République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité Mathématiques.

Option Mathématiques fondamentales et discrètes.

Thème

Quelques équations aux différences dans les espaces de Banach

Par

Sara Habila

Devant le jury

Président	N. Touafek	Prof. Université de Jijel
Encadreur	F. Belhannache	M.C.A Université de Jijel
Examinatrice	I. Dekkar	M.C.B Université de Jijel

Promotion **2019/2020**

Remerciements

Je remercie en premier lieu le **bon Dieu** qui m'a donné le courage et la patience jusqu'au bout de mes études.

Je remercie mon encadreur madame **Belhannache Farida** pour avoir dirigé ce travail. Je la remercie également pour son aide effective et dont les conseils m'ont été très précieux.

Je remercie également les membres de jury pour l'honneur qu'ils m' a fait en acceptant de siéger a ma soutenance.

Je remercie également **mes parents et ma famille** qui ont toujours été là pour moi et pour les sacrifices qu'ils ont faits pour que je puisse terminer mes études.

Mes remerciements vont aussi à tous les personnes et les professeurs qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail

Tout d'abord à **mes parents** qui m'a donné naissance et qui me permis

d'arriver jusqu'à ce stade de mon éducation.

À mes chers frères et sœurs, et je mentionne particulièrement ma sœur Madiha.

À tous ceux que j'aime et à qui m'aime.

Aux personnes qui ont ouvert ma voie de la science et du savoir.

À tous mes professeurs distingués.

À chaque personne qui m'a soutenu dans mes études.

À Madame **Belhannache Farida** pour son aide.

Sara

Table des matières

Introduction

Une équation aux différences est une équation dont la variable est une suite qui relie plusieurs termes d'une même suite. Les équations aux différences sont très importantes dans différents domaines scientifiques comme la biologie, la théorie du contrôle, la physique, etc. Elles apparaissent dans la modélisation de plusieurs phénomènes réels.
Les équations aux différences non linéaires ont une forme simple mais il est un peu difficile de déterminer la forme des solutions pour ces équations.

L'objectif de ce mémoire est l'étude de l'existence et le comportement asymptotiquement des solutions de quelques équations aux différences dans des espaces de Banach par la technique du point fixe.
La méthode du point fixe consiste à transformer un problème donné en un problème de point fixe.

Dans ce mémoire nous présentons dans le premier chapitre les notion nécessaires pour la bonne compréhension de ce travail.

Ensuite dans le deuxième chapitre nous appliquons le théorème de point fixe de Schauder pour étudier l'existence et le comportement asymptotiquement des solutions de deux équations aux différences non linéaires.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de l'existence et la périodicité des solutions d'une équation aux différences non linéaire à l'aide du théorème de point fixe de Darbo.

On terminons ce mémoire par une conclusion.

Notations

Dans ce mémoire on désignera par

$\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

$\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

$\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres naturels.

$\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs.

$\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

$\mathbb{R}^n$ l'espace vectoriel de dimension n construit sur les corps des réelles.

$\mathbb{N}_{n_0} = \{n_0, n_0 + 1, ...\}$ où $n_0 \in \mathbb{N}$

$|.|$ la valeur absolue.

$\mathbb{N}^*$ l'ensemble des nombres naturels non nuls.

Chapitre 1

Notations et préliminaires

Dans ce chapitre, nous présentons les notions nécessaires pour la bonne compréhension de ce travail, nous commençons par donner un rappel sur les espaces métriques et les espaces de Banach, ensuite nous présentons la notion de la mesure de non-compacité et une relation de comparaison des suites. Nous terminons le chapitre par une section réservée aux équations aux différences.

1.1 Espaces métriques et espaces de Banach

Définition 1.1.1. *Soit X un ensemble non vide*

1. *On appelle distance sur X toute fonction $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes*

   (a) $\forall x, y \in X^2,\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$

   (b) $\forall x, y \in X \times X,\ d(x,y) = d(y,x),$*(symétrie).*

   (c) $\forall x, y, z \in X,\ d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y),$ *(inégalité triangulaire).*

2. *Tout ensemble X muni d'une distance d est appelé espace métrique et on le note (X,d).*

Exemple 1.1.1. *1. Soit X un ensemble non vide. On définit la fonction d par*

$$d\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longrightarrow d(x,y) = \begin{cases} 0 & si \;\; x = y \\ 1 & si \;\; x \neq y. \end{cases}$$

Alors d est une distance sur X, (c'est la distance discrète).

2. Soient $X = \mathbb{R}^n$ et $x = (x_1, ..., x_n),\ y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$. La fonction

$$d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longrightarrow d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

est une distance sur $\mathbb{R}^n$, (c'est la distance euclidienne).

– *Si $n = 1$ on obtient $d(x,y) = |x - y|$, (c'est la distance usuelle sur $\mathbb{R}$).*

Définition 1.1.2. *Soient (X,d) un espace métrique, $x_0 \in X$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$*

(i) L'ensemble

$$B(x_0, r) = \{x \in X, d(x_0, x) < r\},$$

est appelé la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r

(ii) L'ensemble

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in X, d(x_0, x) \leq r\},$$

est appelé la boule fermée de centre x_0 et de rayon r.

Remarque 1.1.1. *Soient (X,d) un espace métrique, $x_0 \in X$ et $r, r' \in \mathbb{R}_+^*$, alors*

1. *$B(x_0, r) \subset \overline{B}(x_0, r)$.*
2. *Si $r < r'$, alors $B(x_0, r) \subset B(x_0, r')$.*

Définition 1.1.3. *Soient (X,d) un espace métrique et $(x_n)_n \subset X$ une suite et $x_0 \in X$*

(a) On dit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_1}$ converge vers x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0,\ d(x_n, x_0) < \varepsilon.$$

(b) On dit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_1}$ est une suite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall m, n \in N,\ m > n \geq n_0,\ d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Proposition 1.1.1. [4] *Soient* (X, d) *un espace métrique et* $(x_n)_n \subset X$ *une suite, alors*

1. *Si* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente sa limite est unique.*
2. *Toute suite convergente est une suite de Cauchy .*

Définition 1.1.4. *Soient* $(X, d_1), (Y, d_2)$ *deux espaces métriques,* $f \colon X \to Y$ *une fonction et* $x_0 \in X$.

(a) On dit que f *est continue au point* x_0 *si* $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$*, c'est-à-dire*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0,\ \forall x \in X, d_1(x, x_0) \leq \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

(b) On dit que f *est continue sur* X *si elle est continue en chaque point de* X.

Définition 1.1.5. *Soit* f *une application d'un ensemble* E *dans lui même. on dit qu'un point* $x \in E$ *est un point fixe de* f *si et seulement si* $f(x) = x$.

Définition 1.1.6. *Soient* (X, d_1) *et* (Y, d_2) *deux espaces métriques et* $f \colon X \to Y$ *une fonction.*
On dit que f *est uniformément continue si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, x_0 \in X,\ d_1(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Remarque 1.1.2. *Si* f *est uniformément continue, alors elle est continu.*

Définition 1.1.7. *Soient* (X, d_1) *et* (Y, d_2) *deux espaces métriques.*
On dit que f *est une isométrie si*

$$\forall x, x_0 \in X, \quad d_1(x, x_0) = d_2(f(x), f(x_0)).$$

Remarque 1.1.3. *Toute isométrie est injective et uniformément continu.*

Définition 1.1.8. *Soient* (X, d) *un espace métrique et* E *un sous-ensemble de* X*. On note par* d_E *la restriction de* d *à* $E \times E$ *c'est-à-dire* $d_E \colon E \times E \to \mathbb{R}_+$.
Alors (E, d_E) *est appelé un sous-espace métrique de* (X, d).

Définition 1.1.9. *Soient* (X, d) *un espace métrique et* E *un sous-ensemble de* X.

(i) (X, d) *est dit complet si toute suite de Cauchy de* X *converge vers un point de* X.

(ii) E *est dit complet si le sous-espace métrique* (E, d_E) *est complet.*

Exemple 1.1.2. *(a) Les espaces* $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{R}^n$ *sont complets pour la métrique usuelle et la métrique euclidienne respectivement.*

(b) L'espace (X, d) où d est la distance discrète est complet.

Définition 1.1.10. *Soit X un ensemble et τ est une famille de partie de X. On appelle un espace topologique un couple (X, τ), vérifiant*

(a) La réunion de toute famille d'élément de τ est un élément de τ.

(b) L' intersection de toute famille finie d'éléments de τ est un élément de τ.

(c) X et $\varnothing$ appartient à τ.
Les éléments de τ s'appellent ouverts de X pour la topologique τ.

Définition 1.1.11. *Soit (X, τ) un espace topologique et $E \subset X$. On appelle la fermeture de E le plus petit fermé de X contenant E. On le note $\overline{E}$.*

Définition 1.1.12. *Soit (X, τ) un espace topologique et $E \subset X$. On appelle la topologie trace de τ sur E la famille τ_E définie par*

$$\tau_E = \{G \cap E, G \in \tau\},$$

telle que τ_E définit une topologie sur E.

