+\infty} |\varphi_i| < \infty$

⊗ Soit sous la forme AR(∞) :

$$\varepsilon_t = \frac{\phi(L)}{\theta(L)} X_t = \sum_{i=0}^{+\infty} v_i X_{t-i}$$

avec $v_0 = 1$ et $\sum_{i=0}^{+\infty} |v_i| < \infty$

Les propriétés des autocovariances

La fonction d'autocovariances d'un processus ARMA(p,q) est donnée par :

$$\gamma_k = \begin{cases} \sum_{i=1}^p \phi_i \gamma_{k-i} & \text{pour } k \geq q + 1 \\ \sum_{i=1}^p \phi_i \gamma_{k-i} + \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=k}^q \theta_j \varphi_{j-k} & \text{pour } 0 \leq k \leq q \end{cases}$$

Démonstration.

Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus ARMA(p,q) de représentation causal, il admet alors la représentation MA(∞) :

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i \varepsilon_{t-i}$$

on a :

$$\gamma_k = \text{cov}(X_t, X_{t+k}) = E(X_t X_{t+k}) - E(X_t)E(X_{t+k})$$

et on a : $E(X_t) = E(X_{t+k}) = 0$ [D'après l'écriture MA(∞)]

donc

$$\begin{aligned}
 \gamma_k &= E(X_t X_{t+k}) = E\left[\left(\sum_{i=0}^p \phi_i X_{t+k-i} + \sum_{j=0}^q \theta_j \varepsilon_{t+k-j}\right) X_t\right] \\
 &= \sum_{i=0}^p \phi_i E(X_t X_{t+k-i}) + \sum_{j=0}^q \theta_j E(X_t \varepsilon_{t+k-j}) \\
 &= \sum_{i=0}^p \phi_i \gamma_{k-i} + \sum_{j=0}^q \theta_j E\left(\sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i \varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t+k-j}\right) \\
 &= \sum_{i=0}^p \phi_i \gamma_{k-i} + \sum_{j=0}^q \theta_j \sum_{i=0}^{\infty} [\varphi_i E(\varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-(j-k)})] \\
 &= \sum_{i=0}^p \phi_i \gamma_{k-i} + \sum_{j=k}^q \theta_j \varphi_{j-k} \sigma_\varepsilon^2
 \end{aligned}$$

La fonction d'autocorrélation

La fonction d'autocorrélation d'un processus ARMA(p,q) est donnée par :

$$\rho_k = \begin{cases} \sum_{i=1}^p \phi_i \rho_{k-i} & \text{pour } k \geq q + 1 \\ \sum_{i=1}^p \phi_i \rho_{k-i} + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\gamma_0} \sum_{j=k}^q \theta_j \varphi_{j-k} & \text{pour } 0 \leq k \leq q \end{cases}$$

1.5.2) Principales extentions des processus ARMA

Processus ARMA saisonnier : SARMA

Il est possible de tenir compte de la saisonnalité des séries par le biais des processus ARMA saisonnier, noté SARMA(p, q)(P, Q)_s définis comme suit :

$$\phi_p(L) \phi_P(L^s) X_t = \theta_q(L) \theta_Q(L^s) \varepsilon_t$$

tel que :

$$\begin{aligned}
 \phi_p(L) &= 1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p \\
 \phi_P(L^s) &= 1 - \phi_{1s} L^s - \dots - \phi_{Ps} L^{Ps} \\
 \theta_q(L) &= 1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L^q \\
 \theta_Q(L^s) &= 1 - \theta_{1s} L^s - \dots - \theta_{Qs} L^{Qs}
 \end{aligned}$$

et $\varepsilon_t \sim bb(0, \sigma_\varepsilon^2)$

où P est l'ordre d'un processus AR saisonnier, Q est l'ordre d'un processus MA saisonnier et s le

période de la saisonnalité ($s=12$ pour les séries mensuelles, $s=4$ pour les séries trimestrielles...).

Processus ARMA intégré : ARIMA

Un processus X_t suit un ARIMA(p,d,q) s'il vérifie la relation suivante :

$$\phi(L)(1-L)^d X_t = \theta(L)\varepsilon_t$$

tel que :

$$\phi_p(L) = 1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p$$

$$\theta_q(L) = 1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L^q$$

et $\varepsilon_t \sim bb(0, \sigma_\varepsilon^2)$

où d un entier positif appelé **paramètre d'intégration** ou de **différenciation**.

Remarque

Les processus ARMA apparaissent donc comme un cas particulier des processus ARIMA dans lesquels $d=0$.

Processus ARMA intégré saisonnier : SARIMA

Définition 1.17.

Un processus SARIMA(p, d, q)(P, D, Q) $_s$ s'écrit comme suit :

$$\phi_p(L)\phi_P(L^s)(1-L)^d(1-L^s)^D X_t = \theta_q(L)\theta_Q(L^s)\varepsilon_t$$

tel que :

$$\phi_p(L) = 1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p$$

$$\phi_P(L^s) = 1 - \phi_{1s} L^s - \dots - \phi_{Ps} L^{Ps}$$

$$\theta_q(L) = 1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L^q$$

$$\theta_Q(L^s) = 1 - \theta_{1s} L^s - \dots - \theta_{Qs} L^{Qs}$$

et $\varepsilon_t \sim bb(0, \sigma_\varepsilon^2)$

s : correspondant à la saisonnalité .

Processus ARFIMA

Les processus ARFIMA ont été obtenus en considérant, formellement, les cas où d n'est pas entier (paramètre de mémoire, compris entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$).

Cette généralisation, proposée par Granger en 1980, repose sur la manipulation des séries d'opérateurs retard (L), et sur le développement en série entière de $(1 - L)^d$.

Définition 1.18.

Un processus fractionnaire est un processus $(X_t)_t$ s'écrit :

$$(1 - L)^d \phi(L) X_t = \theta(L) \varepsilon_t \quad \text{pour } t \geq 0$$

avec comme condition initiale $X_t = 0$ pour $t < 0$ et ε_t un bruit blanc pour $t \geq 0$, nul sinon, de variance finie σ^2 , où $\phi(L)$ et $\theta(L)$ sont deux polynômes ayant leurs racines à l'extérieur du disque unité, et où d est réel, avec la convention :

$$(1 - L)^d = 1 + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d(d-1)\dots(d-j+1)}{j!} (-1)^j L^j$$

La définition de $(1-L)^d$ est fondée sur le développement en série entière de la fonction puissance (qui peut se simplifier en introduisant la fonction Gamma) soit :

$$\Gamma(d) = \int_0^{+\infty} x^{d-1} e^{-x} dx$$

alors :

$$(1 - L)^d = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(d+j)}{\Gamma(d)j!} L^j$$

Les processus TS et DS

Ainsi que nous l'avons précédemment mentionné, deux grandes catégories de processus non stationnaires peuvent être distinguées :

- Les processus TS (Trend stationary) présentant une non stationnarité de nature déterministe.
- Les processus DS (Difference stationary) présentant une non stationnarité de nature stochastique.

Caractéristiques des processus TS

Si l'on suppose qu'un processus peut s'écrire comme la somme d'une fonction déterministe du temps et d'un élément stochastique stationnaire, alors un processus TS est donnée par :

$$X_t = f_t + \varepsilon_t$$

Dans le cas simple ou la fonction f_t est une fonction polynmiale d'ordre 1, on a :

$$X_t = \alpha + t\beta + \varepsilon_t$$

Pour simplifier, supposons en outre que $\varepsilon_t \sim bb(0, \sigma_\varepsilon^2)$. On a alors les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} E(X_t) &= E(\alpha + t\beta + \varepsilon_t) = \alpha + t\beta \\ v(X_t) &= v(\alpha + t\beta + \varepsilon_t) = v(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 \\ cov(X_t, X_s) &= E[(X_s - E(X_s))(X_t - E(X_t))] = E(\varepsilon_s \varepsilon_t) \end{aligned}$$

D'où :

$$cov(X_t, X_s) = 0, \forall t \neq s$$

Ainsi, l'espérance d'un processus TS exhibe une tendance déterministe. On constate en revanche que sa variance est constante au cours du temps, témoignant du fait qu'un processus TS est stationnaire en variance.

Les caractéristiques des processus DS

On dit qu'un processus X_t est DS ou caractérisé par une non stationnarité stochastique si le processus différenciée une fois $(1 - L)X_t$ est stationnaire. On parle aussi processus intégré d'ordre un, qu'on notera $X_t \sim I(1)$.

De manière générale, on dit que le processus X_t est un processus intégré d'ordre d avec d l'ordre de d'intégration, si le processus différenciée d fois $(1 - L)^d X_t$ est stationnaire, On note $X_t \sim I(d)$.

Nous avons deux type de processus DS :

- Le processus DS avec dérive β ($\beta \neq 0$) tel que :

$$X_t = X_{t-1} + \beta + \varepsilon_t$$

Qui représente une non stationnarité de nature stochastique qu'on peut démontrer par récurrence :

$$X_1 = X_0 + \beta + \varepsilon_1$$

$$X_2 = X_1 + \beta + \varepsilon_2 = X_0 + \beta + \varepsilon_1 + \beta + \varepsilon_2$$

$$X_3 = X_2 + \beta + \varepsilon_3 = X_1 + \beta + \varepsilon_2 + \beta + \varepsilon_3 = X_0 + \beta + \varepsilon_1 + \beta + \varepsilon_2 + \beta + \varepsilon_3$$

⋮

$$X_t = X_0 + t\beta + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i$$

où $\varepsilon_t \sim bb(0, \sigma_\varepsilon^2)$

donc :

$$E(X_t) = X_0 + t\beta$$

$$v(X_t) = v(X_0 + t\beta + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i) = t\sigma_\varepsilon^2$$

$$cov(X_t, X_{t'}) = \sigma_\varepsilon^2 \min(t, t') \quad \text{si } t \neq t'$$

alors : Le processus est non stationnaire par son espérance et sa variance.

- Le processus DS sans dérive β ($\beta = 0$) qui est appelé **marche aléatoire** ou **marche au hazard** qui s'écrit comme suit :

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$$

Que nous montrons sa non stationnarité par récurrence :

$$X_1 = X_0 + \varepsilon_1$$

$$X_2 = X_1 + \varepsilon_2 = X_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$X_3 = X_2 + \varepsilon_3 = X_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = X_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

⋮

$$X_t = X_0 + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i$$

où $\varepsilon_t \sim bb(0, \sigma_\varepsilon^2)$

donc :

$$\begin{aligned} E(X_t) &= X_0 \\ v(X_t) &= v\left(X_0 + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i\right) = t\sigma_\varepsilon^2 \\ cov(X_t, X_{t'}) &= \sigma_\varepsilon^2 \min(t, t') \quad \text{si } t \neq t' \end{aligned}$$

d'où : la marche aléatoire stationnaire en moyenne mais pas en variance.

1.6) Les grandes classes des processus non linéaires

Il y a de nombreuses manières d'introduire des non-linéarités dans un modèle de série temporelle. Dans ce paragraphe, nous traitons de quelques unes d'entre elles, principalement les modèles bilinéaires, les modèles avec seuil et les modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédatiques ("ARCH"). Ce sont ces derniers qui seront l'objet essentiel de chapitre suivant. Nous nous restreignons ici à des processus unidimensionnels.

1.6.1) Processus bilinéaires

Définition 1.19.

$(X_t)_t$ suit un processus bilinéaire (BL) d'ordre $(p, q; P, Q)$ s'il peut être écrit sous la forme :

$$X_t = \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} + \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^Q \lambda_{ij} X_{t-i} \varepsilon_{t-j}$$

où ε_t est un bruit blanc, ϕ_i , θ_j et λ_{ij} sont des réels.

Un processus **bilinéaire** est une extension d'un processus ARMA dans lequel des termes croisés de la composante AR et la composante MA sont introduits.

