République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahai - Jijel

Faculté des Sciences Exacte et Informatique

Département de Mathématique

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master Spécialité : Mathématiques.

Option : EDP et Application.

Thème

Le caractère bien posé d'une inégalité variationnelle avec retard

Présenté par :

- Bouchelouh Sara.

Devant le jury :

Président	: Haddad Touma	MCB Université de Jijel
Encadreur	: Kecis Ilyas	MCB Université de Jijel
Examinateur	: Arroud Chems Eddine	MCB Université de Jijel

Promotion **2019/2020**

Dédicaces

Je dédie le fruit de mes efforts à ceux qui ont beaucoup

souffert pour je rendre joyeuse et heureuse.

Je dédie ce mémoire à :

ceux qui se sont sacrifiés pour nous mettre sur la voie de connaissance et de savoir :

Mes tendres parents.

Ma chère mère qui m'a entouré de son intérêt, de ses encouragements

et de son soutien moral pendant mon travail.

Mon cher père qui était toujours aimant, compatissant,

que dieu le protège.

Mes très chers frères **Amir** et **Islam**

et mes sœurs chaqu'une par son nom pour leurs précieux conseils.

Je dédie également ce travail à

ceux qui nous ont permis d'accéder à ce cher succès :

Nos professeurs qui, nous exprimons nos sincères

reconnaissances et considérations.

Je dédie, enfin,

Mes chers amis de promotion.

Remerciements

Avant toute considération, je remercie **ALLAH**, le tout puissant qui ma donné la santé, la volonté et la patience pour mener à terme notre formation de Master, et de m'a aidé pour achever ce travail.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance et mes remerciements les plus profonds à Monsieur **Kecis Ilyas** qui m'a encadré, tout au long de ce mémoire, pour sa patience, son encouragement , sa confiance et du temps consacré à mon travail.

Aux membres du jury

Je remercie : Dr **Haddad Touma**, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de ce mémoire.

Monsieur **Arroud Chems Eddine** d'avoir accepté d'examiner mon travail.

Je remercie mes parents qui ont soutenu, encouragées et motivées tout au long de mes études.

Enfin, mes remerciements aussi à tous mes enseignants qui sont à l'origine de tout notre savoir.

Merci à tous et à toutes.

$\mathcal{R}$ésumé

Ce mémoire est consacré à l'étude d'une classe de processus de rafle avec mémoire. Le caractère bien posé est bien présenté et obtenu, y compris la stabilité de la solution. L'approche utilisée se base sur une méthode de discrétisation du temps combinée avec un principe du point fixe appliqué à l'opérateur avec retard. Finalement, le résultat abstrait est utilisé pour étudier un problème de frottement quasi-statique pour des matériaux viscoélastiques avec une longue mémoire avec des conditions unilatérales sur la vitesse.

$\mathcal{A}$bstract

This paper is devoted to the study of a class of sweeping processes with history-dependent operators. A well-posedness result is obtained, including the existence, uniqueness, and stability of the solution. Our approach is based on the variable time step-length discrete approximation method combined with a fixed point principle for history-dependent operators. Then, a quasi-static frictional contact problem for viscoelastic materials with unilateral constraints in velocity is considered. The abstract result is applied in the study of this problem in order to provide its unique weak solvability as well as the continuous dependence of the solution with respect to the initial data.

Table des matières

Introduction

La notion de processus de rafle, sweeping process en anglais, a été introduite en 1971 dans un célèbre exposé de J.J. Moreau [17]. Ce type de problèmes consiste à étudier l'existence d'une trajectoire $u : [0, T] \to H$ telle que $u(t) \in C(t)$ et

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(u(t)), \quad \text{p.p } t \in [0, T], \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1}$$

où H est un espace de Hilbert, $C : [0, T] \rightrightarrows H$ est une multi-application à valeurs convexes fermées, $N_{C(t)}(\cdot)$ représente le cône normal à $C(t)$ au point $u(t)$ au sens d'analyse convexe et $\dot{u}(t)$ est la dérivée de u au point t. Si on suppose que le point $u(t)$ se trouve à l'intérieure de l'ensemble $C(t)$, le cône normal $N_{C(t)}(u(t))$ dans ce cas est réduit à zéro, ce qui signifie que la vitesse est nulle et par suite le point ne bouge pas. Tandis que, tout contact du point $u(t)$ avec la frontière conduit à un mouvement opposé à la normale à $C(t)$ au point $u(t)$.

Un tel problème a été utilisé pour étudier une large classe de modèles mathématiques notamment en mécanique et en ingénierie, citons par exemple, les modèles de contact unilatéral en élasticité, les problèmes d'optimisation, la dynamiques des corps rigides avec frottement, le contrôle optimal, modélisation de mouvement de foule, les circuits électriques,etc ..., pour plus d'information, le lecteur se réfère à [1, 16, 18].

Depuis les travaux de Moreau et vu les nouvelles techniques du traitement des inclusions différentielles gouvernées par le cône normal, plusieurs extensions et variantes du problème (1) ont été introduites et largement étudiées par nombreux chercheurs. Beaucoup de ces nouvelles formes touchent principalement l'ensemble des contraintes $(C(t))_t$ en considérant des ensembles non nécessairement convexes et dépendent à la fois du temps et de l'état, i.e., de la forme $C(t, u(t))$.

L'objectif de ce mémoire est de détailler l'article de Stanislaw Migorski, Mircea Sofonea et Shengda Zeng intitulé "Well-posedness of history-dependent sweeping processes". Dans un espace de Hilbert séparable, les auteurs de cet dernier article ont étudié une nouvelle variante de (1) donnée par

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t)}\big(A\dot{u}(t) + Bu(t) + (\mathcal{R}u)(t)\big), \quad \text{p.p } t \in [0,T], \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{2}$$

où $A : H \to H$ est un opérateur linéaire, borné, symétrique et α-coercif, $B : H \to H$ est un opérateur L_B-Lipschitzien et $\mathcal{R} : C([0,T]; H) \to C([0,T]; H)$ est un opérateur avec retard. Il est clair que , si $\mathcal{R}u = 0$ pour tout $u \in C([0,T]; H)$, $Az = 0$ pour tout $z \in H$ et $B = I$ où I est l'opérateur d'identité de H alors, le problème (2) est réduit à un processus de rafle classique de type (1). L'inclusion (2) est une extension du problème suivant en posant $\mathcal{R}u = 0$ pour tout $u \in C([0,T]; H)$

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t)}\big(A\dot{u}(t) + Bu(t)\big), \quad \text{p.p } t \in [0,T], \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{3}$$

Ce dernier problème a été étudier récemment par S. Adly et T. Haddad [2], où ils ont démontré le résultat d'existence et d'unicité en suivant une méthode basée sur une discrétisation du temps et supposant que $Bu_0 \in C(0)$.

On peut décrire le matériel présenté dans ce travail en trois chapitres, on commence par un chapitre introductif qui rappelle et présente les résultats fondamentaux et les concepts de base que l'on va utiliser dans les autres chapitres, notamment les notions de l'analyse convexe, les cônes normaux et la distance de Hausdorff.

Le deuxième chapitre commence par un petit rappel sur la théorie des opérateurs monotones et maximaux monotones, ensuite, on introduit la classe des opérateurs avec mémoire (avec retard) en citant quelques exemples illustratifs. Puis, on passe à la démonstration du théorème principal de ce chapitre qui consiste à prouver le résultat d'existence et d'unicité du problème 2. Ce résultat vient après quelques lemmes auxiliaires qui sont également démontrés.

Finalement dans le troisième chapitre, on utilise ce résultat abstrait pour étudier un problème de frottement quasi-statique pour des matériaux viscoélastiques avec une longue mémoire avec des conditions unilatérales sur la vitesse.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre introductif a pour but de rappeler les résultats fondamentaux et les concepts de base que l'on va utiliser dans les autres chapitres. Selon les problèmes auxquels nous sommes confrontés au cours de ce travail, on est amené à utiliser quelques résultats et outils auxiliaires que l'on accepte (souvent) sans démonstration, pour plus de détails sur le matériel présenté dans cette partie, le lecteur se réfère à [3, 8, 18]. Dans tout ce qui suit, sauf mention contraire, X désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et X^* représente son dual topologique formé de toutes les formes linéaires $x^* : X \to \mathbb{R}$.

1.1 Notations générales

- p.p : presque partout.
- i.e. : c'est-à-dire.
- resp. : respectivement.
- min,max,inf,sup minimum,maximum,infimum et supremum respectivement.
- H : représente un espace de Hilbert.
- $W^{1,\infty}$: représente l'espace de Sobolev d'ordre 1 sur $\cdot$ définit comme suite :

$$W^{1,\infty}(\cdot) = \{v \in L^{\infty}(\cdot); \frac{\partial v}{\partial x} \in L^{\infty}(\cdot)\}.$$

- X^* : dual topologique d'un espace topologique X.

- $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$: produit scalaire sur H.
- $\overline{\mathbb{B}}_X$ la boule unité fermée de X .
- C° : cône polaire de l'ensemble C.
- $N_C(x)$: cône normal à un ensemble convexe C au point x.
- $\mathrm{Proj}_C(\cdot)$ l'application de projection sur C .
- $\mathrm{Int}(A), \bar{A}$: l'intérieur et l'adhérence d'un ensemble A respectivement .
- $e(A, B)$: l'excès de l'ensemble A à l'ensemble B.
- $d(\cdot, C)$ ou $d_C(\cdot)$: la fonction distance .
- $F : X \rightrightarrows Y$: désigne une application à valeurs ensemblistes (multi-application) de X dans Y.
- $\mathrm{co}(\Omega)$: enveloppe convexe d'un ensemble Ω.
- $d_H(A, B)$:" distance "de Pompeiu-Hausdorff entre deux parties A et B.
- $\bigtriangledown$: L'opérateur de gradient.
- Div : L'opérateur de divergence.
- $\partial\Omega$: la frontière d'un ensemble Ω.
- I : l'opérateur d'identité.
- $$C([0, T]; X) := \{f : [0, T] \to X : f \text{ est continue } \}.$$
- f^* : la conjuguée de Fenchel d'une fonction f.
- $\psi_C(\cdot), \sigma_C(\cdot)$: la fonction indicatrice (resp. support) d'un ensemble C.
- $\partial f(x)$: sous-différentiel d'une fonction convexe f au point x.
- v_ν, v_τ : représentent, respectivement, la composante normale et la composante tangentielle d'un champ de vecteur v.

1.2 Définitions et première propriétés

Définition 1.1. *On appelle produit scalaire sur X, toute forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ possédant les propriétés supplémentaires suivantes*

$$\langle x, y \rangle \geq 0 \ \textit{(positivité)}$$

$$\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \ \textit{(symétrie).}$$

À titre d'exemple, sur l'espace $L^2(\Omega)$ de fonctions de carrée intégrable, on définit le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x)dx,$$

dont la norme associée est

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Le produit scalaire permet de mesurer l'angle formé par deux vecteurs x et y via l'équivalence suivante

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|} \Leftrightarrow \theta = \arccos \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|}.$$

Cette dernière expression est bien définie grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz qui donne

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\|y\| \Rightarrow |\cos(\theta)| = \frac{|\langle x, y \rangle|}{\|x\|\|y\|} \leq 1,$$

cela conduit à dire que

$$x \text{ et } y \text{ forment un angle aigu si } \langle x, y \rangle > 0, (0 \leq \theta < \tfrac{\pi}{2})$$

$$x \text{ et } y \text{ forment un angle obtus si } \langle x, y \rangle < 0, (\theta > \tfrac{\pi}{2})$$

$$x \text{ et } y \text{ forment un angle droit si } \langle x, y \rangle = 0, (\theta = \tfrac{\pi}{2}).$$

L'application $\|\cdot\| : x \in X \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est une norme sur X appelée la norme hilbertienne ou la norme associée (induite) au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. L'espace X muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ s'appelle un espace pré-hilbertien. Si de plus, X est complet pour la norme induite, dans ce cas, $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est dit un espace de Hilbert que l'on note généralement H.

Définition 1.2. *Étant donné un point $x_0 \in \mathbb{R}$ et un réel $r > 0$, les sous ensembles de X notés*

$$B[x_0, r] := \{x \in X : \|x - x_0\| \leq r\}$$

$$B(x_0, r) := \{x \in X : \|x - x_0\| < r\}$$

$$S[x_0, r] := \{x \in X : \|x - x_0\| = r\}$$

sont appelés, respectivement

boule fermée de centre x_0 et de rayon r

boule ouverte de centre x_0 et de rayon r

sphère de centre x_0 et de rayon r.

En particulier, si $r = 1$ et $x_0 = 0$ alors $\overline{\mathbb{B}}$ (resp. $\mathbb{B}$) représente la boule unité fermée (resp. ouverte).

1.3 Quelque rappels d'analyse convexe

Définition 1.3.

1. *On appelle segment joignant ou reliant deux points $x, y \in X$ l'ensemble*

$$[x, y] := \{\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda \in [0, 1]\}.$$

2. *Un sous ensemble $C \subset X$ est dit convexe si pour tous $x, y \in C$ le segment reliant x à y reste dans C, i.e.,*

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \subset C \text{ pour tout } \lambda \in [0, 1].$$

3. *Une fonction $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est dite convexe si, pour tous $x, y \in \operatorname{dom} f$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$ l'inégalité suivante, dite "l'inégalité de convexité "est vérifiée*

$$\forall \lambda \in [0, 1] : f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),$$

où $\operatorname{dom} f$ est le domaine de f défini par

$$\operatorname{dom} f = \{x \in X, f(x) < +\infty\}.$$

La fonction f est dite strictement convexe si l'inégalité de convexité est stricte. La définition de la convexité signifie que le segment reliant les deux points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ se trouve toujours au dessus de la courbe de f.

4. *On appelle épigraphe de $f : X \to \mathbb{R}$ le sous-ensemble de $X \times \mathbb{R}$ noté et défini comme suit*

$$\mathrm{epi}\,(f) = \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq r\}.$$

5. *Soit Ω un sous ensemble de X. L'enveloppe convexe (convex hull) de Ω, que l'on note $\mathrm{co}\,(\Omega)$, est le plus petit ensemble convexe contenant Ω, i.e.,*

$$\mathrm{co}\,(\Omega) = \bigcap \{C : C \text{ convexe et } \Omega \subset C\}.$$

Dans ce cas, le plus petit ensemble convexe **fermé** *contenant Ω, noté $\overline{\mathrm{co}}\,(\Omega)$, s'appelle l'enveloppe convexe fermé de Ω.*

Exemple 1.4.

1. *Les boules $\mathbb{B}[x_0, r]$ et $\mathbb{B}(x_0, r)$ sont des ensembles convexe pour tous $x_0 \in X$ et $r \in \mathbb{R}_+$.*
2. *Tout sous espace vectoriel de X est convexe.*
3. *Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto |x|$ sont convexes.*

Définition 1.5. *Soit C un ensemble non vide de X.*

(a) *La fonction distance associée à C, notée $d(\cdot, C)$ ou $d_C(\cdot)$, est définie par*

$$X \ni x \mapsto d(x, C) := \inf_{y \in C} d(x, y) = \inf_{y \in C} \|x - y\|.$$

Les deux propriétés suivantes ont lieu

$$x \in \overline{C} \Leftrightarrow d(x, C) = 0.$$

La fonction distance est Lipschitzienne de rapport 1, i.e.,

$$|d(x, C) - d(y, C)| \leq \|x - y\| \text{ pour tous } x, y \in X. \tag{1.1}$$

(b) *Un élément $y \in C$ est une projection (ou un projeté) de $x \in X$ sur C si*

$$d(x, C) = \|x - y\|.$$

Cet élément y se note $\mathrm{Proj}\,(x, C)$ *ou* $P_C(x)$*, autrement dit*

$$P_C(x) = \mathrm{argmin}\left(C \ni z \mapsto \|x - z\|\right) = \{v \in C : \|x - v\| = \min_{z \in C} \|x - z\|\}.$$

Le Théorème suivant donne les conditions d'existence et d'unicité de la projection dans un espace de Hilbert. On rappelle que ce théorème n'est plus valable dans un espace normé général.

Théorème 1.6 (Théorème de la projection sur un convexe fermé)**.**
Soit C un ensemble convexe fermé de H, alors pour tout $x \in H$, il existe une et une seule projection de x sur C, i.e.,

$$\forall x \in H, \exists!\, y = \mathrm{Proj}\,(x, C) \in C : d(x, C) = \|x - y\|.$$

De plus, la projection sur C se caractérise par l'équivalence suivante

$$y = \mathrm{Proj}\,(x, C) \Leftrightarrow y \in C \ \textit{et}\ \forall z \in C, \langle z - y, x - y\rangle \leq 0. \tag{1.2}$$

Il est à noter que si l'ensemble C est convexe alors, l'application de projection $\mathrm{Proj}\,(\cdot, C)$ est lipschitzienne de rapport 1, i.e.,

$$\|\mathrm{Proj}\,(x, C) - \mathrm{Proj}\,(y, C)\| \leq \|x - y\|, \forall x, y \in H. \tag{1.3}$$

Définition 1.7.

- *Un sous ensemble $K \subset X$ est dit un cône si $\lambda K \subset K$ pour tout $\lambda \geq 0$; autrement dit, K est invariant par l'homothétie de centre 0 et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Si de plus K est convexe alors K est dit cône convexe, il est clair qu'un cône contient toujours l'origine ($\lambda = 0 : 0K = \{0\} \subset K$).*
- *Le cône polaire (ou cône polaire négatif, ou cône dual) de $K \subset X$ est l'ensemble*

$$K^\circ := \{y \in X^*, \langle y, x\rangle \leq 0 \ \textit{pour tout}\ x \in K\},$$

d'autres notations sont également utilisées pour le cône polaire de K : K^-, $K^\ominus$,...,etc.
Citons par exemple, le cône de Pareto de $\mathbb{R}^n$ (orthant positif)

$$K := \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_i \geq 0 \ \textit{pour tout}\ i = 1, \ldots, n\} = \mathbb{R}^n_+,$$

alors

$$K^\circ = -K = \{-x = (-x_1, \ldots, -x_n) \in \mathbb{R}^n\} = \mathbb{R}^n_-.$$

En analyse convexe, les cônes les plus couramment utilisés sont le cône tangent et le cône normal. Soit C un ensemble convexe non vide de X. Le cône tangent à C au point $x \in C$ que l'on note $T(C;x)$ ou $T_C(x)$, est le cône fermé (de sommet 0) engendré par $C - x$, i.e.,

$$T(C;x) := \overline{\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}_+} \lambda\big(C - x\big)}.$$

Puisque C est convexe, il est évident que $T(C;x)$ est un cône convexe fermé. On remarque que $C \subset x + T(C;x)$, et si $x \in \operatorname{Int}(C) \neq \emptyset$ alors $T(C;x) = X$.