Définition 1.1.13. *Soient (X, τ) un espace topologique, $E \subset X$ et $x \in E$. On dit que E est un voisinage de x si*

$$\exists v \in \tau \text{ tel que } x \in v \subset E.$$

Définition 1.1.14. *Soit (X, τ) un espace topologique. On dit que (X, τ) est un espace séparé si*

$$\forall x, y \in X, x \neq y, \exists v \in \nu(x), \exists w \in \nu(y),\ v \cap w = \varnothing$$

Définition 1.1.15. *Soient (X, τ) et (Y, σ) deux espaces topologiques.*

- *On appelle homéomorphisme de X sur Y toute fonction bijective $f \colon X \to Y$, telle que f et f^{-1} sont continues.*
- *On dit que X et Y sont homéomorphes si il existe un homéomorphisme de X dans Y.*

Définition 1.1.16. *Soit (X, τ) un espace topologique séparé et $E \subset X$*

(a) X est dit compact si toute famille d'ouverts de $X, (\underset{\alpha}{V})$ telle que $X = \bigcup\limits_{\alpha} \underset{\alpha}{V}$ contient une sous-famille finie $(\underset{\alpha_i}{V})$, $1 \leq i \leq n$ vérifiant aussi $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \underset{\alpha_i}{V}$

(b) E est dit compact si le sous-espace (E, τ_E) muni de la topologie τ_E est compact.

Définition 1.1.17. *Soit (X, τ) un espace topologique et $E \subset X$. On dit que E est relativement compact si $\overline{E}$ est compacte.*

Proposition 1.1.2. *L'image d'un compact par une application continue est un compact.*

Théorème 1.1.1. *(Théorème de Heine) Soient $(X, d), (Y, d')$ deux espaces métriques et $f \colon X \to Y$ une application. Si X est compact et f est continue, alors f est uniformément continue.*

Proposition 1.1.3. *Soient (X, d) un espace métrique et E une partie de X. Alors E est fermée si et seulement si toute suite convergente de E admette pour limite un point de E.*

Théorème 1.1.2. *Soient (X, d) un espace métrique complet et E une partie de X. Pour que E soit complet il faut et il suffit que E soit fermé.*

Définition 1.1.18. *Soit (X, d) un espace métrique. On dit que (X, d) est précompact si pour tout $r > 0$, X admet un recouvrement fini par des boules ouvertes de rayon r.*

Théorème 1.1.3. *Soit (X, d) un espace métrique. Alors (X, d) est compact si et seulement si (X, d) est complet et précompact.*

Définition 1.1.19. *Soit X un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. On appelle norme sur X toute fonction $\|.\| \colon X \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes*

(a) $\forall x \in X, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

(b) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in X, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, *(homogénéité).*

(c) $\forall x, y \in X, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, *(inégalité triangulaire).*

$(X, \|.\|)$ *est appelé espace vectoriel normé.*

Exemple 1.1.3. *1. On définit la fonction $\|.\| \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, par*

$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Alors $\|.\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

2. Soit l_∞ l'espace des suites réelles bornées tel que

$$x = (x_n)_n \in l_\infty \colon \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| < \infty.$$

Alors la fonction $\|.\|_\infty \colon l_\infty \to \mathbb{R}$ avec $\|.\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$ est une norme sur l_∞.

Remarque 1.1.4. *1. $(X, \|.\|)$ est appelé espace vectoriel normé réel si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.*

2. $(X, \|.\|)$ est appelé espace vectoriel normé complexe si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Proposition 1.1.4. *Soient $(X, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et $x, y \in X$. Alors*

1. *La fonction $d \colon X \times X \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\forall x, y \in X, d(x, y) = \|x - y\|,$$

   est une distance sur X.

2. *La fonction $x \to \|x\|$ est continue.*

Définition 1.1.20. *Soient $(X, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ une suite*

(a) On dit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} x_n$ est convergente (i.e $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n < \infty$) si

$$\lim_{n\to+\infty} \|S_n - S\| = 0,$$

où $(S_n)_n = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)$ est la suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} x_n$ et dans ce cas $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ est la somme de cette série.

(b) On dit que $\sum\limits_{n\geqslant 1} x_n$ est absolument convergente si la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \|x_n\|$ est convergente.

Définition 1.1.21. *Soit $(X, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. On dit que $(X, \|.\|)$ est un espace de Banach si $(X, \|.\|)$ est complet.*

Proposition 1.1.5. *Soit $(X, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Alors X est un espace de Banach si et seulement si toute série absolument convergente est convergente.*

Exemple 1.1.4. *(a) L'espace $(\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$ est un espace de Banach pour la norme*

$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(b) $(l_\infty, \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Définition 1.1.22. *Soient X un espace vectoriel et E une partie de X. On dit que E est convexe si*

$\forall x, y \in E,\ \forall \lambda \in [0, 1],\ \lambda x + (1 - \lambda) y \in E.$

Exemple 1.1.5. *(a) Tout sous-espace vectoriel de X est convexe.*

(b) Si E est convexe et $a \in X$, alors $a + E$ est convexe.

Proposition 1.1.6. *Soient $(X, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et $r > 0$. Alors la boule ouverte $B_r = \{x \in X, \|x\| < r\}$ est convexe.*

Définition 1.1.23. *Soient $(X, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et $E \subset X$. On appelle enveloppe convexe de E, notée $conv(E)$ l'intersection de tous les sous-ensembles convexes contenant E.*

Théorème 1.1.4. *(Théorème de Schauder)[9] Soient $(X, \|.\|)$ un espace de Banach, E un sous-ensemble non vide convexe et compact de X et $A\colon E \to E$ une application continue sur E. Alors A admet au moins un point fixe dans E.*

1.2 Mesure de non-compacité

Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach. On note par M la famille de tous les sous-ensembles bornés non vides de X et par N la famille de tous les sous-ensembles relativement compacts de X.

Définition 1.2.1. [7] *Une fonction $\alpha\colon M \to \mathbb{R}_+$ est dite mesure de non-compacité si elle vérifie les conditions suivantes*

1. *La famille* $\ker\alpha = \{D \in M,\ \alpha(D) = 0\}$ *est non vide et* $\ker\alpha \subseteq N$.
2. $D \subseteq B \Rightarrow \alpha(D) \leq \alpha(B)$.
3. $\alpha(\overline{D}) = \alpha(D)$.
4. $\alpha(conv(D)) = \alpha(D)$.
5. $\alpha(\lambda D + (1-\lambda)D) \leq \lambda\alpha(D) + (1-\lambda)\alpha(D),\ \forall\lambda \in [0, 1]$.
6. *Si $\{D_n\}$ est une suite d'ensembles fermées de M tel que $D_{n+1} \subseteq D_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha(D_n) = 0$, alors $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} D_n$ n'est pas vide.*

Théorème 1.2.1. *(Théorème de Darbo)[8] Soient $D \subset X$ un sous-ensemble non vide, borné, convexe et fermé et α une mesure de non-compacité dans X. Soit $A\colon D \to D$ un opérateur continu vérifie*

$$\alpha(A(V)) \leq \lambda\alpha(V),$$

pour tout sous-ensemble V de D, avec $\lambda \in [0, 1[$ est une constante. Alors A admet un point fixe dans D.

Lemme 1.2.1. *[2] Soit X un sous-ensemble non vide et borné de l_∞. On pose*

$$X_n = \{x_n,\ x = (x_n) \in X\}, \quad diam X_n = \sup_{x,y \in X} |x_n - y_n|$$

et

$$\mu(X) = \limsup_{n \to +\infty} diam X_n.$$

Alors μ est une mesure de non-compacité dans l_∞.

1.3 Relations de comparaison des suites

Dans cette section, les suites considérées sont à valeur dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Définition 1.3.1. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites et $v_n \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si la suite $(\frac{u_n}{v_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge ver 0. On note alors $u_n = o(v_n)$.*

Remarque 1.3.1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Alors $u_n = o(1)$.*

Proposition 1.3.1. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites. Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.*

Proposition 1.3.2. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quatre suites et $w_n \neq 0,\ t_n \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors*

- *Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $\lambda u_n + \mu v_n = o(w_n)$*
- *Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(t_n)$, alors $u_n v_n = o(w_n t_n)$.*

1.4 Équations aux Différences

Dans cette section, on désigne par I une partie de $\mathbb{R}$.