Remarque

Un processus bilinéaire est dit :

- Super diagonal si $P > Q$
- Diagonal si $P = Q$
- Sous diagonal si $P < Q$

Exemple

Considérons le modèle BL(0,0;2,1) super diagonal

$$X_t = \varepsilon_t + \lambda X_{t-2} \varepsilon_{t-1}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$

et $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2)$

- Le processus X_t est de moyenne nulle :

$$E(X_t) = E(\varepsilon_t + \lambda X_{t-2} \varepsilon_{t-1}) = 0$$

car : ε_t est indépendant du passé du processus, et en particulier de X_{t-2} et $E(\varepsilon_t) = 0$

- L'autocovariance de retard h vaut :

$$\begin{aligned} \gamma_h &= cov(X_t, X_{t-h}) = E(X_t X_{t-h}) \\ &= E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-h} + \lambda^2 X_{t-2} \varepsilon_{t-1} X_{t-h} + \lambda \varepsilon_t X_{t-h-2} \varepsilon_{t-h} + \lambda \varepsilon_{t-h} X_{t-2} \varepsilon_{t-1}) \end{aligned}$$

Si $h > 1$, nous avons :

$$cov(X_t, X_{t-h}) = 0$$

Si $h=1$, nous avons :

$$cov(X_t, X_{t-1}) = 0$$

En remplaçant h par 0, nous trouvons une relation de récurrence pour la variance marginale :

$$E(X_t^2) = E(\varepsilon_t^2) + \lambda^2 E(X_{t-2}^2) E(\varepsilon_{t-1}^2) + 2\lambda E(\varepsilon_t) E(X_{t-2}) E(\varepsilon_{t-1})$$

ou, comme le dernier terme s'annule on a :

$$v(X_t) = E(X_t^2) = \sigma^2 + \lambda^2 \sigma^2 E(X_{t-2}^2)$$

Sous l'hypothèse de la stationnarité à condition $\lambda^2\sigma^2 < 1$, ce qui implique que :

$$v(X_t) = \frac{\sigma^2}{1 - \lambda^2\sigma^2}$$

La variance conditionnelle du processus X_t est :

$$\begin{aligned} v(X_t|X_{t-2}) &= E(X_t^2|X_{t-2}) = E(\varepsilon_t^2 + \lambda^2 X_{t-2}^2 \varepsilon_{t-1}^2 | X_{t-2}) \\ &= E(\varepsilon_t^2) + \lambda^2 E(\varepsilon_{t-1}^2) E(X_{t-2}^2 | X_{t-2}) \\ &= \sigma^2 + \lambda^2 \sigma^2 X_{t-2}^2 \\ &= \sigma^2 (1 + \lambda^2 X_{t-2}^2) \end{aligned}$$

La variance conditionnelle du processus X_t dépend des valeurs passées de ce processus. On retrouve un effet type ARCH, ceci illustre le fait que plusieurs modélisations non linéaires peuvent être envisagées si l'on souhaite modéliser la dynamique dans la volatilité conditionnelle.

1.6.2) Modèles à seuil

Les modèles à seuil sont particulièrement intéressants dans la mesure où ils permettent de tenir compte des phénomènes d'asymétrie et des ruptures de forte amplitude. Les modèles les plus couramment utilisés dans cette catégorie sont les modèles SETAR et STAR ou le changement de régime est régi par un seuil (les modèles TAR).

Modèles SETAR

Définition 1.20.

Un modèle SETAR ($k ; p_1, \dots, p_k$) est un modèle à k équations de la forme :

$$X_t = \begin{cases} \phi_0^{(1)} + \sum_{i=1}^{p_1} \phi_i^{(1)} X_{t-i} + \varepsilon_t^{(1)} & \text{si } X_{t-d} < c_1 \\ \phi_0^{(2)} + \sum_{i=1}^{p_2} \phi_i^{(2)} X_{t-i} + \varepsilon_t^{(2)} & \text{si } c_1 \leq X_{t-d} < c_2 \\ \vdots & \\ \phi_0^{(k)} + \sum_{i=1}^{p_k} \phi_i^{(k)} X_{t-i} + \varepsilon_t^{(k)} & \text{si } X_{t-d} \geq c_{k-1} \end{cases}$$

- k correspond au nombre de régime.
- d un entier positif appelé paramètre de délai (ou de retard).

- les coefficients $c_j, j = 1, \dots, k-1$ sont les paramètres de seuil pour lequel le système passe d'un régime à l'autre.
- On constate que chaque équation représente un modèle AR linéaire d'ordre $p_i, i = 1, \dots, k$.

Remarque

Lorsque les ordres de retards sont les même pour toutes les équations (c-à-d $p_i = p, \forall i$), les modèles SETAR se ramènent au modèles TAR d'ordre p .

Définition 1.21.

Un modèle TAR s'écrit sous la forme :

$$X_t = \begin{cases} \phi_0^{(1)} + \sum_{i=1}^p \phi_i^{(1)} X_{t-i} + \varepsilon_t^{(1)} & \text{si } X_{t-d} < c_1 \\ \phi_0^{(2)} + \sum_{i=1}^p \phi_i^{(2)} X_{t-i} + \varepsilon_t^{(2)} & \text{si } c_1 \leq X_{t-d} < c_2 \\ \vdots & \\ \phi_0^{(k)} + \sum_{i=1}^p \phi_i^{(k)} X_{t-i} + \varepsilon_t^{(k)} & \text{si } X_{t-d} \geq c_{k-1} \end{cases}$$

Modèles STAR

Définition 1.22.

Un modèle STAR d'ordre p s'écrit :

$$X_t = H_1(X_{t-1}, \dots, X_{t-p}) + H_2(X_{t-1}, \dots, X_{t-p})F(s_t; \gamma, c) + \varepsilon_t$$

ou H_1 et H_2 sont des fonctions (linéaires ou non linéaires) des valeurs passés de X_t . $F(s_t; \gamma, c)$ est la fonction de transition d'un état à un autre (comprise entre 0 et 1) tel que s_t est la variable de transition.

$$\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2).$$

* Dans le cas ou H_1 et H_2 sont des fonctions linéaires, on peut s'écrire le modèle STAR(p) comme suit :

$$X_t = \sum_{i=1}^p \phi_{1i} X_{t-i} + \left(\sum_{i=1}^p \phi_{2i} X_{t-i} \right) F(s_t; \gamma, c) + \varepsilon_t$$

1.6.3) *Processus ARCH et GARCH*

Définition 1.23.

Un processus ARCH(p) est donnée par :

$$X_t = \varepsilon_t h_t$$

avec

$$h_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2$$

tel que $\forall t \in \mathbb{Z}; \alpha_0 > 0; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ des constantes positifs données

$\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2)$

Définition 1.24.

Un processus GARCH(p, q) est donnée par :

$$X_t = \varepsilon_t h_t$$

avec

$$h_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}^2$$

tel que $\forall t \in \mathbb{Z}; \alpha_0 > 0; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ et β_1, \dots, β_q des constantes positifs données

$\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2)$

2

Processus Conditionnellement Hétéroscédastiques

Introduction

EN économétrie, la volatilité a été l'un des sujets de recherche les plus utilisés, et elle l'est toujours, l'un des sujets de recherche les plus actifs dans le domaine de la prévision économique en générale et de l'économétrie financière en particulier. L'une de caractéristique principale du processus de la volatilité est le fait qu'elle n'est pas observable. Le concept de la volatilité est un élément fondamental de l'appréhension des marchés financiers surtout en termes de gestion de risque. La volatilité peut se définir comme l'ampleur des fluctuations ou l'amplitude des variations sur une période donnée (minute, heure, jour, semaine) pour un marché ou une valeur, c'est une unité mesurant la propension d'une valeur du marché ou valeur mobilière, qui varie significativement à la hausse ou à la baisse. Plus un titre a tendance à forte variation sur une courte période de temps, plus il sera dit volatile ou trop risqué en d'autre terme. Les premiers travaux sur la volatilité (modèles ARCH/GARCH) ont été conçus pour fournir des estimations anticipatives ou de prévisions, en d'autre terme de la volatilité conditionnelle. Les modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques (ARCH) ont été introduits par **Engle** (1982) et leurs extensions GARCH (ARCH généralisés)

est due à **Bollerslev** (1986). Leurs caractérisations reposent essentiellement sur le concept de variance conditionnelle, qui ne dépend que du module des valeurs passées. L'objectif de ce chapitre est d'essayer de viser l'essentiel de la littérature statistique des modèles ARCH et GARCH, et de donner des démonstrations de certains résultats théoriques.

2.1) Modèles ARCH/GARCH

Face aux lacunes des représentations ARMA(p,q) pour les problèmes monétaires et Financiers, **Engle**(1982) propose une nouvelle classe de modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques (ARCH) aptes à capter le comportement de la volatilité dans le temps.

Engle (1982) a donc proposé ces processus pour pallier les insuffisances de la classe des représentations ARMA, notamment en ce qui concerne les séries financières qui présentent une volatilité (ou variabilité instantanée mesurée par la variance conditionnelle) en fonction du temps et par des ajustements asymétriques.

Ainsi, les modèles ARCH sont basés sur une paramétrisation endogène de la variance conditionnelle. Mais avant de présenter les modèles ARCH et GARCH, commençons par introduire quelques notions essentielles dans l'étude des séries temporelles.

Définition 2.1.

Le Kurtosis ou le coefficient d'aplatissement d'une variable aléatoire X correspond :

$$k = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

avec : μ_4 est le moment centré d'ordre 4 ie : $\mu_4 = E[X - E(X)]^4$

- *Si le kurtosis > 3 (queues épaisses), la distribution est dite leptokurtique.*
- *Si le Kurtosis < 3 , la distribution est dite platikurtique.*

Définition 2.2.

Skewness ou le coefficient d'asymétrie d'une variable aléatoire X s'écrit :

$$S = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

avec : μ_3 est le moment centré d'ordre 3 ie : $\mu_3 = E[X - E(X)]^3$

- ▷ *Lorsque la distribution est symétrique, le coefficient de Skewness est nul.*

- ▷ Lorsque la distribution possède une forte queue vers la droite, le coefficient de Skewness est positif.
- ▷ Lorsque la distribution possède une forte queue vers la gauche, le coefficient de Skewness est négatif.

2.1.1) La notion d'espérance conditionnelle et non conditionnelle, notion de variance conditionnelle et non conditionnelle

* Pour introduire ces notions, nous considérons un modèle du taux d'intérêt à court terme. Pour ce faire, on recourt à un processus autorégressif AR(1) stationnaire :

$$y_t = \mu + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

où $\varepsilon_t \sim bb(0, \sigma^2)$

Dans cette équation, y_t est la valeur du taux d'intérêt au temps t . Nous voulons prévoir y_{t+1} en utilisant l'espérance non conditionnelle. On procède comme suit :

$$\begin{aligned} y_{t+1} &= \mu + \phi_1 y_t + \varepsilon_{t+1} \\ E(y_{t+1}) &= \mu + \phi_1 E(y_t) + E(\varepsilon_{t+1}) \end{aligned}$$

L'espérance non conditionnelle sert à calculer des prévisions à long terme d'une variable, soit sa moyenne à long terme. Sachant par ailleurs que la moyenne d'une série stationnaire est constante, on peut écrire :

$$E(y_{t+1}) = \mu + \phi_1 E(y_t)$$

puisque :

$$E(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_{t+1}) = 0, \forall t$$

Il en résulte que :

$$E(y_{t+1}) = \frac{\mu}{1 - \phi_1}$$

Nous nous intéressons maintenant à la prévision à court terme de y_{t+1} . L'espérance conditionnelle nous donne alors une prévision supérieure à l'espérance non conditionnelle. L'espérance conditionnelle prend en effet compte de toute l'information disponible jusqu'au temps t . Elle suppose que toutes les variables sont connues et fixées jusqu'à cette période. On peut donc écrire :

$$E_t(y_{t+1}) = \mu + \phi_1 E_t(y_t) + E_t(\varepsilon_{t+1}) = \mu + \phi_1 y_t$$

y_t est en effet connu au temps t et n'est donc pas aléatoire. Par ailleurs ε_{t+1} est inconnu à la période t . Son espérance conditionnelle est donc nulle.

* Pour introduire les notions de variances conditionnelle et non conditionnelle, nous aurons recours au processus autorégressif suivant :

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

où $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$

Nous supposons également que y est une série stationnaire, c'est-à-dire que λ est inférieur à 1. En vertu des calculs antérieurs nous pouvons écrire la variance conditionnelle comme suit :

$$v_t(y_t) = E_t[y_t - E_t(y_t)]^2 = \sigma^2$$

Pour calculer la variance non conditionnelle, nous recourons à l'équation qui relie y_t au décalage de l'innovation. Pour établir cette relation, nous exprimons l'équation de y_t comme suit :

$$y_t(1 - \phi_1 L) = \varepsilon_t$$

où L désigne l'opérateur de retard. En multipliant les deux côtés de cette expression par $(1 - L)^{-1}$, on obtient :

$$y_t = (1 - \phi_1 L)^{-1} \varepsilon_t$$

et en utilisant une propriété bien connue de l'opérateur de retard, on a :

$$y_t = \varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_1^2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \phi_1^n \varepsilon_{t-n} \quad n \rightarrow \infty$$

La variance non conditionnelle est donc égale à :

$$v(y_t) = \sigma^2(1 + \phi_1^2 + \phi_1^4 + \dots)$$

L'expression entre parenthèses est une progression géométrique de raison ϕ_1^2 . La variance non conditionnelle de y_t se simplifie donc comme suit :

$$v(y_t) = \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1^2}$$

La variance non conditionnelle est donc différente de la variance conditionnelle.

2.1.2) *Présentation du modèle ARCH/GARCH*

Pour aborder ce type de modèle, on introduit la notion de filtration qui représente l'information disponible comme suit :

Soit (Ω, F, P) un espace de probabilité, dont on considère une filtration F_t (une collection croissante de sous-tribus de F , i.e $F_s \subset F_t, \forall s < t$). Un processus X_t est adapté à une filtration F_t , si pour tout X_t est F_t -mesurable.

De plus, la filtration naturelle associée à un processus X_t est par définition la famille de sous-tribus $F_t = \sigma(X_s, s \leq t)$, où F_t est la plus petite tribu rendant mesurable les applications $\omega \rightarrow X_s(\omega)$, pour $s \leq t$.

