



*République Algérienne
Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement
supérieur et de la recherche
scientifique*



UNIVERSITÉ MOHAMMED SEDDIK BEN YAHIA - JIJEL
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

MASTER

Spécialité : Mathématiques.

Option : Probabilités et Statistique.

Thème

Matrices Aléatoires et Application

Présenté par :

- Boufekroune Amina
- Boutaoua Ilham

Devant le jury :

Président : M. Gherda M.A.A Université de Jijel
Encadreur : S. Stihi M.C.B. Université de Constantine 1
Examineur : M. Madi M.A.A Université de Jijel

Promotion 2019/2020

Remerciement

*Remerciement avant toute considération, nous remercions le Grand DIEU
le tout puissant qui, nous a aidé à achever ce travail.*

*Nous tenons à remercier en premier lieu notre encadreur Mme STIHI SARA
de nous avoir proposé ce thème et pour sa continuité à nous soutenir et à
nous encourager.*

*Nous aimerions aussi de remercier cher monsieur Mebrouk Gherda
Nous aimerions aussi de remercier les membres des jurys pour avoir accepter
de discuter notre mémoire.*

*Nous remercions aussi toute personne ayant contribué de prêt de loin a la
finalisation de ce travail.*

♠ILHAM – AMINA♠

 *Dédicaces* 

Je dédie ce travail :

A

*La femme la plus affectueuse et la plus douce au monde, ma très
chère Mère, pour tous ses sacrifices, soutiens, encouragement et sa
amours qui ont été la raison de mon réussite.*

★ ★ ★

*A Mon Père, qui m'a été enlevé par la mort avant d'avoir assisté au
moment de l'obtention du mon diplôme*

★ ★ ★

*A Mes Soeurs : Halima, Wahiba, Fatiha et leur enfants
Mes Frères : Nadir, Abase, Yassin, Bachir, M.Elhadi(Hamada)
pour leur disponibilité à entendre mes frustrations et les sources de
mon stress.*

Je les souhaite de bonheur et de réussite dans leur vie.

★ ★ ★

A mon Fiancé BILAL qui était soutenu réellement pour moi.

★ ★ ★

A Ma collègue ILHAM

★ ★ ★

*A Mes très chères Amies : Ahlem, Rjma, Madiha, Wafia, Meryem
et mes cousines : Rabiaa, Bouchra.*

et tous ceux qui j'aime et qu'ils m'aiment.

J'espère que notre amitié sera éternelle.

♡ AMINA ♡

 *Dédicaces* 

Je dédie ce travail :

A

*à mon Père ALI et ma Mère YAKOUBA décédés trop tôt qui m'ont
toujours motivé et pousse dans mes études puisse Allah le tout
puissant les avoir dans sa saint miséricorde.*

★ ★ ★

*A Mes Soeurs : Fahima(Nacer), Hayat(Fayssal), Souhiala(Atef) et
Nawal(Nadir)*

*A Mes Frères : Mabrouk(Linda), Tarek(Sarah), Hatem(Tomass)
pour leur disponibilité à entendre mes frustrations et les sources de
mon stress.*

Je leur souhaite de bonheur et de réussite dans leur vie.

★ ★ ★

*A Les Enfants : Alaa, Riham, Hounaida, N.E.Houda, Meriem,
Oumaima, Malek, Djad, Assil, Amir, Ali Omar, Ibrahim et Razan*

★ ★ ★

A mon Fiancé HAMZA qui était soutenu réellement pour moi.

★ ★ ★

A Ma collègue AMINA

★ ★ ★

*A Mes très chères Amies : Madiha, Rima, Halima, Wafia, Nacira,
et ma cousine : Bouchra.*

et tous ceux qui j'aime et qu'ils m'aiment.

J'espère que notre amitié sera éternelle.

♡ILHAM♡

Résumé

En concevant les mathématiques comme un graphe, où chaque sommet est un domaine, la théorie des probabilités et l'algèbre linéaire figurent parmi les sommets les plus connectés parmi aux autres. Or leur réunion constitue le coeur de la théorie des matrices aléatoires. Cela explique peut-être la richesse exceptionnelle de cette théorie très actuelle. Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à cette théorie, ses propriétés et ses applications.

A cet effet, dans un premier temps, nous avons présenté quelques notations et définitions fondamentales concernant les ensembles gaussiens.

Dans un deuxième temps, nous avons parlé sur un autre ensemble des matrices aléatoires. aussi les processus matriciels.

On termine notre travail par une application, on a utilisé la technique de perturbation pour trouver les équations différentielles stochastiques des valeurs propres et vecteurs propres pour le système de Wishart.

Mots-clés : Matrice aléatoire; matrice de Wigner; les ensembles gaussien (E.G.O, E.G.U.); matrice de Wishart; les processus matriciels; les processus de Wishart; les valeurs propres; les vecteurs propres; E.D.S. matricielle.

Abstract

By conceiving mathematics like a graph, where each top is a field, the theory of probability and the linear algebra appear among the tops most connected to the others. However their meeting constitutes the heart of the theory of random matrix. Perhaps that explains the exceptional richness of this very current theory. In this work, we were interested in this theory its properties and its applications.

For this purpose, initially, we presented some fundamental notations and definitions concerning the Gaussian ensembl

In the second time, we have speking on another ensemble of random matrix. that's Wisart ensemble, and also matrix processes.

we completes our work by an application, we used the Perturbation technique to find the stochastic differential equations of eigenvalues and eigenvectors for Wishart system.

Key words : Random matrices ; Wigner Matrix ; Gaussien ensembles (O.G.E, U.G.E) ; Wishart matrix ; Matrix processes ; Wishart processes ; eigenvalues ; eigenvcters ; Matrix S.D.E..

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	3
1 Introduction à la théorie des matrices aléatoires	5
1.1 Ensemble de Wigner	5
1.1.1 Loi spectral et convergence des valeurs propres	6
1.1.2 Théorème de Wigner	10
1.2 Principaux ensembles des matrices aléatoires	12
1.2.1 Loi des matrices aléatoire	12
1.2.2 Ensemble gaussien orthogonal (GOE)	18
1.2.3 Ensemble gaussien unitaire (GUE)	18
1.2.4 Mesure de Haar : distribution uniforme	19
1.2.5 Densité des valeurs propres et fonctions de corrélation	21
2 L'ensemble de Wishart et processus matriciels	24
2.1 L'ensemble de Wishart	24
2.1.1 Analyse en composantes principales (ACP).	24
2.1.2 Matrice de Wishart	27
2.1.3 La loi de Wishart et distribution des valeurs propres	28
2.2 Processus matriciels	29
2.2.1 Processus stochastique d-dimensionnel	29

2.2.2	Processus matriciels	32
2.3	Processus de Wishart	35
2.3.1	Le carré de Bessel	35
2.3.2	Les processus de Wishart	37
3	Application	39
3.1	EDS des valeurs propres et vecteurs propres	39
3.2	Temps de collision	46
	Conclusion	49
	Bibliography	50

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les sources historiques de la théorie des matrices aléatoires sont multiples. Parmi les plus connues, on trouve les travaux du statisticien Wishart dans les années 1920-1930 lors de la naissance de la statistique mathématique, les travaux de Goldstine et Von Neumann dans les années 1940-1950 lors de la naissance de l'informatique et de l'analyse numérique, les travaux de Wigner, Mehta, et Dyson dans les années 1950-1960 en physique nucléaire, à la jonction entre mécanique quantique et mécanique statistique. Il y a ensuite les travaux de Marchenko Pastur, Girko, Bai, et Silverstein. dans les années 1960-1980, puis une multitude de travaux plus modernes, balayant un spectre étonnamment vaste incluant opérateurs de Schrödinger, physique statistique, systèmes intégrables, systèmes de particules en interaction, algèbre d'opérateurs et théorie des probabilités libres de Voiculescu, topologie et combinatoire, combinatoire additive et graphes aléatoires, polynômes orthogonaux, équations différentielles de Painlevé, problèmes de Riemann-Hilbert, analyse harmonique, théorie des nombres et hypothèse de Riemann, analyse géométrique de grande dimension, analyse numérique, classification statistique, théorie du signal et analyse d'images, etc.

La motivation originelle de Wishart était d'étudier la matrice de covariance empirique des échantillons gaussiens multivariés. Cette matrice de covariance empirique est une matrice hermitienne aléatoire semi-définie positive, appelée aujourd'hui matrice de Wishart.

Plus récemment Girko utilisé la technique des perturbations pour donner les équations

différentielles stochastiques des valeurs propres et des vecteurs propres pour un processus matriciel.

L'objet de ce travail est d'utiliser le calcul stochastique matriciel et plus particulièrement, le calcul d'Itô, matrice qui permet de trouver les équations différentielles stochastiques satisfaites par un processus matriciel.

Notre mémoire est composée des trois chapitres, On commence le premier chapitre qui contient l'ensemble de Wigner et les deux ensembles gaussiens (GOE)(GUE).

Dans le second chapitre a été consacré à une autre l'ensemble des matrices aléatoires, ensemble de Wishart et l'étude du calcul stochastique matriciel ainsi que les processus matriciel.

Dans le dernier chapitre on applique la technique de perturbation pour trouver les équations différentielles stochastiques des valeurs propres et des vecteurs propres d'un processus de Wishart.

CHAPITRE 1

INTRODUCTION À LA THÉORIE DES MATRICES ALÉATOIRES

Dans certaines études probabilistes en physique, en informatique, ou dans d'autres branches des mathématiques, il arrive que l'on étudie simultanément plus d'une variable aléatoire.

Par exemple, dans le cadre du théorème central limite, on est amené à étudier une suite de variables aléatoires. Dans le cadre de l'étude de loi jointe, on peut être amené à étudier simultanément un nombre fini de variables aléatoires, mais il arrive également, par exemple dans le cas d'étude de spectre d'atomes lourds en physique, que l'on soit amené à étudier un ensemble fini de valeurs propres, que l'on étudie non pas comme un vecteur de variables aléatoires, mais qu'on représente sous la forme d'une matrice : on étudie donc une matrice aléatoire.

1.1 Ensemble de Wigner

La théorie des matrices aléatoires a connu un nouvel essor dans les années 50 par les travaux de Wigner en physique nucléaire. Dans la théorie quantique, les niveaux d'énergie d'un système atomique sont les valeurs propres d'un opérateur hermitien sur un espace de Hilbert : l'Hamiltonien du système. Lorsque le système atomique est complexe, ces

niveaux d'énergie ne peuvent pas être étudiés explicitement. Wigner a alors eu l'idée de modéliser l'Hamiltonien d'un tel système par une matrice Hermitienne aléatoire de grande taille.

Soit :

$$M = \begin{pmatrix} M_{1,1} & \cdots & M_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{N,1} & \cdots & M_{N,N} \end{pmatrix}$$

une matrice aléatoire de taille $N \times N$ où M_{11}, \dots, M_{NN} sont variables aléatoires

soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ les valeurs propres associées de la matrice M (sont ordonnées de sorte)

Définition 1.1.1. (*Matrice de Wigner*) : Une matrice hermitienne aléatoire M_N de taille N est une matrice de Wigner si :

- Les parties réelles et parties imaginaires des $(M_N)_{ij}$ sont (iid), ont une moyenne nulle et une variance égale à $\frac{1}{2}$ (pour $i < j$).
- Ses coefficients diagonaux sont (iid), ont une moyenne nulle et une variance 1. Ils sont indépendants des coefficients non diagonaux.

1.1.1 Loi spectral et convergence des valeurs propres

L'idée de Wigner était d'étudier le comportement des valeurs propres de la matrice lorsque la dimension N de cette matrices tend vers l'infini, pour ce on s'intéresse à la loi uniforme sur le spectre.

Définition 1.1.2. Le spectre d'une matrice M est l'ensemble de ces valeurs propres et se note $Sp(M)$

Définition 1.1.3. : On appelle loi spectrale d'une matrice aléatoire M_N la mesure :

$$L_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\delta_{\lambda_i}}{\sqrt{N}}$$

où : δ_{λ_i} représente la mesure de Dirac

Théorème 1.1. Soient $(W_{ij}, 1 \leq i \leq j)$ des variables aléatoires réelles indépendantes telles que $(W_{ij}, 1 \leq i < j)$ ont même loi symétrique et de variance 1, admettant un moment d'ordre $4 + \alpha$ pour un certain $\alpha > 0$. et les W_{ii} ont même loi satisfaisant $\mathbb{E}\{(W_{11}^+)^2\} < \infty$.

Soit W_N une matrice $N \times N$ telle que $(W_N)_{ij} = W_{ij}, 1 \leq i \leq j \leq N$.

Alors la plus grande valeur propre de W_N converge presque sûrement vers 2 quand $N \rightarrow +\infty$.

Démonstration. On a le lemme suivant :

lemme 1.1. (1) Soit X une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}(|X|^2) < \infty$ alors

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^m \mathbb{P}(|X| \geq 2^{\frac{m}{2}}) < \infty$$

(2) $\lim_{N \rightarrow +\infty} \max_i \frac{W_{ii}^+}{\sqrt{N}} = 0$ presque sûrement, où W_{ii} sont des variables aléatoires diagonales positives.

(3) Soit X une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}(|X|^{4+\alpha}) < +\infty$, pour un certain $\alpha > 0$. Soit $(\delta_N)_{N \geq 1}$ la suite définie par

$$\delta_N = \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{\alpha}{2(4+\alpha)}} 2^{\frac{\alpha}{2(4+\alpha)}}$$

Alors

$$\sum_{m \geq 1} 2^{2m} \mathbb{P}(|X| > \delta_{2^{m+1}} 2^{\frac{m}{2}}) < +\infty$$

(4) Soit

$$a_k(N) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{N} \text{Tr}(M_N^{2k})\right)$$

Alors pour tout $\epsilon > 0$, pour N suffisamment grand et tout $k \leq \delta_N^{-\frac{1}{3}}$

ou $\delta_N = \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{\alpha}{2(4+\alpha)}} 2^{\frac{\alpha}{2(4+\alpha)}}$

$$a_{k+1}(N) \leq (1 + \epsilon) \sum_{l=0}^k a_l(N) a_{k-l}(N)$$

Démonstration. Voir [4] □

Soit $0 < \epsilon < 1$. soit f_ϵ une fonction positive continue bornée à support dans $[2 - \epsilon; 2]$ strictement positive sur $[2 - 3\frac{\epsilon}{4}; 2 - \frac{\epsilon}{4}]$. sur un ensemble de probabilité 1,

$\forall \epsilon > 0, \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_\epsilon(\lambda_i(\frac{W_N}{\sqrt{N}}))$ converge vers $\int f_\epsilon(x) \mu_{sc}(dx) > 0$.

et donc, pour N suffisamment grand, $\lambda_{\max}(\frac{W_N}{\sqrt{N}}) \geq 2 - \epsilon$.

On peut donc en déduire

$$\liminf_{N \rightarrow +\infty} \lambda_{\max}\left(\frac{W_N}{\sqrt{N}}\right) \geq 2.$$

Nous allons maintenant démontrer que presque surement,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sup \lambda_{max}\left(\frac{W_N}{\sqrt{N}}\right) \leq 2.$$

Nous allons tout d'abord démontrer que nous pouvons remplacer les éléments diagonaux de la matrice W_N par des zeros.