Définition 1.4.1. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_{n_0}}$ une suite réelle, on définit l'opérateur de différence Δ par*

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n,\ n \in \mathbb{N}_{n_0}. \tag{1.1}$$

Définition 1.4.2. *En générale, on définit $\Delta^r, r \in \mathbb{N}_1$ par*

$$\Delta^r x_n = \Delta(\Delta^{r-1} x_n),\ n \in \mathbb{N}_{n_0}.$$

Proposition 1.4.1. *On a les propriétés suivantes pour* Δ

(a)

$$\sum_{i=n_0}^{n-1} \Delta x_i = x_n - x_{n_0},\ n \in \mathbb{N}_{n_0}. \tag{1.2}$$

(b)

$$\Delta \left(\sum_{i=n_0}^{n-1} x_i \right) = x_n,\ n \in \mathbb{N}_{n_0}.$$

Démonstration. En utilisant (1.1) on trouve

(a)

$$\begin{aligned} \sum_{i=n_0}^{n-1} \Delta x_i &= \sum_{i=n_0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \\ &= \sum_{i=n_0+1}^{n} x_i - \sum_{i=n_0}^{n-1} x_i \\ &= x_n - x_{n_0}. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \Delta \left(\sum_{i=n_0}^{n-1} x_i \right) &= \sum_{i=n_0}^{n} x_i - \sum_{i=n_0}^{n-1} x_i \\ &= x_n. \end{aligned}$$

■

Théorème 1.4.1. *(La règle de l'Hopital dans le cas discret)[1] Soit* $c \in \mathbb{R}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *deux suites numériques, telles que*

(a) $v_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

(b) $\Delta v_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\Delta u_n}{\Delta v_n} = c \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = c.$$

Démonstration. 1. Soit $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\Delta u_n}{\Delta v_n} = c$, tel que $c \in \mathbb{R}$. Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}_{n_0},\ c - \varepsilon < \frac{\Delta u_i}{\Delta v_i} < c + \varepsilon,\ \forall i \in \mathbb{N}_{n_1}.$$

Comme $\Delta v_i > 0$, donc

$$(c-\varepsilon)\Delta v_i < \Delta u_i < (c+\varepsilon)\Delta v_i,\ \forall i \in \mathbb{N}_{n_1},$$

alors

$$(c-\varepsilon)\sum_{i=n_1}^{n} \Delta v_i < \sum_{i=n_1}^{n} \Delta u_i < (c+\varepsilon)\sum_{i=n_1}^{n} \Delta v_i. \tag{1.3}$$

En utilisant (1.3) on trouve

$$(c-\varepsilon)(v_n - v_{n_1}) < u_n - u_{n_1} < (c+\varepsilon)(v_n - v_{n_1}).$$

En divisant par v_n on obtient

$$(c-\varepsilon)\frac{v_n - v_{n_1}}{v_n} + \frac{u_{n_1}}{v_n} < \frac{u_n}{v_n} < (c+\varepsilon)\frac{v_n - v_{n_1}}{v_n} + \frac{u_{n_1}}{v_n}. \tag{1.4}$$

Mais $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n_1}}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{v_{n_1}}{v_n} = 0.$$

En passant à la limite dans (1.4) quand $n \to +\infty$ on trouve

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_1 \in \mathbb{N}_{n_0},\ c - \varepsilon \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} \leq c + \varepsilon.$$

On prend $\varepsilon \to 0$ dans cette dernière estimation on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = c.$$

2. Soit $c = +\infty$. Alors

$$\forall \xi > 0,\ \exists n_1 \in \mathbb{N}_{n_0},\ \frac{\Delta u_i}{\Delta v_i} \geqslant \xi,\ \forall i \in \mathbb{N}_{n_1}.$$

Comme $\Delta v_i > 0$, alors

$$\forall \xi > 0,\ \exists n_1 \in \mathbb{N}_{n_0},\ \Delta u_i \geqslant \xi \Delta v_i,\ \forall i \in \mathbb{N}_{n_1},$$

donc

$$\sum_{i=n_1}^{n} \Delta u_i \geqslant \xi \sum_{i=n_1}^{n} \Delta v_i,\ \forall i \in \mathbb{N}_{n_1},\ n \in \mathbb{N},\ n > n_1. \tag{1.5}$$

En utilisant (1.5) puis en divisant par v_n on obtient

$$\frac{u_n}{v_n} \geqslant \frac{u_{n_1}}{v_n} + \xi\left(1 - \frac{v_{n_1}}{v_n}\right),\ \forall n > n_1.$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$ on trouve $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} \geqslant \xi$ c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$.

3. Soit $c = -\infty$, alors

$$\forall \xi_1 > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}_{n_0}, \frac{\Delta u_i}{\Delta v_i} \leq -\xi_1, \ \forall i \in \mathbb{N}_{n_1}.$$

Comme $\Delta v_i > 0$, alors

$$\forall \xi_1 > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}_{n_0}, \Delta u_i \leq -\xi_1 \Delta v_i, \ \forall i \in \mathbb{N}_{n_1},$$

donc

$$\sum_{i=n_1}^{n} \Delta u_i \leq -\xi_1 \sum_{i=n_1}^{n} \Delta v_i, \ \forall i \in \mathbb{N}_{n_1}, \ n \in \mathbb{N}, \ n > n_1. \tag{1.6}$$

En utilisant (1.6) puis en divisant par v_n on obtient

$$\frac{u_n}{v_n} \leq \frac{u_{n_1}}{v_n} - \xi_1 \left(1 - \frac{v_{n_1}}{v_n}\right), \ \forall n > n_1.$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$ on trouve $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} \leq -\xi_1$ c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = -\infty$.

■

Définition 1.4.3. *Une équation de la forme*

$$y_{n+k} + p_1(n)y_{n+k-1} + ... + p_k(n)y_n = g(n), n \in \mathbb{N}_{n_0}. \tag{1.7}$$

avec $p_i(n), i \in \{1, ..., k\}$ et $g(n)$ sont des fonctions réelles définies sur $\mathbb{N}_{n_0}$ et $p_k(n) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}_{n_0}$ s'appelle équation aux différences linéaire non homogène d'ordre k.

Définition 1.4.4. *On appelle équation homogène associée à l'équation (1.7) l'équation*

$$y_{n+k} + p_1(n)y_{n+k-1} + ... + p_k(n)y_n = 0, \ n \in \mathbb{N}_{n_0}.$$

Définition 1.4.5. *Soit $f \colon I^{k+1} \to I$ une fonction alors l'équation aux différences d'ordre $k+1$ suivante*

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, ..., x_{n-k}), \ n \in \mathbb{N}. \tag{1.8}$$

est dite non linéaire si elle n'est pas de la forme (1.7).

Définition 1.4.6. *Une solution de l'équation (1.8) est une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie cette équation.*

Définition 1.4.7. *Soient $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une solution de l'équation (1.8) et $p \in \mathbb{N}_1$.*

- *On dit que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est p-périodique si $y_{n+p} = y_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$*

– *On dit que* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est asymptotiquement p-périodique s' il existe deux suites réelles* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *telles que*

(i) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est p-périodique.*

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0.$

(iii) $y_n = u_n + v_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$

Chapitre 2

Application du théorème de Shauder pour étudier le comportement asymptotiquement des solutions de quelques équations aux différences non linéaires

Dans ce chapitre, nous allons appliquer le théorème de point fixe de Schauder pour étudier le comportement asymptotique des solutions de deux équations aux différences non linéaires dans des espaces de Banach.

2.1 Etude de l'équation $\Delta(r_{n-1}\Delta x_{n-1}) + a_n f(x_{n-k}) = b_n$

Dans cette section on considère l'équation aux différences suivante [5]

$$\Delta(r_{n-1}\Delta x_{n-1}) + a_n f(x_{n-k}) = b_n,\ n \in \mathbb{N}_1 \tag{2.1}$$

où $k \in \mathbb{N}, (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique réelle strictement positive, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ sont des suites numériques réelles avec $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}_1$ et f est une fonction réelle et Δ est l'opérateur défini par (1.1).
Dans tout ce qui suit on pose $R_n = \sum\limits_{j=0}^{n-1} \frac{1}{r_j},\ n \in \mathbb{N}_1$

Lemme 2.1.1. *Soient* $\alpha_n = |a_n| + |b_n|$ *et* $\beta_n = \frac{1}{r_n}\sum\limits_{j=n+1}^{+\infty}\alpha_j$. *Supposons que* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} R_n|a_n| < \infty$ *et* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} R_n|b_n| < \infty$, *alors* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\beta_n$ *est convergente.*

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} R_n|a_n| + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n|b_n| &= \sum_{n=1}^{+\infty} R_n(|a_n| + |b_n|) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} R_n\alpha_n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{r_j}\right)\alpha_n \\
&= \alpha_1\frac{1}{r_0} + \alpha_2\left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1}\right) + ... \\
&= \frac{1}{r_0}(\alpha_1 + \alpha_2 + ...) + \frac{1}{r_1}(\alpha_2 + ...) + ... \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{r_{n-1}}\left(\sum_{j=n}^{+\infty}\alpha_j\right)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\beta_{n-1}.
\end{aligned}$$

Par conséquent $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\beta_n$ est convergent car $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} R_n|a_n|$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} R_n|b_n|$ sont convergentes. ■

Lemme 2.1.2. *Soit la suite* $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ *définie par* $\rho_n = \sum\limits_{j=n}^{+\infty}\beta_j$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty}\rho_n = 0.$

Démonstration. Soit $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j$ et $S = \sum\limits_{j=1}^{+\infty}\beta_j$.