Définition 2.3. [*Modèle ARCH(1)*]

Un modèle X_t est dit *autoregressif conditionnellement hétéroscédastique d'ordre 1* qu'on note par *ARCH(1)*, s'il admet l'écriture suivante :

$$X_t = \varepsilon_t h_t$$

dont la variance conditionnelle $h_t^2 = E[X_t^2 | F_{t-1}]$ satisfait pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et $\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0$, des constantes données :

$$h_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2$$

où $(\varepsilon_t)_t$ un bruit blanc : suite de variables aléatoires (i.i.d), centrée et réduite.

On suppose souvent que les variables ε_t sont indépendantes de la filtration F_{t-1} et que h_t dépend de X_t .

Propriété 2.4.

Le modèle ARCH(1) admet les propriétés suivantes :

1. $v(X_t|F_{t-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 = h_t^2$
2. $v(X_t) = \alpha_0 + \alpha_1 v(X_{t-1})$
3. $E(X_t|F_{t-1}) = 0$

Démonstration.

Il suffit d'appliquer la décomposition de la variance et la variance conditionnelle comme suit :
pour tout $X_t \in \mathbb{L}^2$:

$$\begin{cases} v(X_t|F_{t-1}) = E[X_t^2|F_{t-1}] - E[X_t|F_{t-1}]^2 \\ v(X_t) = v(E[X_t|F_{t-1}]) + E[v(X_t|F_{t-1})] \end{cases}$$

1.

$$\begin{aligned} v(X_t|F_{t-1}) &= E[\varepsilon_t^2(\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2)|F_{t-1}] - E[\varepsilon_t h_t|F_{t-1}]^2 \\ &= E[\varepsilon_t^2]E[\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2|F_{t-1}] - E(\varepsilon_t)^2 E[h_t|F_{t-1}]^2 \\ &= E[\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2|F_{t-1}] - 0 \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 \\ &= h_t^2 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} v(X_t) &= v(E[X_t|F_{t-1}]) + E[v(X_t|F_{t-1})] \\ &= v(0) + E(\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 v(X_{t-1}) \end{aligned}$$

Sous-hypothèse de stationnarité (i.e : $v(X_t) = v(X_{t-1})$), ce qui implique que :

$$v(X_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}$$

Pour que cette variance non-conditionnelle existe, il suffit donc que : $\alpha_1 \in]0, 1[$

3.

$$\begin{aligned}
E(X_t|F_{t-1}) &= E(\varepsilon_t h_t|F_{t-1}) \\
&= h_t E(\varepsilon_t|F_{t-1}) \\
&= h_t E(\varepsilon_t) \\
&= 0
\end{aligned}$$

car : h_t est mesurable par rapport à la tribu F_{t-1} , et ε_t est indépendante de F_{t-1} , et $E(\varepsilon_t) = 0$.

Cette propriété signifie que le processus ARCH X_t qui peut s'apparenter à un processus de bruit blanc (faible), ce qui explique notamment que l'on spécifiera des erreurs de modèles sous la forme ARCH. On retrouve alors toutes les propriétés de modèles établies sous la propriété de bruit blanc des erreurs. Mais cette propriété signifie en outre que le processus ARCH X_t est non conditionnellement homoscedastique.

Propriété 2.5.

Les auto-covariances conditionnelles du processus X_t ARCH(1) sont nulles. C'est à dire que :

$$cov(X_t, X_{t+k}|F_{t-h}) = 0, \quad \forall h \geq 1, k \geq 1$$

Démonstration.

Cette propriété s'obtient de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
cov(X_t, X_{t+k}|F_{t-h}) &= E(X_t X_{t+k}|F_{t-h}) - E(X_t|F_{t-h})E(X_{t+k}|F_{t-h}) \\
&= E(X_t X_{t+k}|F_{t-h}) \\
&= E[E(X_t X_{t+k}|F_{t+k-1})|F_{t-h}] \\
&= E[X_t E(X_{t+k}|F_{t+k-1})|F_{t-h}] \\
&= E(X_t \times 0|F_{t-h}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

L'absence de corrélations entre les valeurs d'un processus ARCH est une caractéristique très importante de cette famille de modèle, qui les rend utiles pour modéliser certaines séries financières.

Propriété 2.6. [Moment centré d'ordre 4]

Les modèles ARCH permettent d'avoir des processus avec des queues de distribution plus épaisses.

Le moment conditionnel centré d'ordre 4 du processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ vérifie :

$$E(X_t^4 | F_{t-1}) = 3(\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2)^2$$

sous l'hypothèse $3\alpha_1^2 < 1$, le moment non conditionnel centré d'ordre 4 du processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est égal à :

$$E(X_t^4) = \frac{3\alpha_0^2(1 + \alpha_1)}{(1 - 3\alpha_1^2)(1 - \alpha_1)}$$

le kurtosis non conditionnelle associée au processus ARCH(1) est égale à :

$$k = \frac{E(X_t^4)}{E(X_t^2)^2} = 3\left(\frac{1 - \alpha_1^2}{1 - 3\alpha_1^2}\right) > 3$$

Démonstration.

On a : $X_t = \varepsilon_t h_t$

et on sait que si une variable X centré et suit une loi normale alors :

$$E(X^4) = 3[E(X^2)]^2 = 3(v(X))^2$$

donc :

$$E(X_t^4 | F_{t-1}) = 3[E(X_t^2 | F_{t-1})]^2 = 3(\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2)^2$$

• Sous l'hypothèse $3\alpha_1^2 < 1$, on a :

$$\begin{aligned} E[X_t^4] &= E[E(X_t^4 | F_{t-1})] \\ &= E[3E(X_t^2 | F_{t-1})^2] = E[3(\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2)^2] \\ &= 3E(\alpha_0^2 + \alpha_1^2 X_{t-1}^4 + 2\alpha_0 \alpha_1 X_{t-1}^2) \\ &= 3[\alpha_0^2 + \alpha_1^2 E(X_{t-1}^4) + 2\alpha_0 \alpha_1 E(X_{t-1}^2)] \\ &= 3[\alpha_0^2 + \alpha_1^2 X_{t-1}^4 + 2\frac{\alpha_0^2 \alpha_1}{1 - \alpha_1}] \end{aligned}$$

d'après la stationnarité implique :

$$E[X_t^4] = \frac{3\alpha_0^2(1 + \alpha_1)}{(1 - \alpha_1)(1 - 3\alpha_1^2)}$$

d'après les résultats obtenus précédemment, on obtient :

$$\begin{aligned} K &= \frac{3\alpha_0^2(1+\alpha_1)}{(1-3\alpha_1)(1-\alpha_1)} \times \frac{(1-\alpha_1)^2}{\alpha_0^2} \\ &= 3 \frac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2} > 3 \end{aligned}$$

Toutes ces propriétés peuvent être généralisées du cas d'un processus ARCH(p).

Remarque

Le kurtosis d'un processus ARCH est toujours supérieur à 3, la loi non conditionnelle d'un processus ARCH est donc une loi de distribution à queue épaisse, est donc plus aplatie qu'une gaussienne, on dit que cette distribution est **leptokurtique**.

Modèle ARCH(p)

Définition 2.7.

Un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est défini comme étant un processus ARCH(p) s'il vérifie l'équation suivante :

$$\begin{cases} X_t = \varepsilon_t h_t \\ h_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 = \alpha_0 + \boldsymbol{\alpha}(L)X_t^2 \end{cases}$$

où $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, p$ et L est l'opérateur retard tel que $\boldsymbol{\alpha}(L) = \sum_{i=1}^p \alpha_i L^i$.

$(\varepsilon_t)_t$ désigne une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées (iid), centrée de variance unité

Propriété 2.8.

La variance conditionnelle du processus X_t ARCH(p) défini par l'équation précédente est non constante dans le temps et vérifie :

$$v(X_t | F_{t-h}) = \alpha_0 \left(\frac{1 - \alpha_1^h}{1 - \alpha_1} \right) + \alpha_1^h X_{t-h}^2, \quad \forall t$$

C'est la propriété centrale des processus ARCH, le processus X_t possède une variance conditionnelle qui dépend du temps.

Démonstration.

On sait que $E(X_t | F_{t-h}) = 0$, dès lors $v(X_t | F_{t-h}) = E(X_t^2 | F_{t-h})$

Considérons le processus X_t^2 défini par la relation $X_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \varepsilon_t$ où ε_t est un bruit blanc faible. Par itération successive, on a :

$$X_t^2 = \alpha_0(1 + \alpha_1 + \alpha_1^2 + \dots + \alpha_1^h) + \varepsilon_t + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \alpha_1^2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \alpha_1^{h-1} \varepsilon_{t-h+1} + \alpha_1^h X_{t-h}^2$$

En considérant l'espérance conditionnelle de chacun de ces membres, il vient :

$$E(X_t^2 | F_{t-h}) = \alpha_0 \left(\frac{1 - \alpha_1^h}{1 - \alpha_1} \right) + \sum_{j=0}^{h-1} \alpha_1^j E(\varepsilon_{t-j} | F_{t-h}) + \alpha_1^h E(X_{t-h}^2 | F_{t-h})$$

Puisque par définition du bruit blanc ε_t , on a : $E(\varepsilon_{t-j} | F_{t-h}) = 0, j = 0, \dots, h-1$ et par définition $E(X_{t-h}^2 | F_{t-h}) = X_{t-h}^2$, on obtient :

$$v(X_t | F_{t-h}) = \alpha_0 \left(\frac{1 - \alpha_1^h}{1 - \alpha_1} \right) + \alpha_1^h X_{t-h}^2, \quad \forall t$$

Remarque

Lorsque h tend vers l'infini, ces variances conditionnelles convergent vers la variance non conditionnelle, et l'on retrouve alors la formule de la propriété 2.2.1 :

$$v(X_t) = \lim_{h \rightarrow \infty} v(X_t | F_{t-h}) = \lim_{h \rightarrow \infty} \alpha_0 \left(\frac{1 - \alpha_1^h}{1 - \alpha_1} \right) + \alpha_1^h X_{t-h}^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}$$

Modèle avec erreur ARCH

Nous allons regarder les propriétés de (X_t) , processus autorégressif, dans le cas où (ε_t) n'est plus un bruit blanc. On suppose que le résidu admet une représentation autorégressif de type ARCH (p) :

$$\varepsilon_t = z_t h_t \quad \text{avec} \quad h_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$$

où z_t est un bruit blanc faible.

On a un modèle qui décrit à la fois l'évolution de l'espérance conditionnelle et la variance conditionnelle du processus X_t dans le temps. Envisageons le cas le plus simple d'un processus de type AR(1) avec erreur ARCH(1) :

$$X_t = \mu + \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad |\phi_1| < 1$$

$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2}$$

Dans ce cas, les résidus satisfont les principales propriétés étudiées précédemment.

On peut, en outre, en déduire un certain nombre de conclusions. On peut montrer tout d'abord, que l'espérance conditionnelle de X_t vérifie :

$$E(X_t|F_{t-h}) = \mu + \phi_1 E(X_{t-1}|F_{t-h}), \quad \forall h \geq 1$$

ce qui montre que les prévisions non linéaires de X_t s'obtiennent comme les prévisions linéaires d'un processus AR(1). Plus généralement :

$$X_t = \mu \frac{1 - \phi_1^h}{1 - \phi_1} + \phi_1^h X_{t-h} + \varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \phi_1^{h-1} \varepsilon_{t-h+1}$$

En effet ;

$$\begin{aligned} X_t &= \mu + \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= \mu + \phi_1 (\mu + \phi_1 X_{t-2} + \varepsilon_{t-2}) + \varepsilon_t \\ &= \mu(1 + \phi_1) + \phi_1^2 X_{t-2} + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= \mu(1 + \phi_1 + \phi_1^2) + \phi_1^3 X_{t-3} + \phi_1^2 \varepsilon_{t-2} + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ &\vdots \\ &= \mu(1 + \phi + \phi_1^2 + \dots + \phi_1^{h-1}) + \phi_1^h X_{t-h} + \phi_1^{h-1} \varepsilon_{t-h+1} + \dots + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= \mu \frac{1 - \phi_1^h}{1 - \phi_1} + \phi_1^h X_{t-h} + \phi_1^{h-1} \varepsilon_{t-h+1} + \dots + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \end{aligned}$$

En prenant l'espérance conditionnelle de deux cotés, on obtient :

$$E(X_t|F_{t-h}) = \mu \frac{1 - \phi_1^h}{1 - \phi_1} + \phi_1^h X_{t-h}$$

De même façon, on peut montrer que la variance conditionnelle de X_t dépend du temps. En effet, on montre qu'elle dépend du processus ε_{t-h}^2 de la façon suivante.

Propriété 2.9.

