République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de La Recherche Scientifique
Université Mohamed SeddikBenyahia –Jijel

Faculté des sciences Exacte et Informatique

Département de Mathématique

N° d'ordre : …………….
N° de séries :…………...

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Equation aux dérivées partielles et applications.

THEME

Sur l'unicité de certains types d'inclusions différentielles

Présenté par :

-Tebbakh Djamila.

Devant le jury :

Président : Pr. Haddad Tahar.

Examinatrice : Dr. Lounis Sabrina.

Encadreur : Dr. Arroud Chems Eddine.

Promotion : **2019/2020**

Remerciement

Je tient à exprimer ma reconnaissance et gratitude à mon encadreur Mr ARROUD CH. E. pour avoir accepté le diriger ce travail ainsi que ses conseils avec beaucoup de patience et d'encouragements.

Je remercie les membres du jury qui ont accepté de juger mon travail, Mr HADDAD .T qui me fait l'honneur de présider ce jury . LOUNIS . S, pour avoir d'accepté d'examiné ce travail.

Je tiens à remercier tous ceux qui se sont impliqués dans ce travail, directement.

MERCI A TOUT

Dédicace

Je remercie dieu tout puissant de m'avoir aidé, et éclairer le chemin pour achever mon travail et mes études.

A mon père ALAOUA qui a souhaité vivre pour longtemps juste pour nous voir qu'est-ce que nous allons devenir.

A celle qui m'a transmis la vie, l'amour, le courage, a toi chère maman ZELIKHA toutes mes joies, mon amour reconnaissance.

Je remercie mes sœurs et mes frères surtout FATEH.

Et tout famille de TEBBAKH.

Et mon fiancé LATRACHE MOHAMED AMINE et sa famille.

A mes chères amies de collège.

Merci a tout

Résumé

Dans ce travail, nous étudions le problème bien posé pour une classe des inclusions différentielle gouverné par le cê normal , Ainsi,nous , nous étudions l'unicité de solution pour le problème gouverné par un opérateur maximal monotone suivant ;

$$\begin{cases} u'(t) \in A(u(t)) & \text{p.p } t \in [0,T], \\ u(0) = \epsilon \end{cases}$$

où $A(.)$ est un opérateur maximal monotone.

Abstract

In this work , we study for a class of differential inclusion gouverned by a normal cône , Also, we stuied the uniqueness of solution for this problem gouverned by maximun monotone operator ;

$$\begin{cases} u'(t) \in A(u(t)) & \text{p.p } t \in [0,T], \\ u(0) = \epsilon \end{cases}$$

With $A(.)$ be a maximal monotone operator.

Table des matières

Introduction générale

La théorie de l'analyse non lisse est aujourd'hui bien connue. Cette théorie a été introduite dans les années quarante pour l'étude des systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires et des problèmes issus de la mécanique [5]. Récemment, elle est devenue une des méthodes importantes pour l'étude des inégalités variationnelles d'évolution, principalement celles gouvernées par le cône normal.

Dans ce mémoire, nous intéressons au caractère bien posé pour une classe d'inégalité variationnelles d'évolution gouvernées par le cône normal. Ainsi, nous étudions la propriété d'unicité pour un problème d'évolution gouverné par un opérateur maximal monotone.

Ce mémoire est réparti sur l'introduction et trois chapitres. Dans le premier chapitre, nous avons donnés des notions de base que nous avons utilisés tout au long de ce travail.

Dans le deuxième chapitre, nous avons étudier l'existence et l'unicité de la solution pour l'inégalité variationnelle d'évolution de type processus de rafle suivante [8]

$$\begin{cases} -u'(t) \in N_{C(t)}(u(t)) \qquad \text{p.p } t \in [0,T], \\ u(0) = u_0 \in C(0). \end{cases}$$

Ensuite on va étudie l'unicité de la solution pour le processus de rafle perturbé

$$\begin{cases} -u'(t) \in N_{C(t)}(u(t)) + f(u(t)) & \text{p.p } t \in [0,T], \\ u(0) = u_0 \in C(0). \end{cases}$$

Dans le dernier chapitre, nous avons étudier l'unicité de la solution pour cette inclusion différentiable gouverné par un opérateur maximal monotone

$$\begin{cases} u'(t) \in A(u(t)) \\ u(0) = \epsilon \in \Omega. \end{cases}$$

Chapitre 1

Concepts de base et résultats préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons des notions de base de l'analyse convexe, quelques résultats fondamentaux sur les multifonctions et des théorèmes principaux concernant la convergence et la compacité [2].

1.1 Notations

Soit H un espace de Hilbert réel séparable muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et de la norme associée $\|\cdot\|$. Nous noterons par $B_\rho(resp.B_\rho(u)$, $\overline{B}_\rho$ et $\overline{B}_\rho(u))$ la boule unité ouverte (respect . de centre $u \in H$, fermée et fermée de centre u) et de rayon $\rho > 0$ dans H.

1.2 Espace connecté

Définition 1.1 *:*
Un espace topologique X est dit connecté si X ne peut pas être divisée en deux ensembles non vides disjoint fermé.

Exemple 1.1 *:*
L'intervalle fermé $[0, 2]$ dans la norme topologique de sous-espace est connecté.

1.3 Ensembles convexes

Définition 1.2 *:*
Un sous ensemble C de H est dit ensemble convexe si :

$$\forall u, v \in C : \lambda u + (1-\lambda) v \in C ; \forall \lambda \in [0,1] .$$

Proposition 1.1 *:*
1) *Si C est convexe ,alors son intérieur int C et son adhérence $\overline{C}$ le sont aussi.*
2) *L'intersection quelconque d'ensembles convexes est convexe.*
3) *L'union d'ensembles convexes n'est pas généralement convexe.*

Nous appelons enveloppe convexe (respectivement. enveloppe convexe fermé) de C, et on le note $co(C)$ (respectivement. $\overline{co}(C)$), le plus petit ensemble convexe (respectivement. ensemble convexe fermé) contenant C (respectivement le plus petit ensemble convexe fermé contenant C).

Remarque 1.1 *:*
En général, $co(C)$ n'est pas un ensemble fermé. De plus, si C est convexe alors $co(C) = C$ est réciproquement D'autre part, si C est borné (respectivement. compact) alors $co(C)$ est borné (respectivement. compact).

1.4 Fonctions convexes

Nous considérons la fonction φ telle que $\varphi : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Nous appelons épigraphe de la fonction φ, l'ensemble noté par :

$$epi(\varphi) = \{(u, \lambda) \in H \times \mathbb{R} / \varphi(u) \leqslant \lambda\} .$$

Nous notons par

$$dom(\varphi) = \{u \in H / \varphi(u) < +\infty\}$$

le domaine de la fonction φ. Si $dom\,(\varphi) \neq \emptyset$ alors la fonction φ est dite propre.

La fonction φ est dite semi-continue inférieurement (s.c.i) dans H si et seulement si pour tout $u_o \in H$ nous avons

$$\varphi(u_0) \leqslant \liminf_{u \to u_0} \varphi(u).$$

Autrement dit, la fonction φ est s.c.i si et seulement si son épigraphe est un fermé de H.

De plus, la fonction φ est dite semi-continue supérieurement (s.c.s)si $(-\varphi)$ est s.c.i.

Exemple 1.2 *:*

(i) Toute fonction continue est s.c.i.

(ii) La fonction φ est continue si et seulement si φ et $-\varphi$ sont s.c.i.

Définition 1.3 *:*

La fonction φ est dite convexe si pour tout $u, v \in H$ avec $\varphi(u) < +\infty$ est $\varphi(v) < +\infty$, nous avons

$$\varphi\left(\lambda u + (1-\lambda)\, v\right) \leqslant \lambda\varphi(u) + (1-\lambda)\,\varphi(v); \forall \lambda \in [0,1]\,.$$

La fonction φ est dite strictement convexe si l'inégalité ci-dessus est stricte.

Remarquons qu'une fonction est convexe si son épigraphe est une partie convexe de $H \times \mathbb{R}$.

Définition 1.4 *:*

Considérons la fonction indicatrice d'un convexe C de H définie par :

$$\delta\left(.,C\right) = \begin{cases} 0 & si \;\; u \in C \\ +\infty & sinon. \end{cases}$$

La fonction $\delta\left(.,C\right)$ vérifie les propriétés suivantes :

1. $\delta\left(.,C\right)$ est propre.

2. $epi\delta\left(.,C\right) = C \times \mathbb{R}$.