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\rho_n &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{j=n}^{+\infty}\beta_j \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{j=1}^{+\infty}\beta_j - \sum_{j=1}^{n-1}\beta_j\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}\beta_j - \lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j \\
&= S - S \\
&= 0.
\end{aligned}$$

■

Lemme 2.1.3. *Supposons que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Soient $c \in \mathbb{R}$ et $a > 0$, alors il existe $M > 1$ tel que $|f(t)| < M, \forall t \in [c-a, c+a]$ et il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $M\rho_n < a,\ \forall n \geqslant n_0$.*

Démonstration. On a f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists a > 0,\ \forall c \in \mathbb{R},\ |t - c| \leq a \Rightarrow |f(t) - f(c)| < \varepsilon.$$

D'autre part on a

$$|f(t)| = |f(t) - f(c) + f(c)| \leq |f(t) - f(c)| + |f(c)|\,.$$

Donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists a > 0,\ \forall t \in [c-a, c+a], |f(t)| < \varepsilon + |f(c)|.$$

On prend ε telle que $\varepsilon + |f(c)| = M$ et $M > 1$, alors

$$\exists M > 1,\ \forall t \in [c-a, c+a],\ |f(t)| < M.$$

En utilisant le Lemme 2.1.2 on trouve

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |\rho_n| < \varepsilon.$$

Donc si on prend $\varepsilon = \frac{a}{M}$ on obtient

$$\forall n \geqslant n_0, M\rho_n < a.$$

■

Lemme 2.1.4. *Soit l'ensemble*

$$T = \{x \in l_\infty,\ x_1 = \cdots = x_{n_0-1} = c \text{ et } \ |x_n - c| \leq M\rho_n,\ n \geqslant n_0\}.$$

Alors T est convexe, fermé et précompact.

Démonstration. 1. Tout d'abord montrons que T est convexe.

Soient $x, y \in T$ et $\lambda \in [0,1]$, on pose $z = \lambda x + (1-\lambda)y$. Alors

Si $n < n_0$ on a

$$\begin{aligned} z_1 &= \lambda x_1 + (1-\lambda)y_1 = \lambda c + (1-\lambda)c = c \\ z_2 &= \lambda x_2 + (1-\lambda)y_2 = \lambda c + (1-\lambda)c = c \\ &\vdots \\ z_{n_0-1} &= \lambda x_{n_0-1} + (1-\lambda)y_{n_0-1} = \lambda c + (1-\lambda)c = c. \end{aligned}$$

Donc $z_1 = \cdots = z_{n_0-1} = c$.

Si $n \geqslant n_0$ on a

$$\begin{aligned}
|z_n - c| &= |\lambda x_n + (1-\lambda)y_n - c| \\
&= |\lambda x_n + (1-\lambda)y_n - c - \lambda c + \lambda c| \\
&= |\lambda(x_n - c) + (1-\lambda)(y_n - c)| \\
&\leq |\lambda(x_n - c)| + |(1-\lambda)(y_n - c)| \\
&\leq \lambda|x_n - c| + (1-\lambda)|y_n - c| \\
&\leq \lambda M\rho_n + (1-\lambda)M\rho_n = M\rho_n.
\end{aligned}$$

Alors

$$|z_n - c| \leq M\rho_n, \ \forall n \geqslant n_0.$$

D'où T est convexe.

2. Maintenant montrons que T est fermé, soit $(X_m)_m$ une suite de T qui converge vers X, alors

$$\{X_{m_1} = X_{m_2} = \cdots = X_{m_{n_0-1}} = c \ \ et \ \ |X_{m_n} - c| \leq M\rho_n, \ n \geqslant n_0\}$$

et

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists m_0 \in \mathbb{N}, \ \forall m \geqslant m_0, \ \|X_m - X\|_\infty < \varepsilon.$$

Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists m_0 \in \mathbb{N}, \ \forall m \geqslant m_0, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ |X_{m_n} - X_n| < \varepsilon. \tag{2.2}$$

– Si $n < n_0$ on a

$$X_{m_n} = c,$$

donc de (2.2) on obtient

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists m_0 \in \mathbb{N}, \ \forall m \geqslant m_0, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ |c - X_n| < \varepsilon.$$

On prend $\varepsilon \to 0$ on trouve

$$X_n = c.$$

– Si $n \geq n_0$, de (2.2) on obtient

$$\begin{aligned}
|X_n - c| = |X_n - c + X_{m_n} - X_{m_n}| &\leq |X_{m_n} - c| + |X_n - X_{m_n}| \\
&\leq |X_{m_n} - c| + |X_{m_n} - X_n| \\
&\leq M\rho_n + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists m_0 \in \mathbb{N},\ \forall m \geqslant m_0,\ \forall n \geqslant n_0,\ |X_n - c| \leq M\rho_n + \varepsilon.$$

On prend $\varepsilon \to 0$ on obtient

$$|X_n - c| \leq M\rho_n,$$

donc $X \in T$, c'est-à-dire T est fermé.

3. Pour montrer que T est précompact il suffit de montrer que $T \subset B(x_c, a)$, où $B(x_c, a) = \{x \in l_\infty,\ \|x - x_c\|_\infty < a\}$ et $x_c = (c, c, ..., c, c, ...)$.
Soit $y \in T$, alors

$$\{y_1 = y_2 = \cdots = y_{n_0-1} = c,\ |y_n - c| \leq M\rho_n,\ n \geqslant n_0\},$$

mais $M\rho_n < a,\ \forall n \geqslant n_0$, donc

$$\{y_1 = y_2 = \cdots = y_{n_0-1} = c,\ |y_n - c| < a,\ n \geqslant n_0\}.$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}
\|y - x_c\|_\infty &= \sup_{n\in\mathbb{N}_1} |y_n - c| \\
&= \sup(|y_1 - c|, |y_2 - c|, ..., |y_{n_0-1} - c|, |y_{n_0} - c|, |y_{n_0+1} - c|, ...) \\
&= \sup(0, |y_{n_0} - c|, |y_{n_0+1} - c|, ...) \\
&< a.
\end{aligned}$$

Par conséquent $y \in B(x_c, a)$, c'est-à-dire T est précompact.

■

Corollaire 2.1.5. *On a T est fermé dans un espace complet donc il est complet et comme il est précompact et d'après le Théorème 1.1.3 on déduit que T est compact.*

Lemme 2.1.6. *Soient $x \in T$ et*

$$u_n = \frac{1}{r_n} \sum_{j=n+1}^{+\infty} [a_j f(x_{j-k}) - b_j],\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

Supposons que f est continue sur $\mathbb{R}$, alors $\sum_{j=1}^{+\infty} |u_j|$ est convergente.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
|u_n| &= \left| \frac{1}{r_n} \sum_{j=n+1}^{+\infty} [a_j f(x_{j-k}) - b_j] \right| \\
&\leq \frac{1}{r_n} \sum_{j=n+1}^{+\infty} |a_j f(x_{j-k})| + \sum_{j=n+1}^{+\infty} |b_j| \\
&\leq \frac{M}{r_n} \sum_{j=n+1}^{+\infty} |a_j| + \frac{1}{r_n} \sum_{j=n+1}^{+\infty} |b_j| \\
&\leq M\beta_n,
\end{aligned}$$

comme la série $\sum_{j=1}^{+\infty} \beta_j$ est convergente, alors la série $\sum_{j=1}^{+\infty} |u_j|$ est convergente. ■

Lemme 2.1.7. *Soient $c \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^*$ et f une fonction uniformément continue sur $[c-a, c+a]$. On définit la suite $A(x)$ par*

$$(A(x))_n = \begin{cases} c, & n < n_0 \\ c - \sum_{j=n}^{+\infty} u_j, & n \geqslant n_0, \end{cases} \tag{2.4}$$

où $(u_j)_j$ est la suite donnée par (2.3). Alors $A(x) \in T$ pour tout $x \in T$ et l'application $A : T \to T$ est continue.

Démonstration. Pour $n < n_0$, nous obtenons $(A(x))_n = c$.

Pour $n \geqslant n_0$, nous avons

$$\begin{aligned}
|(A(x))_n - c| &= \left| c - \sum_{j=n}^{+\infty} u_j - c \right| \\
&= \left| - \sum_{j=n}^{+\infty} u_j \right| \\
&\leq \sum_{j=n}^{+\infty} |u_j| \\
&\leq \sum_{j=n}^{+\infty} M\beta_j \\
&\leq M\rho_n.
\end{aligned}$$

Donc $A(x) \in T$, $\forall x \in T$.

Montrons maintenant que A est continue.