La variance conditionnelle du processus AR(1) avec erreur ARCH(1), X_t , s'écrit :

$$v(X_t|F_{t-h}) = \frac{\mu}{1 - \alpha_1} \left[\frac{1 - \phi_1^{2h}}{1 - \phi_1^2} - \alpha_1 \left(\frac{\alpha_1^h - \phi_1^{2h}}{\alpha_1 - \phi_1^2} \right) \right] + \alpha_1 \left[\frac{\alpha_1^h - \phi_1^{2h}}{\alpha_1 - \phi_1^2} \right] \varepsilon_{t-h}^2$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 v(X_t|F_{t-h}) &= v\left(\mu\frac{1-\phi_1^h}{1-\phi_1} + \phi_1^h X_{t-h} + \varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \phi_1^{h-1} \varepsilon_{t-h+1} | F_{t-h}\right) \\
 &= v(\varepsilon_t | F_{t-h}) + \phi_1^2 v(\varepsilon_{t-1} | F_{t-h}) + \dots + \phi_1^{2(h-1)} v(\varepsilon_{t-h+1} | F_{t-h}) \\
 &= \sum_{j=0}^{h-1} \phi_1^{2j} \left[\alpha_0 \frac{1-\alpha_1^{h-j}}{1-\alpha_1} + \alpha_1^{h-j} \varepsilon_{t-h}^2 \right] \\
 &= \frac{\mu}{1-\alpha_1} \left[\frac{1-\phi_1^{2h}}{1-\phi_1^2} - \alpha_1 \left(\frac{\alpha_1^h - \phi_1^{2h}}{\alpha_1 - \phi_1^2} \right) \right] + \alpha_1 \left[\frac{\alpha_1^h - \phi_1^{2h}}{\alpha_1 - \phi_1^2} \right] \varepsilon_{t-h}^2
 \end{aligned}$$

On en déduit que les intervalles de prévision, d'horizon h fixé, d'un modèle AR(1) avec erreurs ARCH(1) seront d'autant plus larges que la variabilité est grande, contrairement au modèle AR(1) où les intervalles de prévision dépendent de h mais pas de t .

Propriété 2.10.

Si h, k deux nombres entiers tel que $h > 0$ et $k \geq 0$, on peut écrire la covariance comme suit :

$$\text{cov}[(X_t, X_{t+k}) | F_{t-h}] = \alpha_0 \left(\frac{\phi_1^k}{1-\alpha_1} \right) \left(\frac{1-\phi_1^{2h}}{1-\phi_1^2} \right) - \alpha_0 \left(\frac{\alpha_1^h \phi_1^k}{1-\alpha_1} \right) \left(\frac{\alpha_1^h - \phi_1^{2h}}{\alpha_1 - \phi_1^2} \right) + \alpha_1^h \phi_1^k \left(\frac{\alpha_1^h - \phi_1^{2h}}{\alpha_1 - \phi_1^2} \right) \varepsilon_{t-h}^2$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 \text{cov}[(X_t, X_{t+k}) | F_{t-h}] &= \text{cov}\left[\left(\mu\frac{1-\phi_1^h}{1-\phi_1} + \phi_1^h X_{t-h} + \varepsilon_t + \dots + \phi_1^{h-1} \varepsilon_{t-h+1}, \mu\frac{1-\phi_1^{h+k}}{1-\phi_1} + \phi_1^{h+k} X_{t-h} + \varepsilon_{t+k} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \dots + \phi_1^{h+k-1} \varepsilon_{t-h+1}\right) | F_{t-h}\right] \\
 &= \text{cov}[(\varepsilon_t + \dots + \phi_1^{h-1} \varepsilon_{t-h+1}, \varepsilon_{t+k} + \dots + \phi_1^{h+k-1} \varepsilon_{t-h+1}) | F_{t-h}] \\
 &= \phi_1^k \text{var}(\varepsilon_t | F_{t-h}) + \phi_1^{k+2} \text{var}(\varepsilon_{t-1} | F_{t-h}) + \dots + \phi_1^{k+2(h-1)} \text{var}(\varepsilon_{t-h+1} | F_{t-h}) \\
 &= \phi_1^k \sum_{j=0}^{h-1} \phi_1^{2j} v(\varepsilon_{t-j} | F_{t-h}) \\
 &= \phi_1^k \sum_{j=0}^{h-1} \phi_1^{2j} \left(\alpha_0 \left(\frac{1-\alpha_1^{h-j}}{1-\alpha_1} \right) + \alpha_1^{h-j} \varepsilon_{t-h}^2 \right) \\
 &= \alpha_0 \frac{\phi_1^k}{1-\alpha_1} \sum_{j=0}^{h-1} \phi_1^{2j} - \alpha_0 \frac{\alpha_1^h \phi_1^k}{1-\alpha_1} \sum_{j=0}^{h-1} \phi_1^{2j} \alpha_1^{-j} + \alpha_1^h \phi_1^k \varepsilon_{t-h}^2 \sum_{j=0}^{h-1} \phi_1^{2j} \alpha_1^{-j} \\
 &= \alpha_0 \left(\frac{\phi_1^k}{1-\alpha_1} \right) \left(\frac{1-\phi_1^{2h}}{1-\phi_1^2} \right) - \alpha_0 \left(\frac{\alpha_1^h \phi_1^k}{1-\alpha_1} \right) \left(\frac{\alpha_1^h - \phi_1^{2h}}{\alpha_1 - \phi_1^2} \right) + \alpha_1^h \phi_1^k \left(\frac{\alpha_1^h - \phi_1^{2h}}{\alpha_1 - \phi_1^2} \right) \varepsilon_{t-h}^2
 \end{aligned}$$

Modèles ARCH généralisées : GARCH

Pour de nombreuses applications, l'introduction d'un grand nombre de retards p dans l'équation de la variance conditionnelle du modèle ARCH(p) est nécessaire pour tenir compte de la longue mémoire de la volatilité qui caractérise certaines séries monétaires et financières. Ce nombre important de paramètres peut poser des problèmes d'estimations. Dans cette perspective, une extension importante, le modèle autorégressif conditionnellement hétéroscédastique généralisé (GARCH), est suggérée par **Bollerslev** [1986]. Cette approche exige moins de paramètres à estimer que la formulation ARCH(p) pour modéliser les phénomènes de persistance des chocs, il présente les mêmes propriétés et les mêmes fondements que le processus ARCH. Disons que la seule différence se situe au niveau de la définition telle que la variance conditionnelle de la variable étudiée est déterminée par le carré des p termes d'erreur passés et des q variances conditionnelles retardées.

Définition 2.11.

Une variable X_t suit un processus GARCH(p, q) si :

$$X_t = \varepsilon_t h_t$$

avec

$$h_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}^2$$

où $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, avec les conditions $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, p$ et $\beta_j \geq 0, j = 1, \dots, q$ satisfaisantes pour garantir la positivité de h_t

Tout comme le processus ARCH(q), le modèle GARCH(p, q) présente aussi une moyenne conditionnelle et une moyenne non conditionnelle nulle. C'est à dire que :

$$E(X_t) = 0$$

$$E(X_t | F_{t-h}) = 0$$

Comme précédemment, le modèle GARCH(p, q) est également stationnaire au second ordre. Cela nécessite alors que l'inégalité suivante soit respectée :

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$$

et dans ce cas, la variance non conditionnelle est constante dans le temps et se définit par :

$$v(X_t) = \frac{\alpha_0}{1 - (\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j)}$$

Remarque

Dans le cas où $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j = 1$, on dira alors que le processus GARCH (p,q) est intégré, et on parlera de processus IGARCH (p,q). Cette dénomination peut se justifier par l'existence d'une racine unité dans la composante autorégressive.

Tandis que la variance conditionnelle se présente de la façon suivante :

$$E(X_t^2 | F_{t-h}) = h_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}^2$$

Enfin, on remarque tout comme pour le modèle ARCH(q), les auto-covariances conditionnelles du processus GARCH(p,q) sont nulles.

2.2) Extentions des modèles ARCH/GARCH

Les processus ARCH ont donné lieu à de nombreuses extensions dans la littérature statistique. Dans cette section, nous présentons quelques processus de type GARCH développés qui sont très utilisés dans le domaine de la finance.

2.2.1) Modèle GARCH-M

Engle-Lilien-Robbins (1987) ont proposés des modèles GARCH-M (General Autoregressive Conditional Heteroskedasticity in Mean) où la variance conditionnelle est une variable explicative de la moyenne conditionnelle. Ces processus semblent ainsi plus adaptés à une description de l'influence de la volatilité sur le rendement des titres ce qui paraît assez réaliste pour les cours boursiers.

Définition 2.12.

Un processus y_t satisfait une représentation du type GARCH-M(p,q) linéaire s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
y_t &= x_t b + \delta h_t + \varepsilon_t = x_t b + \delta v(\varepsilon_t | F_{t-1}) + \varepsilon_t \\
\varepsilon_t &= z_t \sqrt{h_t} \quad z_t \text{ iid}(0, 1) \\
\text{avec } E(\varepsilon_t | F_{t-1}) &= 0 \quad \text{et} \quad v(\varepsilon_t | F_{t-1}) = v(y_t | F_{t-1}) = h_t
\end{aligned}$$

2.2.2) *Modèle IGARCH*

Le modèle IGARCH (Integrated General Autoregressive Conditional heteroskedastic) correspond au cas d'une racine unitaire dans la variance conditionnelle. C'est un modèle qui caractérise par un effet de persistance dans la variance, c'est-à-dire qu'un choc sur la variance conditionnelle actuelle se répercute sur toutes les valeurs futures prévues.

Définition 2.13.

Un processus X_t satisfait une représentation IGARCH(p, q) si et seulement si :

$$v(X_t | F_{t-1}) = h_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}^2$$

avec

$$\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, p \text{ et } \beta_j \geq 0, j = 1, \dots, q$$

et

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j = 1$$

2.3) *Modèle ARCH/GARCH asymétriques*

La symétrie des modèles GARCH est en contradiction avec plusieurs études sur les séries temporelles de cours boursiers qui mettent en évidence une corrélation négative entre le carré des innovations de la date présente et les innovations passées. Pour pallier ce problème, diverses paramétrisations de la variance conditionnelle ont été proposées. L'une des formulations la plus naturelle est d'introduire l'asymétrie en spécifiant la variance conditionnelle en fonction des composantes positives et négatives des innovations passées.

2.3.1) *Modèle EGARCH*

Il s'agit d'un modèle log-linéaire présenté par **Nelson** (1991) lors d'une étude sur les rentabilités des actifs financiers. La spécification porte sur le logarithme de la variance conditionnelle et permet ainsi d'éviter les contraintes de positivités sur les coefficients α_i et β_j .

Définition 2.14.

Un processus X_t satisfait une représentation $EGARCH(p,q)$ si et seulement si :

$$X_t = \varepsilon_t \sqrt{h_t}$$

$$\log(h_t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i g(\varepsilon_{t-i}) + \sum_{j=1}^q \beta_j \log(h_{t-j})$$

où le résidu normalisé z_t est un bruit blanc faible et la fonction $g(\cdot)$ vérifie :

$$g(\varepsilon_{t-i}) = \theta \varepsilon_{t-i} + \gamma (|\varepsilon_{t-i}| - E|\varepsilon_{t-i}|)$$

Si l'on pose $a_i = \theta \alpha_i$ et $b_i = \gamma \alpha_i$ la variance conditionnelle de X_t peut se réécrire sous la forme :

$$\log(h_t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p a_i \varepsilon_{t-i} + \sum_{i=1}^p b_i (|\varepsilon_{t-i}| - E|\varepsilon_{t-i}|) + \sum_{j=1}^q \beta_j \log(h_{t-j})$$

2.3.2) *Modèles GARCH à seuil : TGARCH*

Dans cette formulation GARCH à seuil, introduite par Zakoian (1990), la forme quadratique de la variance conditionnelle remplacé par une fonction linéaire par morceaux.

Définition 2.15.

Un processus $TGARCH(p,q)$ s'écrit :

$$\begin{cases} X_t &= \varepsilon_t h_t \\ h_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^p (\alpha_i^+ X_{t-i}^+ - \alpha_i^- X_{t-i}^-) + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}^2 \\ &= \alpha_0 + \boldsymbol{\alpha}^+(L) X_t^+ - \boldsymbol{\alpha}^-(L) X_t^- + \boldsymbol{\beta}(L) h_t^2 \end{cases}$$

où :

$$\begin{cases} X_t^+ &= \max(X_t, 0) \\ X_t^- &= \min(X_t, 0) \end{cases}$$

Dans la mesure où la spécification ne porte pas sur un carré mais sur l'écart type conditionnel, il est possible de supprimer les contraintes de positivité des coefficients. La suppression de ses contraintes permet de prendre en compte les phénomènes d'asymétrie précédemment décrits concernant la volatilité.

2.4) Processus ARCH/GARCH et mémoire longue

2.4.1) Processus FIGARCH

Lorsque la décroissance exponentielle est trop rapide pour se conformer à celle observée sur la fonction d'autocorrélation, les modèles précédents ne sont pas adaptés. Avec le processus FIGARCH, Baillie, Bollerslev et Mikkelsen (1996) présentent une modélisation qui autorise une décroissance seulement hyperbolique des autocorrélations, et donc a priori intéressante lorsque l'on observe des corrélations non nulles pour des ordres élevés.