On introduit maintenant la notion du cône normal à C au point x, noté $N(C;x)$ ou $N_C(x)$, comme étant le cône polaire du cône tangent, i.e.,

$$N_C(x) := (T_C(x))^\circ = \{x^* \in X^* : \langle x^*, z\rangle \leq 0, \forall z \in T(C;x)\}.$$

La définition de $T_C(x)$, nous permet de conclure que

$$N_C(x) = \{x^* \in X^*, \langle x^*, y - x\rangle \leq 0, \text{ pour tout } y \in C\}. \tag{1.4}$$

Il est facile de vérifier que si $x \in \operatorname{Int}(C)$ avec $\operatorname{Int}(C) \neq \emptyset$ alors $N_C(x) = \{0\}$. De plus pour tout $x \in -C$ et $y, z \in X$ tels que $y + z \in C$

$$N_C(-x) = -N_{-C}(x), N_C(y+z) = N_{C-z}(y). \tag{1.5}$$

Exemple 1.8. *Sur $\mathbb{R}$ on considère l'ensemble $C = [0,1]$ alors*

$$T_{[0,1]}(1) =]-\infty, 0], \quad N_{[0,1]}(1) = [0, +\infty[.$$

En effet

$$\begin{aligned} C - \{1\} &= \{x - 1, x \in [0,1]\} = [-1, 0] \\ &\Rightarrow \mathbb{R}_+(C - \{1\}) = \{\lambda x, x \in C - \{1\}, \lambda > 0\} \\ &= \{\lambda x, x \in [-1, 0], \lambda > 0\} =]-\infty, 0] \\ &\Rightarrow T_{[0,1]}(1) = \overline{\mathbb{R}_+(C - \{1\})} = \overline{]-\infty, 0]} =]-\infty, 0]. \end{aligned}$$

alors

$$N_{[0,1]}(1) = \left(T_{[0,1]}(1)\right)^{\circ} = \{v \in \mathbb{R} : v(\underbrace{y-1}_{\leq 0}) \leq 0, \forall y \in [0,1]\} = [0,+\infty[.$$

Dans un espace de Hilbert, le cône normal à un ensemble convexe (fermé) C est fortement lié à l'application de projection, ce que l'on peut voir clairement dans l'équivalence suivante

$$y = \operatorname{Proj}_C(x) \Leftrightarrow x - y \in N_C(y). \tag{1.6}$$

Définition 1.9. *Soit $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe et finie en $\overline{x} \in X$. Le sous-différentiel (de Fenchel) de f au point $\overline{x}$, noté $\partial f(\overline{x})$, est le sous ensemble de X^* défini par*

$$\partial f(\overline{x}) := \{v \in X^* : \langle v, x - \overline{x}\rangle \leq f(x) - f(\overline{x}) \text{ pour tout } x \in X\}. \tag{1.7}$$

Si $\overline{x} \notin \operatorname{dom} f$ alors $\partial f(\overline{x}) = \emptyset$. Par exemple, si $f(x) = |x|$ alors

$$\partial f(a) = \begin{cases} [-1,1] & \text{si } a = 0 \\ \{1\} & \text{si } a > 0 \\ \{-1\} & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Le sous-différentiel peut être défini de manière équivalente géométriquement via le cône normal à l'épigraphe comme suit

$$\partial f(\overline{x}) := \{v \in X^* : (v,-1) \in N_{\operatorname{epi} f}(\overline{x}, f(\overline{x}))\}.$$

Il est à noter que le sous-différentiel d'une fonction convexe fermée est convexe fermé (Voir [24]).

La conjuguée de Legendre-Fenchel d'une fonction $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est la fonction, notée f^*, définie sur le dual X^* par

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in X} \left(\langle x^*, x\rangle - f(x)\right) \text{ pour tout } x^* \in X^*.$$

Par exemple, sur $\mathbb{R}$, on définit la fonction f par $f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}$ alors

$$f^*(v) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(vx - ax - b\right) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left((v-a)x - b\right) = \begin{cases} -b & \text{si } v = a \\ +\infty & \text{si } v \neq a. \end{cases}$$

En particulier, pour $f = \psi_C(\cdot)$ où $\psi_C(\cdot)$ est la fonction indicatrice de l'ensemble C définie par $\psi_C(x) = 0$ si $x \in C$ et $\psi_C(x) = +\infty$ sinon alors, la conjuguée de Fenchel de f dans ce cas s'appelle la fonction support (d'appui) que l'on note $\sigma_C(\cdot)$. De façon plus précise

$$\begin{aligned} \sigma_C(\cdot) :& X^* \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ & x^* \mapsto \sigma_C(x^*) = \psi_C^*(x^*) = \sup_{x \in C} \langle x^*, x \rangle. \end{aligned}$$

Il est clair que la fonction support est convexe positivement homogène ($\sigma_C(\alpha x^*) = \alpha \sigma_C(x^*), \alpha > 0$). De plus, si l'ensemble C est convexe fermé alors la fonction $\sigma_C(\cdot)$ est semi-continue inférieurement (s.c.i en abrégé, voir la dernière section du ce chapitre pour la définition). On peut également caractériser l'appartenance d'un point $v \in H$ à l'enveloppe convexe fermé d'un ensemble $S \in H$ via l'inégalité suivante

$$v \in \overline{\text{co}}(S) \Leftrightarrow \langle v, z \rangle \leq \sigma_S(z), \forall z \in H. \tag{1.8}$$

Le sous différentiel d'une fonction propre, convexe et s.c.i f peut se caractériser via la conjuguée de Fenchel à travers l'équivalence suivante (voir [24])

$$\begin{aligned} x^* \in \partial f(x) \quad &\Leftrightarrow \quad f^*(x^*) + f(x) - \langle x^*, x \rangle = 0 \Leftrightarrow f^*(x^*) + f(x) - \langle x^*, x \rangle \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \partial f^*(x^*), \end{aligned} \tag{1.9}$$

c'est à dire $(\partial f)^{-1} = \partial f^*$.

Pour plus d'informations sur la théorie des fonctions convexes, le lecteur se réfère aux références [4, 9].

1.4 Généralités sur les applications multivoques

Étant donné deux ensembles E et Y. Si à chaque élément x de E, on associe un sous ensemble éventuellement non vide de Y noté $F(x)$, on définit une application multivoque F de E vers Y et on note $F : E \rightrightarrows Y$.

Dans la littérature, les applications multivoques sont aussi appelées multi-applications, multifonctions, relations ou correspondances.

Définition 1.10. *Soient E et Y deux ensembles non vides et $F : E \rightrightarrows Y$ une application multivoque.*

1. *Le domaine de F noté* $\operatorname{Dom} F$ *est l'ensemble*

$$\operatorname{Dom} F = \{x \in E \ : \ F(x) \neq \emptyset\}.$$

2. *Si A est un sous ensemble de E alors $F(A) := \bigcup_{x \in A} F(x)$, en particulier, si $A = \operatorname{Dom} F$ alors, $R(F) := F(\operatorname{Dom} F)$ est l'image de F.*

3. *L'image de F noté* $\mathrm{R}(F)$ *est*

$$\mathrm{R}(F) = \bigcup_{x \in E} F(x).$$

4. *Le graphe de F noté* $\operatorname{Gr}(F)$ *est*

$$\operatorname{Gr}(F) = \{(x, y) \in E \times Y \ : \ y \in F(x)\}.$$

5. *On appelle image réciproque d'une partie non vide D de Y par F l'ensemble*

$$F^{-1}(D) := \{x \in E, F(x) \cap D \neq \emptyset\},$$

d'autre part, pour tout $y \in Y$ on a

$$F^{-1}(y) := \{x \in X : y \in F(x)\}.$$

6. *On note $F^{-1} : Y \rightrightarrows E$ la multi-application inverse de F définie par*

$$x \in F^{-1}(y) \Leftrightarrow y \in F(x).$$

7. *Si E et Y sont deux espaces topologiques alors, F est dite semi-continue supérieurement (s.c.s en abrégé), si $F^{-1}(U)$ est un fermé dans E pour tout fermé $U \subset Y$.*

La notion de la Lipschitzité dont les origines remontent à quelques siècles, a joué un rôle important dans plusieurs domaines comme la théorie de la mesure et la résolution des équations différentielles ordinaires. Il est donc intéressant d'étendre cette propriété, du cadre univoque au cadre multivoque. À cette fin, et pour passer à la version ensembliste, on aura besoin d'introduire la notion d'excès et la distance de Hausdorff qui sont deux outils importants en analyse multivoque permettant d'évaluer (dans un certain sens) l'écart entre deux ensembles.

Définition 1.11. *Soit (X, d) un espace métrique et soient A et B deux sous-ensembles de X.*

(a) On appelle excès de A sur B l'expression suivante, à valeur dans $[0, +\infty]$

$$e(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b).$$

Il est évidemment indifférent de remplacer les ensembles considérés par leurs adhérences, i.e., $e(A, B) = e(\overline{A}, \overline{B})$.

Notons que, si on prend A la partie vide de X on obtient, quel que soit B (éventuellement vide lui-même)

$$e(\emptyset, B) = 0.(\text{ ça revient au fait que le supremum sur un ensemble vide est } 0)$$

En outre, pour tout $a \in X : d(a, \emptyset) = +\infty$ donc

$$A \neq \emptyset \Rightarrow e(A, \emptyset) = +\infty.$$

Notons également que les quantités $e(A, B)$ et $e(B, A)$ ne sont pas nécessairement égales. En effet, si $A = [0, 10]$ et $B = [12, 18]$ alors, $e(A, B) = 12$ tandis que $e(B, A) = 8$.

Une définition équivalente de l'excès se donne par

$$e(A, B) = \inf\{r > 0 : A \subset B + r\overline{\mathbb{B}}\} \quad \text{où } B + r\overline{\mathbb{B}} = \bigcup_{x \in B} B[x, r].$$

(b) La distance de Hausdorff (Pompeiu-Hausdorff) entre A et B, est la quantité

$$d_H(A, B) = \max\{e(A, B), e(B, A)\}.$$

De façon équivalente, cette quantité peut être exprimée par

$$d_H(A, B) = \inf\left\{r > 0 : A \subset B + r\overline{\mathbb{B}}_X \text{ et } B \subset A + r\overline{\mathbb{B}}_X\right\}.$$

Il faut noter que la "distance" de Hausdorff n'est pas une distance. Toute fois, cette dernière peut l'être, lorsque nous travaillons par exemple sur l'ensemble des parties fermées bornées de X.

Proposition 1.12. *Soient A, B et C trois sous-ensemble de l'espace métrique X alors*

1. $d_H(A,B) = d_H(B,A)$ *et* $d_H(A,B) = 0 \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$. *(ce qui confirme que $d_H(\cdot,\cdot)$ n'est pas une distance)*

2. $d_H(A,B) \leq d_H(A,C) + d_H(C,B)$.

3. $d_H(A,B) = \sup\limits_{x \in X} |d(x,B) - d(x,A)|$.

Pour justifier quelques passages dans ce travail, on aura besoin au résultat auxiliaire suivant

Lemme 1.13 (voir [15])**.** *Soient S et S' deux ensembles non vides convexes de X alors*

$$|\sigma_S(x^*) - \sigma_{S'}(x^*)| \leq \|x^*\| d_H(S,S') \text{ pour tout } x^* \in \operatorname{dom} \sigma_S(\cdot) \cap \operatorname{dom} \sigma_{S'}(\cdot). \tag{1.10}$$

1.5 Topologie faible

On appelle topologie faible sur X que l'on note $\sigma(X, X^*)$ la topologie la moins fine rendant continue toutes les applications $f \in X^* : X \to \mathbb{R}$, autrement dit, $\sigma(X, X^*)$ est la topologie la moins fine qui contient tous les ensembles $f^{-1}(I)$ pour tout $f \in X^*$ et tout intervalle I de $\mathbb{R}$. La notion de la convergence dans cette topologie est donnée dans la définition suivante

Définition 1.14. *(Proposition)*

Soient $(x_n)_n$ une suite dans un espace normé X et $x \in X$. On dit que $(x_n)_n$ converge faiblement vers x et on écrit $x_n \rightharpoonup x$ ou $x = w - \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$ ou bien $x_n \xrightarrow{w} x$ si et seulement si

$$\lim_{n \to +\infty} \big(\langle f, x_n \rangle := f(x_n)\big) = \langle f, x \rangle \text{ pour tout } f \in X^*.$$

Notre tâche maintenant consiste à relier la notion de la convergence faible avec un nouveau concept de limite inférieure. Pour cela nous allons introduire la notions de la limite inférieure (resp. supérieure) pour une suite ordinaire de $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Définition 1.15. *Soit $(x_n)_n$ une suite de $\overline{\mathbb{R}}$. On définit les limites inférieure et supérieure de*

$(x_n)_n$ *comme suit*

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \big(\inf_{k\geq n} x_k\big)$$
$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \big(\sup_{k\geq n} x_k\big).$$

Ces deux semi-limites vérifient les inégalités suivantes

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Exemple 1.16.

Considérons la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ *définie comme suit*

$$x_n = (-1)^n(1+\frac{1}{n+1}) = \{2, \frac{-3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{-5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{-7}{6}, ...\},$$

il est clair que $\inf x_n = \min x_n = \frac{-3}{2}$ *et* $\sup x_n = \max x_n = 2$. *Posons*

$$y_n := \inf_{k\geq n} x_k, \quad z_n := \sup_{k\geq n} x_k$$

alors

$$y_0 = \frac{-3}{2}, y_1 = \frac{-3}{2}, y_2 = \frac{-5}{4}, ..., y_n = -\big(1+\frac{1}{2n}\big)$$
$$z_0 = 2, z_1 = \frac{4}{3}, z_2 = \frac{4}{3}, ..., z_n = 1+\frac{1}{2n+1}.$$

La suite $(y_n)_n$ *(resp.* $(z_n)_n$*) est croissante (resp. décroissante) alors*

$$\limsup_{n} x_n = \inf_{n} \sup_{k\geq n} x_k = \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \big(1+\frac{1}{2n+1}\big) = 1$$
$$\liminf_{n} x_n = \sup_{n} \inf_{k\geq n} x_k = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} -\big(1+\frac{1}{2n}\big) = -1.$$

Proposition 1.17. *Soient* $(x_n)_n$ *une suite dans un espace normé* X *et* $x \in X$. *Soient* $(f_n)_n$ *une suite dans* X^* *et* $f \in X^*$. *Alors on a*

(a) Si (x_n) *converge vers* x *pour la norme (fortement), alors* $(x_n)_n$ *converge vers* x *pour la topologie faible (faiblement).*

(b) Si (x_n) *converge faiblement vers* x *alors la suite* $(\|x_n\|)_n$ *est bornée et*

$$\|x\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|. \tag{1.11}$$

(c) Si (x_n) converge faiblement vers x et f_n converge fortement vers f dans X^* alors

$$\langle f_n, x_n \rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle f, x \rangle.$$

Théorème 1.18 ([20], Théoreme 1.20)**.** *Soit (x_n) une suite bornée dans un espace de Hilbert H telle que chaque sous suite de (x_n)converge faiblement vers la même limite $x \in H$. Alors, $(x_n)_n$ converge faiblement vers x dans H.*

Il est connu que dans un espace normé quelconque X (de dimension infinie), la compacité forte de la boule unité fermé n'est pas toujours vérifiée, ce qui n'est pas le cas avec la compacité faible. Cette propriété joue un rôle crucial dans l'étude de la convergence de certaines suite avec des conditions supplémentaires sur l'espace X.

Théorème 1.19. *(Banach-Alaoglu)*
La boule unité fermé $\overline{\mathbb{B}}_H = \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$ est faiblement compacte, i.e., pour toute suite bornée $(x_n)_n$ de H, on peut extraire une sous suite de $(x_n)_n$ qui converge faiblement dans H.

Proposition 1.20. *Dans un espace de dimension finie, les topologies fortes et faibles coïncident.*

1.6 Autres résultats et définitions

Définition 1.21.

- *Soient $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ et $x_0 \in X$, on dit que f est*

  (a) propre si et seulement si

$$f(x) \neq -\infty, \forall x \in X \quad \text{et} \quad \exists y_0 \in X : f(y_0) \neq +\infty.$$

  (b) Semi-continue inférieurement (s.c.i en abrégé) si pour tout $r \in]-\infty, f(x_0)]$, il existe un voisinage V de x_0 tel que $f(V) \subset]r, +\infty]$.

La semi-continuité inférieure peut se caractériser par l'une des deux propriétés suivante : $\operatorname{epi}(f)$ *est fermé dans* $X \times \mathbb{R}$ *ou les ensembles de niveau* $[f \leq r] := \{x \in X : f(x) \leq r\}$ *sont fermés dans* X *pour tout* $r \in \mathbb{R}$.

(c) Semi-continue supérieurement (s.c.s en abrégé) si pour tout $r \in [f(x_0), +\infty[$, *il existe un voisinage* V *de* x_0 *tel que* $f(V) \subset [-\infty, r[$.

(d) f *est continue au point* x_0 *si et seulement si* f *est, à la fois, s.c.i et s.c.s au point* $x_0 \in X$.

- *Une norme* $\|\cdot\|$ *a la propriété de Kadec-Klee si pour toute suite* (x_n) :

$$\left.\begin{array}{l} x_n \xrightarrow{w} x \\ \|x_n\| \longrightarrow \|x\| \end{array}\right\} \Rightarrow x_n \longrightarrow x. \tag{1.12}$$

Tout espace de Hilbert a la propriété de Kadec-Klee.

Théorème 1.22. *Soit* $f : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *une fonction convexe alors,* f *est s.c.i si et seulement si, elle est faiblement s.c.i. Cela nous permet de conclure que si* f *est convexe et s.c.i alors*

$$\forall (x_n)_n \subset H : x_n \xrightarrow{w} x \Rightarrow f(x) \leq \liminf_n f(x).$$

Le lemme suivant se considère comme une variante du lemme de Gronwall.

Lemme 1.23. *Soient* $x, \Psi : [T_0, T] \to \mathbb{R}$ *et* $g : [T_0, T] \to \mathbb{R}_+$ *trois fonctions continues. On suppose que*

$$x(t) \leq \Psi(t) + \int_{T_0}^{t} g(s)x(s)ds,$$

alors

$$x(t) \leq \Psi(t) + \int_{T_0}^{t} g(s)\Psi(s)e^{\int_{T_0}^{s} g(r)dr}ds.$$

Théorème 1.24 (Lebesgue differentiation theorem). *Soit* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}; H)$ *alors*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(t)|dt = f(x).$$

Lemme 1.25. *Soit* $f : H \to \mathbb{R}$ *une fonction convexe positivement homogène. Alors*

$$f^*(v) = \psi_C(v), \forall v \in H \text{ tel que } C := \partial f(0).$$

Définition 1.26. *Soit $u(\cdot)$ une application définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans un espace normé X. On dit que $u(\cdot)$ est absolument continue sur $[\alpha, \beta] \subset I$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$, tel que pour tous $s_i, r_i \in [\alpha, \beta], i = 1, ..., k$, avec $s_{i-1} \leq r_i \leq s_i$ et $\sum_{i=1}^{k}(s_i - r_i) < \delta$ on ait*

$$\sum_{i=1}^{k} \|u(s_i) - u(r_i)\| < \varepsilon.$$

Il s'ensuit que

- *toute application Lipschitzienne est absolument continue.*
- *toute application absolument continue est uniformément continue.*
- *toute application absolument continue est presque partout dérivable.*

Théorème 1.27.