Soit $x, z \in T$ tel que $\|x - z\|_\infty < \delta$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; |x_n - z_n| < \delta,$$

mais f est uniformément continue sur $[c-a, c+a]$, donc

$$|f(x_n) - f(z_n)| < \varepsilon,\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

Soit

$$v_n = \frac{1}{r_n} \sum_{j=n+1}^{+\infty} \left[a_j f(z_{j-k}) - b_j\right],\ n \in \mathbb{N}. \tag{2.6}$$

Alors

$$\begin{aligned} \|A(x) - A(z)\|_\infty &= \sup_{n \geqslant n_0} \left| \sum_{j=n}^{+\infty} u_j - \sum_{j=n}^{+\infty} v_j \right| \\ &\leq \sum_{j=n_0}^{+\infty} |u_j - v_j|. \end{aligned}$$

En utilisant (2.3), (2.5) et (2.6) on obtient

$$\begin{aligned} |u_j - v_j| &\leq \frac{1}{r_j} \sum_{i=j+1}^{+\infty} |a_i||f(x_{i-k}) - f(z_{i-k})| \\ &\leq \varepsilon \frac{1}{r_j} \sum_{i=j+1}^{+\infty} |a_i| \\ &\leq \varepsilon \beta_j. \end{aligned}$$

D'où

$$\|A(x) - A(z)\|_\infty \leq \sum_{j=n_0}^{+\infty} \varepsilon \beta_j = \varepsilon \rho_{n_0}.$$

Donc A est continue. ∎

Théorème 2.1.1. *Supposons que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} R_n |a_n| < +\infty \quad et \quad \sum_{n=1}^{+\infty} R_n |b_n| < +\infty$$

et que la fonction f soit continue. Alors pour tout $c \in \mathbb{R}$, il existe une solution $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_1}$ de l'équation (2.1) telle que

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = c.$$

Démonstration. On va appliquer le Théorème 1.1.4. On considère le sous-ensemble T défini dans le Lemme 2.1.4 et l'application continue $A \colon T \to T$ définie par (2.4). Alors d'après le Lemme 2.1.4 et le Théorème 1.1.3 T est compact et

$$\exists x \in T, A(x) = x.$$

Maintenant montrons que ce point fixe de A est une solution de l'équation (2.1) vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = c$.
En utilisant la définition de A on trouve

$$x_n = c - \sum_{j=n}^{+\infty} u_j,$$

avec $(u_j)_j$ est la suite donnée par (2.3).
Donc

$$\begin{aligned}\Delta x_{n-1} &= x_n - x_{n-1}\\ &= c - \sum_{j=n}^{+\infty} u_j - c + \sum_{j=n-1}^{+\infty} u_j\\ &= u_{n-1}.\end{aligned} \tag{2.7}$$

En utilisant (2.7) on obtient

$$\begin{aligned}\Delta(r_{n-1}\Delta x_{n-1}) &= \Delta(r_{n-1}u_{n-1})\\ &= r_n u_n - r_{n-1}u_{n-1}\\ &= r_n \frac{1}{r_n}\sum_{j=n+1}^{+\infty}[a_j f(x_{j-k}) - b_j] - r_{n-1}\frac{1}{r_{n-1}}\sum_{j=n}^{+\infty}[a_j f(x_{j-k}) - b_j]\\ &= \sum_{j=n+1}^{+\infty} a_j f(x_{j-k}) - \sum_{j=n+1}^{+\infty} b_j - \sum_{j=n}^{+\infty} a_j f(x_{j-k}) + \sum_{j=n}^{+\infty} b_j\\ &= -a_n f(x_{n-k}) + b_n.\end{aligned}$$

D'où, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ est une solution de l'équation (2.1) et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = c$. ■

Lemme 2.1.8. *Soient l l'espace des suites réelles, $c, d \in \mathbb{R}$ et $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}_1}, (R_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ les suites définies précédemment et soit*

$$T_1 = \{x \in l,\ |x_n| \le M\rho_n,\ \forall n \in \mathbb{N}\}$$

$$S = \{x \in l_\infty,\ |x_n - (cR_n + d)| \le M\rho_n,\ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Alors T_1 et S sont homéomorphes.

Démonstration. il est clair que $d\colon S \times S \to \mathbb{R}$, définie par

$$\forall x, y \in S,\ d(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|,$$

est une distance sur S.
On considère l'application $F\colon T_1 \to S$ définie par

$$\forall x \in T_1,\ (F(x))_n = x_n + cR_n + d.$$

- Montrons que F est une isométrie
  On a

$$\begin{aligned}\forall x, y \in T_1,\ d(F(x), F(y)) &= \sup_{n\in\mathbb{N}} |(F(x))_n - (F(y))_n| \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n + cR_n + d - (y_n + cR_n + d)| \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n| \\ &= d(x, y).\end{aligned}$$

  Donc F est une isométrie et d'après la Remarque 1.1.2 et la Remarque 1.1.3 on trouve que F est injective et continue.
- Maintenant montrons que F est surjective.
  Soit $z \in S$, on pose

$$x_n = z_n - (cR_n + d),$$

  donc

$$(F(x))_n = x_n + cR_n + d = z_n,$$

  d'où $F(x) = z$ et $x \in l$ car $l_\infty \subset l$.
  D'autre part on a

$$|x_n| = |z_n - (cR_n + d)| \leq M\rho_n, \forall n \in \mathbb{N},$$

  donc $x \in T_1$, d'où F est surjective, alors F est un homéomorphisme de T dans S.

■

Lemme 2.1.9. *S définie dans le Lemme 2.1.8 est compact et convexe.*

Démonstration. De la même manière que la démonstration du Lemme 2.1.4, on peut montrer que T_1 est fermé et précompact.
En utilisant le Théorème 1.1.3 on trouve que T_1 est compact, comme $F(T_1) = S$ et d'après la Proposition 1.1.2 S est compact.

- Montrons que S est convexe.

Soient $x, y \in S$ et $\lambda \in [0,1]$, alors

$$|x_n - (cR_n + d)| \leq M\rho_n, \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.8}$$

$$|y_n - (cR_n + d)| \leq M\rho_n, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.9}$$

Donc

$$\begin{aligned}|\lambda x_n + (1-\lambda)y_n - (cR_n + d)| &= |\lambda(x_n - (cR_n + d)) + (1-\lambda)(y_n - (cR_n + d))| \\ &\leq \lambda|x_n - (cR_n + d)| + (1-\lambda)|(y_n - (cR_n + d)|.\end{aligned}$$

En utilisant (2.8) et (2.9) on obtient

$$|\lambda x_n + (1-\lambda)y_n - (cR_n + d)| \leq \lambda M\rho_n + (1-\lambda)M\rho_n = M\rho_n.$$

Donc $\lambda x + (1-\lambda)y \in S$ et S est convexe. ■

Théorème 2.1.2. *Supposons que f est une fonction uniformément continue et bornée et que les séries $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} R_n|a_n|$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} R_n|b_n|$ sont convergentes. Alors pour tout $c, d \in \mathbb{R}$ il existe une solution $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ de l'équation (2.1) telle que*

$$x_n = cR_n + d + o(1).$$

Démonstration. Comme dans la démonstration du Théorème 2.1.1, on considère l'application A_1 définie sur S par

$$\forall x \in S, \forall n \in \mathbb{N}, (A_1(x))_n = cR_n + d - \sum_{j=n}^{+\infty} u_j,$$

où $(u_j)_j$ est la suite définie par (2.3).
On a f est uniformément continue donc

$$\exists M > 1, f(t) < M, \forall t \in \mathbb{R},$$

alors

$$\begin{aligned}|(A_1(x))_n - (cR + d)| &= \left|\sum_{j=n}^{+\infty} u_j\right| \\ &\leq \sum_{j=n}^{+\infty} |u_j| \\ &\leq M\rho_n.\end{aligned}$$

D'où

$$\forall x \in S, A_1(x) \in S.$$

De la même manière que la démonstration du Lemme 2.1.7 on peut montrer que A_1 est continue.
En appliquant le théorème de point fixe de Schauder on trouve que

$$\exists x \in S, A_1(x) = x.$$

Maintenant montrons que ce point fixe est une solution de l'équation (2.1).
On a

$$x_n = cR_n + d - \sum_{j=n}^{+\infty} u_j, \ n \in \mathbb{N},$$

donc

$$\begin{aligned}\Delta x_{n-1} &= cR_n + d - \sum_{j=n}^{+\infty} u_j - cR_{n-1} - d + \sum_{j=n-1}^{+\infty} u_j \\ &= c(R_n - R_{n-1}) + u_{n-1}.\end{aligned}$$

Alors

$$\Delta(r_{n-1}\Delta x_{n-1}) = \Delta(r_{n-1}\left[c(R_n - R_{n-1}) + u_{n-1}\right]).$$

En utilisant la définition de R_n on trouve

$$\begin{aligned}\Delta(r_{n-1}\Delta x_{n-1}) &= \Delta\left(r_{n-1}\left(\frac{c}{r_{n-1}} + u_{n-1}\right)\right) \\ &= \Delta\left(c + r_{n-1}u_{n-1}\right) \\ &= r_n u_n - r_{n-1}u_{n-1}, \ car \ \Delta c = 0 \\ &= -a_n f(x_{n-k}) + b_n,\end{aligned}$$

d'où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ est une solution de l'équation (2.1) et on a

$$x_n - (cR_n + d) = -\sum_{j=n}^{+\infty} u_j.$$

En utilisant le Lemme 2.1.6 on obtient

$$\lim_{x\to+\infty} (x_n - (cR_n + d)) = 0,$$

donc

$$x_n = cR_n + d + o(1).$$

■

Théorème 2.1.3. *Supposons que les séries* $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$, $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|$ *sont convergentes et que* f *est une fonction bornée. Alors chaque solution* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ *de l'équation (2.1) satisfait les conditions suivantes*

1. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{R_n} = c$, *où* c *est une constante réelle .*
2. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = g \neq 0$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} \Delta x_n = d$, *où* d *est une constante réelle.*
3. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} \Delta x_n = 0$.