3. $\delta\left(.,C\right)$ est une fonction s.c.i si et seulement si C est fermé.

Définition 1.5 *:*

Soit A un sous ensemble de H. La fonction support de A, notée par $\delta^*\left(.,A\right)$, est définie par :

$$\delta^*\left(\xi, A\right) = \sup_{x \in A} \langle \xi, x \rangle\,; \forall \xi \in H.$$

1.5 Fonction non-expansive

Définition 1.6 *:*
Soient $(E, \|\cdot\|)$ *un espace normé ,* $\mathbb{P}$ *un fermé de* E *et* $f : \mathbb{P} \longrightarrow E$ *une application (non nécessairement linéaire).*
. On dit que f *est non-expansive si :*

$$\forall (u, v) \in \mathbb{P} \times \mathbb{P} : \|f(u) - f(v)\| \leq \|u - v\|.$$

.Si l'espace E *est un espace de Hilbert , on dit que* f *est fermement non-expansive si :*

$$\forall (u, v) \in \mathbb{P} \times \mathbb{P} \quad \langle f(u) - f(v), u - v\rangle \geq \|f(u) - f(v)\|^2.$$

Une application non-expansive est une application 1-Lipschitzienne et elle n'a pas nécessairement des points fixes.

1.6 Sous différentiel et cône normal

Soit $f : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction semi-continue inférieurement (s.c.i), et soit x un point de H où f est finie.

Définition 1.7 *:*
- Le sous différentiel de f *au sens d'analyse convexe au point* x *est définie par :*

$$\partial f(x) = \{\xi \in H \ : \ \langle \xi, h - x\rangle \leq f(h) - f(x), \forall h \in H\}.$$

Exemple 1.3 *Considérons la fonction*

$$\begin{aligned} f : \ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & u \longmapsto f(u) = |u|. \end{aligned}$$

$\partial f(0) = [-1, 1]$.*En effet,*

$$\begin{aligned} \partial f(0) &= \{v \in \mathbb{R} : f(u) \geq f(0) + \langle v, u\rangle \quad \forall u \in \mathbb{R}\} \\ &= \{v \in \mathbb{R} : |u| \geq uv \ \ \forall u \in \mathbb{R}\} \\ &= \{v \in \mathbb{R} : uv \leq u, \forall u \geq 0\} \cap \{v \in \mathbb{R} : uv \leq -u, \forall u \leq 0\} \cap \mathbb{R} \\ &= \{v \in \mathbb{R} : v \leq 1\} \cap \{v \in \mathbb{R} : v \geq -1\} \cap \mathbb{R} \\ &= [-1, 1]. \end{aligned}$$

Définition 1.8 *: Soit f une fonction convexe et soit $u \in dom\,(f)$ .On dit que $\xi \in H$ est un sous-gradient de f en x :*

$$\langle \xi, h - x \rangle \leq f(h) - f(u), \forall h \in H \ .$$

où

$$f'(u, h) \geq \langle \xi, h \rangle \, , \forall h \in H.$$

Définition 1.9 *:*

Soit A un sous ensemble convexe fermé de H .

La projection de $u \in H$ sur A,et le point v définie par

$$v = Proj_A(u) \Leftrightarrow v \in A \ \text{et} \ \langle u - v, v - a \rangle \geq 0, \ \forall a \in A \Leftrightarrow d(u, A) = \|u - v\| \, .$$

avec

$$d(u, A) := \inf_{a \in A} \|u - a\| \, ,$$

la distance du point u à l'ensemble A.

Définition 1.10 *:*

Le cône normal de A au point v (il s'agit du cône des normales sortantes),est définie par

$$N_A\,(v) := \{\xi \in H; \langle \xi, z - v \rangle \leqslant 0, \forall z \in A\} \, .$$

or

$$N_A\,(v) := \partial \delta\,(v, A) \, .$$

or

$$\xi \in N_A(v) \Leftrightarrow v \in A \ \text{et} \ \langle \xi, v \rangle = \delta^*(\xi, A) \Leftrightarrow v \in A \ \text{et}\, \xi \in \partial \delta(v, A),$$

et nous avons

$$v = Proj_A(u) \Leftrightarrow u - v \in N_A(v).$$

Exemple 1.4 $\mathbb{H} = \mathbb{R}^2; \overline{u} = (0, 0); C = [0, 1] \times [0, 1]$

$N_{[0,1]\times[0,1]}(0, 0) =]-\infty, 0]\times]-\infty, 0]$

1.7 Distance du Hausdorff

Définition 1.11 *: Soient A, B deux sous ensembles d'un espace métrique (V, d), la distance entre A et B est défini par*

$$e(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B),$$

avec

$$d(a, B) = \inf_{b \in B} d(a, b),$$

et la distance de Hausdorff entre A et B est définie par

$$\mathcal{H}(A, B) = \max\{e(A, B), e(B, A)\}.$$

Voici quelques propriétés élémentaires :

1) $e(A, \varnothing) = \infty$ si $A \neq \varnothing$,

2) $e(\varnothing, B) = 0$,

3) $e(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \subset \overline{B}$,

4) $e(A, B) \leq e(A, C) + e(C, B)$, C est un sous ensemble de X,

5) $\mathcal{H}(A, B) = 0 \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$,

6) $\mathcal{H}(A, B) \leq \mathcal{H}(A, C) + \mathcal{H}(C, B)$.

1.8 Multifonctions et continuité

Définition 1.12 *: Soient U et V deux ensembles non vides. Une multifonction F définie sur U à valeurs dans V est une fonction qui à chaque élément $u \in U$ associe un sous ensemble $F(u)$ de V, on note $F : U \rightrightarrows V$ ou $F : U \to P(V)$, ($P(V)$ est l'ensemble des parties de V).*

Le domaine, le graphe et l'image de la multifonction $F : U \rightrightarrows V$ sont donnés par

$$D(F) := Dom(F) = \{u \in U / F(u) \neq \varnothing\},$$

$$gph(F) = \{(u, v) \in U \times V / \ u \in D(F), v \in F(x)\},$$

$$Im(F) = \bigcup_{u \in D(F)} F(u).$$

Définition 1.13 *:*

Soient U *et* V *deux espaces métriques et* $F : U \rightrightarrows V$*. On dit que* F *est continue (respectivement. lipschitzienne de rapport* $\lambda > 0$*), si pour tout* $u_1, u_2 \in U$ *nous avons*

$$\lim_{u_{?1} \to x} \mathcal{H}(F(u), F(_2)) = 0$$

(respectivement. pour tous $u_1, u_2 \in U$ *nous avons*

$$\mathcal{H}(F(u_1), F(u_2)) \leq \lambda d_U(u_2)$$

$\mathcal{H}$ *est la distance de Hausdorff .*

Rappelons la définition d'une fonction absolument continue.

Définition 1.14 *On dit qu'une fonction* $f : [a, b] \to H$ *est absolument continue si* $\forall \varepsilon > 0$*,* $\exists \delta > 0$ *tel que pour toute partition dénombrable de* $[a, b]$ *par des intervalles disjoints* $[a_k, b_k]$ *vérifiant*

$$\sum_k (b_k - a_k) < \delta,$$

nous avons

$$\sum_k \|f(b_k) - f(a_k)\| < \varepsilon$$

Théorème 1.1 *Une fonction* $f : [a, b] \to H$ *est absolument continue si et seulement si elle est intégrale de sa dérivée, c'est à dire*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b \dot{f}(t)dt.$$

On voit bien qu'une fonction absolument continue est continue par contre la réciproque est fausse.

1.9 Le sous-différentiel comme opérateur multivoque

Après avoir donné la définition et les propriétés d'une multifonction, nous remarquons que, pour une fonction $\varphi : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ propre, convexe et s.c.i, la correspondance :

$$\varphi : \quad H \longrightarrow 2^H$$

$$u \longmapsto \partial\varphi\,(u)$$

est une multifonction qui vérifie la définition 1.12. Par suite nous obtenons que le domaine de $\partial\varphi$ est donné par :

$$D(\partial\varphi) = \{u \in H / \partial\varphi(u) \neq \emptyset\}.$$

D'autre part, l'image de $\partial\varphi$ est défini par :

$$Im(\partial\varphi) = \bigcup_{u\in H} \partial\varphi(u).$$

De plus, nous avons $D(\partial\varphi) \subset dom(\varphi)$.

