

Faculté des Sciences Exactes et Informatique  
Département de Mathématiques



N° d'ordre : .....

N° de série : .....

## Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

**Master**

**Spécialité** : Mathématiques.

**Option** : Mathématiques Fondamentales et Discrètes.

**Thème**

# Combinatoire et fonctions symétriques généralisées

Présenté par :

**Mariam BOUZERAIB**

**Devant le jury**

Président	<b>Abderrahmane BOUCHAIR</b>	M.C.A. Université de Jijel
Encadreur	<b>Moussa AHMIA</b>	M.C.A Université de Jijel
Examineur	<b>Mounira BOULOUH</b>	M.A.A. Université de Jijel

---

# REMERCIEMENTS

*Je remercie en premier lieu **ALLAH**, pour la foi, la confiance et la volonté qu'il m'a donné durant ces longues années d'études et le courage pour terminer ce mémoire.*

*Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à mon encadreur **Mr M. AHMIA** pour ses multiples conseils et pour m'avoir guidé qui m'a fait sur le droit chemin afin de réaliser ce modeste travail.*

*Ma gratitude va également à **Mr A. BOUCHAIR** qui m'a fait l'honneur en acceptant de présider notre jury de mémoire. Je remercie également **Mlle M. Boullouh**, pour l'honneur qu'elle m'a fait en acceptant de participer à ce jury.*

*Sans oublier tous les enseignants d'avoir contribué à notre formation, ainsi qu'à toute l'équipe du département de mathématiques en général, et l'équipe de mathématiques fondamentales et discrète en particulier.*

*je tiens à remercier plus personnellement : ma belle fleur ma mère, celui qui a toujours aidé et encouragé mon papa et tous ma famille, ainsi que tous ceux qui m'ont aidé, de près ou de loin.*

**MERCI**

**Mariem**

---

# NOTATIONS

Nous utilisons les notations suivantes tout au long de ce travail.

$\mathbb{N}$	:	l'ensemble des entiers naturels ;
$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$	:	le réseau (ou plan combinatoire) ;
$[n]$	:	l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ , pour $n \in \mathbb{N}$ ;
$:=$	:	égalité par définition ;
$\lambda$	:	une partition de $n$ , pour $n \in \mathbb{N}$ ;
$\lambda'$	:	la partition conjuguée de $\lambda$ ;
$\lambda \setminus \mu$	:	une forme gauche des partitions ;
$l(\lambda)$	:	la longueur de $\lambda$ ;
$m_i(\lambda)$	:	la multiplicité de la part $i$ dans $\lambda$ ;
$\mathcal{P}[n]$	:	l'ensemble de toutes les partitions de $n$ ;
$\mathcal{P}_K[n]$	:	l'ensemble de toutes les partitions de $n$ , dont toutes les parts dans $K$ ;
$\mathcal{P}_{K,\neq}[n]$	:	l'ensemble de toutes les partitions de $n$ , dont toutes les parts dans $K$ telles que ces parts sont distinctes ;
$\mathcal{P}_{k,n}$	:	l'ensemble des chemins de but $p = (k, n)$ et de source $(0, 0)$ ;
$p(n)$	:	le cardinal de $\mathcal{P}[n]$ ;
$p_K(n)$	:	le cardinal de $\mathcal{P}_K[n]$ ;
$p_{K,\neq}(n)$	:	le cardinal de $\mathcal{P}_{K,\neq}[n]$ ;
$Y(\lambda)$	:	diagramme de Young ;
$Y(\lambda \setminus \mu)$	:	diagramme de Young gauche ;
$T$	:	tableau de Young ;
$c(T)$	:	le contenu de $T$ ;
$x^T$	:	le poids de $T$ ;
$f^\lambda$	:	le nombre de tableaux de Young standard ;
$H_{i,j}$	:	équerre associée à une case $(i, j)$ , d'un diagramme $D$ ;
$h_{i,j}$	:	la longueur d'une équerre ;

---

$\gamma$	:	chemin dans le réseau $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ;
$\omega(\gamma)$	:	le mot associé au chemin $\gamma$ ;
$\sigma$	:	une permutation de $[n]$ ;
$\Lambda_n$	:	l'espace de tous les polynômes symétriques;
$\Lambda_n^k$	:	l'espace des polynômes symétriques homogènes de degré $k$ ;
$m_\lambda$	:	la fonction symétrique monômiale associée à la partition $\lambda$ ;
$e_k$	:	la fonction symétrique élémentaire de degré $k$ ;
$e_\lambda$	:	la fonction symétrique élémentaire associée à la partition $\lambda$ ;
$E(t)$	:	la série génératrice pour $e_k$ ;
$h_k$	:	la fonction symétrique complète de degré $k$ ;
$h_\lambda$	:	la fonction symétrique complète associée à la partition $\lambda$ ;
$H(t)$	:	la série génératrice pour $h_k$ ;
$p_k$	:	la fonction symétrique somme de puissance de degré $k$ ;
$p_\lambda$	:	la fonction symétrique somme de puissance associée à la partition $\lambda$ ;
$P(t)$	:	la série génératrice pour $p_k$ ;
$s_\lambda$	:	la fonction de Schur associée à la partition $\lambda$ ;
$x^{\bar{n}}$	:	la factorielle montante de $x$ d'ordre $n$ ;
$(x \alpha)^{\bar{n}}$	:	la factorielle montante de $x$ , de coefficient $\alpha$ et d'ordre $n$ ;
$x^{\underline{n}}$	:	la factorielle descendante de $x$ d'ordre $n$ ;
$(x \alpha)^{\underline{n}}$	:	la factorielle descendante de $x$ , de coefficient $\alpha$ et d'ordre $n$ ;
$A_{n,k}$	:	le nombre d'arrangement de $[k]$ dans $[n]$ ;
$\mathcal{O}_\iota$	:	l'orbite de $\iota \in [n]$ pour une permutation;
$\binom{n}{k}$	:	coefficient binomial $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ ;
$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_t}$	:	coefficient multibinomial $\frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_t!}$ ;
$\binom{n}{k}_s$	:	coefficient bi <sup>s</sup> nomial;
$c(n, k)$	:	nombre de Stirling de première espèce non-signé;
$s(n, k)$	:	nombre de Stirling de première espèce signé;
$S(n, k)$	:	nombre de Stirling de deuxième espèce;
$L(n, k)$	:	nombre de Lah;
$Q'_n(G)$	:	l'ensembles des toutes les $G$ -partitions partielles de $[n]$ ;
$Q_n(G)$	:	réseau de Dowling;
$P(x; m)$	:	polynôme caractéristique du réseau de Dowling;
$\omega_m(n, k)$	:	nombre de Whitney de première espèce;
$W_m(n, k)$	:	nombre de Whitney de deuxième espèce;
$[n]_q$	:	$q$ -analogue d'un entier $n$ ;
$[n]_q!$	:	$q$ -factorielle d'un entier $n$ ;
$[x]_q^{\bar{n}}$	:	$q$ -factorielle montante;
$[x]_q^{\underline{n}}$	:	$q$ -factorielle descendante;
$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$	:	Le coefficient $q$ -binomial : $\frac{[n]_q!}{[k]_q! [n-k]_q!}$ ;
$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)}$	:	Le coefficient $q$ -bi <sup>s</sup> nomial;

---

---

$c_q(n, k)$	:	nombre $q$ -Stirling de première espèce ;
$S_q(n, k)$	:	nombre $q$ -Stirling de deuxième espèce ;
$\omega_{m,q}(n, k)$	:	nombre $q$ -Whitney de première espèce ;
$W_{m,q}(n, k)$	:	nombre $q$ -Whitney de deuxième espèce ;
$E_k^{(s)}$	:	la fonction symétrique élémentaire généralisée ;
$P_k^{(s)}$	:	la fonction symétrique complète généralisée ;
$H_k^{(s)}$	:	la fonction symétrique somme de puissances généralisée ;
$X^{\omega_T}$	:	le poids de pavage $T$ ;
$\lfloor x \rfloor$	:	partie entière inférieure de $x$ .

---

---

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Partition d'entier et Fonctions symétriques</b>	<b>3</b>
1.1 Partition d'entier et tableau de Young . . . . .	3
1.1.1 Énumération des partitions . . . . .	4
1.1.2 Série génératrice . . . . .	5
1.1.3 Diagramme de Young . . . . .	6
1.1.4 Tableau de Young . . . . .	9
1.1.5 Formule des équerres . . . . .	10
1.2 Chemins de réseau $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . . . . .	11
1.3 Fonctions symétriques . . . . .	12
1.3.1 Fonctions symétriques monômiales . . . . .	13
1.3.2 Fonctions symétriques élémentaires . . . . .	13
1.3.3 Fonctions symétriques complètes . . . . .	15
1.3.4 Fonctions symétriques somme des puissances . . . . .	18
1.3.5 Fonction de Schur . . . . .	23
<b>2 Suites remarquables et leur analogue</b>	<b>26</b>

2.1	Comptage et dénombrement . . . . .	26
2.1.1	Définitions et outils de bases . . . . .	26
2.1.2	Coefficients binomiaux . . . . .	29
2.1.3	Coefficients multinomiaux . . . . .	30
2.2	Suites remarquables . . . . .	31
2.2.1	Les nombres de Stirling . . . . .	31
2.2.2	Les nombres de Lah . . . . .	38
2.2.3	Les nombres de Whitney du réseau de Dowling . . . . .	41
2.3	$q$ -Analogues des suites remarquables . . . . .	44
2.3.1	Coefficients $q$ -binomiaux . . . . .	44
2.3.2	Les nombres $q$ -Stirling . . . . .	46
2.3.3	Les nombres $q$ -Whitney . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Une généralisation des fonctions symétriques classiques</b>	<b>51</b>
3.1	Fonctions symétriques généralisées . . . . .	51
3.2	Les fonctions symétriques généralisées en termes des fonctions symétriques classiques . . . . .	60
3.3	Les interprétations combinatoires des fonctions symétriques généralisées . .	66
3.4	Applications . . . . .	69
3.4.1	Coefficients bi <sup>s</sup> nomiaux . . . . .	69
3.4.2	Coefficients $q$ -bi <sup>s</sup> nomiaux . . . . .	71

---

---

# TABLE DES FIGURES

1.1	Diagramme de Young et Diagramme de Ferrer associés à la partition $\lambda = (4, 4, 2, 1)$ . . . . .	7
1.2	Diagramme de Young conjugué de $\lambda = (4, 4, 2, 1)$ . . . . .	7
1.3	Diagramme de Young de $\lambda = (4, 3, 2, 1)$ et son diagramme transposé. . . .	8
1.4	Diagramme de Young associé à $\lambda = (5, 4, 3, 2)$ et Diagramme de Young associé à $\mu = (4, 2, 1)$ . . . . .	9
1.5	Diagramme de Young associé à la forme gauche $(5, 4, 3, 2) \setminus (4, 2, 1)$ . . . . .	9
1.6	Tableau de Young semi-standard associé à la partition $\lambda = (4, 4, 2, 1)$ à valeurs dans [11]. . . . .	10
1.7	Le réseau $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . . . . .	11
1.8	Un chemin allant de $(0, 0)$ à $(9, 4)$ . . . . .	12
2.1	Une 3-permutation de [8]. . . . .	28
2.2	Triangle de Pascal . . . . .	30
3.1	Les six chemins de $(0, 0)$ à $(4, 2)$ associés à $E_4^{(2)}(3)$ . . . . .	66
3.2	Les quatre chemins de $u$ à $v$ associés à $H_3^{(2)}(3)$ . . . . .	68
3.3	Un pavage du poids et son chemin de réseau associé. . . . .	68
3.4	Les quatre pavages associés à $H_3^{(2)}(3)$ . . . . .	69



---

3.5	Les six chemins du réseau de $(0, 0)$ à $(4, 2)$ . L'exposant de $q$ dans le poids de chaque chemin est donné par le comptage du nombre des cases qui sont en dessous et à droite des chemins. . . . .	74
-----	--	----

---

---

# LISTE DES TABLEAUX

2.1	Les nombres de Stirling de première espèce non-signés. . . . .	32
2.2	Les nombres de Stirling de deuxième espèce. . . . .	36
2.3	Les nombres de Lah. . . . .	39
2.4	Table des valeurs de $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ . . . . .	45
2.5	Table des premières valeurs de $c_q(n, k)$ . . . . .	47
2.6	Table des premières valeurs de $S_q(n, k)$ . . . . .	48
3.1	Triangle des coefficients bitrinomiaux $\binom{n}{k}_2$ . . . . .	70

---

# INTRODUCTION

Un des blocs fondateurs des fonctions symétriques moderne fut l'introduction en 1995 (voir [15]). Dans la théorie des fonctions symétriques, on opère avec un grand nombre de variables indéterminées, et sont liées de près au groupe symétrique  $\mathbb{S}_n$  qui est le groupe des permutations de  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Les fonctions symétriques se situent dans le domaine de la combinatoire où la motivation principale est le calcul de certaines identités issues des mathématiques discrètes ou de la physique, à l'aide des objets combinatoire.

La combinatoire énumérative est la branche qui s'intéresse aux structures discrètes, et en particulier elle étudie les configurations de collections finies d'objets, les combinaisons d'ensembles finis et leurs dénombrements, voir par exemple [5, 9].

Ce mémoire est situé à l'intersection de la combinatoire et la théorie des fonctions symétriques. L'intersection entre les fonctions symétriques et la combinatoire est à double sens. D'une part, les résultats de nombreux problèmes d'énumération s'expriment sous forme de développement de fonction symétrique dans une base judicieuse. D'autre part, des problèmes difficiles d'algèbre nécessitent le calcul de semblables plus en détail, nous allons voir que les bases des fonctions symétriques sont naturellement indexées par les partitions d'entiers.

L'objectif de ce mémoire, est de faire un survey sur une extension des fonctions symétriques classiques : la fonction symétrique élémentaire, complète et somme de puissance. En particulier, savoir la généralisation de certaines relations classiques, et l'étude de l'interprétation combinatoire de ces fonctions symétriques généralisées (les travaux de Ahmia et Merca dans [2], et de Bazeniari et al. dans [3]).

En fait, la fonction symétrique élémentaire généralisée  $E_k^{(s)}$  a d'abord été suggérée par Bazeniari et al. [3]. Fu et Mei [11], Grinderg [13] ont indépendamment introduit la fonction symétrique généralisée  $E_k^{(s)}$ . Grinderg a noté cette fonction par  $G(s, k)$  et appelée

la fonction symétrique de Petrie pendant que Fu et Mei utilisaient la notation  $h_k^{[s]}$  et l'a référée comme une fonction symétrique homogène tronquée.

Ce mémoire est réparti sur trois chapitres.

Le premier chapitre, regroupe les notions des partitions d'entiers, le tableau de Young, les chemins dans un réseau  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  pour coder des structures combinatoires, ainsi les fonctions symétriques classique et la relation entre eux.

Un deuxième chapitre introductif des concepts et notions de base de la combinatoire énumérative. Nous rappelons quelques outils et techniques de comptage combinatoire tels les combinaisons, les permutations, les arrangements, les listes,... Nous présenterons certaines suites remarquables liées aux fonctions symétriques élémentaire et complète, et on étudie le  $q$ -analogue de ces suites.

Au dernier chapitre, nous considérons une généralisation des fonctions symétriques élémentaire et complète à partir de leurs fonctions génératrices, on généralise certaines relations classiques impliquant des fonctions symétriques (élémentaire, complète et somme de puissance). On montre que les fonctions symétriques généralisées  $E_k^{(s)}$  et  $H_k^{(s)}$  peuvent être exprimées en termes des fonctions symétriques classiques, et nous considérons quelques interprétations combinatoire pour ces fonctions symétriques. Comme application, on utilise la fonction symétrique élémentaire généralisée pour interpréter les coefficients bi<sup>s</sup>nomiaux et leurs analogues par les chemins de réseau, motivés par cette interprétation on montre la relation de symétrie pour les coefficients  $q$ -bi<sup>s</sup>nomiaux.

---

---

---

# CHAPITRE 1

---

## PARTITION D'ENTIER ET FONCTIONS SYMÉTRIQUES

Nous commençons ce mémoire par ce chapitre dans lequel on présente quelques définitions de partitions d'entiers, tableau de Young, et chemin de réseau. Ensuite nous exposons certains éléments de base de la théorie des fonctions symétriques, en fait avec l'introduction de la fonction de Schur, et son interprétation combinatoire. Pour plus d'informations voir [1, 5, 10, 15, 20, 22].

### 1.1 Partition d'entier et tableau de Young

**Définition 1.1.1.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ , une partition de  $n$  est une suite décroissante finie d'entiers positifs notée par  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  vérifiant :

$$\begin{cases} \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k, \\ |\lambda| = \sum_{i=1}^k \lambda_i = n. \end{cases}$$

où  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  sont les parts de  $\lambda$ .

On appelle la longueur de  $\lambda$  le nombre des parts de  $\lambda$  notée par  $l(\lambda) = k$ . Si  $\lambda$  est une partition de  $n$ , on écrit  $\lambda \vdash n$ .

**Définition 1.1.2.** Si  $\lambda$  a  $m_i$  parts de taille  $i$ , on écrit encore  $\lambda$  par  $\lambda = 1^{m_1} 2^{m_2} \dots n^{m_n}$ , avec  $m_i$  est la multiplicité de la parts  $i$  dans  $\lambda$ , donc :

$$m_i = m_i(\lambda) = \text{card}\{j, \lambda_j = i\}.$$

On désigne par  $\mathcal{P}[n]$  l'ensemble de toutes les partitions de  $n$  et on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}[0] &= \{0\}, \\ \mathcal{P}[1] &= \{1\}, \\ \mathcal{P}[2] &= \{2, 11\}, \\ \mathcal{P}[3] &= \{3, 21, 111\}, \\ \mathcal{P}[4] &= \{4, 31, 22, 211, 1111\}, \\ \mathcal{P}[5] &= \{5, 41, 32, 311, 221, 2111, 11111\}, \\ &\vdots\end{aligned}$$

On note  $p(n)$  le nombre des partitions de  $n$ , et on a les premières valeurs de  $n$  données par :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
p(n)	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	...

### 1.1.1 Énumération des partitions

**Définition 1.1.3.** Soit  $K$  un sous ensemble de  $\mathbb{N}^*$ , pour chaque  $p(n)$  on considère l'ensemble  $\mathcal{P}_K[n]$  des partitions de  $n$  dont toutes les parts sont dans  $K$ . Le cardinal de  $\mathcal{P}_K[n]$  noté par  $p_K(n)$ .

**Exemple 1.1.1.** On choisit  $I$  égal au sous-ensemble des entiers impairs :

$$I = \{2k + 1/k \in \mathbb{N}\}.$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_I[1] &= \{1\}, \\ \mathcal{P}_I[2] &= \{11\}, \\ \mathcal{P}_I[3] &= \{3, 111\}, \\ \mathcal{P}_I[4] &= \{31, 1111\}, \\ \mathcal{P}_I[5] &= \{5, 311, 11111\}, \\ \mathcal{P}_I[6] &= \{51, 33, 3111, 111111\}, \\ &\vdots\end{aligned}$$

**Remarque 1.1.1.** 1. On considère aussi l'ensemble  $\mathcal{P}_{K,\neq}[n]$ , de toutes les partitions de  $n$ , dont toutes les parts dans  $K$  telles que ces parts sont distinctes.

On note alors  $p_{K,\neq}(n)$  le nombre des éléments de cet ensemble.

2. Dans le cas  $K = \mathbb{N}^*$ , on trouve  $\Lambda_{\neq}[n]$ , l'ensemble des toutes les partitions de  $n$ , telles que les parts des partitions sont distinctes.

On note  $p_{\neq}(n)$  le cardinal de cet ensemble.

### 1.1.2 Série génératrice

A chacune famille des partitions on associe une série génératrice :

- 1).  $\mathcal{P}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)z^n$  (toutes les partitions).
- 2).  $\mathcal{P}_K(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_K(n)z^n$  (parts dans  $K$ ).
- 3).  $\mathcal{P}_{\neq}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{\neq}(n)z^n$  (parts distinctes).
- 4).  $\mathcal{P}_{K,\neq}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{K,\neq}(n)z^n$  (parts distinctes dans  $K$ ).

**Théorème 1.1.1.** Soit  $K \subseteq \mathbb{N}^*$ , alors on a

$$\mathcal{P}_K(z) = \prod_{k \in K} \frac{1}{1 - z^k}, \quad \mathcal{P}_{K,\neq}(z) = \prod_{k \in K} (1 + z^k).$$

**Preuve.** Soit  $K = \{k_1, k_2, \dots\}$ , alors

1).

$$\begin{aligned} \prod_{k \in K} \frac{1}{1 - z^k} &= (1 + z^{k_1} + z^{2k_1} + \dots) \cdot (1 + z^{k_2} + z^{2k_2} + \dots) \dots \\ &= \sum_{\sum n_i < \infty} z^{n_1 k_1} z^{n_2 k_2} \dots \\ &= \sum_{n \geq 0} p_K(n) z^n. \end{aligned}$$

les  $x^{n_i k_i}$  signifient qu'on a pris  $n_i$  fois une part de taille  $k_i$ .

- 2). On montre la seconde formule de façon similaire. Dans le développement du produit  $\prod_{k \in K} (1 + z^k)$ , on prend  $z^k$  dans le facteur  $(1 + z^k)$  si la part  $k$  apparaît dans la partition, sinon on prend le 1. On a donc au plus une part de chacune des tailles apparaissant dans  $K$ . ■

Dans le cas  $K = \mathbb{N}^*$ , on trouve le résultat suivant.

**Corollaire 1.1.1.** On a,

$$\mathcal{P}(z) = \prod_{k \geq 1} \frac{1}{1 - z^k}, \quad \mathcal{P}_{\neq}(z) = \prod_{k \geq 1} (1 + z^k).$$

**Proposition 1.1.1.** L'énumération des partitions en parts impaires et l'énumération des partitions en parts distinctes sont égaux, c'est à dire  $p_I(n) = p_{\neq}(n)$ .

---

**Preuve.** On peut les démontrer par le calcul suivant sur les séries génératrices.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} p_{\neq}(z)z^n &= (1+z)(1+z^2)(1+z^3)(1+z^4)\cdots \\
&= \left(\frac{1-z^2}{1-z}\right) \left(\frac{1-z^4}{1-z^2}\right) \left(\frac{1-z^6}{1-z^3}\right) \left(\frac{1-z^8}{1-z^4}\right) \cdots \\
&= \frac{1}{(1-z)(1-z^3)(1-z^5)\cdots} \\
&= \frac{1}{1-z} \frac{1}{1-z^3} \frac{1}{1-z^5} \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} p_I(z)z^n.
\end{aligned}$$

D'où par identification, on trouve

$$p_I(n) = p_{\neq}(n).$$

■

### 1.1.3 Diagramme de Young

**Définition 1.1.4.** *Un diagramme est un sous-ensemble fini  $D = \{(i_1, j_1), \dots, (i_n, j_n)\}$  de  $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ . Les éléments de  $D$  sont appelés les cases de  $D$ . Une case  $(i, j)$  d'un diagramme correspond à un carré unitaire dans le plan  $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ .*

**Définition 1.1.5.**

- 1). *On appelle diagramme de Young de taille  $n$  associé à une partition de  $n$ , le diagramme de  $l(\lambda)$  lignes ayant  $\lambda_i$  cases cadrées à gauche dans la  $i$ -ème ligne. On peut écrire :*

$$Y(\lambda) = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, 1 \leq i \leq l(\lambda) \text{ et } 1 \leq j \leq \lambda_i\}. \quad (1.1)$$

- 2). *Si les points sont utilisés à la place des cases, alors le diagramme obtenu s'appelle diagramme de Ferrer.*

**Exemple 1.1.2.** *Soit  $\lambda = (4, 4, 2, 1)$  une partition de 11, avec  $l(\lambda) = 4$ , on a son diagramme de Young et de Ferrer :*

$$Y(\lambda) = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}.$$



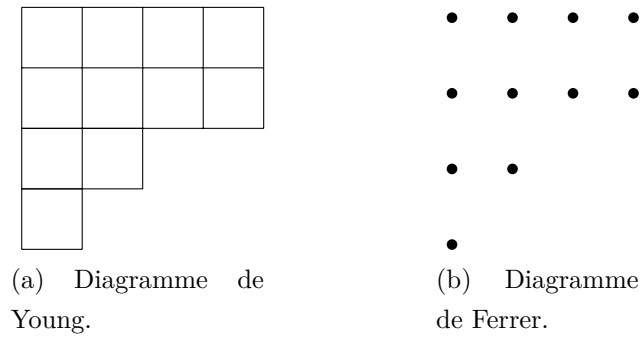


FIGURE 1.1 – Diagramme de Young et Diagramme de Ferrer associés à la partition  $\lambda = (4, 4, 2, 1)$ .