(a) Soit $u(\cdot) : I \to H$ telle que $u(t) = u(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} v(s)\, ds$ avec $v(\cdot) \in L^1(I; H), t_0, t \in I$ alors $u(\cdot)$ est absolument continue sur I et $\dot{u}(t) = v(t)$ pour presque tout $t \in I$.

(b) Étant donné une application absolument continue $u(\cdot) : I \to H$, alors il existe une application $v(\cdot) : I \to H$ telle que

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(s)ds \text{ pour tous } t_0, t \in I,$$

de plus, $u(\cdot)$ est presque partout dérivable et $\dot{u}(\cdot) = v(\cdot)$.

Définition 1.28 (Voir [10]).

La variation d'une application $u : [0, T] \to X$, que l'on note $\operatorname{var}(u, [0, T])$, se donne par

$$\operatorname{var}(u, [0,T]) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} \|u(t_{i+1}) - u(t_i)\| : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = T \text{ est une subdivision de } [0,T] \right\}.$$

u est dite à variation bornée si $\operatorname{var}(u, [0, T]) < +\infty$.

Les assertions suivantes ont lieu :

1. *Si $u : [0, T] \to X$ est L-lipschitzienne sur $[0, T]$, alors u est à variation bornée et $\operatorname{var}\big(u, [0, T]\big) \leq LT$.*

2. *Si* $u : [0,T] \to X$ *est croissante alors elle est à variation bornée avec* $\operatorname{var}\big(u,[0,T]\big) = u(T) - u(0)$.

Le théorème suivant donne un résultat important permet de récupérer la convergence faible d'une sous-suite de fonctions à variation bornée.

Théorème 1.29 (Voir [14], Théoreme 2.1)**.**
Soit (u_n) *une suite de fonctions de l'intervalle* $I = [0,T]$ *à valeurs dans un espace de Hilbert* H. *Supposons que* (u_n) *est uniformément borné en norme et en variation, i.e., il existe deux constantes* $L, M > 0$ *telles que :*

$$\sup_{t\in I} \|u_n(t)\| \leq L \quad \text{et} \quad \operatorname{var}(u_n, I) \leq M, \forall n \in \mathbb{N},$$

alors, il existe une sous-suite $(u_{n_k})_k$ *de* (u_n) *et une fonction* $u : I \to H$ *telles que*

$$\operatorname{var}(u, I) \leq M \quad \text{et} \quad w - \lim_{k} u_{n_k}(t) = u(t), \forall t \in I.$$

Chapitre 2

Étude d'un processus de rafle avec retard

On commence ce chapitre par un petit rappel sur la théorie des opérateurs monotones et maximaux monotones, ensuite, on introduit la classe des opérateurs avec mémoire (avec retard) en citant quelques exemples illustratifs. Puis, on passe à la démonstration du théorème principal du ce chapitre qui consiste à prouver le résultat d'existence et d'unicité du problème 2. Ce résultat vient après quelques lemmes auxiliaires qui sont également démontrés.

Tout d'abord, on rappelle quelques définitions et résultats sur les opérateurs dont les valeurs sont univoques (singleton) ou ensemblistes (multivoque). On dit qu'un opérateur $A : H \to H$ est

1. α-coercif avec $\alpha > 0$ si $\langle Au, u\rangle \geq \alpha\|u\|^2$.
2. monotone si $\langle Au - Av, u - v\rangle \geq 0$ pour tous $u, v \in H$.
3. fortement monotone de constante $m_A > 0$ si
$$\langle Au - Av, u - v\rangle \geq m_A\|u - v\|^2, \quad \text{pour tous } u, v \in H.$$
4. pseudo-monotone s'il est borné et pour toute suite $(u_n)_n \subset H$ qui converge faiblement vers un élément $u \in H$ tel que $\limsup_n \langle Au_n, u_n - u\rangle \leq 0$, on a
$$\langle Au, u - v\rangle \leq \liminf_{n\to+\infty}\langle Au_n, u_n - v\rangle, \text{pour tout } v \in H.$$

5. hemi-continu si la fonction $\lambda \mapsto \langle A(u+\lambda v), w\rangle$ est continue sur $[0,1]$, pour tous $u, v, w \in H$.

Considérons maintenant un opérateur multivoque $B : H \rightrightarrows H$, alors B est dit

1. monotone si $\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle \geq 0$, pour tout $(x_i, y_i) \in \mathrm{Gr}\,(B), i = 1, 2$.
2. maximal monotone s'il est maximal parmi tous les opérateurs monotones ordonnée par l'inclusion de leurs graphes dans $H \times H$, i.e., s'il n'existe aucun autre opérateur monotone T tel que $\mathrm{Gr}\,(B) \subset \mathrm{Gr}\,(T)$. Pour bien comprendre cette définition, on considère l'opérateur $A : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ défini par

$$A(x) = \begin{cases} \{1\} \text{ si } x > 1 \\ \{0\} \text{ si } x < 1 \\ \text{ un sous-ensemble de } [0,1] \text{ si } x = 1, \end{cases}$$

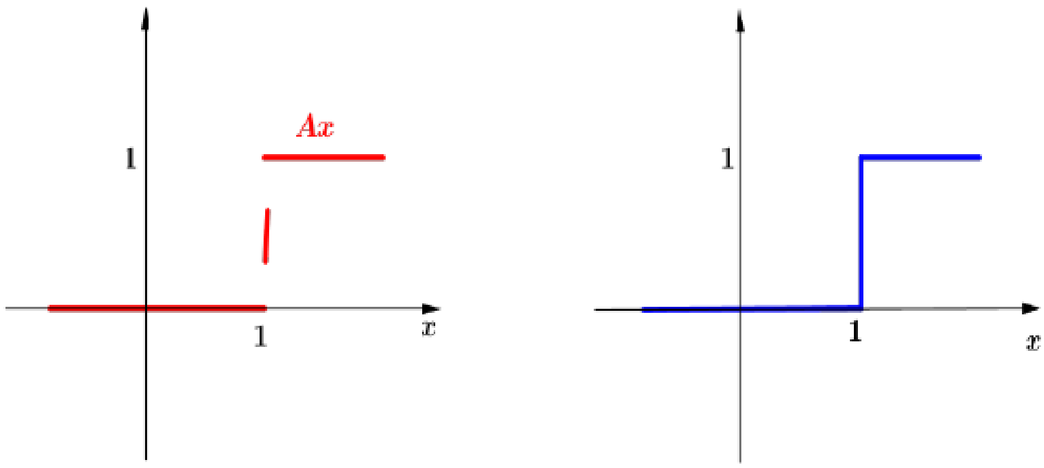


FIGURE 2.1 – L'opérateur A est maximal monotone si et seulement si A(1)=[0,1].

Un autre exemple est donné par le cône normal d'un ensemble non vide convexe fermé.

Au cours de ce travail, on est arrivé à utiliser quelques résultats et propriétés qui nous a permet de justifier plusieurs passages et de donner un bagage assez suffisant pour bien comprendre les différentes preuves. Cette collection des outils auxiliaires est donner dans une liste de théorèmes et lemmes.

Théorème 2.1 ([5], Corollaire 1.1)**.** *Soient X un espace réflexif, $B : X \to X^*$ un opérateur* *hemi-continue borné et $A : X \rightrightarrows X^*$ un opérateur maximal monotone. Alors $A+B$ est maximal monotone.*

Lemme 2.2. *Soit $A : \mathrm{Dom}\,(H) \subset H \rightrightarrows H$ est un opérateur maximal monotone avec un domaine borné, alors A est surjectif, i.e., $R(A) = H$.*

Théorème 2.3 ([13], Théorème 3.69)**.** *Soit X un espace de Banach et $A : X \to X^*$, alors*

(i) si A est borné, hemi-continue et monotone, alors A est pseudo-monotone.

(ii) si A est pseudo-monotone, alors A est demi-continue.

Théorème 2.4 ([13], Théorème 3.74)**.** *Soient X un espace de Banach et $A : X \to X^*$ un opérateur pseudo-monotone et coercif. Alors, A est surjectif.*

Théorème 2.5 ([20], Théorème 1.24)**.** *Soit $A : H \to H$ un opérateur Lipschitzien fortement monotone. Alors, pour tout $y \in H$, il existe un seul élément $x \in H$ tel que $Ax = y$, cela implique implicitement que A est inversible.*

Proposition 2.6 ([20], Proposition 1.25)**.** *Soit $A : H \to H$ un opérateur L_A-Lipschitzien fortement monotone. Alors, $A^{-1} : H \to H$ est aussi $\frac{1}{L_A}$-Lipschitzien fortement monotone.*

2.1 Opérateurs avec retard (avec mémoire)

Définition 2.7. *Un opérateur $\mathcal{R} : C([0,T];X) \to C([0,T];Y)$ est dit opérateur avec retard ou avec mémoire, history-dependent operator en anglais* **(HDO en abrégé)***, s'il existe une constante $L > 0$ telle que*

$$\|(\mathcal{R}u)(t) - (\mathcal{R}v)(t)\|_Y \leq L \int_0^t \|u(s) - v(s)\|_X ds, \tag{2.1}$$

pour toutes $u, v \in C([0,T];X)$ et $t \in [0,T]$.

Pour clarifier cette définition, on considère un point $u_0 \in H$ et un opérateur $\mathcal{R} : C([0,T];H) \to C([0,T];H)$ défini par

$$\mathcal{R}u(t) = \int_0^t u(s)\ ds + u_0, \quad u \in C([0,T];H), t \in [0,T], \tag{2.2}$$

alors, pour tous $u, v \in C([0,T]; H)$ et tout $t \in [0,T]$

$$\|\mathcal{R}u(t) - \mathcal{R}v(t)\| \leq \int_0^t \|u(s) - v(s)\|,$$

ce qui signifie que $\mathcal{R}$ est opérateur avec retard.

Le terme "Hisory-dependent operator" a été introduit pour la première fois dans l'article de Sofonea et Matei, et depuis ce travail, ce concept a fait l'objet de plusieurs étude notamment [19, 12, 11]. Cette terminologie se justifie à partir de l'exemple donné par l'égalité 2.2 où on voit que la nouvelle valeur $\mathcal{R}u(t)$ dépend de toutes les valeurs antérieures $u(s), 0 \leq s \leq t$, ce qui montre bien l'existence d'une mémoire ou d'un retard. Voilà quelques autres exemples de cette classe d'opérateurs.

Exemple 2.8. *1. Soient $u_0 \in X$ et $R : H \to H$ un opérateur L_R-Lipschitzien. Alors, l'opérateur $S : C([0,T]; X) \to C([0,T]; Y)$ donné par*

$$Su(t) = R\big(\int_0^t u(s)ds + u_0\big), u \in C([0,T]; X), t \in [0,T],$$

est avec retard. En effet, soient $u_1, u_2 \in C([0,T]; X)$, alors

$$\begin{aligned}\|Su_1(t) - Su_2(t)\|_Y &= \big\|R\big(\int_0^t u_1(s)ds + u_0\big) - R\big(\int_0^t u_2(s)ds + u_0\big)\big\|_Y, \\ &\leq L_R\big\|\int_0^t u_1(s)ds - \int_0^t u_2(s)ds\big\|_Y, \\ &\leq L_R \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_X ds.\end{aligned}$$

2. Soit $R \in C\big([0,T]; \mathcal{L}(X,Y)\big)$ et $\mathcal{R} : C([0,T]; X) \to C([0,T]; Y)$, on définit l'opérateur dit de de Volterra par

$$\mathcal{R}u(t) = \int_0^t R(t-s)u(s)ds, u \in C([0,T]; X), \;\; t \in [0,T].$$

Soit $u_1, u_2 \in C([0,T], X)$*, alors*

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{R}u_1(t) - \mathcal{R}u_2(t)\|_Y &= \| \int_0^t R(t-s)u_1(s)\ ds - \int_0^t R(t-s)u_2(s)\ ds\| \\
&\leq \int_0^t \|R(t-s)(u_1(s) - u_2(s))\|\ ds, \\
&\leq \int_0^t \|R(t-s)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|u_1(s) - u_2(s)\| ds, \\
&\leq \int_0^t \max_{r\in[0,T]} \|R(r)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|u_1(s) - u_2(s)\| ds, \\
&= \|R\|_{C([0,T],\mathcal{L}(X,Y))} \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|\ ds,
\end{aligned}$$

par conséquent, $\mathcal{R}$ *est HDO.*

Le lemme suivant montre une propriété fondamentale pour les opérateurs avec retard.

Lemme 2.9. *Soit* $\mathcal{R} : C([0,T]; H) \to C([0,T]; H)$ *est un opérateur avec retard, alors* $\mathcal{R}$ *admet un seul point fixe, i.e., il existe une fonction unique* $u^* \in C([0,T]; H)$ *tel que* $\mathcal{R}u^* = u^*$*.*

2.2 Résultat d'existence

Cette section s'intéresse principalement à démontrer le caractère bien posé (l'existence et l'unicité) du processus de rafle gouverné par le cône normal suivant

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t)}\big(A\dot{u}(t) + Bu(t) + (\mathcal{R}u)(t)\big), \quad \text{p.p } t \in [0,T], \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{SPH}$$

Pour ce faire, nous allons considérer la liste des hypothèses suivante

($\boldsymbol{\mathcal{H}_A}$) $A : H \to H$ est un opérateur linéaire, borné, symétrique et α-coercif.

($\boldsymbol{\mathcal{H}_B}$) $B : H \to H$ est un opérateur L_B-Lipschitzien, i.e.,

$$\exists L_B > 0 : \|Bu - Bv\| \leq L_B \|u - v\|, \quad \text{pour tous } u, v \in H.$$

($\boldsymbol{\mathcal{H}_\mathcal{R}}$) $\mathcal{R} : C([0,T]; H) \to C([0,T]; H)$ est un opérateur avec retard, i.e., il vérifie l'inégalité (2.1).

($\boldsymbol{\mathcal{H}_C}$) La multi-application $C : [0,T] \rightrightarrows H$ est à valeurs non vides, fermées, convexes et bouge de façon absolument continue, i.e., il existe une fonction croissante absolument continue $\eta : [0;T] \to \mathbb{R}_+$ avec $\eta(0) = 0$ et une constante $c_0 > 0$ telles que

$$d_H(C(t), C(s)) \leq c_0 \, |\eta(t) - \eta(s)|, \text{ pour tous } t, s \in [0,T]. \tag{2.3}$$

L'idée de la preuve consiste, dans un premier temps, à introduire le problème intermédiaire (auxiliaire) suivant, étant donné une fonction $w \in C([0,T]; H)$, Trouver une fonction $u : [0,T] \to H$ telle que :

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t)}\big(A\dot{u}(t) + Bw(t) + (\mathcal{R}w)(t)\big), \text{ p.p } t \in [0,T], \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{2.4}$$

La résolution de ce dernier problème se base sur une méthode de discrétisation en considérant une subdivision quelconque de l'intervalle $[0,T]$ donnée par

$$\mathcal{S}_n = \{0 = t_n^0 < t_n^1 < \ldots < t_n^n = T\},$$

puis, on pose

$$\tau_n^k = t_n^k - t_n^{k-1}, \tau_n^{\max} = \max_{1 \leq k \leq n} \tau_n^k \text{ et } \tau_n^{\min} = \min_{1 \leq k \leq n} \tau_n^k, k = 1, \ldots, n.$$

on suppose que cette subdivision vérifie les conditions supplémentaires suivantes :

$$(\boldsymbol{\mathcal{H}_\tau}) \begin{cases} \lim\limits_{n \to \infty} \tau_n^{\max} = 0, \\ \text{il existe une constante } M_0 > 0 \text{ telle que } \tau_n^{\max} \leq M_0 \tau_n^{\min} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Pour compléter les éléments nécessaires de cette discrétisation, on définit les valeurs

$$\mathcal{B}_n^k = \frac{1}{\tau_n^k} \int_{t_n^{k-1}}^{t_n^k} Bw(s)ds \text{ et } \mathcal{R}_n^k = \frac{1}{\tau_n^k} \int_{t_n^{k-1}}^{t_n^k} (\mathcal{R}w)(s)ds, \ 1 \leq k \leq n, \ n \in \mathbb{N},$$

ainsi que l'opérateur

$$\pi_n : L^2([0,T]; H) \to L^2([0,T]; H),$$

tel que pour tout $t \in]t_n^{k-1}, t_n^k]$

$$(\pi_n(v))(t) = \frac{1}{\tau_n^k} \int_{t_n^{k-1}}^{t_n^k} v(s)ds.$$

D'après le lemme 3.3 ([7]) et sous la condition ($\boldsymbol{\mathcal{H}_\tau}$)

$$\pi_n(v) \xrightarrow[n\to+\infty]{} v \text{ dans } L^2([0,T];H). \tag{2.5}$$

Après avoir définir tous les ingrédients nécessaires, on arrive maintenant à définir le problème discrétisé associé à (2.4) comme suit

$$-v_n^k \in N_{C_n(t_n^k)}\big(Av_n^k + \mathcal{B}_n^k + \mathcal{R}_n^k\big), \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{2.6}$$

où $(C_n(t))_t$ est définie par

$$C_n(t) := C(t) \cap B[0,n], \quad \forall t \in [0,T],$$

Lemme 2.10. *Sous la condition* $(\mathcal{H}_C)$*, il existe un entier* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$C_n(t) := C(t) \cap B[0,n] \neq \emptyset, \text{ pour tout } n \geq n_0 \text{ et tout } t \in [0;T],$$

et, pour tous $s, t \in [0;T]$

$$d_H(C_n(t), C_n(s)) \leq c_0 \; d_H(C(t), C(s)) \leq c_0 \; |\eta(t) - \eta(s)|.$$

Le lemme suivant donne le premier résultat qui permet de construire la preuve d'existence pour (SPH).

Lemme 2.11. *Il existe un indice* $N_0 \in \mathbb{N}$ *suffisamment grand, tel que le probléme* (2.6) *ait une solution unique pour tout* $n \geq N_0$.

D*émonstration*. Tout d'abord, le Lemme 2.10 garantit l'existence d'un entier $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$C_n(t) := C(t) \cap B[0,n] \neq \emptyset, \text{ pour tout } t \in [0,T] \text{ et tout } n \geq N_0.$$

On va montrer par récurrence sur k l'existence de la solution pour le problème (2.6). Alors pour $k = 1$, notre but consiste à trouver un élément $v_n^1 \in H$ tel que :

$$-v_n^1 \in N_{C_n(t_n^1)}\big(Av_n^1 + \mathcal{B}_n^1 + \mathcal{R}_n^1\big). \tag{2.7}$$

Comme l'opérateur A est α-coercif alors

$$\langle Au - Av, u - v\rangle = \langle A(u - v), u - v\rangle \geq \alpha\|u - v\|^2,$$

donc A est α-fortement monotone de plus il est L_A-Lipschitzien car, pour tous $u, v \in H$

$$\|Au - Av\| = \|A(u - v)\| \leq L_A \|u - v\| \text{ où } L_A = \|A\|_{\mathcal{L}(H)}.$$

Il résulte du Théorème 2.5 et de la Proposition 2.6 que l'opérateur inverse $A^{-1} : H \to H$ est $\frac{1}{\alpha}$-Lipschitzien et fortement monotone, alors

$$\|A^{-1}u - A^{-1}v\| \geq \alpha \|u - v\|^2, \ \forall u, v \in H,$$

en particulier

$$\|A^{-1}(2v) - A^{-1}v\| = \|A^{-1}v\| \geq \alpha \|v\|^2,$$

ce qui traduit la α-coercivité de A^{-1}.