On défini \tilde{W}_N par :

$$\begin{cases} (\tilde{W}_N)_{ij} = (W_N)_{ij} & i \neq j \\ (\tilde{W}_N)_{ii} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a :

$$\begin{aligned} \lambda_{max}\left(\frac{W_N}{\sqrt{N}}\right) &= \sup_{x, \|x\|=1} \left\langle \frac{W_N}{\sqrt{N}} x, x \right\rangle \\ &= \sup_{x, \|x\|=1} \left\{ \sum_{i \neq j} \frac{(W_N)_{ij}}{\sqrt{N}} x_j x_i + \sum_i \frac{(W_N)_{ii}}{\sqrt{N}} x_i^2 \right\} \\ &\leq \sup_{x, \|x\|=1} \left\{ \sum_{i,j} \frac{(\tilde{W}_N)_{ij}}{\sqrt{N}} x_j x_i \right\} + \max_i \frac{W_{ii}^+}{\sqrt{N}} \\ &\leq \lambda_{max}\left(\frac{\tilde{W}_N}{\sqrt{N}}\right) + \max_i \frac{W_{ii}^+}{\sqrt{N}} \end{aligned}$$

On a donc presque surement

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sup \lambda_{max}\left(\frac{W_N}{\sqrt{N}}\right) \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \sup \lambda_{max}\left(\frac{\tilde{W}_N}{\sqrt{N}}\right).$$

Il suffit donc de démontrer que presque surement $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sup \lambda_{max}\left(\frac{\tilde{W}_N}{\sqrt{N}}\right) \leq 2$

Nous allons maintenant démontrer que nous pouvons tronquer les éléments hors diagonale de la matrice \tilde{W}_N . Définissons \hat{W}_N en posant pour $i \neq j$, $(\hat{W}_N)_{ij} = (\tilde{W}_N)_{ij} 1_{|(W_N)_{ij}| \leq \delta_N \sqrt{N}}$ où

$$\delta_N = \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{\alpha}{2+(4+\alpha)}} 2^{2+(4+\alpha)}$$

et $(\hat{W}_N)_{ij} = 0$.

D'après Lemme(3),

$$\sum_{m \geq 1} \mathbb{P}(|W_{12}| > \delta_{2^{m+1}} 2^{\frac{m}{2}}) < +\infty$$

Soit

$$A_k = \{\exists N \geq 2^k, \exists (i, j) \in \{1, \dots, N\}^2, i < j, |(W_N)_{ij}| > \delta_N \sqrt{N}\}$$

On a $A_{k+1} \subset A_k$ donc $\mathbb{P}(\cap A_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_k)$.

De plus

$$\mathbb{P}(A_k) \leq \mathbb{P}(\tilde{W}_N = W_N; \text{ pour } N \text{ grand})$$

Or

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_k) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{N > 2^k} \bigcup_{1 \leq i < j \leq N} \{|W_{ij}| > \delta_N \sqrt{N}\}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{m > k} \bigcup_{2^m < N \leq 2^{m+1}} \bigcup_{1 \leq i < j \leq N} \{|W_{ij}| > \delta_N \sqrt{N}\}\right) \\
&\leq \sum_{m=k}^{\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{2^m < N \leq 2^{m+1}} \bigcup_{1 \leq i < j \leq N} \{|W_{ij}| > \delta_N \sqrt{N}\}\right) \\
&\leq \sum_{m=k}^{\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{2^m < N \leq 2^{m+1}} \bigcup_{1 \leq i < j \leq N} \{|W_{ij}| > \delta_{2^{m+1}} 2^{\frac{m}{2}}\}\right) \\
&\leq \sum_{m=k}^{\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{1 \leq i < j \leq 2^{m+1}} \{|W_{ij}| > \delta_{2^{m+1}} 2^{\frac{m}{2}}\}\right) \\
&\leq \sum_{m=k}^{\infty} 2^{2(m+1)} \mathbb{P}(|W_{12}| > \delta_{2^{m+1}} 2^{\frac{m}{2}})
\end{aligned}$$

On en déduit donc que $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_k) = 0$ puis $\mathbb{P}(A_k) \leq \mathbb{P}(\tilde{W}_N = \hat{W}_N, \text{ pour } N \text{ grand}) = 1$.
La suite de la preuve va donc consister a démontrer que presque surement,

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \lambda_{max}(M_N) \leq 2 \quad (1.1)$$

où $M_N = \frac{\tilde{W}_N}{\sqrt{N}}$.

Donc on utilise la Méthode des grandes traces :

Nous avons pour tout $k \geq 1$ et tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\lambda_{max}(M_N) > 2(1+\epsilon)\right) \leq \mathbb{P}\left(Tr(M_N^{2k}) > 2^{2k}(1+\epsilon)^{2k}\right) \leq \frac{1}{2^{2k}(1+\epsilon)^{2k}} \mathbb{E}(Tr(M_N^{2k})) \quad (1.2)$$

En permettant a k de tendre vers l'infini avec N , un choix judicieux de k_N nous donnera

$$\sum_N \frac{1}{2^{2k_N}(1+\epsilon)^{2k_N}} \mathbb{E}(Tr(M_N^{2k_N})) < +\infty$$

permettant de conclure par le lemme de Borel-Cantelli que presque surement

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \lambda_{max}(M_N) \leq 2(1+\epsilon). \quad (1.1) \text{ en découlera alors aisément.}$$

Il s'agit donc d'estimer $\mathbb{E}(Tr(M_N^{2k_N}))$ pour un choix judicieux de puissance k_N tendant vers l'infini avec N . Cette méthode est appelée Méthode des grandes traces.

On commencer la preuve de (1.1) : soit $\epsilon > 0$. soit S une variable aléatoire suivant la loi du demi-cercle de variance 1 :

$$\mu_{sc}(dx) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-x^2} 1_{[-2,2]}(dx)$$

Soit $X_\epsilon = \sqrt{1+\epsilon}S$. X suit la loi du demi-cercle de variance $1+\epsilon$

$$\mu_{sc}(dx) = \frac{1}{2\pi(1+\epsilon)} \sqrt{4(1+\epsilon)-x^2} 1_{[-2\sqrt{1+\epsilon}, 2\sqrt{1+\epsilon}]}(dx)$$

En utilisant la relation de récurrence de nombre de catalan satisfaite par les moments pairs de S , on déduit aisément que la suite $\{a_k^*\}_{k \geq 0}$ des moments pairs de X_ϵ (i.e $a_k = \mathbb{E}(X_\epsilon^{2k})$) satisfait :

$$\begin{cases} a_0^* = 1 \\ a_{k+1}^* = (1 + \epsilon) \sum_{l=0}^k a_l^* a_{k-l}^*. \end{cases}$$

On a $a_0^* = 1 = a_0(N)$ et $a_1(N) \leq 1 < (1 + \epsilon) = a_1^*$. D'après Lemme (4), il existe $N(\epsilon)$ tel que $\forall N \geq N(\epsilon)$, pour tout $k \leq \delta_N^{-\frac{1}{3}}$,

$$a_{k+1}(N) \leq (1 + \epsilon) \sum_{l=0}^k a_l(N) a_{k-l}(N)$$

Soit $1 \leq k \leq \delta_N^{-\frac{1}{3}}$, supposons que $\forall N \geq N(\epsilon)$ pour tout $p \leq k$, $a_p(N) \leq a_p^*$

Alors

$$a_{k+1}(N) \leq (1 + \epsilon) \sum_{l=0}^k a_l^* a_{k-l}^*$$

On obtient donc par récurrence que $\forall N \geq N(\epsilon)$, pour tout $k \leq \delta_N^{-\frac{1}{3}}$,

$$a_k(N) \leq a_k^*$$

Or $a_k^* = \int \mu_{sc}(dx) = \frac{1}{2\pi(1+\epsilon)} 1_{[-2\sqrt{1+\epsilon}, 2\sqrt{1+\epsilon}]}(x) x^{2k} \sqrt{4(1+\epsilon) - x^2}(dx) \leq (2\sqrt{1+\epsilon})^{2k}$.

Donc $\forall N \geq N(\epsilon)$, pour tout $k \leq \delta_N^{-\frac{1}{3}}$,

$$a_k(N) \leq 2^{2k} (1 + \epsilon)^k.$$

Nous obtenons donc d'après (1.2), $\forall N \geq N(\epsilon)$, pour tout $k \leq \delta_N^{-\frac{1}{3}}$,

$$\mathbb{P}(\lambda_{max}(M_N) > 2(1 + \epsilon)) \leq \frac{N}{2^{2k} (1 + \epsilon)^{2k}} (1 + \epsilon)^k \leq N(1 + \epsilon)^{-k}$$

Choisissons k_N tel que $\frac{k_N}{\log N} \rightarrow +\infty$ et $\forall N \geq N(\epsilon)$, $k_N \leq \delta_N^{-\frac{1}{3}}$,

Alors pour N grand $N(1 + \epsilon)^{-k} \leq \exp(-Ck_N)$, et

$$\sum_N \mathbb{P}(\lambda_{max}(M_N) > 2(1 + \epsilon)) < +\infty.$$

□

1.1.2 Théorème de Wigner

Le théorème suivante a été dégagé par Eugene Wigner dans les années 1950.

Théorème 1.2. : Soit $(W_{ij}, 1 \leq i \leq j)$ des variables aléatoires indépendantes telles que $E(W_{ij}) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq j$ et $E(|W_{ij}|^2) = 1$ pour tout $1 \leq i < j$

On suppose de plus que

$$\forall k, \sup_{i,j} E(|W_{ij}|^k) = C_k < +\infty.$$

Soit W_N une matrice $N \times N$ symétrique telle que $(W_N)_{ij} = W_{ij}$ pour tout $1 \leq i \leq j \leq N$. alors presque surement, la mesure spectrale L_N converge étroitement vers la loi du demi-cercle μ_{sc} définie par :

$$\mu_{sc}(dx) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2} 1_{[-2,2]}(dx)$$

c'est-à-dire : presque surement, pour tout fonction f continue bornée,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int f(x) L_N(dx) = \int f(x) \mu_{sc}(dx).$$

La loi du demi-cercle est aussi appelée loi semi-circulaire ou encore loi de Wigner.

Démonstration. Il existe plusieurs preuves du théorème de Wigner, vous pouvez consulter les référence [4], [14] □

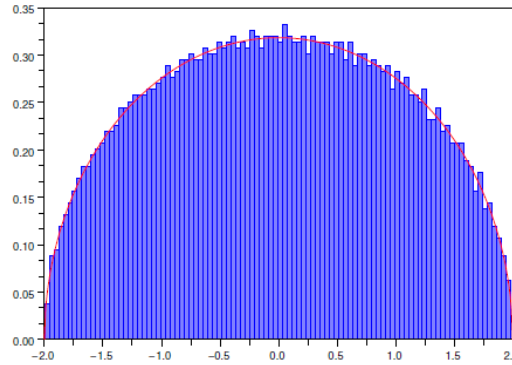


FIGURE 1.1 – Un histogramme de la répartition des valeurs propres d’une matrice symétrique aléatoire 4000×4000 , composée des variables aléatoires i.i.d. normales standards. En rouge : la loi du demi-cercle.

Remarque 1.1.1. Les valeurs propres d’une matrice étant des fonctions continues des entrées de la matrice, pour toute fonction f continue, $\int f(x) L_N(dx) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\lambda_i(\frac{W_N}{\sqrt{N}}))$ est bien mesurable.

Remarque 1.1.2. Si plus généralement $E(|W_{ij}|^2) = \sigma^2$ (au lieu de 1), avec probabilité 1, pour toute fonction continue bornée,

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\lambda_i(\frac{W_N}{\sqrt{N}})) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\sigma \lambda_i(\frac{W_N}{\sqrt{\sigma N}})) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int f(\sigma x) \mu_{sc}(dx) = \int f(x) \mu_{sc}^{(\sigma)}(dx)$$

où $\mu_{sc}^{(\sigma)}$ est la loi du demi cercle de moyenne nulle et de variance σ^2 et admet pour densité :

$$\frac{\mu_{sc}^{(\sigma)}(dx)}{dx} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} 1_{[-2\sigma, 2\sigma]}(x) \sqrt{4\sigma^2 - x^2} dx$$

1.2 Principaux ensembles des matrices aléatoires

1.2.1 Loi des matrices aléatoire

Il s'agit de donner la densité $P(M)$ d'une matrice aléatoire M pour les ensembles gaussien

lemme 1.2. *Tous les invariants d'une matrice M' de taille $N \times N$ sous les transformations de similarité unitaire A :*

$$M \longrightarrow M' = AMA^{-1} \quad (1.3)$$

peut être exprimée en termes des traces de N premières puissances de M .

En fait, la trace de la j -ème puissance de M est la somme des puissances j de ses valeurs propres λ_k , $k = 1, 2, \dots, N$, de M :

$$\text{Tr}(M^j) = \sum_{k=1}^N \lambda_k^j = P_j \quad (1.4)$$

lemme 1.3. *Si trois fonctions $f_k(x)$; $k = 1, 2, 3$ sont continues et dérivables et satisfont à l'équation*

$$f_1(xy) = f_2(x) + f_3(y) \quad (1.5)$$

alors ils sont nécessairement de la forme $a \ln(x) + b_k$, $k = 1, 2, 3$ avec $b_1 = b_2 + b_3$

Démonstration. En différenciant (1.5) par rapport à x , nous avons :

$$y f_1(xy)' = f_2(x)'$$

Par intégration par rapport à y ceci donne :

$$\frac{1}{x} f_1(xy) = f_2(x)' \ln(y) + \frac{1}{x} g(x) \quad (1.6)$$

où $g(x)$ est une fonction arbitraire.

En remplaçant $f_1(xy)$ de (1.5) en (1.6), on obtient :

$$f_3(y) = x f_2(x)' \ln(y) + g(x) - f_2(x) \quad (1.7)$$

Donc le coté gauche de (1.7) doit être indépendant de x . Ce qui est possible uniquement si :

$$x f_2(x)' = a \ln(x) - f_2(x) = b_3$$

C'est uniquement si :

$$f_2(x) = a \ln(x) + b_2 = g(x) - b_3$$

où a, b_2 et b_3 sont des constantes arbitraires.

Maintenant (1.7) donne :

$$f_3(x) = a \ln(y) + b_3$$

Enfin (1.5) donne

$$f_1(xy) = a \ln(y) + b_3 + b_2$$

□

Nous allons montrer le théorème suivant qui donne la forme de la densité $P(M)$

Théorème 1.3. (Porter et Rosenzweig) Dans les ensembles de matrices aléatoires, la densité $P(M)$ admet l'expression suivante :

$$P(M) = \exp(-a \text{Tr}(M^2) + b \text{Tr}(M) + c) \quad (1.8)$$

où a est un réel positif, b et c sont des réels quelconques.

Démonstration. Nous examinons d'abord les conséquences de l'indépendance des différentes composantes de M .

Considérons un exemple de transformation particulière T_U définie par :

$$M \longrightarrow T_U(M) = M' = U M U^{-1} \quad (1.9)$$

où U est une matrice dépendant d'un paramètre θ donné par :

$$U = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & \cdots & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

Dans ce cas la matrice U est orthogonale, symplectique et unitaire.