**Définition 1.1.6.** Soit  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  une partition. On définit la partition conjuguée  $\lambda'$  par

$$\lambda'_i = \text{card}\{j, \lambda_j \geq i\}.$$

En fait, la partition conjuguée à notation multiplicative,

$$1^{\lambda_1 - \lambda_2} 2^{\lambda_2 - \lambda_3} \dots (k-1)^{\lambda_{k-1} - \lambda_k} k^{\lambda_k}.$$

Graphiquement, la partition conjuguée  $\lambda'$  d'une partition est la partition dont le diagramme est la transposition du diagramme de  $\lambda$  (i.e le diagramme obtenu par réflexion dans la diagonal principale), et on définit le diagramme conjugué :

$$Y(\lambda') = \{(j, i), (i, j) \in Y(\lambda)\}. \quad (1.2)$$

**Exemple 1.1.3.** Soit la partition  $\lambda = (4, 4, 2, 1)$ , avec le diagramme de Young de la figure 1.1, dont le diagramme transposé suivant :

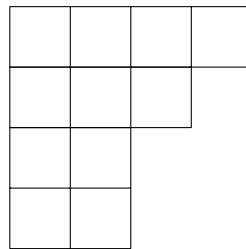
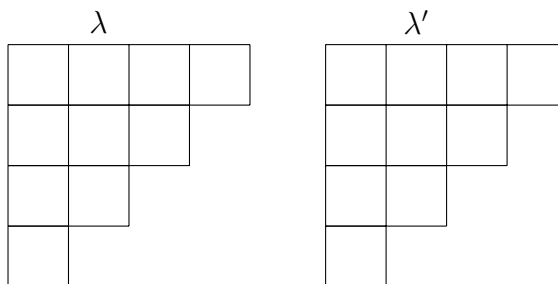


FIGURE 1.2 – Diagramme de Young conjugué de  $\lambda = (4, 4, 2, 1)$ .

Selon la Figure 1.2 la partition conjuguée de  $\lambda = (4, 4, 2, 1)$  est la partition  $\lambda' = (4, 3, 2, 2)$ .

**Définition 1.1.7.** Une partition  $\lambda$  est dite autoconjuguée, si le transposé de son diagramme de Young est le diagramme lui même.

**Exemple 1.1.4.** La partition  $\lambda = (4, 3, 2, 1)$  est une partition autoconjuguée.

FIGURE 1.3 – Diagramme de Young de  $\lambda = (4, 3, 2, 1)$  et son diagramme transposé.

### Ordres partielles sur les partitions

L'ensemble des partitions admet trois ordres partiels.

- **Ordre d'inclusion** : Une partition  $\mu$  est contenue dans une partition  $\lambda$ , si le diagramme de Young de la partition  $\lambda$  contient le diagramme de Young de la partition  $\mu$ . Cela signifie que si  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  et  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$  alors  $\lambda_i \geq \mu_i$ . On note par  $\subseteq$  l'ordre d'inclusion sur les partitions.
- **Ordre de dominance** : On dit qu'une partition  $\lambda$  domine une partition  $\mu$ , si  $\lambda_1 + \dots + \lambda_k \leq \mu_1 + \dots + \mu_k$ . On écrit  $\lambda \triangleleft \mu$  lorsque  $\lambda$  domine  $\mu$ .
- **Ordre lexicographique** : On écrit  $\lambda < \mu$  si la première différence non nulle  $\mu_i - \lambda_i$  est positive.

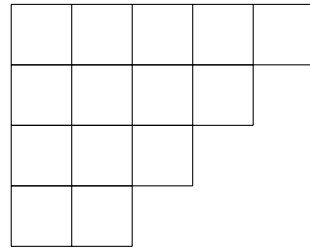
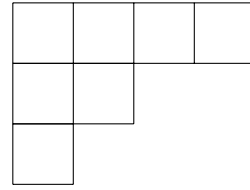
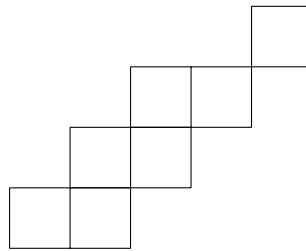
**Définition 1.1.8.** Une forme gauche est un couple  $(\lambda, \mu)$  de partitions tel que  $\mu \subseteq \lambda$  notée par  $\lambda \setminus \mu$ . Le diagramme gauche d'une forme gauche est la différence ensembliste des diagrammes de Young de  $\lambda$  et de  $\mu$ , et on écrit :

$$Y(\lambda \setminus \mu) = \{(i, j), (i, j) \in Y(\lambda) \text{ et } (i, j) \notin Y(\mu)\}. \quad (1.3)$$

**Remarque 1.1.2.** On peut étendre la définition de la transposition à des formes gauches par :

$$Y((\lambda \setminus \mu)') = \{(j, i), (i, j) \in Y(\lambda) \text{ et } (i, j) \notin Y(\mu)\}. \quad (1.4)$$

**Exemple 1.1.5.** Soient  $\lambda = (5, 4, 3, 2)$ ,  $\mu = (4, 2, 1)$  deux partitions, alors on peut représenter le diagramme de la forme gauche  $(5, 4, 3, 2) \setminus (4, 2, 1)$  comme suit :

(a) Diagramme de Young associé à  $\lambda$ .(b) Diagramme de Young associé à  $\mu$ .FIGURE 1.4 – Diagramme de Young associé à  $\lambda = (5, 4, 3, 2)$  et Diagramme de Young associé à  $\mu = (4, 2, 1)$ .FIGURE 1.5 – Diagramme de Young associé à la forme gauche  $(5, 4, 3, 2) \setminus (4, 2, 1)$ .

### 1.1.4 Tableau de Young

**Définition 1.1.9.** *Un tableau de Young d'une partition  $\lambda$  à valeurs dans  $[n]$  est une fonction*

$$T : Y(\lambda) \rightarrow [n],$$

$$(i, j) \rightarrow T(i, j) = T_{i,j}.$$

*Un tableau de Young est construit à partir du diagramme de Young tel que ses cases sont remplies avec des éléments de l'ensemble  $[n]$ , il est indexé par :*

$$T = \{T(i, j), 1 \leq i \leq l(\lambda), 1 \leq j \leq \lambda_i\}. \quad (1.5)$$

**Définition 1.1.10.** 1). *Un tableau de Young est dit semi-standard, si les nombres placés dans ses cases sont en ordre croissant pour chaque ligne, et strictement croissant pour chaque colonne, c'est à dire :*

$$T(i, j) \leq T(i + 1, j) \quad \text{et} \quad T(i, j) < T(i, j + 1).$$

2). *Un tableau de Young est dit standard, s'il est semi-standard et chaque élément de  $[n]$  apparait exactement une fois dans le tableau.*

**Définition 1.1.11.** 1). Soit  $T$  un tableau de Young, on définit le contenu  $c$  de  $T$  par :

$$c(T) = 1^{m_1} 2^{m_2} \dots \quad (1.6)$$

où les  $m_i$  sont les multiplicités de l'entier  $i$  dans  $T$ .

2). Soit  $T$  un tableau de Young, on appelle poids de  $T$  et on note  $x^T$  le monôme dont l'exposant de  $x_i$  est égale au nombre d'occurrence de l'entier dans  $T$ .

$$x^T = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots \quad (1.7)$$

**Exemple 1.1.6.** Soit  $\lambda = (4, 4, 2, 1)$  une partition de 11, alors le tableau de Young semi-standard associé à  $\lambda$  à valeur dans [11] est

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 6 \\ \hline 3 & 4 & 4 & 8 \\ \hline 5 & 5 & & \\ \hline 9 & & & \\ \hline \end{array}$$

FIGURE 1.6 – Tableau de Young semi-standard associé à la partition  $\lambda = (4, 4, 2, 1)$  à valeurs dans [11].

**Définition 1.1.12.** Un tableau de Young gauche est obtenu en remplissant les cases du diagramme gauche correspondant.

### 1.1.5 Formule des équerres

Il existe une méthode très simple pour calculer le nombre des tableaux de Young standard notée par  $f^\lambda$ .

**Définition 1.1.13.** On appelle équerre associée à une case  $(i, j)$  l'ensemble notée par  $H_{i,j}$ , qui contient la case  $(i, j)$  ainsi que les cases du diagramme qui se trouve en dessous ou à droite de la case  $(i, j)$ . On écrit alors :

$$H_{i,j} = \{(i, j'), j' \geq j\} \cup \{(i', j), i' \geq i\}. \quad (1.8)$$

On désigne par  $h_{i,j}$  la longueur de l'équerre partante de la case  $(i, j)$ , c'est à dire  $h_{i,j} = |H_{i,j}|$ .

**Théorème 1.1.2.** [19] Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $\lambda$  une partition de  $n$  à  $k$  parts, alors le nombre des tableaux de Young standard de  $\lambda$  noté par  $f^\lambda$  est donné par :

1). Formule de **Frome-Robinson-Thralle** :

$$f^\lambda = \frac{n!}{\prod_{i,j} h_{i,j}}. \quad (1.9)$$

où le produit porte sur toutes les cases du diagramme de Young.

2). Formule de déterminant :

$$f^\lambda = n! \left| \frac{1}{\lambda_i - i + j} \right|. \quad (1.10)$$

où le déterminant est de type  $k \times k$ , et  $\frac{1}{r!} = 0$  si  $r < 0$ .

## 1.2 Chemins de réseau $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

**Définition 1.2.1.** Le réseau (ou plan combinatoire)  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  est l'ensemble des points à coordonnées entières positives (ou nulles) du plan cartésien, comme illustré à la Figure 1.7.

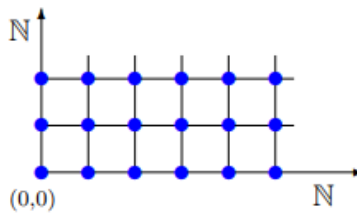


FIGURE 1.7 – Le réseau  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .

**Définition 1.2.2.** Un chemin  $\gamma$  dans le réseau  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  est une suite

$$\gamma = (p_1, p_2, \dots, p_n),$$

des points  $p_i = (x_i, y_i)$  dans  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , avec

$$p_{i+1} = \begin{cases} p_i + (1, 0) \\ p_i + (0, 1), \end{cases}$$

pour  $0 \leq i \leq n-1$ . Le point  $p_0$  est la source du chemin, et le point  $p_n$  est son but.

On dénote simplement par  $\mathcal{P}_{k,n}$  l'ensemble des chemins de but  $p = (k, n)$  et de source  $(0, 0)$ .

On dit que le chemin est de longueur  $n$ . Autrement dit, il est constitué de  $n$  pas, chacun allant du point  $p_i$  au point  $p_{i+1}$ .

Si  $p_{i+1} = p_i + (1, 0)$  on dit qu'on a un pas horizontal.

Si  $p_{i+1} = p_i + (0, 1)$  on dit qu'on a un pas vertical.

**Exemple 1.2.1.** *Figure 1.8 donne l'illustration d'un chemin de longueur 13 allant de  $(0, 0)$  à  $(9, 4)$ .*

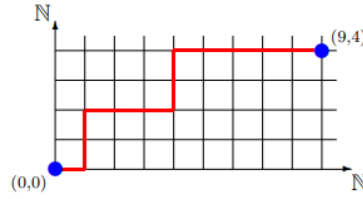


FIGURE 1.8 – Un chemin allant de  $(0, 0)$  à  $(9, 4)$ .

Les chemins dans  $\mathcal{P}_{k,n}$  sont ceux qui contiennent  $k$  pas horizontaux et  $n$  pas verticaux. En général, un chemin est donc une suite de pas verticaux et de pas horizontaux. On peut le coder sous la forme d'un mot sur l'alphabet  $\{x, y\}$  avec  $x$  dénotant un pas horizontal, et  $y$  un pas vertical. Plus explicitement, le mot associé au chemin  $\gamma = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  est le mot  $\omega(\gamma) = \omega_0\omega_1 \cdots \omega_{n-1}$ , obtenu en posant

$$\omega_i = \begin{cases} x & \text{si } (p_i, p_{i+1}) \text{ est un pas horizontal,} \\ y & \text{si } (p_i, p_{i+1}) \text{ est un pas vertical.} \end{cases}$$

Ainsi le chemin de la Figure 1.8 correspond au mot  $xyyxxxyyxxxxx$ .

### 1.3 Fonctions symétriques

**Définition 1.3.1.** *Soit  $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  l'anneau des polynômes en  $n$  variables indéterminées à coefficients entiers. Un polynôme de cet anneau est dit symétrique, si pour tout permutation  $\sigma$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$  on a :*

$$\sigma f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \dots, x_n). \quad (1.11)$$

On dénote  $\Lambda_n$  le sous-anneau de  $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , formé de tous les polynômes symétriques, et pour tout  $k \geq 0$  soit  $\Lambda_n^k$  l'ensemble de tous les polynômes homogènes symétriques de degré  $k$ , y compris le polynôme nul. On a alors :

$$\Lambda_n = \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda_n^k \quad (1.12)$$

L'espace  $\Lambda_n^k$  des polynômes symétriques homogènes de degré  $k$ , admet comme base les familles des fonctions symétriques classique.

### 1.3.1 Fonctions symétriques monômiales

**Définition 1.3.2.** Soit  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  une partition de  $m$ . La fonction fonction symétrique monômiale correspondante est

$$m_\lambda(n) := m_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum x_{i_1}^{\lambda_1} \cdots x_{i_k}^{\lambda_k}, \quad (1.13)$$

où la somme est pour toutes les permutations distinctes des entrées de la partition.

### 1.3.2 Fonctions symétriques élémentaires

**Définition 1.3.3.** Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ , on appelle fonction symétrique élémentaire  $e_k(n)$ , la fonction définie par

$$e_k(n) := e_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} = m_{(1^k)}(n), \quad (1.14)$$

avec :  $e_0(n) = 1$ , et  $e_k(n) = 0$  si  $k > n$  ou  $k < 0$ .

Pour toute partition  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  d'un entier positif, on définit  $e_\lambda(n)$  par

$$e_\lambda(n) = e_{\lambda_1}(n) e_{\lambda_2}(n) \cdots e_{\lambda_k}(n), \quad (1.15)$$

si  $\lambda$  s'écrit sous la forme multiplicative  $\lambda = 1^{m_1} 2^{m_2} \cdots$ , alors  $e_\lambda(n) = e_1^{m_1}(n) e_2^{m_2}(n) \cdots$ .

**Exemple 1.3.1.** Pour  $k = 3$ ,  $n = 4$  on a

$$e_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4.$$

Chaque monôme de cette fonction peut être représenté dans un tableau de Young semi-standard comme suit

3	4	4	4
2	2	3	3
1	1	1	2
$x_1 x_2 x_3$	$x_1 x_2 x_4$	$x_1 x_3 x_4$	$x_2 x_3 x_4$

#### Cas particulier

On peut montrer d'une autre façon qu'une fonction symétrique est élémentaire, s'il est possible de l'écrire sous la forme d'un polynôme de degré  $n$ , c'est à dire

$$(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) = 0,$$

à  $n$  racines réelles ou complexes  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Si on développe le membre de gauche, on trouve :

$$x^n - e_1x^{n-1} + e_2x^{n-2} - e_3x^{n-3} + \dots + (-1)^ne_n = 0,$$

où  $e_i$  sont des polynômes en fonction des  $x_i$  qui représentent des fonctions symétriques élémentaires.

**Proposition 1.3.1.** *Soit  $k \geq 0$ , alors on a*

$$e_k(n) = e_k(n-1) + x_n e_{k-1}(n-1). \quad (1.16)$$

*Preuve.* On a

$$\begin{aligned} e_k(n-1) + x_n e_{k-1}(n-1) &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n-1} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} + x_n \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{k-1} \leq n-1} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{k-1}} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n-1} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{k-1} \leq n-1} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{k-1}} x_n \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{k-1} < i_k < n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{k-1} < n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{k-1}} x_n \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{k-1} < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} \\ &= e_k(n). \end{aligned}$$

■

**Proposition 1.3.2.** *La série génératrice pour  $e_k(n)$  est*

$$E(t) = \sum_{k \geq 0} e_k(n) t^k = \prod_{i=1}^n (1 + x_i t). \quad (1.17)$$

*Preuve.* Montrons par récurrence sur  $n$ .

Pour  $n = 2$  on a :

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^2 (1 + x_i t) &= (1 + x_1 t)(1 + x_2 t) \\ &= 1 + (x_1 + x_2)t + x_1 x_2 t^2 \\ &= e_0(2) + e_1(2)t + e_2(2)t^2 \\ &= \sum_{k \geq 0} e_k(2) t^k. \end{aligned}$$

Supposons que la propriété est vraie pour  $n$

$$\sum_{k \geq 0} e_k(n) t^k = \prod_{i=1}^n (1 + x_i t),$$

et montrons que la propriété est vraie pour  $n + 1$

$$\sum_{k \geq 0} e_k(n+1) t^k = \prod_{i=1}^{n+1} (1 + x_i t).$$



On a

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n+1} (1 + x_i t) &= \prod_{i=1}^n (1 + x_i t)(1 + x_{n+1} t) \\
&= \sum_{k \geq 0} e_k(n) t^k (1 + x_{n+1} t) \\
&= \sum_{k \geq 0} e_k(n) t^k + x_{n+1} \sum_{k \geq 0} e_k(n) t^{k+1} \\
&= \sum_{k \geq 0} e_k(n) t^k + x_{n+1} \sum_{k \geq 0} e_{k-1}(n) t^k \\
&= \sum_{k \geq 0} (e_k(n) + x_{n+1} e_{k-1}(n)) t^k \\
&= \sum_{k \geq 0} e_k(n+1) t^k.
\end{aligned}$$

La preuve est complète. ■

### 1.3.3 Fonctions symétriques complètes

**Définition 1.3.4.** Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ , on appelle fonction symétrique complète  $h_k(n)$ , la fonction définie par

$$h_k(n) := h_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{|\lambda|=k} m_\lambda = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}, \quad (1.18)$$

où :  $h_0(n) = 1$ ,  $h_1(n) = e_1(n)$  et  $h_k(n) = 0$  si  $k < 0$ .

Pour toute partition  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  d'un entier positif, on définit  $h_\lambda(n)$  par

$$h_\lambda(n) = h_{\lambda_1}(n) h_{\lambda_2}(n) \cdots h_{\lambda_k}(n), \quad (1.19)$$

si  $\lambda$  s'écrit sous la forme multiplicative  $\lambda = 1^{m_1} 2^{m_2} \cdots$ , alors  $h_\lambda(n) = h_1^{m_1}(n) h_2^{m_2}(n) \cdots$ .

**Exemple 1.3.2.** Pour  $k = 3$ ,  $n = 2$  on a

$$h_3(x_1, x_2) = x_1^3 + x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_2^3.$$

Chaque monôme de cette fonction peut être représenté dans un tableau de Young comme suit

1	1	1
---	---	---

$x_1 x_1 x_1$

1	1	2
---	---	---

$x_1 x_1 x_2$

1	2	2
---	---	---

$x_1 x_2 x_2$

2	2	2
---	---	---

$x_2 x_2 x_2$

**Proposition 1.3.3.** Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$h_k(n) = h_k(n-1) + x_n h_{k-1}(n). \quad (1.20)$$

**Preuve.** On a :

$$\begin{aligned}
h_k(n-1) + x_n h_{k-1}(n) &= \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n-1} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} + x_n \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_{k-1} \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{k-1}} \\
&= \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n-1} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} + \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_{k-1} \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{k-1}} x_n \\
&= \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_{k-1} \leq i_k < n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} + \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_{k-1} \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{k-1}} x_n \\
&= \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_{k-1} \leq i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} \\
&= h_k(n).
\end{aligned}$$

■

**Proposition 1.3.4.** *La série génératrice pour  $h_k(n)$  est*

$$H(t) = \sum_{k \geq 0} h_k(n) t^k = \prod_{i=1}^n (1 - x_i t)^{-1}. \quad (1.21)$$

**Preuve.** Montrons par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 2$  on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k \geq 0} h_k(2) t^k &= h_0(2) + h_1(2) t + h_2(2) + \cdots \\
&= 1 + (x_1 + x_2) t + (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) t^2 + \cdots \\
&= (1 + x_1 t + x_1^2 t^2 + \cdots) (1 + x_2 t + x_2^2 t^2 + \cdots) \\
&= \left( \sum_{k \geq 0} (x_1 t)^k \right) \left( \sum_{k \geq 0} (x_2 t)^k \right) \\
&= \frac{1}{(1 - x_1 t)(1 - x_2 t)} \\
&= \frac{1}{\prod_{i=1}^2 (1 - x_i t)}.
\end{aligned}$$

Supposons que la propriété est vraie pour  $n$

$$\sum_{k \geq 0} h_k(n) t^k = \prod_{i=1}^n (1 - x_i t)^{-1},$$

et montrons que la propriété est vraie pour  $n + 1$

$$\sum_{k \geq 0} h_k(n+1) t^k = \prod_{i=1}^{n+1} (1 - x_i t)^{-1}.$$

On a

$$h_k(n+1) = h_k(n) + x_{n+1} h_{k-1}(n+1),$$

alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k \geq 0} h_k(n+1)t^k &= \sum_{k \geq 0} (h_k(n) + x_{n+1}h_{k-1}(n+1))t^k \\
&= \sum_{k \geq 0} h_k(n)t^k + x_{n+1} \sum_{k \geq 0} h_{k-1}(n+1)t^k \\
&= \sum_{k \geq 0} h_k(n)t^k + x_{n+1} \sum_{k \geq 1} h_{k-1}(n+1)t^k \\
&= \sum_{k \geq 0} h_k(n)t^k + x_{n+1} \sum_{k \geq 0} h_k(n+1)t^{k+1} \\
&= \sum_{k \geq 0} h_k(n)t^k + x_{n+1}t \sum_{k \geq 0} h_k(n+1)t^k,
\end{aligned}$$

donc

$$\sum_{k \geq 0} h_k(n+1)t^k - x_{n+1}t \sum_{k \geq 0} h_k(n+1)t^k = \prod_{i=1}^n (1 - x_i t)^{-1},$$

ce qui équivaut à

$$\begin{aligned}
\sum_{k \geq 0} h_k(n+1)t^k &= \frac{\prod_{i=1}^n (1 - x_i t)^{-1}}{(1 - x_{n+1}t)} \\
&= \prod_{i=1}^{n+1} (1 - x_i t)^{-1}
\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Les liens entre les fonctions symétriques élémentaires et complètes sont donnés dans la proposition suivante.