1.9.1 Notion d'opérateur monotone

Définition 1.15 *:*
L'opérateur multivoque $F : H \longrightarrow 2^H$ est dit monotone si

$$\forall u, v \in D(F); \forall u_1 \in F(u); \forall v_1 \in F(v) : \langle v_1 - u_1, v - u\rangle \geqslant 0.$$

Exemple 1.5 *:*
Soit $\varphi : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, propre et convexe. Alors $\partial\varphi$ est monotone. En effet, si $u_1 \in \partial\varphi(u)$ et $v_1 \in \partial\varphi(v)$, on a en particulier

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geqslant \langle u_1, v - u\rangle$$

et

$$\varphi(u) - \varphi(v) \geqslant \langle v_1, u - v\rangle$$

d'où par l'addition

$$\langle v_1 - u_1, v - u\rangle \geqslant 0.$$

1.9.2 Opérateur maximal monotone

L'ensemble des opérateurs monotones est inductif pour l'inclusion des graphes , ce qui justifie la définition suivante :

Définition 1.16 *:*
On dit qu'un opérateur $F : H \longrightarrow 2^H$ est maximal monotone s'il est monotone et s'il n'existe pas d'opérateur monotone $G : H \longrightarrow 2^H$ tel que $gph(F)$ est strictement inclue dans $gph(G)$.

La caractérisation suivante est fondamentale dans l'étude des opérateurs maximaux monotones .

Proposition 1.2 *:[3]*
Soit $F : H \longrightarrow 2^H$ *. Il y a équivalence entre les deux propriétés suivantes :*
(i) F *est maximal monotone .*
(ii) F *est monotone et* $Im(I + F) = H$ *.*

1.10 Mesure et dimension de Hausdorff

1.10.1 Diamètre

Définition 1.17 *: Le diamètre d'un cercle (ou d'un disque)est un segment reliant deux points de ce cercle(disque) en passant par son centre.*

1.10.2 Un pavé

Définition 1.18 *: Un pavé de* $\mathbb{R}^n$ *est un produit de* n *intervalles réels bornés .Si ses* n *intervalles sont tous fermés (respectivement.ouverts) le pavé est un fermé (respectivement.ouverts) .Si ses* n *intervalles sont identique , le pavé s'appelle un n-cube.*

1.10.3 Mesure extérieur

Définition 1.19 *: On commence par rappeler la définition d'une mesure extérieur sur un ensemble quelconque* $\mathbb{E}$ *:il s'agit d'une application* μ *de de*$P(E)$ *dans* $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ *vérifiant*
$-\mu(\varnothing) = 0,$
$-\mu(A) \leq \mu(B)$ *si* $A \subset B \subset E$ *(croissance).*
$-\mu(\cup A_n) \leq \sum_n \mu(A_n) \quad si \quad \forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset \mathbb{E}$

1.10.4 Mesure de Lebesgue

Définition 1.20 *: On définit une mesure de Lebesgue d-dimensionnelle* λ_d *sur* $\mathbb{R}^d$ *l'ensemble suivante :*

$$\lambda_d(A) = \inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}} volume(P_n), A \subset \bigcup_n \mathbb{P}_\ltimes, \forall n \in \mathbb{N}\}$$

oú (P_n) *est une pavé.*

1.10.5 Mesure de Hausdorff

Définition 1.21 *Soit (E,d)l'espace métrique (E,d), on fixe $\epsilon \geq 0, s \geq 0$ tel que $diamX \leq \epsilon$.*
Soit la mesure extérieur $\mathcal{H}^s_\epsilon(A) = \inf\limits_{D \in \mathbb{R}_\epsilon(A)} \sum\limits_{X \in D} (diamX)^s$.
où $\mathbb{R}_\epsilon(A)$ désigne l'ensemble des recouvrement fermé dénombrables de A par des parties $X \subset E$ telles que $diamX \leq \epsilon$.

Définition 1.22 *:*
Soit $s \geq 0$,on définit la mesure de Hausdorff s-dimensionnelle de $A \subset E$ par :

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\epsilon \to 0} \mathcal{H}^1_\epsilon(A).$$

1.10.6 Dimension de Hausdorff

Théorème 1.2 *:*
i. $\mathcal{H}^s(A) = \infty$ pour tout $s \leq d$,
ii. $\mathcal{H}^s(A) = 0$ pour tout $s \geq d$.
On appelle dimension de Hausdorff de A le réel d , on le note $diam\mathbb{H}$.

1.11 La formule de Coarea

Définition 1.23 *: La formule de Coarea exprime l'intégrale d'une fonction sur un ensemble ouvert dans l'espace euclidien en termes d'intégrables sur les ensembles de niveaux de $\mathbb{R}^n$ et u est une fonction lipschitzienne on Ω , alors pour la fonction $g \in L^1$;*

$$\int_\Omega g(x) \left|\nabla u(x)\right| dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{u^{-1}(t)} g(x) d\mathcal{H}_{n-1}(x) dt$$

où H_{n-1} est la mesure de Hausdorff de dimension $n-1$.

Exemple 1.6 *: On pronoms : $u(x) = |x - x_0|$; la formule dans les coordonnées sphérique est :*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dx = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B(X_0, r)} f ds \right) dr.$$

Théorème 1.3 *: La mesure de Hausdorff H^n sur $\mathbb{R}^n$ coïncide avec la mesure de Lebesgue λ^n .*

Théorème 1.4 *: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application Lipschitz définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ mesurable . Soit $f \geq 0$ une fonction mesurable sur E , tel que $f\,|J_f| \in L^1(E)$.*
Alors
.(Formule d'Area) si $n \leq m$,

$$\int_E f(x)\,|J_f(x)|\,dH^n(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{g^{-1}(y)} f(x) dH^0(x) \right) dH^m(y).$$

.(Formule de Coarea) si $n \geq m$,

$$\int_E f(x)\,|J_f(x)|\,dH^n(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{g^{-1}(y)} f(x) dH^{n-m}(x) \right) dH^m(y).$$

1.12 Quelques résultats de compacité

Définition 1.24 *:*
Soit $u : [0,T] \longrightarrow H$.
La variation de u sur $[0,T]$ est définie par :

$$var\,(u,[0,T]) := \sup_n \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \|u\,(t_{i+1}) - u\,(t_i)\|\,; n \in \mathbb{N} \right\},$$

où

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = T$$

désigne une partition quelconque de l'intervalle $[0,T]$.

Définition 1.25 *:*
La fonction u est dite à variation bornée si :

$$var\,(u,[0,T]) < +\infty.$$

Exemple 1.7 *:*
(i) Toute fonction $u : [0,T] \longrightarrow H$ Lipschitzienne est à variation bornée.
(ii) Toute fonction $u : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante est à variation bornée.

Théorème 1.5 *:*
Soit $u_n : [0,T] \longrightarrow H$, une suite des fonctions uniformément bornée en norme et en variation , c'est-à-dire

$$\|u_n\,(t)\| \leqslant M_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,T]$$

et

$$var\,(u_n, [0,T]) \leqslant M_2, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

pour des constantes $M_1, M_2 > 0$ *indépendantes de* n *et de* t *. Alors, il existe une sous suite* $(u_{n_k}(t))_{k\in\mathbb{N}}$ *de* $(u_n(t))_n$ *et une fonction* $u : [0,T] \longrightarrow H$*, telle que*

$$var\,(u, [0,T]) \leqslant M_2,$$

et

$$(u_{n_k}(t)) \rightharpoonup u\,(t)\, dans \quad H.$$

Lemme 1.1 *:*
Soit $(u_n)_n$ *une suite de* H *converge faiblement vers* u *dans* H *c'est-à-dire* $u_n \rightharpoonup u$*, alors*
$(a)\ \|u\| \leqslant \liminf\limits_{n\to+\infty} \|u_n\|$
(b) *Si* $u_n \in C + \overline{B}_{\epsilon_n}(0)$*, tel que* $C \subset H$ *est un convexe fermé et* $(\epsilon_n) \in \mathbb{R}_+^*$ *,* $\epsilon_n \to 0$*, alors* $u \in C$*.*

Lemme 1.2 *:*
Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite des fonctions,* $v_n : [0,T] \longrightarrow H$ *telle que* $v_n \rightharpoonup v_*$ *pour la topologie* $faible - *$ *de* $L^\infty([0,T], H)$*.c'est-à-dire*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^T \langle v_n(t), \varphi(t)\rangle\, dt = \int_0^T \langle v_*(t), \varphi(t)\rangle\, dt,$$