La différenciation de (1.9) avec $M' = U M U^{-1} = U M U^T$, par rapport à θ donne :

$$\frac{\partial M'}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta} M U^T + U M \frac{\partial U^T}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta} U^T M' + M' U \frac{\partial U^T}{\partial \theta} \quad (1.10)$$

Nous déduisons :

$$\frac{\partial M'}{\partial \theta} = A^T M' + M' A = M' A - A M' \quad (1.11)$$

ou $A = U \frac{\partial U^T}{\partial \theta}$ et $A^T = -A$

Nous obtenons :

$$A = U \frac{\partial U^T}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Soit $M = (M_{ij})$ une matrice aléatoire de l'espace gaussien de fonction de densité

$$P(M) = \prod_{(\alpha)} \prod_{j \leq k} f_{kj}^{(\alpha)}(M_{kj}^{(\alpha)}) = P(M') = \prod_{(\alpha)} \prod_{j \leq k} f_{kj}^{(\alpha)}(M_{kj}'^{(\alpha)}) \quad (1.12)$$

car nous avons qu'elle est invariante sous la transformation T_U pour toute U matrice unitaire. La dérivée de $\log P(M)$ par rapport à θ est nulle car M ne dépend pas de θ . C'est à dire :

$$\sum_{(\alpha), j \leq k} \frac{1}{f_{kj}^{(\alpha)}} \frac{\partial f_{kj}^{(\alpha)}}{\partial M_{kj}'^{(\alpha)}} \frac{\partial M_{kj}'^{(\alpha)}}{\partial \theta} = 0 \quad (1.13)$$

Écrivons cette équation explicitement pour le cas unitaire. les équations (1.11) et (1.13) donnent :

$$\begin{aligned} & \sum_{(\alpha), j \leq k} \frac{1}{f_{kj}^{(\alpha)}} \frac{\partial f_{kj}^{(\alpha)}}{\partial M_{kj}'^{(\alpha)}} (-AM' + M'A) = 0 \\ & - \sum_{(\alpha), j \leq k} \frac{1}{f_{kj}^{(\alpha)}} \frac{\partial f_{kj}^{(\alpha)}}{\partial M_{kj}'^{(\alpha)}} AM' + \sum_{(\alpha), j \leq k} \frac{1}{f_{kj}^{(\alpha)}} \frac{\partial f_{kj}^{(\alpha)}}{\partial M_{kj}'^{(\alpha)}} M'A = 0 \end{aligned}$$

on a $P(AM) = P(AM')$ ce qui donne :

$$- \sum_{(\alpha), j \leq k} \frac{1}{f_{kj}^{(\alpha)}} \frac{\partial f_{kj}^{(\alpha)}}{\partial M_{kj}'^{(\alpha)}} AM + \sum_{(\alpha), j \leq k} \frac{1}{f_{kj}^{(\alpha)}} \frac{\partial f_{kj}^{(\alpha)}}{\partial M_{kj}'^{(\alpha)}} MA = 0$$

ce qui implique :

$$\sum_{(\alpha), j \leq k} \frac{1}{f_{kj}^{(\alpha)}} \frac{\partial f_{kj}^{(\alpha)}}{\partial M_{kj}'^{(\alpha)}} (MA - AM) = 0$$

$$MA = \begin{bmatrix} M_{12} & -M_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ M_{22} & -M_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ M_{n2} & -M_{n1} & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$AM = \begin{bmatrix} -M_{21} & -M_{22} & \cdots & -M_{2n} \\ M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Donc

$$MA - AM = \begin{bmatrix} 2M_{12} & -M_{11} + M_{22} & M_{23} & \cdots & M_{2n} \\ -M_{11} + M_{22} & -2M_{12} & -M_{13} & \cdots & -M_{1n} \\ M_{32} & M_{31} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ M_{n2} & -M_{n1} & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} = G_{jk}$$

Comme M est hermitienne, alors M' est aussi hermitienne, ce qui donne G_{jk} matrice hermitienne symétrique Pour $j \leq k$, nous obtenons la matrice particulière :

$$G_{jk}^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} 2M_{12}^0 & -M_{11}^0 + M_{22}^0 & M_{23}^\alpha & \cdots & M_{2n}^\alpha \\ 0 & 2M_{12}^0 & M_{13}^\alpha & \cdots & M_{1n}^\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

D'ou de(1.13) nous obtenons

$$\sum_{(\alpha), j \leq k} \frac{1}{f_{kj}^{(\alpha)}} \frac{\partial f_{kj}^{(\alpha)}}{\partial M_{kj}^{(\alpha)}} G_{jk}^{(\alpha)} = 0$$

Remarquons que $G_{jk}^{(\alpha)} = 0$ pour $j \geq 3$, par suite :

$$\begin{aligned} & \left[\left(-\frac{1}{f_{11}^{(0)}} \frac{\partial f_{11}^{(0)}}{\partial M_{11}^{(0)}} + \frac{1}{f_{22}^{(0)}} \frac{\partial f_{22}^{(0)}}{\partial M_{22}^{(0)}} \right) 2M_{12}^{(0)} + \frac{1}{f_{12}^{(0)}} \frac{\partial f_{12}^{(0)}}{\partial M_{12}^{(0)}} (M_{11}^{(0)} - M_{22}^{(0)}) \right] \\ & + \sum_{k=3}^n \left(-\frac{1}{f_{1k}^{(0)}} \frac{\partial f_{1k}^{(0)}}{\partial M_{1k}^{(0)}} M_{2k}^{(0)} + \frac{1}{f_{2k}^{(0)}} \frac{\partial f_{2k}^{(0)}}{\partial M_{2k}^{(0)}} M_{1k}^{(0)} \right) \\ & + \sum_{k=3}^n \left(-\frac{1}{f_{1k}^{(1)}} \frac{\partial f_{1k}^{(1)}}{\partial M_{1k}^{(1)}} M_{2k}^{(1)} + \frac{1}{f_{2k}^{(1)}} \frac{\partial f_{2k}^{(1)}}{\partial M_{2k}^{(1)}} M_{1k}^{(1)} \right) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

où le premier terme correspond aux éléments diagonaux, le second et le troisième correspondent aux éléments parties réelles et parties imaginaires des éléments hors diagonaux. Les accolades du coté gauche de l'équation (1.14) dépendent de variables aléatoires appartenant à des ensembles disjoints et sont mutuellement indépendantes et leur somme est égale a zéro. Donc chacun terme doit être une constante. En effet pour simplifier si on prend Z_1, Z_2, \dots, Z_m des variables aléatoires indépendantes non centrées telles que $Z_1 + Z_2 + \dots + Z_m = 0$ alors on a $Z_1 = c_1, Z_2 = c_2, \dots, Z_m = c_m$ (Montrons cela par récurrence : pour $m = 2$, $Z_1 + Z_2 = 0$ alors $Z_1 = -Z_2$ comme elles sont indépendantes donc $Z_1 = c_1, Z_2 = -c_1$. On suppose que cela est vrai pour k : Pour $Z_1 + Z_2 + \dots + Z_k = 0$ implique $Z_1 = c_1, Z_2 = c_2, \dots, Z_k = c_k$: Pour $k + 1$ on a : $Z_1 + Z_2 + \dots + Z_{k+1} = 0 = U_1 + Z_{k+1} = 0$ avec U_1 et Z_{k+1} des variables aléatoires indépendantes. Par suite $U_1 = k_1$ et $Z_{k+1} = -k_1$. D'où le résultat.

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{1}{M_{1k}^{(0)}} \frac{1}{f_{1k}^{(0)}} \frac{\partial f_{1k}^{(0)}}{\partial M_{1k}^{(0)}} &= \frac{1}{M_{2k}^{(0)}} \frac{1}{f_{2k}^{(0)}} \frac{\partial f_{2k}^{(0)}}{\partial M_{2k}^{(0)}} = cst \\ \frac{1}{M_{1k}^{(1)}} \frac{1}{f_{1k}^{(1)}} \frac{\partial f_{1k}^{(1)}}{\partial M_{1k}^{(1)}} &= \frac{1}{M_{2k}^{(1)}} \frac{1}{f_{2k}^{(1)}} \frac{\partial f_{2k}^{(1)}}{\partial M_{2k}^{(1)}} = cst \end{aligned}$$

Par exemple :

$$\frac{1}{f_{1k}^{(0)}} \frac{\partial f_{1k}^{(0)}}{\partial M_{1k}^{(0)}} M_{2k}^{(0)} - \frac{1}{f_{2k}^{(0)}} \frac{\partial f_{2k}^{(0)}}{\partial M_{2k}^{(0)}} M_{1k}^{(0)} = C_k^{(0)} \quad (1.15)$$

En divisant les deux cotés de(1.15) par $M_{1k}^{(0)} M_{2k}^{(0)}$, nous obtenons

$$\frac{1}{f_{1k}^{(0)}} \frac{\partial f_{1k}^{(0)}}{\partial M_{1k}^{(0)}} \frac{1}{M_{1k}^{(0)}} - \frac{1}{f_{2k}^{(0)}} \frac{\partial f_{2k}^{(0)}}{\partial M_{2k}^{(0)}} \frac{1}{M_{2k}^{(0)}} = \frac{C_k^{(0)}}{M_{1k}^{(0)} M_{2k}^{(0)}} \quad (1.16)$$

On définit les trois fonctions suivantes $f_1(x) = C_k^{(0)} x$, $f_2(x) = -\frac{1}{f_{1k}^{(0)}} \frac{\partial f_{1k}^{(0)}}{\partial M_{1k}^{(0)}} x$,

$f_3 = \frac{1}{f_{2k}^{(0)}} \frac{\partial f_{2k}^{(0)}}{\partial M_{2k}^{(0)}} x$ donc

$$\begin{aligned} f_1\left(\frac{1}{M_{1k}^{(0)} M_{2k}^{(0)}}\right) &= \frac{C_k^{(0)}}{M_{1k}^{(0)} M_{2k}^{(0)}} \\ f_2\left(\frac{1}{M_{1k}^{(0)}}\right) &= \frac{1}{f_{1k}^{(0)}} \frac{\partial f_{1k}^{(0)}}{\partial M_{1k}^{(0)}} \frac{1}{M_{1k}^{(0)}} \\ f_3\left(\frac{1}{M_{2k}^{(0)}}\right) &= -\frac{1}{f_{2k}^{(0)}} \frac{\partial f_{2k}^{(0)}}{\partial M_{2k}^{(0)}} \frac{1}{M_{2k}^{(0)}} \end{aligned}$$

Comme les v.a M_{1k} et M_{2k} sont réelles gaussiennes on déduit de la relation précédente :

$\forall x, y, f_1(xy) = f_2(x) + f_3(y)$, Par le lemme (1.3) on conclut que $f_k(x) = \alpha \ln(x) + b_k$

pour $k = 1, 2, 3$. Mais $f_1(x) = C_k^{(0)} x = \alpha \ln(x) = b_1$, $f_2(x) = \beta x = \alpha \ln(x) = b_2$ et $f_3(x) = \gamma x = \alpha \ln(x) + b_3$. Donc nécessairement $C_k^{(0)} \alpha = b_1 = 0$ et aussi du lemme on a $b_1 = b_2 + b_3 = 0$ et donc $b_2 = -b_3$. Par suite :

$$b_2 + b_3 = -\frac{1}{M_{1k}^{(0)}} \frac{1}{f_{1k}^{(0)}} \frac{\partial f_{1k}^{(0)}}{\partial M_{1k}^{(0)}} + \frac{1}{M_{2k}^{(0)}} \frac{1}{f_{2k}^{(0)}} \frac{\partial f_{2k}^{(0)}}{\partial M_{2k}^{(0)}} = 0$$

ou encore en choisissant $b_2 > 0$:

$$-b_2 = b_3 = \frac{1}{M_{1k}^{(0)}} \frac{1}{f_{1k}^{(0)}} \frac{\partial f_{1k}^{(0)}}{\partial M_{1k}^{(0)}} = \frac{1}{M_{2k}^{(0)}} \frac{1}{f_{2k}^{(0)}} \frac{\partial f_{2k}^{(0)}}{\partial M_{2k}^{(0)}} = cste = -2a$$

ou a est une constante positive avec $a = \frac{b_2}{2}$.

D'où

$$\frac{\partial f_{1k}^{(0)}}{\partial M_{1k}^{(0)}} = -2a M_{1k}^{(0)} \partial M_{1k}^{(0)} \text{ et } \frac{\partial f_{2k}^{(0)}}{\partial M_{2k}^{(0)}} = -2a M_{2k}^{(0)} \partial M_{2k}^{(0)}$$

Ce qui donne par intégration par rapport à $M_{1k}^{(0)}$ de la première équation :

$$f_{1k}^{(0)}(M_{1k}^{(0)}) = \exp[-a(M_{1k}^{(0)})^2]$$

Pour les deux autres crochets de(1.14), leur résolutions donnent des solutions similaires. Maintenant, les éléments hors diagonaux s'expriment comme des carrés dans l'exponentielle et vu que les invariants s'expriment en termes de traces des puissances de M

(Lemme (1.2)).

La densité $P(M)$ est une exponentielle contenant des traces de M au plus de puissance deux car :

$$\begin{aligned} P(M) &= \prod_{i \leq j} \exp[-a(M_{ij}^{(0)})^2] \prod_{i < j} [-a(M_{ij}^{(1)})^2] \\ P(M) &= \prod_{i=1} \exp[-a(M_{ii}^{(0)})^2] \prod_{i < j} \exp[-a(M_{ij}^{(0)})^2] \prod_{i < j} [-a(M_{ij}^{(1)})^2] \\ P(M) &= \prod_{i=1} \exp[-a(M_{ii}^{(0)})^2] \prod_{i < j} \exp[-a((M_{ij}^{(0)})^2 + (M_{ij}^{(1)})^2)] \end{aligned}$$

□

Dans qui ce suit on note $\mathbb{H}_n = H$ hermitien (n, \mathbb{F}) l'ensemble des matrices hermitiennes de taille $N \times N$ à coefficients dans $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou H (le corps des quaternions réels) que l'on munit du produit scalaire $\langle X, Y \rangle \longrightarrow Tr(X, Y)$.

On définit une loi de probabilité sur \mathbb{H}_n par :

$$P_M(d_\beta M) = P(M \in d_\beta M) = \left[P_{n,\beta}(M) d_\beta M \right] = \left[\frac{1}{C_{n,\beta}} \exp(-\gamma Tr(M^2)) d_\beta M \right] \quad (1.17)$$

Où γ est un paramètre positif, $d_\beta M$ est la mesure Lebesgue sur \mathbb{H}_n associée au produit scalaire, et $C_{n,\beta}$ est un paramètre de normalisation pour avoir une loi de probabilité :

$$C_{N,\beta} = \int_{\mathbb{H}_n} \exp(-\gamma Tr M^2) d_\beta(M) = \left(\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} \right)^N$$

$$\text{où } N = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{H}_n = n + \frac{\beta}{2} n(n-1), \beta = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbb{F} = \mathbb{R} \\ 2 & \text{si } \mathbb{F} = \mathbb{C} \end{cases}$$

Cette loi de probabilité nous permet de définir l'espace probabilisé $(\mathbb{H}_n; P)$ tel que :

$\beta = 1$, $(\mathbb{H}_n; P)$ est appelé l'ensemble Gaussien orthogonal, notée GOE.

$\beta = 2$, $(\mathbb{H}_n; P)$ est appelé l'ensemble Gaussien unitaire, notée GUE.