**Proposition 1.3.5.** 1).

$$H(t)E(-t) = 1. \quad (1.22)$$

2). Pour tout  $k \geq 1$ , on a

$$\sum_{r=0}^k (-1)^k e_r h_{k-r} = 0. \quad (1.23)$$

**Preuve.** 1). Par la proposition 1.3.2 et la proposition 1.3.4.

2). On a

$$\begin{aligned}
H(t)E(-t) &= \sum_{j \geq 0} h_j t^j \sum_{r \geq 0} e_r (-t)^r \\
&= \sum_{j \geq 0} \sum_{r \geq 0} (-1)^r e_r h_j t^{j+r}.
\end{aligned}$$

On pose  $k = j + r$ , on obtient

$$\begin{aligned}
H(t)E(-t) &= \sum_{k \geq 0} \sum_{k=j+r} (-1)^r e_r h_{k-r} t^k \\
&= \sum_{k \geq 0} \sum_{r=0}^k (-1)^r e_r h_{k-r} t^k.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$H(t)E(-t) = 1.$$

Par identification, on trouve

$$\sum_{r=0}^k (-1)^k e_r h_{k-r} = 0, \text{ pour } k \geq 1.$$

■

**Théorème 1.3.1.** [17] Soit  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{b_n\}_{n \geq 0}$  deux suites tel que

$$\sum_{k \geq 0}^n (-1)^k a_k b_{n-k} = \delta_{0,n}, \quad (1.24)$$

où  $\delta_{n,0}$  est le symbole de Kronecker défini comme suit :

$$\delta_{n,k} = \begin{cases} 1 & n = k, \\ 0 & n \neq k. \end{cases}$$

Alors

$$\frac{a_n}{a_0} = \sum_{t_1+2t_2+\dots+nt_n=n} (-1)^{n+t_1+t_2+\dots+t_n} \binom{t_1+\dots+t_n}{t_1, \dots, t_n} \left(\frac{b_1}{b_0}\right)^{t_1} \dots \left(\frac{b_n}{b_0}\right)^{t_n}, \quad (1.25)$$

et

$$\frac{b_n}{b_0} = \sum_{t_1+2t_2+\dots+nt_n=n} (-1)^{n+t_1+t_2+\dots+t_n} \binom{t_1+\dots+t_n}{t_1, \dots, t_n} \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^{t_1} \dots \left(\frac{a_n}{a_0}\right)^{t_n}, \quad (1.26)$$

où

$$\binom{t_1+\dots+t_n}{t_1, \dots, t_n} = \frac{(t_1+\dots+t_n)!}{t_1! \dots t_n!}.$$

**Corollaire 1.3.1.** Soit  $k, n$  deux entiers positifs, les fonctions symétriques  $e_k(n)$  et  $h_k(n)$  sont liées par

$$e_k = \sum_{t_1+2t_2+\dots+kt_k=k} (-1)^{k+t_1+t_2+\dots+t_k} \binom{t_1+\dots+t_k}{t_1, \dots, t_k} h_1^{t_1} \dots h_k^{t_k}, \quad (1.27)$$

et

$$h_k = \sum_{t_1+2t_2+\dots+kt_k=k} (-1)^{k+t_1+t_2+\dots+t_k} \binom{t_1+\dots+t_k}{t_1, \dots, t_k} e_1^{t_1} \dots e_k^{t_k}. \quad (1.28)$$

### 1.3.4 Fonctions symétriques somme des puissances

**Définition 1.3.5.** Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ , on appelle fonction symétrique somme de puissance  $p_k(n)$ , la fonction définie par

$$p_k(n) := p_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{0 \leq i \leq n} x_i^k = m_k(n). \quad (1.29)$$

Pour toute partition  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  d'un entier positif, on définit

$$p_\lambda(n) = p_{\lambda_1}(n)p_{\lambda_2}(n) \cdots p_{\lambda_k}(n), \quad (1.30)$$

si  $\lambda$  s'écrit sous la forme multiplicative  $\lambda = 1^{m_1}2^{m_2} \cdots$ , alors  $p_\lambda(n) = p_1^{m_1}(n)p_2^{m_2}(n) \cdots$ .

**Proposition 1.3.6.** [15] La série génératrice de la fonction symétrique  $p_k(n)$  est

$$P(t) = \sum_{k \geq 1} p_k(n)t^{k-1} = \frac{H'(t)}{H(t)}. \quad (1.31)$$

De plus, on a

$$P(-t) = \frac{E'(t)}{E(t)}. \quad (1.32)$$

**Preuve.** On a

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{k \geq 1} p_k(n)t^{k-1} = \sum_{k \geq 1} \sum_{i \geq 1} x_i^k t^{k-1} = \sum_{i \geq 1} \sum_{k \geq 1} x_i^k t^{k-1} \\ &= \sum_{i \geq 1} x_i \sum_{k \geq 1} (x_i t)^{k-1} = \sum_{i \geq 1} \frac{x_i}{1 - x_i t} = \sum_{i \geq 1} \frac{d}{dt} \log \frac{1}{1 - x_i t} \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{i \geq 1} \log \frac{1}{1 - x_i t} = \frac{d}{dt} \log \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - x_i t} = \frac{d}{dt} \log H(t) \\ &= \frac{H'(t)}{H(t)}, \end{aligned}$$

et on a aussi

$$\begin{aligned} P(-t) &= \sum_{k \geq 1} p_k(n)(-t)^{k-1} = \sum_{i \geq 1} \frac{x_i}{1 + x_i t} = \sum_{i \geq 1} \frac{d}{dt} \log(1 + x_i t) \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{i \geq 1} \log(1 + x_i t) = \frac{d}{dt} \log \prod_{i \geq 1} (1 + x_i t) = \frac{d}{dt} \log E(t) \\ &= \frac{E'(t)}{E(t)}. \end{aligned}$$

■

Les liens entre les fonctions symétriques élémentaires, complètes, et somme de puissance sont donnés par :

**Proposition 1.3.7 (Formules de Newton).** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

1).

$$nh_n = \sum_{k=1}^n p_k h_{n-k}. \quad (1.33)$$

2).

$$ne_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{r-1} p_k e_{n-k}. \quad (1.34)$$

3).

$$p_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k e_k h_{n-k} = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} k h_k e_{n-k}. \quad (1.35)$$

**Preuve.** 1). On écrit la relation (1.31) sous forme  $H'(t) = P(t)H(t)$

$$P(t)H(t) = \sum_{k \geq 1} p_k t^{k-1} \sum_{r \geq 0} h_r t^r = \sum_{k \geq 1} \sum_{r \geq 0} p_k h_r t^{k+r-1} = \sum_{r \geq 0} \sum_{k \geq 1} p_k h_r t^{k+r-1}$$

On pose  $n = k + r$ , alors

$$P(t)H(t) = \sum_{n \geq 1} \sum_{n=k+r} p_k h_{n-k} t^{n-1} = \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^n p_k h_{n-k} t^{n-1}.$$

D'autre part on a

$$P(t)H(t) = H'(t) = \sum_{n \geq 0} n h_n t^{n-1} = \sum_{n \geq 1} n h_n t^{n-1}.$$

D'où par identification

$$n h_n = \sum_{k=1}^n p_k h_{n-k},$$

2). De façon analogue on démontre la relation (1.34) à partir d'écrire (1.32) sous forme  $E'(t) = P(-t)E(t)$ .

3). Nous commençons avec le produit

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k = tP(t) = t \frac{H'(t)}{H(t)} = t \frac{E'(t)}{E(t)}.$$

En regardant la définition de  $E(t)$  et  $H(t)$ , nous observons également

$$E(-t) = \prod_{i=1}^n (1 - x_i t) = H(t)^{-1}.$$

Cela signifie que

$$tP(t) = tH'(t)E(-t) = tE'(-t)H(t).$$

En utilisant le produit de deux séries génératrices, on arrive à

$$tH'(t)E(-t) = \left( \sum_{k \geq 0} k h_k t^k \right) \left( \sum_{k \geq 0} e_k t^k (-1)^k \right) = \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} k h_k e_{n-k} \right) t^n$$

et

$$tE'(-t)E(t) = \left( \sum_{k \geq 0} k e_k t^k (-1)^{k-1} \right) \left( \sum_{k \geq 0} h_k t^k \right) = \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{k=0}^n (-1)^{k-1} k e_k e_{n-k} \right) t^n.$$

D'où par identification, on trouve

$$p_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k e_k h_{n-k} = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} k h_k e_{n-k}.$$

■

**Remarque 1.3.1.** Les identités (1.23), (1.33) et (1.34) peuvent s'exprimer comme des relations entre déterminants.

D'abord (1.23) implique le système :

$$\begin{cases} h_1 - e_1 = 0 \\ h_2 - h_1 e_1 + e_2 = 0 \\ \dots \\ h_k - h_{k-1} e_1 + h_{k-2} e_2 + \dots + (-1)^n e_1 = 0. \end{cases}$$

Considérons ces identités comme un système de  $k$  équations et  $k$  inconnues  $-e_1, e_2, -e_3, \dots$ , et résolvons le système à l'aide des déterminants. On obtient la solution suivante :

$$e_k = \begin{vmatrix} h_1 & 1 & 0 & \dots & & \\ h_2 & h_1 & 1 & 0 & \dots & \\ h_3 & h_2 & h_1 & 1 & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{k-1} & h_{k-2} & \cdot & \dots & h_1 & 1 \\ h_k & h_{k-1} & \cdot & \dots & h_2 & h_1 \end{vmatrix} = \det(h_{1+i-j}), \quad (1.36)$$

avec la convention que  $h_k = 0$ , si  $k \leq -1$ .

Par dualité, on trouve

$$h_k = \det(e_{1+i-j}), (0 \leq i, j \leq n). \quad (1.37)$$

Pour les deux relations (1.33) et (1.34), on obtient finalement que

$$p_k = (-1)^{k-1} \begin{vmatrix} h_1 & 1 & & & & \\ 2h_2 & h_1 & 1 & & & \\ 3h_3 & h_2 & h_1 & 1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ kh_k & h_{k-1} & \cdot & \dots & h_2 & h_1 \end{vmatrix}, \quad (1.38)$$

$$h_k = \frac{1}{k!} \begin{vmatrix} p_1 & -1 & & & & \\ p_2 & p_1 & -2 & & & \\ p_3 & p_2 & p_1 & -3 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{k-1} & p_{k-2} & \cdot & \dots & p_1 & -n+1 \\ p_k & p_{k-1} & \cdot & \dots & p_2 & p_1 \end{vmatrix}, \quad (1.39)$$

$$p_k = \begin{vmatrix} e_1 & 1 & & & & \\ 2e_2 & e_1 & 1 & & & \\ 3e_3 & e_2 & e_1 & 1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ ke_k & e_{k-1} & \cdot & \dots & e_2 & e_1 \end{vmatrix}, \quad (1.40)$$





Les identités concernant les fonctions symétriques élémentaires (respectivement complètes) peuvent de même être inversées, amenant à :

$$e_k = (-1)^k \sum_{t_1+2t_2+\dots+kt_k=k} (-1)^{t_1+t_2+\dots+t_k} \frac{1}{t_1!t_2!\dots t_k!} \left(\frac{p_1}{1}\right)^{t_1} \left(\frac{p_2}{2}\right)^{t_2} \dots \left(\frac{p_k}{k}\right)^{t_k}. \quad (1.48)$$

$$h_k = (-1)^k \sum_{t_1+2t_2+\dots+kt_k=k} \frac{1}{t_1!t_2!\dots t_k!} \left(\frac{p_1}{1}\right)^{t_1} \left(\frac{p_2}{2}\right)^{t_2} \dots \left(\frac{p_j}{j}\right)^{t_k}. \quad (1.49)$$

**Théorème 1.3.3.** [15] Soit  $\lambda, \mu$  deux partitions de longueur au plus égale à  $p$ , supposons que leurs conjuguées  $\lambda', \mu'$  soient de longueur au plus égale à  $q$ . Alors

$$\det(h_{\lambda_i-\mu_i-i+j})_{1 \leq i, j \leq p} = \det(e_{\lambda'_i-\mu'_i-i+j})_{1 \leq i, j \leq p}. \quad (1.50)$$

En particulier

$$\det(h_{\lambda_i-i+j})_{1 \leq i, j \leq p} = \det(e_{\lambda'_i-i+j})_{1 \leq i, j \leq p}. \quad (1.51)$$

### 1.3.5 Fonction de Schur

**Définition 1.3.6** (Définition combinatoire de la fonction de Schur). Soit  $\lambda$  une partition de  $k$  telle que  $l(\lambda) \leq n$ . La fonction de Schur est définie par

$$s_\lambda(n) := s_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_T x^T, \quad (1.52)$$

où la somme est sur tous les tableaux de Young semi-standard de la partition  $\lambda$ .

**Exemple 1.3.3.** Les tableaux de Young semi-standard de la partition  $\lambda = (2, 1)$  à valeurs dans  $[3]$  sont

2	3	2	3	3	3	3
1	1	1	1	1	2	2
1	1	2	2	3	3	3

Alors la fonction de Schur associée sera :

$$s_{(2,1)}(3) = x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_1x_2x_3 + x_3^2x_1 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2.$$

**Proposition 1.3.8.** [19] La fonction de Schur est une fonction symétrique homogène de degré  $k$ .

**Théorème 1.3.4** (Déterminants Jacobi-Trudi). Soit  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  une partition. On a

$$s_\lambda = |h_{\lambda_i-i+j}|_{1 \leq i, j \leq n}, \quad (1.53)$$

et

$$s_\lambda = |e_{\lambda'_i-i+j}|_{1 \leq i, j \leq m}, \quad (1.54)$$

où  $n \geq l(\lambda)$ , et  $m \geq l(\lambda')$ ,  $h_0 = e_0 = 1$  et  $h_k = e_k = 0$  pour  $n < k$ .

**Preuve.** Pour la preuve voir ([19]. page 158). ■

**Remarque 1.3.2.** Si  $\lambda = (k)$  et  $\lambda = (1^k)$ , on a

$$s_{(k)}(n) = h_k(n) \quad \text{et} \quad s_{(1^k)}(n) = e_k(n).$$

### Autre Définition de la Fonction de Schur

**Définition 1.3.7.** Soit  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$  une partition avec  $|\lambda| \leq n$ . on peut associer à n'importe quelle partition un alternant, qui est le déterminant

$$a_{\lambda+\delta} = |x_i^{\lambda_i+n-j}|_{1 \leq i, j \leq n}, \quad (1.55)$$

où  $\delta = (n-1, n-2, \dots, 1, 0)$ . En particulier, pour  $\lambda$  la partition zéro, nous avons le déterminant de Vendermonde

$$a_\delta = |x_i^{n-j}|_{1 \leq i, j \leq n} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j). \quad (1.56)$$

**Théorème 1.3.5.** Soit  $\lambda$  une partition de longueur  $n$ , alors

$$s_\lambda = s_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta}. \quad (1.57)$$

**Preuve.** Soit  $e_r^{(k)}$  la fonction symétrique élémentaire de  $x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$ , et soit  $E_r(t)$  la série génératrice

$$E_r(t) = \sum_{r=0}^n e_r^{(k)} t^r = \prod_{i \neq k} (1 + x_i t)$$

la relation (1.22) donne

$$H(t)E_r(-t) = \frac{1}{1 - x_k t}.$$

Considérons alors une suite  $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$  d'entiers positifs et déterminons le coefficient de  $t^{b_i}$  dans les deux membres de l'équation précédente. On obtient

$$\sum_{r=0}^{n-1} h_{b_i-r} (-1)^r e_r^{(k)} = x_k^{b_i},$$

on pose  $r = n - j$

$$\sum_{j=1}^n h_{b_i-n+j} (-1)^{n-j} e_{n-j}^{(k)} = x_k^{b_i}.$$

Soit  $E$  la matrice  $n \times n$  dont la  $k$ -ième ligne est donnée par

$$\left( (-1)^{n-1} e_{n-1}^{(k)}, \dots, (-1) e_1^{(k)}, e_0^{(k)} \right),$$

et  $H$  la matrice dont la  $m$ -ième colonne,  $H_{.,i}$ , s'écrit

$$H_{.,i}^t = \left( h_{b_i-n+1}, h_{b_i-n+2}, \dots, h_{b_i} \right).$$

Alors la dernière identité peut se récrire comme le produit de matrices  $HE = (x_k^{b_i})$ .

En prenant le déterminant de chaque membre, on obtient

$$|H||E| = |x_k^{b_i}|.$$

Lorsque  $b = \delta$ , il en résulte que  $|E| = |x_k^{n-j}| = a_\delta$ , donc

$$|h_{b_i-n+j}|a_\delta = |x_k^{b_i}|.$$

Avec  $b_i = \lambda_i + n - j$ , cette identité devient  $|h_{\lambda_i-j+i}|a_\delta = a_{\lambda+\delta}$ .

D'après Théorème 1.3.4 , on obtient

$$s_\lambda = \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta}.$$

■

---

---

# CHAPITRE 2

---

## SUITES REMARQUABLES ET LEUR ANALOGUE

Dans ce chapitre, nous exposons quelques notions introductives à la combinatoire énumérative, nous présenterons certaines suites remarquables liées aux fonctions symétriques élémentaire et complète, et à la fin on donne le  $q$ -analogue de ces suites. Les principales références utilisées pour la rédaction de ce chapitre sont [6, 7, 8, 14, 16, 21, 18, 12].

### 2.1 Comptage et dénombrement

#### 2.1.1 Définitions et outils de bases

##### Factorielle montante

Soient  $x$  un nombre réel et  $n$  un entier positif, la factorielle montante (croissante) de  $x$  d'ordre  $n$  notée  $x^{\bar{n}}$ , est définie par

$$x^{\bar{n}} = \begin{cases} x(x+1) \cdots (x+n-1) & n > 0, \\ 1 & n = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

On appelle factorielle montante de  $x$ , de coefficient  $\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{N}$ ), et d'ordre  $n$  notée  $(x|\alpha)^{\bar{n}}$ , le polynôme

$$(x|\alpha)^{\bar{n}} = \begin{cases} x(x+\alpha) \cdots (x+(n-1)\alpha) & n > 0, \\ 1 & n = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

### Factorielle descendante

Soient  $x$  un nombre réel et  $n$  un entier positif, la factorielle descendante (décroissante) de  $x$  d'ordre  $n$  notée  $x^{\underline{n}}$ , définie par

$$x^{\underline{n}} = \begin{cases} x(x-1)\cdots(x-n+1) & n > 0, \\ 1 & n = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Et de coefficient  $\alpha$  donnée par

$$(x|\alpha)^{\underline{n}} = \begin{cases} x(x-\alpha)\cdots(x-(n-1)\alpha) & n > 0, \\ 1 & n = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

**Remarque 2.1.1.** 1). On peut exprimer la factorielle montante en fonction de la factorielle descendante comme suit

$$\begin{aligned} x^{\overline{n}} &= (x+n-1)^{\underline{n}}, \\ (-x)^{\overline{n}} &= (-1)^n x^{\underline{n}}. \end{aligned}$$

2). Pour  $x = 1$  dans l'équation (2.1), ou pour  $x = n$  dans (2.3), on obtient la factorielle classique  $1^{\overline{n}} = n^{\underline{n}} = n!$ .

### Arrangement

Soit  $[n] = \{1, \dots, n\}$ , on appelle arrangement de  $k$  éléments, toute suite de  $k$  éléments distincts de  $[n]$ . Ou encore, ayant deux ensembles  $[k]$  et  $[n]$  ( $k \leq n$ ), un arrangement est une injection de  $[k]$  dans  $[n]$ .

Le nombre d'arrangements (d'injections) de  $[k]$  dans  $[n]$  noté  $A_{n,k}$  compté par la factorielle descendante, on écrit

$$A_{n,k} = (n)^{\underline{k}}. \quad (2.5)$$

Lorsque  $k = n$  le terme dédié est "permutation" (bijection).

### Permutation

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On appelle permutation toute bijection  $\sigma$  de  $[n]$  dans  $[n]$ . Une permutation  $\sigma_n$  peut être représentée par une forme matricielle

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Le nombre de permutations de l'ensemble  $[n]$  est  $n!$ .

**Exemple 2.1.1.** Soit la permutation  $\sigma_8$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 4 & 1 & 6 & 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

On appelle orbite de  $\iota \in [n]$  l'ensemble des images de  $\iota$ , obtenues en appliquant successivement la permutation  $\sigma$  sur l'élément  $\iota$ ,  $\{\sigma^p(\iota), p \in \mathbb{N}\}$ , que l'on note parfois  $O_\iota$ .

Si l'image par la permutation  $\sigma$  est lui même i.e,  $\sigma(\iota) = \iota$ , on dit que  $\iota$  est un point fixe. Dans l'exemple précédent l'élément 7 est un point fixe puisque  $\sigma(7) = 7$ , et l'orbite de l'élément 1 est  $O_1 = \{1, \sigma(1) = 3, \sigma^2(1) = 4\}$ . Remarquez que  $O_1 = O_3 = O_4$ . Ces éléments  $\{1, 3, 4\}$  pris dans cet ordre, forment un cycle noté  $(1, 3, 4)$  où chaque élément est l'image du précédent par  $\sigma$  (1 est l'image de 4, 3 est l'image de 1 etc.). A partir d'une orbite à  $p$  éléments, on peut constituer  $(p - 1)!$  cycles

On peut écrire une permutation  $\sigma$  comme un produit de cycles,

$$\sigma_8 = (1, 3, 4)(2, 8, 5, 6)(7),$$

cette représentation est appelée écriture en cycles. Nous conviendrons d'appeler  $k$ -permutation toute permutation ayant  $k$  cycles.

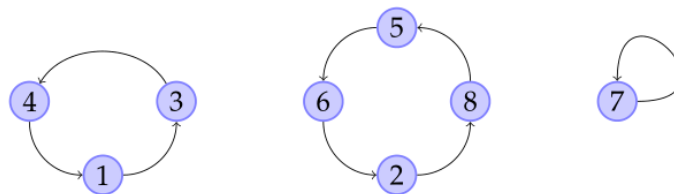


FIGURE 2.1 – Une 3-permutation de  $[8]$ .

### Partition et partition en listes

Une part  $P$  de  $[n]$  est un sous-ensemble non vide de  $[n]$ . Une partition  $\pi$  de  $[n]$  est une famille de parts  $P_1, \dots, P_k$  disjointes, deux à deux, telles que  $\bigcup_{i=1}^k P_i = [n]$ .

Si l'union des parts n'engendre pas  $[n]$  on dit que  $P$  est une partition partielle de  $[n]$ .

**Exemple 2.1.2.** Soit l'ensemble  $[3] = \{1, 2, 3\}$ , les partitions de  $[3]$  sont

$$\{\{1\}\{2\}\{3\}\} \quad \{\{1, 2\}\{3\}\} \quad \{\{1, 3\}\{2\}\} \quad \{\{2, 3\}\{1\}\} \quad \{\{1, 2, 3\}\}.$$

Une liste  $L$  de  $[n]$  est un sous-ensemble non vide ordonné de  $[n]$ . Une partition en listes de  $[n]$  est une famille de listes  $\ell_1, \dots, \ell_k$  disjointes deux à deux telles que  $\bigcup_{i=1}^k \ell_i = [n]$ .

**Exemple 2.1.3.** Soit l'ensemble  $[3] = \{1, 2, 3\}$ , les partitions en listes possibles de  $[3]$  sont :

$$\begin{aligned} & \{[1, 2, 3]\} \quad \{[1, 3, 2]\} \quad \{[3, 2, 1]\} \quad \{[2, 1, 3]\} \quad \{[2, 3, 1]\} \quad \{[3, 1, 2]\} \\ & \{[1, 2] [3]\} \quad \{[2, 1] [3]\} \quad \{[1, 3] [2]\} \quad \{[3, 2] [2]\} \quad \{[2, 3] [1]\} \quad \{[3, 2] [1]\} \\ & \{[1] [2] [3]\}. \end{aligned}$$

Aussi, nous conviendrons d'appeler  $k$ -partition (respectivement  $k$ -partition en listes) toute partition de  $[n]$  en  $k$  parts (respectivement  $k$  listes).