$\forall \varphi \in L^1([0,T], H)$ *. Supposons que :*
• $\forall t \in [0,T]$ *;* $C(t) \subset H$ *convexe fermé.*
• $C(.)$ *L-Lipschitz*

$$Posons: \quad \phi(v) = \int_0^T \delta^*(v(t), C(t))\, dt.$$

Alors, ϕ *semi-continue inférieurement (s.c.i) c'est-à-dire*

$$\phi(v_*) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \phi(v_n).$$

Lemme 1.3 *Soit* $u : [0,T] \longrightarrow H$ *une fonction absolument continue alors :*

$$(a) \quad \int_0^T \langle u'(t), u(t)\rangle\, dt = \frac{1}{2}\|u(T)\|^2 - \frac{1}{2}\|u(0)\|^2.$$

$$(b) \quad \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}|u'(t)|^2\right) = \langle u'(t), u'(t)\rangle = \|u'(t)\|^2.$$

Lemme 1.4 *(lemme de Gronwall)*
Soit $b, c, \xi : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *trois fonctions intégrable, si la fonction* $\xi(.)$ *est absolument continue sur* $[t_0, t_1]$ *et*

$$\dot{\xi}(t) \leq b(t) + c(t)\xi(t) \quad p, p \quad t \in [t_0, t_1]$$

Alors $\forall t \in [t_0, t_1]$

$$\xi(t) \leq \xi(0)exp(\int_{t_0}^{t} c(\Gamma)d(\Gamma)) + \int_{t_0}^{t} b(s)exp(\int_{s}^{t} c(\Gamma)d(\Gamma)).$$

Chapitre 2

L'existence et l'unicité de solution de certains types d'inclusions différentielles

Dans cette partie, on va montrer l'existence et l'unicité de la solution pour le système de type suivant :

$$\begin{cases} -u'(t) \in N_{C(t)}(u(t)) & \text{p.p } t \in [0,T] \\ u(0) = u_0 \in C(0), \end{cases} \tag{2.1}$$

où $N_C(.)$ désigne le cône normale de u a C.

Le problème (2.1) s'appelle processus de rafle (sweeping process en anglais) du premier ordre et couvre plusieurs situations en mécanique telle l'évolution des systèmes élastomère-plastique, ainsi que les problèmes avec frottement .pour plus de détaille voir [5].

2.1 Résultat d'existence et d'unicité

Tout d'abord, qu'est-ce qu'on entend par solution du problème (2.1)

Définition 2.1 *:*

On appelle solution sur $[0,T]$ *de* (2.1) *toute fonction* $u : [0,T] \longrightarrow H$ *satisfaisant les* *conditions suivantes :*

(a) $u(0) = u_0$,

(b) $u(t) \in C(t), \quad \forall t \in [0,T]$,

(c) $u(.)$ *est différentiable* $p.p \quad t \in]0,T[$,

(d) $-u'(t) \in N_{C(t)}\left(u(t)\right), \quad p.p \quad t \in [0,T]$.

Notre théorème principale dans ce chapitre est le suivant

Théorème 2.1 *:*

Soit H un espace de Hilbert. On suppose que la multifonction $C : [0,T] \to 2^H$ satisfaisant les conditions suivantes :

$(\mathcal{H}_1)$ $C(t) \subset H$ *est un convexe, fermé* $\forall t \in [0,T]$.

$(\mathcal{H}_2)$ $C(.)$ *est continument lipschitzienne , c'est-à-dire :* $\exists L > 0$ *tel que*

$$\mathcal{H}\left(C(t), C(s)\right) \leq L\left|t-s\right| \qquad \forall t, s \in [0,T].$$

Soit $u_0 \in C(0)$. Alors, il existe une unique solution $u : [0,T] \longrightarrow H$ pour le problème (2.1)*. De plus $\|u'(t)\| \leq L, \quad p.p \quad t \in]0,T[$.*

Preuve.

Tout d'abord, nous montrons l'existence de la solution en utilisant la méthode appelé algorithme de rattrapage .

2.1.1 Existence

La démonstration se fait en 8 étapes :

Étape 1 : Discrétisation de l'intervalle [0,T]

On discrétise l'intervalle $[0,T]$ comme suit :

$$0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_{n-1}^n < t_n^n = T$$

avec

$$\begin{cases} n \geq 1, \quad \text{et} \\ t_{i+1}^n - t_i^n \leq \frac{T}{n} \qquad 0 \leq i \leq n-1. \end{cases} \tag{2.2}$$

Étape 2 : Algorithme de rattrapage

On cherche une solution approchée

posons :

$$\begin{cases} u_n(t_i^n) = u_i^n \\ u_n(t_{i+1}^n) = u_{i+1}^n \end{cases}$$

par la méthode d'Euler implicite on a :

$$-u_n'(t_{i+1}^n) \in N_{C(t_{i+1}^n)} u_n(t_{i+1}^n).$$

équivalent à

$$-\frac{u_n(t_{i+1}^n) - u_n(t_i^n)}{h} \in N_{C(t_{i+1}^n)}(u_{i+1}^n),$$

$$-\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} \in N_{C(t_{i+1}^n)}(u_{i+1}^n),$$

$$u_i^n \in u_{i+1}^n + N_{C(t_{i+1}^n)}(u_{i+1}^n),$$

$$u_i^n \in \left[I + N_{C(t_{i+1}^n)}\right]\left(u_{i+1}^n\right),$$

$$u_{i+1}^n = \left[I + N_{C(t_{i+1}^n)}\right]^{-1}(u_i^n),$$

$$u_{i+1}^n = Proj_{C(t_{i+1}^n)}(u_i^n),$$

Nous déduirons les approximations $(u_i^n)_{i=0...n-1}$ comme suit :

$$\begin{cases} u_0^n = u_0 \in C(0) \\ u_{i+1}^n = proj(u_i^n, C(t_{i+1}^n)) \qquad i = 0...n-1 \\ u_i^n \in C(t_i^n) \end{cases} \tag{2.3}$$

Selon l'algorithme ci-dessus, les approximations (u_i^n) est tenus de rattraper $C(t_i^n)$, d'où l'appellation "algorithme de rattrapage".

Étape 3 : Suite des solutions approchées

On va définir la suite des solutions approchées $u_n : [0, T] \longrightarrow H$ sur chaque-sous intervalle $\left[t_i^n, t_{i+1}^n\right]; i = 0...n-1$, via une interpolation linéaire de Lagrange comme suit :

$$u_n(t) = u_i^n + \left(\frac{t - t_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n}\right)\left(u_{i+1}^n - u_i^n\right) \qquad \text{pour tout} \quad t \in \left[t_i^n, t_{i+1}^n\right]; i = 0...n-1. \tag{2.4}$$

La suite des solutions approchées $u_n : [0,T] \longrightarrow H$ est une fonction affine par morceaux (de 1^{er} espèce).

Étape 4 :Compacité de la Suite des solutions approchées

On va chercher une sous-suite de $(u_n)_n$ qui converge vers la solution de problème (2.1).

Tout d abord, on vérifie que la suite $(u_n)_n$ est uniformément bornée en variation .

Selon notre algorithme, nous avons

$$u_{i+1}^n = proj(u_i^n, C(t_{i+1}^n)),$$

il vient

$$\begin{aligned} \left\|u_{i+1}^n - u_i^n\right\| = \left\|proj(u_i^n, C(t_{i+1}^n)) - u_i^n\right\| &= d(u_i^n, C(t_{i+1}^n)) \\ &\leq \mathcal{H}(C(t_i^n), C(t_{i+1}^n)). \end{aligned}$$

Comme $C(.)$ est lipschitzienne, on obtient

$$\left\|u_{i+1}^n - u_i^n\right\| \leq \mathcal{H}\left(C(t_i^n), C(t_{i+1}^n)\right) \leq L\left|t_{i+1}^n - t_i^n\right|.$$

Alors

$$\begin{aligned} var\left(u_n, [0,T]\right) &= \sup_n \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \left\|u\left(t_{i+1}^n\right) - u\left(t_i^n\right)\right\| \right\} \\ &= \sup_n \sum_{i=0}^{n-1} \left\|u_{i+1}^n - u_i^n\right\|. \\ &\leq L \sum_{i=0}^{n-1} \left(t_{i+1}^n - t_i^n\right) = LT = M_2 < +\infty. \end{aligned}$$

Donc $(u_n)_n$ est á variation bornée.

Maintenant on va vérifier que la suite $(u_n)_n$ est uniformément bornée en norme .