D'autre part, l'inclusion (2.7) peut être réécrite d'une manière équivalente comme suit

$$\begin{aligned}
(2.7) \quad \Leftrightarrow \quad & -A^{-1}\big(Av_n^1\big) + A^{-1}\big(\mathcal{B}_n^1 + \mathcal{R}_n^1\big) \in N_{C_n(t_n^1)}\big(Av_n^1 + \mathcal{B}_n^1 + \mathcal{R}_n^1\big) + A^{-1}\big(\mathcal{B}_n^1 + \mathcal{R}_n^1\big) \\
\Leftrightarrow \quad & A^{-1}\big(\mathcal{B}_n^1 + \mathcal{R}_n^1\big) \in N_{C_n(t_n^1)}\big(Av_n^1 + \mathcal{B}_n^1 + \mathcal{R}_n^1\big) + A^{-1}\big(\mathcal{B}_n^1 + \mathcal{R}_n^1\big) + A^{-1}\big(Av_n^1\big) \\
\Leftrightarrow \quad & A^{-1}\big(\mathcal{B}_n^1 + \mathcal{R}_n^1\big) \in \big(A^{-1} + N_{C_n(t_n^1)}\big)\big(Av_n^1 + \mathcal{B}_n^1 + \mathcal{R}_n^1\big). \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

Alors, pour montrer l'existence d'une solution v_n^1 de (2.7), il suffit de prouver que les opérateurs $A^{-1} + N_{C_n(t_n^1)} : H \rightrightarrows H$ et $Av + \mathcal{B}_n^1 + \mathcal{R}_n^1 : H \to H$ sont surjectifs. En effet, (2.8) peut être mise sous la forme

$$\underbrace{A^{-1}\big(\mathcal{B}_n^1 + \mathcal{R}_n^1\big)}_{y} \in S(v_n^1) \text{ où } S(v_n^1) = \big(A^{-1} + N_{C_n(t_n^1)}\big)\big(Av_n^1 + \mathcal{B}_n^1 + \mathcal{R}_n^1\big),$$

alors, comme $y \in H$ et S est surjectif, il va existe un $v_n^1 \in H$ tel que $y \in S(v_n^1)$. À cet égard, il est clair que A^{-1} est hemi-continue (parce qu'il est Lipschitzien) de plus, pour tout $x \in H$

$$\|A^{-1}x\| = \|A^{-1}x - A^{-1}0\| \leq \frac{1}{\alpha}\|x\| \Rightarrow \|A^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha} \Rightarrow A^{-1} \text{ est borné }.$$

Aussi, on sait que le cône normal $N_{C_n(t_n^1)}$ est maximal monotone grâce à la convexité et la fermeture de $C_n(t_n^1)$ alors, en appliquant le Théorème 2.1, on déduit que : $A^{-1} + N_{C_n(t_n^1)}$: $\mathrm{Dom}\,(A^{-1} + N_{C_n(t_n^1)}) \rightrightarrows R(A^{-1} + N_{C_n(t_n^1)})$ est maximal monotone, mais

$$\mathrm{Dom}\,(A^{-1} + N_{C_n(t_n^1)}) = \mathrm{Dom}\,(A^{-1}) \cap \mathrm{Dom}\,(N_{C_n(t_n^1)}) = H \cap C_n(t_n^1) = C_n(t_n^1),$$

comme $C_n(t_n^1) \subset B[0,n]$, alors $A^{-1} + N_{C_n(t_n^1)}$ est maximal monotone avec un domaine borné. Le Lemme 2.2 confirme que $R(A^{-1} + N_{C_n(t_n^1)}) = H$,i.e., $\big(A^{-1} + N_{C_n(t_n^1)}\big)$ est surjectif, alors

$$\forall y \in H, \exists z \in C_n(t_n^1) : y \in \big(A^{-1} + N_{C_n(t_n^1)}\big)(z),$$

en particulier pour $y := A^{-1}\big(\mathcal{B}_n^1 + \mathcal{R}_n^1\big) \in H$ alors

$$\exists z \in C_n(t_n^1) : A^{-1}\big(\mathcal{B}_n^1 + \mathcal{R}_n^1\big) \in \big(A^{-1} + N_{C_n(t_n^1)}\big)(z). \tag{2.9}$$

D'autre part, d'après ce qui précède, A est fortement monotone, hemi-continue et borné alors A est pseudomonotone grâce au Théorème 2.3. En combinant ceci avec la coercivité de A et le Théorème 2.4, on conclut que A est surjectif, i.e.,

$$\forall a \in H, \exists b \in H : Ab = a,$$

en particulier pour $a_n = z - \mathcal{B}_n^1 - \mathcal{R}_n^1 \in H$ alors

$$\exists v_n^1 \in H : Av_n^1 = z - \mathcal{B}_n^1 - \mathcal{R}_n^1 \Rightarrow \exists v_n^1 \in H : z = Av_n^1 + \mathcal{B}_n^1 + \mathcal{R}_n^1,$$

Par conséquent, selon (2.8)

$$\exists v_n^1 \in H : A^{-1}\big(\mathcal{B}_n^1 + \mathcal{R}_n^1\big) \in \big(A^{-1} + N_{C_n(t_n^1)}\big)\big(Av_n^1 + \mathcal{B}_n^1 + \mathcal{R}_n^1\big),$$

en tenant compte de l'équivalence qui existe entre (2.8) et(2.7), on déduit que v_n^1 est une solution de (2.7).

On suppose à présent que $v_n^1, v_n^2, \ldots, v_n^k$ ont été obtenus, i.e.,

$$A^{-1}\big(\mathcal{B}_n^m + \mathcal{R}_n^m\big) \in \big(A^{-1} + N_{C_n(t_n^m)}\big)\big(Av_n^m + \mathcal{B}_n^m + \mathcal{R}_n^m\big), \quad m = 1, \ldots, k,$$

à l'itération $(k+1)$, le problème (2.6) devient

$$\exists ? v_n^{k+1} : A^{-1}\big(\mathcal{B}_n^{k+1} + \mathcal{R}_n^{k+1}\big) \in \big(A^{-1} + N_{C_n(t_n^{k+1})}\big)\big(Av_n^{k+1} + \mathcal{B}_n^{k+1} + \mathcal{R}_n^{k+1}\big).$$

Pour démontrer l'existence de v_n^{k+1}, on suit les mêmes étapes précédentes.

Finalement, on arrive à montrer l'unicité de la solution du problème (2.6), pour cela il suffit d'utiliser la monotonie du cône normal et le fait que A est fortement monotone. Soient v_n^k et z_n^k

deux solutions du problème 2.6, alors

$$\begin{cases} -v_n^k \in N_{C_n(t_n^k)}\big(Av_n^k + \mathcal{B}_n^k + \mathcal{R}_n^k\big) \\ -z_n^k \in N_{C_n(t_n^k)}\big(Az_n^k + \mathcal{B}_n^k + \mathcal{R}_n^k\big) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \langle v_n^k, v - Av_n^k - \mathcal{B}_n^k - \mathcal{R}_n^k\rangle \geq 0, \quad \forall v \in C_n(t_n^k) \\ \langle z_n^k, v - Az_n^k - \mathcal{B}_n^k - \mathcal{R}_n^k\rangle \geq 0, \quad \forall v \in C_n(t_n^k), \end{cases}$$

En prenant $v = Az_n^k + \mathcal{B}_n^k + \mathcal{R}_n^k$ et $v = Av_n^k + \mathcal{B}_n^k + \mathcal{R}_n^k$ respectivement dans les dernières deux inégalités, on obtient

$$\begin{cases} \langle v_n^k, Az_n^k + \mathcal{B}_n^k + \mathcal{R}_n^k - Av_n^k - \mathcal{B}_n^k - \mathcal{R}_n^k\rangle \geq 0, \\ \langle z_n^k, Av_n^k + \mathcal{B}_n^k + \mathcal{R}_n^k - Az_n^k - \mathcal{B}_n^k - \mathcal{R}_n^k\rangle \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \langle v_n^k, Az_n^k - Av_n^k\rangle \geq 0, \\ \langle z_n^k, Av_n^k - Az_n^k\rangle \geq 0. \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \langle v_n^k, Az_n^k - Av_n^k\rangle \geq 0 \\ \langle -z_n^k, Az_n^k - Av_n^k\rangle \geq 0, \end{cases}$$

il résulte par addition

$$\begin{aligned} \langle v_n^k - z_n^k, Av_n^k - Az_n^k\rangle \leq 0 \quad &\overset{A \text{ symétrique}}{\Longrightarrow} \quad \langle Av_n^k - Az_n^k, v_n^k - z_n^k\rangle \leq 0 \\ &\Rightarrow \quad 0 \leq \alpha\|v_n^k - z_n^k\|^2 \leq \langle Av_n^k - Az_n^k, v_n^k - z_n^k\rangle \leq 0 \\ &\Rightarrow \quad \|v_n^k - z_n^k\| = 0 \Rightarrow v_n^k = z_n^k. \end{aligned}$$

■

Notation : Soit $n \in \mathbb{N}$ alors, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on pose

$$\begin{cases} u_n^k = u_n^{k-1} + \tau_n^k v_n^k \\ u_n^0 = u_0. \end{cases}$$

Lemme 2.12. *Il existe une constante $L > 0$ indépendante de n telle que*

$$\max_{1 \leq k \leq n} \|v_n^k\| \leq L. \tag{2.10}$$

Démonstration. Soit $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, la solution v_n^k du problème (2.6) vérifie $\big($grâce à la définition du cône normal $N_{C_n(t_n^k)}(\cdot)\big)$

$$\langle Av_n^k + \mathcal{B}_n^k + \mathcal{R}_n^k - v, v_n^k\rangle \leq 0, \quad \forall v \in C_n(t_n^k).$$

En effet

$$-v_n^k \in N_{C_n(t_n^k)}(Av_n^k + \mathcal{B}_n^k + \mathcal{R}_n^k) \Leftrightarrow \langle -v_n^k, v - (Av_n^k + \mathcal{B}_n^k + \mathcal{R}_n^k)\rangle \leq 0, \quad \forall v \in C_n(t_n^k)$$

$$\Leftrightarrow \quad \langle Av_n^k + \mathcal{B}_n^k + \mathcal{R}_n^k - v, v_n^k\rangle \leq 0, \quad \forall v \in C_n(t_n^k), \tag{2.11}$$

alors

$$\begin{aligned} \alpha\|v_n^k\|^2 \leq \langle Av_n^k, v_n^k\rangle &= \langle Av_n^k + \mathcal{B}_n^k - \mathcal{B}_n^k + \mathcal{R}_n^k - \mathcal{R}_n^k + v - v, v_n^k\rangle \\ &= \langle Av_n^k + \mathcal{B}_n^k + \mathcal{R}_n^k - v, v_n^k\rangle + \langle v - \mathcal{B}_n^k - \mathcal{R}_n^k, v_n^k\rangle \\ &\overset{(2.11)}{\leq} \langle v - \mathcal{B}_n^k - \mathcal{R}_n^k, v_n^k\rangle \\ &\leq \|v - \mathcal{B}_n^k - \mathcal{R}_n^k\|\|v_n^k\|, \quad \forall v \in C_n(t_n^k). \end{aligned}$$

Maintenant, pour tout $v_0 \in C(0) \neq \emptyset$

$$\|v - \mathcal{B}_n^k - \mathcal{R}_n^k\| = \|v - \mathcal{B}_n^k - \mathcal{R}_n^k - v_0 + v_0\| \leq \|v - v_0\| + \|v_0\| + \|\mathcal{B}_n^k\| + \|\mathcal{R}_n^k\|, \tag{2.12}$$

par conséquent

$$\begin{aligned} \alpha\|v_n^k\| &\leq \|v - \mathcal{B}_n^k - \mathcal{R}_n^k\| \overset{(2.12)}{\leq} \|v - v_0\| + \|v_0\| + \|\mathcal{B}_n^k\| + \|\mathcal{R}_n^k\| \\ \Rightarrow \|v_n^k\| &\leq \frac{1}{\alpha}\Big(\|v - v_0\| + \|v_0\| + \|\mathcal{B}_n^k\| + \|\mathcal{R}_n^k\|\Big). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Alors, il suffit de majorer $\|\mathcal{B}_n^k\|$ et $\|\mathcal{R}_n^k\|$ indépendamment de n. À cette fin, comme $v_0 \in C(0)$ et comme l'ensemble $C_n(0) := C(0) \cap B[0, n]$ est non vide pour n assez grand alors, on peut supposer que $v_0 \in C_n(0)$ pour n assez grand, donc

$$\left.\begin{array}{l} v \in C_n(t_n^k) \\ v_0 \in C_n(0) = C_n(t_n^0) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}[t] d\big(v_0, C_n(t_n^k)\big) &\leq \sup_{a \in C_n(0)} d\big(a, C_n(t_n^k)\big) \\ &\leq d_H\big(C_n(0), C_n(t_n^k)\big) \\ &\overset{\text{Lemme 2.10}}{\leq} c_0 d_H\big(C(0), C(t_n^k)\big) \\ &\overset{(\boldsymbol{\mathcal{H}_C})}{\leq} c_0|\eta(t_n^k) - \eta(0)| \\ &\leq c_0\eta(t_n^k) \leq c_0\eta(T), \end{aligned}$$

d'où

$$
\begin{aligned}
(2.13) \Rightarrow \|v_n^k\| &\leq \frac{1}{\alpha} \inf_{v \in C_n(t_n^k)} \Big(\|v - v_0\| + \|v_0\| + \|\mathcal{B}_n^k\| + \|\mathcal{R}_n^k\| \Big) \\
&= \frac{1}{\alpha} \Big(\inf_{v \in C_n(t_n^k)} \|v - v_0\| + \|v_0\| + \|\mathcal{B}_n^k\| + \|\mathcal{R}_n^k\| \Big) \\
&= \frac{1}{\alpha} \Big(d(v_0, C_n(t_n^k)) + \|v_0\| + \|\mathcal{B}_n^k\| + \|\mathcal{R}_n^k\| \Big) \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \Big(c_0 \eta(T) + \|v_0\| + \|\mathcal{B}_n^k\| + \|\mathcal{R}_n^k\| \Big). \qquad (2.14)
\end{aligned}
$$

Pour terminer la preuve, il suffit de majorer $\|\mathcal{B}_n^k\|$ et $\|\mathcal{R}_n^k\|$. Pour ce faire, on a

$$
\begin{aligned}
\|B_n^k\| = \Big\| \frac{1}{\tau_n^k} \int_{t_n^{k-1}}^{t_n^k} Bw(s) ds \Big\| &\leq \frac{1}{\tau_n^k} \int_{t_n^{k-1}}^{t_n^k} \|Bw(s)\| ds \\
&\leq \frac{1}{\tau_n^k} \int_{t_n^{k-1}}^{t_n^k} \max_{s \in [0,T]} \|Bw(s)\| ds \\
&= \frac{1}{\tau_n^k} \int_{t_n^{k-1}}^{t_n^k} \|Bw\|_{C([0,T];H)} ds \\
\Rightarrow \|B_n^k\| &\leq \|Bw\|_{C([0,T];H)},
\end{aligned}
$$

aussi $\|\mathcal{R}_n^k\| \leq \|\mathcal{R}w\|_{C([0,T];H)}$. Posons : $M_w = \max\{\|Bw\|_{C([0,T];H)}, \|Rw\|_{C([0,T];H)}\}$, alors

$$
\|v_n^k\| \leq \frac{1}{\alpha} \Big(c_0 \eta(T) + \|v_0\| + 2M_w \Big) := L.
$$

■

Pour passer à la version continue du problème (2.6), on va introduire les fonctions $u_n(\cdot)$, $\overline{u}_n(\cdot)$, $\mathcal{B}_n(\cdot)$ et $\mathcal{R}_n(\cdot)$ dont les définitions sont données par

$$
u_n(t) = \begin{cases} u_n^0 & \text{si } t = 0, \\ u_n^k + \frac{t - t_n^k}{\tau_n^k}(u_n^k - u_n^{k-1}) & \text{si } t \in]t_n^{k-1}, t_n^k]. \end{cases}
$$

$$
\overline{u}_n(t) = \begin{cases} u_n^0 & \text{si } t = 0, \\ u_n^{k-1} & \text{si } t \in]t_n^{k-1}, t_n^k]. \end{cases}
$$

$$
B_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0, \\ \mathcal{B}_n^k & \text{si } t \in]t_n^{k-1}, t_n^k]. \end{cases}
$$

$$
\mathcal{R}_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0, \\ \mathcal{R}_n^k & \text{si } t \in]t_n^{k-1}, t_n^k]. \end{cases}
$$

Il est clair que $u_n(\cdot)$ n'est que l'interpolation par morceau des points u_n^k et u_n^{k-1} sur l'intervalle $]t_n^{k-1}, t_n^k]$.

Alors, le problème (2.6) peut être reformulé comme suit

$$-\dot{u}_n(t) \in N_{C_n(\delta_n(t))}\big(A\dot{u}_n(t) + \mathcal{B}_n(t) + \mathcal{R}_n(t)\big), \quad \text{p.p } t \in [0,T], \tag{2.15}$$

où

$$\delta_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0, \\ t_n^k & \text{si } t \in]t_n^{k-1}, t_n^k]. \end{cases}$$

On voit que $\delta_n(t)$ converge vers t, car

$$\forall t \in [0,T], \exists k : t \in]t_n^{k-1}, t_n^k] \Rightarrow |\delta_n(t) - t| \leq \tau_n^k \leq \tau_n^{\max} \to 0.$$

Notre tâche maintenant consiste à démontrer la convergence des dernières suites définies ci-dessus afin d'obtenir quelque fonctions que l'on va utiliser dans le résultat d'existence.