## 2.1.2 Coefficients binomiaux

Soit  $E$  un ensemble fini de cardinal  $n \in \mathbb{N}$ . On appelle combinaison de  $k \in \mathbb{N}$  éléments de  $E$  toute partie de  $E$  à  $k$  éléments. On note  $\binom{n}{k}$  le nombre de combinaisons de  $k$  éléments d'un ensemble contenant  $n$  éléments. Les coefficients  $\binom{n}{k}$  sont appelés coefficients binomiaux dont la formule explicite est donnée par

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}.$$

Ces coefficients apparaissent dans le développement de  $(x+y)^n$  appelée relation du binôme de Newton, où  $x$  et  $y$  sont des nombres réels ou complexe

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \quad (2.6)$$

**Remarque 2.1.2.** 1).  $\emptyset$  est la seule partie de  $E$  à 0 éléments, donc  $\binom{n}{0} = 1$ ,  
 $E$  est la seule partie de  $E$  à  $n$  éléments, donc  $\binom{n}{n} = 1$ .

2). Si  $k > n$ , il ne peut y avoir des parties de  $k$  éléments d'un ensemble en contenant  $n$ , donc si  $k > n$ ,  $\binom{n}{k} = 0$ .

**Proposition 2.1.1 (Formule de Pascal).** Le coefficient binomial satisfait la relation de récurrence d'ordre deux suivante :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}. \quad (2.7)$$

**Preuve.** Discutant le cas de la  $n$ -ième personne : si elle est sélectionnée (choisie), il reste à choisir  $k-1$  autres personnes depuis  $n-1$  personnes restantes. Ainsi, nous avons  $\binom{n-1}{k-1}$  façons de le faire. Sinon, elle n'est pas sélectionnée et donc on choisit  $k$  individus parmi les  $n-1$  restants. Ce qui se fait de  $\binom{n-1}{k}$  façons. ■

**Proposition 2.1.2 (Formule de Vandermonde ou Chu-Vandermonde).** Le coefficient binomial satisfait la relation suivante :

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{j=0}^k \binom{n}{j} \binom{m}{k-j}. \quad (2.8)$$





ensembles  $S_1, S_2, \dots, S_t$  de tailles respectives  $k_1, k_2, \dots, k_t$ , dont la formule explicite est donnée par

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_t} = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_t!}. \quad (2.11)$$

Ces coefficients apparaissent dans le développement de  $(x_1 + x_2 + \cdots + x_t)^n$  appelée **formule du multinôme de Newton**

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_t)^n = \sum_{k_1 + k_2 + \cdots + k_t = n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_t} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_t^{k_t}, \quad (2.12)$$

où  $x_1, x_2, \dots, x_t$  sont des nombres réels ou complexe.

## 2.2 Suites remarquables

### 2.2.1 Les nombres de Stirling

Nous les trouvons sous différentes notations, les plus courantes sont  $c(n, k)$  pour les nombres de Stirling non-signés,  $s(n, k)$  pour les nombres de Stirling signés et  $S(n, k)$  pour la deuxième espèce.

#### Les nombres de Stirling de première espèce

**Définition 2.2.1.** *Les nombres de Stirling de première espèce (non-signés)  $c(n, k)$  comptent le nombre de  $k$ -permutations de  $[n]$ . Ils apparaissent comme coefficients du développement de la factorielle montante  $(x)^{\bar{n}}$*

$$(x)^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n c(n, k) x^k. \quad (2.13)$$

*Les nombres de Stirling de première espèce signés sont liés au développement de la factorielle descendante  $(x)^{\underline{n}}$*

$$(x)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^n s(n, k) x^k. \quad (2.14)$$

**Remarque 2.2.1.** *Les nombres de Stirling de première espèce signés et non-signés sont liés par la relation suivante :*

$$s(n, k) = (-1)^{n+k} c(n, k). \quad (2.15)$$

**Propriétés 2.2.1.** 1). *Les nombres de Stirling de première espèce non-signés ont une relation de récurrence triangulaire d'ordre deux*

$$c(n, k) = c(n-1, k-1) + (n-1)c(n-1, k), \quad (2.16)$$

avec  $c(n, k) = 0$  pour  $n < k$ ,  $c(n, 0) = \delta_{n,0}$ .

2). Ils satisfont aussi une relation de récurrence verticale

$$c(n+1, k+1) = \sum_{i=k}^n c(n, i) \binom{i}{k}. \quad (2.17)$$

**Preuve.** 1). Envisagions à former une  $k$ -permutation de  $[n]$ , il existe exactement deux façons de procéder. La première façon contient toutes les permutations dans lesquelles le nombre  $n$  est un cycle lui-même, et les autres  $n-1$  nombres sont partitionnés en  $k-1$  cycles, alors il y a  $c(n-1, k-1)$ .

Dans le deuxième type, le nombre  $n$  n'est pas un cycle lui-même, et les autres  $n-1$  nombres sont partitionnés en  $k$  cycles, et alors le  $n$  est inséré immédiatement après certain nombre  $j$  dans l'un de ces  $k$  cycles. En total, on a  $(n-1)c(n-1, k)$ .

2). En partitionnant les permutations  $[n+1]$  à  $k+1$  cycles. Il y aura donc  $\binom{n}{i}$  méthodes pour choisir les  $n-i$  nombres qui à  $i$ -permutations, et il y a aussi  $c(i, k)$  méthodes pour partitionner les  $i$  nombres restant à  $k$  cycles supplémentaires.

■

A partir de la formule de récurrence (2.16) nous obtenons un tableau des valeurs de  $c(n, k)$ , pour les premiers nombres  $n$  et  $k$

n/k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	0	1							
2	0	1	1						
3	0	2	3	1					
4	0	6	11	6	1				
5	0	24	50	35	10	1			
6	0	120	274	225	85	15	1		
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1	

TABLE 2.1 – Les nombres de Stirling de première espèce non-signés.

### Série génératrice

**Proposition 2.2.1.** 1). La relation (2.13) est une série génératrice ordinaire des nombres de Stirling de première espèce.

2). La série génératrice exponentielle double des nombres de Stirling de première espèce est

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c(n, k) y^k \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{(1-x)^y}. \quad (2.18)$$

3). La série génératrice exponentielle des nombres de Stirling de première espèce est

$$\sum_{n=0}^{\infty} c(n, k) \frac{x^n}{n!} = \frac{(-1)^k}{k!} \ln^k(1-x). \quad (2.19)$$

**Preuve.** 1). Montrons par récurrence sur  $n$ .

2). On a la fonction génératrice exponentielle double des nombres de Stirling de première espèce signés est

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} s(n, k) y^k \frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n s(n, k) y^k \right) \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{y}{n} x^n \\ &= (1+x)^y. \end{aligned}$$

D'autre part, l'application de (2.15) donne

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n c(n, k) y^k \frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} s(n, k) y^k \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n s(n, k) (-y)^k \frac{(-x)^n}{n!} \\ &= (1-x)^{-y} \\ &= \frac{1}{(1-x)^y}. \end{aligned}$$

3). De la relation (2.18), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c(n, k) y^k \frac{x^n}{n!} &= \frac{1}{(1-x)^y} \\ &= (1-x)^{-y} \\ &= \exp((-y) \ln(1-x)) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((-y) \ln(1-x))^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \ln^k(1-x)}{k!} y^k. \end{aligned}$$

On aura donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} c(n, k) \frac{x^n}{n!} = \frac{(-1)^k}{k!} \ln^k(1-x).$$

■

### Formes explicites

**Théorème 2.2.1.** *Une forme explicite des nombres de Stirling de première espèce est donnée par :*

$$c(n, k) = \frac{n!}{k!} \sum_{i_1 + \dots + i_k = n} \frac{1}{i_1 \cdots i_k}. \quad (2.20)$$

**Proposition 2.2.2.** *Le nombre de Stirling de première espèce est une spécialisation de la fonction symétrique élémentaire*

$$c(n, k) = e_{n-k}(1, 2, \dots, n-1), \quad (2.21)$$

ou

$$c(n, n-k) = e_k(1, 2, \dots, n-1). \quad (2.22)$$

**Preuve.** On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n c(n, n-k)x^k &= \sum_{k=0}^n (-1)^k s(n, n-k)x^k \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} s(n, k)x^{n-k} \\ &= (-1)^n x^n \sum_{k=0}^n s(n, k) \left(\frac{-1}{x}\right)^k \\ &= (-1)^n x^n \left(\frac{-1}{x}\right)^n \\ &= (-1)^n x^n n! \binom{\frac{-1}{x}}{n} \\ &= x^n n! \binom{\frac{1}{x} + n - 1}{n} \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} (1 + kx) \\ &= \sum_{k=0}^n e_k(1, 2, \dots, n-1)x^k. \end{aligned}$$

D'où par identification

$$c(n, n-k) = e_k(1, 2, \dots, n-1).$$

Si on pose  $k' = n - k$ , on obtient

$$c(n, k) = e_{n-k}(1, 2, \dots, n-1).$$

La preuve est complète. ■

### Les nombres de Stirling de deuxième espèce

**Définition 2.2.2.** *Les nombres de Stirling de deuxième espèce  $S(n, k)$  comptent le nombre de  $k$ -partitions de  $[n]$ . Ils apparaissent lors de l'expression du monôme  $x^n$  dans la base des*

---

factoriels descendante  $\{x^k, k = 0, 1, \dots, n\}$

$$x^n = \sum_{k=0}^n S(n, k)x^k. \quad (2.23)$$

**Propriétés 2.2.2.** 1). Les nombres de Stirling de deuxième espèce ont une relation de récurrence triangulaire d'ordre deux,

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k), \quad (2.24)$$

avec  $S(n, 0) = \delta_{n,0}$ , et  $S(n, k) = 0$  pour  $n < k$ .

2). Ils satisfont aussi une relation de récurrence verticale

$$S(n+1, k+1) = \sum_{i=k}^n \binom{i}{k} S(i, k). \quad (2.25)$$

**Preuve.** 1). La récurrence est vérifiée par le partitionnement des partitions de  $[n]$  en deux types. Le premier contient toutes les partitions dans lesquelles l'entier  $n$  est une part lui-même, et les autres  $n-1$  nombres sont partitionnés à  $k-1$  parts, alors il y aura  $S(n-1, k-1)$  cas dans ce type. Dans le deuxième type, dans lequel le nombre  $n$  n'est pas une part lui-même, les autres  $n-1$  nombres sont partitionnés en  $k$  parts, et alors il y a  $kS(n-1, k)$  cas dans ce type. Donc, la somme des cas est le nombre total des partitions de  $[n]$  en  $k$  parts.

2). En partitionnant les partitions de  $[n+1]$  à  $k+1$  parts, il y aura donc  $\binom{n}{i}$  méthodes pour choisir les  $n-i$  nombres pour être dans la même part que le nombre  $n+1$ , et alors il y aura aussi  $S(i, k)$  méthodes pour partitionner les  $i$  nombres restant à  $k$  parts supplémentaires. ■

À partir de la formule de récurrence (2.24) nous obtenons le Tableau 2.2 des valeurs de  $S(n, k)$ , pour les premiers nombres  $n$  et  $k$ .

### Formes explicites

**Proposition 2.2.3.** Les formes explicites des nombres de Stirling de deuxième espèce sont

$$S(n, k) = \frac{n!}{k!} \sum_{i_1 + \dots + i_k = n} \frac{1}{i_1! \cdots i_k!}, \quad (2.26)$$

et

$$S(n, k) = \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^{k-i}}{k!} \binom{k}{i} i^n. \quad (2.27)$$

n/k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	0	1							
2	0	1	1						
3	0	1	3	1					
4	0	1	7	6	1				
5	0	1	15	25	10	1			
6	0	1	31	90	65	15	1		
7	0	1	63	301	350	140	21	1	
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1

TABLE 2.2 – Les nombres de Stirling de deuxième espèce.

### Séries génératrices

**Proposition 2.2.4.** 1). La série génératrice ordinaire associée aux nombres de Stirling de deuxième espèce est donnée par

$$\sum_{n=k}^{\infty} S(n, k)x^n = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)}. \quad (2.28)$$

2). La série génératrice exponentielle des nombres de Stirling de deuxième espèce est donnée par

$$\sum_{n=k}^{\infty} S(n, k) \frac{x^n}{n!} = \frac{(e^x - 1)^k}{k!}. \quad (2.29)$$

3). La série génératrice exponentielle double est

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} S(n, k) \frac{x^n}{n!} y^k = \exp(y(e^x - 1)). \quad (2.30)$$

**Preuve.** 1). Posons

$$f_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} S(n, k)x^n.$$

D'après la relation de récurrence (2.24), on a

$$\begin{aligned} f_k(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (S(n-1, k-1) + kS(n-1, k))x^n \\ &= x \sum_{n=0}^{\infty} S(n-1, k-1)x^{n-1} + kx \sum_{n=0}^{\infty} S(n-1, k)x^{n-1} \\ &= x \sum_{n=0}^{\infty} S(n, k-1)x^n + kx \sum_{n=0}^{\infty} S(n, k)x^n \\ &= xf_{k-1}(x) + kxf_{k-1}(x), \end{aligned}$$

on obtient donc

$$f_k(x) = \frac{x}{1-kx} f_{k-1}(x).$$

On a

$$f_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} S(n, 0)x^n = 1,$$

$$f_1(x) = \frac{x}{1-2x}f_0(x) = \frac{x^2}{(1-x)(1-2x)},$$

et en général

$$f_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)}.$$

2). Soit  $k \in \mathbb{N}$ , en utilisant la formule explicite (2.27), on aura :

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^{\infty} S(n, k) \frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} S(n, k) \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left\{ \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n \right\} \frac{x^n}{n!} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^i \binom{k}{i} \frac{(k-i)^n x^n}{n!} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k-i)^n x^n}{n!} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} e^{(k-i)x} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (e^x)^{k-i} \\ &= \frac{1}{k!} (e^x - 1). \end{aligned}$$

3). D'après (2.29), on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} S(n, k) \frac{x^n}{n!} y^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^x - 1)^k}{k!} y^k \\ &= \exp(y(e^x - 1)). \end{aligned}$$

■

**Proposition 2.2.5.** *Les nombres de Stirling de deuxième espèce sont des spécialisation de la fonction symétrique complète*

$$S(n, k) = h_{n-k}(1, 2, \dots, k), \quad (2.31)$$

où

$$S(n+k, k) = h_k(1, 2, \dots, k). \quad (2.32)$$

**Preuve.** Soit  $k \in \mathbb{N}$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^{\infty} S(n, k)x^n &= \prod_{i=1}^k \frac{x^k}{(1-ix)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} h_n(1, 2, \dots, k)x^n x^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} h_n(1, 2, \dots, k)x^{n+k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} h_{n-k}(1, 2, \dots, k)x^n. \end{aligned}$$

Par identification, on trouve

$$S(n, k) = h_{n-k}(1, 2, \dots, k),$$

si on pose  $n' = n - k$  on a

$$S(n + k, k) = h_n(1, 2, \dots, k).$$

■

### Lien entre les deux types de nombres de Stirling

Les nombres de Stirling de première espèce s'expriment en termes des nombres de Stirling de deuxième espèce par la relation suivante dite de Schlömilch.

$$c(n + k, k) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k+i} \binom{n + 2k}{k + i} \binom{n + k + i + 1}{k + i} S(k + i, i). \quad (2.33)$$

Ils vérifient aussi les relations d'orthogonalités suivantes

$$\sum_{i=k}^n (-1)^{n-i} c(n, i) S(i, k) = \sum_{i=k}^n (-1)^{n-i} S(n, i) c(i, k) = \delta_{n,k},$$

les synonymes des relations d'inversion donné par :

$$a_n = \sum_k (-1)^{n-k} c(n, k) b_k \iff b_k = \sum_k (-1)^{n-k} S(n, k) a_k,$$

avec  $(a_n)_n$  et  $(b_n)_n$  deux suites données.

### 2.2.2 Les nombres de Lah

Considéré comme les nombres de Stirling de troisième espèce, les nombres de Lah sont introduits par le mathématicien Ivo Lah en 1995, nous utiliserons la notation  $L(n, k)$ .



**Définition 2.2.3.** Les nombres de Lah  $L(n, k)$  comptent le nombre de  $k$ -partitions en listes de  $[n]$ .

On peut définir aussi les nombres de Lah comme les coefficients de changement de base entre la base  $\{x^{\bar{k}}, k = 1, \dots, n\}$  et la base  $\{x^k, k = 1, \dots, n\}$ , c'est à dire

$$x^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n L(n, k)x^k. \quad (2.34)$$

**Propriétés 2.2.3.** 1). Les nombres de Lah ont une relation de récurrence triangulaire d'ordre deux

$$L(n, k) = L(n-1, k-1) + (n+k-1)L(n-1, k), \quad (2.35)$$

avec  $L(n, 0) = \delta_{n,0}$ , et pour  $n \neq 0$   $L(n, k) = 0$  lorsque  $k \in [n]$ .

2). Il y a une relation entre les nombres de Lah et les nombres de Stirling

$$L(n, k) = \sum_{i=k}^n c(n, i)S(i, k). \quad (2.36)$$

De la relation de récurrence (2.35), on obtient le tableau des nombres de Lah suivant :

n/k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	0	1							
2	0	2	1						
3	0	6	3	1					
4	0	24	12	4	1				
5	0	120	60	20	5	1			
6	0	720	360	120	30	6	1		
7	0	5040	2520	840	210	42	7	1	
8	0	40320	20160	6720	1680	336	56	8	1

TABLE 2.3 – Les nombres de Lah.

**Théorème 2.2.2.** La forme explicite des nombres de Lah est donnée par

$$L(n, k) = \frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1}. \quad (2.37)$$

### Séries génératrices

**Proposition 2.2.6.** 1). La série génératrice exponentielle associée aux nombres de Lah est donnée par

$$\sum_{n \geq k} L(n, k) \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left( \frac{x}{1-x} \right)^k. \quad (2.38)$$

2). La série génératrice exponentielle double associée aux nombres de Lah est donnée par

$$\sum_{k \geq 0} \sum_{n \geq 0} L(n, k) \frac{x^n}{n!} y^k = \exp\left(\frac{xy}{1-x}\right). \quad (2.39)$$

**Preuve.** 1). Posons

$$f_k(x) = \sum_{n \geq k} L(n, k) \frac{x^n}{n!}. \quad (2.40)$$

D'après la relation de récurrence (2.35), on a

$$\begin{aligned} f_{k(x)} &= \sum_{n \geq k} L(n, k) \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n \geq 0} L(n, k) \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n \geq 0} L(n-1, k-1) \frac{x^n}{n!} + (n+k-1) \sum_{n \geq 0} L(n-1, k) \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n \geq 0} L(n, k-1) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + (n+1+k-1) \sum_{n \geq 0} L(n, k) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= \sum_{n \geq 0} L(n, k-1) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + x \sum_{n \geq 0} L(n, k) \frac{x^n}{n!} + (k-1) \sum_{n \geq 0} L(n, k) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= \sum_{n \geq 0} L(n, k-1) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + x f_k(x) + (k-1) \sum_{n \geq 0} L(n, k) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

par conséquent

$$(1-x)f_k(x) = \sum_{n \geq 0} L(n, k-1) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + (k-1) \sum_{n \geq 0} L(n, k) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Maintenant, nous dérivons les deux membres, on obtient

$$-f_k(x) + (1-x)f'_k(x) = f_{k-1}(x) + (k-1)f_k(x),$$

donc

$$(1-x)f'_k(x) + kf_k(x) = f_{k-1}(x).$$

Multipliant par  $(1-x)^{k-1}$ , et en utilisant la formule pour  $f_{k-1}$  on aura

$$\left((1-x)^k f_k(x)\right)' = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!},$$

en intégrant les deux membres, nous obtenons

$$(1-x)^k f_k(x) = \frac{x^k}{k!}.$$

D'où

$$f_k(x) = \frac{1}{k!} \left(\frac{x}{1-x}\right).$$

2). D'après (2.38), on a

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} \sum_{n \geq 0} L(n, k) \frac{x^n}{n!} y^k &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \left( \frac{x}{1-x} \right) y^k \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \left( \frac{xy}{1-x} \right) \\ &= \exp \left( \frac{xy}{1-x} \right)^k. \end{aligned}$$

■

**Remarque 2.2.2.** Les relations (2.9) et (2.10) montrent que les nombres de Lah sont des spécialisation des fonctions symétriques élémentaires et complètes

$$L(n, k) = \frac{n!}{k!} e_{k-1}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{(n-1)\text{ fois}}) = \frac{n!}{k!} h_{k-1}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{(n-k)\text{ fois}}). \quad (2.41)$$

### 2.2.3 Les nombres de Whitney du réseau de Dowling

#### Réseau de Dowling

Soit  $G$  un groupe fini d'ordre  $m$ . Une  $G$ -partition partielle de  $[n]$  est une famille  $\alpha_P = \{\alpha_{P_1}, \dots, \alpha_{P_k}\}$  des fonctions  $\alpha_i : P_i \rightarrow G$  (où  $P$  une partition partielle de  $[n]$ ).

On note  $Q'_n(G)$  l'ensemble de toutes les  $G$ -partitions partielles de  $[n]$ . S'il existe  $g \in G$ , tel que  $\alpha_{P_i} = g\alpha_{P_j}$ , on dit que  $\alpha_{P_i}$  et  $\alpha_{P_j}$  sont équivalents. La classe d'équivalence notée  $\bar{\alpha}_{P_i}$ , donc  $\chi = \{\bar{\alpha}_{P_1}, \bar{\alpha}_{P_2}, \dots, \bar{\alpha}_{P_i}\}$  l'ensemble des classes d'équivalences.

Un ensemble des classes  $\chi$  est dit plus fin qu'une autre  $\chi'$  si :

- Chaque part de  $\chi'$  est une union de parts de  $\chi$ .
- Pour chaque part  $P_i$  incluse dans  $P'_j$ ,  $\alpha_i$  est équivalente à la restriction de  $\alpha'_j$  au domaine  $P_j$ .

Cela donne un ordre partiel de l'ensemble de tous les ensembles des classes de  $G$ -partitions partielles de  $[n]$ , appelé réseau de Dowling (treillis) noté par  $Q_n(G)$ .

Le polynôme caractéristique du réseau de Dowling  $Q_n(G)$  n'est que la factorielle descendante généralisée

$$P_n(x; m) = \prod_{i=0}^{n-1} (x - 1 - mi) = m^n \left( \frac{x-1}{m} \right)^n. \quad (2.42)$$

## Les nombres de Whitney de première espèce

**Définition 2.2.4.** Les nombres de Whitney de première espèce notés  $w_m(n, k)$  sont les coefficients de  $x^k$  dans le polynôme caractéristique  $P_n(x; m)$  :

$$P_n(x; m) = \sum_{k=0}^n w_m(n, k)x^k. \quad (2.43)$$

**Propriétés 2.2.4.** Les nombres de Whitney de première espèce vérifient la relation de récurrence suivante :

$$w_m(n, k) = w_m(n-1, k-1) + (m(n-1) + 1)w_m(n-1, k), \quad (2.44)$$

avec  $w_m(0, k) = \delta_{k,0}$ , et  $w_m(n, k) = 0$  pour  $n \leq k$ .