D'après la définition de $u_n(t)$

$$u_n(t) = u_i^n + \left(\frac{t - t_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n}\right)\left(u_{i+1}^n - u_i^n\right)$$

$$\|u_n(t)\| \leq \|u_i^n\| + \left|\frac{t - t_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n}\right| \left\|u_{i+1}^n - u_i^n\right\|.$$

et on a d'après ce que précédant

$$\left\|u_{i+1}^n - u_i^n\right\| \leq L\left|t_{i+1}^n - t_i^n\right|. \tag{2.5}$$

et d'autre part

$$\|u_i^n\| = \left\|u_i^n - u_{i-1}^n + u_{i-1}^n\right\|.$$

$$\leq \left\|u_i^n - u_{i-1}^n\right\| + \left\|u_{i-1}^n\right\|$$

$$\leq L\left|t_i^n - t_{i-1}^n\right| + \left\|u_{i-1}^n\right\|$$

$$\leq L\left|t_i^n - t_{i-1}^n\right| + ... + L\left|t_1^n - t_0^n\right| + \|u_0^n\|$$

Alors,

$$\|u_i^n\| \leq Lt_i^n + \|u_0\| \tag{2.6}$$

Alors d'après (2.5) et(2.6) :

$$\|u_n(t)\| \leq Lt_i^n + \|u_0\| + L\left|t_{i+1}^n - t_i^n\right| = Lt_{i+1}^n + \|u_0\|.$$

$$\leq LT + \|u_0\| = M_1.$$

Le théorème (1.5) de compacité assure l'existence d'une sous-suite de $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ (notée encore $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$) et une fonction $u : [0,T] \longrightarrow H$, telle que $var(u) \leq M_2 = LT$ et $u_n(t) \rightharpoonup u(t)$ dans H.

Maintenant, on va vérifier les conditions de la définition (2.1).

Étape 5 : Vérification de (a) "condition initiale"

On a

$$\lim_{n\to+\infty} \langle u_n(t), y\rangle = \langle u(t), y\rangle \quad ,\forall \;\; y \in H; \; pour \;\; tout \;\; t \in [0,T].$$

Prenant $t = 0$, il vient :

$$\lim_{n\to+\infty} \langle u_n(0), y\rangle = \langle u(0), y\rangle \quad \forall \ y \in H.$$

Donc $u(0) = u_o$.

Étape 6 : Vérification de (b) "variabilité"

D'après (2.4) et (2.2), on a

$$\|u_n(t)\| \leq \|u_i^n\| + \left|\frac{t - t_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n}\right| \left\|u_{i+1}^n - u_i^n\right\|.$$

De plus

$$\left|\frac{t - t_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n}\right| \left\|\left(u_{i+1}^n - u_i^n\right)\right\| \leq L\frac{T}{n},$$

alors

$$\left(\frac{t - t_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n}\right)\left(u_{i+1}^n - u_i^n\right) \in \overline{B}_{L\frac{T}{n}}(0).$$

Par conséquent

$$u_n(t) \in C\left(t_i^n\right) + \overline{B}_{L\frac{T}{n}}(0) \subset C(t) + \overline{B}_{L(t-t_i^n)}(0) + \overline{B}_{L\frac{T}{n}}(0) \subset C(t) + \overline{B}_{2L\frac{T}{n}}(0).$$

Maintenant, on applique le lemme (1.1), on obtient

$$u(t) \in C(t) \ , \ \forall t \in [0, T].$$

Étape 7 : Vérification de (c) "u(.) est p.p différentiable"

Est-ce que $u : [0, T] \longrightarrow H$ est lipschitzienne , c'est-à-dire $\exists\lambda > 0$ telle que

$$\|u(t) - u(s)\| \leq \lambda\,|t - s| \quad \textit{pour tout} \ \ t, s \in [0, T].$$

•*Si* $t, s \in \left[t_i^n, t_{i+1}^n\right]$ on a :

$$\|u_n(t) - u_n(s)\| \leq \frac{|t - s|}{\left|t_{i+1}^n - t_i^n\right|} L \left|t_{i+1}^n - t_i^n\right|.$$

Comme

$$\|u(t)-u(s)\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|u_n(t)-u_n(s)\| \quad \textit{pour tout} \;\; t,s\in[0,T],$$

il résulte

$$\|u(t)-u(s)\| \leq L\,|t-s|\,.$$

$\bullet$*Si* $t\in\left[t_i^n,t_{i+1}^n\right]$, et $s\in\left[t_j^n,t_{j+1}^n\right]$, telle que $i<j$

$$\|u_n(t)-u_n(s)\| = \left\|u_n(t)-u_n(t_{i+1}^n)+u_n(t_{i+1}^n)-u_n(t_{i+2}^n)+u_n(t_{i+2}^n)-...+u_n(t_j^n)-u_n(t_j^n)+u_n(s)\right\|.$$

$$\leq \left\|u_n(t)-u_n(t_{i+1}^n)\right\| + \sum_{k=i+1}^{j-1}\left\|u_n(t_{k+1}^n)-u_n(t_k^n)\right\| + \left\|u_n(t_j^n)-u_n(s)\right\|.$$

$$\leq L(t_{i+1}^n-t)+L\sum_{k=i+1}^{j-1}(t_{k+1}^n-t_k^n)+L(s-t_j^n).$$

Comme

$$\|u(t)-u(s)\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|u_n(t)-u_n(s)\| \quad \textit{pour tout} \;\; t,s\in[0,T],$$

il résulte

$$\|u(t)-u(s)\| \leq L\,|t-s|\,.$$

D'où la différentiabilité p.p de $u(.)$.

Étape 8 : Vérification de (d) "u(.) est une solution de notre problème"

D'après (2.3) nous avons

$$u_{i+1}^n = proj(u_i^n, C(t_{i+1}^n))$$

équivalent a

$$-(u_{i+1}^n-u_i^n)\in N_{C(t_{i+1}^n)}(u_{i+1}^n)$$

or

$$-u_n'(t)\in N_{C(t_{i+1}^n)}(u_{i+1}^n).$$

La définition du cône donne :

$$\left\langle u_n'(t), u_{i+1}^n - x \right\rangle \leq 0 \quad pour \;\; tout \;\; x \in C(t_{i+1}^n)$$

Maintenant, nous avons pour $y \in C(t)$

$$\langle u_n'(t), u_n(t) - y \rangle = \left\langle u_n'(t), u_n(t) - u_{i+1}^n + u_{i+1}^n - x + x - y \right\rangle$$

$$= \left\langle u_n'(t), u_{i+1}^n - x \right\rangle + \left\langle u_n'(t), u_n(t) - u_{i+1}^n \right\rangle + \langle u_n'(t), x - y \rangle .$$

D'après (2.3), (2.2) ,on a

$$\left\| u_n(t) - u_{i+1}^n \right\| = \left\| u_n(t) - u_n(t_{i+1}^n) \right\| \leq L \left| t - t_{i+1}^n \right| \; \leq L \frac{T}{n}.$$

Comme

$$C(t) \subset C\left(t_{i+1}^n\right) + \overline{B}_{L\frac{T}{n}}(0),$$

alors

$$\|x - y\| \leq L \frac{T}{n}.$$

De plus , l'estimation

$$\|u_n'(t)\| \leq L$$

donne

$$\langle u_n'(t), u_n(t) \rangle + \langle -u_n'(t), y \rangle \leq 2L^2 \frac{T}{n} = \varepsilon_n.$$

Prenant le suprémun sur y, on obtient

$$\langle u_n'(t), u_n(t) \rangle + \delta^* \left(-u_n'(t), C(t)\right) \leq \varepsilon_n.$$

Par intégration sur $]0, T[$

$$\int_0^T \langle u_n'(t), u_n(t) \rangle \, dt + \int_0^T \delta^* \left(-u_n'(t), C(t)\right) dt \leq \varepsilon_n T. \tag{2.7}$$

On applique le lemme 1.3, on obtient

$$\int_0^T \langle u'(t), u(t)\rangle\, dt = \frac{1}{2}(\|u(T)\|^2 - \|u(0)\|^2)$$

$$\leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{2}(\|u_n(T)\|^2 - \|u_n(0)\|^2)$$

D'où

$$\int_0^T \langle u'(t), u(t)\rangle\, dt \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_0^T \langle u_n'(t), u_n(t)\rangle\, dt. \tag{2.8}$$

Comme $u : [0,T] \longrightarrow H$ est différentiable et $\|u_n'(t)\| \leq L$, alors

$u_n' \rightharpoonup u'$ par la topologie faible $*$ de $L^\infty([0,T], H)$.