Ce sont les ensembles introduits par Wigner pour la théorie des spectres nucléaires.

1.2.2 Ensemble gaussien orthogonal (GOE)

L'ensemble gaussien orthogonal (GOE) est caractérisé par des matrices M gaussien réelles symétriques : ($M = M^T$ où M^T est la transposée de M) et :

$$d_1M = \prod_{1 \leq i \leq j \leq N} dM_{ij} \quad (1.18)$$

où d_1M est la mesure de Lebesgue sur les matrices réelles symétriques S_n .

Une matrice symétrique M est diagonalisable en base orthonormée, elle peut donc s'écrire $M = OAO^T$ où $A = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est la matrice diagonale des valeurs propres réels de M et où O est une matrice réelle orthogonale (ie $O^T = O^{-1}$)

Définition 1.2.1. *L'ensemble gaussien orthogonal (GOE, $\beta = 1$) est un sous ensemble de \mathcal{S}_N des matrices symétrique réelles tel que :*

1. *la probabilité $P(M)$ tels que : $P_M(d_1M)$ soit **changement de base orthogonal** : $M \rightarrow OMO^{-1}$ pour tout $O \in \mathcal{O}_n$; \mathcal{O}_n l'ensemble des matrices orthogonal.*
2. **Indépendance statistique des coefficient** $M_{ij}(1 \leq i \leq j \leq n)$:
 - *les matrices M et $M' = OMO^{-1}$, ont même densité : $P(M)d_1M = P(M')d_1M'$*
 - *la densité $P(M)$ est un produit des fonctions, dont chacun dépend d'une seule variable :*

$$P(M) = \prod_{i \leq j} f_{ij}(M_{ij}) \quad (1.19)$$

1.2.3 Ensemble gaussien unitaire (GUE)

L'ensemble gaussien unitaire ou Gaussian Unitary Ensemble (GUE, $\beta = 2$) correspond au cas le plus général des systèmes non invariants par renversement du temps. La matrice M , de taille $N \times N$, est coefficients complexes et hermitienne : $M^* = M$ (où M^* dénote le conjugué hermitique de M).

$$d_2M = \prod_{i=0}^n dM_{ii} \prod_{i < j} d(M_{ij}^{(0)})d(M_{ij}^{(1)}) \quad (1.20)$$

où $d(M_{ij}^{(0)})$ et $d(M_{ij}^{(1)})$ ont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de M_{ij} et d_2M est la mesure de Lesbegue sur les matrices hermitiennes \mathcal{H}_n : M étant hermitienne, on a on a en effet M_{ii} réel et $M_{ji} = M_{ij}^*$ (où l'étoile indique la conjugaison complexe)

Toute matrice hermitienne M est diagonalisable en base unitaire, elle peut donc s'écrire $M = UAU^*$ où $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est la matrice diagonale des valeurs propres de M et où U est une matrice unitaire (ie $U^* = U^{-1}$).

Définition 1.2.2. *L'ensemble gaussien unitaire ($GUE, \beta = 2$) est une sous ensemble de \mathcal{H}_n l'ensemble des matrices hermitienne tel que :*

1. La probabilité P_M tels que : $P_M(d_2M)$ soit **changement de base unitaire** :
 $M \longrightarrow UMU^{-1}$ pour tout $U \in \mathcal{H}_n$
2. **Indépendance statistique des coefficient** $M_{ij}(1 \leq i \leq n)$, $M_{ij}^{(0)}$ et $M_{ij}^{(1)}$ ($1 \leq i < j \leq n$) qui constituent les coefficients libres de la matrice hermitienne M :
 - les matrices M et $M' = UMU^{-1}$, ont même densité : $P(M)d_2M = P(M')d_2M'$
 - la densité $P(M)$ est un produit des fonctions, dont chacun dépend d'une seule variable :

$$P(M) = \prod_{i=1}^n n f_i(M_{ii}) \prod_{1 \leq i < j \leq N} f_{ij}^{(0)}(M_{ii}^{(0)}) f_{ij}^{(1)}(M_{ii}^{(1)}) \quad (1.21)$$

Effectuons le changement de variable suivant dans(1.17)

$$\| \Phi_U \|: M \longrightarrow UMU^{-1} \text{ pour } U \in \mathcal{H}_n$$

Φ_U est une isométrie :

$$\| \Phi_U(M) \|^2 = \text{Tr}(UMU^{-1}UMU^{-1}) = \text{Tr}M^2 = \| M \|^2$$

Donc $|\det \Phi_U| = 1$.

D'autre part :

$$\exp(-\gamma \text{Tr}UMU^{-1}UMU^{-1}) = \exp(-\gamma \text{Tr}M^2) = \exp(M^2)$$

Donc P est bien invariante sous l'action du groupe unitaire.

1.2.4 Mesure de Haar : distribution uniforme

Mesure de Haar sur le groupe unitaire

On considère le groupe \mathcal{U}_N des matrices complexes unitaires U de taille $N \times N$, soit $U^* = U^{-1}$. Il existe une unique mesure de probabilité uniforme sur les matrices unitaires elle est appelée mesure de Haar, on la notera $\mu(dU)$. En théorie des matrices aléatoires, l'ensemble des matrices unitaires U distribuées suivant la mesure de Haar $\mu(dU)$ est

appelé ensemble unitaire circulaire. On peut également le définir de la façon suivante qui est équivalente. On écrit la matrice unitaire U sous la forme $U = VW$ où V et W sont des matrices unitaires (un choix possible est par exemple $V = U$ et $W = 1$ mais beaucoup d'autres choix sont possibles). On définit alors $\delta\tilde{\Omega}$ la matrice de coefficient $d\tilde{\Omega}$ par :

$$U + \delta U = V(1 + i\delta\tilde{\Omega})W \text{ soit } \delta U = i\delta\tilde{\Omega}W \text{ et } i\delta\tilde{\Omega} = V^\dagger \delta U W^* \quad (1.22)$$

car V et W sont unitaires.

Comme U, V et W sont unitaires et que $U = VW$, $\tilde{\Omega}$ est hermitienne : $\tilde{\Omega}^* = \tilde{\Omega}$. On définit l'élément de volume $v(dU)$ sur la sphère comme mesure plate sur $\tilde{\Omega}$,

$$\text{soit } v(dU) = d\tilde{\Omega} = \prod_i d\tilde{\Omega}_{ii} \prod_{i < j} d\Re\tilde{\Omega}_{ij} d\Im\tilde{\Omega}_{ij}.$$

On peut montrer que cette mesure $v(dU)$ ne dépend pas du choix des matrices unitaires V et W . Une fois normalisée, $v(dU)$ est donc la mesure uniforme sur le groupe unitaire, la mesure de Haar :

$$\mu(dU) = C_N v(dU) = C_N \prod_{i=1}^N d\tilde{\Omega}_{ii} \prod_{i < j} d\Re\tilde{\Omega}_{ij} d\Im\tilde{\Omega}_{ij} \quad (1.23)$$

où $i d\tilde{\Omega} = V^* dU W^*$ avec $U = VW$. On notera que les matrices hermitiennes ont bien le bon nombre de paramètres indépendants pour caractériser les matrices unitaires.

En effet, une matrice unitaire U est caractérisée par la contrainte $U^*U = 1$, ce qui impose N^2 relations sur les parties réelle et imaginaire des coefficients de U (car U^*U est hermitienne).

Pour caractériser U , on a donc besoin de $2N^2 - N^2 = N^2$ paramètres réels, comme pour les matrices hermitiennes.

Un choix particulier intéressant est celui où $V = U$ et $W = 1$. Dans ce cas, on a $i\delta\tilde{\Omega} = U^*\delta U$. On peut donc écrire en général :

$$\mu(dU) = C_N \prod_{i=1}^N d\tilde{\Omega}_{ii} \prod_{1 \leq i < j \leq N} d\Re\tilde{\Omega}_{ij} d\Im\tilde{\Omega}_{ij} i\delta\tilde{\Omega} = U^*\delta U \quad (1.24)$$

Si on note $\delta\Omega = U^*\delta U$, ie $i\delta\Omega = \delta\tilde{\Omega}$, $\tilde{\Omega}$ représente la matrice des coordonnées angulaires de U .

Mesure de Haar sur le groupe orthogonal

On considère le groupe des matrices réelles orthogonales O , telles que $O^T = O^{-1}$. il existe une unique mesure de probabilité uniforme sur les matrices orthogonales, elle est appelée mesure de Haar, on la notera $\mu(dO)$.

On introduit la matrice des paramètres angulaires $\delta\Omega = O^T\delta O$. O est orthogonale donc Ω est antisymétrique : $\delta\Omega^T = -\delta\Omega$ Une matrice orthogonale O est caractérisée par la relation $O^T O = 1$, ce qui fait $\frac{N(N+1)}{2}$ contraintes (car $O^T O$ est symétrique), donc restent $\frac{N-N(N+1)}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$ paramètres libres. La matrice réelle antisymétrique Ω est aussi caractérisée par $\frac{N(N-1)}{2}$ paramètres De façon similaire au cas unitaire (1.24), on peut montrer que :

$$\mu(dO) = C_N \prod_{i < j} d\Omega_{ij} \quad (1.25)$$

où $\delta\Omega = O^T\delta O$

1.2.5 Densité des valeurs propres et fonctions de corrélation

On considère une matrice aléatoire M de taille $N \times N$ réelle symétrique (resp de taille $N \times N$ hermitienne), de la loi $P(M)$:

$$P(M) = \exp(-TrV(M)) \text{ avec } V(x) = a_2x^{2k} + \dots + a_1x + a_0$$

Le "potentiel" $V(x)$ est un polynôme de degré $2k \leq N$ (le degré du polynôme doit être paire pour que la mesure $P(M)$ soit normalisable). a_0 est une constante de normalisation telle que $\int P(M)dM = 1$ sur l'ensemble de matrices considéré (resp. hermitien, symétrique).

La matrice M est diagonalisable en base orthonormé et ses N valeurs propres λ_i sont réelle, et distribuées suivant la densité de probabilité jointe :

$$P(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = B_n(\beta, V) \exp(-\sum_i V(\lambda_i)) \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta \quad (1.26)$$

$$\beta = \begin{cases} 1 & \text{si } M^T = M \text{ réelle symétrique} \\ 2 & \text{si } M^\dagger = M \text{ hermitienne} \end{cases}$$

β apparait de façon naturelle dans la distribution des valeurs propres (1.26).

En effet, ici $P(M)$ ne dépend pas de β mais β apparaît dans la distribution $P(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ comme la puissance du déterminant de Vandermonde

$$\Delta(\lambda_i) = \prod_{i < j} (\lambda_j - \lambda_i) = \det(\lambda_i^{j-1})$$

pour les ensembles gaussiens usuels (GOE, GUE), on a par définition

$$P(M) = \exp(-a \text{Tr} M^2 + b \text{Tr} M + c)$$

on trouve donc :

$$P(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = B_n(\beta) \exp\left(\frac{-\beta}{2} \sum_i V(\lambda_i)\right) \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta$$

La constante de normalisation $B_n(\beta)$ telle que $P(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ soit une densité de probabilité peut être déterminée (dans le cas des ensembles gaussiens) par le calcul d'une intégrale de Selberg :

$$B_N(\beta) = \frac{\beta^{\frac{N}{2} + \beta \frac{N(N-1)}{4}}}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \frac{\Gamma(1 + \frac{\beta}{2})^N}{\prod_{j=1}^N \Gamma(1 + \frac{\beta_j}{2})} \quad (1.27)$$

Définition 1.2.3. La densité moyenne de valeurs propres est donnée par :

$$\rho_N(\lambda) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle \delta(\lambda - \lambda_i) \rangle$$

Où $\langle \dots \rangle = \int \dots P(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \prod d\lambda_i$ indique la moyenne sur les configurations de valeurs propres λ_i

- Remarque 1.2.1.**
1. La quantité $\rho_N(\lambda)d\lambda$ représente la probabilité pour une valeur propres de se trouve dans l'intervalle $[\lambda_i; \lambda + d\lambda]$
 2. Le nombre moyenne de valeurs propres des l'intervalle $[\lambda_i; \lambda + d\lambda]$ est donc donnée par $N\rho_N(\lambda)d\lambda$
 3. La densité $\rho_N(\lambda)$ est par définition la distribution marginale d'une valeur propre (densité de probabilité d'une valeur propre) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} P(\lambda, \lambda_2, \dots, \lambda_N) d\lambda_2, \dots, \lambda_N \quad (1.28)$$

cette densité est normalisation à 1

Définition 1.2.4. La densité à deux points est définie par :

$$\rho_N^2(\lambda, \lambda') = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=j} \delta(\lambda - \lambda_i) \delta(\lambda' - \lambda_j)$$

Remarque 1.2.2. La densité à deux points moyenne est la distribution marginale de deux valeurs propres :

$$\langle \rho_N^2(\lambda, \lambda') \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} P(\lambda, \lambda', \lambda_3, \dots, \lambda_N) d\lambda_3 \dots d\lambda_N$$

Définition 1.2.5. On appelle fonction de corrélation à deux points la quantité

$$R_2(\lambda, \lambda') = N(N-1) \langle \rho_N^2(\lambda, \lambda') \rangle$$

CHAPITRE 2

L'ENSEMBLE DE WISHART ET PROCESSUS MATRICIELS

Dans ce Chapitre, on donne l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ satisfaisant les conditions habituelles. Ω est un ensemble, \mathcal{F} est une tribu contenue dans l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω et \mathbb{P} est une mesure de probabilité sur la tribu \mathcal{F} .

2.1 L'ensemble de Wishart

Les matrices de Wishart constituent un autre ensemble des matrices aléatoires voisines des ensembles gaussiens, elles ont été introduites initialement en statistiques, et représentent des matrices de covariance des données statistiques. Elles jouent en particulier un rôle très important dans la technique dite d'analyse de composant principal (ACP).

2.1.1 Analyse en composantes principales (ACP).

La technique de ACP permet de réduire la dimensionnalité d'un échantillon de données statistiques tout en gardant un maximum d'informations sur les caractéristiques de ces données, c.à.d sur leurs corrélations. Elle permet de compresser et classifier des données. Cette technique s'applique à des domaines très variés comme le traitement d'images, la génétique, la finance,...

Soit C une matrice symétrique positive. On peut donc décomposer C de la manière sui-

vante :

$$C = OAO^t$$

avec A diagonale d'éléments les valeurs propres $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ et O matrice orthogonale (i.e. $OO^t = I$). (v_1, \dots, v_n) sont les vecteurs propres associés a les valeurs propres .

Cette décomposition est la clef de la Analyse de composantes principales (PCA).

Si l'on visualise les données comme un nuage de p points dans un espace de dimension N , l'ACP permet de projeter ce nuage sur un espace de dimension plus petite, en utilisant seulement les premières composantes principales. Dans ce nouveau système de coordonnées, la plus grande variance des données correspond à la première coordonnée, la deuxième plus grande variance à la deuxième coordonnée...etc

Plus précisément, les Composantes Principales sont les vecteurs propres de C . La première composante principale est le vecteur propre v_1 associé à la plus grande valeur propre λ_1 .