Lemme 2.13. *Il existe une fonction lipschitzienne $u : [0,T] \to H$ et deux sous-suites de $(\overline{u}_n)_n$ et $(u_n)_n$, encore notées $(\overline{u}_n)_n$ et $(u_n)_n$ respectivement telles que*

$$\overline{u}_n \to u \textit{ faiblement dans } L^2([0,T];H), \tag{2.16}$$

$$\begin{cases} u_n \to u \textit{ faiblement dans } L^2([0,T];H) \\ u_n(t) \to u(t) \textit{ faiblement dans } H \textit{ pour tout } t \in [0,T], \end{cases} \tag{2.17}$$

$$\dot{u}_n \to \dot{u} \textit{ faiblement dans } L^2([0,T];H). \tag{2.18}$$

Démonstration. Il est facile de démontrer, en utilisant la récurrence et la définition $u_n^k = u_n^{k-1} + \tau_n^k v_n^k$ que $u_n^k = u_n^0 + \sum_{j=1}^k \tau_n^j v_n^j, \quad 1 \leq k \leq n$, alors

$$\begin{aligned} \|u_n^k\| &\leq \|u_n^0\| + \Big\| \sum_{j=1}^k \tau_n^j v_n^j \Big\| \leq \|u_n^0\| + \sum_{j=1}^k \tau_n^j \|v_n^j\|, \\ &\overset{(2.10)}{\leq} \|u_n^0\| + L \sum_{j=1}^k \tau_n^j \leq \|u_n^0\| + TL, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \|\overline{u}_n\|^2_{L^2([0,T];H)} &= \int_0^T \|\overline{u}_n(s)\|^2 ds = \sum_{i=1}^n \int_{t_n^{i-1}}^{t_n^i} \|u_n^{i-1}\|^2 ds = \sum_{i=1}^n (t_n^i - t_n^{i-1}) \|u_n^{i-1}\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \tau_n^k \|u_n^{i-1}\|^2 \leq \big(\|u_0\| + LT\big)^2 T, \end{aligned}$$

cela implique que la suite $(\overline{u}_n)_n$ est bornée dans $L^2([0,T];H)$ indépendamment de n et par suite, on peut extraire une sous-suite de $(\overline{u}_n)_n$ notée encore $(\overline{u}_n)_n$ qui converge faiblement dans $L^2([0,T];H)$ vers une fonction $u \in L^2([0,T];H)$.
D'autre part, comme $u_n(t) = u_n^0 + \int_0^t \dot{u}_n(s)ds$ et $\|\dot{u}(t)\| \leq L$ alors pour tous $t, s \in [0,T]$,

$$\|u_n(t) - u_n(s)\| \leq L|t-s|.$$

ce qui traduit la L-Lipschitzité de $(u_n)_n$, de plus

$$\begin{aligned} \|u_n(t)\| &\leq \|u_n(t) - u_n(0)\| + \|u_n(0)\| \leq Lt + \|u_n^0\| \leq LT + \|u_n^0\| = LT + \|u_0\| \\ &\Rightarrow \sup_{t\in[0,T]} \|u_n(t)\| \leq LT + \|u_0\| \\ &\Rightarrow (u_n)_n \text{ est uniformément bornée dans } H. \end{aligned}$$

De plus, pour toute subdivision $0 = b_0 < b_1 < \ldots < b_N = T$ de l'intervalle $[0,T]$

$$\sum_{i=1}^N \|u_n(b_i) - u_n(b_{i-1})\| \leq \sum_{i=1}^N L(b_i - b_{i-1}) = L\sum_{i=1}^N (b_i - b_{i-1}) = L(b_N - b_0) = LT$$
$$\Rightarrow \operatorname{var}(u_n, [0,T]) = \sup\left(\sum_{i=1}^N \|u_n(b_i) - u_n(b_{i-1})\|\right) \leq TL,$$
$$\Rightarrow (u_n)_n \text{ est uniformément bornée en variation,}$$

en combinant les deux derniers résultats avec le Théoreme (1.29), on déduit l'existence d'une sous-suite de $(u_n)_n$ notée encore $(u_n)_n$ et une fonction $\tilde{u} : [0,T] \to H$ telle que

$$\tilde{u}(t) = w - \lim_{n\to+\infty} u_n(t),\ \forall t \in [0,T] \text{ et } \operatorname{var}(\tilde{u}, [0,T]) \leq LT.$$

La convergence faible de $u_n \to \tilde{u}$ dans $L^2([0,T];H)$ est due au fait que $\sup_{t\in[0,T]} \|u_n(t)\| \leq \|u_n^k\| \Rightarrow \|u_n(t)\| \leq LT + \|u_0\|$. Maintenant, on montre que $(u_n)_n$ et $(\overline{u}_n)_n$ converge faiblement vers la même limite dans $L^2([0,T];H)$. Soit $t \in]t_n^{k-1}, t_n^k]$, alors

$$\begin{aligned} \|u_n(t) - \overline{u}_n(t)\| &= \|u_n^k - u_n^{k-1} + \frac{t - t_n^k}{\tau_n^k}(u_n^k - u_n^{k-1})\| = \|\tau_n^k \frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau_n^k} + \frac{t - t_n^k}{\tau_n^k}(u_n^k - u_n^{k-1})\| \\ &\leq \tau_n^k \left\|\frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau_n^k}\right\| + |t - t_n^k| \left\|\frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau_n^k}\right\| = \left(\tau_n^k + |t - t_n^k|\right)\|\dot{u}_n(t)\| \leq 2L\tau_n^k, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \|u_n - \overline{u}_n\|^2_{L^2([0,T];H)} &= \int_0^T \|u_n(t) - \overline{u}_n(t)\|^2 dt = \sum_{k=1}^n \int_{t_n^{k-1}}^{t_n^k} \|u_n(t) - \overline{u}_n(t)\|^2 dt \\ &\leq 4L^2 \sum_{k=1}^n (\tau_n^k)^2 \int_{t_n^{k-1}}^{t_n^k} dt \leq 4L^2 (\tau_n^{\max})^2 \sum_{k=1}^n \tau_n^k = 4L^2 T (\tau_n^{\max})^2, \end{aligned}$$

il découle de ($\boldsymbol{\mathcal{H}_\tau}$)

$$\|u_n - \overline{u}_n\|_{L^2([0,T];H)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

mais

$$\begin{cases} \overline{u}_n \longrightarrow u \text{ faiblement dans } L^2([0,T];H) \\ u_n \longrightarrow \tilde{u} \text{ faiblement dans } L^2([0,T];H), \end{cases}$$

par l'unicité de la limite faible, on déduit que $u = \tilde{u}$.

D'autre part, grâce à (1.11), pour tous $t, s \in [0,T]$

$$\|u(t)-u(s)\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|u_n(t)-u_n(s)\| = \liminf_{n\to+\infty} \left\| \int_t^s \dot{u}_n(r)dr \right\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_t^s \|\dot{u}_n(r)\|dr \leq L|t-s|,$$

donc, u est L-Lipschitzienne (alors u est absolument continue) alors

$$u(t) = u_0 + \int_0^t \dot{u}(s)ds, \qquad \text{pour tout } t \in [0,T].$$

On arrive maintenant à montrer (2.18), tout d'abord comme la suite $(\dot{u}_n)_n$ est bornée dans $L^2([0,T];H)$ alors on peut extraire une sous suite de $(\dot{u}_n)_n$ notée encore $(\dot{u}_n)_n$ qui converge faiblement vers $u^* \in L^2([0,T];H)$ dans $L^2([0,T];H)$. Il reste à vérifier si $u^* = \dot{u}$ p.p $t \in [0,T]$. Pour tout $v \in L^2([0,T];H)$

$$\dot{u}_n \overset{w}{\to} u^* \text{ dans } L^2([0,T];H) \Rightarrow \int_0^T \langle \dot{u}_n(t), v(t)\rangle dt \to \int_0^T \langle u^*(t), v(t)\rangle dt \text{ dans } H,$$

soit $z \in H$, on pose $v(t) = z\mathbb{1}_{[0,t]}(t), \forall t \in [0,T]$ alors

$$\begin{aligned} &\int_0^T \langle \dot{u}_n(s), z\mathbb{1}_{[0,t]}(s)\rangle ds \to \int_0^T \langle u^*(s), z\mathbb{1}_{[0,t]}(s)\rangle ds \Rightarrow \int_0^t \langle \dot{u}_n(s), z\rangle ds \to \int_0^t \langle u^*(s), z\rangle ds \\ &\quad \Rightarrow \langle \int_0^t \dot{u}_n(s)ds, z\rangle \to \langle \int_0^t u^*(s)ds, z\rangle \Rightarrow \int_0^t \dot{u}_n(s)ds \to \int_0^t u^*(s)ds \text{ faiblement dans } H, \end{aligned}$$

par conséquent

$$u_n(t) = u_0 + \int_0^t \dot{u}_n(s)ds \text{ converge faiblement dans } H \text{ vers } u_0 + \int_0^t u^*(s)ds,$$

l'unicité de la limite faible entraîne que

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 + \int_0^t u^*(s)ds = u_0 + \int_0^t \dot{u}(s)ds \Rightarrow \int_0^t u^*(s)ds = \int_0^t \dot{u}(s)ds \\ &\Rightarrow u^* = \dot{u} \text{ p.p } t \in [0,T]. \end{aligned}$$

■

Notre tâche à présent consiste à démontrer le caractère bien posé du problème auxiliaire (2.4).

Lemme 2.14. *Pour tout $u_0 \in H$ et toute fonction $w \in C([0,T];H)$, il existe une solution unique $u \in W^{1,\infty}([0,T];H)$ du problème* (2.4).

Démonstration. Tout d'abord, pour éviter la vacuité du cône normal, on va démontrer que

$$A\dot{u}(t) + Bw(t) + (\mathcal{R}w)(t) \in \operatorname{Dom} N_{C(t)} = C(t),\ \text{p.p } t \in [0,T].$$

Il est déjà prouvé que l'inclusion (2.6) admet une seule solution v_n^k (pour n assez grand), cela donne que $Av_n^k + \mathcal{B}_n^k + \mathcal{R}_n^k \in C_n(t_n^k)$ et on a pour tout $t \in]t_n^{k-1}, t_n^k]$ $\dot{u}(t) = v_n^k, \delta_n(t) = t_n^k, \mathcal{B}_n(t) = \mathcal{B}_n^k$ et $\mathcal{R}_n(t) = \mathcal{R}_n^k$ alors

$$A\dot{u}_n(t) + \mathcal{B}_n(t) + \mathcal{R}_n(t) \in C_n(\delta_n(t)) \subset C(\delta_n(t)),\ \text{p.p } t \in [0,T].$$

Soit $z \in H$ et soit $t \in [0,T]$ alors

$$\begin{aligned}\langle A\dot{u}(t) + Bw(t) + (\mathcal{R}w)(t), z\rangle &= \langle A\dot{u}_n(t) + \mathcal{B}_n(t) + \mathcal{R}_n(t), z\rangle + \langle A\dot{u}(t) + Bw(t) + (\mathcal{R}w)(t)\\ &\quad - A\dot{u}_n(t) - \mathcal{B}_n(t) - \mathcal{R}_n(t), z\rangle,\end{aligned}$$

comme $A\dot{u}_n(t) + \mathcal{B}_n(t) + \mathcal{R}_n(t) \in C(\delta_n(t)),\ \text{p.p } t \in [0,T]$, alors

$$\langle A\dot{u}_n(t) + \mathcal{B}_n(t) + \mathcal{R}_n(t), z\rangle \le \sup_{y \in C(\delta_n(t))} \langle y, z\rangle = \sigma_{C(\delta_n(t))}(z),$$

il résulte de (1.10) et (2.3) que

$$\begin{aligned}&|\sigma_{C(\delta_n(t))}(z) - \sigma_{C(t)}(z)| \le \|z\| d_H\big(C(\delta_n(t)), C(t)\big) \le c_0\|z\|\big|\eta(\delta_n(t)) - \eta(t)\big|\\ \Rightarrow &\sigma_{C(\delta_n(t))}(z) \le \sigma_{C(t)}(z) + c_0\|z\|\big|\eta(\delta_n(t)) - \eta(t)\big|,\end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned}\langle A\dot{u}(t) + Bw(t) + (\mathcal{R}w)(t), z\rangle &\le \sigma_{C(t)}(z) + c_0\|z\|\big|\eta(\delta_n(t)) - \eta(t)\big| + \langle A\dot{u}(t) - A\dot{u}_n(t), z\rangle\\ &\quad + \langle Bw(t) - \mathcal{B}_n(t), z\rangle + \langle (\mathcal{R}w)(t) - \mathcal{R}_n(t), z\rangle,\end{aligned}$$

en intégrant ceci sur $[t-\varepsilon, t+\varepsilon], \varepsilon > 0$ assez petit, on obtient

$$\begin{aligned}&\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}\langle A\dot{u}(s)+Bw(s)+(\mathcal{R}w)(s),z\rangle ds \leq \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}\sigma_{C(s)}(z)ds + c_0\|z\|\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}\big|\eta(\delta_n(s))-\eta(s)\big|ds\\&+\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}\langle A\dot{u}(s)-A\dot{u}_n(s),z\rangle ds+\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}\langle Bw(s)-\mathcal{B}_n(s),z\rangle ds+\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}\langle(\mathcal{R}w)(s)-\mathcal{R}_n(s),z\rangle ds.\end{aligned} \tag{2.19}$$

Comme $\delta_n(s) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} s$ alors $|\eta(\delta_n(s))-\eta(s)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ grâce à la continuité de η, de plus $|\eta(\delta_n(s))-\eta(s)| \leq \eta(\delta_n(s))-\eta(s) \leq 2\eta(T)$, pour tout $s \in [0,T]$ alors, le théoreme de convergence dominée **(T.C.D)** assure que

$$\begin{aligned}0 &\leq \lim_{n\to+\infty}\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}\big|\eta(\delta_n(s))-\eta(s)\big|ds \leq \lim_{n\to+\infty}\int_0^T\big|\eta(\delta_n(s))-\eta(s)\big|ds\\&= \int_0^T\lim_{n\to+\infty}\big|\eta(\delta_n(s))-\eta(s)\big|ds = 0\\&\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}\big|\eta(\delta_n(s))-\eta(s)\big|ds = 0.\end{aligned} \tag{2.20}$$

Aussi

$$\begin{aligned}\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}\langle A\dot{u}(s)-A\dot{u}_n(s),z\rangle ds &= \int_0^T\langle A\dot{u}(s)-A\dot{u}_n(s),z\mathbb{1}_{[t-\varepsilon,t+\varepsilon]}(s)\rangle ds\\&= \int_0^T\langle\dot{u}(s)-\dot{u}_n(s),\underbrace{Az\mathbb{1}_{[t-\varepsilon,t+\varepsilon]}(s)}_{\in L^2([0,T];H)}\rangle ds \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,\end{aligned} \tag{2.21}$$

D'autre part, d'après la définition de $\pi_n(\cdot)$, il est clair que $\mathcal{B}_n(t) = \pi_n(Bw)(t)$ alors, selon (2.5) $\mathcal{B}_n(\cdot)$ converge vers Bw dans $L^2([0,T];H)$ et par suite

$$\begin{aligned}\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}\langle Bw(s)-\mathcal{B}_n(s),z\rangle ds &\leq \|z\|\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}\|Bw(s)-\mathcal{B}_n(s)\|ds\\&\leq \|z\|\int_0^T\|Bw(s)-\mathcal{B}_n(s)\|ds\\&\leq \|z\|\Big(\int_0^T ds\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^T\|Bw(s)-\mathcal{B}_n(s)\|^2 ds\Big)^{\frac{1}{2}}\\&= \|z\|\sqrt{T}\|Bw(s)-\mathcal{B}_n(s)\|_{L^2([0,T];H)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,\end{aligned} \tag{2.22}$$

de même

$$\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}\langle\mathcal{R}w(s)-\mathcal{R}_n(s),z\rangle ds \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{2.23}$$

finalement, il résulte de (2.19), (2.20),(2.21), (2.22) et (2.23) que

$$\begin{aligned}
\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \langle A\dot{u}(s) + Bw(s) + (\mathcal{R}w)(s), z\rangle ds &\leq \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \sigma_{C(s)}(z)ds \\
\Rightarrow \frac{1}{2\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \langle A\dot{u}(s) + Bw(s) + (\mathcal{R}w)(s), z\rangle ds &\leq \frac{1}{2\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \sigma_{C(s)}(z)ds,
\end{aligned}$$

l'utilisation du Théorème 1.24 avec $\varepsilon \downarrow 0$ donne

$$\langle A\dot{u}(t) + Bw(t) + (\mathcal{R}w)(t), z\rangle \leq \sigma_{C(t)}(z), \ \forall z \in H$$

ce qui traduit l'inclusion $A\dot{u}(t) + Bw(t) + (\mathcal{R}w)(t) \in C(t)$ grâce à (1.8).