Le lemme 1.2 , assure

$$\int_0^T \delta^*(-u'(t), C(t))\, dt \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_0^T \delta^*(-u_n'(t), C(t))\, dt. \tag{2.9}$$

On applique la "limite inférieure" sur les deux côtés de (2.7) , on trouve :

$$\int_0^T [\langle u'(t), u(t)\rangle + \delta^*(-u'(t), C(t))]\, dt \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_0^T [\langle u_n'(t), u_n(t)\rangle + \delta^*(-u_n'(t), C(t))]\, dt \leq 0 \ . \tag{2.10}$$

La contrainte $u(t) \in C(t)$ implique

$$\langle -u'(t), u(t)\rangle \leq \delta^*(-u'(t), C(t)),$$

or

$$0 \leq \langle u'(t), u(t)\rangle + \delta^*(-u'(t), C(t)).$$

Par intégration sur $]0,T[$

$$0 \leq \int_0^T [\langle u'(t), u(t)\rangle + \delta^*(-u'(t), C(t))]\, dt. \tag{2.11}$$

D'après (2.10) et (2.11), nous obtenons

$$\int_0^T [\langle u'(t), u(t)\rangle + \delta^*(-u'(t), C(t))]\, dt = 0,$$

et donc

$$\langle u'(t), u(t)\rangle + \delta^*(-u'(t), C(t)) = 0 \quad p.p \quad t \in [0,T].$$

La définition de la fonction support donne

$$\sup_{y\in C(t)} \langle -u'(t), y\rangle = \langle -u'(t), u(t)\rangle,$$

or

$$\langle -u'(t), u(t)\rangle \geq \langle -u'(t), y\rangle \quad pour \quad tout \quad y \in C(t).$$

Finalement

$$\langle -u'(t), y - u(t)\rangle \leq 0 \quad pour \quad tout \quad y \in C(t).$$

La définition du cône normal implique

$$-u'(t) \in N_{C(t)}(u(t)) \quad p.p \quad t \in [0,T].$$

2.1.2 Unicité

Supposons qu'il existe deux solutions différentes u, v pour ce problème

On pose :$u : [0,T] \longrightarrow H$ solution pour le problème

$$\begin{cases} -u'(t) \in N_{C(t)}(u(t)) & \text{p.p } t \in [0,T] \\ u(0) = u_0 \in C(0), \end{cases}$$

et

$v : [0,T] \longrightarrow H$ solution pour le problème

$$\begin{cases} -v'(t) \in N_{C(t)}(v(t)) & \text{p.p } t \in [0,T] \\ v(0) = v_0 \in C(0), \end{cases}$$

Comme $u(t)$ et $v(t)$ appartiennent à $C(t)$, il vient

$$\begin{cases} \langle -u'(t), v(t) - u(t)\rangle \leq 0. \\ \langle -v'(t), u(t) - v(t)\rangle \leq 0. \end{cases} \tag{2.12}$$

Comme $u(t)$ et $v(t)$ sont Lipschitzienne donc elles sont absolument continues .

En additionnant ces dernières inégalités, on obtient :

$$\langle -u'(t), v(t) - u(t)\rangle - \langle -v'(t), u(t) - v(t)\rangle \leq 0.$$

$$\langle -u'(t), v(t) - u(t)\rangle + \langle v'(t), v(t) - u(t)\rangle \leq 0.$$

$$\langle v'(t) - u'(t), v(t) - u(t)\rangle \leq 0.$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u(t) - v(t)\|^2\right) \leq 0.$$

Il claire que :

$$(\|u(t) - v(t)\|^2 \leq 0.$$

Et on sait que

$$\|u(t) - v(t)\|^2 \geq 0.$$

d'ou :

$$\|u(t) - v(t)\| = 0.$$

$$u(t) = v(t).$$

Alors , si $u_0 = v_0$, on obtient $u \equiv v$. D'où l'unicité de la solution .

Ce qui achevé la preuve du théorème. ■

2.2 Unicité de quelques types de processus de la Rafle

1. Maintenant on va montrer l'unicité de cette inclusion différentielle :

$$\begin{cases} u'(t) \in N_{C(t)}(u(t)) \quad \text{p.p } t \in [0, T], \\ u(0) = u_0 \in C(0). \end{cases} \tag{2.13}$$

Soient u, v deux solutions du problème (2.13), avec $u(0) = u_0 \in C(0), v(0) = v_0 \in C(0)$.

$$\begin{cases} u'(t) \in N_{C(t)}(u(t)) & \text{p.p } t \in [0,T], \\ u(0) = u_0 \in C(0), \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} v'(t) \in N_{C(t)}(v(t)) & \text{p.p } t \in [0,T], \\ v(0) = v_0 \in C(0), \end{cases}$$

Comme $u(t)$ et $v(t)$ appartiennent à $C(t)$, il vient

$$\begin{cases} \langle u'(t), v(t) - u(t) \rangle \leq 0. \\ \langle v'(t), u(t) - v(t) \rangle \leq 0. \end{cases}$$

Nous additionnons ces dernières inégalités, on obtient

$$\langle u'(t), v(t) - u(t) \rangle + \langle v'(t), u(t) - v(t) \rangle \leq 0.$$

$$\langle u'(t), v(t) - u(t) \rangle - \langle -v'(t), v(t) - u(t) \rangle \leq 0.$$

$$\langle u'(t) - v'(t), v(t) - u(t) \rangle \leq 0.$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u(t) - v(t)\|^2\right) \leq 0.$$

$$\frac{1}{2}\left(\|u(t) - v(t)\|^2\right) \geq 0.$$

Donc on ne peut pas conclure l'unicité de la solution du ce type.

2. on va montrer l'unicité de autre type ,sous forme est la forme de processus de la Rafle perturbé suivant ;

$$\begin{cases} -u'(t) \in N_{C(t)}(u(t)) + f(u(t)) & \text{p.p } t \in [0,T], \\ u(0) = u_0 \in C(0). \end{cases} \tag{2.14}$$

où f est lipschitzienne alors,

$$\|f(t,u(t)) - f(t,v(t))\|) \leq L\,|u(t) - v(t)|\,.$$

Soient u, v deux solutions du problème (2.14), avec $u(0) = u_0 \in C(0), v(0) = v_0 \in C(0)$,donc :

$$\begin{cases} -u'(t) \in N_{C(t)}(u(t)) + f(u(t)) & \text{p.p } t \in [0,T]\,, \\ u(0) = u_0 \in C(0)\,. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -v'(t) \in N_{C(t)}(v(t)) + f(v(t)) & \text{p.p } t \in [0,T]\,, \\ v(0) = v_0 \in C(0)\,. \end{cases}$$

Comme $u(t)$ et $v(t)$ appartiennent à $C(t)$, il vient

$$\begin{cases} \langle -f(t,u(t)) - u'(t)\,, v(t) - u(t)\rangle \leq 0. \\ \langle -f(t,v(t)) - v'(t)\,, u(t) - v(t)\rangle \leq 0. \end{cases}$$

En additionnons ces dernières inégalités, on obtient :

$$\langle -f(t,u(t)) - u'(t)\,, v(t) - u(t)\rangle + \langle -f(t,v(t)) - v'(t)\,, u(t) - v(t)\rangle \leq 0.$$

$$\langle -f(t,u(t)) - u'(t)\,, v(t) - u(t)\rangle - \langle f(t,v(t)) + v'(t)\,, v(t) - u(t)\rangle \leq 0.$$

$$\langle f(t,u(t)) - f(t,v(t)) + v'(t) - u'(t)\,, v(t) - u(t)\rangle \leq 0.$$

$$\langle f(t,v(t)) - f(t,u(t))\,, v(t) - u(t)\rangle + \langle v'(t) - u'(t)\rangle \leq 0.$$

$$\langle v'(t) - u'(t)\,, v(t) - u(t)\rangle \leq \langle f(t,v(t)) - f(t,u(t))\,, v(t) - u(t)\rangle$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|v(t) - u(t)\|^2\right) \leq L\,\langle v(t) - u(t)\,, v(t) - u(t)\rangle$$

$$\frac{d}{dt}\left(\|v(t) - u(t)\|^2\right) \leq 2L\,\|u(t) - v(t)\|^2\,.$$

On utilisant le lemme de Gronwall

$$\|u(t) - v(t)\|^2 \leq \|u(0) - v(0)\|\,exp\left(\int_0^t \alpha(r)\,dr\right).$$

$$\|u(t) - v(t)\|^2 \leq (\|u(0) - v(0)\| \, exp(2Lt)$$

Quand $t \longrightarrow +\infty$.

$$\|u(t) - v(t)\|^2 \leq 0.$$

D'autre part , on sait que

$$\|u(t) - v(t)\|^2 \geq 0.$$

Donc

$$\|u(t) - v(t)\|^2 = 0.$$

or

$$\|u(t) - v(t)\| = 0.$$

alors

$$u(t) = v(t)$$

Chapitre 3

L'unicité d'une inclusion différentielle gouvernée par un opérateur maximal monotone

Ce chapitre est consacré à la propriété d'unicité pour ce problème de Cauchy :

$$\begin{cases} u'(t) \in A(u(t)) \\ u(0) = \epsilon \in \Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

où A est un opérateur maximal monotone, borné avec $Dom(A) = \Omega$,tel que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

Un exemple simple de ce type d'inclusion différentielle est celui qui est gouverné par le sous-gradient d'une fonction convexe et borné.