Ces quantités s'expriment de la façon suivante :

$$\lambda_1 = \max_{v: \|v\|=1} \langle Cv, v \rangle = \max_{v: \|v\|=1} \sum_k \left(\sum_i X_{i,k} v_i \right),$$

$$v_1 = \operatorname{argmax}_{\{v: \|v\|=1\}} \langle Cv, v \rangle = \operatorname{argmax}_{\{v: \|v\|=1\}} \langle X^t v, X^t v \rangle.$$

Ainsi, v_1 est la combinaison linéaire (qui met des poids sur les individus) de norme L^2 égale à 1 qui possède la plus grande variance empirique. Une autre façon plus géométrique de visualiser le vecteur v_1 est de procéder de la façon suivante :

$$\text{la quantité } \sum_{k=1}^p \|X_{\cdot,k}\|^2 - \langle X^t v, X^t v \rangle = \sum_{k=1}^p \|X_{\cdot,k}\|^2 - \langle X_{\cdot,k}, v \rangle^2$$

mesure la somme des carrés des distances des points à la droite de direction v . Ainsi le vecteur v_1 est celui qui minimise cette distance.

Exemple 2.1.1. *Supposons que l'on ait $n = 2$ individus/ stocks de marché financier et $p = 12$ caractéristiques/rendements journaliers. Le vecteur v_1 maximise la somme des projections orthogonales sur la droite de direction v_1 .*

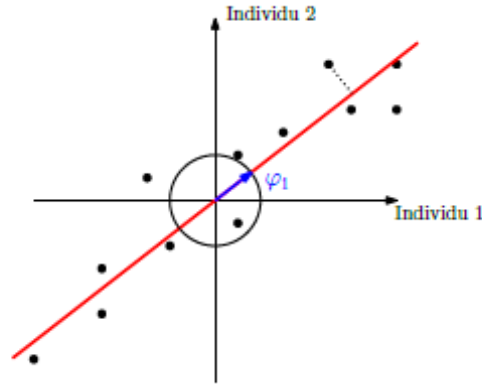


FIGURE 2.1 –

Les composantes suivantes sont définies de manière analogue itérative-ment en projetant sur le complément orthogonal des précédentes composantes. Ainsi,

$$\lambda_2 = \max_{v \perp v_1: \|v\|=1} \langle Cv, v \rangle,$$

$$v_2 = \operatorname{argmax}_{\{v \perp v_1: \|v\|=1\}} \langle Cv, v \rangle.$$

l'ACP consiste ensuite à ne considérer que l'information provenant des N premiers vecteurs propres où $N < n$ et est souvent beaucoup plus petit que n c'est à dire à remplacer C par $\sum_{i=1}^N \lambda_i v_i v_i^t$.

L'ACP est particulièrement utile lorsqu'il y a une forte séparation entre les valeurs propres. Si par exemple λ_1 est beaucoup plus grande que λ_2 , on peut espérer que la corrélation entre les éléments considérés s'explique principalement par ce biais là. C'est le cas par exemple lorsque l'on considère des données financières, où v_1 représente le marché.

Autre point de vue (probabiliste) : On peut appliquer l'ACP à la vraie matrice de covariance Σ (au lieu de la matrice de covariance empirique C) : $\Sigma = O' A^\Sigma O^t$, où $A' = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ et A^Σ matrice diagonale de diagonale $\lambda_1^\Sigma > \dots > \lambda_n^\Sigma$, on a :

$$Y_1 = \sum_{l=1}^n \langle \phi_l, Y_i \rangle \phi_l.$$

(Rappelons que Y_1 est la première colonne de la matrice X) Calculons la variance de

$\langle \phi_l, Y_i \rangle \phi_l :$

$$\begin{aligned} \text{Var}(\langle \phi, Y_1 \rangle) &= \text{E}(\langle \phi, Y_1 \rangle^2) \\ &= \text{E}\left(\sum_{i,k} \phi(i) X_{i,1} \phi(k) X_{k,1}\right) \\ &= \phi^t \Sigma \phi \end{aligned}$$

Ainsi, sous la contrainte $\|\phi\| = 1$, en prenant $\phi = \phi_1$, on maximise la (vraie) variance que l'on peut obtenir, et cette variance vaut λ_1^Σ . Ainsi, en décomposant les premiers vecteurs propres sur la base canonique, on obtient les combinaisons linéaires des coefficients de Y_1 (de norme L^2 égale à 1) qui expliquent le plus la variance de Y_1 .

2.1.2 Matrice de Wishart

Définition 2.1.1. : Soit B_N une matrice $N \times p$ tq $((B_N)_{ij})_{1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq p}$ sont des variables aléatoires(iid) de la loi $\mathcal{N}(0, \Sigma)$

Alors :

$$M_N = B_N^* B_N$$

est une $N \times N$ matrice de Wishart.

- Pour le modèle de Wishart la mesure empirique $\mu_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i}$ des valeurs propres de M_N converge vers la loi de Marchenko Pasteur de paramètre γ .

Théorème 2.1. (Loi de Marchenko-Pastur)

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ les valeurs propres de $M_N = B_N B_N^*$ et $\mu_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i}$ est la mesure de probabilité.

Supposons que $N \rightarrow +\infty$ et $p \rightarrow +\infty$ avec $\frac{N}{p} \rightarrow c \in [0, 1]$.

Alors μ_N converge presque sûrement vers la mesure de probabilité μ où μ admet pour densité

$$\mu(dx) = \frac{\sqrt{(x - (1 - \sqrt{c})^2)((1 + \sqrt{c})^2 - x)}}{2\pi c x}$$

Cette densité a différents comportements suivant la valeur de γ En particulier, si $c = 1$, alors $(1 - \sqrt{c}) = 0$ et le bord gauche du spectre vaut 0 et la densité s'écrit :

$$\mu(dx) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{x - x^2}}{x} 1_{x \in [0,4]}(dx) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{4x - x^2}}{x}$$

Dans ce cas, le bord gauche a une asymptote en 0. Lorsque $c < 1$, le bord gauche s'annule en racine carrée comme le bord droit.

Notons que plus c est petit i.e. p grand par rapport à N , plus la loi limite est resserrée autour de 1.

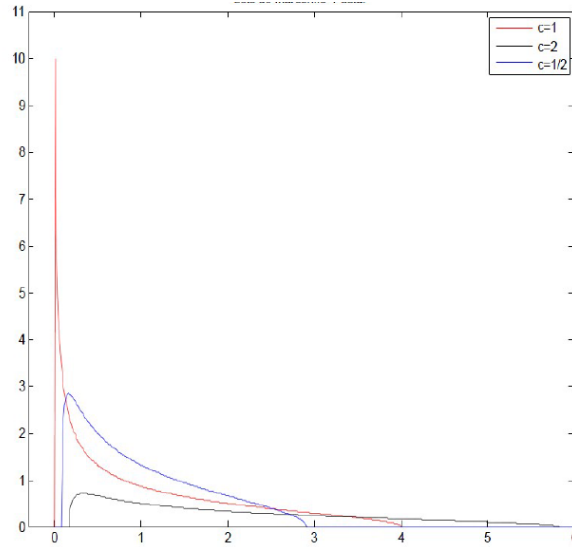


FIGURE 2.2 – Densité de marchenko-pastur pour différents valeurs de c

Ce théorème nous dit que dans le régime asymptotique où N et p sont du même ordre de grandeur, il est normal d'avoir des valeurs propres assez grandes (autour de $(1 + \sqrt{c})$ qui est strictement plus grand que 1 et qui vaut même 4 dans le cas $\frac{N}{p} \rightarrow 1$). Cela contraste avec le cas où $p > N$, où C converge vers la matrice identité.

2.1.3 La loi de Wishart et distribution des valeurs propres

La loi de Wishart est une loi de probabilité associée aux matrices aléatoires symétriques définies positives. Elle fût introduite par Wishart (1928).

Définition 2.1.2. La matrice aléatoire $M_N = B_N B_N^*$ suite une loi de Wishart avec N degré de liberté et Σ la matrice de covariance, cette loi écrite $M_N \sim \mathcal{W}_p(N, \Sigma)$.

Pour $N \leq p$, la fonction de densité de probabilité de M_N est :

$$f(M_N) = \frac{|M_N|^{\frac{(N-p-1)}{2}}}{2^{\frac{Np}{2}} \Gamma_p(\frac{N}{2}) |\Sigma|^{\frac{N}{2}}} \exp[-\frac{1}{2} Tr(\Sigma^{-1} M_N)]$$

où $\Gamma_p(a)$ est la fonction multivariée telle que :

$$\Gamma_p(a) = \pi^{\frac{p(p-1)}{4}} \prod_{j=1}^p \Gamma[a + (1 - j)]$$

Proposition 2.1.1. (i) pour $M_N \sim \mathcal{W}_p(N, \Sigma)$ et $S_{(p \times m)}$, $S' M_N S \sim \mathcal{W}_m(N, S' \Sigma S)$.

(ii) pour $M_N \sim \mathcal{W}_p(N, \Sigma)$, $\mathbb{E}(M_N) = N\Sigma$.

(iii) si M_1 et M_2 are indépendant et satisfait $M_1 + M_2 = M \sim \mathcal{W}_p(N, \Sigma)$ et $M_1 \sim \mathcal{W}_p(N_1, \Sigma)$ alors $M_2 \sim \mathcal{W}_p(N - N_1, \Sigma)$

Proposition 2.1.2. Une matrice de Wishart $M_N = B_N B_N^*$ où B_N est de taille $N \times p$ avec $p \geq N$ a N valeurs propres λ_i pour $1 \leq i \leq N$.

Ces valeurs propres sont réelles positives, qu'elles sont distribuées selon la loi jointe :

$$\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = Z_{N,p} \exp\left(\frac{-\beta}{2} \sum_i \lambda_i\right) \prod_{i=1}^N \lambda_i^{\frac{\beta}{2}(p-N+1)-1} \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta$$

où $Z_{N,p}$ est une constante de normalisation et où $\beta = 1$ dans le cas où B_N est a coefficients réels, $\beta = 2$ dans le cas où B_N est a coefficients complexes.

2.2 Processus matriciels

2.2.1 Processus stochastique d-dimensionnel

Définitions :

Définition 2.2.1. Un processus stochastique $X = (x_t)_{t \in T}$ est un famille de variables aléatoire X_t indexée par un ensemble T

Remarque 2.2.1. (i) En générale $T = \mathbb{R}$ ou \mathbb{R}_+ et on considère que le processus est indexé par le temps t .

(ii) Si T est un ensemble fini, le processus est un vecteur aléatoire.

(iii) Si $T = \mathbb{N}$ alors le processus est une suite de variable aléatoire.

(iv) Plus généralement quand $T \in \mathbb{Z}$, le processus est dit discret.

(v) Pour $T \in \mathbb{R}^d$, on parle de champ aléatoire (drap quand $d = 2$).

(vi) Un processus dépend de deux paramètres $X_t(w)$ dépend de t (en générale le temps) et de l'aléatoire $w \in \Omega$.

(vii) pour $t \in T$ fixée, $w \in \Omega \rightarrow X_t(w)$ est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(viii) Pour $w \in \Omega$ fixé, $t \in T \mapsto X_t(w)$ est une fonction à valeurs réelles, appelée trajectoire du processus. C'est un enjeu que de savoir si un processus admet des trajectoire mesurables, continues, dérivables ou encore plus régulières.

Définition 2.2.2. (Filtration)

Une filtration sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une famille $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ de sous tribus telle que pour $s \leq t$, on a $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$

Si on considère un processus $(X_t)_{t \geq 0}$, on considère souvent la filtration canonique qu'il engendre : $\mathcal{F}^x = \sigma(X_s : s \leq t); t \geq 0$. Dans ce cas, il est utile d'interpréter une filtration comme une quantité d'information disponible à une date donnée : \mathcal{F}_t^x représente l'information véhiculée par le processus X jusqu'à la date t . Une filtration est P -complète pour une mesure de probabilité \mathbb{P} si \mathcal{F}_0 contient tous les événements de mesure nulle, ie. $N = \{N \in \mathcal{F} \text{ tel que } P(N) = 0\} \subset \mathcal{F}_0$

Définition 2.2.3. (Temps d'arrêt)

Une variable aléatoire T a valeur dans $[0, +\infty]$ est un temps d'arrêt si pour tout $t \geq 0$ on a $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

Définition 2.2.4. (Le Mouvement Brownien)

Soit $B = \{B_t, t \geq 0\}$ un processus issu de 0 et à valeurs dans \mathbb{R} .

On dit que B est un mouvement Brownien s'il vérifie l'une des deux conditions suivante (équivalentes) :

- (a) B est un processus gaussien centrée et de fonctions suivante $\mathbb{E}[B_s B_t] = s \wedge t$
- (b) B est un processus à accroissements indépendants et stationnaires tel que $B_t \sim N(0, t)$ pour tout $t \geq 0$

Définition 2.2.5. (Martingale)

Un processus $M = \{M_t; t \in T\}$ est une \mathcal{F}_t -martingale (resp. sous-martingale, sur-martingale) si $\mathbb{E}[M_t] < \infty, \forall t \in T$, M est \mathcal{F}_t -adapté, $\forall s, t \in T, 0 \leq s \leq t : \mathbb{E}(M_t / \mathcal{F}_s) = M_s$ p.s (resp : $\geq M_s, \leq M_s$). Si M est une martingale (resp. sous-martingale, sur-martingale), alors l'application $t \in T. t \mapsto \mathbb{E}(X_t)$ est constante (resp. croissante, décroissante).

Définition 2.2.6. (Martingale local)

Un processus stochastique matriciel M est appelé martingale locale, si chaque entrée de M est une martingale locale, i.e : s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt strictement monotones $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}, T_n \xrightarrow{ps} \infty$ tel que $(M_{t \wedge T_n})_{i,j}$ est une martingale pour tout i, j

Définition 2.2.7. (L'intégrale d'Itô)

Soit $\varphi = \sum_{k=0}^{n-1} a_k 1_{[t_k, t_{k+1}]}(t)$ un processus en escalier, l'intégrale stochastique de φ est définie par

$$I_t(\varphi) = \int_0^t \varphi dB_s + \sum_{k=0}^{n-1} a_k (B_{t \wedge t_{k+1}} - B_{t \wedge t_k}), t \geq 0$$

On considère l'opérateur linéaire :
$$\begin{cases} I : \varepsilon \longrightarrow L^2(\Omega, C([0, T])) \\ \varphi \longrightarrow I(\varphi) \end{cases}$$

défini par :

$$I_t(\varphi) = \int_0^t \varphi_s dB_s, 0 \leq t \leq T$$

ε est dense dans $\mathcal{M}^2(0, T)$, on peut alors prolonger I de manière unique en une application linéaire continue I définie sur $\mathcal{M}^2(0, T)$ à valeurs dans $L^2(\Omega, C([0, T]))$. Cette application sera également notée :

$$I_t(\varphi) = \int_0^t \varphi_s dB_s$$

La formule d'Itô est l'outil de base du calcul stochastique.