Démonstration. 1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ une solution de l'équation (2.1).

Tout d'abord montrons que la suite $(r_n\Delta x_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ est convergente.

Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $m > n$, alors de l'équation (2.1) on a

$$\Delta(r_{n-1}\Delta x_{n-1}) + a_n f(x_{n-k}) = b_n,\ n \in \mathbb{N}_1,$$

donc

$$\sum_{i=n+1}^{m} \Delta(r_{i-1}\Delta x_{i-1}) + \sum_{i=n+1}^{m} a_i f(x_{i-k}) = \sum_{i=n+1}^{m} b_i,\ n \in \mathbb{N}_1.$$

En utilisant (1.2) on obtient

$$r_m\Delta x_m - r_n\Delta x_n = \sum_{i=n+1}^{m} b_i - \sum_{i=n+1}^{m} a_i f(x_{i-k}),$$

alors

$$|r_m\Delta x_m - r_n\Delta x_n| < \sum_{i=n+1}^{m} |b_i| + M\sum_{i=n+1}^{m} |a_i|,$$

car f est bornée.

D'où la suite réelle $(r_n\Delta x_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ est une suite de Cauchy elle est donc convergente.

Soit $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n\Delta x_n = c,\ c \in \mathbb{R}$. En utilisant le Théorème 1.4.1 on trouve

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{R_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\Delta x_n}{\Delta R_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\Delta x_n}{R_{n+1} - R_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\Delta x_n}{\frac{1}{r_n}} = \lim_{n\to+\infty} r_n\Delta x_n = c.$$

2. Soit $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = g$. Comme $(r_n\Delta x_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ est une suite convergente. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} r_n\Delta x_n = c \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \Delta x_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{r_n\Delta x_n}{r_n} = \frac{c}{g} = d.$$

3. Soit $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = +\infty$, donc

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \Delta x_n &= \lim_{n\to+\infty} \frac{r_n\Delta x_n}{r_n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{r_n} \lim_{n\to+\infty} r_n\Delta x_n \\ &= 0 \times c \\ &= 0.\end{aligned}$$

$\blacksquare$

2.2 Etude de l'équation $\Delta^2 x_n = a_n\varphi(x_{n+k})$

Dans cette section on considère l'équation aux différences non linéaire suivante [3]

$$\Delta^2 x_n = a_n\varphi(x_{n+k}),\ n \in \mathbb{N}_1, \tag{2.10}$$

où $k \in \mathbb{N}, (a_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ est une suite numérique réelle et φ est une fonction réelle et Δ est l'opérateur défini par (1.1).

Lemme 2.2.1. *Soit* $r_n = \sum_{j=n}^{+\infty} a_j$. *Supposons que* $\sum_{n\geq 1} n|a_n|$ *est convergente, alors* $\sum_{n\geq 1} r_n$ *est absolument convergente et on a* $\sum_{n=1}^{+\infty} r_n = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} na_n &= a_1 + (a_2 + a_2) + (a_3 + a_3 + a_3) + (a_4 + a_4 + a_4 + a_4) + ... \\
&= (a_1 + a_2 + a_3 + ...) + (a_2 + a_3 + a_4 + ...) + (a_3 + a_4 + a_5 + ...) + ... \\
&= r_1 + r_2 + r_3 + ... \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} r_n.
\end{aligned}$$

Et comme $\sum_{n\geqslant 1} na_n$ est absolument convergente alors $\sum_{n\geqslant 1} r_n$ est aussi absolument convergente . $\blacksquare$

Théorème 2.2.1. *Supposons que* $\sum_{n\geqslant 1} na_n$ *est absolument convergente et que* $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est continue. Alors pour tout réel* c *et pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *il existe une solution* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ *de l'équation (2.10) telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = c.$$

Démonstration. Soient $c \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{N}_1$. De la continuité de φ sur $\mathbb{R}$ on trouve

$$\exists M > 0,\ |\varphi(t)| < M,\ \forall t \in [c - a, c + a].$$

Soit

$$\varrho_n = \sum_{j\geqslant n} |a_j|,\ n \in \mathbb{N}. \tag{2.11}$$

En utilisant le Lemme 2.2.1 on obtient que la série $\sum_{n\geqslant 1} \varrho_n$ est convergente.
On note par R_n la suite définie par

$$R_n = \sum_{j=n}^{+\infty} \varrho_j. \tag{2.12}$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} R_n = 0.$$

C'est-à-dire

$$\exists m \in \mathbb{N}, \quad MR_n < a, \quad \forall n \geqslant m.$$

Maintenant on considère le sous-ensemble

$$\Gamma = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}_1} \in l_\infty,\ x_1 = x_2 = \cdots = x_m = c \ \ et \ \ |x_n - c| \leq MR_n,\ \forall n \geqslant m\}.$$

De la même manière que la démonstration du Lemme 2.1.4, on peut montrer que Γ est convexe, fermé et compact.
D'autre part on a pour tout $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}_1} \in \Gamma$,

$$|\varphi(x_n)| < M,\ n \in \mathbb{N} \ \ car \ \ \Gamma \subset [c-a, c+a].$$

Alors la série $\sum_{j\geqslant 1} a_j\varphi(x_{j+k})$ est absolument convergente.
Soit

$$u_n = \sum_{j=n}^{+\infty} a_j\varphi(x_{j+k}),\ n \in \mathbb{N}.$$

Donc

$$|u_n| \leq \sum_{j=n}^{+\infty} |a_j| M = M\varrho_n. \tag{2.13}$$

En utilisant la convergence absolument de la série $\sum_{n\geq 1} \varrho_n$ on trouve que $\sum_{j\geq 1} u_j$ est absolument convergente.
Maintenant on définit la suite $\mathcal{A}(x)$ par

$$(\mathcal{A}(x))_n = \begin{cases} c, & n < m, \\ c + \sum_{j=n}^{+\infty} u_j, & n \geqslant m. \end{cases}$$

On a
Si $n \geqslant m$

$$|(\mathcal{A}(x))_n - c| = \left|\sum_{j=n}^{+\infty} u_j\right| \leq \sum_{j=n}^{+\infty} |u_j|.$$

De (2.12) et (2.13) on trouve

$$|(\mathcal{A}(x))_n - c| \leq M \sum_{j=n}^{+\infty} \varrho_j = MR_n.$$

D'où

$$(\mathcal{A}(x))_n \in \Gamma,\ \forall x \in \Gamma.$$

Donc on obtient l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\colon \Gamma &\to \Gamma \\ x &\to \mathcal{A}(x), \end{aligned}$$

et de la même manière que la démonstration du Lemme 2.1.7 on peut montrer que $\mathcal{A}$ est continue.
En appliquant le théorème de point fixe de Schauder on obtient qu'il existe $z \in \Gamma$ telle que $\mathcal{A}(z) = z$. Alors

$$z_n = c + \sum_{j=n}^{+\infty} v_j, \quad \forall n \geq m,$$

où

$$v_j = \sum_{i=j}^{+\infty} a_i \varphi(z_{i+k}),\ j \in \mathbb{N}.$$

Donc

$$\Delta z_n = c + \sum_{j=n+1}^{+\infty} v_j - c - \sum_{j=n}^{+\infty} v_j = -v_n.$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} \Delta^2 z_n &= -v_{n+1} + v_n \\ &= -\sum_{j=n+1}^{+\infty} a_j\varphi(z_{j+k}) + \sum_{j=n}^{+\infty} a_j\varphi(z_{j+k}) \\ &= a_n\varphi(z_{n+k}),\ \forall n \geqslant m. \end{aligned}$$

Comme la série $\sum\limits_{j=1}^{+\infty} v_j$ est convergente et $z_n = c + \sum\limits_{j=n}^{+\infty} v_j$.
Alors