3.1 Résultat principale

Définition 3.1 *Une solution v du problème* (3.1) *sur un intervalle I est appelée maximal si on peux pas élargir cette solution dans un autre intervalle I_1 qui contient I.*
On note l'ensemble des solutions maximales du problème (3.1) *par $S(A, \epsilon)$ pour ϵ donné .*

Lemme 3.1 *Soient $\Omega^* \subset \mathbb{R}^d$ est un ouvert et A^* est un opérateur maximal monotone localement borné sur le domaine Ω^*. On suppose que, pour chaque $\epsilon \in \Omega^*$, il existe t^* et* *deux solutions* v_1 , v_2 *du problème ,*

$$u'(t) \in A^*(u(t)), u(0) = \epsilon \quad , t \in [0, t^*]. \tag{3.2}$$

et $v_1(t^*) \neq v_2(t^*)$.
Soit :

$$G^* = \{gr(v); v : [0, t^*] \longrightarrow \Omega^* \quad solution \quad de \quad (3.2)\}$$

Alors ;

$$\mathcal{H}^1(G^*) = +\infty.$$

où $\mathcal{H}^1(.)$ est la mesure de Hausdorff de dimension 1.

Preuve.

Soit τ un ensemble définie comme suite :

$$\tau = \sup\{s \geq 0; v_1(r) = v_2(r); pour \quad r \in [0, s]\}$$

alors $\tau \leq t^*$ et $v_1(\tau) = v_2(\tau)$.

Soit $\rho \geq 0$ tel que $\overline{B} := \overline{B}(v_1(\tau), \rho) \subset \Omega^*$

posons $M := \sup\{|v|; v \in A^*(\overline{B})\}$ et $\delta := \frac{\rho}{M}$.

les solutions de :

$$u'(t) \in A^*(u(t)), u(\tau) = v_1(\tau). \tag{3.3}$$

sont définies sur $[\tau - \delta, \tau + \delta]$ et ne quittent pas $\overline{B}$.

Maintenant on choisit $\tau \leq \tau^* \leq \tau + \delta$, $\epsilon = |v_1(\tau^*) - v_2(\tau^*)|, \epsilon \geq 0$.

Considérons l'ensemble $K(K \subset \overline{B})$.

$$K = \{v(\tau + \delta)\}.$$

où : v est la solution de (3.3)

Pour $\xi \in K$,soit v_ξ la solution de 3.3 tel que $v_\xi(\tau + \delta) = \xi$.

Soit $\beta(t; \xi) := v_\xi(2\tau + \delta - t)$, donc

$$\beta(t; \xi) = v_\xi(\tau + \delta) = \beta(\tau + \delta) = \xi.$$

et $\beta(t;\xi)$ est la solution unique sur $[\tau,\tau+\delta]$ de :

$$\beta'(t) \in A^*(\beta(t));\beta(\tau)=\epsilon,$$

L'ensemble $\beta(t;\epsilon)$ est non-expansive car ;

$$\|\beta(t;\epsilon_1)-\beta(t;\epsilon_2)\| = \|v_{\epsilon_1}(2\tau+\delta-t)-v_{\epsilon_2}(2\tau+\delta-t)\|$$

$$\leq \|v_{\epsilon_1}(t+\delta)-v_{\epsilon_2}(t+\delta)\|$$

$$\leq \|\epsilon_1-\epsilon_2\|$$

donc $\beta(t,\epsilon)$ est Lipschitzienne.pour tout $t\in[\tau,\tau+\delta]$

et en particulière pour $t=2\tau+\delta-\tau^*$.

Puisque ;

$v_1(\tau^*)=\beta(2\tau+\delta-\tau^*,\epsilon)$ et $v_2(\tau^*)=\beta(2\tau+\delta-\tau^*,\epsilon)$

alors l'ensemble

$\beta(2\tau+\delta-\tau^*;K)$ ne peut pas être contenu dans $B(v_1(\tau^*),\frac{\epsilon}{3})\cup B(v_2(\tau^*),\frac{\epsilon}{3})$

Soit $\epsilon_3\in K$ tel que :

$\beta(2\tau+\delta-\tau^*,\epsilon_3)=v_3(\tau^*)$ ne peut pas être contenu dans $B(v_1(\tau^*),\frac{\epsilon}{3})\cup B(v_2(\tau^*),\frac{\epsilon}{3})$.

et soit $v_3(t):=v_{\xi_3}(t)$.alors v_3 est une solution de (3.3), tel que $d(v_3(t),v_1(t))>\frac{\epsilon}{3}$ et $d(v_3(t),v_2(t))>\frac{\epsilon}{3}$.

Maintenant supposons par construction qu'on définit $v_1,.......,v_m$ solutions de (3.3) sur $[\tau^*,\tau+\delta]$

$$d(v_i(t),v_j(t)) > (\frac{1}{3^{n-2}})\epsilon, \quad i\neq j$$

donc

$\beta(2\tau+\delta-\tau^*,K)$ ne peut pas contenu $\bigcup_{i=1}^{m} B(v_i(\tau^*),\frac{1}{3(\frac{\epsilon}{3^{m-2}})})$

et il existe v_{m+1}solution de (3.3) tel que ;

$$d(v_{n+1}(t), v_i(t)) > (\frac{1}{3^{n-1}})\epsilon, i = 1, ..., m.$$

cette procédure définit introductive-ment une séquence $(v_m)_m$ de solution (3.3) avec

$$d(v_m(t), v_i(t)) > (\frac{1}{3^{m-1}})\epsilon, i < m.$$

On fixons N, et soit $v > \mathbb{N}$. pour i et $j < v$,$d(v_i(t), v_j(t)) > (\frac{1}{3^{v-2}})\epsilon$. On définit l'ensemble

$$gr_i = \{(t, u); \tau^* \leq t \leq \tau + \delta, et \quad u = v_i(t)\}$$

puis $v_i : [\tau^*, \tau + \delta] \to \mathbb{R}^2$ est Lipschitz, la formule d'area donne

$$\mathcal{H}^1(gr_i) = \int_{\tau^*}^{\tau+\delta} (1 + |v_i'|^2)^{\frac{1}{2}} du \geq \tau + \delta - \tau^*$$

d'ou

$$\mathcal{H}^1(G^*) \geq \mathcal{H}^1(\bigcup gr_i) \geq N.$$

■

Théorème 3.1 *:*
Soit A un opérateur maximal monotone localement bornée avec dom $(A) = \Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Soit $S(A, \epsilon)$ l'ensemble des solutions maximales du problème (3.1) *.*
Alors , le sous-ensemble Ω^0 de Ω de ϵ telle que $S(A, \epsilon)$ n'est pas un singleton et de Mesure de Lebesgue de dimension d nulle.

preuve

Notre preuve se décompose en quarte parties ;

(a) Démontrer que $G_n$est un ouvert.

Soit $(\Omega_n)_n$, une suite des sous-ensembles ouverts de Ω, $\overline{\Omega_n} \subset \Omega_{n+1}$,tel que $\overline{\Omega_n}$ est compact et $\Omega = \bigcup \Omega_n$.

Soit A_n une la restriction de A à Ω_n , et on considère :

$$u'(t) \in A_n(u(t)); u(0) = \epsilon \in \Omega_n \tag{3.4}$$

Soit $S(A_n, \epsilon)$ l'ensemble des solutions maximales de (3.4) par définition , lorsque $v \in S(A_m, \epsilon), \implies v(t) \in \Omega_n$ sur $[\tau - v, \tau + v]$ et $0 \in [\tau - v, \tau + v]$.