Rappelons qu'un processus GARCH(p,q) peut s'écrire :

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}^2$$

où σ_t^2 est la variance conditionnelle avec les conditions $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, p$ et $\beta_j \geq 0, j = 1, \dots, q$

Un processus GARCH(p,q) peut en outre s'interpréter comme un processus ARMA(m,p) avec $m = \max(p, q)$, sur le carré des innovations. Ainsi en posant :

$$u_t = X_t^2 - \sigma_t^2$$

on déduit de l'équation précédente, la formulation suivante :

$$[1 - \alpha(L) - \beta(L)]X_t^2 = \alpha_0 + [1 - \beta(L)]u_t$$

Par conséquent, lorsque le polynôme retard $[1 - \alpha(L) - \beta(L)]$ contient une racine unitaire, le processus GARCH devient un processus GARCH intégré, noté IGARCH(p,q) :

$$\pi(L)(1 - L)X_t^2 = \alpha_0 + [1 - \beta(L)]u_t$$

où $\pi(L) = [1 - \alpha(L) - \beta(L)](1 - L)^{-1}$

Les processus FIGARCH constituent un cas intermédiaire entre les processus GARCH et les processus IGARCH et se déduisant de la relation précédente en remplaçant l'opérateur $(1 - L)$ par $(1 - L)^d$ où d paramètre d'intégration fractionnaire. Ainsi, un processus FIGARCH(p,d,q) s'écrit :

$$\pi(L)(1 - L)^d X_t^2 = \alpha_0 + [1 - \beta(L)]u_t$$

les racines des polynomes $[1 - \beta(L)]$ et $\pi(L)$ étant à l'extérieur du disque unité.

2.5) Estimation de processus ARCH

Les modèles avec erreurs hétéroscédastiques peuvent être estimés généralement de trois façons :

- Estimateurs de la classe du Maximum de Vraisemblance (MV).
- Estimateurs du Pseudo Maximum de Vraisemblance (PMV).
- Estimateurs en deux étapes.

Nous présenterons ici seulement la méthode du maximum de vraisemblance.

Considérons un modèle GARCH(p,q) définit comme suit :

$$\begin{cases} Y_t = f(X_t; b) + \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 = h_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}^2 \end{cases}$$

On pose :

$$\begin{cases} Z'_t = (1, \varepsilon_{t-1}^2, \dots, \varepsilon_{t-p}^2, h_{t-1}^2, \dots, h_{t-q}^2) \\ \omega' = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q) \end{cases}$$

Soit $\theta \in \Theta$ où $\theta = (b', \omega')$ et Θ est un sous ensemble compact d'un espace euclidien tel que ε_t a des moments d'ordre deux finis.

Désignons par θ_0 la vrai valeur des paramètres.

On peut récrire l'équation de la variance conditionnelle comme suit :

$$h_t^2 = Z'_t \omega$$

La log vraisemblance, pour un échantillon de T observations, s'écrit :

$$L_T(\theta) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T l_t(\theta)$$

où

$$l_t(\theta) = -\frac{1}{2} \log h_t - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_t^2}{h_t}$$

La maximisation de la log vraisemblance par rapport aux paramètres α, β et b nous permet décrire les conditions du premier ordre :

$$\begin{cases} \frac{\partial l_t}{\partial \omega} = \frac{1}{2h_t} \frac{\partial h_t}{\partial \omega} \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1 \right) \\ \frac{\partial l_t}{\partial b} = \frac{\varepsilon_t X_t}{h_t} + \frac{1}{2} h_t \frac{\partial h_t}{\partial b} \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1 \right) \end{cases}$$

et le hessien donné par :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 l_t}{\partial \omega \partial \omega'} = \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial \omega'} \left[\frac{1}{2h_t} \frac{\partial h_t}{\partial \omega} \right] - \frac{1}{2h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \omega} \frac{\partial h_t}{\partial \omega'} \frac{\varepsilon_t^2}{h_t} \\ \frac{\partial^2 l_t}{\partial b \partial b'} = -\frac{X_t X_t'}{h_t} - \frac{1}{2h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial b} \frac{\partial h_t}{\partial b'} \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} \right) - \frac{2\varepsilon_t X_t}{h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial b} + \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial b'} \left[\frac{1}{2h_t} \frac{\partial h_t}{\partial b} \right] \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} \frac{\partial h_t}{\partial \omega} = Z_t + \sum_{j=1}^q \beta_j \frac{\partial h_{t-j}}{\partial \omega} \\ \frac{\partial h_t}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i} \varepsilon_{t-i} + \sum_{j=1}^q \beta_j \frac{\partial h_{t-j}}{\partial b} \end{cases}$$

La matrice d'information de Fisher relative à b , notée I , s'obtient en prenant l'espérance conditionnelle du hessien. Les deux derniers termes sont nuls car h_t est entièrement une fonction du passé et en remplaçant le terme $\frac{\varepsilon_t^2}{h_t}$ par sa valeur espérée de 1, on obtient la matrice d'information :

$$I = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T E \left[\frac{X_t X_t'}{h_t} + \frac{1}{2h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial b} \frac{\partial h_t}{\partial b'} \right]$$

avec, pour un modèle GARCH(p,q) :

$$\begin{cases} \frac{\partial h_t}{\partial \omega} = Z_t + \sum_{j=1}^q \beta_j \frac{\partial h_{t-j}}{\partial \omega} \\ \frac{\partial h_t}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i} \varepsilon_{t-i} + \sum_{j=1}^q \beta_j \frac{\partial h_{t-j}}{\partial b} \end{cases}$$

Soit $\theta^{(i)}$ le vecteur des paramètres estimés après la $i^{\text{ième}}$ itération. $\theta^{(i+1)}$ est donné par :

$$\theta^{(i+1)} = \theta^{(i)} + \lambda_i \left(\sum_{t=1}^T \frac{\partial l_t}{\partial \theta} \frac{\partial l_t}{\partial \theta'} \right)^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{\partial l_t}{\partial \theta}$$

où $\frac{\partial l_t}{\partial \theta}$ est évalué en $\theta^{(i)}$, λ_i est un multiplicateur.

Weiss(1982) a montré que l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_T$ est un estimateur fortement convergent de θ_0 et asymptotiquement normal de moyenne θ_0 et de matrice de variance-covariance dépendant de la loi conditionnelle de ε_t .

2.6) Rappel sur le test ARCH

Rappelons que le test ARCH a été introduit par Engle (1982). On considère la série Y_t générée par le processus suivant :

$$\begin{cases} \phi(L)Y_t = \theta(L)\varepsilon_t \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \end{cases}$$

L'hypothèse nulle testée est celle d'homoscédasticité : $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$ contre l'hypothèse alternative d'hétéroscédasticité conditionnelle : au moins un coefficient α_i ($i=1, \dots, p$) est différent de 0. Si l'hypothèse nulle est acceptée, la variance conditionnelle est constante. En revanche, si l'hypothèse nulle est rejetée, les résidus suivent un processus ARCH(p).

La mise en oeuvre du test est simple et peut s'effectuer en trois étapes.

- *Etape 1* : On estime l'équation de la moyenne, on récupère les résidus estimés $\hat{\varepsilon}_t$ et l'on calcule la série des $\hat{\varepsilon}_t^2$.
- *Etape 2* : On régresse $\hat{\varepsilon}_t^2$ sur une constante et sur des p valeurs passés (seuls les retards significatifs sont conservés).
- *Etape 3* : On calcule la statistique TR^2 où T est le nombre d'observations et R^2 est le coefficient de détermination associée à la régression de l'étape 2.

Sous l'hypothèse nulle d'homoscédasticité, la statistique TR^2 suit une loi de Khi-deux à p degré de liberté. La règle de décision est :

- ✦ Si $TR^2 < \chi_{(p)}^2$, l'hypothèse nulle est acceptée : il n'existe pas d'effet ARCH.
- ✦ Si $TR^2 \geq \chi_{(p)}^2$, on rejette l'hypothèse nulle est en faveur de l'hypothèse alternative d'hétéroscédasticité conditionnelle.

3

Simulations et Applications

Introduction

Après avoir étudié dans les chapitres précédents, les concepts de base des séries temporelles et leurs représentations. En particulier les caractéristiques des processus ARCH et leur estimation. Dans ce chapitre, nous faisons des simulations des modèles GARCH et une application simple d'une série financière par la méthodologie de Box et Jenkins afin de choisir le modèle approprié pour les données.

3.1) Simulations

3.1.1) *Quelques simulations de processus GARCH(p,q)*

La simulation des modèles ARCH/GARCH se fait à l'aide de `garchSim(.)` de package `fGarch`.

Quelques simulations du processus GARCH(1,1)

Le modèle à simuler est défini par `garchSpec(.)`, il doit être donné sous forme de liste, les noms des composantes de la liste indiquant le type de modèle. Dans ce contexte, nous étudierons

4 séries qui simulent un modèle GARCH(1,1) selon les données mentionnées dans le tableau suivant où nous avons adopté un cas $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$.

Séries	α_0	α_1	β	n
A	0.5	0.15	0.8	200
B	0.5	0.35	0.6	200
C	0.5	0.8	0.15	200
D	0.5	0.04	0.91	200

TABLE 3.1 – Séries GARCH à simuler

Dans la suite, nous affichons les figures qui illustrent les séries précédentes :

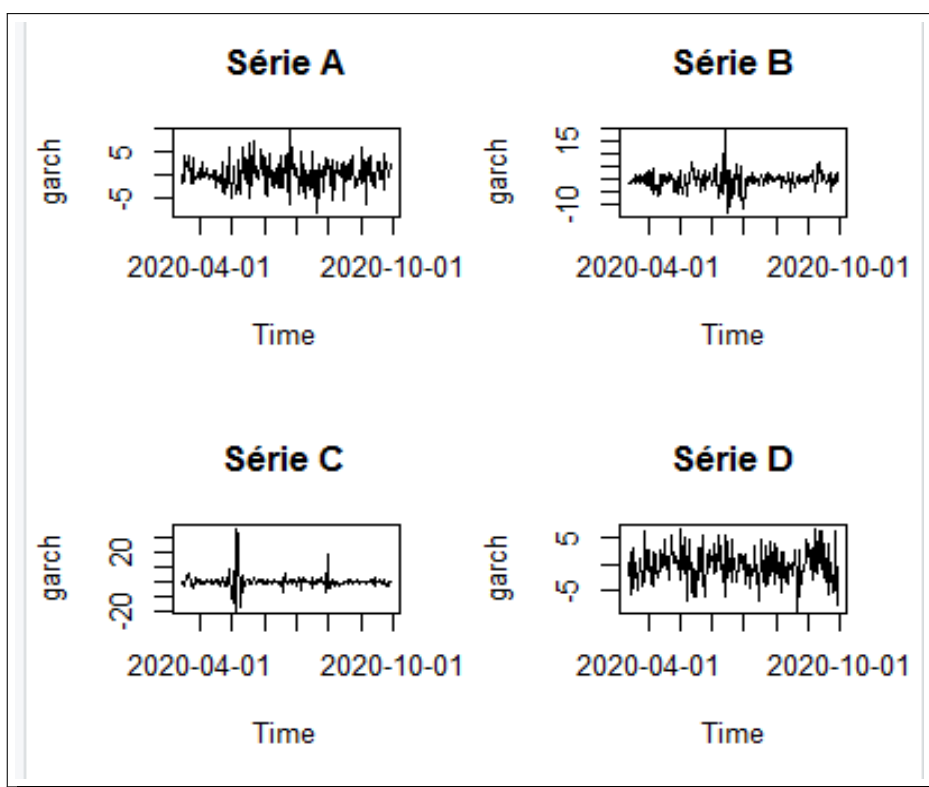
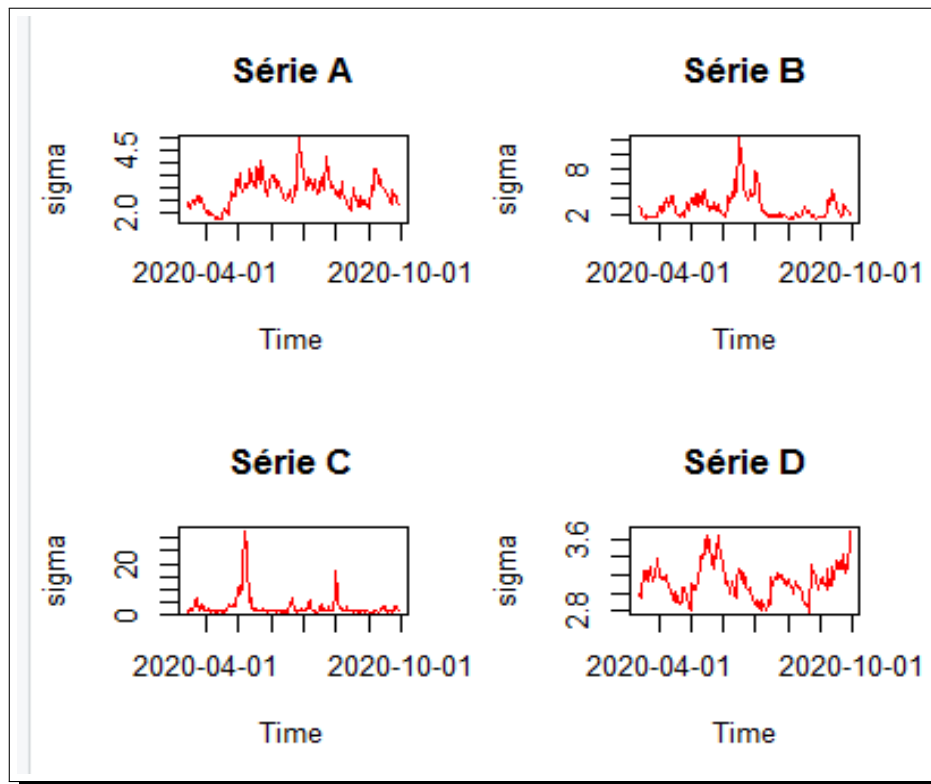
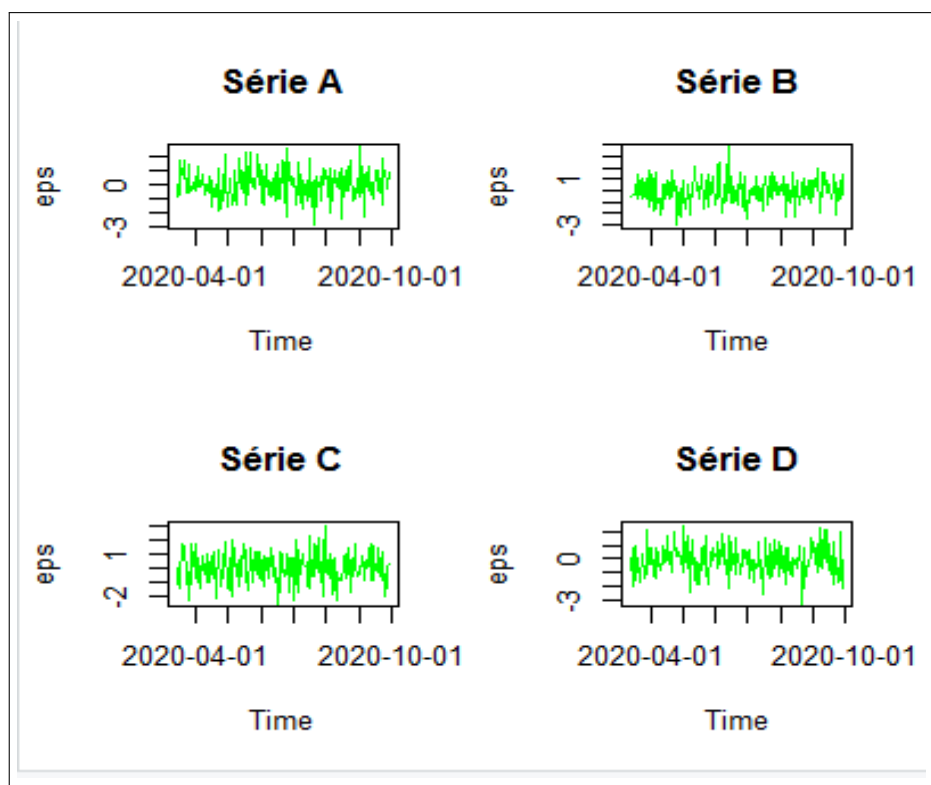