## Séries génératrices

**Proposition 2.2.7.** 1). La série génératrice ordinaire associée aux nombres de Whitney de première espèce est donnée par

$$\sum_{k=0}^n w_m(n, n-k)x^k = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - (1+mk)x). \quad (2.45)$$

2). La série génératrice exponentielle double des nombres de Whitney de première espèce est

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} w_m(n, k)x^k \frac{z^n}{n!} = (1 + mz)^{\frac{x-1}{m}}. \quad (2.46)$$

3). La série génératrice exponentielle des nombres de Whitney de première espèce est

$$\sum_{n \geq k} w_m(n, k) \frac{z^n}{n!} = \frac{(1 + mz)^{\frac{-1}{m}} \ln^k(1 + mz)}{k! m^k}. \quad (2.47)$$

**Preuve.** 1). Montrons par récurrence sur  $n$ .

2). En multipliant (2.43) par  $\frac{z^n}{n!}$  et en sommant sur  $n$ , on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0} w_m(n, k)x^k \frac{z^n}{n!} &= \sum_{n \geq 0} \left( \frac{x-1}{m} \right)^n \frac{(mz)^n}{n!} \\ &= (1 + mz)^{\frac{x-1}{m}}. \end{aligned}$$

3). De la relation (2.46), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} w_m(n, k)x^k \frac{z^n}{n!} &= (1 + mz)^{\frac{x-1}{m}} \\ &= (1 + mz)^{\frac{-1}{m}} \exp\left(\frac{x}{m} \ln(1 + mz)\right) \\ &= (1 + mz)^{\frac{-1}{m}} \sum_{k \geq 0} \frac{x^k \ln^k(1 + mz)}{m^k k!} \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{(1 + mz)^{\frac{-1}{m}} \ln^k(1 + mz)x^k}{m^k k!}. \end{aligned}$$

On aura donc

$$\sum_{n \geq k} w_m(n, k) \frac{z^n}{n!} = \frac{(1 + mz)^{\frac{-1}{m}} \ln^k(1 + mz)}{k! m^k}.$$

■

**Remarque 2.2.3.** Pour  $m = 1$  ( $G$  est le groupe trivial), les nombres de Whitney de première espèce se réduisent aux nombres de Stirling de première espèce.

$$w_1(n, k) = s(n + 1, k + 1). \quad (2.48)$$

**Proposition 2.2.8.** Les nombres de Whitney de première espèce sont des spécialisations des fonctions symétriques élémentaires données par :

$$w_m(n, n - k) = (-1)^k e_k(1, 1 + m, \dots, 1 + m(n - 1)). \quad (2.49)$$

**Preuve.** D'après la relation (2.45), on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n w_m(n, n - k) x^k &= \prod_{k=0}^{n-1} (1 - (1 + mk)x) \\ &= \sum_{k \geq 0} (-1)^k e_k(1, 1 + m, \dots, 1 + m(n - 1)) x^k. \end{aligned}$$

Par identification on trouve

$$w_m(n, n - k) = (-1)^k e_k(1, 1 + m, \dots, 1 + m(n - 1)).$$

■

## Les nombres de Whitney de deuxième espèce

**Définition 2.2.5.** Les nombres de Whitney de deuxième espèce notés  $W_m(n, k)$  peuvent être écrit comme des coefficients de polynôme  $x^n$  tel que :

$$x^n = \sum_{k=0}^n \left( \frac{x-1}{m} \right)^k m^k W_m(n, k). \quad (2.50)$$

**Propriétés 2.2.5.** [16] Les nombres de Whitney de deuxième espèce vérifient la relation de récurrence suivante :

$$W_m(n, k) = W_m(n - 1, k - 1) + (mk + 1)W_m(n - 1, k), \quad (2.51)$$

avec  $W_m(0, k) = \delta_{k,0}$ , et  $W_m(n, k) = 0$  pour  $n \leq k$ .

## Formes explicites

**Proposition 2.2.9.** Les nombres de Whitney du deuxième espèce vérifient l'identité suivante :

$$W_m(n, k) = \frac{1}{m^k k!} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (m(k - j) + 1)^n. \quad (2.52)$$

## Séries génératrices

**Proposition 2.2.10.** 1). La série génératrice ordinaire associée aux nombres de Whitney de deuxième espèce est donnée par

$$\sum_{k=0}^n W_m(n, n-k)x^k = \frac{x^k}{(1-x)(1-(1+m)x)\cdots(1-(1+mk)x)}. \quad (2.53)$$

2). La série génératrice exponentielle des nombres de Whitney de deuxième espèce est

$$\sum_{n \geq k} W_m(n, k) \frac{x^n}{n!} = \frac{e^x}{k!} \left( \frac{\exp(mx) - 1}{m} \right)^k. \quad (2.54)$$

**Remarque 2.2.4.** Pour  $m = 1$ , les nombres de Whitney de deuxième espèce se réduisent aux nombres de Stirling de deuxième espèce

$$W_1(n, k) = S(n+1, k+1). \quad (2.55)$$

**Proposition 2.2.11.** Les nombres de Whitney de deuxième espèce sont des spécialisations de la fonction symétrique complète telle que

$$W_m(n, k) = h_{n-k}(1, 1+m, \dots, 1+m(k-1)). \quad (2.56)$$

## 2.3 $q$ -Analogues des suites remarquables

### 2.3.1 Coefficients $q$ -binomiaux

**Définition 2.3.1.** Le  $q$ -analogue d'un entier positif  $n$  est une expression  $f(n, q)$  telle que

$$\lim_{q \rightarrow 1} f(n, q) = n. \quad (2.57)$$

Par convention le  $q$ -analogue d'un nombre  $n$  est

$$[n]_q = \frac{1 - q^n}{1 - q} = 1 + q + \cdots + q^{n-1}. \quad (2.58)$$

Le  $q$ -factorielle d'un entier  $n$ , note  $[n]_q!$  égale à

$$[n]_q! = [n]_q [n-1]_q \cdots [1]_q. \quad (2.59)$$

Le  $q$ -factorielle montante  $[x]_q^{\overline{n}}$  est donné par

$$[x]_q^{\overline{n}} = \begin{cases} x(x + [1]_q) \cdots (x + [n-1]_q) & n > 0, \\ 1 & n = 0. \end{cases} \quad (2.60)$$

Le  $q$ -factorielle descendante  $[x]_q^{\underline{n}}$  est donné par

$$[x]_q^{\underline{n}} = \begin{cases} x(x - [1]_q) \cdots (x - [n-1]_q) & n > 0, \\ 1 & n = 0. \end{cases} \quad (2.61)$$

**Définition 2.3.2.** *Le coefficient  $q$ -binomial, appelé aussi polynôme de Gauss, est défini pour  $0 \leq k \leq n$ , par*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q! [n-k]_q!} = \frac{[n]_q!}{[k]_q!}. \quad (2.62)$$

*Le coefficient  $q$ -binomial s'écrit aussi pour  $0 \leq k \leq n$ , par*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{[n-i]_q}{[i+1]_q}. \quad (2.63)$$

*Pour  $q = 1$ , le coefficient  $q$ -binomial est le coefficient binomial classique.*

*Nous présentons quelques valeurs du triangle des coefficients  $q$ -binomiaux ci-dessous :*

n/k	0	1	2	3
0	1			
1	1	1		
2	1	$1+q$	1	
3	1	$1+q+q^2$	$1+q+q^2$	1
4	1	$1+q+q^2+q^3$	$1+q+2q^2+q^3+q^4$	$1+q+q^2+q^3$
5	1	$1+q+q^2+q^3+q^4$	$1+q+2q^2+2q^3+2q^4+q^5+q^6$	$1+q+2q^2+2q^3+\dots$

TABLE 2.4 – Table des valeurs de  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ .

**Remarque 2.3.1.** *Les coefficients  $q$ -binomiaux aussi sont symétriques, c'est à dire :*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_q, \quad (2.64)$$

**Proposition 2.3.1.** *Les coefficients  $q$ -binomiaux satisfont la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q, \quad (2.65)$$

*pour  $0 \leq k \leq n$ .*

**Remarque 2.3.2.** *On peut déduire une autre relation de récurrence des coefficients  $q$ -binomiaux :*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q. \quad (2.66)$$

*pour  $0 \leq k \leq n$ .*

**Théorème 2.3.1.** *La formule du binôme de Newton pour les coefficients  $q$ -binomiaux est donnée par*

$$\prod_{k=0}^{n-1} (1 + q^k x) = \sum_{k=0}^n q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k, \quad (2.67)$$

*ainsi*

$$\prod_{j=1}^{n-1} \frac{1}{1 - xq^j} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k. \quad (2.68)$$

**Proposition 2.3.2.** *Les coefficients  $q$ -binomiaux sont des spécialisation des fonctions symétriques élémentaires et complètes*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = q^{-\binom{k}{2}} e_k(1, q, q^2, \dots, q^{n-1}) = h_k(1, q, q^2, \dots, q^{n-k}). \quad (2.69)$$

**Preuve.** On a

$$\sum_{k=0}^n q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k = \prod_{k=0}^{n-1} (1 + q^k x).$$

D'après Proposition 1.3.2, on a aussi

$$\sum_{k=0}^n q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k = \sum_{k=0}^n e_k(1, q, q^2, \dots, q^{n-1}) x^k.$$

Par identification on trouve

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = q^{-\binom{k}{2}} e_k(1, q, q^2, \dots, q^{n-1}).$$

Ainsi on a

$$\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k = \prod_{j=1}^{n-1} \frac{1}{1-xq^j}.$$

D'après Proposition 1.3.4, on aura

$$\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k = \sum_{k=0}^n h_k(1, q, q^2, \dots, q^{n-1}) x^k.$$

Par identification, on obtient

$$\begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q = h_k(1, q, q^2, \dots, q^{n-1}),$$

et donc

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = h_k(1, q, q^2, \dots, q^{n-k}).$$

■

## 2.3.2 Les nombres $q$ -Stirling

Les nombres  $q$ -Stirling de première espèce

**Définition 2.3.3.** *Le nombre  $q$ -Stirling de première espèce noté  $c_q(n, k)$ , est défini par*

$$[x]_q^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^n q^{-\binom{k}{2}} c_q(n, k) [x]_q^k. \quad (2.70)$$



**Proposition 2.3.3.** *Le nombre  $q$ -Stirling de première espèce, satisfait la relation de récurrence suivante*

$$c_q(n, k) = c_q(n-1, k-1) + [n-1]_q c_q(n-1, k), \quad (2.71)$$

avec  $c_q(0, 0) = 1$ ,  $c_q(0, k) = 0$ , pour tout  $k > 0$ .

Il représente aussi le  $k$ -ième coefficient du développement :

$$\prod_{i=0}^{n-1} (x + [i]_q) = \sum_{k=0}^n c_q(n, k) x^k. \quad (2.72)$$

Nous présentons quelques valeurs du nombre  $q$ -Stirling de première espèce ci-dessous :

n/k	0	1	2	3	4
0	1				
1	0	1			
2	0	1	1		
3	0	$1+q$	$2+q$	1	
4	0	$1+2q+2q^2+q^3$	$3+4q+3q^2+q^3$	$3+2q+q^2$	1

TABLE 2.5 – Table des premières valeurs de  $c_q(n, k)$ .

**Proposition 2.3.4.** *Les nombres  $q$ -Stirling de première espèce sont des spécialisation de la fonction symétrique élémentaire :*

$$c_q(n, k) = e_{n-k}([1]_q, [2]_q, \dots, [n-1]_q). \quad (2.73)$$

**Preuve.** D'après la relation (2.72), on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n c_q(n, k) x^k &= \prod_{i=0}^{n-1} (x + [i]_q) \\ &= \prod_{i=0}^n (x + [i-1]_q) \\ &= \sum_{k=0}^n e_{n-k}([1]_q, [2]_q, \dots, [n-1]_q) x^k. \end{aligned}$$

D'où par identification

$$c_q(n, k) = e_{n-k}([1]_q, [2]_q, \dots, [n-1]_q).$$

■

### Les nombres $q$ -Stirling de deuxième espèce

**Définition 2.3.4.** Le nombre  $q$ -Stirling de deuxième espèce noté  $S_q(n, k)$ , est défini par

$$[x]_q^n = \sum_{k=0}^n q^{\binom{k}{2}} S_q(n, k) [x]_q^k. \quad (2.74)$$

**Proposition 2.3.5.** Le nombre  $q$ -Stirling de deuxième espèce, satisfait la relation de récurrence suivante :

pour  $n \geq 1$

$$S_q(n, k) = S_q(n-1, k-1) + [k]_q S_q(n-1, k), \quad (2.75)$$

avec  $S_q(0, 0) = 1$ ,  $S_q(0, k) = 0$ , pour tout  $k > 0$ .

Il représente aussi le  $k$ -ième coefficient du développement :

$$\prod_{i=0}^k \frac{x^k}{x - [i]_q x} = \sum_{n=k}^{\infty} S_q(n, k) x^n. \quad (2.76)$$

Nous présentons quelques valeurs du nombre  $q$ -Stirling de deuxième espèce ci-dessous :

n/k	0	1	2	3	4
0	1				
1	0	1			
2	0	1	1		
3	0	1	$2 + q$	1	
4	0	1	$3 + 3q + q^2$	$3 + 2q + q^2$	1

TABLE 2.6 – Table des premières valeurs de  $S_q(n, k)$ .

**Proposition 2.3.6.** Les nombres  $q$ -Stirling de deuxième espèce sont des spécialisation de la fonction symétrique complète :

$$S_q(n, k) = h_{n-k}([1]_q, [2]_q, \dots, [k]_q). \quad (2.77)$$

**Preuve.** D'après la relation (2.76), on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n S_q(n, k) x^k &= \prod_{i=0}^k \frac{x^k}{x - [i]_q x} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} h_n([1]_q, [2]_q, \dots, [k]_q) x^{n+k} \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} h_{n-k}([1]_q, [2]_q, \dots, [k]_q) x^n \end{aligned}$$

D'où par identification

$$S_q(n, k) = h_{n-k}([1]_q, [2]_q, \dots, [k]_q).$$

■

### 2.3.3 Les nombres $q$ -Whitney

Les nombres  $q$ -Whitney de première espèce

**Définition 2.3.5.** Le nombre  $q$ -Whitney de première espèce noté  $w_{m,q}(n, k)$ , est défini par

$$m^n \left[ \frac{x-1}{m} \right]_q^n = \sum_{k=0}^n w_{m,q}(n, k) x^k. \quad (2.78)$$

**Proposition 2.3.7.** Le nombre  $q$ -Whitney de première espèce, satisfait la relation de récurrence suivante :

$$w_{m,q}(n, k) = w_{m,q}(n-1, k-1) + (m[n-1]_q + 1)w_{m,q}(n-1, k), \quad (2.79)$$

avec  $w_{m,q}(0, k) = \delta_{k,0}$ , et  $w_{m,q}(n, k) = 0$  pour  $n \leq k$ .

**Proposition 2.3.8.** [18] La série génératrice ordinaire associée aux nombres  $q$ -Whitney de première espèce est donnée par

$$\sum_{k=0}^n w_{m,q}(n, n-k) x^k = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - (1 + m[k]_q)x). \quad (2.80)$$

**Remarque 2.3.3.** Pour  $m = 1$ , les nombres  $q$ -Whitney de première espèce se réduisent aux nombres  $q$ -Stirling de première espèce.

$$w_{1,q}(n, k) = c_q(n+1, k+1). \quad (2.81)$$

**Proposition 2.3.9.** Les nombres  $q$ -Whitney de première espèce sont des spécialisation de la fonction symétrique élémentaire :

$$w_{m,q}(n, n-k) = (-1)^k e_k(1, 1 + [1]_q m, \dots, 1 + m[n-1]_q). \quad (2.82)$$

Les nombres  $q$ -Whitney de deuxième espèce

**Définition 2.3.6.** Le nombre  $q$ -Whitney de deuxième espèce noté  $W_{m,q}(n, k)$ , est défini par

$$m^n \left[ \frac{x-1}{m} \right]_q^n = \sum_{k=0}^n W_{m,q}(n, k) x^k. \quad (2.83)$$

**Proposition 2.3.10.** *Le nombre  $q$ -Whitney de deuxième espèce, satisfait la relation de récurrence suivante :*

$$W_{m,q}(n, k) = W_{m,q}(n-1, k-1) + (m[n-1]_q + 1)W_m(n-1, k), \quad (2.84)$$

avec  $W_{m,q}(0, k) = \delta_{k,0}$ , et  $W_m(n, k) = 0$  pour  $n \leq k$ .

**Proposition 2.3.11.** *La série génératrice ordinaire associée aux nombres de  $q$ -Whitney de deuxième espèce est donnée par*

$$\sum_{k=0}^n W_m(n, n-k)x^k = \frac{x^k}{(1 - (1 + [0]_q m)x)(1 - (1 + [1]_q m)x) \cdots (1 - (1 + m[k]_q)x)}. \quad (2.85)$$

**Remarque 2.3.4.** *Pour  $m = 1$ , les nombres de Whitney de deuxième espèce se réduisent aux nombres de  $q$ -Stirling de deuxième espèce*

$$W_{1,q}(n, k) = S_q(n+1, k+1). \quad (2.86)$$

**Proposition 2.3.12.** *Les nombres  $q$ -Whitney de deuxième espèce sont des spécialisations de la fonction symétrique complète :*

$$W_{m,q}(n, k) = h_{n-k}(1, 1 + [1]_q m, \dots, 1 + m[k]_q). \quad (2.87)$$

---

---

## CHAPITRE 3

---

# UNE GÉNÉRALISATION DES FONCTIONS SYMÉTRIQUES CLASSIQUES

Dans ce chapitre, on présente une nouvelle généralisation des fonctions symétriques classiques à partir de leur série génératrice, ce qui permet de généraliser certaines relations classiques impliquant les fonctions symétriques élémentaire, complète et somme de puissance. Ensuite nous exprimons les fonctions symétriques généralisées  $E_k^{(s)}$ ,  $H_k^{(s)}$  et  $P_k^{(s)}$  en termes de fonctions symétriques classique et nous considérons leurs interprétations combinatoire. Finalement, en utilisant la fonction symétrique élémentaire généralisée pour interpréter le coefficient bi<sup>s</sup>nomial et son  $q$ -analogue par les chemins de réseau et les partitions d'entier.

Tous les résultats donnés dans ce chapitre sont dus à Bazeniari et al. [3]. et Ahmia et Merca[2].

### 3.1 Fonctions symétriques généralisées

**Définition 3.1.1.** Soit  $s$  un entier positif, la fonction symétrique élémentaire généralisée notée  $E_k^{(s)}(n)$  est définie par

$$E_k^{(s)}(n) := E_k^{(s)}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{\lambda \vdash k \\ 0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \leq s}} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n}, \quad (3.1)$$

où  $E_k^{(s)}(0) = 1$ .  $E_k^{(s)}(n) = 0$  si  $sn < k$  ou  $k < 0$ .

**Définition 3.1.2.** La fonction symétrique élémentaire généralisée est définie comme étant le  $k$ -ième coefficient du développement :

$$\prod_{i=1}^n (1 + x_i t + \cdots + (x_i t)^s) = \sum_{k=0}^{\infty} E_k^{(s)}(n) t^k, \quad (3.2)$$

et la fonction symétrique complète généralisée notée  $H_k^{(s)}(n)$  est définie comme étant le  $k$ -ième coefficient du développement :

$$\prod_{i=1}^n (1 - x_i t + \cdots + (-x_i t)^s)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} H_k^{(s)}(n) t^k, \quad (3.3)$$

où  $s$  est un entier positif.

**Remarque 3.1.1.** 1). Pour  $s = 1$  dans (3.2) et (3.3), on obtient les séries génératrices de la fonction symétrique élémentaire et complète.

2). Nous pouvons facilement écrire  $E_k^{(s)}$  en termes de fonctions symétriques monômiales

$$E_k^{(s)}(n) = \sum_{\substack{\lambda \vdash k \\ \lambda_1 \leq s}} m_{\lambda}(n). \quad (3.4)$$

De plus si  $s = k$ , on obtient

$$E_k^{(s)}(n) = h_k(n). \quad (3.5)$$

**Propriétés 3.1.1.** Les fonctions symétriques élémentaires et complètes généralisées satisfont les relations de récurrences suivantes :

$$E_k^{(s)}(n) = \sum_{j=0}^s x_n^j E_{k-j}^{(s)}(n) \quad (3.6)$$

et

$$H_k^{(s)}(n) = \sum_{j=0}^s x_n^j H_{k-j}^{(s)}(n). \quad (3.7)$$

**Définition 3.1.3.** Soient  $k, s$  et  $n$  trois entiers positifs, on définit la fonction symétrique  $P_k^{(s)}(n)$  par

$$P_k^{(s)}(n) := P_k^{(s)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_k^{(s)} p_k(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (3.8)$$

où

$$c_k^{(s)} = \begin{cases} (-1)^k s & \text{si } k \equiv 0[s+1], \\ (-1)^{k-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Proposition 3.1.1.** La série génératrice de  $P_k^{(s)}$  est donnée par

$$\sum_{k \geq 1} P_k^{(s)}(n) t^{k-1} = \frac{d}{dt} \left[ \ln \prod_{i=1}^n (1 - x_i t + \cdots + (-x_i t)^s)^{-1} \right]. \quad (3.9)$$

**Preuve.** Posons  $\omega_{j,s} = e^{2j\pi i/s}$  avec  $j = 1, 2, \dots, s-1$ , on peut voir d'une part

$$\begin{aligned} 1 - t + \dots + (-t)^{s-1} &= (-1)^{s-1} \prod_{j=1}^{s-1} (\omega_{j,s} + t) \\ &= (-1)^{s-1} \prod_{j=1}^{s-1} \omega_{j,s} \left( 1 + \frac{t}{\omega_{j,s}} \right) \\ &= (-1)^{s-1} \prod_{j=1}^{s-1} \omega_{j,s} (1 + \omega_{s-j,s} t) \\ &= \prod_{j=1}^{s-1} (1 + \omega_{j,s} t), \end{aligned}$$

où  $\prod_{j=1}^{s-1} \omega_{j,s} = (-1)^{s-1}$ . Et d'autre part

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \ln \prod_{i=1}^n (1 - x_i t + \dots + (-x_i t)^s)^{-1} &= \frac{d}{dt} \ln \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^s (1 + \omega_{j,s+1} x_i t)^{-1} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^s \frac{d}{dt} \ln (1 + \omega_{j,s+1} x_i t)^{-1} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^s \frac{-\omega_{j,s+1} x_i}{1 + \omega_{j,s+1} x_i t} \\ &= - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^s \omega_{j,s+1} x_i \sum_{k \geq 0} (-\omega_{j,s+1} x_i t)^k \\ &= \sum_{k \geq 0} (-1)^{k+1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^s (\omega_{j,s+1} x_i)^{k+1} t^k \\ &= \sum_{k \geq 1} (-1)^k \left( \sum_{j=1}^s \omega_{j,s+1}^k \right) \left( \sum_{i=1}^n x_i^k \right) t^{k-1} \\ &= \sum_{k \geq 1} (-1)^k p_k(\omega_{1,s+1}, \omega_{2,s+1}, \dots, \omega_{s,s+1}) p_k(n) t^{k-1} \\ &= \sum_{k \geq 1} P_k^{(s)}(x_1, x_2, \dots, x_n) t^{k-1}. \end{aligned}$$

où

$$p_k(\omega_{1,s+1}, \omega_{2,s+1}, \dots, \omega_{s,s+1}) = \begin{cases} s & \text{si } k \equiv 0[s+1] \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

■

### Les identités de Newton révisées

**Théorème 3.1.1.** Soient  $k, n$  et  $s$  trois entiers positifs, alors

$$\sum_{j=0}^k (-1)^j E_j^{(s)}(n) H_{k-j}^{(s)}(n) = \delta_{0,k}. \quad (3.10)$$

**Preuve.** On a

$$\left( \sum_{j \geq 0} (-1)^j E_j^{(s)}(n) t^j \right) \left( \sum_{r \geq 0} H_r^{(s)}(n) t^r \right) = \sum_{j \geq 0} \sum_{r \geq 0} (-1)^j E_j^{(s)}(n) H_r^{(s)}(n) t^{r+j},$$

on pose  $k = j + r$ , on obtient

$$\begin{aligned} \left( \sum_{j \geq 0} (-1)^j E_j^{(s)}(n) t^j \right) \left( \sum_{r \geq 0} H_r^{(s)}(n) t^r \right) &= \sum_{k \geq 0} \sum_{j+r=k} (-1)^j E_j^{(s)}(n) H_{k-j}^{(s)}(n) t^k \\ &= \sum_{k \geq 0} \sum_{j=0}^k (-1)^j E_j^{(s)}(n) H_{k-j}^{(s)}(n) t^k. \end{aligned}$$