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = c.$$

■

Remarque 2.2.1. *Soit $(z_n)_n$ une solution de l'équation (2.10), alors*

$$\begin{aligned}\Delta^2 z_n &= \Delta(z_{n+1} - z_n)\\ &= z_{n+2} - 2z_{n+1} + z_n\\ &= a_n\varphi(n+k).\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$z_n = 2z_{n+1} + a_n\varphi(z_{n+k}) - z_{n+2}.$$

Théorème 2.2.2. *Supposons que la série $\sum\limits_{n\geq 1} na_n$ est absolument convergente et $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée et uniformément continue. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, il existe une solution $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ de l'équation (2.1) telle que*

$$x_n = cn + o(1).$$

Démonstration. Soit $c \in \mathbb{R}$. De la continuité de φ on trouve

$$\exists M > 0, \quad \varphi(t) < M, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Soient l l'espace des suites réelles et $(\varrho_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ la suite définie par (2.11) et soit

$$\mathit{\Gamma}_1 = \{x \in l\colon |x_n| \leq M\varrho_n, \ \forall n \in \mathbb{N}\}$$

$$S_1 = \{x \in l_\infty\colon |x_n - nc| \leq M\varrho_n, \ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

On considère l'application $F\colon \mathit{\Gamma}_1 \to S_1$ définie par

$$\forall x \in \mathit{\Gamma}_1, \quad (F(x))_n = x_n + nc.$$

De la même manière que la démonstration du Lemme 2.1.9 on peut montrer que $\mathit{\Gamma}_1$ est compact et convexe de l_∞,
et de la même manière que la démonstration du Lemme 2.1.8 on peut montrer que $\mathit{\Gamma}_1$ et S_1 sont homéomorphes.
Par conséquent, selon le théorème de point fixe de Schauder, chaque application continue $\mathrm{A}\colon S_1 \to S_1$ a un point fixe.
Maintenant pour tous $x \in S_1$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit la suite $\mathrm{A}_1(x)$ par

$$(\mathrm{A}_1(x))_n = cn + \sum_{j=n}^{+\infty} u_j.$$

De la même manière que la démonstration du Lemme 2.1.7 on peut montrer que $\mathrm{A}(x) \in S_1$ et A est continue.
Donc il existe $x \in S_1$ telle que $\mathrm{A}(x) = x$.
Alors

$$x_n = nc + \sum_{j=n}^{+\infty} v_j,\ \ n \in \mathbb{N},$$

donc

$$\begin{aligned}\Delta x_n &= (n+1)c + \sum_{j=n+1}^{+\infty} v_j - nc - \sum_{j=n}^{+\infty} v_j \\ &= c - v_n.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\Delta^2 x_n &= c - v_{n+1} - c + v_n \\ &= v_n - v_{n+1} \\ &= \sum_{j=n}^{+\infty} a_j\varphi(x_{j+k}) - \sum_{j=n+1}^{+\infty} a_j\varphi(x_{j+k}) \\ &= a_n\varphi(x_{n+k}),\end{aligned}$$

d'où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ est une solution de l'équation (2.10) et comme la série $\sum\limits_{j=1}^{+\infty} v_j$ est convergente et

$$x_n = nc + \sum_{j=n}^{+\infty} v_j.$$

Alors

$$\lim_{x\to+\infty} x_n = nc + o(1).$$

■

Théorème 2.2.3. *Supposons que* $\sum\limits_{n\geqslant 1} |a_n| < \infty$ *et que* $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction bornée. Si* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ *est une solution de l'équation (2.10), alors la suite* $(\frac{x_n}{n})_{n\in\mathbb{N}_1}$ *est convergente.*

Démonstration. De (2.10) on a, $\forall m > n$

$$\Delta x_m - \Delta x_n = \sum_{j=n}^{m-1} \Delta^2 x_j = \sum_{j=n}^{m-1} a_j\varphi(x_{j+k}).$$

Donc

$$|\Delta x_m - \Delta x_n| \leq M \sum_{j=n}^{m-1} |a_j|.$$

Alors la suite $(\Delta x_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ est convergente et d'après le Théorème 1.4.1 on trouve

$$\lim_{n\to+\infty} \Delta x_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\Delta x_n}{\Delta n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n}.$$

■

Exemple 2.2.1. *Soit l'équation*

$$\Delta^2 x_n = \frac{4}{9} x_{n+2}, \ n \in \mathbb{N}^*$$

On a la suite $(x_n)_n = (3^n)_n$ est une solution de l'équation (2.10)
et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{n} = +\infty.$$

Ici $\varphi(t) = \frac{4}{9}t$ et cette fonction n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire on ne peut pas appliquer le Théorème 2.2.3.

Théorème 2.2.4. *Si $\varphi\colon \mathbb{R} \to [\varepsilon, +\infty)$ est une fonction non décroissante avec $\varepsilon > 0$, $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et si $\sum_{n\geq 1} a_n = +\infty$. Alors chaque solution (x_n) de l'équation (2.10) vérifie*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n} = +\infty.$$

Démonstration. Soit $(x_n)_n$ une solution de l'équation (2.10)
On a

$$\Delta(\Delta x_n) = \Delta^2 x_n = a_n \varphi(x_{n+k}) > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Donc $(\Delta x_n)_n$ est une suite croissante.
De l'équation (2.10) on trouve

$$\sum_{j=1}^{n-1} \Delta^2 x_j = \Delta x_n - \Delta x_1 = \sum_{j=1}^{n-1} a_j \varphi(x_{j+k})$$

donc

$$\Delta x_n = \Delta x_1 + \sum_{j=1}^{n-1} a_j \varphi(x_{j+k}).$$

Mais

$$\varphi(x_n) \geqslant \varepsilon, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

alors

$$\Delta x_n \geqslant \Delta x_1 + \varepsilon \sum_{j=1}^{n-1} a_j.$$

D'autre part il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$\Delta x_1 + \varepsilon \sum_{j=1}^{n-1} a_j > 0,\ \forall n \geqslant m \quad car \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty,$$

d'où

$$\Delta x_n > 0,\ \forall n \geqslant m.$$

Ce qui donne $(x_n)_n$ est croissante pour tout $n \geqslant m$.

Soit $n \geqslant m$. Alors

$$\begin{aligned}
\Delta x_n &= \Delta x_1 + \sum_{j=1}^{n-1} a_j\varphi(x_{j+k}) \\
&= \Delta x_1 + \sum_{j=1}^{m-1} a_j\varphi(x_{j+k}) + \sum_{j=m}^{n-1} a_j\varphi(x_{j+k}) \\
&\geq \Delta x_1 + \sum_{j=1}^{m-1} a_j\varphi(x_{j+k}) + \varphi(x_{m+k}) \sum_{j=m}^{n-1} a_j.
\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \Delta x_n = +\infty$$

et d'après le Théorème 1.4.1 on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \Delta x_n = +\infty.$$

■

Exemple 2.2.2. *Soit*

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ t^2, & t > 0. \end{cases}$$

On a la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_1} = (2^{-n})$ *est une solution de l'équation*

$$\Delta^2 x_n = 2^{n-2}\varphi(x_n).$$

Mais

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n} = 0.$$

Toutes les conditions du Théorème 2.2.4 sont satisfaites sauf $\varepsilon > 0$.

Chapitre 3

Existence des solutions périodique d'une équation aux différences non linéaire dans un espace de Banach

Dans ce chapitre nous allons étudier l'existence et la périodicité des solutions de l'équation aux différences non linéaire suivante [6]

$$\Delta(r_n \Delta x_n) = a_n f(x_{n+1}), \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.1}$$

où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites réelles et $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Théorème 3.0.1. *Soit $p \in \mathbb{N}_2$. Supposons que*

$$(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \textit{est p-périodique}, \tag{3.2}$$

$$\sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{r_i} = 0, \tag{3.3}$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} |a_i| < \infty \tag{3.4}$$

et

$$\exists M \in \mathbb{R}_+^*, \ |f(x)| \leq M|x|, \ \forall x \in \mathbb{R}, \tag{3.5}$$

sont satisfaites. Alors il existe une solution asymptotiquement p-périodique de l'équation (3.1) avec

$$u_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{r_j} \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = 0$$

Démonstration. De (3.2) on trouve que la suite $(\frac{1}{r_n})$ est p-périodique.
Soit la suite définie par

$$\xi_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{r_i}, \quad n \in \mathbb{N}_1.$$

Alors

$$\begin{aligned} \xi_{n+p} &= \sum_{i=0}^{n+p-1} \frac{1}{r_i} \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{r_i} + \sum_{i=p}^{n+p-1} \frac{1}{r_i}. \end{aligned}$$

En utilisant (3.3) on obtient

$$\begin{aligned} \xi_{n+p} &= \sum_{i=p}^{n+p-1} \frac{1}{r_i} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{r_{i+p}} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{r_i} \qquad car \quad (r_n)_n \text{ est p-périodique} \\ &= \xi_n, \end{aligned}$$

d'où $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}_1}$ est p-périodique.
Soit

$$R_n = \left| \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{r_i} \right|, \qquad R = \sup_n R_n,$$
$$\alpha_0 = \sum_{i=0}^{+\infty} |a_i|, \qquad \alpha_n = (R + 2MR\alpha_0) \sum_{i=n}^{+\infty} |a_i|.$$