Définition 2.2.8. Un processus d'Itô est un processus de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s) ds + \sum_{i=1}^d \int_0^t \varphi_i(s) dB_s^{(i)}$$

- où X_0 est une variable aléatoire \mathcal{F}_0 -mesurable, de carré intégrable : $E[X_0^2] < +\infty$
- a est un processus adapté intégrable sur tout $[0, T]$: $\int_0^T |a(s)| ds < +\infty$
- $B = (B^{(1)}, \dots, B^{(d)})$ est un mouvement brownien standard dans \mathbb{R}^d à composantes indépendantes
- $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^d)$ sont des vecteurs des fonctions adaptés vérifiant :

$$\int_0^T \|a(s)\|^2 ds < +\infty$$

- Le terme $\left(\int_0^T a(s) ds\right)_{t \geq 0}$ s'appelle la partie à variation finie du processus X .
- Le terme $\left(\int_0^T \varphi(s) dB_s\right)_{t \geq 0}$ s'appelle la partie martingale locale du processus X .

Théorème 2.2. (Formule d'Itô) Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 . Alors :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) dX_s$$

Si X_t un processus d -dimensionnel X^1, \dots, X^p et $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , Alors

$$\begin{aligned} f(X_t^1, \dots, X_t^p) &= f(X_0^1, \dots, X_0^p) + \sum_{i=1}^p \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s^1, \dots, X_s^p) dX_s^i \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^p \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_s^1, \dots, X_s^p) dX_s^{ij} \end{aligned}$$

Démonstration. voir [2]

□

Equations différentielles stochastiques

Les équations différentielles stochastiques ont été d'abord étudiées par Itô sur l'intégrale stochastique.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F})_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilité filtré, soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un

\mathcal{F}_t -mouvement brownien standard et soit $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions mesurables.

Définition 2.2.9. Une équation différentielle stochastique est une équation de la forme :

$$dX_t = \sigma(X_t)dB_t + b(X_t)dt \quad (2.1)$$

Définition 2.2.10. Une solution pour l'EDS (2.1) est un processus $(X_t, t \geq 0)$ continu adapté. tq :

$$\int_0^t \sigma(s, X_s)^2 ds < \infty \quad \int_0^t |b(s, X_s)| ds < \infty, p.s \text{ et que :}$$

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s + \int_0^t b(s, X_s)ds$$

Théorème 2.3. Soient $T > 0$ et $b, \sigma : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ soit des fonctions mesurables (continues).

On suppose qu'il existe une constante $k > 0$ tq pour tout $t \in [0, T], x, y \in \mathbb{R}$:

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq k|x - y|, |\sigma(t, x)| + |b(t, x)| \leq k(1 + |x|)$$

Supposons que $E(|\xi|^2) < \infty$.

Il existe alors une unique solution $(X_t, t \geq 0)$ telle que $X_0 = \xi$. De plus, pour tout t , $E(\sup_{s \in [0, T]} |X_s|^2) < \infty$

Remarque 2.2.2. Dans l'énoncé du théorème (2.3), $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne. En plus, pour tout réel $T > 0$, il y a unicité de solution pour l'EDS sur $[0, T]$.

2.2.2 Processus matriciels

Dans ce qui suit on considère $\Omega = C_0(\mathcal{M}_n)$ l'espace des fonctions continues $(w_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ à valeurs dans l'ensemble des matrices carrées \mathcal{M}_n satisfaisant $w_0 = 0$ et $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$

Définition 2.2.11. (Mouvement Brownien Matriciel)

Un Mouvement Brownien Matriciel B dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est une matrice composée de mouvements Browniens réels indépendants, i.e. $B = (B^{ij})_{i,j}$ où B^{ij} sont des mouvements Browniens indépendants et uni-dimensionnels $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$

Proposition 2.2.1. *Pour tout $0 \leq s \leq t \leq \infty$, on a :*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(B_t^{ij} - B_s^{ij} | \Omega_s) &= t - s. \\ \mathbb{E}(-(B_t^{ij} - B_s^{ij}) | \Omega_s) &= -(t - s).\end{aligned}$$

Définition 2.2.12. *(L'intégral d'Itô)*

Pour tout $\alpha \in M^{2,0}(0, T)$ on définit l'intégral d'Itô par

$$I(\alpha) = \int_0^T \alpha_t dB_t^{ij} = \sum_{j=0}^{N-1} \xi_j (B_{t_{j+1}}^{ij} - B_{t_j}^{ij}).$$

où $\xi_j \in L^p(\Omega_{t_j})$, $j = 0, \dots, N-1$. et $\left(\int_0^t \alpha_s dB_s^{ij} \right)_{0 \leq t \leq T}$ est une martingale.

Dans le théorème ce dessus on utilisée les notation de Einstein.

Théorème 2.4. *(Formule d'Itô) Soit φ une fonction de classe C^2 sur \mathcal{M}_n de telle sorte que $\partial_{x^{pq}} \varphi$, $\partial_{x^{p'q'}}^2 \varphi \in C(\mathcal{M}_n)$. Soit $X = (X^{ij})$ un processus d'Itô matriciel sur $[0, T]$ avec*

$$X_t^{pq} = X_0^{pq} + \int_0^t \alpha_{pq}(s) ds + \int_0^t \beta_{kl}^{pq}(s) dB_s^{kl}$$

où $\alpha_{pq} \in M^1(0, T)$ et $\beta_{kl}^{pq} \in M^2(0, T)$. Alors pour chaque $t \in [0, T]$, on a :

$$\begin{aligned}\varphi(X_t) - \varphi(X_0) &= \int_0^t \partial_{x^{pq}} \varphi(X_u) \beta_{kl}^{pq}(u) dB_u^{kl} \\ &+ \int_0^t \left[\partial_{x^{pq}} \varphi(X_u) \alpha_{pq}(u) + \frac{1}{2} \partial_{x^{p'q'}}^2 \varphi(X_u) \beta_{ij}^{pq}(u) \beta_{kl}^{p'q'}(u) \right] du\end{aligned}$$

Remarque 2.2.3. *Notons que cette formule reste valide si X n'est pas une matrice carrée.*

Corollaire 2.1. *La formule d'intégration par partie suivante a lieu :*

$$d(X_t^{pq} X_t^{mn}) = dX_t^{pq} X_t^{mn} + X_t^{pq} dX_t^{mn} + dX_t^{pq} dX_t^{mn}$$

Démonstration. Formule d'Itô appliquée avec $\varphi(x, y) = xy$, donne

$$\begin{aligned}d(X_t^{pq} X_t^{mn}) &= \left(\frac{\partial \varphi(X_t^{pq} X_t^{mn})}{\partial x} \alpha^{pq}(t) + \frac{\partial \varphi(X_t^{pq} X_t^{mn})}{\partial y} \alpha^{mn}(t) \right) dt \\ &+ \left(\frac{\partial \varphi(X_t^{pq} X_t^{mn})}{\partial x} \beta_{kl}^{pq}(t) + \frac{\partial \varphi(X_t^{pq} X_t^{mn})}{\partial y} \beta_{kl}^{mn}(t) \right) dB_t^{kl} \\ &+ \frac{\partial^2 \varphi(X_t^{pq} X_t^{mn})}{\partial x \partial y} \beta_{kl}^{pq}(t) \beta_{kl}^{mn}(t) dt \\ &= X_t^{mn} \alpha^{pq}(t) dt + X_t^{mn} \beta_{kl}^{pq}(t) dB_t^{kl} + X_t^{pq} \alpha^{mn}(t) dt + X_t^{pq} \beta_{kl}^{mn}(t) dB_t^{kl} + \beta_{kl}^{pq}(t) \beta_{kl}^{mn}(t) dt \\ &= dX_t^{pq} X_t^{mn} + X_t^{pq} dX_t^{mn} + \beta_{kl}^{pq}(t) \beta_{kl}^{mn}(t) dt\end{aligned}$$

□

Définition 2.2.13. On définit l'intégrale de Stratonovich \circ pour deux processus d'Itô matrices X et Y :

$$X \circ dY = XdY + \frac{1}{2}dXdY$$

où $dXdY$ est le produit matriciel classique.

Proposition 2.2.2. Soient X , Y et Z des processus matrices d'Itô. Alors on a :

(i) La formule d'intégration par parties :

$$d(XY) = XdY + dYX + dXdY \quad (2.2)$$

(ii)

$$d(XY) = dX \circ Y + X \circ dY \quad (2.3)$$

$$dX \circ (YZ) = (dX \circ Y) \circ Z \quad (2.4)$$

$$YZ \circ dX = (Y \circ Z) \circ dX \quad (2.5)$$

et

$$(X \circ dY)^T = dY^T \circ X^T \quad (2.6)$$

Y^T désigne la transposée de la matrice Y .

Démonstration. (i) Pour $i, j \in \bar{1, n}$ on a :

$$\begin{aligned} d(XY)^{ij} &= d\left(\sum_k X^{ik}Y^{kj}\right) \\ &= \sum_k d(X^{ik}Y^{kj}) \\ &= \sum_k (dX^{ik}Y^{kj} + X^{ik}dY^{kj} + dX^{ik}dY^{kj}) \\ &= (dXY)^{ij} + (XdY)^{ij} + (dXdY)^{ij} \end{aligned}$$

d'où

$$d(XY) = dXY + XdY + dXdY$$

(ii) Par un calcul simple, on trouve

$$\begin{aligned} dX \circ Y + X \circ dY &= dXY + \frac{1}{2}dXdY + XdY + \frac{1}{2}dXdY \\ &= dXY + XdY + dXdY \\ &= d(XY) \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} dX \circ (XZ) &= dX(YZ) + \frac{1}{2}dXd(YZ) \\ &= dX(YZ) + \frac{1}{2}dX(dYZ + YdZ). \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
(dX \circ Y) \circ Z &= \left(dXY + \frac{1}{2} dXdY \right) \circ Z \\
&= dX(YZ) + \frac{1}{2} dXdYZ + \frac{1}{2} (dXYdZ + \frac{1}{2} dXdYdZ) \\
&= dX(YZ) + \frac{1}{2} dX(dYZ + YdZ).
\end{aligned}$$

d'où (2.4) L'égalité (2.5) se démontre de la même manière.

La formule(2.6) provient de la définition de l'intégrale de Stratonovich et du fait que

$$(dXdY)^T = dY^T dX^T$$

□

2.3 Processus de Wishart

Les Processus de Wishart ont été présenté par Jhon Wishart, et les a employés dans biologie pour étudier des données expérimentales perturbées. Il sont également appelés parce que leurs lois marginales suivent des distribution de Wishart.

Récemment, une grand attention a été prêtée à processus de Wishart pour des applications dans les finances et pour modeler la Matrice de Covariance.

2.3.1 Le carré de Bessel

Le processus Carré de Bessel est le cas unidimensionnel du processus de Wishart et l'un des procédés les plus importants de diffusion.

Définition 2.3.1. Soit $x \geq 0$ et $\delta \geq 0$, l'équation différentielle stochastique :

$$dX_t = 2\sqrt{X_t}dB_t + \delta dt \quad X_0 = x$$

admet un unique solution fort, on appelle ce processus un "carré de Bessel" de dimension δ et l'on note Q_x^δ sa loi.

Théorème 2.5. Soit :

$$dX_t = \delta(X_t)dB_t + b(X_t)dt \tag{2.7}$$

est une équation différentielle stochastique unidimensionnel, où $b, \delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonction continues et B un mouvement brownien unidimensionnel.

Supposons qu'il existe des fonctions croissantes $\rho, K : [0, +\infty] \longrightarrow [0, +\infty]$ tq :

$$|\delta(\xi) - \delta(\eta)| \leq \rho(|\xi - \eta|), \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R} \quad (2.8)$$

avec

$$\int_0^1 \rho^{-2}(u) du < +\infty$$

et

$$|b(\xi) - b(\eta)| \leq K(|\xi - \eta|), \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R} \quad (2.9)$$

avec

$$\int_0^1 K^{-1}(u) du$$

En suite, l'unicité chemin est valable pour (2.7).

Démonstration. Voir[13] □

Théorème 2.6. (Théorème de Comparaison)

Considérons deux équations différentielles stochastiques :

$$dX_t^1 = \sigma(X_t^1)dB_t + b^1(X_t^1)dt, \quad dX_t^2 = \sigma(X_t^2)dB_t + b^2(X_t^2)dt$$

que les deux remplissent l'unicité cheminaire et soient b^1, b^2 deux fonctions borel bornées tq $b^1 \geq b^2$ partout et l'un deux est globalement lipschitz. si (X^1, B) est une solution de la premier, et (X^2, B) est la solution de la deuxième équations différentielle stochastique. (X^1, X^2 définie sur le même espace de probabilité), para port au même mouvement brownien B et si $X_0^1 \geq X_0^2$ alors :

$$p[X_t^1 \geq X_t^2, t \in \mathbb{R}_+] = 1$$

Démonstration. Voir[13] □

Théorème 2.7. (Existence et non-négativité du processus carré de Bessel)

Pour $\delta \geq 0$ et $x_0 \geq 0$, il existe une unique solution fort et non négative X de :

$$X_t = x_0 + 2 \int_0^t \sqrt{X_s} dB_s + \delta t \quad (2.10)$$

sur l'intervalle $[0, +\infty]$

De plus, si $\delta \geq 2$ et $x_0 > 0$ la solution X est positive comme sur $[0, +\infty]$

Démonstration. Nous montrons avec le théorème (2.5) que unicité cheminaire est valable pour l'EDS :

$$dX_t = 2\sqrt{|X_t|}dB_t + \delta dt, \quad X_0 = x_0 \quad (2.11)$$

de puis $|\sqrt{z} - \sqrt{z'}| \leq \sqrt{|z - z'|}$ pour tout $z, z' \geq 0$, nous avons ça :

$$2|\sqrt{|\xi|} - \sqrt{|\eta|}| \leq 2\sqrt{||\xi| - |\eta||} \leq 2\sqrt{|\xi - \eta|} = \rho(|\xi - \eta|), \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}$$

avec $\rho(u) = 2\sqrt{u}$

$$\int_0^1 \rho^{-2}(u) du = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{u} du = \infty \quad (2.12)$$

évidence, donc il existe une unique solution fort pour (2.11)

Ensuite nous montrons que notre solution ne devient jamais négative : d'abord considérons le cas $x_0^1 = 0$ et $\delta^1 = 0$, évidemment $X^1 \equiv 0$ est la unique fort solution dans ce cas.

Deuxième, considérer un arbitraire $x_0^1 \geq 0$ et $\delta^1 \geq 0$.

D'après ce qui précède, nous avons une unique solution fort X^2 , le théorème de comparaison empirique que :

$$p[X_t^2 \geq X_t^1; t \in \mathbb{R}_+] : p[X_t^2 \geq 0; t \in \mathbb{R}_+] = 1$$

et donc X_t^2 est non négative pour tout t presque sûrement par conséquent, nous pouvons jeter le $|\cdot|$ dans (2.11) et X^2 est également l'unique solution fort de (2.10)

enfin on montre que pour $\delta \geq 2$, le set 0 est polaire c'est-à-dire : $P(\inf_s : X_s = 0 < \infty) = 0$ pour toutes les valeurs unitaires $x_0 > 0$, par conséquent dans ce cas l'unique solution fort X est positive pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. \square

2.3.2 Les processus de Wishart

Soit X_t un processus stochastique de dimension δ qui définie comme solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = \sqrt{X_t} dB_t + \sqrt{X_t} dB_t^T + \delta I_m dt, X_0 = x \quad (2.13)$$

où X est à valeurs dans l'espace \mathcal{S}_m^+ des matrices symétriques positives de taille m , B est une matrice brownienne $\delta \times m$ et B^T est sa transposée.

On appelle processus de Wishart de dimension δ une solution de (2.13) et on note par Q_x^δ sa loi, qui est bien définie grâce au.