FIGURE 3.1 – Graphiques des séries GARCH simulées

FIGURE 3.2 – Variance conditionnelle h_t des séries GARCH simuléesFIGURE 3.3 – Processus bruit blanc ε_t des séries simulées

après les graphiques, on remarque que certaines séries ont des grandes variations à savoir la série A et D à l'inverse de B et C qui sont caractérisées par des faibles fluctuations, ce résultat peut être interprété par la valeur de paramètre β qui est plus grand dans A et D, petit pour B et trop petit pour C.

3.1.2) Simulation d'un processus avec erreur ARCH

simuler 300 observations dont le processus est défini par :

$$\begin{aligned} X_t &= 6 + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= z_t \sqrt{h_t} \quad z_t \sim bb(0, 1) \\ h_t &= 0.2 + 0.8\varepsilon_{t-1}^2 \end{aligned}$$

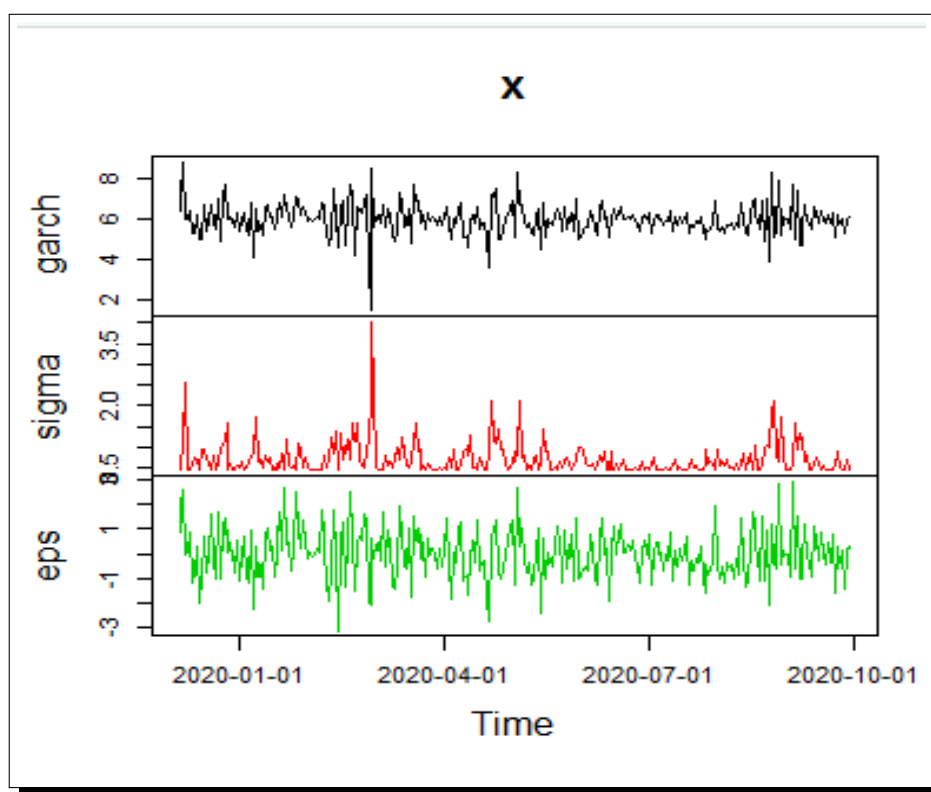


FIGURE 3.4 – Série simulée par un modèle avec erreur ARCH(1)

3.2) Applications

Notation : On note la série des prix mensuels de pétrole par (ST).

3.2.1) *Analyse préliminaire de la série ST*

La série (ST) contient 528 observations (01/1974; 12/2017, données mensuelles)

✦ Représentation graphique de la série (ST) :

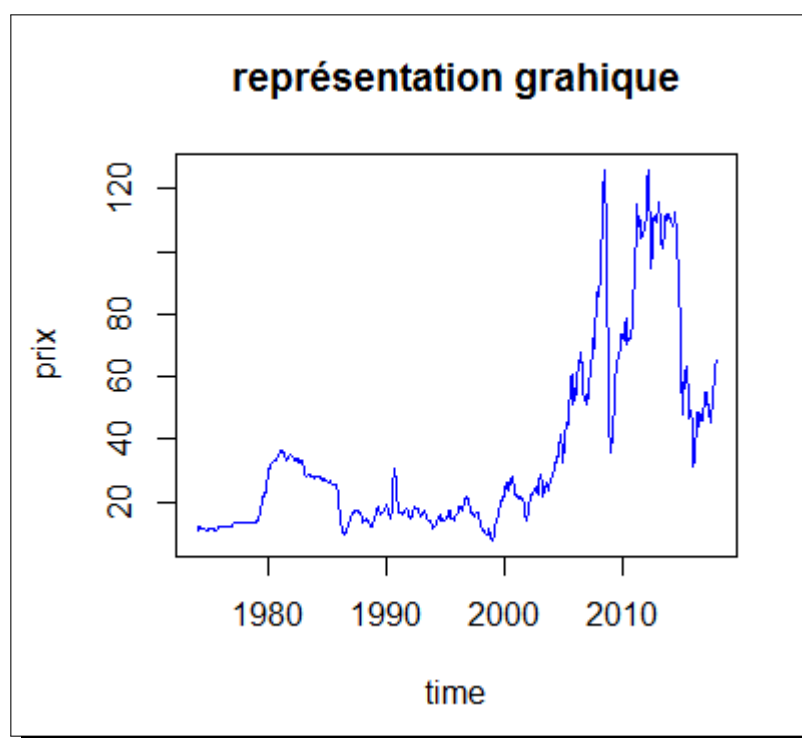


FIGURE 3.5 – L'évolution de la série (ST) entre (1974-2017)

Nous remarquons du graphe un non stationnarité, caractérisée par un accroissement de la variabilité par rapport au temps et aussi un risque d'avoir une légère tendance à la hausse ainsi qu'une possible saisonnalité. Tout cela va être vérifié par le test ADF.

✦ Examen du Corrélogramme de la série (ST) :

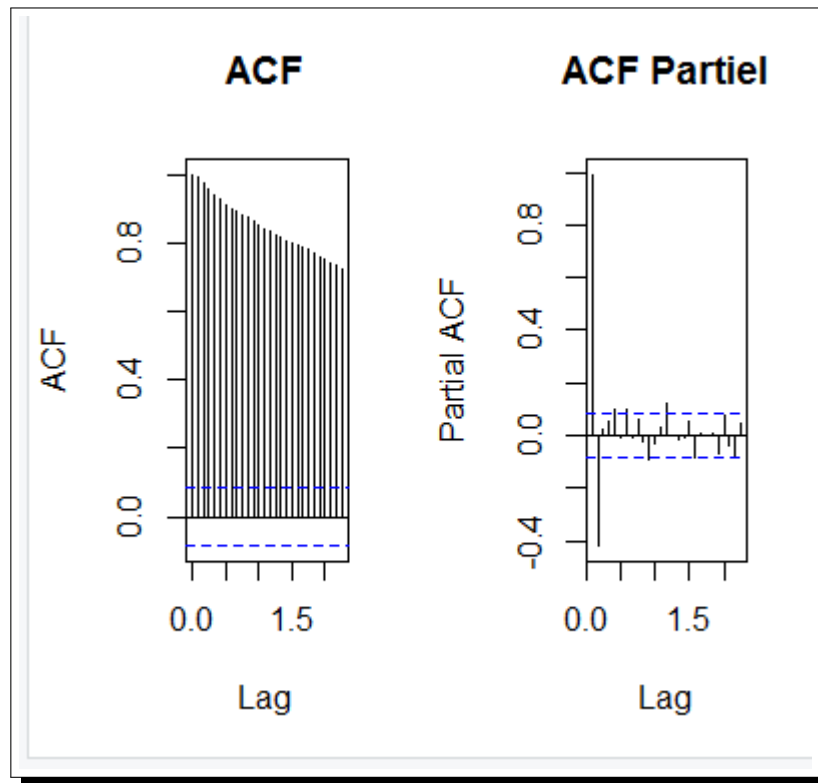


FIGURE 3.6 – Le corrélogramme de la série (ST)

L'analyse du corrélogramme simple et corrélogramme partiel de la série ST nous indique préalablement que la série est non stationnaire, puisque la fonction d'autocorrélation ne décroît pas de manière rapide.

✦ **Traitement de la stationnarité :**

* **Test de la racine unitaire (Dickey-Fuller)**

On va appliquer le test de Dickey-Fuller sur la série ST ;

A l'aide de logiciel R, on estime par la méthode MV les paramètres des modèles [1], [2] et [3].

```

Augmented Dickey-Fuller Test
alternative: stationary

Type 1: no drift no trend
lag    ADF p.value
[1,]   0 -0.285  0.562
[2,]   1 -1.182  0.256
[3,]   2 -1.021  0.314
[4,]   3 -0.891  0.360
[5,]   4 -0.758  0.408
[6,]   5 -0.802  0.392
Type 2: with drift no trend
lag    ADF p.value
[1,]   0 -1.28   0.602
[2,]   1 -2.33   0.197
[3,]   2 -2.13   0.277
[4,]   3 -1.96   0.343
[5,]   4 -1.79   0.410
[6,]   5 -1.85   0.387
Type 3: with drift and trend
lag    ADF p.value
[1,]   0 -1.84   0.6431
[2,]   1 -3.31   0.0692
[3,]   2 -3.02   0.1474
[4,]   3 -2.79   0.2426
[5,]   4 -2.55   0.3448
[6,]   5 -2.65   0.3038
----
Note: in fact, p.value = 0.01 means p.value <= 0.01

```

FIGURE 3.7 – Estimation du modèle (01,02 et 03) de "ST"

* Test de racine unitaire :

$H_0 : \phi = 0$ vs $H_1 : \phi \neq 0$

On rejette H_0 si $|DF_{cal}| > |DF_{tab}|$ ou bien p-value $< 5\%$

Dans les trois modèles on a :

p-value $> 5\%$, on accepte en conséquence l'hypothèse nulle de racine unitaire, c'est-à-dire notre série ST est intégrée d'ordre 1.