Il nous reste qu'à démontrer que u est une solution de (2.4). Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in C_n(\delta_n(t))$, (2.15) s'écrit également

$$\langle -\dot{u}_n(t), z - A\dot{u}_n(t) - \mathcal{B}_n(t) - \mathcal{R}_n(t)\rangle \leq 0, \quad \text{p.p } t \in [0,T],$$

alors pour tout $z \in C_n(\delta_n(t))$ et $v \in C_n(t)$

$$\begin{aligned}
\langle -\dot{u}_n(t), v - A\dot{u}_n(t) - \mathcal{B}_n(t) - \mathcal{R}_n(t)\rangle &= \langle -\dot{u}_n(t), z - A\dot{u}_n(t) - \mathcal{B}_n(t) - \mathcal{R}_n(t)\rangle \\
&\quad + \langle -\dot{u}_n(t), v - z\rangle \\
&\leq \langle -\dot{u}_n(t), v - z\rangle \leq \|\dot{u}_n(t)\|\|v - z\|,
\end{aligned}$$

d'après le Lemme 2.10, $d_H(C_n(t), C_n(s)) \leq c_0|\eta(t) - \eta(s)|, \ \forall t, s \in [0,T]$, on a aussi pour tous $S_1, S_2 \subset H$

$$d_H(S_1, S_2) = \inf\left\{r > 0 : S_1 \subset S_2 + r\overline{\mathbb{B}} \text{ et } S_2 \subset S_1 + r\overline{\mathbb{B}}\right\}$$

alors

$$\begin{cases} C_n(t) \subset C_n(\delta(t)) + c_0|\eta(\delta_n(t)) - \eta(t)|\overline{\mathbb{B}} \\ C_n(\delta(t)) \subset C_n(t) + c_0|\eta(\delta_n(t)) - \eta(t)|\overline{\mathbb{B}}, \end{cases}$$

comme $z \in C_n(\delta_n(t))$ et $v \in C_n(t)$ on trouve $\|z - v\| \leq c_0|\eta(\delta_n(t)) - \eta(t)|$ et par suite

$$\langle -\dot{u}_n(t), v - A\dot{u}_n(t) - \mathcal{B}_n(t) - \mathcal{R}_n(t)\rangle \leq c_0\|\dot{u}_n(t)\||\eta(\delta_n(t)) - \eta(t)|. \tag{2.24}$$

D'autre part, pour tous $\varepsilon > 0$, $t^* \in [0,T]$ et $v^* \in C(t^*)$, on définie la fonction

$$\begin{aligned}
v : [t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon] &\to H \\
t &\mapsto P_{C(t)}(v^*), \quad \text{pour tout } t \in [t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon].
\end{aligned}$$

Il est clair que la fonction $v(\cdot)$ est bien définie grâce au Théorème (1.6). Soient $t, s \in [t^*-\varepsilon, t^*+\varepsilon]$ et soit $v^* \in C(t^*)$ alors

$$\|v(t) - v(s)\| = \|\underbrace{P_{C(t)}(v^*)}_{\in C(t)} - \underbrace{P_{C(s)}(v^*)}_{\in C(s)}\| \leq c_0\|\eta(t) - \eta(s)\|,$$

comme η est absolument continue alors v l'est aussi, par conséquent $\exists \gamma > 0 : \sup_{t\in[t^*-\varepsilon,t^*+\varepsilon]} |v(t)| \leq \gamma \Rightarrow v(t) \in B[0,\gamma] = \gamma\overline{\mathbb{B}}$ cela implique l'existence d'un entier $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$v(t) \in C(t) \cap B[0,n] := C_n(t),\ \forall t \in [t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon], \forall n \geq N_1,$$

en prenant $v = v(t)$ dans (2.24) et en intégrant sur $[t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon]$ on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{t^*-\varepsilon}^{t^*+\varepsilon} \langle -\dot{u}_n(s), v(s) - A\dot{u}_n(s) - \mathcal{B}_n(s) - \mathcal{R}_n(s)\rangle ds \leq c_0 L \int_{t^*-\varepsilon}^{t^*+\varepsilon} |\eta(\delta_n(s)) - \eta(s)|ds,\\
\Rightarrow\quad &\int_{t^*-\varepsilon}^{t^*+\varepsilon} \langle \dot{u}_n(s), A\dot{u}_n(s)\rangle ds + \int_{t^*-\varepsilon}^{t^*+\varepsilon} \langle \dot{u}_n(s), \mathcal{B}_n(s)\rangle ds + \int_{t^*-\varepsilon}^{t^*+\varepsilon} \langle \dot{u}_n(s), \mathcal{R}_n(s)\rangle ds\\
&\quad - \int_{t^*-\varepsilon}^{t^*+\varepsilon} \langle \dot{u}_n(s), v(s)\rangle ds \leq c_0 L \int_{t^*-\varepsilon}^{t^*+\varepsilon} |\eta(\delta_n(s)) - \eta(s)|ds \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

Soit ϕ la fonction définie par

$$\phi : L^2([0,T]; H) \ni z \mapsto \int_0^T \langle z(t), Az(t)\rangle dt \in \mathbb{R},$$

alors ϕ est convexe. En effet, soient $y, z \in L^2([0,T]; H)$ alors

$$\begin{aligned}
\lambda\phi(y) + (1+\lambda)\phi(z) - \phi(\lambda y + (1-\lambda)z) &= \lambda\phi(y) + (1+\lambda)\phi(z) - \lambda^2\phi(y) - (1-\lambda)^2\phi(z)\\
&\quad -2\lambda(1-\lambda)\int_0^T \langle y(t), Az(t)\rangle dt\\
&= \lambda(1-\lambda)\big(\phi(y) + \phi(z) - 2\int_0^T \langle y(t), Az(t)\rangle dt\big)\\
&= \lambda(1-\lambda)\int_0^T \langle y(t) - z(t), A(y(t) - z(t))\rangle dt\\
&\geq \lambda(1-\lambda)\alpha \int_0^T \|y(t) - z(t)\|^2 dt \geq 0\\
&\Rightarrow \phi \text{ est convexe .}
\end{aligned}$$

De plus, ϕ est continue alors elle s.c.i. Le Théoreme 1.22 assure que ϕ est faiblement s.c.i, i.e., $\forall (z_n) \subset L^2([0,T]; H) : z_n \overset{w}{\to} z \in L^2([0,T]; H) \Rightarrow \phi(z) \leq \liminf_{n\to+\infty} \phi(z_n)$, en particulier, pour $z_n = \dot{u}\mathbb{1}_{[t^*-\varepsilon,t^*+\varepsilon]}$, on aura

$$\begin{aligned}
\int_{t^*-\varepsilon}^{t^*+\varepsilon} \langle \dot{u}(s), A\dot{u}(s)\rangle ds = \phi(\dot{u}\mathbb{1}_{[t^*-\varepsilon,t^*+\varepsilon]}) &\leq \liminf_{n\to+\infty} \phi(\dot{u}_n\mathbb{1}_{[t^*-\varepsilon,t^*+\varepsilon]})\\
&= \liminf_{n\to+\infty} \int_{t^*-\varepsilon}^{t^*+\varepsilon} \langle \dot{u}_n(s), A\dot{u}_n(s)\rangle ds,
\end{aligned}$$

d'après ce qui précède

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\int_{t^*-\varepsilon}^{t^*+\varepsilon}\langle\dot{u}_n(s),\mathcal{B}_n(s)\rangle ds &= \lim_{n\to+\infty}\int_0^T\langle\dot{u}_n(s),\mathcal{B}_n(s)\mathbb{1}_{[t^*-\varepsilon,t^*+\varepsilon]}(s)\rangle ds\\
&= \int_0^T\langle\dot{u}(s),Bw(s)\mathbb{1}_{[t^*-\varepsilon,t^*+\varepsilon]}(s)\rangle ds = \int_{t^*-\varepsilon}^{t^*+\varepsilon}\langle\dot{u}(s),Bw(s)\rangle ds,\\
\lim_{n\to+\infty}\int_{t^*-\varepsilon}^{t^*+\varepsilon}\langle\dot{u}_n(s),\mathcal{R}_n(s)\rangle ds &= \lim_{n\to+\infty}\int_0^T\langle\dot{u}_n(s),\mathcal{R}_n(s)\mathbb{1}_{[t^*-\varepsilon,t^*+\varepsilon]}(s)\rangle ds\\
&= \int_0^T\langle\dot{u}(s),\mathcal{R}w(s)\mathbb{1}_{[t^*-\varepsilon,t^*+\varepsilon]}(s)\rangle ds = \int_{t^*-\varepsilon}^{t^*+\varepsilon}\langle\dot{u}(s),\mathcal{R}w(s)\rangle ds,\\
\lim_{n\to+\infty}\int_{t^*-\varepsilon}^{t^*+\varepsilon}\langle\dot{u}_n(s),v(s)\rangle ds &= \lim_{n\to+\infty}\int_0^T\langle\dot{u}_n(s),v\mathbb{1}_{[t^*-\varepsilon,t^*+\varepsilon]}(s)\rangle ds\\
&= \int_0^T\langle\dot{u}(s),v\mathbb{1}_{[t^*-\varepsilon,t^*+\varepsilon]}(s)\rangle ds = \int_{t^*-\varepsilon}^{t^*+\varepsilon}\langle\dot{u}(s),v(s)\rangle ds,
\end{aligned}$$

en passons à la limite inférieure dans (2.25) on obtient

$$\int_{t^*-\varepsilon}^{t^*+\varepsilon}\langle\dot{u}(s),A\dot{u}(s)\rangle ds+\int_{t^*-\varepsilon}^{t^*+\varepsilon}\langle\dot{u}(s),Bw(s)\rangle ds+\int_{t^*-\varepsilon}^{t^*+\varepsilon}\langle\dot{u}(s),\mathcal{R}w(s)\rangle ds-\int_{t^*-\varepsilon}^{t^*+\varepsilon}\langle\dot{u}(s),v(s)\rangle ds\leq$$
$$\liminf_{n\to+\infty}\int_{t^*-\varepsilon}^{t^*+\varepsilon}\langle-\dot{u}_n(s),v(s)-A\dot{u}_n(s)-\mathcal{B}_n(s)-\mathcal{R}_n(s)\rangle ds\leq c_0L\liminf_{n\to+\infty}\int_{t^*-\varepsilon}^{t^*+\varepsilon}|\eta(\delta_n(s))-\eta(s)|ds=0$$

donc

$$\begin{aligned}
&\int_{t^*-\varepsilon}^{t^*+\varepsilon}\langle-\dot{u}(s),v(s)-A\dot{u}(s)-Bw(s)-\mathcal{R}w(s)\rangle\leq 0\\
\Rightarrow\quad&\frac{1}{2\varepsilon}\int_{t^*-\varepsilon}^{t^*+\varepsilon}\langle-\dot{u}(s),v(s)-A\dot{u}(s)-Bw(s)-\mathcal{R}w(s)\rangle\leq 0\\
\overset{\varepsilon\downarrow 0}{\Longrightarrow}\quad&\langle-\dot{u}(t^*),v(t^*)-A\dot{u}(t^*)-Bw(t^*)-\mathcal{R}w(t^*)\rangle\leq 0,
\end{aligned}$$

d'autre part, comme $v^*\in C(t^*)$ et $v(t^*)=P_{C(t^*)}(v^*)=v^*$ alors

$$\langle-\dot{u}(t^*),v^*-A\dot{u}(t^*)-Bw(t^*)-\mathcal{R}w(t^*)\rangle\leq 0,$$

comme v^* et t^* choisis arbitrairement dans $C(t^*)$ et $[0,T]$ respectivement, on déduit que

$$-\dot{u}(t^*)\in N_{(C(t^*))}\big(A\dot{u}(t^*)+Bw(t^*)+\mathcal{R}w(t^*)\big),\quad \text{p.p } t^*\in[0,T]$$

comme $u_n(t)\overset{w}{\to}u(t),\ \forall t\in[0,T]$ alors pour $t=0$ on a $u_0=u_n(0)\overset{w}{\to}u(0)\Rightarrow u(0)=u_0$, ce qui signifie que u est une solution du problème (2.4).

Pour terminer la preuve, il nous reste qu'à montrer l'unicité de la solution u, et pour cela soit

u_1, u_2 deux solutions Lipschitziennes pour le problème (2.4), i.e.,

$$\begin{cases} -\dot{u}_1(t) \in N_{(C(t))}\big(A\dot{u}_1(t) + Bw(t) + \mathcal{R}w(t)\big) \\ -\dot{u}_2(t) \in N_{(C(t))}\big(A\dot{u}_2(t) + Bw(t) + \mathcal{R}w(t)\big), \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \langle -\dot{u}_1(t), v - A\dot{u}_1(t) - Bw(t) - \mathcal{R}w(t)\rangle \leq 0, \ \forall v \in C(t) \\ \langle -\dot{u}_2(t), v - A\dot{u}_2(t) - Bw(t) - \mathcal{R}w(t)\rangle \leq 0, \ \forall v \in C(t). \end{cases}$$

En prenant $v = A\dot{u}_2(t) + Bw(t) + \mathcal{R}w(t)$ et $v = A\dot{u}_1(t) + Bw(t) + \mathcal{R}w(t)$ respectivement dans les deux dernières inégalités, on obtient :

$$\begin{cases} \langle \dot{u}_1(t), A\dot{u}_2(t) + Bw(t) + \mathcal{R}w(t) - A\dot{u}_1(t) - Bw(t) - \mathcal{R}w(t)\rangle \geq 0 \\ \langle \dot{u}_2(t), A\dot{u}_1(t) + Bw(t) + \mathcal{R}w(t) - A\dot{u}_2(t) - Bw(t) - \mathcal{R}w(t)\rangle \geq 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \langle \dot{u}_1(t), A\dot{u}_2(t) - A\dot{u}_1(t)\rangle \geq 0 \\ \langle \dot{u}_2(t), A\dot{u}_1(t) - A\dot{u}_2(t)\rangle \geq 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \langle \dot{u}_1(t), A\dot{u}_2(t) - A\dot{u}_1(t)\rangle \geq 0 \\ \langle -\dot{u}_2(t), A\dot{u}_2(t) - A\dot{u}_1(t)\rangle \geq 0, \end{cases}$$

En additionnant les deux dernières inégalités membre à membre, on obtient

$$\langle \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t), A\dot{u}_1(t) - A\dot{u}_2(t)\rangle \leq 0 \overset{A \text{ symétrique}}{\Longrightarrow} \langle A(\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)), \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\rangle \leq 0,$$

d'où

$$\begin{aligned} 0 &\leq \alpha\|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|^2 \leq \langle A(\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)), \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\rangle \leq 0 \\ &\Rightarrow \|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\| = 0 \Leftrightarrow \dot{u}_1(t) = \dot{u}_2(t), \end{aligned}$$

en intégrant sur $[0, T]$, on déduit que $u_1(t) = u_2(t)$ pour tout $t \in [0, T]$. ■

Lemme 2.15. *Toute la suite (entière) $(u_n)_n$ converge fortement vers u dans $L^2([0, T]; H)$.*

Démonstration. Soient $(u_{n_m})_m$ et $(u_{n_j})_j$ deux sous-suites de $(u_n)_n$ telles

$$\begin{cases} u_{n_m} \xrightarrow{w} u_1 \text{ dans } L^2([0, T]; H) \\ u_{n_j} \xrightarrow{w} u_2 \text{ dans } L^2([0, T]; H). \end{cases}$$

Il résulte du Lemme 2.13 et Lemme 2.14 que u_1 et u_2 sont deux solutions du problème (2.4) associées à la condition initiale u_0. D'après le résultat d'unicité établi dans le Lemme 2.14, on déduit que $u_1 = u_2$. En combinant ceci avec le fait que $(u_n)_n$ est bornée, on conclut du Théorème 1.18 que toute la suite $(u_n)_n$ converge faiblement vers u dans $L^2([0,T];H)$. Il nous reste qu'à démontrer la convergence forte. D'après ce qui précède et comme $w \in C([0,T];H)$ alors

$$\begin{aligned}\|A\dot{u}(t) + Bw(t) + \mathcal{R}w(t)\| &\leq \|A\|\|\dot{u}(t)\| + \|Bw(t)\| + \|\mathcal{R}w(t)\|\\ &\leq L\|A\| + \|Bw\|_{C([0,T];H)} + \|\mathcal{R}w\|_{C([0,T];H)} \leq L\|A\| + 2M_w,\end{aligned}$$

alors, il existe un entier $N_2 > 0$ tel que $A\dot{u}(t) + Bw(t) + \mathcal{R}w(t) \in C_n(t)$ pour presque tout $t \in [0,T]$ et pour tout $n \geq N_2$. Comme u est une solution de (2.4) alors, pour tous $z \in C_n(t) \subset C(t)$ et $v \in C_n(\delta_n(t))$

$$\begin{aligned}\langle -\dot{u}(t), v - A\dot{u}(t) - Bw(t) - (\mathcal{R}w)(t)\rangle &= \langle -\dot{u}(t), z - A\dot{u}(t) - Bw(t) - (\mathcal{R}w)(t)\rangle + \langle -\dot{u}(t), v - z\rangle\\ &\leq \langle -\dot{u}(t), v - z\rangle \leq L\|v - z\| \leq c_0 L|\eta(\delta_n(t) - \eta(t)|,\end{aligned}$$

En particulier, pour $v = A\dot{u}_n(t) + \mathcal{B}_n(t) + \mathcal{R}_n(t) \in C_n(\delta_n(t))$ dans la dernière inégalité et $v = A\dot{u}(t) + Bw(t) + (\mathcal{R}w)(t) \in C_n(t) \subset C(t)$ dans celle de (2.24), on obtient par addition

$$\begin{aligned}&\langle \dot{u}(t) - \dot{u}_n(t), A\dot{u}_n(t) - A\dot{u}(t) + \mathcal{B}_n(t) - Bw(t) + \mathcal{R}_n(t) - (\mathcal{R}w)(t)\rangle \leq 2c_0 L|\eta(\delta_n(t) - \eta(t)|\\ \Rightarrow\ &\langle \dot{u}(t) - \dot{u}_n(t), A\big(\dot{u}_n(t) - \dot{u}(t)\big)\rangle + \langle \dot{u}(t) - \dot{u}_n(t), \mathcal{B}_n(t) - Bw(t)\rangle +\\ &\langle \dot{u}(t) - \dot{u}_n(t), \mathcal{R}_n(t) - (\mathcal{R}w)(t)\rangle \leq 2c_0 L|\eta(\delta_n(t) - \eta(t)|,\end{aligned}$$

la coercivité de A implique

$$\begin{aligned}\alpha\|\dot{u}(t) - \dot{u}_n(t)\|^2 &\leq 2c_0 L|\eta(\delta_n(t) - \eta(t)| + 2\|\dot{u}(t)\|\big(\|\mathcal{B}_n(t) - Bw(t)\| + \|\mathcal{R}_n(t) - \mathcal{R}w(t)\|\big)\\ &\leq 2c_0 L|\eta(\delta_n(t) - \eta(t)| + 2L\big(\|\mathcal{B}_n(t) - Bw(t)\| + \|\mathcal{R}_n(t) - \mathcal{R}w(t)\|\big),\end{aligned}$$

par intégration sur $[0,T]$

$$\begin{aligned}\underbrace{\int_0^T \|\dot{u}(t) - \dot{u}_n(t)\|^2 dt}_{\|\dot{u}-\dot{u}_n\|^2_{L^2([0,T];H)}} \leq \frac{2c_0 L}{\alpha}\int_0^T |\eta(\delta_n(t) - \eta(t)| dt + \frac{2L}{\alpha}\int_0^T \|\mathcal{B}_n(t) - Bw(t)\| dt\\ + \frac{2L}{\alpha}\int_0^T \|\mathcal{R}_n(t) - \mathcal{R}w(t)\| dt,\end{aligned}$$

en passant à la limite quand $n \to +\infty$, on déduit la convergence forte de $\dot{u}_n$ vers $\dot{u}$ dans

$L^2([0,T];H)$. De plus

$$\begin{aligned}\|u(t)-u_n(t)\| &= \|\int_0^t \dot{u}(s)ds - \int_0^t \dot{u}_n(s)ds\| \leq \int_0^T \|\dot{u}(s)-\dot{u}_n(s)\|ds \leq \sqrt{T}\|\dot{u}-\dot{u}_n\|_{L^2([0,T];H)} \\ &\Rightarrow \|u-u_n\|_{L^2([0,T];H)} \leq T\|\dot{u}-\dot{u}_n\|_{L^2([0,T];H)} \\ &\Rightarrow u_n \text{ converge fortement vers } u \text{ dans } L^2([0,T];H).\end{aligned}$$

■

Finalement et après avoir démontré et donné tous les ingrédients nécessaires, on arrive au résultat principale de ce travail qui justifie l'existence et l'unicité de la solution pour le problème (SPH).