Théorème 2.8. *-i Si $\delta \in [m - 1, m + 1]$, alors (2.13) possède une unique solution en loi.*

-ii Si $\delta \geq m + 1$, alors (2.13) possède une unique solution fort dans $\bar{\mathcal{S}}_m^+$

-iii Le processus de la valeur propre $\{\lambda_i(t), t \geq 0, 1 \leq i \leq m\}$ ne se heurte jamais c-à-d presque surement on a : $\lambda_i(t) > \dots > \lambda_m(t), \forall t > 0$ D'ailleurs, si $\delta \geq m + 1$ alors $\lambda_m(t) > 0$ pour tout $t > 0$ presque surement, et les valeurs propres satisfaites a l'équation différentielle stochastique :

$$\begin{aligned} d\lambda_i(t) &= 2\sqrt{\lambda_i(t)}d\beta_i(t) + \left\{ \delta + \sum_{k \neq i} \frac{\lambda_i(t) + \lambda_k(t)}{\lambda_i(t) - \lambda_k(t)} \right\} dt \\ &= 2\sqrt{\lambda_i(t)}d\beta_i(t) + \left\{ \delta - m + 1 + 2 \sum_{k \neq i} \frac{\lambda_i(t)}{\lambda_i(t) - \lambda_k(t)} \right\} dt \end{aligned} \quad (2.14)$$

tq : $(\beta_1, \dots, \beta_m)$ sont des mouvement brownien indépendant

-iv Si $\delta \geq m + 1$ alors :

$$d(\det(X_t)) = 2 \det(X_t) \sqrt{\text{tr}(X_t^{-1})} d\beta(t) + (\delta - m + 1) \det(X_t) \text{tr}(X_t^{-1}) dt \quad (2.15)$$

et

$$d(\log(\det(X_t))) = 2\sqrt{\text{tr}(X_t^{-1})} d\beta(t) + (\delta - m + 1) \text{tr}(X_t^{-1}) dt \quad (2.16)$$

où $\beta = \{\beta(t), t \geq 0\}$ une mouvement brownien.

-v Pour tout $\Theta \in \mathcal{S}_m^+$

$$\begin{aligned} Q_x^\delta[\exp(-\text{tr}(\Theta X_t))] &= (\det(I + 2t\Theta))^{-\frac{\delta}{2}} \exp(-\text{tr}(x(I + 2t\Theta)^{-1}\Theta)) \\ &= \exp(-\text{tr}\left(\frac{x}{2t}\right)) (\det(I + 2t\Theta))^{-\frac{\delta}{2}} \exp\left(\frac{1}{2t} \text{tr}(x(I + 2t\Theta)^{-1})\right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Dans ce chapitre on donne les EDS régissant le spectre de carré $B^T B$ d'un $n \times p$ matrices de mouvements browniens indépendants.

Soit $B(t)$ une matrice $n \times p$ de mouvements browniens indépendants, commençant en position $B(0)$. Nous souhaitons étudier l'évolution des valeurs propres et des vecteurs propres du matrice carrée $B^T B$.

3.1 EDS des valeurs propres et vecteurs propres

Définition 3.1.1. On définit le premier instant de collision des valeurs propres par $\tau = \inf\{s/\lambda_i(s) = \lambda_j(s) \text{ pour un couple } (i, j)\}$

Dans ce qui suit, soit $t < \tau$.

Théorème 3.1. Soit

$$X(t) = B(t)^T B(t) \text{ où } B(t) = (B_{ij}(t)) \quad (3.1)$$

est un $n \times p$ mouvement brownien p -dimensionnelle commençant en position $D = (D_{ij})$. on suppose D tel que $X(0) = D^T D$ a p valeurs propres distinctes

$$\lambda_1(0) > \lambda_2(0) > \dots > \lambda_p(0)$$

alors à chaque instant t , $X(t)$ aura avec probabilité 1, p valeurs propres distinctes

$$\lambda_1(t) > \lambda_2(t) > \dots > \lambda_p(t)$$

et le processus $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ satisfait l'équation différentielle stochastique

$$d\lambda_i(t) = 2\sqrt{\lambda_i(t)}(dv_i(t)) + ndt + \sum_{k \neq i} \frac{\lambda_i(t) + \lambda_k(t)}{\lambda_i(t) - \lambda_k(t)} d(t) \quad (3.2)$$

où (v_1, \dots, v_p) sont des mouvements browniens indépendant.

Définition 3.1.2. La matrice logarithme stochastique A de H est la solution de l'EDS suivant :

$$dA = H^T \circ dH = H^T dH + \frac{1}{2}dH^T dH \quad (3.3)$$

Proposition 3.1.1. La matrice H des vecteurs propres satisfait l'EDS matricielle suivant

$$dH = H((dA) + \frac{1}{2}(dA)(dA)) \quad (3.4)$$

Démonstration. Soit $dA = H^T dH + \frac{1}{2}dH^T dH$

En multipliant les cotés de cette équation par H et en ajoutant $\frac{1}{2}dHdA$, on trouve :

$$HdA + \frac{1}{2}(dH)(dA) = dH + \frac{1}{2}H(dH)^T(dH) + \frac{1}{2}(dH)(dA)$$

d'une part on :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(H(dH)^T(dH) + (dH)(dA)) &= \frac{1}{2}(H(dH)^T(dH) + (dH)(H^T(dH) + \frac{1}{2}(dH)^T(dH))) \\ &= \frac{1}{2}(H(dH)^T + dHH^T)dH. \end{aligned} \quad (3.5)$$

D'autre part on a :

$$0 = dI = d(HH^T) = HdH^T + dHH^T + dHdH^T$$

d'ou

$$HdH^T + dHH^T = -dHdH^T$$

on remplace dans (3.5)

$$\frac{1}{2}(H(dH)^T(dH) + (dH)(dA)) = -\frac{1}{2}dHdH^T dH = 0$$

qui entraine que

$$\boxed{dH = H((dA) + \frac{1}{2}(dA)(dA))} \quad (3.6)$$

□

Remarque 3.1.1. Il est facile de vérifier que $dX_t = dB^T \sqrt{X} + \sqrt{X}dB + nIdt$. On appliquée la formule d'intégration par partie :

$$\begin{aligned} dX_t &= d(B^T B) \\ &= dB^T B + B^T dB + dB^T dB \\ &= dB^T \sqrt{X} + \sqrt{X}dB + nIdt \end{aligned}$$

Proposition 3.1.2. *Les éléments $X_{ii}(t)$ de la diagonale de $X(t)$ sont régis l'e.d.s :*

$$dX_{ii}(t) = 2\sqrt{X_{ii}(t)}d\beta_i(t) + ndt$$

où β_1, \dots, β_p sont des mouvements browniens indépendants.

En particulier, cette équation montre que les X_{ii} termes de la diagonale sont des processus de carrés de Bassel.

Démonstration. On a

$$dX_{ii} = \sum_p dB_{ip}^T B_{pi} + \sum_p B_{ip}^T dB_{pi} + \sum_p dB_{ip}^T dB_{pi}$$

d'une part :

$$\begin{aligned} \sum_p dB_{ip}^T dB_{pi} &= \sum_p dB_{pi} dB_{pi} \\ &= \delta_{pp} \delta_{ii} \sum_p dt \\ &= ndt \end{aligned}$$

d'une autre part : pour trouver la partie martingale de dX_{ii} on calcule $dX_{ii}dX_{ii}$

$$\begin{aligned} dX_{ii}dX_{ii} &= \left(\sum_p dB_{ip}^T B_{pi} + \sum_p B_{ip}^T dB_{pi} + \sum_p dB_{ip}^T dB_{pi} \right) \left(\sum_p dB_{ip}^T B_{pi} + \sum_p B_{ip}^T dB_{pi} + \sum_p dB_{ip}^T dB_{pi} \right) \\ &= \left(\sum_p dB_{ip}^T B_{pi} + \sum_p B_{ip}^T dB_{pi} \right) \left(\sum_p dB_{ip}^T B_{pi} + \sum_p B_{ip}^T dB_{pi} \right) \\ &= 4 \sum_p B_{pi} B_{pi} dt \\ &= 4X_{ii}dt \end{aligned}$$

d'ou

$$dX_{ii}(t) = 2\sqrt{X_{ii}(t)}d\beta_i + ndt \quad (3.7)$$

où β_1, \dots, β_p sont des mouvements browniens indépendants. \square

Corollaire 3.1. *On supposons que l'EDS des valeurs propres est vraie. Alors, on a les équations différentielles stochastiques suivantes : Pour $t < T_0 = \inf\{t : \det(X(t)) = 0\}$*

(1)

$$d(\text{tr}(X(t))) = 2\sqrt{\text{tr}(X(t))}d\nu_t + n^2dt \quad (3.8)$$

(2)

$$d(\det(X(t))) = 2\det X(t)\sqrt{\text{tr}(X(t)^{-1})}d\eta_t + \det X(t)\text{tr}(X(t)^{-1})dt \quad (3.9)$$

(3)

$$d(\log(\det(X(t)))) = 2\sqrt{\text{tr}(X(t)^{-1})}d\eta_t - \text{tr}(X(t)^{-1})dt \quad (3.10)$$

(4)

$$d(\det(X(t)))^r = 2r(\det X(t))^r \sqrt{\operatorname{tr}(X(t)^{-1})} d\eta_t + r(2r-1)(\det X(t))^r \operatorname{tr}(X(t)^{-1}) dt \quad (3.11)$$

où ν et η sont des mouvement Brownien réel.

Démonstration. (1) En utilisant la formule (3.7), on obtient :

$$d(\operatorname{tr}(X(t))) = d\left(\sum_i X_{ii}(t)\right)$$

et d'après la formule d'Itô

$$\begin{aligned} d(\operatorname{tr}(X(t))) &= \sum_i dX_{ii}(t) \\ &= \sum_i (2\sqrt{X_{ii}(t)} d\beta_i + ndt) \end{aligned}$$

d'autre part, comme la variation quadratique de $\operatorname{tr}(X)$ est $4 \sum_i X_{ii}(t) dt = 4\operatorname{tr}(X(t)) dt$

Alors :

$$d(\operatorname{tr}(X(t))) = 2\sqrt{\operatorname{tr}(X(t))} d\nu_i + n^2 dt$$

(2) On a $\det(X(t)) = \prod_i \lambda_i$

On utilise la formule(3.2) et par la formule d'Itô, on obtient

$$\begin{aligned} d(\det(X(t))) &= \sum_i \prod_{k \neq i} \lambda_k d\lambda_i + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \prod_{k \neq i, k \neq j} \lambda_k d\lambda_i d\lambda_j \\ &= \sum_i \frac{\det X(t)}{\lambda_i} d\lambda_i + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{\det X(t)}{\lambda_i \lambda_j} d\lambda_i d\lambda_j \end{aligned}$$

Rappelons que $d\lambda_i d\lambda_j = 4\sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j} \delta_{ij} dt$ il en résulte que :

$$\begin{aligned} d(\det(X(t))) &= \det X(t) \sum_i \frac{d\lambda_i}{\lambda_i} \\ &= \det X(t) \sum_i 2 \frac{d\nu_i}{\sqrt{\lambda_i}} + \det X(t) \sum_i \frac{1}{\lambda_i} \left[+ \sum_{k \neq i} \frac{\lambda_i + \lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k} + n \right] dt \end{aligned}$$

comme

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{1}{\lambda_i} \left[+ \sum_{k \neq i} \frac{\lambda_i + \lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k} + n \right] &= \sum_i \frac{n}{\lambda_i} + \sum_i \sum_{k \neq i} \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{\lambda_i + \lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k} \right) \\ &= n \operatorname{tr}(X^{-1}) + \sum_i \sum_{k \neq i} \left(\frac{-1}{\lambda_i} + \frac{2}{\lambda_i - \lambda_k} \right) \\ &= n \operatorname{tr}(X^{-1}) - (n-1) \operatorname{tr}(X^{-1}) + 2 \sum_i \sum_{k \neq i} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_k} \\ &= \operatorname{tr}(X^{-1}(t)). \end{aligned}$$

On peut facilement vérifier par récurrence que $\sum_i \sum_{k \neq i} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_k} = 0$.

La variation quadratique de $\det X$ est alors égale à :

$$4(\det X(t))^2 \sum_{i,j} \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \delta_{ij} dt = 4 \det X(t)^2 \operatorname{tr}(X(t)^{-1}) dt. \text{ d'où le résultat.}$$

Pour obtenir les équations (3.10),(3.11), il suffit d'appliquer la formule d'Itô et utiliser la variation quadratique de $\det X$.

□

Théorème 3.2. *Avec les mêmes hypothèses que dans le Théorème(3.1), $X(t)$ peut être diagonalisée via une transformation orthogonale $H(t)$:*

$$H(t)^T X(t) H(t) = \Lambda(t) = \operatorname{diag}(\lambda_i(t)) \quad (3.12)$$

par conséquent, les vecteurs propres satisfont l'équation

$$\begin{aligned} dH_{ij}(t) &= \sum_{k \neq j} H_{ik}(t) \sqrt{\frac{\lambda_k(t) + \lambda_j(t)}{(\lambda_k(t) - \lambda_j(t))^2}} (d\beta_{kj}(t)) \\ &\quad - \frac{1}{2} H_{ij}(t) \sum_{k \neq j} \frac{\lambda_k(t) + \lambda_j(t)}{(\lambda_k(t) - \lambda_j(t))^2} dt \end{aligned}$$

où $\{\beta_{ij}, 1 \leq i \leq j \leq p\}$ est une famille de mouvements browniens tous indépendants et indépendant du processus $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$.