Définir l'ensemble G_n ;

$$G_n = \bigcup_{\epsilon \in \Omega_n} \{(t, u) : t \geq 0 \quad et \quad u = v(t) \in S(A, \epsilon)\}$$

nous supposons que G_n est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times R^d$.

Maintenant fixez $(t_0, u_0) \in G_n$, et soit ϵ_0, v_0 tel que $u_0 = v_0(t)$, $v_0 \in S(A_n, \epsilon_0)$.

L'ensemble $Y_0 = \{u = v_0(t) : 0 \leq t \leq t_0\}$ est un sous-ensemble compact de Ω_n, d'ou pour certains $\epsilon \geq 0$, une boule $B = B(Y_0, \epsilon) \subset \Omega_n$.

Soit $M_n = \sup\{\|v\| : v \in A(B)\}$.

On prend (t_1, u_1) telle que ;

$$\|u_1 - u_0\| \leq \frac{\epsilon}{3}$$

$$\|t_1 - t_0\| \leq \epsilon_1 := \min(\frac{\epsilon}{3M}, \frac{t_0}{2})$$

la solution v_1 du problème

$$u' \in A_n(u), u(t_1) = u_1$$

existe sur $|t - t_1| < t_1$.

En particulière, on $t_i = \min(t_0, t_1), v_1(t_i) \in B(u_0, \epsilon)$.

$v_1(t)$ ne peut pas quitter la boule $B(v_0, \epsilon)$ sur $[0, t_i]$, pour $t < t_i$ car la solution à $t < t_i$ est non-expansive.

Alors v_1 existe à $t = 0$ et $v_1(0) \in B(u_0, \epsilon) \subset \Omega_n$.

Donc nous avons montrer que $(t_1, u_1) \in G_n$.

(b) Prouver la Lipschitzité de B_n :

Soit

$$B_n : \quad G_n \longrightarrow \Omega_n$$

$$(t_1, u_1) \longrightarrow \epsilon$$

tel que $u = v(t), v \in S(A_n, \epsilon)$.

Nous supposons que B_n est lipschitzien .En fait, fixons (t_1, u_1) et (t_2, u_2) dans G_n (supposons $t_1 \leq t_2$). Soit v_1 et v_2 des solutions de (3.4) ,il s'ensuite que $v_1(t) \in \Omega_n$, pour $0 \leq t \leq t_1$, et $v_2(t) \in \Omega_n$ pour $0 \leq t \leq t_2$.

Alors

$$\|v_2(t_1) - v_1(t_2)\| \leq M_n \,|t_2 - t_1|$$

$$|\epsilon_1 - \epsilon_2| \leq |v_2(t_1) - v_1(t_1)| + |v_2(t_1) - v_1(t_1) + v_2(t_2) - v_2(t_2)|$$

$$\leq \|v_2(t_1) - v_2(t_2)\| + \|v_2(t_2) - v_1(t_1)\| .$$

$$\leq \|v_2(t_1) - v_2(t_2)\| + \|u_1 - u_2\| .$$

$$\leq M_n \,\|t_2 - t_1\| + \|u_1 - u_2\| .$$

$$\leq (M_n + 1) d((t_1, u_1), (t_2, u_2)).$$

(c) Soit $G_n^m = G_n \cap ([0, m] \times \mathbb{R}^d)$, l'ensemble G_n^m est borélien et borné On a B_n est lipschitzienne sur G_n^m de Lipschitz constante$L \leq (M_n + 1)$ donc le gradient ∇B_n existe p.p sur G_n^m et la jacobienne JB_n est uniformément bornée.

Par le théorème de coarea(théorème 1.2)

$$\int_{G_n^m} JB_n d(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} H^1(G_n^m \cap B_n^{-1}(\epsilon)) d\epsilon < +\infty.$$

(d) En fin , soit $\epsilon \in \Omega_0$ tel que $S(A, \epsilon)$ n'est pas un singleton .Soit v_1 et $v_2 \in S(A, \epsilon)$ et $t^* \geq 0 : v_1(t^*) \neq v_2(t^*)$, il existe n et m naturel ,

$$\{v_1(t) : 0 \leq t \leq t^*\} \cup \{v_2(t) : 0 \leq t \leq t^*\} \subset \Omega_n$$

et $t^* \leq m$,par conséquence v_1 et v_2 sont dans $[0, t^*]$; solutions de (3.4).

Appliquant le lemme (3.1) avec $A^* = A_n$, $\Omega^* = \Omega_n$ et considérons G^* : l'ensemble $\{G_n^m \cap B_n^{-1}(\epsilon)\}$ qui contient G^* , par conséquence $\mathcal{H}^1(G_n^m \cap B_n^{-1}(\epsilon)) = +\infty$.

Alors, la mesure totale des points ϵ dans Ω_0 est nulle.

Exemple 3.1 *:*

Soit le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} u'(t) \in A(u(t)) \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

où A est le sous-gradient(qui est maximal monotone) de la fonction convexe $v(u) = \max\{|u_1|, |u_2|\}$ (v est lipschitzienne).

On pose $f_1(u_1) = |u_1|, f_2(u_2) = |u_2|$.

1. *pour* $u \neq 0$ *, l'unique sous-gradient*

$$\nabla f_1(u_1) = sign(u_1) = \begin{cases} -1 & si \quad u_1 < 0 \\ [-1,1] & si \quad u_1 = 0 \\ 1 & si \quad u_1 > 0. \end{cases}$$

2. *pour* $u = 0$ *,* $\nabla f_1(u_1) = [-1,1]$.

. *pour* $f_1(u_1) > f_2(u_2), \nabla v(u) = \nabla f_1(u_1)$.

. *pour* $f_2(u_2) > f_1(u_1), \nabla v(u) = \nabla f_2(u_2)$.

. *pour* $f_1(u_1) = f_2(u_2), \nabla v(u)$ *est tout les points sur la ligne droite entre* $\nabla f_1(u_1)$ *et* $\nabla f_2(u_2)$.

Alors pour tout $u_0 = u(0)$ sur la ligne diagonale $u_2 = u_1$ et $u_2 = -u_1$ .le problème n'a pas de solution unique dans $\mathbb{R}^2$.

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons étudier l'existence et l'unicité d'un type d'évolution non linéaire gouverné par le cône normal, nous avons aussi donné une méthode non classique pour démontrer la propriété d'unicité de solution pour une inclusion différentielle gouverné par un opérateur maximal monotone.

On peut aussi donner la possibilité d'étudier l'unicité de la solution pour le problème suivant en utilisant la dernière méthode

$$\begin{cases} u'(t) \in -N_C(u(t)) + A(u(t)) \\ u(0) = \epsilon \in \Omega. \end{cases}$$

Bibliographie

[1] S. Adly, T. Haddad and L. Thibault, Convex sweeping process in the frame work of measure differential inclusions and evolution variational inequalities, Mathematical programming, Springer, Febuary (2014), pp. 1-43.

[2] J.P. Aubin and A. Cellina, Differential inclusions-set-valued maps and viability theory, Springer-Verlag, Berlin (1984).

[3] H. Brézis, Opérateurs Maximaux Monotones et semi-groupe de contractions dans les espaces de Hilbert, North Holand, Mathematics studies, Notas de mathematica (50), (1973).

[4] A.Cellina, On uniqueness almost everywhere for monotonic differental inclusions, Non linear Analysis. Methods and applications, Vol.25.Nos 9-10, pp.899-903(1995).

[5] D. Duvaut and J.L. Lions, Inequalities in Mechanics and Physics, Springer, (1979).

[6] L.C.Evans and R.F Gariepy , Measure theory and fine propertties of functions. CRC press ,Boca Raton (1992).

[7] H. Federer, Geometric measure theory, Springer , New York (1969).

[8] PH. Hartman, Ordinary Differential Equations, 2nd edition .Birkhauser, Boston.(1982).

[9] J.J. Moreau, Rafle par un convexe variable I, Sém. Anal. Convexe Montpellier (1971), Exposé 15.

[10] M.P.P Monteiro Marques, Differential inclusion in nonsmooth mechanical problems, Shocks and dry friction, Progress in nonlinear differential equation and their application, Brikhauser, 9(1993).

[11] P.A.P.Moran.Additive functions of intervals and Hausdorff measure.Proc. Cambridge Philos.Soc., 42 :15-23, 1946.