D'autre part d'après les relations (3.2) et (3.3), on a

$$\left( \sum_{j \geq 0} (-1)^j E_j^{(s)}(n) t^j \right) \left( \sum_{r \geq 0} H_r^{(s)}(n) t^r \right) = 1.$$

Par identification on trouve

$$\sum_{j=0}^k (-1)^j E_j^{(s)}(n) H_{k-j}^{(s)}(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

d'où le résultat. ■

**Théorème 3.1.2.** Soient  $k, n$  et  $s$  trois entiers positifs, alors on a

1).

$$k E_k^{(s)}(n) = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} P_j^{(s)}(n) E_{k-j}^{(s)}(n). \quad (3.11)$$

2).

$$k H_k^{(s)}(n) = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} P_j^{(s)}(n) H_{k-j}^{(s)}(n). \quad (3.12)$$

3).

$$P_k^{(s)}(n) = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} j E_j^{(s)}(n) H_{k-j}^{(s)}(n). \quad (3.13)$$

**Preuve.** 1). D'après la relation (3.9), on a

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1} P_k^{(s)}(n) t^{k-1} &= \frac{d}{dt} \ln \prod_{i=1}^n (1 - x_i t + \dots + (-x_i t)^s)^{-1} \\ &= \frac{d}{dt} \ln \left( \sum_{k \geq 0} (-1)^k E_k^{(s)}(n) t^k \right)^{-1} \\ &= \frac{- \sum_{k \geq 1} (-1)^k k E_k^{(s)}(n) t^{k-1}}{\sum_{k \geq 0} (-1)^k E_k^{(s)}(n) t^k}, \end{aligned} \quad (3.14)$$



si on remplace  $t$  par  $-t$ , on obtient

$$\sum_{k \geq 1} k E_k^{(s)}(n) t^{k-1} = \left( \sum_{k \geq 0} E_k^{(s)}(n) t^k \right) \left( \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} P_k^{(s)}(n) t^{k-1} \right).$$

Maintenant, multipliant les deux membres par  $t$ , on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1} k E_k^{(s)}(n) t^k &= \sum_{k \geq 0} \sum_{j \geq 1} (-1)^{j-1} P_j^{(s)}(n) E_k^{(s)}(n) t^{k+j} \\ &= \sum_{k \geq 1} \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} P_j^{(s)}(n) E_{k-j}^{(s)}(n) t^k. \end{aligned}$$

Par identification, on trouve

$$k E_k^{(s)}(n) = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} P_j^{(s)}(n) E_{k-j}^{(s)}(n).$$

2). On a

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1} P_k^{(s)}(n) t^{k-1} &= \frac{d}{dt} \ln \prod_{i=1}^n (1 - x_i t + \dots + (-x_i t)^s)^{-1} \\ &= \frac{d}{dt} \ln \sum_{k \geq 0} H_k^{(s)}(n) t^k \\ &= \left( \sum_{k \geq 1} k H_k^{(s)}(n) t^{k-1} \right) \left( \sum_{k \geq 0} H_k^{(s)}(n) t^k \right)^{-1}, \end{aligned}$$

donc

$$k H_k^{(s)}(n) = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} P_j^{(s)}(n) H_{k-j}^{(s)}(n).$$

3). Pour la relation (3.13), nous écrivons la relation (3.14) sur la forme

$$\sum_{k \geq 1} P_k^{(s)}(n) t^{k-1} = \left( \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} k E_k^{(s)}(n) t^{k-1} \right) \left( \sum_{k \geq 0} H_k^{(s)}(n) t^k \right),$$

donc

$$P_k^{(s)}(n) = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} j E_j^{(s)}(n) H_{k-j}^{(s)}(n).$$

■

**Remarque 3.1.2.** Dans le reste de ce chapitre, on met par fois  $E_k^{(s)}$ ,  $H_k^{(s)}$  et  $P_k^{(s)}$  au lieu de  $E_k^{(s)}(n)$ ,  $H_k^{(s)}(n)$  et  $P_k(n)$  pour simplifier l'écriture.

**Théorème 3.1.3.** Soient  $k$ ,  $s$  et  $n$  trois entiers positifs, la fonction symétrique somme de puissance  $p_k(n)$  et les fonctions symétriques généralisées  $E_k^{(s)}$  et  $H_k^{(s)}$ , sont liées par

$$p_k(n) = \frac{\sum_{t_1+2t_2+\dots+kt_k=k} \frac{(-1)^{t_1+t_2+\dots+t_k}}{t_1+t_2+\dots+t_k} \binom{t_1+t_2+\dots+t_k}{t_1, t_2, \dots, t_k} \prod_{i=1}^k (E_i^{(s)})^{t_i}}{\sum_{t_1+2t_2+\dots+st_s=k} \frac{(-1)^{t_1+t_2+\dots+t_s}}{t_1+t_2+\dots+t_s} \binom{t_1+t_2+\dots+t_s}{t_1, t_2, \dots, t_s}} \quad (3.15)$$

et

$$p_k(n) = \frac{\sum_{t_1+2t_2+\dots+kt_k=k} \frac{(-1)^{1+t_1+t_2+\dots+t^k}}{t_1+t_2+\dots+t^k} \binom{t_1+t_2+\dots+t^k}{t_1, t_2, \dots, t_k} \prod_{i=1}^k (H_i^{(s)})^{t_i}}{\sum_{t_1+2t_2+\dots+st_s=k} \frac{(-1)^{k+t_1+t_2+\dots+t^s}}{t_1+t_2+\dots+t^s} \binom{t_1+t_2+\dots+t^k}{t_1, t_2, \dots, t_s}}. \quad (3.16)$$

**Preuve.** Nous écrivons (3.2) sur la forme de série logarithmique

$$\ln(1+x) = \sum_{m \geq 1} \frac{(-1)^{m-1} t^m}{m}, \quad |t| < 1, \text{ on obtient}$$

$$\begin{aligned} \ln \left( \sum_{k \geq 0} E_k^{(s)}(n) t^k \right) &= \ln \prod_{i=1}^n (1 + x_i t + \dots + (x_i t)^s) \\ &= \sum_{i=1}^n \ln(1 + x_i t + \dots + (x_i t)^s) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{m \geq 1} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \left( \sum_{j=1}^s (x_i t)^j \right)^m \\ &= \sum_{m \geq 1} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \sum_{i=1}^n \sum_{t_1+t_2+\dots+t_s=m} \binom{t_1+t_2+\dots+t_s}{t_1, t_2, \dots, t_s} (x_i t)^{t_1} (x_i t)^{2t_2} \dots (x_i t)^{st_s} \\ &= \sum_{m \geq 1} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{k=m \\ t_1+t_2+\dots+t_s=m \\ t_1+2t_2+\dots+st_s=k}}^{sm} \binom{t_1+t_2+\dots+t_s}{t_1, t_2, \dots, t_s} (x_i t)^k \\ &= \sum_{m \geq 1} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \sum_{k=m}^{sm} \sum_{t_1+t_2+\dots+t_s=m} \binom{t_1+t_2+\dots+t_s}{t_1, t_2, \dots, t_s} p_k(n) t^k \\ &= \sum_{k \geq 1} \sum_{t_1+t_2+\dots+t_s=m} \frac{(-1)^{1+t_1+t_2+\dots+t_s}}{t_1+t_2+\dots+t_s} \binom{t_1+t_2+\dots+t_s}{t_1, t_2, \dots, t_s} p_k(n) t^k. \end{aligned}$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} \ln \left( 1 + \sum_{k \geq 1} E_k^{(s)}(n) t^k \right) &= \sum_{m \geq 1} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \left( \sum_{k \geq 0} E_k^{(s)}(n) t^k \right)^m \\ &= \sum_{m \geq 1} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \sum_{k \geq 1} \sum_{t_1+t_2+\dots+t_s=m} \binom{t_1+t_2+\dots+t_s}{t_1, t_2, \dots, t_s} \prod_{i=1}^k (E_i^{(s)})^{t_i} t^k \\ &= \sum_{k \geq 1} \sum_{t_1+t_2+\dots+t_s=m} \frac{(-1)^{1+t_1+t_2+\dots+t_s}}{t_1+t_2+\dots+t_s} \binom{t_1+t_2+\dots+t_s}{t_1, t_2, \dots, t_s} \prod_{i=1}^k (E_i^{(s)})^{t_i} t^k. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Par identification, on obtient

$$\begin{aligned} &\sum_{t_1+t_2+\dots+t_s=m} \frac{(-1)^{1+t_1+t_2+\dots+t_s}}{t_1+t_2+\dots+t_s} \binom{t_1+t_2+\dots+t_s}{t_1, t_2, \dots, t_s} p_k(n) \\ &= \sum_{t_1+t_2+\dots+t_s=m} \frac{(-1)^{1+t_1+t_2+\dots+t_s}}{t_1+t_2+\dots+t_s} \binom{t_1+t_2+\dots+t_s}{t_1, t_2, \dots, t_s} \prod_{i=1}^k (E_i^{(s)})^{t_i}, \end{aligned}$$

d'où les résultats.

De la même manière, nous utilisons la relation (3.3) pour prouver la deuxième identité, on obtient

$$\begin{aligned}
\ln \left( \sum_{k \geq 0} H_k^{(s)}(n) t^k \right) &= \ln \prod_{i=1}^n (1 + (-x_i t) + \cdots + (-x_i t)^s)^{-1} \\
&= \sum_{i=1}^n (1 + (-x_i t) + \cdots + (-x_i t)^s)^{-1} \\
&= - \sum_{i=1}^n \sum_{m \geq 1} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \left( \sum_{j=1}^s (-x_i t)^j \right)^m \\
&= \sum_{k \geq 1} \sum_{t_1 + t_2 + \cdots + t_s = k} \frac{(-1)^{1+t_1+t_2+\cdots+t_s}}{t_1 + t_2 + \cdots + t_s} \binom{t_1 + t_2 + \cdots + t_s}{t_1, t_2, \dots, t_s} p_k(n) t^k
\end{aligned}$$

et

$$\ln \left( 1 + \sum_{k \geq 1} H_k^{(s)}(n) t^k \right) = \sum_{k \geq 1} \sum_{t_1 + t_2 + \cdots + t_s = k} \frac{(-1)^{1+t_1+t_2+\cdots+t_s}}{t_1 + t_2 + \cdots + t_s} \binom{t_1 + t_2 + \cdots + t_s}{t_1, t_2, \dots, t_s} \prod_{i=1}^k (H_i^{(s)}) t^k. \quad (3.18)$$

D'où le résultat.  $\blacksquare$

**Théorème 3.1.4.** Soient  $k, s$  et  $n$  trois entiers positifs, les fonctions symétriques généralisées  $E_k^{(s)}$ ,  $H_k^{(s)}$  et  $P_k^{(s)}$  sont liées par

$$P_k^{(s)} = \sum_{t_1 + 2t_2 + \cdots + kt_k = k} \frac{(-1)^{1+t_1+t_2+\cdots+t_k} \cdot k}{t_1 + t_2 + \cdots + t_k} \binom{t_1 + t_2 + \cdots + t_k}{t_1, t_2, \dots, t_k} \prod_{i=1}^k (E_i^{(s)})^{t_i} \quad (3.19)$$

et

$$P_k^{(s)} = \sum_{t_1 + 2t_2 + \cdots + kt_k = k} \frac{(-1)^{1+t_1+t_2+\cdots+t_k} \cdot k}{t_1 + t_2 + \cdots + t_k} \binom{t_1 + t_2 + \cdots + t_k}{t_1, t_2, \dots, t_k} \prod_{i=1}^k (H_i^{(s)})^{t_i}. \quad (3.20)$$

**Preuve.** Nous utilisons (3.9), (3.17) et (3.18), on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{k \geq 1} P_k^{(s)}(n) t^{k-1} &= \frac{d}{dt} \ln \prod_{i=1}^n (1 - x_i t + \cdots + (-x_i t)^s)^{-1} \\
&= \sum_{k \geq 1} \sum_{t_1 + 2t_2 + \cdots + kt_k = k} \frac{(-1)^{1+t_1+t_2+\cdots+t_k} \cdot k}{t_1 + t_2 + \cdots + t_k} \binom{t_1 + t_2 + \cdots + t_k}{t_1, t_2, \dots, t_k} \prod_{i=1}^k (H_i^{(s)}) t^{k-1},
\end{aligned}$$

par identification, on trouve

$$P_k^{(s)} = \sum_{t_1 + 2t_2 + \cdots + kt_k = k} \frac{(-1)^{1+t_1+t_2+\cdots+t_k} \cdot k}{t_1 + t_2 + \cdots + t_k} \binom{t_1 + t_2 + \cdots + t_k}{t_1, t_2, \dots, t_k} \prod_{i=1}^k (H_i^{(s)}).$$

Et

$$\begin{aligned}
&\sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} P_k^{(s)}(n) t^{k-1} \\
&= \frac{d}{dt} \ln \left( \sum_{k \geq 0} E_k^{(s)}(n) \right) \\
&= \sum_{k \geq 1} \sum_{t_1 + 2t_2 + \cdots + kt_k = k} \frac{(-1)^{1+t_1+t_2+\cdots+t_k} \cdot k}{t_1 + t_2 + \cdots + t_k} \binom{t_1 + t_2 + \cdots + t_k}{t_1, t_2, \dots, t_k} \prod_{i=1}^k (H_i^{(s)})^{t_i} t^{k-1}.
\end{aligned}$$

Par identification, on obtient

$$P_k^{(s)} = \sum_{t_1+2t_2+\dots+kt_k=k} \frac{(-1)^{1+t_1+t_2+\dots+t_k} \cdot k}{t_1+t_2+\dots+t_k} \binom{t_1+t_2+\dots+t_k}{t_1, t_2, \dots, t_k} \prod_{i=1}^k (E_i^{(s)})^{t_i}.$$

■

**Corollaire 3.1.1.** *Soient  $k, s$  et  $n$  trois entiers positifs, alors*

$$\sum_{t_1+2t_2+\dots+st_s=k} \frac{(-1)^{1+t_1+t_2+\dots+t_s} \cdot k}{t_1+t_2+\dots+t_s} \binom{t_1+t_2+\dots+t_s}{t_1, t_2, \dots, t_s} = \begin{cases} s & \text{si } k \equiv 0[s+1], \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.21)$$

**Proposition 3.1.2.** *Soient  $k, s$  et  $n$  trois entiers positifs, les fonctions symétriques généralisées  $E_k^{(s)}, H_k^{(s)}$  et  $P_k^{(s)}$  sont liées par*

$$E_k^{(s)} = \sum_{t_1+2t_2+\dots+kt_k=k} \frac{(-1)^{k+t_1+t_2+\dots+t_k}}{1^{t_1} t_1! 2^{t_2} t_2! \dots k^{t_k} t_k!} \prod_{i=1}^k (P_i^{(s)})^{t_i} \quad (3.22)$$

et

$$H_k^{(s)} = \sum_{t_1+2t_2+\dots+kt_k=k} \frac{1}{1^{t_1} t_1! 2^{t_2} t_2! \dots k^{t_k} t_k!} \prod_{i=1}^k (P_i^{(s)})^{t_i}. \quad (3.23)$$

**Preuve.** D'après les relations (3.17), (3.18), (3.19) et (3.20), on a

$$\ln \left( \sum_{k \geq 0} H_k^{(s)} t^k \right) = \sum_{k \geq 1} \frac{P_k^{(s)}}{k} t^k \quad \text{et} \quad \ln \left( \sum_{k \geq 0} E_k^{(s)} t^k \right) = \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1} P_k^{(s)}}{k} t^k.$$

Considérant la série exponentielle  $\exp(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$ ,  $|x| < 1$ ,

on peut alors écrire

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} H_k^{(s)} t^k &= \exp \left( \sum_{k \geq 1} \frac{P_k^{(s)}}{k} t^k \right) \\ &= \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \left( \sum_{k \geq 1} \frac{P_k^{(s)}}{k} t^k \right)^m \\ &= \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \sum_{t_1+t_2+\dots+t_k=m} \binom{t_1+t_2+\dots+t_k}{t_1, t_2, \dots, t_k} \prod_{i=1}^k \left( \frac{P_i^{(s)} t}{i} \right)^{t_i} \\ &= \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \sum_{k \geq 1} \sum_{\substack{t_1+t_2+\dots+t_k=m \\ t_1+2t_2+\dots+st_k=m}} \binom{t_1+t_2+\dots+t_k}{t_1, t_2, \dots, t_k} \prod_{i=1}^k \left( \frac{P_i^{(s)}}{i} \right)^{t_i} t^k \\ &= \sum_{k \geq 1} \sum_{t_1+2t_2+\dots+st_k=k} \frac{1}{(t_1+t_2+\dots+t_k)!} \binom{t_1+t_2+\dots+t_k}{t_1, t_2, \dots, t_k} \prod_{i=1}^k \left( \frac{P_i^{(s)}}{i} \right)^{t_i} t^k \\ &= \sum_{k \geq 1} \sum_{t_1+2t_2+\dots+st_k=k} \frac{1}{1^{t_1} t_1! 2^{t_2} t_2! \dots k^{t_k} t_k!} \prod_{i=1}^k (P_i^{(s)})^{t_i} t^k. \end{aligned}$$

Par identification, on trouve

$$H_k^{(s)} = \sum_{t_1+2t_2+\dots+kt_k=k} \frac{1}{1^{t_1}t_1!2^{t_2}t_2!\dots k^{t_k}t_k!} \prod_{i=1}^k (P_i^{(s)})^{t_i}.$$

Et

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} E_k^{(s)} t^k &= \exp \left( \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1} P_k^{(s)}}{k} t^k \right) \\ &= \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \left( \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1} P_k^{(s)}}{k} t^k \right)^m \\ &= \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \sum_{t_1+t_2+\dots+t_k=m} \binom{t_1+t_2+\dots+t_k}{t_1, t_2, \dots, t_k} \prod_{i=1}^k \left( \frac{(-1)^{i-1} P_i^{(s)} t}{i} \right)^{t_i} \\ &= \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \sum_{k \geq 1} \sum_{\substack{t_1+t_2+\dots+t_k=m \\ t_1+2t_2+\dots+st_k=k}} \binom{t_1+t_2+\dots+t_k}{t_1, t_2, \dots, t_k} \prod_{i=1}^k \left( \frac{(-1)^{i-1} P_i^{(s)}}{i} \right)^{t_i} t^k \\ &= \sum_{k \geq 1} \sum_{t_1+2t_2+\dots+st_k=k} \frac{1}{(t_1+t_2+\dots+t_k)!} \binom{t_1+t_2+\dots+t_k}{t_1, t_2, \dots, t_k} \prod_{i=1}^k \left( (-1)^{i-1} \frac{P_i^{(s)}}{i} \right)^{t_i} t^k \\ &= \sum_{k \geq 1} \sum_{t_1+2t_2+\dots+st_k=k} \frac{(-1)^{k+t_1+t_2+\dots+t_k}}{1^{t_1}t_1!2^{t_2}t_2!\dots k^{t_k}t_k!} \prod_{i=1}^k (P_i^{(s)})^{t_i} t^k. \end{aligned}$$

Par identification, on obtient

$$E_k^{(s)} = \sum_{t_1+2t_2+\dots+kt_k=k} \frac{(-1)^{k+t_1+t_2+\dots+t_k}}{1^{t_1}t_1!2^{t_2}t_2!\dots k^{t_k}t_k!} \prod_{i=1}^k (P_i^{(s)})^{t_i}.$$

■

**Proposition 3.1.3.** Soient  $k, s$  et  $n$  trois entiers positifs, alors

$$E_k^{(s)}(n) = x_n E_{k-1}^{(s)}(n) + E_k^{(s)}(n-1) - x_n^{s+1} E_{k-s-1}^{(s)}(n-1) \quad (3.24)$$

et

$$H_k^{(s)}(n) = (-x_n)^{s+1} H_{k-s-1}^{(s)}(n) + H_k^{(s)}(n-1) + x_n^{s+1} H_{k-1}^{(s)}(n-1). \quad (3.25)$$

**Preuve.** D'après (3.3), on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} H_k^{(s)}(n) t^k &= \prod_{i=1}^n (1 - x_i t + \dots + (-x_i t)^s)^{-1} \\ &= \frac{1}{1 - x_n t + \dots + (-x_n t)^s} \sum_{k=0}^{\infty} H_k^{(s)}(n-1) t^k \\ &= \frac{1 + x_n t}{1 - (-x_n t)^{s+1}} \sum_{k=0}^{\infty} H_k^{(s)}(n-1) t^k, \end{aligned}$$

alors

$$(1 - (-x_n t)^{s+1}) \sum_{k=0}^{\infty} H_k^{(s)}(n) t^k = (1 + x_n t) \sum_{k=0}^{\infty} H_k^{(s)}(n-1) t^k,$$

et donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} H_k^{(s)}(n)t^k &= \sum_{k=0}^{\infty} x_n E_{k-1}^{(s)}(n) \\ &\quad + E_k^{(s)}(n-1) - x_n^{s+1} E_{k-s-1}^{(s)}(n-1)t^k, \end{aligned}$$

et d'après (3.2), on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} E_k^{(s)}(n)t^k &= \prod_{i=1}^n (1 + x_i t + \cdots + (x_i t)^s) \\ &= (1 + x_n t + \cdots + (x_n t)^s) \sum_{k=0}^{\infty} E_k^{(s)}(n-1)t^k \\ &= \frac{1 - (x_n t)^{s+1}}{1 - x_n t} \sum_{k=0}^{\infty} E_k^{(s)}(n-1)t^k \end{aligned}$$

alors

$$(1 - x_n t) \sum_{k=0}^{\infty} E_k^{(s)}(n)t^k = (1 - (x_n t)^{s+1}) \sum_{k=0}^{\infty} E_k^{(s)}(n-1)t^k.$$

D'où les résultats. ■

## 3.2 Les fonctions symétriques généralisées en termes des fonctions symétriques classiques

Dans cette section, nous exprimons les fonctions symétriques généralisées en terme des fonctions symétriques classique.

**Théorème 3.2.1.** *Soient  $k$  et  $s$  deux entiers positifs, alors*

$$H_k^{(s)} = (-1)^k \sum_{\substack{\lambda \vdash k \\ l(\lambda) \leq s}} m_\lambda(\omega_{1,s+1}, \omega_{2,s+1}, \dots, \omega_{s,s+1}) h_\lambda \quad (3.26)$$

et

$$E_k^{(s)} = (-1)^k \sum_{\substack{\lambda \vdash k \\ l(\lambda) \leq s}} m_\lambda(\omega_{1,s+1}, \omega_{2,s+1}, \dots, \omega_{s,s+1}) e_\lambda, \quad (3.27)$$

où  $\omega_{i,s} = e^{2j\pi i/(s+1)}$ , pour  $j = 1, 2, \dots, s$ .