Démonstration. Preuves de Théorèmes

(a) (Preuve de théorème(3.1))

Soit $\{B_{ij}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p\}$ une famille de mouvements browniens indépendants. Nous avons

$$(dB_{ki})(dB_{lj}) = \delta_{kl} \delta_{ij} dt$$

et puisque

$$\boxed{dX = dB^T B + B^T dB + nI dt} \quad (3.13)$$

On a

$$\begin{aligned} (B^T (dB))_{ij} ((dB)^T B)_{kl} &= \left(\sum_p B_{ip}^T dB_{pj} \right) \left(\sum_p dB_{kp}^T B_{pl} \right) \\ &= \left(\sum_p B_{pi} dB_{pj} \right) \left(\sum_p dB_{pk} B_{pl} \right) \\ &= \sum_p (B_{pi} dB_{pj}) (dB_{pk} B_{pl}) \\ &= \sum_p \delta_{pp} \delta_{jk} B_{pi} B_{pl} dt \\ &= \delta_{jk} \sum_p B_{ip}^T B_{pl} dt \\ &= X_{il} \delta_{jk} dt \end{aligned}$$

d'autre part :

$$\begin{aligned}
 (dX_{ij})(dX_{kl}) &= \left[(dB^T B)_{ij} + (B^T dB)_{ij} + (dB^T dB)_{ij} \right] \left[(dB^T B)_{kl} + (B^T dB)_{kl} + (dB^T dB)_{kl} \right] \\
 &= (dB^T B)_{ij}(dB^T B)_{kl} + (dB^T B)_{ij}(B^T dB)_{kl} \\
 &\quad + (B^T dB)_{ij}(dB^T B)_{kl} + (B^T dB)_{ij}(B^T dB)_{kl} \\
 &= \left(\sum_p dB_{ip}^T B_{pj} \right) \left(\sum_p dB_{kp}^T B_{pl} \right) + \left(\sum_p dB_{ip}^T B_{pj} \right) \left(\sum_p B_{kp}^T dB_{pl} \right) \\
 &\quad + \left(\sum_p B_{ip}^T dB_{pj} \right) \left(\sum_p dB_{kp}^T B_{pl} \right) + \left(\sum_p B_{ip}^T dB_{pj} \right) \left(\sum_p B_{kp}^T dB_{pl} \right) \\
 &= \left(\sum_p dB_{pi} B_{pj} \right) \left(\sum_p dB_{pk} B_{pl} \right) + \left(\sum_p dB_{pi} B_{pj} \right) \left(\sum_p B_{pk} dB_{pl} \right) \\
 &\quad + \left(\sum_p B_{pi} dB_{pj} \right) \left(\sum_p dB_{pk} B_{pl} \right) + \left(\sum_p B_{pi} dB_{pj} \right) \left(\sum_p B_{pk} dB_{pl} \right) \\
 &= \left(\sum_p B_{pj} B_{pl} \delta_{pp} \delta_{jk} + \sum_p B_{pj} B_{pk} \delta_{pp} \delta_{il} + \sum_p B_{pi} B_{pl} \delta_{pp} \delta_{jk} + \sum_p B_{pi} B_{pk} \delta_{pp} \delta_{jl} \right) dt \\
 &= \left(\sum_p B_{pj}^T B_{pl} \delta_{pp} \delta_{jk} + \sum_p B_{jp}^T B_{pk} \delta_{pp} \delta_{il} + \sum_p B_{ip}^T B_{pl} \delta_{pp} \delta_{jk} + \sum_p B_{ip}^T B_{pk} \delta_{pp} \delta_{jl} \right) dt \\
 &= (X_{jl} \delta_{ik} + X_{jk} \delta_{il} + X_{il} \delta_{jk} + X_{ik} \delta_{jl}) dt
 \end{aligned}$$

donc si $i \neq j$ on a :

$$\begin{aligned}
 (dX_{ij})(dX_{ij}) &= (dX_{ij})^2 \\
 &= (X_{jj} \delta_{ii} + X_{ji} \delta_{ij} + X_{ij} \delta_{ji} + X_{ii} \delta_{jj}) dt \\
 &= (X_{ii} + X_{jj}) dt
 \end{aligned}$$

si $i = j$

$$\boxed{(dX_{ii})^2 = 4X_{ii} dt}$$

On sait que les valeurs propres $(\lambda_i(t))_{1 \leq i \leq p}$ de $X(t)$ ce sont des semi-martingales.

D'après la formule (3.12) on applique l'intégral de Stratonovich on trouve :

$$\begin{aligned}
 d\Lambda &= dH^T \circ (XH) + H^T \circ d(XH) \\
 &= (dH^T \circ X) \circ H + H^T \circ (dX \circ H + X \circ dH) \\
 &= (dH^T \circ X) \circ H + H^T \circ dX \circ H + H^T \circ X \circ dH
 \end{aligned}$$

d'où en posant $dN = H^T \circ dX \circ H$,

d'où

$$d\Lambda = (dH^T \circ (H\Lambda H^T)) \circ H + dN + H^T \circ (H\Lambda H^T) \circ dH$$

et d'après la formule(2.3) et le fait que $(ZY \circ dX = Z \circ (Y \circ dX))$,on obtient :

$$\begin{aligned}
 d\Lambda &= dN + dH^T \circ H\Lambda + H^T H\Lambda H^T \circ dH \\
 &= dN + dH^T \circ H\Lambda + \Lambda H^T \circ dH \\
 &= dN + dH^T \circ H \circ \Lambda + \Lambda \circ H^T \circ dH \\
 &= dN - dA \circ \Lambda + \Lambda \circ dA
 \end{aligned}$$

Comme les éléments diagonaux de la matrice $\Lambda \circ dA - dA \circ \Lambda$ sont nuls, alors on a $d\lambda_i = dN_{ii}$ et $0 = dN_{ij} + (\lambda_i - \lambda_j)dA_{ij}$, si $i \neq j$ Ainsi, sur $\{t < \tau\}$.

$$dA_{ij} = \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} dN_{ij} \quad (3.14)$$

Comme $dN = H^T dXH + \frac{1}{2}(H^T dXdH + dH^T dXH)$, il résulte alors que la partie martingale de dN est égale à la partie martingale de $H^T dXH$ donnée par :

$$\begin{aligned}
 dN_{ij}dN_{km} &= (H^T dXH)_{ij}(H^T dXH)_{km} \\
 &= \sum_{p,q} H_{pi}dX_{pq}H_{qj} \sum_{p',q'} H_{p'k}dX_{p'q'}H_{q'm} \\
 &= \sum_{p,q,p',q'} H_{pi}H_{qj}H_{p'k}H_{q'm}[(X_{qq'}\delta_{pp'} + X_{qp'}\delta_{pq'})dt + (X_{pq'}\delta_{p'q'} + X_{pp'}\delta_{qq'})dt] \\
 &= \sum_{q,q'} H_{qj}X_{qq'}H_{q'm} \sum_p H_{pi}H_{pk}dt + \sum_{q,p'} H_{qj}X_{pq'}H_{p'k} \sum_p H_{pi}H_{pm}dt \\
 &+ \sum_{p,q'} H_{pi}X_{pq'}H_{q'm} \sum_q H_{qj}H_{qk}dt + \sum_{pp'} H_{pi}X_{pp'}H_{p'k} \sum_q H_{qj}H_{qm}dt \\
 &= \Lambda_{jm} \sum_p H_{pi}H_{pk}dt + \Lambda_{jk} \sum_p H_{pi}H_{pm}dt + \Lambda_{im} \sum_q H_{qj}H_{qk}dt + \Lambda_{ik} \sum_q H_{qj}H_{qm}dt \\
 &= [\Lambda_{jm}\delta_{ik} + \Lambda_{jk}\delta_{im} + \Lambda_{im}\delta_{jk} + \Lambda_{ik}\delta_{jm}]dt \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

d'ou

$$dN_{ii}dN_{jj} = 4\Lambda_{ij}\delta_{ij}dt = 4\lambda_i\delta_{ij}dt$$

passent maintenant a la partie de variation finit dF de dX est

$$dF = n\delta_{ij}dt + dQ \quad (3.16)$$

$$tq \ dQ = \frac{1}{2}H^T dXdH + \frac{1}{2}dH^T dXH$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
 (dNdA)_{ij} &= \sum_p dN_{ip}dA_{pj} \\
 &= \sum_{p \neq j} dN_{ip} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_p} dN_{pj} \\
 &= \sum_{p \neq j} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_p} [\delta_{ip}dt\Lambda_{pj} + \delta_{ij}dt\Lambda_{pp} + \delta_{pp}dt\Lambda_{ij} + \delta_{pj}dt\Lambda_{ip}] \\
 &= \sum_{p \neq j} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_p} [\lambda_p\delta_{ij} + \lambda_j\delta_{ij}]dt
 \end{aligned}$$

Par suite

$$dQ = \left[\sum_{p \neq i} \frac{\lambda_i + \lambda_p}{\lambda_i - \lambda_p} \right] I dt \quad (3.17)$$

Il résulte des formules (3.15) et (3.16) que :

$$d\lambda_i = 2\sqrt{\lambda_i} dv_i(t) + dF \quad (3.18)$$

Le Théorème (3.1) est alors prouvé.

(b) Preuve du théorème (3.2)

On a d'après la proposition (3.1.1) $dH = H(dA + \frac{1}{2}(dA)(dA))$ Alors les éléments dH_{ij} sont défini par :

$$dH_{ij} = \sum_k H_{ik} dA_{kj} + \frac{1}{2} \sum_k H_{ik} (dAdA)_{kj}$$

On sait que $dA_{ij} = \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i} dN_{ij}$, $i \neq j$, et d'après la formule (3.15) on a :

$$dN_{ij} dN_{ij} = (\lambda_j + \lambda_i) dt$$

ce qui implique que

$$dN_{ij} = \sqrt{\lambda_j + \lambda_i} d\beta_{ij}$$

où (β) un mouvement Brownien matriciel.

Calculons maintenant $(dAdA)_{ij}$ on a :

$$\begin{aligned} (dAdA)_{ij} &= \sum_p dA_{ip} dA_{pj} \\ &= \sum_{p \neq i, p \neq j} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_p} dN_{ip} \frac{1}{\lambda_p - \lambda_j} dN_{pj} \\ &= \sum_{p \neq i, p \neq j} \left[\frac{1}{(\lambda_i - \lambda_p)(\lambda_p - \lambda_j)} [\lambda_i + \lambda_j] \right] dt \end{aligned}$$

Le Théorème(3.2) est prouvé. □

3.2 Temps de collision

Les démonstrations des Théorèmes (3.1) et (3.2) ne serait pas complet si nous ne prouvions pas que $\tau = +\infty$

Corollaire 3.2. *Si à l'instant $t = 0$, les valeurs propres de X sont distinctes $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$, alors le premier temps de collision $\tau = +\infty$ (ps).*

Démonstration. Là encore nous suivrons la méthode suivant : on trouve une fonction réelle \mathcal{U} , définie sur $D = \{(X_1, X_2, \dots, X_p) \in \mathbb{R}^p / X_1 > X_2 > \dots > X_p\}$ avec des dérivées continues et telles que $\mathcal{U}(t) = U(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_p(t))$ est une martingale locale, infinie lorsque deux valeurs propres coïncident. Nous avons vu que

$$d\lambda_i = dm_i + dF$$

où m_i est une martingale.

Appliquons la formules d'Itô à $\mathcal{U}(t)$, on obtient :

$$d\mathcal{U} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \lambda_i} (dm_i) + \sum_i \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \lambda_i} dF + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} (d\lambda_i)(d\lambda_j) \quad (3.19)$$

comme $(d\lambda_i)(d\lambda_j) = 4\lambda_i \delta_{ij} dt$, $\mathcal{U}(t)$ est une martingale locale si la partie de variation finie de (3.19) est nul :

$$\sum_i^k \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \lambda_i} \left(n + \sum_{p \neq i} \frac{\lambda_i + \lambda_p}{\lambda_i - \lambda_p} \right) + 2 \sum_i \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \lambda_i^2} \lambda_i = 0 \quad (3.20)$$

Pour $k = 2$, (3.20) est

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} \left(n + \frac{x+y}{x-y} \right) + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} \left(n + \frac{y+x}{y-x} \right) + 2 \left(\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (3.21)$$

sur $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > y\}$.

Il est naturel de chercher des solution $\mathcal{U}(x, y)$ de (3.21) qui sont des fonction de la différence $x - y$, nulle si il exits un collision.

Alors laisse

$$\mathcal{U}(x, y) = f(x - y) \text{ et } z = x - y$$

(3.21) devient

$$z f''(z) + f'(z) = 0$$

dont la solution sur $]0, +\infty[$ est

$$f(z) = a \log z + b$$

Alors

$$\mathcal{U}(x, y) = \log(x - y)$$

une solution de (3.21). il est alors naturel et facile de montrer que

$$\mathcal{U}(x_1, \dots, x_p) = \sum_{i < j} \log(x_i - x_j)$$

est la solution de (3.20) sur D . par conséquent

$$\mathcal{U}(t) = U(\lambda_1(t), \dots, \lambda_p(t)) = \sum_{i < j} \log(\lambda_i(t) - \lambda_j(t))$$

qui est continue sur $[0, \tau[$ et telle que

$$\lim_{t \uparrow \tau} \mathcal{U}(t) = -\infty$$

est aussi une martingale locale sur $[0, \tau[$ donc c'est une transformation temporelle de mouvement brownien.

Nous pouvons maintenant suivre l'argument suivant : Si $\zeta(t)$ est sur $[0, \tau[$ la fonction inverse de

$$\langle \mathcal{U} \rangle(t) = \int_0^t \sum_i \sum_{j \neq i} \left(\frac{1}{\lambda_i(s) - \lambda_j(s)} \right)^2 ds$$

$B(t) = \mathcal{U}(\zeta(t))$ est un mouvement brownien sur $[0, \langle U \rangle(t)[$ $\tau < +\infty$ impliquerait

$$\lim_{t \uparrow \langle U \rangle(\tau)} B(t) = \lim_{t \uparrow \tau} \mathcal{U}(t) = -\infty$$

ce qui est impossible si $B(t)$ est un Mouvement brownien. Par conséquent $\tau = +\infty$ ps. \square

CONCLUSION

La théorie des matrices aléatoires, initialement introduite par Wigner dans le contexte de la physique nucléaire, elle est devenue et reste aujourd'hui encore un domaine de recherche très actif aussi bien en mathématiques, en physique...etc.

Pendant notre travail, nous avons étudié les lois de probabilités dans les ensembles (G.O.E), (G.O.U) et l'ensemble de Wishart dans chaque cas nous avons expliciter les formules des densités des ces matrices et des valeurs propres. On peut également donner les équations différentielles stochastiques des valeurs propres et des vecteurs propres pour un processus de Wishart défini à l'aide d'un mouvement Brownien matriciel par la technique de perturbation et la formule d'intégration par parties matricielle.

- [1] J-C. Breton, Calculs stochastique, cours M2 Mathématiques, Université de Rennes 1, (Septembre-Décembre 2014).
- [2] M. F. Bru, Diffusions of perturbed principal component analysis, *Journal of Multivariate Analyses*. **29**(1989), 127-134.
- [3] D.Chafai,F.Malrieu , Matrices aléatoires,*Mathématique et Applications*, **78**, Springer, Berlin, Herlin, Heidelberg, (2016).
- [4] M. Capitaine, Introduction aux grandes matrices aléatoires, cours M2R, Institut de mathématiques de Toulouse,(2012).
- [5] A. Crrouzet,P.Biane, Introduction aux matrices aléatoires, (5 fvrier 2010).
- [6] Y. Doumerc, Matrices aléatoires, processus stochastiques et groupes de réflexions, Thèse de Doctorat (30 mai 2005),pp 33-35, pp103-106.
- [7] L. Dumaz, Matrices aléatoires, graphes aléatoires et quelques applications aux matrices de corrélations,cours, Bordeaux(2019).
- [8] L. Gueriteau,TER La loi du demi-cercle, Université DE Grenoble Alpes (19 mai 2017).
- [9] M. Madi, Processus stochastique, , Cours M1 Mathématiques proba, Université de Jijel ,(2018), 1-50.
- [10] S. Meradji, Analyse stochastique des valeurs propres des matrices aléatoires à valeurs G-browniennes,Thèse de Doctorat, Université Badji Mokhtar de Annaba, (2018).

- [11] C. Nadal, Matrices aléatoires et leurs applications à la physique statistique et quantique, Thèse de Doctorat. Université Paris Sud - Paris XI, (2011).
- [12] O. Pfaffal, Wishart processes, *arXiv :1201.3256v1 [math.PR]*, (2012).
- [13] S. Stihi, Valeurs propres des matrices aléatoires et lien avec les G-équations différentielles stochastiques, Thèse de Doctorat , Université Badji Mokhtar de Annaba,(2018).
- [14] Y. Velenik, *Choisis de Théorie des Probabilités, Université de Genève, version du 19 Décembre 2016.*