Théorème 2.16. *Soit H un espace de Hilbert. Supposons que les hypothèses $(\boldsymbol{\mathcal{H}_A})$, $(\boldsymbol{\mathcal{H}_B})$, $(\boldsymbol{\mathcal{H}_\mathcal{R}})$ et $(\boldsymbol{\mathcal{H}_C})$ soient satisfaites alors, le problème (SPH) admet une solution unique $u : [0,T] \to H$. De plus, cette solution a une dépendance Lipschitzienne avec la condition initial dans le sens : $u_0 \mapsto u(u_0)$ est lipschitzienne.*

Démonstration. D'après ce qui précède, pour tout $w \in C([0,T];H)$, il existe une seule solution lipschitzienne $u = u(w)$ du problème (2.4). Soit $S : C([0,T];H) \to W^{1,\infty}([0,T];H) \subset C([0,T];H)$ l'opérateur défini par $Sw = u(w), w \in C([0,T];H)$. On va montrer que S admet un seul point fixe, pour ce faire, soient $w_i \in C([0,T];H), i = 1,2$ et soient $u_i = u(w_i), i = 1,2$ telles que

$$\begin{cases} -\dot{u}_i(t) \in N_{C(t)}\big(A\dot{u}_i(t) + Bw_i(t) + (\mathcal{R}w_i)(t)\big), \text{ p.p } t \in [0,T], \\ u_i(0) = u_0. \end{cases} \tag{2.26}$$

alors

$$\begin{cases} \langle -\dot{u}_i(t), v - A\dot{u}_i(t) - Bw_i(t) - \mathcal{R}w_i(t)\rangle \leq 0, \quad \text{pour tout } v \in C(t) \\ u_i(0) = u_0, \end{cases}$$

on choisit, respectivement, $v = A\dot{u}_2(t) + Bw_2(t) + \mathcal{R}w_2(t)$ et $v = A\dot{u}_1(t) + Bw_1(t) + \mathcal{R}w_1(t)$ dans la dernière inégalité on obtient par addition

$$\begin{aligned}\Rightarrow \langle A\dot{u}_1(t) - A\dot{u}_2(t), \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\rangle &\leq \langle Bw_1(t) - Bw_2(t), \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\rangle \\ &\quad + \langle \mathcal{R}w_1(t) - \mathcal{R}w_2(t), \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\rangle,\end{aligned}$$

en tenant compte de $(\boldsymbol{\mathcal{H}_A})$, $(\boldsymbol{\mathcal{H}_B})$ et $(\boldsymbol{\mathcal{H}_\mathcal{R}})$ on déduit

$$\begin{aligned}
\alpha\|\dot{u}_1(t)-\dot{u}_2(t)\| &\leq \|Bw_1(t)-Bw_2(t)\|+\|\mathcal{R}w_1(t)-\mathcal{R}w_2(t)\| \\
\Rightarrow \|\dot{u}_1(t)-\dot{u}_2(t)\| &\leq \frac{L_B}{\alpha}\|w_1(t)-w_2(t)\|+\frac{L_\mathcal{R}}{\alpha}\int_0^t\|w_1(s)-w_2(s)\|ds, \qquad (2.27)
\end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
\|(Sw_1)(t)-(Sw_2)(t)\| &= \|u_1(t)-u_2(t)\| \leq \int_0^t\|\dot{u}_1(s)-\dot{u}_2(s)\|ds \\
&\leq \frac{L_B}{\alpha}\int_0^t\|w_1(s)-w_2(s)\|ds+\frac{L_\mathcal{R}}{\alpha}\int_0^t\int_0^s\|w_1(\xi)-w_2(\xi)\|d\xi ds \\
&\leq \frac{L_B}{\alpha}\int_0^t\|w_1(s)-w_2(s)\|ds+\frac{TL_\mathcal{R}}{\alpha}\int_0^t\|w_1(\xi)-w_2(\xi)\|d\xi \\
&\leq \frac{L_B+TL_R}{\alpha}\int_0^t\|w_1(s)-w_2(s)\|ds,
\end{aligned}$$

ce qui justifie que S est un opérateur avec retard, alors du Lemme 2.9 on conclut que S admet un seul point fixe, i.e., il existe une fonction unique $w^*\in C([0,T];H)$ telle que $Sw^*=w^*$. En écrivant (2.26) avec $w=w^*$, on déduit que $u=u(w^*)=w^*\in W^{1,\infty}([0,T];H)$ est une solution du problème (SPH), i.e.,

$$\begin{cases}
-\dot{u}(t)\in N_{C(t)}\big(Au(t)+Bu(t)+(\mathcal{R}u)(t)\big), & \text{p.p } t\in[0,T], \\
u(0)=u_0.
\end{cases}$$

En ce qui concerne l'unicité de la solution, elle est une conséquence directe de l'unicité du point fixe pour l'opérateur S.

Passons maintenant à la dépendance lipschitzienne de la solution par rapport à la condition initiale, pour cela, soient $u_0^1, u_0^2\in H$ et soient $u_i\in W^{1,\infty}([0,T];H), i=1,2$ les solutions du problème (SPH) associées aux conditions initiales u_0^1 et u_0^2 respectivement. Alors, de façon similaire à celle utilisée dans (2.27) on obtient

$$\|\dot{u}_1(s)-\dot{u}_2(s)\|\leq\frac{L_B}{\alpha}\|u_1(s)-u_2(s)\|+\frac{L_\mathcal{R}}{\alpha}\int_0^s\|u_1(r)-u_2(r)\|dr,\ \text{p.p } s\in[0,T], \qquad (2.28)$$

comme $u_i(t)=u_0^i+\displaystyle\int_0^t\dot{u}_i(s)ds, t\in[0,T]$ on trouve

$$\begin{aligned}
\|u_1(t)-u_2(t)\| &\leq \int_0^t\|\dot{u}_1(s)-\dot{u}_2(s)\|ds+\|u_0^1-u_0^2\|\leq\frac{L_B+TL_R}{\alpha}\int_0^t\|u_1(s)-u_2(s)\|ds \\
&\quad +\|u_0^1-u_0^2\|,
\end{aligned}$$

l'application du Lemme 1.23 (avec $x(t) = \|u_1(t) - u_2(t)\|, g(s) = 1, \Psi(t) = \|u_0^1 - u_0^2\|, T_0 = 0)$ donne

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq L_0\|u_0^1 - u_0^2\|, \quad \text{où } L_0 := 1 + Te^T. \tag{2.29}$$

En utilisant (2.29) dans (2.28) on obtient

$$\|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\| \quad \leq \quad L_1\|u_0^1 - u_0^2\|, \quad \text{p.p } s \in [0, T] \quad \text{où } L_1 := \frac{L_0}{\alpha}(L_B + TL_R)$$

par conséquent

$$\|u_1 - u_2\|_{W^{1,\infty}([0,T];H)} = \|u_1 - u_2\|_{L^\infty([0,T];H)} + \|\dot{u}_1 - \dot{u}_2\|_{L^\infty([0,T];H)} \leq (L_0 + L_1)\|u_0^1 - u_0^2\|,$$

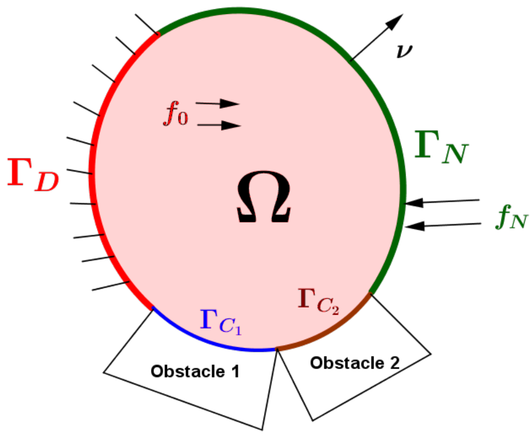
ce qui termine la preuve. ■

Remarque 2.17. *L'unicité de la solution se justifie également par l'inégalité (2.29) en prenant la même condition initiale* $u_0 = u_0^1 = u_0^2$.

Chapitre 3

Application aux problèmes de contact viscoélastiques avec mémoire

On considère un corps viscoélastique occupe un domaine ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d = 2, 3$ avec une frontière $\partial\Omega = \Gamma$ Lipschitzienne, partitionnée en quatre parties disjointes et mesurables $\Gamma_D, \Gamma_N, \Gamma_{C_1}$ et Γ_{C_2} telles que mes$\,(\Gamma_D) > 0$. Le corps est bloqué (fixé) sur Γ_D. Sur Γ_N agissent des tractions surfaciques de densité f_N et dans Ω agissent des forces volumiques de densité f_0. Ce corps est en contact avec deux obstacles sur Γ_{C_1} et Γ_{C_2}.



Afin de décrire l'évolution de son états mécanique, due à l'application des forces volumiques et des tractions surfaciques, on introduit les notations suivantes :

pour un champ de vecteurs ξ on note par ξ_ν et ξ_τ ses composantes normale et tangentielle respectivement tandis que ν représente la normale unitaire sortante à Γ. Dans ce cas, on a

$$\xi_\nu = \xi.\nu \text{ et } \xi_\tau = \xi - \xi_\nu \nu.$$

De plus, σ_ν et σ_τ représentent les composantes normale et tangentielle du champ de contraintes σ sur la frontière Γ, i.e.,

$$\sigma_\nu = (\sigma\nu).\nu \text{ et } \sigma_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu \nu.$$

On note également par $\mathbb{S}^d$ l'espace des matrices carrées symétriques (tenseurs symétriques d'ordre deux). Sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{S}^d$, on définit les produits scalaires et les normes suivantes :

$$\xi.\eta = \xi_i \eta_i, \ \|\xi\|_{\mathbb{R}^d} = \sqrt{(\xi.\xi)} \ \text{ pour } \xi = (\xi_i), \eta = (\eta_i) \in \mathbb{R}^d,$$

$$\sigma.\tau = \sigma_{ij}\tau_{ij}, \ \|\sigma\|_{\mathbb{S}^d} = \sqrt{(\sigma.\sigma)} \ \text{ pour } \sigma = (\sigma_{ij}), \tau = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d, \ 1 \leq i, j \leq d.$$

Notons que

$$\sigma_\nu v = (\sigma_\nu \nu + \sigma_\tau).(v_\nu + v_\tau) = \sigma_\nu v_\nu + \sigma_\tau v_\tau. \tag{3.1}$$

Finalement, on pose $\mathcal{Q} = \Omega \times [0, T]$, $\Sigma = \Gamma \times [0, T]$, $\Sigma_D = \Gamma_D \times [0, T]$, $\Sigma_N = \Gamma_N \times [0, T]$, $\Sigma_{C_1} = \Gamma_{C_1} \times [0, T]$ et $\Sigma_{C_2} = \Gamma_{C_2} \times [0, T]$. Le champ de déplacement $u = u(x, t) = (u_i(x, t))$ et le champ des contraintes $\sigma = \sigma(x, t) = (\sigma_{ij}(x, t))$ sont les inconnus du problème suivant

Problème 3.1. *trouver un champ de déplacement $u : \mathcal{Q} \to \mathbb{R}^d$ et un champ des contraintes $\sigma : \mathcal{Q} \to \mathbb{S}^d$ tels que*

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{B}\varepsilon(u(t)) + \int_0^t \mathfrak{R}(t-s)\varepsilon(u(s))ds, \qquad \textit{dans } \mathcal{Q} \tag{3.2}$$

$$\operatorname{Div} \sigma(t) + f_0(t) = 0, \qquad \textit{dans } \mathcal{Q} \tag{3.3}$$

$$u(t) = 0, \qquad \textit{dans } \Sigma_D \tag{3.4}$$

$$\sigma(t)\nu = f_N(t), \qquad \textit{dans } \Sigma_N \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} \dot{u}_\nu(t) \leq 0, \sigma_{\mathcal{V}}(t) \leq 0, \sigma_\nu(t)\dot{u}_\nu(t) = 0 \\ \sigma_\nu(t) = 0 \end{cases} \qquad \textit{sur } \Sigma_{C_1} \tag{3.6}$$

$$\begin{cases} -\sigma_\nu(t) = F \\ \|\sigma_\tau(t)\|_{\mathbb{S}^d} \leq \mu|\sigma_\nu(t)|, -\sigma_\tau(t) = \mu|\sigma_\nu(t)|\frac{\dot{u}_\tau(t)}{\|\dot{u}_\tau(t)\|_{\mathbb{R}^d}}, \quad \textit{si } \dot{u}_\tau(t) \neq 0 \end{cases} \qquad \textit{sur } \Sigma_{C_2} \tag{3.7}$$

$$u(0) = u_0. \qquad \textit{dans } \Omega \tag{3.8}$$

L'égalité (3.2) est une loi constitutive générale pour les matériaux viscoélastiques à longue mémoire dans laquelle $\mathcal{A}$ est l'opérateur de viscosité, $\mathcal{B}$ représente l'opérateur d'élasticité et $\mathfrak{R}$ est le tenseur de relaxation. De plus, l'opérateur de déformation ε est défini par

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)),\ \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),\quad \text{dans } \mathcal{Q}.$$

Dans un tel problème, F est une fonction positive, $\mu \geq 0$ est le coefficient de frottement et μF représente la borne de frottement. Pour plus de détail sur ce type de problèmes, le lecteur se réfère à [13, 21].

Pour établir la formulation variationnelle du Problème 3.1, on introduit les espaces de fonctions suivants

$$\mathbb{H} = \{v \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^d),\ v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\},\quad \mathcal{V} = L^2(\Omega;\mathbb{S}^d).$$

Notons que l'espace $\mathcal{V}$ muni du produit scalaire

$$\langle \sigma, \tau\rangle_{\mathcal{V}} = \int_\Omega \sigma_{ij}(x)\tau_{ij}(x)dx,\quad \text{pour tous } \sigma, \tau \in \mathcal{V},$$

est un espace de Hilbert dont la norme est $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$. De plus, comme $\operatorname{mes}\Gamma_D > 0$ alors $\mathbb{H}$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle u, v\rangle_{\mathbb{H}} = \langle \varepsilon(u), \varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{V}}$ pour tous $u, v \in \mathbb{H}$, et $\|\cdot\|_{\mathbb{H}}$ est la norme associée $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{H}}$.

On définit également l'ensemble des champs des vitesses admissibles

$$K = \{v \in \mathbb{H},\ v_\nu \leq 0 \text{ p.p sur } \Gamma_{C_1}\}.$$

Maintenant, on considère l'espace des champs de tenseurs de quatrième ordre

$$Q_\infty = \{\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ijkl}),\ \mathcal{E}_{ijkl} = \mathcal{E}_{jikl} = \mathcal{E}_{klij} \in L^\infty(\Omega),\ 1 \leq i, j, k, l \leq d\}.$$

Il est bien connu que Q_∞ est un espace de Banach pour la norme

$$\|\mathcal{E}\|_{Q_\infty} = \max_{1\leq i,j,k,l\leq d} \|\mathcal{E}_{ijkl}\|_{L^\infty(\Omega)},\quad \text{pour tout } \mathcal{E} \in Q_\infty.$$

Afin d'étudier le problème 3.1, on aura besoin aux hypothèses suivantes

$(\mathcal{H}_\mathcal{A})$

$$\mathcal{A} \in Q_\infty \text{ tel qu'il existe } L_\mathcal{A} > 0 : \mathcal{A}\xi\cdot\xi \geq L_\mathcal{A}\|\xi\|^2_{\mathbb{S}^d}, \forall\xi \in \mathbb{S}^d.$$

$(\mathcal{H}_{\mathcal{B}})$ $\mathcal{B} : \Omega \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d$ tel que

$$\begin{cases} \exists L_{\mathcal{B}} > 0, \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^d \\ \|\mathcal{B}(x,\xi_1) - \mathcal{B}(x,\xi_2)\|_{\mathbb{S}^d} \leq L_{\mathcal{B}} \|\xi_1 - \xi_2\|_{\mathbb{S}^d}, \ \text{p.p } x \in \Omega, \\ x \mapsto \mathcal{B}(x,\xi) \text{ est mesurable sur } \Omega, \ \forall \xi \in \mathbb{S}^d, \\ x \mapsto \mathcal{B}(x,0) \in \mathcal{V}. \end{cases}$$

$(\mathcal{H}_{\mathfrak{R}})$ $\mathfrak{R} \in C([0,T]; Q_\infty)$.

$(\mathcal{H}_f)$

$$\begin{cases} f_0 \in W^{1,1}\big([0,T]; L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)\big), \\ f_N \in W^{1,1}\big([0,T]; L^2(\Gamma_N;\mathbb{R}^d)\big), \\ F \in L^2(\Gamma_{C_2}), \ F(x) \geq 0 \text{ p.p } x \in \Gamma_{C_2}, \\ \mu \in L^\infty(\Gamma_{C_2}), \ \mu(x) \geq 0 \text{ p.p } x \in \Gamma_{C_2}. \end{cases}$$

On aura besoin également à la formule de Green donnée par

$$\int_\Omega \operatorname{Div} w.v dx = -\int_\Omega w.\nabla v dx + \int_\Gamma (w.\nu) v d\Gamma. \tag{3.9}$$

Arrivons maintenant à la formulation variationnelle du Problème 3.1, pour cela, on suppose que (u,σ) soient deux fonctions lisses (différentiables) vérifient (3.2)–(3.8). Soit $v \in K$ et pour tout $t \in [0,T]$, on multiplie (3.3) par $v - \dot{u}(t)$ et on intègre sur Ω, on obtient

$$\int_\Omega (v-\dot{u}(t))(\operatorname{Div}\sigma(t) + f_0(t))dt = \int_\Omega (v-\dot{u}(t))\operatorname{Div}\sigma(t)dt + \int_\Omega (v-\dot{u}(t))f_0(t)dt = 0,$$

l'application de la formule de Green (3.9) donne

$$\begin{aligned}\int_\Omega (v-\dot{u}(t))(\operatorname{Div}\sigma(t) + f_0(t))dt = -\int_\Omega \sigma(t)\nabla(v-\dot{u}(t))dt \quad &+ \int_\Gamma (\sigma(t)\nu)(v-\dot{u}(t))d\Gamma \\ &+ \int_\Omega f_0(t)(v-\dot{u}(t))dt = 0,\end{aligned}$$

alors

$$\int_\Omega \sigma(t)\nabla(v-\dot{u}(t))dt = \int_\Omega f_0(t)(v-\dot{u}(t))dt + \int_\Gamma (\sigma(t)\nu)(v-\dot{u}(t))d\Gamma,$$

mais

$$\begin{aligned}\varepsilon(v)-\varepsilon(\dot u(t)) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}-\frac{\partial \dot u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial \dot u_j}{\partial x_i}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i-\dot u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j-\dot u_j}{\partial x_i}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial (v-\dot u)_i}{\partial x_j}+\frac{\partial (v-\dot u)_j}{\partial x_i}\right)\\ &= \frac{1}{2}\Bigg(\nabla(v-\dot u(t))_i+\nabla(v-\dot u(t))_j\Bigg)_{ij}=\nabla(v-\dot u(t)),\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \sigma(t)(\varepsilon(v)-\varepsilon(\dot u(t)))dt=\int_\Omega f_0(t)(v-\dot u(t))dt+\int_\Gamma(\sigma(t)\nu)(v-\dot u(t))d\Gamma\\ \Rightarrow&\langle\sigma(t),\varepsilon(v)-\varepsilon(\dot u(t))\rangle_{\mathcal V}=\langle f_0(t),v-\dot u(t)\rangle_{L^2(\Omega,\mathbb R^d)}+\int_\Gamma(\sigma(t)\nu)(v-\dot u(t))d\Gamma,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\langle\sigma(t),\varepsilon(v)-\varepsilon(\dot u(t))\rangle_{\mathcal V} &= \langle f_0(t),v-\dot u(t)\rangle_{L^2(\Omega,\mathbb R^d)}+\int_{\Gamma_D}(\sigma(t)\nu)(v-\dot u(t))d\Gamma \\ &\quad+\int_{\Gamma_N}(\sigma(t)\nu)(v-\dot u(t))d\Gamma+\int_{\Gamma_{C_1}}(\sigma(t)\nu)(v-\dot u(t))d\Gamma\\ &\quad+\int_{\Gamma_{C_1}}(\sigma(t)\nu)(v-\dot u(t))d\Gamma.\end{aligned}\tag{3.10}$$