*Preuve.* On a

$$\begin{aligned}
 \sum_{k \geq 0} H_k^{(s)}(n)t^k &= \prod_{i=1}^n (1 - x_i t + \cdots + (-x_i t)^s)^{-1} \\
 &= \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^s (1 + \omega_{j,s+1} x_i t)^{-1} = \prod_{j=1}^s \prod_{i=1}^n (1 + \omega_{j,s+1} x_i t)^{-1} \\
 &= \prod_{i=1}^n \sum_{k \geq 0} (-\omega_{j,s+1})^k h_k(n) t^k \\
 &= \sum_{k \geq 0} \left( \sum_{\substack{j_1+j_2+\cdots+j_s=k \\ j_i \geq 0}} (-1)^{j_1+j_2+\cdots+j_s} \omega_{1,s+1}^{j_1} \omega_{2,s+1}^{j_2} \cdots \omega_{s,s+1}^{j_s} h_{j_1} h_{j_2} \cdots h_{j_s} \right) t^k \\
 &= \sum_{k \geq 0} \sum_{\substack{\lambda \vdash k \\ l(\lambda) \leq s}} (-1)^k m_\lambda(\omega_{1,s+1}, \omega_{2,s+1}, \dots, \omega_{s,s+1}) h_\lambda(n) t^k
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \sum_{k \geq 0} E_k^{(s)}(n)t^k &= \prod_{i=1}^n (1 + x_i t + \cdots + (x_i t)^s) \\
 &= \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^s (1 - \omega_{j,s+1} x_i t) = \prod_{j=1}^s \prod_{i=1}^n (1 - \omega_{j,s+1} x_i t) \\
 &= \prod_{i=1}^n \sum_{k \geq 0} (-\omega_{j,s+1})^k e_k(n) t^k \\
 &= \sum_{k \geq 0} \left( \sum_{\substack{j_1+j_2+\cdots+j_s=k \\ j_i \geq 0}} (-1)^{j_1+j_2+\cdots+j_s} \omega_{1,s+1}^{j_1} \omega_{2,s+1}^{j_2} \cdots \omega_{s,s+1}^{j_s} e_{j_1} e_{j_2} \cdots e_{j_s} \right) t^k \\
 &= \sum_{k \geq 0} \sum_{\substack{\lambda \vdash k \\ l(\lambda) \leq s}} (-1)^k m_\lambda(\omega_{1,s+1}, \omega_{2,s+1}, \dots, \omega_{s,s+1}) e_\lambda(n) t^k.
 \end{aligned}$$

D'où les résultats. ■

**Corollaire 3.2.1.** *Soient  $k, s$  et  $n$  trois entiers positifs, alors*

$$\sum_{\substack{\lambda \vdash k \\ \lambda_1 \leq s}} m_\lambda(n) = (-1)^k \sum_{\substack{\lambda \vdash k \\ l(\lambda) \leq s}} m_\lambda(\omega_{1,s+1}, \omega_{2,s+1}, \dots, \omega_{s,s+1}) e_\lambda(n). \quad (3.28)$$

**Théorème 3.2.2.** *Soient  $k, s$  et  $n$  trois entiers positifs, alors*

$$E_k^{(s-1)}(n) = \sum_{j=0}^{\lfloor k/s \rfloor} (-1)^j e_j(x_1^s, x_2^s, \dots, x_n^s) h_{k-sj}(n) \quad (3.29)$$

et

$$H_k^{(s-1)}(n) = \sum_{j=0}^{\lfloor k/s \rfloor} (-1)^{sj} h_j(x_1^s, x_2^s, \dots, x_n^s) e_{k-sj}(n). \quad (3.30)$$

**Preuve.** D'après (3.2) et (3.3), on a

$$\begin{aligned}
 \sum_{k \geq 0} E_k^{(s)}(n)t^k &= \prod_{i=1}^n (1 + x_i t + \cdots + (x_i t)^{s-1}) \\
 &= \prod_{i=1}^n (1 - (x_i t)^s) \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - x_i t} \\
 &= \sum_{j \geq 0} (-1)^j e_j(x_1^s, x_2^s, \dots, x_n^s) t^{sj} \sum_{r \geq 0} h_r(n) t^r \\
 &= \sum_{j \geq 0} \sum_{r \geq 0} (-1)^j e_j(x_1^s, x_2^s, \dots, x_n^s) h_r(n) t^{sj+r} \\
 &= \sum_{k \geq 0} \sum_{j=0}^{\lfloor k/s \rfloor} (-1)^j e_j(x_1^s, x_2^s, \dots, x_n^s) h_{k-sj}(n) t^k
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \sum_{k \geq 0} H_k^{(s)}(n)t^k &= \prod_{i=1}^n (1 - x_i t + \cdots + (-x_i t)^{s-1})_{-1} \\
 &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - (-x_i t)^s} \prod_{i=1}^n (1 + x_i t) \\
 &= \sum_{j \geq 0} (-1)^{sj} h_j(x_1^s, x_2^s, \dots, x_n^s) t^{sj} \sum_{r \geq 0} e_r(n) t^r \\
 &= \sum_{j \geq 0} \sum_{r \geq 0} (-1)^{sj} h_j(x_1^s, x_2^s, \dots, x_n^s) e_r(n) t^{sj+r} \\
 &= \sum_{k \geq 0} \sum_{j=0}^{\lfloor k/s \rfloor} (-1)^{sj} h_j(x_1^s, x_2^s, \dots, x_n^s) e_{k-sj}(n) t^k.
 \end{aligned}$$

D'où les résultats. ■

**Corollaire 3.2.2.** Soient  $k, s$  et  $n$  trois entiers positifs, alors

$$\sum_{j=0}^{\lfloor k/s \rfloor} (-1)^j e_j(x_1^s, x_2^s, \dots, x_n^s) h_{k-sj}(n) = (-1)^k \sum_{\substack{k \\ l(\lambda) \leq s}} m_\lambda(\omega_{1,s+1}, \omega_{2,s+1}, \dots, \omega_{s,s+1}) e_\lambda(n) \quad (3.31)$$

et

$$\sum_{j=0}^{\lfloor k/s \rfloor} (-1)^{sj} h_j(x_1^s, x_2^s, \dots, x_n^s) e_{k-sj}(n) = (-1)^k \sum_{\substack{k \\ l(\lambda) \leq s}} m_\lambda(\omega_{1,s+1}, \omega_{2,s+1}, \dots, \omega_{s,s+1}) h_\lambda(n). \quad (3.32)$$

**Proposition 3.2.1.** Soient  $k, s$  et  $n$  trois entiers positifs, et  $\lambda = 1^{t_1} 2^{t_2} \cdots k^{t_k}$  une partition de  $k$ , alors

$$m_\lambda(\omega_{1,k+1}, \omega_{2,k+1}, \dots, \omega_{k,k+1}) = (-1)^{t_1+t_2+\cdots+t_k} \binom{t_1 + t_2 + \cdots + t_k}{t_1, t_2, \dots, t_k}. \quad (3.33)$$

**Preuve.** Si nous prenons  $s = k + 1$  dans le Théorème 3.2.2, on trouve

$$H_k^{(k)} = e_k,$$



d'autre part d'après Théorème 3.2.1, on a

$$e_k = \sum_{\lambda \vdash k} (-1)^k m_\lambda(\omega_{1,k+1}, \omega_{2,k+1}, \dots, \omega_{k,k+1}) h_\lambda,$$

or dans chapitre 1 on a la relation

$$e_k = \sum_{\lambda \vdash k} (-1)^{k+l(\lambda)} \binom{l(\lambda)}{t_1, t_2, \dots, t_k} h_\lambda,$$

donc

$$\sum_{\lambda \vdash k} (-1)^k m_\lambda(\omega_{1,k+1}, \omega_{2,k+1}, \dots, \omega_{k,k+1}) h_\lambda = \sum_{\lambda \vdash k} (-1)^{k+l(\lambda)} \binom{l(\lambda)}{t_1, t_2, \dots, t_k} h_\lambda,$$

en comparant les coefficients de  $h_\lambda$  des deux côtés de cette équation, on obtenons le résultat. ■

**Proposition 3.2.2.** *Soient  $k, s$  et  $n$  trois entiers positifs, et  $\lambda = 1^{t_1} 2^{t_2} \dots k^{t_k}$  une partition de  $k$ , alors*

$$m_\lambda(\omega_{1,k+1}, \omega_{2,k+1}, \dots, \omega_{k,k+1}) = (-1)^{l(\lambda)} \left(1 - \frac{k}{l(\lambda)}\right) \binom{l(\lambda)}{t_1, t_2, \dots, t_k}. \quad (3.34)$$

**Preuve.** Si nous prenons  $s = k$  dans le Théorème 3.2.2, on trouve

$$H_k^{(k-1)} = e_k + (-1)^k p_k.$$

D'autre part d'après Théorème 3.2.1, on a

$$e_k = m_\lambda(\omega_{1,k+1}, \omega_{2,k+1}, \dots, \omega_{k,k+1}) h_\lambda - (-1)^k p_k,$$

or dans chapitre 1 on a la relation

$$e_k = \sum_{\lambda \vdash k} (-1)^{k+l(\lambda)} \binom{l(\lambda)}{t_1, t_2, \dots, t_k} h_\lambda$$

et

$$p_k = \sum_{\lambda \vdash k} \frac{(-1)^{1+l(\lambda)} k}{l(\lambda)} \binom{l(\lambda)}{t_1, t_2, \dots, t_k} h_\lambda,$$

alors on peut écrire

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda \vdash k} m_\lambda(\omega_{1,k+1}, \omega_{2,k+1}, \dots, \omega_{k,k+1}) h_\lambda \\ &= \sum_{\lambda \vdash k} (-1)^{k+l(\lambda)} \binom{l(\lambda)}{t_1, t_2, \dots, t_k} h_\lambda - \sum_{\lambda \vdash k} \frac{(-1)^{k+l(\lambda)} k}{l(\lambda)} \binom{l(\lambda)}{t_1, t_2, \dots, t_k} h_\lambda \\ &= \sum_{\lambda \vdash k} (-1)^{k+l(\lambda)} \left(1 - \frac{k}{l(\lambda)}\right) \binom{l(\lambda)}{t_1, t_2, \dots, t_k} h_\lambda, \end{aligned}$$

en comparant les coefficients de  $h_\lambda$  des deux côtés de cette équation, on obtient le résultat. ■

**Proposition 3.2.3.** *Soit  $k > 2$  un entier positif et soit  $\lambda = 1^{t_1}2^{t_2} \dots k^{t_k}$  une partition de  $k$  avec  $l(\lambda) \leq k - 2$ , alors*

$$m_\lambda(\omega_{1,k-1}, \omega_{2,k-1}, \dots, \omega_{k-2,k-1}) = (-1)^{l(\lambda)} \left(1 - \frac{t_1 \cdot (k-1)}{l(\lambda)^2 - l(\lambda)}\right) \binom{l(\lambda)}{t_1, t_2, \dots, t_k}. \quad (3.35)$$

**Preuve.** Si nous prenons  $s = k - 1$  dans le Théorème 3.2.1, on trouve

$$H_k^{k-2} = \sum_{\substack{\lambda \vdash k \\ l(\lambda) \leq k-2}} m_\lambda(\omega_{1,k-1}, \omega_{2,k-1}, \dots, \omega_{k-2,k-1}) h_\lambda,$$

d'autre part d'après Théorème 3.2.2, on a

$$\begin{aligned} H_k^{k-2} &= e_k + (-1)_{k-1} p_{k-1} h_1 \\ &= (-1)^k \sum_{t_1+2t_2+\dots+kt_k=k} (-1)^{t_1+t_2+\dots+t_k} \binom{t_1+t_2+\dots+t_k}{t_1, t_2, \dots, t_k} h_1^{t_1} h_2^{t_2} \dots h_k^{t_k} \\ &\quad (-1)^k \sum_{t_1+2t_2+\dots+(k-1)t_{k-1}=k-1} \frac{(-1)^{t_1+t_2+\dots+t_{k-1}} \cdot (k-1)}{t_1+t_2+\dots+t_{k-1}} \\ &\quad \times \binom{t_1+t_2+\dots+t_{k-1}}{t_1, t_2, \dots, t_{k-1}} h_1^{t_1+1} h_2^{t_2} \dots h_{k-1}^{t_{k-1}} \\ &= (-1)^k \sum_{t_1+2t_2+\dots+kt_k=k} (-1)^{t_1+t_2+\dots+t_k} \binom{t_1+t_2+\dots+t_k}{t_1, t_2, \dots, t_k} h_1^{t_1} h_2^{t_2} \dots h_k^{t_k} \\ &\quad - (-1)^k \sum_{\substack{t_1+2t_2+\dots+kt_k=k \\ t_1>0}} \frac{(-1)^{t_1+t_2+\dots+t_k} \cdot (k-1)}{t_1+t_2+\dots+t_k-1} \\ &\quad \times \binom{t_1+t_2+\dots+t_k-1}{t_1-1, t_2, \dots, t_k} h_1^{t_1} h_2^{t_2} \dots h_k^{t_k} \\ &= (-1)^k \sum_{t_1+2t_2+\dots+kt_k=k} (-1)^{t_1+t_2+\dots+t_k} \binom{t_1+t_2+\dots+t_k}{t_1, t_2, \dots, t_k} h_1^{t_1} h_2^{t_2} \dots h_k^{t_k} \\ &\quad - (-1)^k \sum_{\substack{t_1+2t_2+\dots+kt_k=k \\ t_1>0}} \frac{(-1)^{t_1+t_2+\dots+t_k} \cdot t_1 \cdot (k-1)}{(t_1+t_2+\dots+t_k-1)(t_1+t_2+\dots+t_k)} \\ &\quad \times \binom{t_1+t_2+\dots+t_k}{t_1, t_2, \dots, t_k} h_1^{t_1} h_2^{t_2} \dots h_k^{t_k} \\ &= (-1)^k \sum_{\lambda \vdash k} (-1)^{l(\lambda)} \left(1 - \frac{t_1(k-1)}{(l(\lambda)^2 - 1)l(\lambda)}\right) \binom{l(\lambda)}{t_1, t_2, \dots, t_k} h_\lambda. \end{aligned}$$

■

**Théorème 3.2.3.** *Soient  $k, s$  et  $n$  trois entiers positifs, alors*

$$e_k(x_1^s, x_2^s, \dots, x_n^s) = (-1)^k \sum_{j=0}^{ks} (-1)^j e_j(n) E_{ks-j}^{(s-1)}(n) \quad (3.36)$$

et

$$h_k(x_1^s, x_2^s, \dots, x_n^s) = (-1)^{k(s+1)} \sum_{j=0}^{ks} (-1)^j h_j(n) H_{ks-j}^{(s-1)}(n). \quad (3.37)$$

Si  $k$  n'est pas congru à 0 modulo  $s$  alors

$$(-1)^k \sum_{j=0}^{ks} (-1)^j e_j(n) E_{ks-j}^{(s-1)}(n) = 0$$

et

$$(-1)^{k(s+1)} \sum_{j=0}^{ks} (-1)^j h_j(n) H_{ks-j}^{(s-1)}(n) = 0.$$

**Preuve.** On a

$$\sum_{k \geq 0} E_k^{(s-1)}(n) t^k = \prod_{i=1}^n \frac{1 - (x_i t)^s}{1 - x_i t}$$

et

$$\sum_{k \geq 0} H_k^{(s-1)}(n) t^k = \prod_{i=1}^n \frac{1 + x_i t}{1 + (-x_i t)^s}.$$

Ces relations peuvent être réécrites comme suit :

$$\prod_{i=1}^n (1 - x_i t) \sum_{k \geq 0} E_k^{(s-1)}(n) t^k = \prod_{i=1}^n (1 - (x_i t)^s)$$

et

$$\prod_{i=1}^n \frac{1}{1 + x_i t} \sum_{k \geq 0} H_k^{(s-1)}(n) t^k = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 + (-x_i t)^s},$$

ce qui équivaut à

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} (-1)^k e_k(x_1^s, x_2^s, \dots, x_n^s) t^{sk} &= \left( \sum_{j \geq 0} (-1)^j e_j(n) t^j \right) \left( \sum_{r \geq 0} E_r^{(s-1)}(n) t^r \right) \\ &= \sum_{r \geq 0} \sum_{k \geq 0} (-1)^j e_j(n) E_r^{(s-1)}(n) t^{j+r}, \end{aligned}$$

on pose  $sk = j + r$ , on obtient

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k e_k(x_1^s, x_2^s, \dots, x_n^s) t^{sk} = \sum_{k \geq 0} \sum_{j \geq 0} (-1)^j e_j(n) E_{ks-j}^{(s-1)}(n) t^{sk}.$$

De la même manière on trouve

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k h_k(x_1^s, x_2^s, \dots, x_n^s) t^{sk} = \left( \sum_{k \geq 0} (-1)^k h_k(n) t^k \right) \left( \sum_{k \geq 0} H_k^{(s-1)}(n) t^k \right).$$

■

### 3.3 Les interprétations combinatoires des fonctions symétriques généralisées

**Théorème 3.3.1.** *La fonction symétrique généralisée  $E_k^{(s)}$  est interprétée comme une fonction génératrice des poids des chemins de réseau entre les points  $u = (0, 0)$  et  $v = (k, n - 1)$ , avec au plus  $s$  pas dans la direction horizontale.*

**Preuve.** Il est facile de voir que la fonction symétrique élémentaire généralisée est une fonction génératrice des poids de chemin de réseau entre deux points. Pour chaque variable unitaire  $x_i$  dans  $E_k^{(s)}$  on associe un pas horizontal unitaire, et si nous supposons que chaque chemin de réseau commençant par  $u = (0, 0)$ , il se termine par  $v = (k, n - 1)$  avec au plus  $s$  pas dans la direction horizontale.

■

**Exemple 3.3.1.** *Les chemins de  $(0, 0)$  à  $(4, 2)$  associés à  $E_4^{(2)}(3) = x_1^2x_2^2 + x_1^2x_2x_3 + x_1^2x_3^2 + x_1x_2^2x_3 + x_1x_2x_3^2 + x_2^2x_2^2$  :*

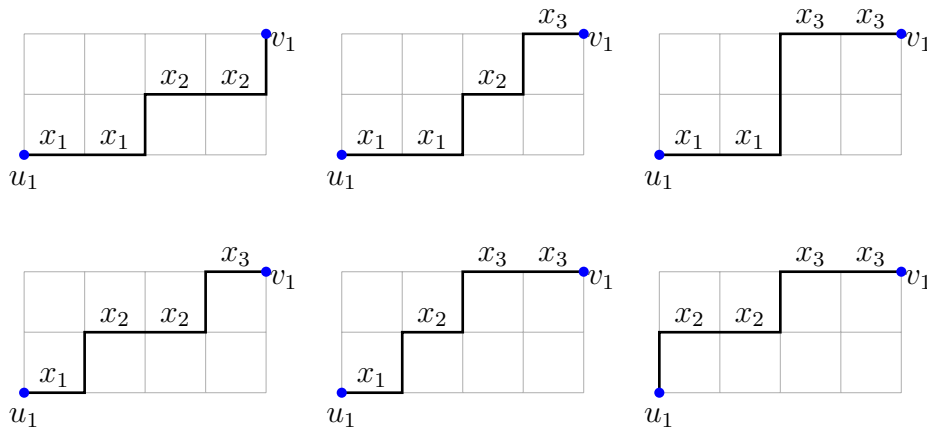


FIGURE 3.1 – Les six chemins de  $(0, 0)$  à  $(4, 2)$  associés à  $E_4^{(2)}(3)$ .

**Théorème 3.3.2.** *Soit  $k, n$  et  $s$  trois entiers positifs, alors*

$$H_k^{(s)}(n) = \sum_{\substack{\lambda \vdash k \\ \lambda_i \equiv \{0,1\} \pmod{s+1}}} (-1)^{k + \sum_{i=1}^{l(\lambda)} \lambda_i \text{mod}(s+1)} m_\lambda(n). \tag{3.38}$$

**Preuve.** D'après la relation (3.3), on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} H_k^{(s)} t^k &= \prod_{i=1}^n (1 - x_i t + \dots + (-x_i t)^s)^{-1} \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1 + x_i t}{1 - (-x_i t)^{s+1}} = \prod_{i=1}^n (1 - (-x_i t)) \sum_{j=1}^{\infty} (-x_i t)^{j(s+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^{\infty} (-x_i t)^{j(s+1)} - \sum_{j=1}^{\infty} (-x_i t)^{j(s+1)+1} \right) \\
&= \prod_{i=1}^n \left( \sum_{\lambda_i \equiv \{0,1\} \pmod{s+1}} (-1)^{\lambda_i \bmod(s+1)} (x_i t)^{\lambda_i} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{\lambda-k \\ \lambda_i \equiv \{0,1\} \pmod{s+1}}} (-1)^{k + \sum_{i=0}^{l(\lambda)} \lambda_i \bmod(s+1)} m_{\lambda}(n) t^k.
\end{aligned}$$

■

**Remarque 3.3.1.** *Quand  $s$  est impair, nous avons*

$$H_k^{(s)}(n) = \sum_{\substack{\lambda-k \\ \lambda_i \equiv \{0,1\} \pmod{s+1}}} m_{\lambda}(n). \quad (3.39)$$

**Corollaire 3.3.1.** *Il existe une connexion entre toutes les partitions de  $k$  en parts congruentes à 0 ou 1 modulo  $s+1$  et les partitions de  $k$  en au plus  $s$  parts comme suit :*

$$\sum_{\substack{\lambda-k \\ \lambda_i \equiv \{0,1\} \pmod{s+1}}} (-1)^{\sum_{i=0}^{l(\lambda)} \lambda_i \bmod(s+1)} m_{\lambda}(n) = \sum_{\substack{k \\ l(\lambda) \leq s}} m_{\lambda}(\omega_{1,s+1}, \omega_{2,s+1}, \dots, \omega_{s,s+1}) h_{\lambda}. \quad (3.40)$$

Soit  $\mathcal{P}_{k,n}^s$  l'ensemble des chemins de réseau entre les points  $u = (0, 0)$  et  $v = (k, n-1)$  où le nombre de pas dans la direction horizontale est congru à 0 ou 1 modulo  $s+1$ . Pour  $P = (p_1, p_2, \dots, p_{n+k-1}) \in \mathcal{P}_{k,n}^s$ , nous considérons  $n_i(P) :=$  le nombre de pas horizontal modulo  $s+1$  au niveau  $i$ .  $H^{(s)}$ -étiquetage qui attribue l'étiquette pour chaque pas horizontal comme suit

$$L(p_i) := (\text{le nombre de pas nord qui précèdent } p_i) + 1.$$

**Théorème 3.3.3.** *Soient  $n, k$  et  $s$  trois entiers positifs, alors*

$$H_k^{(s)}(n) = \begin{cases} \sum_{P \in \mathcal{P}_{k,n}^s} X^P & \text{si } s \text{ impair,} \\ (-1)^k \sum_{P \in \mathcal{P}_{k,n}^s} (-1)^{P'} X^P & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $X^P = \prod_i x_{L(p_i)}$ , et  $P' = \sum_i n_i(P)$ .

**Preuve.** D'après Théorème 3.3.2, il est facile de voir que les fonctions symétriques généralisées  $H_k^{(s)}$  sont des fonctions génératrices des poids des chemins de réseau entre deux points. Pour chaque variable unitaire  $x_i$  dans cette fonction symétrique, nous associons un pas horizontal unitaire, et si nous supposons que chaque chemin de réseau commençant par  $u = (0, 0)$  alors il se termine par  $v = (k, n-1)$  où le nombre de pas dans la direction horizontale est égale à 0 ou 1 modulo  $s+1$ . ■

**Exemple 3.3.2.** *Figure 3 montre l'interprétation de  $H_3^{(2)}(3)$  par chemin de réseau où*

$$H_3^{(2)}(3) = -x_1^3 - x_2^3 - x_3^3 + x_1 x_2 x_3.$$

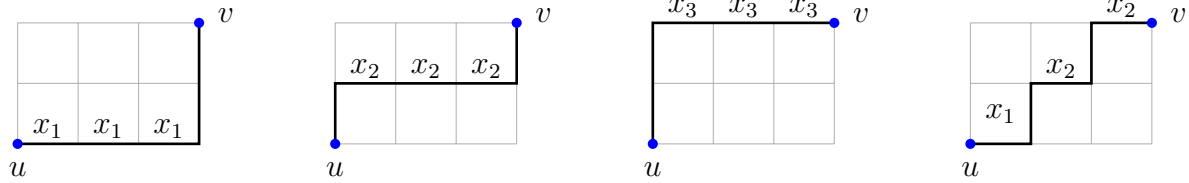


FIGURE 3.2 – Les quatre chemins de  $u$  à  $v$  associés à  $H_3^{(2)}(3)$ .