De la convergence de la série $\sum\limits_{i \geqslant 0} |a_i|$ on trouve que

$$\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = 0.$$

C'est-à-dire $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\alpha_n \leq \alpha_0, \quad \forall n \geqslant n_1. \tag{3.6}$$

Soient $\mathrm{N} = \{n_1 + 1, n_1 + 2, ...\}$ et

$$B = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l_\infty, \quad |x_n| \leq R + 2MR\alpha_0, \; n \in \mathrm{N} \right\}.$$

Comme dans la démonstration du Lemme 2.1.4 on peut montrer facilement que B est un sous-ensemble non vide, borné, fermé et convexe de l_∞.
Maintenant on définit l'application $\mathrm{H}\colon B \to l_\infty$ par

$$\forall (x_n)_{n\in\mathrm{N}} \in B,\quad (\mathrm{H}(x))_n = \sum_{i=n_1}^{n-1} \frac{1}{r_i} - \sum_{i=n_1}^{n-1} \frac{1}{r_i} \sum_{i=n}^{+\infty} a_i f(x_{i+1}) + \sum_{i=n}^{+\infty} a_i f(x_{i+1}) \sum_{j=n_1}^{i} \frac{1}{r_j},\ n \in \mathrm{N} \tag{3.7}$$

1. Tout d'abord, montrons que $\mathrm{H}(B) \subset B$.
   Soit $x \in B$. De (3.4), (3.5) et (3.6) on a
$$\begin{aligned}
|(\mathrm{H}(x))_n| &\le \left|\sum_{i=n_1}^{n-1} \frac{1}{r_i}\right| + \left|\sum_{i=n_1}^{n-1} \frac{1}{r_i}\right| \sum_{i=n}^{+\infty} |a_i||f(x_{i+1})| + \sum_{i=n}^{+\infty} |a_i||f(x_{i+1})| \left|\sum_{j=n_1}^{i} \frac{1}{r_j}\right| \\
&\le R + 2RM \sum_{i=n}^{+\infty} |a_i||x_{i+1}| \\
&\le R + 2RM(R + 2MR\alpha_0) \sum_{i=n}^{+\infty} |a_i| \\
&= R + 2RM\alpha_n \\
&\le R + 2RM\alpha_0.
\end{aligned}$$
   D'où
$$\mathrm{H}(x) \in B \quad et \quad \mathrm{H}(B) \subset B$$

2. Montrons que H est continue.
   Soit l'intervalle
$$I = [-R - 2RM\alpha_0, R + 2RM\alpha_0].$$
   Comme f est continue donc elle est uniformément continue sur I.
   Soit $(x^m)_{m\in\mathrm{N}} \subset B$ une suite telle que
$$\lim_{m\to+\infty} \|x^m - x\|_\infty = 0.$$
   Alors
$$\lim_{m\to+\infty} \sup_{n\in\mathrm{N}} |x^m_{n+1} - x_{n+1}| = 0,$$
   avec
$$x^m = (x^m_n)_{n\in\mathrm{N}},\ x = (x_n)_n.$$
   Mais B est fermé donc $x \in B$.
   Alors
$$x^m_n, x_n \in I,\ \forall n \in \mathrm{N}.$$

En utilisant la continuité uniforme de f sur I on obtient

$$\lim_{m\to+\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|(f(x_{n+1}^m)-f(x_{n+1}))\right|=0.$$

D'autre part on a pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}|(\mathrm{H}(x^m))_n-(\mathrm{H}(x))_n| &\leq 2\left|\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{r_i}\right|\sum_{j=n}^{+\infty}|a_j|\left|(f(x_{j+1}^m)-f(x_{j+1}))\right|\\ &\leq 2R\alpha_0\sup_{j\geqslant n}\left|(f(x_{j+1}^m)-f(x_{j+1}))\right|\\ &\leq 2R\alpha_0\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|f(x_{n+1}^m)-f(x_{n+1})\right|.\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{m\to+\infty}\|\mathrm{H}(x^m)-\mathrm{H}(x)\|_\infty=0.$$

C'est-à-dire H est continue.

3. Maintenant on va déterminer une mesure de non-compacité de B et $\mathrm{H}(B)$.

   De la définition de B on trouve

$$diam B_n=\sup_{x,y\in B}|x_n-y_n|=4RM\alpha_0+2R$$

et

$$\mu(B)=\lim_{n\to+\infty}\sup diam B_n=4RM\alpha_0+2R.$$

De plus on a

$$diam\mathrm{H}(B_n)=\sup_{x,y\in H(B)}|x_n-y_n|\leq 4RM\alpha_n$$

et

$$\mu(\mathrm{H}(B))=\lim_{n\to+\infty}\sup diam\mathrm{H}(B_n)=0.$$

Alors pour tout $k\in[0,1[$ on a

$$\mu(\mathrm{H}(B))\leq k\mu(B)$$

et pour tout $V\subset B$ on a

$$\mu(\mathrm{H}(V))\leq k\mu(V).$$

En appliquant le théorème de point fixe de Darbo on trouve que H admet un point fixe dans B, c'est-à-dire

$$\exists x\in B,\ x=(x_n)_n,\ x_n=(\mathrm{H}(x))_n,\quad\forall n\in\mathbb{N}.$$

4. Montrons que ce point fixe est asymptotiquement p-périodique.

   On a

$$x_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{r_i} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{r_i} \sum_{i=n}^{+\infty} a_i f(x_{i+1}) + \sum_{i=n}^{+\infty} a_i f(x_{i+1}) \sum_{j=0}^{i} \frac{1}{r_j}, \ n \in \mathrm{N}. \tag{3.8}$$

   On pose

$$u_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{r_i}$$

   et

$$v_n = \sum_{i=n}^{+\infty} a_i f(x_{i+1}) \sum_{j=0}^{i} \frac{1}{r_j} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{r_i} \sum_{i=n}^{+\infty} a_i f(x_{i+1}).$$

   D'après (3.2), (u_n) est p-périodique et de (3.4) on a

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = 0,$$

   donc $(x_n)_n$ est asymptotiquement p-périodique.

5. Pour compléter la démonstration du Théorème 3.0.1, il suffit de vérifier que la suite $(x_n)_n$ donnée par (3.8) est une solution de l'équation (3.1).

   En utilisant (3.8) et les propriétés de Δ on trouve

$$\Delta x_n = \frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_n} \sum_{j=n}^{+\infty} a_j f(x_{j+1}),$$

   donc

$$r_n \Delta x_n = 1 - \sum_{j=n}^{+\infty} a_j f(x_{j+1}),$$

   d'où

$$\Delta(r_n \Delta x_n) = a_n f(x_{n+1}).$$

   Alors $(x_n)_n$ est une solution de l'équation (3.1).

$\blacksquare$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'existence, la stabilité et la périodicité de certaines équations aux différences non linéaires dans des espaces de Banach.
Tout d'abord, nous avons présenté des notions préliminaires utiles pour comprendre le reste de ce mémoire.

Ensuite, nous avons appliqué le théorème de point fixe de Schauder pour étudier l'existence et la stabilité de deux équations aux différences non linéaires dans un espace de Banach [5], [3].

Enfin, nous avons présenté un résultat d'existence et de périodicité des solutions d'une équation aux différences non linéaire [6]. Ce résultat est obtenu à l'aide du théorème de point fixe de Darbo.

Bibliographie

[1] R.P. Agarwal, *Difference Equations and Inequalities*. Marcel Dekker, New York, 1992.

[2] J. Banas, K. Goebel, *Measures of noncompactness in Banch spaces*. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, vol. 60. Marcel Dekker. Inc. New York, 1980.

[3] A. Drozdowicz, J. Popenda, *Asymptotic behavior of the solutions of the second order difference,* Amer. Math. Soc, 99(1) (1987) 135-140.

[4] L. Meziani, *Introduction à l'analyse mathématique Topologie Générale*. Batna University Press, 1996.

[5] M. Migda, *Asymptotic behaviour of solutions of nonlinear delay difference equations*, Fasciculi Math, 31(2001) 57-62.

[6] M. Migda, J. Migda, *Asymptotic properties of the solutions of the second order difference equation*. Archivum Mathematicum, 34(4)(1998) 467-476.

[7] A. Samadi, *Applications of measure of noncompactess to coupled fixed points and systems of integral equations*. Miskolc mathematical notes, 19(1)2018 537-553.

[8] E. Schmeidel, Z. Zbąszyniak, *An application of Darbos fixed point theorem in the investigation of periodicity of solutions of difference equations*, Comp. Math. App. 64(2012) 2185-2191.

[9] H. Zou, *Fixed point theory and Elliptic Boundary Valy Problems. Hand book of Differential Equations.* Stationary Partial Differential, 6(2008) 503-583.