Comme $v\in K\subset\mathbb H$ alors par (3.4) on obtient

$$\int_{\Gamma_D}(\sigma(t)\nu)(v-\dot u(t))d\Gamma=0,$$

il s'ensuit de (3.5) que

$$\int_{\Gamma_N}\underbrace{(\sigma(t)\nu)}_{=f_N(t)}(v-\dot u(t))d\Gamma=\langle f_N(t),v-\dot u(t)\rangle_{L^2(\Gamma_N;\mathbb R^d)},$$

d'autre part, grâce à (3.6), on a

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_{C_1}}(\sigma(t)\nu)(v-\dot u(t))d\Gamma &= \int_{\Gamma_{C_1}}(\sigma_\nu(t)(v_\nu-\dot u_\nu(t))+\underbrace{\sigma_\tau(t)}_{=0}(v_\tau-\dot u_\tau(t))d\Gamma\\ &= \int_{\Gamma_{C_1}}(\underbrace{\sigma_\nu(t)}_{\le 0}(\underbrace{v_\nu}_{\le 0}-\dot u_\nu(t))d\Gamma\ge 0,\end{aligned}$$

et par (3.7) on a

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_{C_2}} (\sigma(t)\nu)(v-\dot{u}(t))d\Gamma &= \int_{\Gamma_{C_2}} \underbrace{\sigma_\nu(t)}_{-F}(v_\nu - \dot{u}_\nu(t)) + \sigma_\tau(t)(v_\tau - \dot{u}_\tau(t))d\Gamma \\
&= \int_{\Gamma_{C_2}} F(\dot{u}_\nu(t) - v_\nu)d\Gamma + \int_{\Gamma_{C_2}} -\sigma_\tau(t)(\dot{u}_\tau(t) - v_\tau)d\Gamma \\
&= \int_{\Gamma_{C_2}} F(\dot{u}_\nu(t) - v_\nu)d\Gamma + \int_{\Gamma_{C_2}} \mu|\sigma_\nu(t)|\frac{\dot{u}_\tau(t)}{\|\dot{u}_\tau(t)\|_{\mathbb{R}^d}}(\dot{u}_\tau(t) - v_\tau)d\Gamma \\
&= \int_{\Gamma_{C_2}} F(\dot{u}_\nu(t) - v_\nu)d\Gamma + \int_{\Gamma_{C_2}} \mu F\frac{\|\dot{u}_\tau(t)\|^2_{\mathbb{R}^d}}{\|\dot{u}_\tau(t)\|_{\mathbb{R}^d}}d\Gamma - \int_{\Gamma_{C_2}} \mu F\frac{\dot{u}_\tau(t)}{\|\dot{u}_\tau(t)\|_{\mathbb{R}^d}}v_\tau d\Gamma \\
&\geq \int_{\Gamma_{C_2}} F(\dot{u}_\nu(t) - v_\nu)d\Gamma + \int_{\Gamma_{C_2}} \mu F\|\dot{u}_\tau(t)\|_{\mathbb{R}^d}d\Gamma - \int_{\Gamma_{C_2}} \mu F\|v_\tau\|_{\mathbb{R}^d}d\Gamma.
\end{aligned}$$

En combinant les résultats des intégrales précédentes avec l'égalité (3.10) on obtient

$$\begin{aligned}
\langle\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t))\rangle_{\mathcal{V}} \geq\; & \langle f(t), v - \dot{u}(t)\rangle_{\mathbb{H}} + \int_{\Gamma_{C_2}} F(\dot{u}_\nu(t) - v_\nu)d\Gamma + \int_{\Gamma_{C_2}} \mu F\|\dot{u}_\tau(t)\|_{\mathbb{R}^d}d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma_{C_2}} \mu F\|v_\tau\|_{\mathbb{R}^d}d\Gamma,
\end{aligned}$$

où $f \in W^{1,1}([0,T];\mathbb{H})$ est définie par

$$\langle f(t), v\rangle_{\mathbb{H}} = \langle f_0(t), v\rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \langle f_N(t), v\rangle_{L^2(\Gamma_N;\mathbb{R}^d)}, f \in W^{1,1}([0,T];\mathbb{H}).$$

En utilisant la dernière inégalité, l'égalité (3.2) et le fait que $\dot{u} \in K$ (car $u \in \mathbb{H}$), on déduit la formulation variationnelle du Problème (3.1) donnée par le problème 3.2.

Problème 3.2. *Trouver un champ de déplacement $u \in [0,T] \to \mathbb{H}$ tel que*

$$\begin{aligned}
&\dot{u}(t) \in K,\ \Big\langle \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{B}\varepsilon(u(t)) + \int_0^t \mathfrak{R}(t-s)\varepsilon(u(s))ds, \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t))\Big\rangle_{\mathcal{V}} \\
&+ \int_{\Gamma_{C_2}} F(v_\nu - \dot{u}_\nu(t))d\Gamma + \int_{\Gamma_{C_2}} \mu F\|v_\tau\|_{\mathbb{R}^d}d\Gamma - \int_{\Gamma_{C_2}} \mu F\|\dot{u}_\tau(t)\|_{\mathbb{R}^d}d\Gamma \geq \langle f(t), v - \dot{u}(t)\rangle_{\mathbb{H}},
\end{aligned}$$

pour tout $v \in K$, p.p $t \in [0,T]$,

$u(0) = u_0$ *sur* Ω.

Théorème 3.3. *Supposons que les hypothèses $(\mathcal{H}_\mathcal{A}), (\mathcal{H}_\mathcal{B}), (\mathcal{H}_\mathfrak{R})$ et $(\mathcal{H}_f)$ soient satisfaites alors, pour toute condition initiale $u_0 \in \mathbb{H}$ il existe une solution unique $u = u(u_0) \in W^{1,\infty}([0,T];\mathbb{H})$ pour le Problème 3.2. De plus, la solution $u(\cdot)$ a une dépendance Lipschitzienne avec la condition initiale, dans le sens $u_0 \mapsto u(u_0) : \mathbb{H} \to W^{1,\infty}([0,T];\mathbb{H})$ est Lipschitzienne.*

D*émonstration*. L'idée de la preuve consiste à réécrire l'inégalité variationnelle du problème 3.2 sous une forme d'un processus de rafle avec retard, i.e., sous la forme (SPH), puis utiliser le Théorème 2.16 pour récupérer l'existence et l'unicité de la solution. Á cet égard, on introduit les opérateurs suivants : $A : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $B : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ et $\mathcal{R} : C([0,T];\mathbb{H}) \to C([0,T];\mathbb{H})$ avec

$$\langle Au, v\rangle_{\mathbb{H}} = \langle \mathcal{A}(\varepsilon(u)), \varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{V}} \tag{3.11}$$

$$\langle Bu, v\rangle_{\mathbb{H}} = \langle \mathcal{B}(\varepsilon(u)), \varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{V}} \tag{3.12}$$

$$\langle (\mathcal{R}w)(t), v\rangle_{\mathbb{H}} = \left\langle \int_0^t \mathfrak{R}(t-s)\varepsilon(w(s))ds, \varepsilon(v)\right\rangle_{\mathcal{V}}, \tag{3.13}$$

pour tous $u, v \in \mathbb{H}$, et $w \in C([0,T];\mathbb{H})$. On définit également la fonction $\varphi : \mathbb{H} \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sur $\in \mathbb{H}$ par

$$\varphi(v) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\Gamma_{C_2}} \mu F(v_\nu + \|v_\tau\|_{\mathbb{R}^d})d\Gamma & \text{si } v \in K \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

En tenant compte de toutes les notations définies ci-dessus, on déduit que le Problème 3.2 est équivalent à l'inégalité variationnelle suivante

$$\begin{cases} \text{Trouver un champ de déplacement } u : [0,T] \to \mathbb{H} \text{ tel que} \\ \dot{u}(t) \in K,\ \langle A\dot{u}(t) + Bu(t) + (\mathcal{R}u)(t) - f(t), v - \dot{u}(t)\rangle_{\mathbb{H}} + \varphi(v) - \varphi(\dot{u}(t)) \geq 0 \\ \text{pour tout } v \in \mathbb{H} \text{ et p.p } t \in [0,T], \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Ce dernier problème, à son tour, est équivalent à l'inclusion différentielle gouvernée par le sous-différentiel suivante (due à la définition du sous-différentiel de la fonction convexe φ)

$$\begin{cases} f(t) - A\dot{u}(t) - Bu(t) - (\mathcal{R}u)(t) \in \partial\varphi(\dot{u}(t)) \text{ p.p } t \in [0,T], \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{3.14}$$

Il clair que l'ensemble K est un cône convexe fermé. En effet, pour tous $\lambda > 0, v \in K$

$$\begin{cases} v_\nu \leq 0 \text{ p.p sur } \Gamma_{C_1} \\ v \in \mathbb{H} \\ v = 0 \text{ sur } \Gamma_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda v_\nu \leq 0 \text{ p.p sur } \Gamma_{C_1} \\ \lambda v \in \mathbb{H} \\ \lambda v = 0 \text{ sur } \Gamma_D \end{cases} \Rightarrow \lambda v \in K$$

ainsi, pour tous $\lambda \in [0,1], v, z \in K$

$$\begin{cases} v_\nu \leq 0, z_\nu \leq 0 \text{ p.p sur } \Gamma_{C_1} \\ v, z \in \mathbb{H} \\ v = 0, z = 0 \text{ sur } \Gamma_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda v_\nu + (1-\lambda) z_\nu \leq 0 \text{ p.p sur } \Gamma_{C_1} \\ \lambda v + (1-\lambda) z \in \mathbb{H} \\ \lambda v + (1-\lambda) z = 0 \text{ sur } \Gamma_D \end{cases} \Rightarrow \lambda v + (1-\lambda) z \in K,$$

de plus, φ est une fonction propre, convexe et positivement homogène de degré 1 (i.e., $\varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v), \forall \lambda > 0, \forall v \in \mathbb{H}$) avec $\varphi(0) = 0$ alors, il découle du Lemme 1.25 que

$$\varphi^*(v) = \psi_C(v), \forall v \in \mathbb{H} \text{ avec } C = \partial\varphi(0).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} f(t) - A\dot{u}(t) - Bu(t) - (\mathcal{R}u)(t) \in \partial\varphi(\dot{u}(t)) &\Leftrightarrow \dot{u}(t) \in \partial\varphi^*(f(t) - A\dot{u}(t) - Bu(t) - (\mathcal{R}u)(t)) \\ &\Leftrightarrow \dot{u}(t) \in \partial\psi_C(f(t) - A\dot{u}(t) - Bu(t) - (\mathcal{R}u)(t)) \\ &\Leftrightarrow \dot{u}(t) \in N_C(f(t) - A\dot{u}(t) - Bu(t) - (\mathcal{R}u)(t)) \\ &\Leftrightarrow \dot{u}(t) \in N_{C-f(t)}(-A\dot{u}(t) - Bu(t) - (\mathcal{R}u)(t)) \\ &\overset{(1.5)}{\Longleftrightarrow} -\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(A\dot{u}(t) + Bu(t) + (\mathcal{R}u)(t)), \end{aligned}$$

où $C(t) := f(t) - C = f(t) - \partial\varphi(0)$. Finalement, on déduit que le Problème 3.2 est équivalent au processus du rafle suivant : trouver une fonction $u : [0,T] \to \mathbb{H}$ telle que

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(A\dot{u}(t) + Bu(t) + (\mathcal{R}u)(t)), \text{ p.p } t \in [0,T] \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Pour terminer la preuve et afin d'appliquer le Théorème 2.16, il suffit que $A, B, \mathcal{R}$ et $C(t)_t$ vérifient ses hypothèses. Les conditions $(\boldsymbol{\mathcal{H}_A})$ et $(\boldsymbol{\mathcal{H}_B})$ sont des conséquences directes de (3.11), (3.12), $(\mathcal{H}_\mathcal{A})$ et $(\mathcal{H}_\mathcal{B})$ avec $\alpha = L_\mathcal{A}$ et $L_B = L_\mathcal{B}$. Aussi, comme $\mathfrak{R} \in C([0,T]; Q_\infty)$ alors, après un calcul simple basée sur l'inégalité suivante

$$\|\mathcal{E}\tau\|_\mathcal{V} \leq d\|\mathcal{E}\|_{Q_\infty}\|\tau\|_\mathcal{V}, \quad \text{pour tout } \mathcal{E} \in Q_\infty, \text{ et tout } \tau \in \mathcal{V},$$

on déduit que l'opérateur $\mathcal{R}$ défini par (3.13) est un opérateur avec mémoire, i.e., il vérifie l'hypothèse $(\boldsymbol{\mathcal{H}_\mathcal{R}})$ avec

$$L_\mathcal{R} = d \max_{t\in[0,T]} \|\mathfrak{R}(t)\|_{Q_\infty}.$$

En ce qui concerne le mouvement des ensembles $(C(t))_t$, soient $t, s \in [0,T]$ tels que $s \leq t$ alors

$$\begin{aligned} d_H(C(t),C(s)) &= \sup_{x\in\mathbb{H}} |d_{C(t)}(x) - d_{C(s)}(x)| = \sup_{x\in\mathbb{H}} |d_{f(t)-C}(x) - d_{f(s)-C}(x)| \\ &= \sup_{x\in\mathbb{H}} |d_C(x-f(t)) - d_C(x-f(s))| \\ &\overset{(1.1)}{\leq} \|f(t)-f(s)\|_{\mathbb{H}} = \Big\| \int_s^t \dot{f}(\theta)d\theta \Big\|_{\mathbb{H}} \leq \int_s^t \|\dot{f}(\theta)\|_{\mathbb{H}}\, d\theta \\ &= \int_0^t \|\dot{f}(\theta)\|_{\mathbb{H}}\, d\theta - \int_0^s \|\dot{f}(\theta)\|_{\mathbb{H}}\, d\theta = \eta(t) - \eta(s), \end{aligned}$$

où, $\eta : [0,T] \mapsto \mathbb{R}_+$ est une fonction définie par

$$\eta(t) = \int_0^t \|\dot{f}(\theta)\| d\theta, \quad \text{pour tout } t \in [0,T].$$

Comme $f \in W^{1,1}([0,T];\mathbb{H})$, on conclut que η est une fonction absolument continue et croissante. Cela implique que la multiapplication $t \mapsto C(t) : [0,T] \rightrightarrows \mathbb{H}$ remplit la condition $(\boldsymbol{\mathcal{H}_C})$.

Les conditions du Théorème 2.16 sont donc toutes démontrées et par suite, le Problème 3.2 admet une solution unique $u \in W^{1,\infty}([0,T];\mathbb{H})$ qui a une dépendance Lipschitzienne avec la condition initiale $u_0 \in \mathbb{H}$. ■

Bibliographie

[1] S. Adly, A Variational Approach to Nonsmooth Dynamics : Applications in Unilateral Mechanics and Electronics, Springer, Cham, (2017).

[2] S. Adly, T. Haddad, An implicit sweeping process approach to quasi-static evolution variational inequalities, SIAM J. Math. Anal., 50(2018), 761–778.

[3] S. Adly, B.K. Le, Unbounded second-order state-dependent Moreau's sweeping processes in Hilbert spaces, J. Optim. Theory Appl., 169(2016), 407–423.

[4] D. Azé, Éléments d'analyse convexe et variationnelle, Éditions Ellipses, Paris, (1997).

[5] V. Barbu, Analysis and Control of Nonlinear Infinite Dimensional Systems, Academic Press, Boston, (1993).

[6] H.Brezis, Analyse fonctionnelle, Théorie et applications, (1983).

[7] C. Carstensen, J. Gwinner, A theory of discretization for nonlinear evolution inequalities applied to parabolic Signorini problems, Ann. Mat. Pura Appl., 177(1999), 363–394.

[8] Z. Denkowski, S. Migorski, N. S. Papageorgiou, An Introduction to Nonlinear Analysis : Applications, Kluwer Academic Publishers, Boston, (2003).

[9] J.B. Hiriart-Urruty, C. Lemaréchal, Fundamentals of convex analysis, Springer, (2004).

[10] M. Kunze, M.D.M Marques, An Introduction to Moreau's Sweeping Process, In : Impacts in mechanical systems, Springer, Berlin, (2000), 1–60.

[11] S. Migorski, A. Ochal, M. Sofonea, A class of variational-hemivariational inequalities in relexive Banach spaces, Journal of Elasticity 127(2017), 151–178.

[12] S. Migorski, A. Ochal, M. Sofonea, History-dependent variationalhemivariational inequalities in contact mechanics, Nonlinear Anal. Real World Appl., 22(2015), 604–618.

[13] S. Migorski, A. Ochal, M. Sofonea, Nonlinear Inclusions and Hemivariational Inequalities. Models and Analysis of Contact Problems, Adv. Mech. Math. 26, Springer, NewYork, (2013).

[14] M.D.M Marques, Differential Inclusions in Nonsmooth Mechanical Problems : Shocks and Dry Friction, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., 9, Birkhäuser, Boston, (1993).

[15] J.J. Moreau, Multiplications à rétraction finie, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 1(1974), 169–203.

[16] J. J. Moreau, On unilateral constraints, friction and plasticity, in New Variational Techniques in Mathematical Physics, G. Capriz and G. Stampacchia, eds., C.I.M.E. II Ciclo 1973, Edizioni Cremonese, Rome, (1974), 171–322.

[17] J.J. Moreau, Rafle par un convexe variable I, Séminaire d'Analyse convexe de Montpellier, exposé 15 (1971).

[18] J. J. Moreau, Standard Inelastic Shocks and the Dynamics of Unilateral Constraints, Unilateral Problems in Structural Analysis, Springer, Vienna, (1985), 173–221.

[19] M. Sofonea, A. Matei, History-dependent quasivariational inequalities arising in Contact Mechanics, European Journal of Applied Mathematics 22(2011), 471–491.

[20] M. Sofonea, A. Matei, Mathematical Models in Contact Mechanics, London Math. Soc. Lecture Notes, Cambridge University Press, Cambridge, UK, (2012).

[21] M. Sofonea, S. Migorski, Variational-Hemivariational Inequalities with Applications, Monogr. Res. Notes Math., CRC Press, Boca Raton, FL, (2018).

[22] A.A. Tolstonogov, Polyhedral sweeping processes with unbounded nonconvex-valued perturbation, J. Differential Equations, 263(2017), 7965–7983.

[23] A.A. Tolstonogov, Sweeping process with unbounded nonconvex perturbation, Nonlinear Anal. Theory Methods Appl., 108(2014), 291–301.

[24] J. Van Tiel, Convex analysis. An introductory text, John wiley and sons, (1994).