**Corollaire 3.3.2.** *La fonction symétrique élémentaire  $e_k(n)$  est une fonction génératrice des poids des chemins entre les points  $u = (0, 0)$  et  $v = (k, n - 1)$  avec au plus un pas dans la direction horizontale.*

Soit  $\mathcal{T}_{k,n}^s$  l'ensemble de tous les pavages d'un  $(n + k - 1)$ -ruban (un  $n$ -ruban est la concaténation de  $n$  cellules) en utilisant exactement  $k$  carrés rouges et  $n - 1$  carrés vert.

Soit aussi  $X^{\omega_T} = x_1^{\omega_1} x_2^{\omega_2} \dots x_n^{\omega_n}$  le poids de pavages  $T$ , pour chaque  $T \in \mathcal{T}_{k,n}^s$  nous calculons  $\omega_T = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$  comme suit :

- 1). Attribuez un poids à chaque carré dans le pavage. Un carré vert reçoit toujours le poids 1 . Un carré rouge reçoit le poids  $x_{m+1}$  où  $m$  égale au nombre de carrés verts qui sont à gauche de ce carré dans le pavage.
- 2). Calculez  $\omega_T = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$  en multipliant les poids  $x_{m+1}$  de tous les carrés rouges. Par exemple

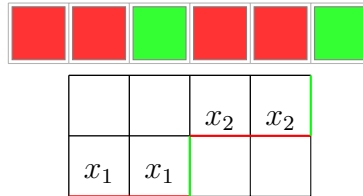


FIGURE 3.3 – Un pavage du poids et son chemin de réseau associé.

Nous considérons

$n_m(T) :=$  le nombre de carré rouges successifs modulo  $s + 1$  après le  $m$ -ème carré vert qui précèdent ces carrés.

**Théorème 3.3.4.** *Soient  $k, n$  et  $s$  trois entiers positifs, alors*

$$H_k^{(s)}(n) = \begin{cases} \sum_{T \in \mathcal{T}_{k,n}^s} X^T & \text{si } s \text{ impair,} \\ (-1)^k \sum_{T \in \mathcal{T}_{k,n}^s} (-1)^G X^{\omega_T} & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.41)$$

où  $G = \sum_{T \in \mathcal{T}_{k,n}^s} n_m(T)$ .

**Preuve.** Puisque la bijection entre les chemins de réseau et le pavage préserve les poids. Alors, par Théorème 3.3.2 il suffit d'associer un chemin de réseau à un  $(n+k-1)$ -ruban, en utilisant  $k$  carrés rouges successifs congruents à 0 ou 1 modulo  $(s+1)$ . Ce chemin de réseau commence à partir de  $u = (0, 0)$  et se termine par  $v = (k, n-1)$  où le nombre de pas dans la direction horizontale est congru à 0 ou 1 modulo  $(s+1)$  dont chaque carré vert représente un mouvement d'une unité vers le haut et chaque carré rouge représente un mouvement d'une unité vers la droite. ■

**Exemple 3.3.3.** Nous donnons l'interprétation par pavage pour

$$H_3^{(2)}(3) = -x_1^3 - x_2^3 - x_3^3 + x_1x_2x_3.$$



FIGURE 3.4 – Les quatre pavages associés à  $H_3^{(2)}(3)$ .

## 3.4 Applications

### 3.4.1 Coefficients bi<sup>s</sup>nomiaux

Les coefficients bi<sup>s</sup>nomiaux sont une extension naturelle des coefficients binomiaux classiques. Ces coefficients sont définis de la manière suivante :

Soient  $s \geq 1$  et  $n \geq 0$ , deux entiers, pour un entier  $k = 0, 1, \dots, sn$ ; le coefficient bi<sup>s</sup>nomial  $\binom{n}{k}_s$  est défini comme étant le  $k$ -ième coefficient dans le développement

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^s)^n = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k}_s x^k, \quad (3.42)$$

avec la convention que  $\binom{n}{k}_s = 0$  pour  $k < 0$  ou  $k > sn$ .

**Interprétation combinatoire** Le coefficient bi<sup>s</sup>nomial  $\binom{n}{k}_s$  compte le nombre de manières de distribuer  $k$  boules dans  $n$  urnes de sorte que chaque urne contient au plus  $s$  boules.

**Propriétés 3.4.1.** [4] Comme propriétés déjà bien établies, on a :

1). La relation de symétrie

$$\binom{n}{k}_s = \binom{n}{sn-k}_s. \quad (3.43)$$

2). La relation de récurrence longitudinale

$$\binom{n}{k}_s = \sum_{m=0}^s \binom{n-1}{k-m}_s. \quad (3.44)$$

3). La relation de récurrence diagonale

$$\binom{n}{k}_s = \sum_{m=0}^s \binom{n}{m} \binom{m}{k-m}_{s-1}. \quad (3.45)$$

**Remarque 3.4.1.** Les coefficients bitrinomiaux, comme c'est le cas pour les coefficients binomiaux classiques, sont construits pour le triangle de Pascal connu sous le nom de *s-triangle de Pascal*.

Pour illustrer la relation de récurrence longitudinale, nous présentons le triangle des coefficients bitrinomiaux.

n/k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	1												
1	1	1											
2	1	2	3	2	1								
3	1	3	6	7	6	3	1						
4	1	4	10	16	19	16	10	4	1				
5	1	5	15	30	45	51	45	30	15	5	1		
6	1	6	21	50	90	126	141	126	90	50	21	6	1

TABLE 3.1 – Triangle des coefficients bitrinomiaux  $\binom{n}{k}_2$ .

Prenant  $(x_1, x_2, \dots, x_n) = \underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_{n \text{ fois}}$  dans la relation (3.2) ou (3.6), nous obtenons les deux résultats suivants :

**Corollaire 3.4.1.** [3] Les coefficients bitrinomiaux sont des spécialisations de la fonction symétrique élémentaire généralisée  $E_k^{(s)}$

$$E_k^{(s)}(1, 1, \dots, 1) = \binom{n}{k}_s. \quad (3.46)$$

**Corollaire 3.4.2.** [3] Pour  $0 \leq k \leq sn$ , soient  $u = (0, 0)$  et  $v = (k, n-1)$  deux points, le nombre de chemins entre les point  $u$  et  $v$  avec au plus  $s$  pas dans la direction horizontale est exactement le coefficient bitrnomial  $\binom{n}{k}_s$ .



**Proposition 3.4.1.** [4] *Les coefficients bi<sup>s</sup>nomiaux s'expriment en termes des coefficients binomiaux comme suit :*

$$\binom{n}{k}_s = \sum_{j_1+j_2+\dots+j_s=k} \binom{n}{j_1} \binom{n}{j_2} \cdots \binom{n}{j_s} (-1)^k a^{-\sum_{r=1}^s r j_r}, \quad (3.47)$$

où  $a = \exp(\frac{2\pi i}{s+1})$ .

**Preuve.** Posons  $a = \exp(\frac{2\pi i}{s+1})$ , on a alors

$$\begin{aligned} & (1 + x^2 + \cdots + x^s)^n \\ &= \left( \prod_{r=1}^s (x - a^r) \right)^n \\ &= \prod_{r=1}^s \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (-a)^{n-k} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{ns} \left( \sum_{j_1+j_2+\dots+j_s=k} \binom{n}{j_1} \binom{n}{j_2} \cdots \binom{n}{j_s} (-1)^{ns-k} a^{\sum_{r=1}^s r(n-j_r)} \right) x^k \\ &= \sum_{k=0}^{ns} \left( \sum_{j_1+j_2+\dots+j_s=k} \binom{n}{j_1} \binom{n}{j_2} \cdots \binom{n}{j_s} (-1)^k a^{-\sum_{r=1}^s r j_r} \right) x^k. \end{aligned}$$

Par identification avec la relation (3.42), on arrive au résultat. ■

### 3.4.2 Coefficients q-bi<sup>s</sup>nomiaux

**Définition 3.4.1.** *Soit  $s \in \mathbb{N}^*$ , le q-analogue de coefficient bi<sup>s</sup>nomial est défini comme suit :*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} = \sum_{j_1+j_2+\dots+j_s=k} \begin{bmatrix} n \\ j_1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n \\ j_2 \end{bmatrix}_q \cdots \begin{bmatrix} n \\ j_s \end{bmatrix}_q q^{\sum_{r=1}^s \binom{j_r}{2}} (-1)^k a^{-\sum_{r=1}^s r j_r}, \quad (3.48)$$

où  $a = \exp(\frac{2\pi i}{s+1})$ . Ce coefficient s'appelle coefficient q-bi<sup>s</sup>nomial.

**Remarque 3.4.2.** *Pour  $s = 1$ , on trouve le q-analogue du coefficient binomial  $q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$  qu'on noté  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(1)}$ .*

**Théorème 3.4.1.** [4] *Le coefficient q-bi<sup>s</sup>nomial est le k-ième terme du produit suivant :*

$$\prod_{j=0}^{n-1} (1 + q^j x + \cdots + (q^j x)^s) = \sum_{k=0}^{sn} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} x^k. \quad (3.49)$$

**Preuve.** Comme

$$(1 + x^2 + \cdots + x^s) = \prod_{r=1}^s (x - a^r) \quad \text{pour} \quad a = \exp(\frac{2\pi i}{s+1}),$$

alors

$$\begin{aligned}
& \prod_{j=0}^{n-1} (1 + q^j x + \cdots + (q^j x)^s) \\
&= \prod_{j=1}^s (x - a^r)(qx - a^r) \cdots (q^{n-1}x - a^r) \\
&= (-1)^{ns} \prod_{r=1}^s a^{rn} (1 - a^{-r}x)(1 - a^{-r}qx) \cdots (1 - a^{-r}q^{n-1}x) \\
&= \prod_{r=1}^s \left( \sum_{k=0}^n q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^{ns-k} a^{r(n-k)} x^k \right) \\
&= \sum_{k=0}^{ns} \left( \sum_{j_1+j_2+\cdots+j_s=k} q^{\sum_{r=0}^s \binom{j_r}{2}} \begin{bmatrix} n \\ j_1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n \\ j_2 \end{bmatrix}_q \cdots \begin{bmatrix} n \\ j_s \end{bmatrix}_q (-1)^{ns-k} a^{\sum_{r=1}^s r(n-j_r)} \right) x^k.
\end{aligned}$$

D'après la relation (3.48), on obtient

$$\prod_{j=0}^{n-1} (1 + q^j x + \cdots + (q^j x)^s) = \sum_{k=0}^{ns} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} x^k.$$

■

Prenant  $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (1, q, \dots, q^{n-1})$  dans la relation (3.2) ou (3.6), nous obtenons le résultat suivant :

**Corollaire 3.4.3.** [3] *Les coefficients  $q$ -bi $s$  nomiaux sont des spécialisations de la fonction symétrique élémentaire généralisée  $E_k^{(s)}$ , i.e.*

$$E_k^{(s)}(1, q, \dots, q^{n-1}) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)}. \quad (3.50)$$

**Théorème 3.4.2.** [4] *Les coefficients  $q$ -bi $s$  nomiaux satisfont les deux récurrences :*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} = \sum_{j=0}^s q^{k-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-j \end{bmatrix}_q^{(s)} \quad (3.51)$$

et

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} = \sum_{j=0}^s q^{(n-1)k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-j \end{bmatrix}_q^{(s)}. \quad (3.52)$$

**Preuve.** La relation (3.49) donne

$$\prod_{j=0}^{n-1} (1 + q^j x + \cdots + (q^j x)^s) = (1 + x + \cdots + x^s) \prod_{j=1}^{n-1} (1 + q^{j+1} x + \cdots + (q^{j+1} x)^s) \quad (3.53)$$

et

$$\prod_{j=0}^{n-1} (1 + q^j x + \cdots + (q^j x)^s) = (1 + q^{n-1} x + \cdots + (q^{n-1} x)^s) \prod_{j=0}^{n-2} (1 + q^j x + \cdots + (q^j x)^s), \quad (3.54)$$

qui deviennent respectivement

$$\sum_{k=0}^{ns} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} x^k = (1 + x + \cdots + x^s) \sum_{k=0}^{ns} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} (qx)^k,$$

$$\sum_{k=0}^{ns} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} x^k = (1 + q^{n-1}x + \cdots + (q^{n-1}x)^s) \sum_{k=0}^{ns} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} x^k,$$

ainsi

$$\sum_{k=0}^{ns} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} x^k = \sum_{k=0}^{ns} \left( \sum_{j=0}^s q^{k-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-j \end{bmatrix}_q^{(s)} \right) x^k,$$

$$\sum_{k=0}^{ns} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} x^k = \sum_{k=0}^{ns} \left( \sum_{j=0}^s q^{(n-1)j} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-j \end{bmatrix}_q^{(s)} \right) x^k.$$

Ce qui montre le résultat. ■

**Proposition 3.4.2 (Formule de Chu-Vandermonde).** [4] *Le coefficient  $q$ -binomial satisfait la relation suivante :*

$$\begin{bmatrix} n+m \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} = \sum_{j=0}^k q^{n(k-j)} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q^{(s)} \begin{bmatrix} m \\ k-j \end{bmatrix}_q^{(s)}. \quad (3.55)$$

**Preuve.** D'après la relation (3.49), on a

$$\prod_{j=0}^{n-1} (1 + q^j x + \cdots + (q^j x)^s) = \sum_{k=0}^{ns} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} x^k,$$

$$\prod_{j=0}^{m-1} (1 + q^j x + \cdots + (q^j x)^s) = \sum_{k=0}^{ms} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} x^k,$$

$$\prod_{j=0}^{n+m-1} (1 + q^j x + \cdots + (q^j x)^s) = \sum_{k=0}^{(n+m)s} \begin{bmatrix} n+m \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} x^k.$$

Avec ces identités, l'égalité

$$\prod_{j=0}^{n+m-1} (1 + q^j x + \cdots + (q^j x)^s) = \prod_{j=0}^{n-1} (1 + q^j x + \cdots + (q^j x)^s) \prod_{j=0}^{m-1} (1 + q^j x + \cdots + (q^j x)^s),$$

devient

$$\sum_{k=0}^{(n+m)s} \begin{bmatrix} n+m \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} x^k = \left( \sum_{k=0}^{ns} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} x^k \right) \left( \sum_{k=0}^{ms} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} x^k \right),$$

En utilisant le produit de deux séries génératrices, on arrive à notre résultat. ■

**Remarque 3.4.3.** *Pour  $s = 1$  la relation (3.55) s'écrit*

$$\begin{bmatrix} n+m \\ k \end{bmatrix}_q^{(1)} = \sum_{j=0}^k q^{n(k-j)} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q^{(1)} \begin{bmatrix} m \\ k-j \end{bmatrix}_q^{(1)}. \quad (3.56)$$

**Théorème 3.4.3.** [3] Soient  $n, k$  et  $s$  trois entiers positifs. Le coefficient  $q$ -binomial est la fonction génératrice en  $q$  du nombre des partitions d'entiers avec au plus  $k$  parts dont il y a au plus  $s$  parts successives qui sont égales, et la plus grande part  $\leq n - 1$  dans un rectangle de taille  $k \times (n - 1)$ , c'est à dire

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} = \sum_{\lambda \subset (n-1)^k} q^{|\lambda|}, \tag{3.57}$$

où  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  tel que  $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq n - 1$ ,  $\lambda_i \neq \lambda_{i+s}$  pour  $i \geq 1$ .

**Preuve.** On utilise une interprétation par chemin de réseau associé. Chaque partition s'inscrit dans un rectangle de taille  $k \times (n - 1)$  est déterminée uniquement par un chemin qui commence par le point  $(0, 0)$  et se termine par le point  $(k, n - 1)$  défini dans le Théorème 3.4.1 et nous prenons simplement le poids de ce chemin comme le poids de sa partition associée.

■

**Exemple 3.4.1.** Figure 3.5 montre l'interprétation combinatoire par partition et chemin pour le cas de  $n = 3$ ,  $s = 2$  et  $k = 2$ .

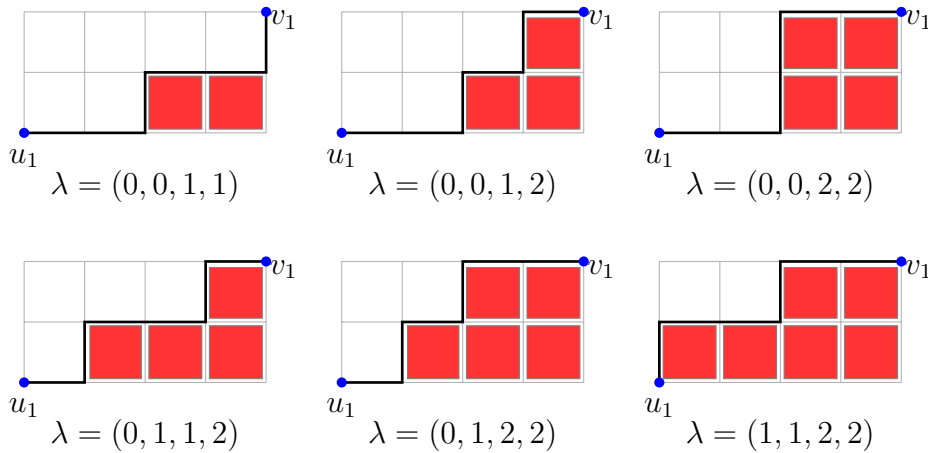


FIGURE 3.5 – Les six chemins du réseau de  $(0, 0)$  à  $(4, 2)$ . L'exposant de  $q$  dans le poids de chaque chemin est donné par le comptage du nombre des cases qui sont en dessous et à droite des chemins.

**Corollaire 3.4.4.** Le nombre  $q$ -binomial est la fonction génératrice du nombre de partitions entières avec au plus  $k$  parts, et la plus grande part égale au plus  $n - 1$ . C'est à dire

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = q^{-\binom{k}{2}} \sum_{\lambda \subset (n-1)^k} q^{|\lambda|}. \tag{3.58}$$

**Proposition 3.4.3 (Relation de symétrie).** Pour  $n \geq 0$  et  $s \geq 1$ , on a

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} = q^{(n-1)k - \frac{sn(n-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ sn - k \end{bmatrix}_q^{(s)}. \tag{3.59}$$

**Preuve.** Soit

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^s = \sum_P q^{\omega(P)}, \quad (3.60)$$

$$\begin{bmatrix} n \\ sn - k \end{bmatrix}_q^s = \sum_{P'} q^{\omega(P')}, \quad (3.61)$$

où

- $\omega(P)$  est le poids de chaque chemin  $P$  de point  $(0, 0)$  au point  $(k, n - 1)$  avec au plus  $s$  pas dans la direction orientale.
- $\omega(P')$  est le poids de chaque chemin  $P'$  de point  $(0, 0)$  au point  $(sn - k, n - 1)$  avec au plus  $s$  pas dans la direction orientale.

Supposons que :

- le poids le plus élevé est associé au chemin commençant par  $(0, 0)$  et se terminant par  $(sn, n - 1)$ , i.e  $q^{\frac{sn(n-1)}{2}}$ .
- le poids total de la grille entre le point  $(0, 0)$  et le point  $(k, n - 1)$  est  $q^{(n-1)k}$ .

Par conséquence, pour chaque chemin  $P$  il n'existe que le chemin  $P'$  où

$$q^{\omega(P')} = q^{\frac{sn(n-1)}{2} - ((n-1)k - \omega(P))}.$$

■

Comme  $\sum_P = \sum_{P'}$ , alors d'après Théorème 3.4.1 et la relation (3.43) on obtient

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ sn - k \end{bmatrix}_q^{(s)} &= \sum_{P'} q^{\omega(P')} = \sum_P q^{\frac{sn(n-1)}{2} - ((n-1)k - \omega(P))} \\ &= q^{\frac{sn(n-1)}{2} - (n-1)k} \sum_P q^{\omega(P)} \\ &= q^{\frac{sn(n-1)}{2} - (n-1)k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)}, \end{aligned}$$

Et ainsi

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} = q^{(n-1)k - \frac{sn(n-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ sn - k \end{bmatrix}_q^{(s)}.$$

D'où le résultat.

---

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. E. Andrews. *The theory of partitions*. Addison-Wesley Publishing, New York (1976).
- [2] M. Ahmia, M. Merca. *A generalisation of complete and symmetric functions*. arxiv : 2005. 01447v1[math.CO] 4 Mai 2020.
- [3] A. Bazeniari, M. Ahmia et H. Belbachir. *Connection between binomial coefficients with their analogs and symmetric functions*. Turk J Math. 42, 807–818 (2018).
- [4] M. Benmezai. *Le  $q$ -analogue des suite de Fibounacci et de Lucas*. Thèse de doctorat, Université d’Oran, Faculté des science exactes et appliquées,2016.
- [5] F. Bergeron. *Introduction à la combinatoire algébrique*. Université du Québec à Montréal. 2015.
- [6] I. E. Bousbaa. *Combinatoire de suite de Sterling généralise*. Thèse de doctorat, Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene, Laboratoire RECITS, 2016.
- [7] Ch. A. Charalambides *Discrets  $q$ -Distributions*. Department of Mathematics University of Athens, Athens, Greece, 2016.
- [8] Ch.A. Charalambides. *Non-central generalized  $q$ -factorial coefficients and  $q$ -Stirling numbers*. Department of Mathematics, University of Athens, GR-15784 Athens, Greece, 2016.
- [9] M.J. Erickson. *Introduction to Combinatorics*. Department of Mathematics Truman State University Kirksville, MO, 2013.
- [10] D. Foata, H. Guo-Niu. *Principes de combinatoires classique*. Cours et exercices corrigés. Univ Louis Pasteur. Strasbourg Département de mathématique 2008.
- [11] Fu. H, Mei. Z *Truncated homogeneous symmetric functions*. Linear Multilinear Algebra. (2020) DOI : 10.1080/03081087.2020.1733460.

- 
- [12] H. W. Gould. *Combiatorial identities for Stirling nombres*. University of pennsylvania, USAm 2016
- [13] D. Grinberg. *Petrie symmetric functions*. In arXiv :2004.11194v1, (preprint) 2020.
- [14] J. Lindsay, T. Mansour et M. Shattuck. *A new combinatorial interpretation of a  $q$ -analogue of the Lah numbers*. Volume 2, Number 2, 245–264, 2011. Counting Sequences.
- [15] I. G. Macadounald. *Symmetric functions and Hall polynomials*. Oxford Univ. Press, oxford, 1995.
- [16] M. Mangontarum. *On  $q$ -Boson Operators and  $q$ -Analogues of the  $r$ -Whitney and  $r$ -Dowling Numbers*. Department of Mathematics Mindanao State University – Main Campus Marawi City 9700(2015).
- [17] M. Merca. *A generalization of the symmetry between complets and elementary symmetric function*. Department of Mathematics, University of Craiova, A. I. Cuza 13, Craiova, 200585 Romania, 2013.
- [18] J. L. Ramírez, M. Shattuck. *A  $(p, q)$ -analogue of the  $r$ -Whitney-Lah Numbers* . Departamento de Matemáticas Universidad Sergio Arboleda, Bogotá, Colombia,2016.
- [19] B. E. Sagan. *The Symmetric Group, Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions*. Springer Science+ Business Media, LLC,2001.
- [20] W. Serhan. *Monoide plaxique décalé et tableau de Young*,2015.
- [21] M. Tiachachat. *Quelque application des nombres  $r$ -Whitney et  $r$ -Stirling*. Thèse de doctorat, Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene, Laboratoire RECITS, 2016.
- [22] A. Young. *Quantative substitutional analysis*. Dan : Proc. London Math. Soc. 33 (1901), p. 97-146.
-