D'après les résultats obtenus par le test de (Dickey-Fuller), on conclut que la série (ST) est non stationnaire de type DS.

3.2.2) Différenciation de la série ST

Dans ce cas, on va procéder de la manière suivante :

$$DST = ST_t - ST_{t-1}$$

*Analyse du graphe et le corrélogramme de la série DST :

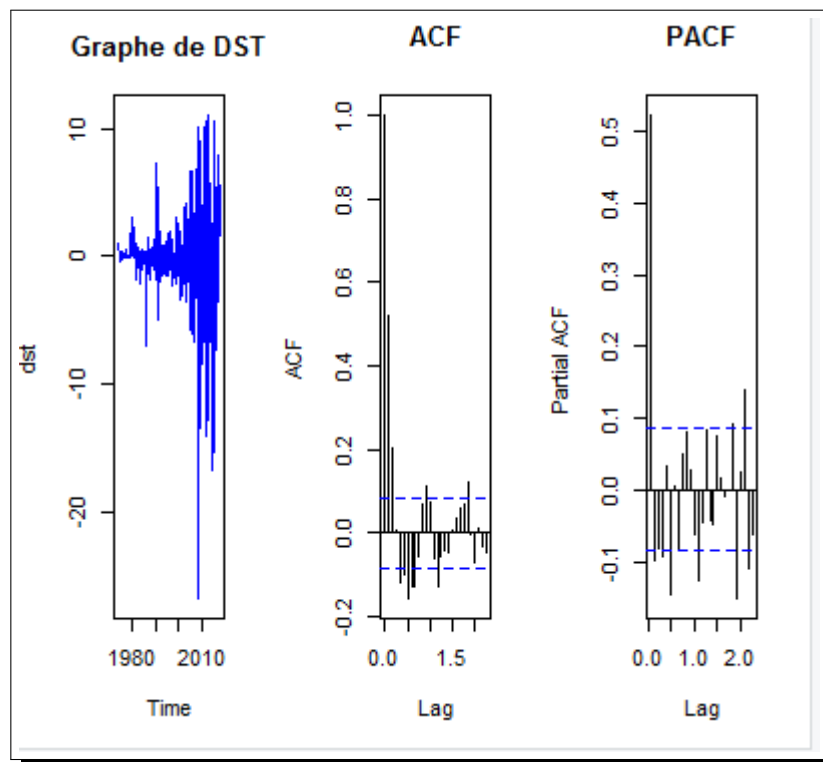


FIGURE 3.8 – La représentation graphique et le corrélogramme de la série DST

La série semble stationnaire car les observations varient autour de leur moyenne.

On remarque à partir du corrélogramme que la série DST est stationnaire (On voit que la fonction d'autocorrélation converge rapidement vers 0). On peut confirmer ce résultat par l'application du test de Dickey-Fuller sur la série DST.

* **Estimation des modèles ADF :**

```

Augmented Dickey-Fuller Test
alternative: stationary

Type 1: no drift no trend
lag      ADF  p.value
[1,]    0 -12.82  0.01
[2,]    1 -12.30  0.01
[3,]    2 -11.74  0.01
[4,]    3 -11.43  0.01
[5,]    4  -9.86  0.01
[6,]    5 -10.46  0.01
Type 2: with drift no trend
lag      ADF  p.value
[1,]    0 -12.82  0.01
[2,]    1 -12.29  0.01
[3,]    2 -11.74  0.01
[4,]    3 -11.43  0.01
[5,]    4  -9.86  0.01
[6,]    5 -10.46  0.01
Type 3: with drift and trend
lag      ADF  p.value
[1,]    0 -12.81  0.01
[2,]    1 -12.28  0.01
[3,]    2 -11.73  0.01
[4,]    3 -11.42  0.01
[5,]    4  -9.85  0.01
[6,]    5 -10.45  0.01
-----
Note: in fact, p.value = 0.01 means p.value <= 0.01

```

FIGURE 3.9 – Estimation du modèle de "DST"

Test de racine unitaire :

$$H_0 : \phi = 0 \text{ vs } H_1 : \phi \neq 0$$

On rejette H_0 si $|DF_{cal}| > |DF_{tab}|$ ou bien $p\text{-value} < 5\%$

On a : $p\text{-value} < 5\%$, on rejette en conséquence l'hypothèse nulle de racine unitaire, c'est-à-dire notre série DST est intégrée d'ordre 0.

3.2.3) *La méthodologie de Box-Jenkins*

Maintenant on va suivre la méthodologie de **Box** et **Jenkins**.

✦ L'identification du modèle :

Cette étape est effectuée par le biais de l'étude des fonctions d'autocorrélation et autocorrélation partielle de la série DST. Retournons sur le corrélogramme simple et partiel de la série DST, on remarque que les deux ACF et PACF contiennent des pics significatives, cela nous a permis de proposer plusieurs modèles.

La fonction `auto.arima` de package "forecast" propose comme meilleur modèle le modèle ARMA(2,1).

✦ **L'estimation et les tests de validation de modèle ARMA(2.1) :**

Après avoir identifié l'ordre du processus ARMA, il convient d'estimer les paramètres du modèle, puis de vérifier à partir d'un certain nombre de tests statistiques que l'estimation du modèle est valide.

a. Estimation de modèle ARMA(2.1) :

```

Coefficient(s):
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
ar1    1.34033    0.09775   13.712 < 2e-16 ***
ar2   -0.50355    0.04966  -10.139 < 2e-16 ***
ma1   -0.78434    0.10385   -7.553 4.26e-14 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```

FIGURE 3.10 – Estimation du modèle ARMA(2,1)

b. Validation du modèle

b.1. Le test de student des paramètres :

Selon les résultats de l'estimation présentés ci-dessus, les coefficients sont significativement différents de zéro. Les modèles où les p-values sont supérieurs à 5% seront écartés.

Remarque

Si un des paramètres ne soit pas significativement différent de 0 alors le modèle sera rejeté.

► Au regard des résultats d'estimation, on constate que le modèle ARMA(2,1) est un bon modèle dans la mesure où le coefficient est significativement différent de zéro.

b.2. Les tests sur les résidus :

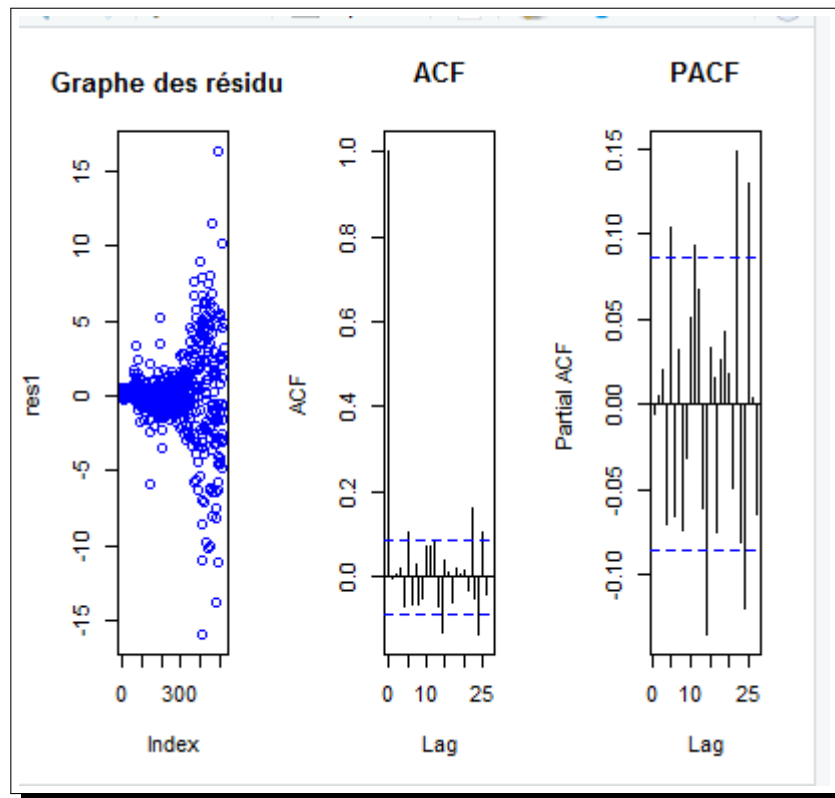


FIGURE 3.11 – Le graphe et le corrélogramme des résidus

* Test de Ljung-Box :

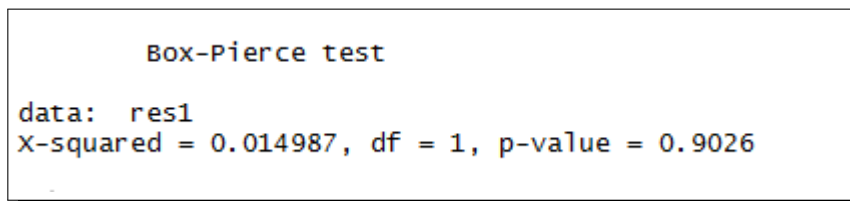


FIGURE 3.12 – Les résultats du test de Ljung-Box

On a :

$p\text{-Value} = 0.90 > 0.05$: Donc on accepte l'hypothèse nulle, Absence d'autocorrélation du résidu, ce qui implique qu'il peut être assimilé à un bruit blanc. Alors le modèle est valide.

* Test de normalité :

Histogramme du résidus :

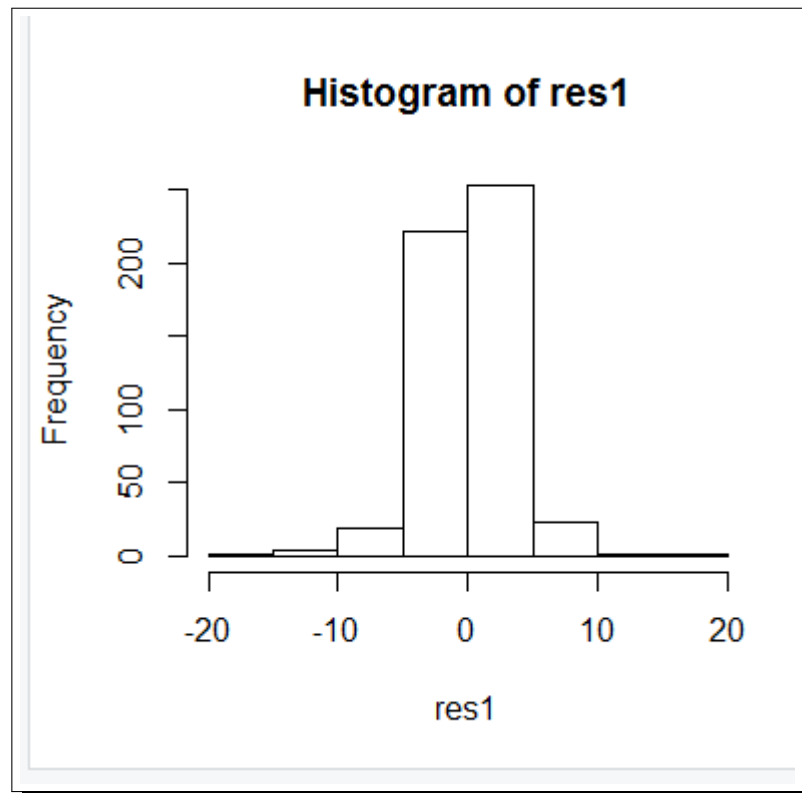


FIGURE 3.13 – L’histogramme des résidus du modèle estimé

Nous testons les hypothèses suivantes :

$H_0 : v_1 = 0$ (symétrie) et $v_2 = 0$ (aplatissement normal)

* **Test de Skewness** :

On a : $v_1 = -0.35$, Donc on rejette l’hypothèse de la symétrie des résidus

* **Test de Kurtosis** :

On a : $v_2 = 6.45$, Donc on rejette l’hypothèse de l’aplatissement normal

* **Test de JB** :

```

Jarque Bera Test
data:  res1
x-squared = 928.87, df = 2, p-value < 2.2e-16

```

FIGURE 3.14 – Résultat du test de Jarque-Bera

On a $p\text{-value} < 5\%$, Donc on rejette l’hypothèse de normalité des résidus. Donc la distribution des erreurs est un bruit blanc non gaussien.

* Application de la modélisation Autorégressifs Conditionnellement Hétéroscédastiques :

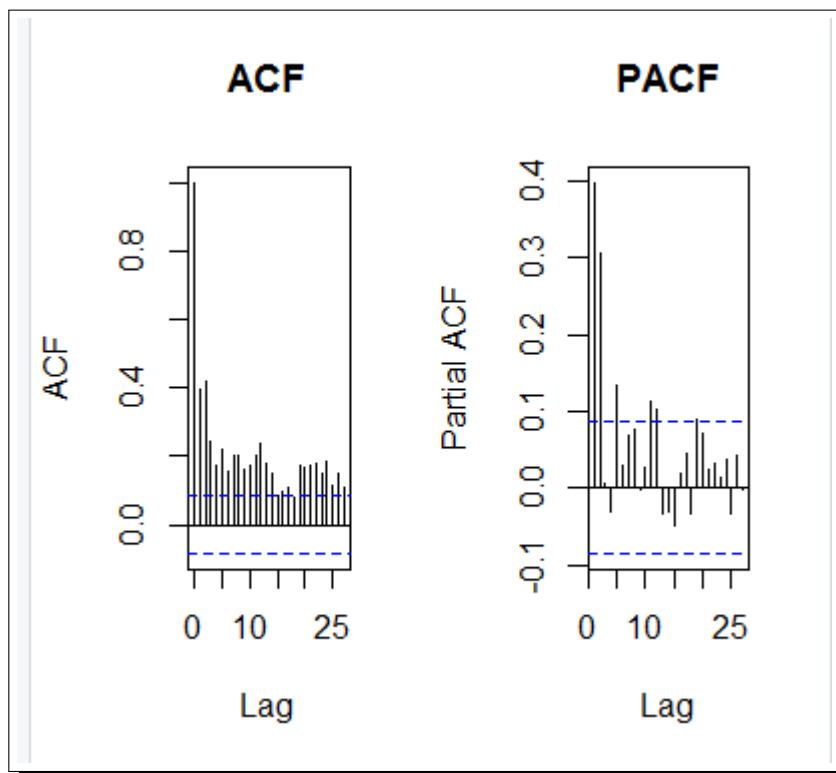


FIGURE 3.15 – Le corrélogramme des résidus carrés $\hat{\varepsilon}^2$

Plusieurs termes de l'autocorrélation partielle sont significativement différents de zéro, on retient un nombre de retards p pour réaliser un test ARCH. On corrobore ce test par celui du multiplicateur de Lagrange.

* **Test ARCH** :

Nous appliquons le test ARCH mentionné au chapitre précédent. Les résultats sont présentés ci après :

Lagrange-Multiplicateur test:			
	order	LM	p.value
[1,]	4	234.1	0.00e+00
[2,]	8	106.0	0.00e+00
[3,]	12	65.4	9.16e-10
[4,]	16	46.0	5.28e-05
[5,]	20	34.9	1.45e-02
[6,]	24	27.9	2.18e-01

FIGURE 3.16 – Résultat du test ARCH

Alors, on accepte l'hypothèse alternative d'hétéroscédasticité conditionnelle en faveur de l'hypothèse d'homoscédasticité.

3.2.4) Estimation des modèles GARCH sur les résidus du modèles ARMA

```

Error Analysis:
      Estimate  Std. Error  t value  Pr(>|t|)
omega    0.009428   0.006671   1.413    0.158
alpha1   0.412752   0.059442   6.944   3.82e-12 ***
beta1    0.713303   0.029843  23.902  < 2e-16 ***
---

```

FIGURE 3.17 – Estimation du modèle GARCH(1,1)

```

Error Analysis:
      Estimate  Std. Error  t value  Pr(>|t|)
omega    2.1989    0.2268    9.696   < 2e-16 ***
alpha1   1.0000    0.1393    7.180   6.96e-13 ***
---

```

FIGURE 3.18 – Estimation du modèle ARCH(1)

3.2.5) Validation du modèle

a. les critères du choix de modèle

	GARCH(1,1)	ARCH(1)
AIC	3.729594	4.461028
BIC	3.753992	4.477222
SIC	3.729529	4.460999
HQIC	3.739148	4.467368

TABLE 3.2 – La table des critères

d'après ces critères, le modèle GARCH(1,1) est plus adéquat.

b. Validation graphique :

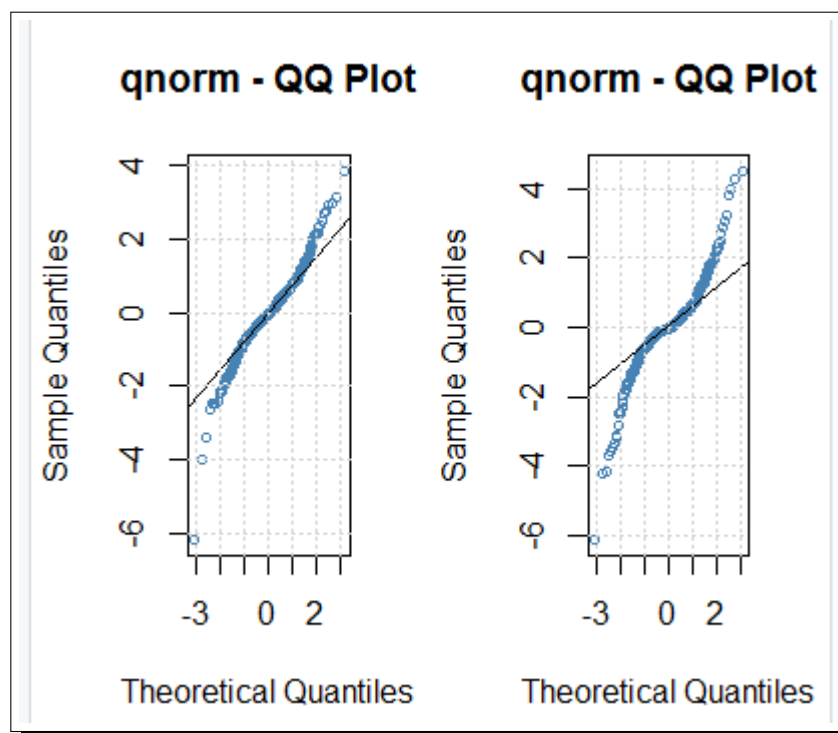


FIGURE 3.19 – QQ plot du modèle GARCH(1,1) et ARCH(1)

On remarque que les points représentés sur le graphe QQ plot du modèle GARCH(1,1) sont bien alignés, ils forment un nuage de point linéaire. Cependant pour le graphe QQ plot du modèle ARCH(1), les points ne sont pas bien alignés.

La figure (3.19) nous montre que notre série des résidus est bien ajustées par un processus GARCH(1,1).

Alors, l'application de la méthodologie de Box-Jenkins nous a conduit à retenir un processus ARMA(2,1) avec erreur GARCH(1,1).

Conclusion

C E travail est juste une petite introduction des modèles ARCH/GARCH et comment les modéliser en utilisant les commandes du Logiciel R. On a donné quelques outils de base de la théorie des séries temporelles pour présenter ses phénomènes ainsi les modèles ARCH permettent de prendre en compte des faits stylisés inhérents à la volatilité.

Dans la partie pratique : après avoir différencier notre série, nous avons suit la méthodologie de Box et Jenkins : estimation et validation des modèles condidats, la commande `auto.arima` basé sur des critères (AIC, SC,...) nous a aidé de déterminer le ARMA(2,1) comme meilleur modèle.

Par ailleurs, la modélisation ARMA se révèle insuffisante pour notre série à cause de non normalité des résidus, cette série risque d'être caractériser par une dynamique non linéaire et une volatilité variable au cours du temps. Ce conditionnement nous a amené à entamer une modélisation non linéaire (les modèles Autorégressif Conditionnellement Hétéroscidastique) qui nous a donné un modèle ARMA (2,1) avec erreur GARCH(1,1).

Bibliographie

- [1] **Arthur Charpentier** : *Cours de séries temporelles théorie et applications*, volume1, Paris Dauphine.
- [2] **Arthur Charpentier** : *Cours de séries temporelles théorie et applications*, volume2, Paris Dauphine.
- [3] **Beliad Sabrina** : *Modélisation des données de l'irradiation solaire cas du site ghardaia*, mémoire de Magister, département d'Electronique, Université Abderrahmane Mira de Bejaia, 2010.
- [4] **Ben bouabdellah lydia**, *Estimation en ligne des modèles ARCH*, mémoire de Master, département de Mathématiques, Université Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou, 2014.
- [5] **Bollerslev, T.** *Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*, J. Econometrics 31, 307-327, 1986.
- [6] **Bousseba Fatma Zohra** : *Utilisation des modèles Arch-Garch pour modéliser le marché de l'énergie :Prix de pétrole et de gaz*, mémoire de Doctorat, département de Mathématiques, Université Badji Mokhtar Annaba, 2017.
- [7] **Brockwell P.J et David R.A**, *Introduction to time series and forecasting*.Springer, 2002.
- [8] **Christophe Hurlin** : *Econométrie pour la finance*, Rue de Blois-BP 6739, Orléans, 2006-2007.
- [9] **Engle, R.F.** *Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation*, Econometrica 50, 987-1007, 1982.
- [10] **François-Éric Racicot et Raymond Théoret** : *Traité d'économétrie financière*, Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bur.450, Québec, 2001.
- [11] **Hisseine Saad Mahamat** : *Estimaton de la volatilité des données financières à haute fréquence par le modèle Score-GARCH*, mémoire de Doctorat, Ecole Doctorale Economie-Gestion, Université Montpellier, 2017.

-
- [12] **Kamilia Berhoun** : *Processus ARCH-GARCH Applications*, mémoire de Master, département de Mathématiques, Université Abou Beker Belkaid - Tlemcen, 2013.
- [13] **Michel Terraza** et **Ali Zatout** : *Modélisation de l'hétéroscédasticité conditionnelle du prix spot du marché pétrolier de l'O.C.D.E.*, Journal de la société statistique de Paris, tome 134, n° 3, p. 21-39, 1993.
- [14] **Sandrine Lardic** et **Valérie Mignon** : *Econométrie des séries temporelles macroéconomique et financières*, ed.economica, 49, rue Héricat, 75015 Paris, 2002.
- [15] **Yahia Djabrane** : *Séries temporelles et tests d'adequation pour un modèle GARCH(1,1)*, mémoire de Magister, Département de Mathématiques, Université Mohamed Khider - Biskra, 2005.

Le programme sous R :

1. Simulation des modèles ARCH/GARCH

```
library(fGarch);  
# pour lancer le package fGarch #  
spec1=garchSpec(model=list(omega=0.5, alpha=0.15, beta=0.8), cond.dist="norm");  
# La spécification du modèle GARCH #  
archsim1=garchSim(extended=TRUE, spec1, n=200);  
# La simulation du modèle GARCH pour n=200 #  
plot(archsim1);  
# tracer le graphe du archsim1 #
```

• pour un modèle avec erreur ARCH :

```
library(fGarch);  
spec2=garchSpec(model=list(mu=6, omega=0.2, alpha=0.8, beta=0), rseed=397);  
archsim2=garchSim(extended=TRUE, spec2, n = 300);  
plot(archsim2);
```

2. Etude empirique des modèles ARCH/GARCH

```
library(aTSA);  
library(tseries);  
library(e1071);  
library(fGarch);  
data=read.table(file=file.choose(), dec=".", sep=";", header=TRUE);  
# référer la table des données d'après l'excel #  
y=data[, 2];  
ST=ts(y, start=c(1974,1), end=c(2017,12), frequency=12);  
# transformer la à une série temporelle #
```

```
plot(ST, main="représentation graphique", col="blue", xlab="time", ylab="prix");
# tracer le graphe de la série ST #
acf(ST, main="ACF");
# tracer les autocorrélations de la série ST #
pacf(ST, main="ACF Partiel");
# tracer les autocorrélations partielle de la série ST #
adf.test(ST);
# On doit vérifier la stationnarité d'après l'application du test de Dickey-Fuller (ADF) #
DST=diff(ST);
# L'application de la méthode de différenciation sur la série non stationnaire ST #
plot(DST, main="Graphe de DST", col="blue");
# tracer le graphe de la série DST #
acf(DST, main="ACF");
# tracer les autocorrélations de la série DST #
pacf(DST, main="PACF");
# tracer les autocorrélations partielle de la série DST #
adf.test(DST);
# On doit appliquer ADF pour confirmer la stationnarité de DST #
mod=estimate(DST, p=2, d=0, q=1, intercept=FALSE);
# Estimation du modèle obtenu #
summary(mod);
# L'affichage des caractéristiques statistiques du "mod" #
RES=mod$residuals;
# La série des résidus #
plot(RES, main="Graphe des résidus", col="blue");
# tracer le graphe de la série RES #
acf(RES, main="ACF");
# tracer les autocorrélations de la série RES #
pacf(RES, main="PACF");
# tracer les autocorrélations partielle de la série RES #
Box.test(RES, type="Box-Pierce");
# tester l'autocorrelation des résidus #
hist(RES);
# tracer l'histogramme de la série RES #
skewness(RES);
```

```
# calculer le coefficient d'asymétrie #
kurtosis(RES);
# calculer le coefficient d'aplatissement #
jarque.bera.test(RES);
# tester la normalité des résidus #
EPS=RES2
# calculer le carré des résidus #
acf(EPS, main="ACF");
# tracer les autocorrélations de la série EPS #
pacf(EPS, main="PACF");
# tracer les autocorrélations partielle de la série EPS #
arch.test(mod)
# appliquer le test ARCH #
garch11=garchFit(formula = ~ garch(1, 1), data=RES, include.mean=FALSE);
# L'estimation du modèle GARCH(1,1) #
summary(garch11)
# afficher les caractéristiques statistiques de garch11 #
plot(garch11)
arch1=garchFit(formula = ~ garch(1, 0), data=RES, include.mean=FALSE);
# L'estimation du modèle ARCH(1) #
summary(arch1)
# afficher les caractéristiques statistiques de arch1 #
plot(arch1)
```